



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



**EL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE EQUIVALENCIAS PARA NUDOS
MANSOS**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
RONALDO ÁLVAREZ RIVERA

BAJO LA DIRECCIÓN DE:
DR. JAIR REMIGIO JUÁREZ

CUNDUACÁN, TABASCO, MARZO DE 2025

Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, el día 25 del mes febrero del año 2025, el que suscribe **Ronaldo Álvarez Rivera** alumno del Programa de **Licenciatura en Matemáticas** con número de matrícula **182A31002**, adscrito a la **División Académica de Ciencias Básicas**, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del **grado de Licenciado en Matemáticas** y titulada **El Teorema de Equivalencia de Equivalencias para Nudos Mansos** dirigida por el **Dr. Jair Remigio Juárez**.

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 25 de febrero de 2025.



Ronaldo Álvarez Rivera

LICENCIATURA - EL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE EQUIVALENCIAS PARA NUDOS MANSOS

INFORME DE ORIGINALIDAD



3%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	tesis.ipn.mx Internet	472 palabras — 1%
2	ri.ues.edu.sv Internet	166 palabras — < 1%
3	es.wikibooks.org Internet	115 palabras — < 1%
4	dgsa.uaeh.edu.mx:8080 Internet	102 palabras — < 1%
5	uvadoc.uva.es Internet	92 palabras — < 1%
6	oldri.ues.edu.sv Internet	90 palabras — < 1%
7	qdoc.tips Internet	83 palabras — < 1%
8	arxiv.org Internet	75 palabras — < 1%
9	intro2pl0910.tiddlyspot.com Internet	71 palabras — < 1%



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

ESTUDIOS
TERMINALES

[Handwritten signature]



UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 26 de febrero de 2025.

**C. RONALDO ÁLVAREZ RIVERA
PASANTE DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PRESENTE**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“EL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE EQUIVALENCIAS PARA NUDOS MANSOS”**, dirigido por el Dr. Jair Remigio Juárez, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez, Dr. Gerardo Delgadillo Piñón, Dr. Alejandro Peregrino Pérez y Mtra. Laura del Carmen Sánchez Quiroga, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p. Archivo.

DIR´DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 25 de febrero de 2025.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTORES en la producción, creación y/o realización de la obra denominada El Teorema de Equivalencia de Equivalencias para Nudos Mansos.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES

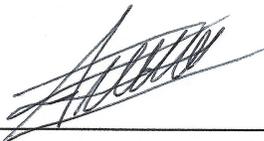


Ronaldo Álvarez Rivera



Dr. Jair Remigio Juárez

TESTIGOS



Andry Alexander Peregrino Rodríguez



lojany Abigail Valle Queb

Agradecimientos

Agradezco a Dios, Quien me ha dado vida, sabiduría, fortaleza y prudencia para seguir adelante y no dejar que mis inseguridades me detuvieran. Por siempre guiarme bajo el amparo de su Santo Espíritu y ser la fuerza en mi debilidad.

A mi madre Irma Rivera Cerino, a mi padre Manuel Álvarez Hernández y a mi hermana Irma Denise Álvarez Rivera, por amarme y apoyarme siempre incondicionalmente, así como también por darme un hogar al cual pertenecer. Gracias por cuidarme, creer en mí y no dejar que me rindiera.

Al Dr. Jair Remigio Juárez, por ayudarme a dirigir mi curiosidad con sus conocimientos y experiencia; por su diligencia, tiempo, paciencia y comprensión en la dirección de esta tesis. Sin su guía este trabajo no habría sido posible.

A mis amigos: Andry, Yoseline, Catherine, Karen, Iojany, José, Saúl y Matilde, quiénes me apoyaron durante los momentos cruciales que atravesé durante el desarrollo de este trabajo.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice general

I.	Resumen	1
II.	Abstract	2
III.	Introducción	3
IV.	Marco Teórico	5
V.	Justificación	7
VI.	Pregunta de Investigación	8
VII.	Hipótesis	8
VIII.	Objetivo general	9
IX.	Objetivos Específicos	9
X.	Metodología	10
1.	Preliminares	11
1.1	Topología general	11
1.2	Geometría afín	18
1.3	Convexidad	24
1.4	Juntas y conos	31
1.5	n -variedades con frontera	36
1.6	Simplejos	41
2.	Topología PL	51
2.1	Poliedros y funciones PL	51
2.2	Funciones simpliciales	64
2.3	Complejos simpliciales	65
2.4	Subdivisiones	70
2.5	Aproximación simplicial	80
2.6	Conexidad fuerte	84
2.7	Orientación	87
2.8	Auto-homeomorfismos de esferas que preservan la orientación	95
3.	Nudos	104
3.1	Nociones básicas	104

3.2	n -bolas y n -esferas combinatorias	112
3.3	Equivalencia combinatoria	124
3.4	Vecindades regulares	138
XI.	Resultados	152
XII.	Discusión	154
XIII.	Conclusiones y recomendaciones	156
	Referencias	156
	Anexo	159
	Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	159

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice de figuras

1.	Ejemplo de un nudo salvaje.	3
2.	Si $V(0, r) \subset C$ y $p \in C - \{0\}$, para $t \in (0, 1)$ se cumple que $V(tp, (1-t)r) \subset C$, caso $n = 2$	26
3.	Proyección radial para el caso $n = 2$	29
4.	Prueba de que \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}_{++}^2 son homeomorfos.	38
5.	Caso $n = 2$, lema 1.6.12.	47
6.	Un poliedro P no compacto y una inyección PL f cuya imagen no es un poliedro.	63
7.	Primer y segundo derivados de un complejo simplicial.	72
8.	Ilustración de la afirmación 2.4.6.	73
9.	Interpretación geométrica de la orientación de un simplejo.	88
10.	Orientaciones inducidas en las caras frontera por un simplejo orientado.	90
11.	Efecto de h_t sobre la imagen de f_0 . Para $t = 1$ se obtiene un nudo poligonal.	108
12.	(a) Imagen de f . (b) Bosquejo de un nudo poligonal ambiente isotópico a $f(\mathbb{S}^1)$	109
13.	Idea de la demostración de la proposición 3.1.12.	110
14.	Demostración del teorema de Alexander-Tietze, caso $n = 2$	114
15.	Auto-homeomorfismo simplicial f del 3-simplejo τ que mueve $x_1 \in \tau^\circ$ a $x_2 \in \tau^\circ$ y deja $\partial\tau$ fija.	115
16.	Resultado de estrellar $K(\rho^3)$ en $x_1 \in \langle e_0, e_1 \rangle^\circ$	116
17.	f manda ρ_1 a τ_1 y ρ_2 a τ_2 , $n = 3$	117
18.	Demostración del lema 3.2.9, caso $y_1 \in \tau_1^\circ$ y $y_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$	118
19.	Auto-homeomorfismo simplicial g de la 3-bola combinatoria convexa B , que manda $y_1 \in B^\circ$ a $y_2 \in B^\circ$ y fija ∂B	119
20.	Demostración del lema 3.2.10.	120
21.	Demostración del lema 3.2.11, caso $n = 3$	121
22.	Situación del lema 3.2.12, caso $n = 3$	122
23.	Existencia de $w \in [x, y] \cap \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$, caso $n = 3$	123
24.	Demostración del lema 3.2.13, caso $n = 3$	124
25.	Movida Δ	124
26.	Pasos para efectuar una movida Δ con 2-simplejos del primer derivado de $K(D)$	125
27.	(a) Movida Δ_1 . (b) y (c) Movidas Δ_2 . (d) Movida Δ_3	127
28.	Formas de desplazar un segmento vertical s a partir de segmentos adyacentes s' y s'' no verticales.	128
29.	Idea de la demostración del caso II.	129
30.	Construcción de una 2-bola combinatoria adecuada para D	132

31.	Situaciones hipotéticas donde (1) $\ y' - y\ = \delta'$ y (2) $\ y' - y\ > \delta'$	133
32.	Ilustración del conjunto F	133
33.	Homeomorfismo PL $f : B \rightarrow B''$ que es la identidad en D	134
34.	Construcción del 3-simplejo $\sigma' \subset E$ tal que $\text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$	135
35.	Visualización del homeomorfismo simplicial $g : B'' \rightarrow \sigma'$	135
36.	Construcción del 3-simplejo $\sigma'' \subset E$ tal que $\text{star}(v_2, \sigma') \subset (\sigma'')^\circ$	136
37.	Visualización del homeomorfismo simplicial $g' : B''' \rightarrow \sigma''$	136
38.	Caso II (2.1) del paso 3.	144
39.	Construcciones auxiliares para obtener v_3^{**}	145
40.	Homeomorfismo final h_1^1 del caso II (2.2) del paso 3.	146
41.	Homeomorfismo final h_1^1 del caso III (3.2) del paso 3.	147
42.	Modificación para el caso IV (4.1) del paso 3, situación similar a caso II (2.1) del paso 3.	148
43.	Modificación para el caso IV (4.1) del paso 3, situación similar al caso II (2.2) del paso 3.	149
44.	Existencia de $z_3 \in \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ \cap \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$	151

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
 México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

El Teorema de Equivalencia de Equivalencias para Nudos Mansos

I. Resumen

Un nudo es un encaje de la 1-esfera unitaria en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , o bien en su compactación en un punto, que es la 3-esfera unitaria. Se define un nudo poligonal como una curva poligonal cerrada simple en \mathbb{R}^3 o en la frontera del 4-simplejo estándar. Por su parte, un nudo es manso, si es ambiente isotópico a un nudo cuya imagen sea un nudo poligonal. Desde el punto de vista de la topología PL, un nudo manso puede considerarse como un encaje PL de la frontera del 2-simplejo estándar en la frontera del 4-simplejo estándar, puesto que la imagen de éste es un nudo poligonal. En este sentido, en la literatura se encuentran hasta tres nociones principales de equivalencia de nudos: PL-equivalencia de encajes PL a partir de PL-isotopías de ambiente, equivalencia combinatoria entre nudos poligonales mediante las llamadas movidas $\Delta^{\pm 1}$ y equivalencia positiva, cuando existe un auto-homeomorfismo PL de la frontera del 4-simplejo estándar que preserva la orientación y manda un nudo poligonal a otro.

En esta tesis daremos una demostración detallada del teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos, que establece la equivalencia de las tres nociones previamente mencionadas; seguiremos la prueba proporcionada por Burde *et al* (2014) [8] y presentaremos el fundamento teórico básico de la topología PL para su comprensión a nivel licenciatura.

Palabras clave: Nudo manso, nudo poligonal, PL-equivalencia, equivalencia combinatoria, equivalencia positiva.

II. Abstract

A knot is an embedding of the unitary 1-sphere into the three-dimensional space \mathbb{R}^3 , or its one-point compactification, that is the unitary 3-sphere. A polygonal knot is defined as a simple polygonal closed curve in \mathbb{R}^3 or in the boundary of the standard 4-simplex. On the other hand, a knot is tame, if it is ambient isotopic to a knot whose image is a polygonal knot. From the point of view of PL topology, a tame knot can be regarded as a PL embedding of the boundary of the standard 2-simplex into the boundary of the standard 4-simplex, since its image is a polygonal knot. In this sense, in literature there are up to three main notions of knots equivalence: PL-equivalence of PL embeddings through PL-ambient isotopy, combinatorial equivalence between polygonal knots by means of the so-called $\Delta^{\pm 1}$ -moves and positive equivalence, when there is an orientation-preserving PL auto-homeomorphism of the boundary of the standard 4-simplex that sends a polygonal knot to another.

In this thesis we will give a detailed demonstration of the equivalence of equivalences theorem for tame knots, which establishes the equivalence of the three notions previously mentioned; we will follow the proof provided by Burde *et al* (2014) [8] and we will present the basic theoretical foundation of PL topology for its understanding at the undergraduate level.

Keywords: Tame knot, polygonal knot, PL-equivalence, combinatorial equivalence, positive equivalence.

III. Introducción

Coloquialmente, un nudo es un pedazo de cuerda que ha sido atado con algún tipo de amarre. Matemáticamente hablando, el concepto de nudo captura la idea de cómo un espacio unidimensional (\mathbb{S}^1) puede ser encajado en un espacio tridimensional (\mathbb{R}^3). Asimismo, pensando en un nudo más bien como la imagen de un encaje $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, este no es otra cosa que un subespacio de \mathbb{R}^3 homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Sabiendo que, desde el punto de vista topológico, podemos considerar \mathbb{S}^3 como la compactación en un punto de \mathbb{R}^3 y, por ende, \mathbb{R}^3 como un subespacio de \mathbb{S}^3 , siempre podemos considerar un encaje $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Esto sigue siendo válido si reemplazamos \mathbb{S}^3 por cualquier 3-esfera.

El problema principal en el estudio de los nudos consiste en determinar cuándo dos nudos pueden ser considerados “iguales”, esto es, clasificar nudos bajo alguna noción adecuada. El que sean homeomorfos no es suficiente, puesto que todos los nudos son homeomorfos a \mathbb{S}^1 . Intuitivamente, podríamos entender que dos nudos son equivalentes, si es posible “desenredar” uno de ellos, a través de ciertos movimientos que no dañen al nudo, hasta obtener el otro. Una primera aproximación a esta noción de equivalencia radica en establecer una equivalencia de encajes conveniente, que se logra con el estudio de isotopías de ambiente, a partir de las cuales se tienen clases de equivalencias de encajes.

En su generalidad, el concepto de nudos como encajes $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ admite que se consideren como tal aquellos cuya imagen presenta un número infinito de anudamientos que convergen a un punto límite, los cuales reciben el nombre de nudos salvajes (véase figura 1). Estos casos patológicos de nudos no se corresponden con la idea intuitiva de un “nudo” en la realidad y no ahondaremos en su estudio en este trabajo.

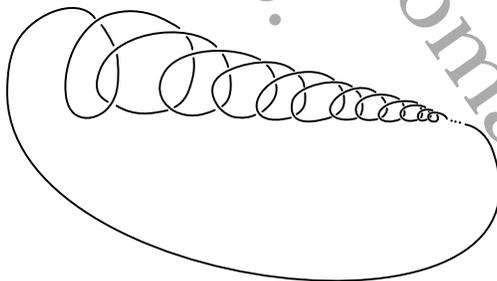


Figura 1: Ejemplo de un nudo salvaje.

Una forma de evitar tratar con nudos salvajes es recurrir a la topología PL^1 , de esta manera, restringiremos nuestro interés a nudos que puedan representarse mediante un número finito de segmentos de recta en \mathbb{R}^3 . Es posible hablar también de segmentos de recta en \mathbb{S}^3 , gracias a que la frontera del 4-simplejo estándar ($\partial\Delta^4$) es una triangulación de \mathbb{S}^3 . En este sentido, nos estaremos refiriendo a segmentos de recta en alguno de los 3-simplejos que componen a $\partial\Delta^4$ (Lickorish, 1997 [20]). Así, definimos un nudo poligonal como una

¹Del inglés *piecewise-linear*, traducido como “lineal por partes”.

unión finita de este tipo de segmentos que formen una curva poligonal cerrada simple. Continuando en esta línea, un nudo es manso, si está en la misma clase de equivalencia que un nudo cuya imagen sea un nudo poligonal, lo que nos permite transicionar a la categoría PL, considerando ahora nudos PL, los cuales son encajes PL entre poliedros compactos, más específicamente, de la frontera del 2-simplejo estándar en la frontera del 4-simplejo estándar. Por ende, se adapta la equivalencia de nudos con PL-isotopías de ambiente, teniéndose ahora una PL-equivalencia entre encajes PL.

Por sí mismos, los nudos poligonales dan cabida a una segunda idea de equivalencia. Aprovechando su naturaleza combinatoria: se definen ciertas movidas sobre 2-simplejos cuyas fronteras intersecan a un nudo poligonal en una o dos caras suyas, las movidas $\Delta^{\pm 1}$, de modo que dos nudos poligonales son combinatoriamente equivalentes, si éstos difieren por un número finito de este tipo de movidas. Todavía un tercer paradigma, relacionado con la orientación de simplejos y complejos simpliciales (tratado formalmente por la homología simplicial), nos dice que un par de nudos PL son equivalentes positivos, si existe un auto-homeomorfismo PL de $\partial\Delta^4$ que preserve la orientación y que al componerse con alguno de los nudos PL se obtenga el otro.

La ventaja e importancia de seguir el punto de vista de la topología PL es que nos da acceso al teorema de Alexander-Tietze, que es la versión PL del truco de Alexander; el teorema de Alexander-Schoenflies para encajes PL de 1-esferas combinatorias en 3-esferas combinatorias, que se corresponde con el teorema de la curva de Jordan en dimensión dos, pero el cual no es válido en dimensión tres para meros encajes topológicos (Burde *et al*, 2014 [8]); y la teoría de vecindades regulares aplicada a poliedros compactos contenidos en n -variedades PL como lo establece Hudson (1969) [13]. Aunado a una comprensión básica de los entresijos de la topología PL, estos resultados son la pauta para exhibir que las tres nociones presentadas no dan lugar a teorías diferentes, tal como lo formula el teorema de equivalencia de equivalencias. En este trabajo nos centraremos en presentar y desarrollar la teoría básica necesaria de la topología PL para fundamentar la demostración de este teorema dada en Burde *et al* (2014) [8], permitiendo, en la medida de lo posible, que sea accesible y comprensible para estudiantes de la licenciatura en matemáticas, y demás interesados en introducirse en la teoría de nudos, uno de los pilares esenciales en la investigación de la topología de dimensiones bajas.

IV. Marco Teórico

La topología PL surge en la década de los 20 como una rama de la topología geométrica, siendo Newman y Alexander de los primeros autores principales (Rourke y Sanderson, 1982 [34]). En cuanto a referentes “recientes” de la teoría y técnicas básicas de la topología PL, autores como Kawauchi (1996) [16], Bryant (2002) [6], Daverman y Venema (2009) [11], Rudyak (2016) [35] y Johnson (2018) [15] citan en su conjunto los trabajos de Zeeman (1963) [39], Hudson (1969) [13], Moise (1977) [26] y Rourke y Sanderson (1982) [34], entre otros. Además, Schultens (2014) [36] sugiere consultar Singer y Thorpe (1967) [37] y también a Moise (1977) [26] en el estudio de las nociones de convexidad, simplejos, complejos simpliciales y funciones simpliciales, etc., las cuales están íntimamente ligadas al estudio de poliedros y funciones PL, principal objeto de estudio en la topología PL. En el sentido de Rourke y Sanderson (1982) [34], los poliedros y las funciones PL se estudian a partir del concepto de vecindades cónicas con base compacta.

La posibilidad de estudiar los nudos desde un enfoque matemático fue quizás reconocido por primera vez por C. F. Gauss, en sus investigaciones de electrodinámica en 1833. Por otro lado, la teoría atómica de Lord Kelvin afirmaba que las propiedades químicas de los elementos estaban relacionados con el anudamiento que ocurría entre los átomos, lo que implicaba que era necesario una mejor comprensión sobre el concepto de equivalencia de nudos. Esto motivó a P. G. Tait a enlistar todos los nudos que pudieran dibujarse con un pequeño número de cruces y para 1900, junto con los trabajos de C. N. Little, se tuvo uno de los primeros intentos de clasificar nudos de hasta diez cruces, mediante métodos combinatorios que eran un tanto empíricos (Livingston, 1993 [22]; Rolfsen, 2003 [32]).

El desarrollo de la teoría clásica de nudos, ocurrida a mediados del siglo XIX, es atribuida a M. Dehn, J. W. Alexander, W. Burau, O. Schreier, E. Artin, K. Reidemeister, E. R. Van Kampen, H. Seifert, J. H. C. Whitehead, H. Tietze y R. H. Fox. La formalización matemática de la teoría y sus técnicas subyacentes, permitió modernizar el concepto de nudo como una clase de equivalencia de encajes de la 1-esfera unitaria en el espacio euclidiano tridimensional, o incluso en la 3-esfera unitaria (Rolfsen, 2003 [32]). Así, una primera noción de equivalencia de nudos está dada a partir de isotopías de ambiente entre encajes, que formalizan la noción de deformar continuamente un nudo en otro.

No obstante, la definición de nudos como encajes topológicos admiten la existencia de casos patológicos de nudos con anudamientos infinitos, los llamados nudos salvajes. Estos ejemplos, contrarios a la noción intuitiva, pueden evitarse estudiando nudos mansos, es decir, aquellos que sean equivalentes a curvas cerradas simples formadas por un número finito de segmentos de recta (nudos poligonales). Lo anterior nos lleva a trabajar con la categoría PL y, posteriormente, a plantear ciertas movidas admisibles entre nudos poligonales, originalmente formuladas por Reidemeister (1983) [31]. Específicamente, una movida Δ consiste en formar un triángulo con uno de los segmentos que conforman a un nudo poligonal y sustituirlo por los dos lados restantes, mientras que el proceso inverso es una movida Δ^{-1} . Entonces surge una segunda noción de equivalencia: dos nudos poligonales son combinatoriamente equivalentes, si existe una secuencia finita de movidas Δ o Δ^{-1} que deformen un nudo en otro

(Burde *et al*, 2014 [8]).

Por su parte, una tercera noción de equivalencia de nudos es reportada en Crowell (1977) [10], Kosniowski (1980) [17], Armstrong (1983) [4] y Kawauchi (1996) [16]: dos nudos son equivalentes si existe un auto-homeomorfismo de la 3-esfera unitaria que preserve la orientación y que lleve un nudo en el otro. Específicamente, en [16] ésta se llama equivalencia positiva, cuando los nudos y el auto-homeomorfismo respectivos son PL.

A pesar de existir tres nociones de equivalencia, en Burde *et al* (2014) [8] se demuestra el teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos, donde se establece que las tres nociones son equivalentes al tratarlas desde la perspectiva de la topología PL. La importancia de conocer el teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos radica en que es un paso para probar el teorema fundamental de Reidemeister, el cual permite una aproximación elemental a la teoría de nudos, ya que reduce el problema de determinar cuando dos nudos mansos son equivalentes a hallar una secuencia finita de las llamadas movidas de Reidemeister, que transformen el diagrama de un nudo en el diagrama del otro (Welsh, 1993 [38]; Adams, 2004 [1]). Los dos autores previamente citados, junto con Lickorish (1997) [20], remiten al trabajo de Burde y Zieschang (1985) [7], del cual en [8] se tiene una edición más actualizada, aunque en ambas ediciones se asume que el lector está familiarizado con la categoría PL, ya que no se presenta alguna sección que introduzca los conceptos que se están usando de la topología PL. En su apéndice, Kawauchi (1996) [16] presenta una versión del teorema de equivalencia de equivalencias, pero también atribuye las ideas a Burde y Zieschang (1985) [7]. Cabe mencionar que toda la bibliografía referenciada en esta sección está en lengua inglesa.

V. Justificación

Este trabajo pretende beneficiar a la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, en particular, a los alumnos que cursen la licenciatura en Matemáticas y profesores interesados en el estudio de la topología PL aplicada a la teoría de nudos.

Asimismo, se busca que esta tesis sirva para subsanar la escasa bibliografía en español accesible y actualizada que proporcione, por un lado, una introducción básica y elemental a la topología PL, y por otro lado, una demostración comprensible del teorema de equivalencia de equivalencias de nudos mansos, detallando los procedimientos encontrados en Burde *et al* (2014) [8]. De este modo, se conforma un compendio de diferentes fuentes bibliográficas con el objetivo de crear un contenido autosustentable y mantenerlo al nivel licenciatura, en la medida de lo posible. En este sentido, el material aquí presentado podría ser utilizado en el futuro para diseñar un curso introductorio de topología PL con aplicaciones a la teoría básica de nudos.

VI. Pregunta de Investigación

¿Son equivalentes las definiciones de equivalencia positiva y PL-equivalencia de nudos PL, y éstas a la equivalencia combinatoria para nudos poligonales?

Es decir, dados los nudos PL $i_0, i_1 : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$, ¿se cumple que i_0, i_1 son equivalentes positivos, si y sólo si i_0, i_1 son PL-equivalentes, si y sólo si los nudos poligonales $i_0(\partial\Delta^2), i_1(\partial\Delta^2)$ son combinatoriamente equivalentes?

VII. Hipótesis

Las definiciones de equivalencia positiva y PL-equivalencia de nudos PL, y la equivalencia combinatoria de nudos poligonales están relacionadas entre sí: cuando una es cierta, todas lo son.

VIII. Objetivo general

Fundamentar la demostración del teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos.

IX. Objetivos Específicos

- Entender los conceptos y resultados básicos de la Topología PL, tales como juntas, conos, poliedros, funciones PL, simplejos, complejos simpliciales y funciones simpliciales.
- Comprender la teoría básica de nudos: definición topológica de nudo, equivalencia de nudos mediante isotopías de ambiente, equivalencia combinatoria de nudos poligonales y equivalencia positiva de nudos PL.

X. Metodología

El tipo de investigación que se llevó a cabo fue básica, dado que se fundamentaron y detallaron las demostraciones de la literatura con respecto a resultados elementales de la topología PL y de la teoría de nudos, para lo cual se siguió el método deductivo.

Se estudiaron algunos conceptos y resultados básicos de Geometría Afín conforme a las primeras secciones del capítulo 15 de Roman (1992) [33]. Se complementó con el tratamiento de bases ordenadas equivalentes y, por consiguiente, de orientación de un espacio vectorial real, de acuerdo con la establecida para \mathbb{R}^n en Matveev (2006) [25]. Se detallaron algunos resultados útiles relativos a convexidad conforme a las demostraciones que aparecen en la sección 16 del capítulo 1 en Bredon (1993) [5]. Se revisaron los conceptos y resultados importantes relacionados a variedades con frontera, siguiendo el capítulo 2 de Lee (2000) [19], el capítulo 0 de Moise (1977) [26] y el capítulo 5 de Munkres (1991) [27].

Para comprender los conceptos y resultados básicos de Topología PL, se estudiaron principalmente los primeros dos capítulos de Rourke y Sanderson (1982) [34], pero se consultaron de forma complementaria el capítulo 4 de Singer y Thorpe (1967) [37], el capítulo 5 de Lee (2000) [19] y el capítulo 0 de Moise (1997) [26]. Asimismo, se profundizó en el desarrollo de algunos resultados concernientes a subdivisión de complejos simpliciales dados en las secciones 2, 3 y 4 del capítulo 1 de Hudson (1969) [13]. Para abordar el concepto de auto-homeomorfismos de esferas que preservan la orientación, se presentaron resultados básicos de la teoría de aproximación simplicial y de homología simplicial, basado en la sección 6.3, los capítulos 8 y 9 de Armstrong (1983) [4], así como en los primeros dos capítulos de Munkres (1984) [28].

El estudio de la teoría básica de nudos se basó en el capítulo 1 de Burde *et al* (2014) [8], aunque se complementó con el capítulo 10 de Armstrong (1983) [4], el capítulo 2 de Livingston (1993) [22], el capítulo 1 de Lickorish (1997) [20], el capítulo 2 de Welsh (1993) [38], el capítulo 0 de Kawachi (1996) [16], y los artículos de Hudson y Zeeman (1964) [14] y de Zeeman (1960) [40]. Algunas nociones y resultados relativos a la teoría de vecindades regulares se tomaron de las primeras cuatro secciones del capítulo 2 de Hudson (1969) [13] y se auxilió del capítulo 3 de Rourke y Sanderson (1982) [34]. Finalmente, la demostración del teorema de equivalencias de equivalencias se desarrolló de acuerdo con las proposiciones 1.8 y 1.11 de Burde *et al* (2014) [8].

1. Preliminares

1.1. Topología general

En esta sección repasaremos algunas definiciones y resultados básicos de espacios topológicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. La mayoría puede consultarse en cualquier libro de topología general. Más específicamente, la redacción de esta parte se ha guiado de Munkres (2000) [29], Lee (2000) [19] y Pérez *et al* (2011) [30].

Definición 1.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. La **bola abierta centrada en $x \in X$ y de radio $r > 0$** es el conjunto

$$V(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Asimismo, la **bola cerrada centrada en $x \in X$ y de radio $r > 0$** corresponde al conjunto

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Si Y es subespacio métrico de X , denotaremos las bolas abiertas y cerradas de Y como $V_Y(x, r)$ y $B_Y(x, r)$, respectivamente.

Definición 1.1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $x \in X$. Diremos que $V \subset X$ es una **vecindad de x en (X, τ)** , o simplemente una **vecindad de x en X** , si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$. En este contexto, U se dice que es una **vecindad abierta** de x en X . Al conjunto de vecindades de x en X lo denotaremos por $\mathcal{N}(x, X)$, o simplemente $\mathcal{N}(x)$, cuando no haya riesgo de confusión.

Más generalmente, sea $Y \subset X$ no vacío. Diremos que $V \subset X$ es una **vecindad** de Y , si existe $U \subset V$ abierto en X tal que $Y \subset U$.

Definición 1.1.3. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$. El **interior de A en X** es el conjunto

$$\text{Int}_X(A) := \{x \in X : \text{existe una vecindad } U \text{ de } x \text{ tal que } U \subset A\}.$$

La **cerradura de A en X** es el conjunto

$$\text{Cl}_X(A) := \{x \in X : \text{para toda vecindad } U \text{ de } x, U \cap A \neq \emptyset\}.$$

La **frontera de A en X** es el conjunto

$$\text{Fr}_X(A) := \text{Cl}_X(A) \cap \text{Cl}_X(X - A).$$

Si no hay riesgo de confusión, escribiremos simplemente $\text{Int}(A)$, $\text{Cl}(A)$ y $\text{Fr}(A)$.

Teorema 1.1.4. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces

- (1) $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) - \text{Int}(A)$.
- (2) $\text{Fr}(A) \cap \text{Int}(A) = \emptyset$.

$$(3) \text{Cl}(A) = \text{Int}(A) \cup \text{Fr}(A).$$

Cuando C es un conjunto cerrado, tenemos que $\text{Fr}(C) = C - \text{Int}(C)$, lo cual implica que $\text{Fr}(C) \subset C$.

Definición 1.1.5. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** sobre X , si para todo U abierto en Y se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

Es sabido que la composición de funciones continuas es continua.

Teorema 1.1.6 (Propiedades equivalentes de la continuidad). *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- (1) f es continua.
- (2) Para todo subconjunto cerrado A de Y , $f^{-1}(A)$ es cerrado en X .
- (3) Para todo $x \in X$ y cada vecindad abierta V de $f(x)$, existe una vecindad abierta U de x tal que $f(U) \subset V$.

Dado $x_0 \in X$, decimos que $f : X \rightarrow Y$ es **continua en x_0** , si para x_0 se cumple la condición (3) del teorema anterior. Debido a la equivalencia (1) \Leftrightarrow (3), se tiene que $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si f es continua en cada $x_0 \in X$. Además, observamos que cuando (X, d) y (Y, ρ) son espacios métricos, una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en $x_0 \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$ se cumple $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Nos serán útiles los siguientes resultados para construir funciones continuas:

Teorema 1.1.7. *Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Se cumple que:*

- (1) Si Z es un subespacio de Y tal que $f(X) \subset Z$ o bien si Y es subespacio de Z , entonces $f : X \rightarrow Z$ es continua.
- (2) Si $\emptyset \neq A \subset X$, entonces $f|_A : A \rightarrow Y$ es continua, considerando a A como subespacio de X .

Proposición 1.1.8. *Sea X un espacio métrico y Y un espacio vectorial real normado.*

- (1) Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ son continuas en $x_0 \in X$, entonces $(f + g) : X \rightarrow Y$ es también continua en x_0 .
- (2) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : X \rightarrow Y$ son continuas en $x_0 \in X$, entonces $(fg) : X \rightarrow Y$ es también continua en x_0 .
- (3) Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en $x_0 \in X$ y $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g} : X \rightarrow Y$ es también continua en x_0 .

Lema 1.1.9 (Lema del pegado). *Sea X un espacio topológico y suponga que $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde cada A_i es cerrado en X . Sea $f_i : A_i \rightarrow Y$ continua, $\forall i$. Para cualesquiera i, j , supongamos que $f_i|(A_i \cap A_j) = f_j|(A_i \cap A_j)$. Entonces existe una única función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{A_i} = f_i$ para cada i .*

Definición 1.1.10. Sean X, Y espacios topológicos. Diremos que $f : X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo**, si f es una biyección continua con inversa continua, y cuando $X = Y$, f es un **auto-homeomorfismo de X** . Los espacios topológicos X y Y son **homeomorfos**, si existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ y denotaremos $X \cong Y$.

Definición 1.1.11. La **n -bola unitaria** es el conjunto

$$\mathbb{B}^n := \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\},$$

donde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota a la norma euclidiana de \mathbb{R}^n .

Asimismo, la **n -esfera unitaria** es el conjunto

$$\mathbb{S}^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| = 1\}.$$

Un espacio homeomorfo a \mathbb{B}^n (respectivamente, \mathbb{S}^n) con la topología relativa de \mathbb{R}^n (respectivamente, \mathbb{R}^{n+1}) es una **n -bola** (respectivamente, una **n -esfera**).

Definición 1.1.12. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un **encaje**, si $f : X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

Definición 1.1.13. Diremos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es un **homeomorfismo local**, si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta $U \subset X$ tal que $f(U)$ es abierto en Y y $f|U : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.1.14. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo local. Se cumple que:

- (1) f es abierta.
- (2) Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

La siguiente proposición es un resultado clásico que básicamente nos dice que los homeomorfismos preservan cerraduras, interiores y fronteras de un espacio topológico a otro:

Proposición 1.1.15. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces:

- (1) $h(Cl_X(A)) = Cl_Y(h(A))$.
- (2) $h(Int_X(A)) = Int_Y(h(A))$.
- (3) $h(Fr_X(A)) = Fr_Y(h(A))$.

Observemos que si X, Y son espacios topológicos y $A \subset X, B \subset Y$, entonces $Cl_{X \times Y}(A \times B) = Cl_X(A) \times Cl_Y(B)$ y también $Int_{X \times Y}(A \times B) = Int_X(A) \times Int_Y(B)$. A partir de esto, se demuestra:

Proposición 1.1.16. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces

$$Fr_{X \times Y}(A \times B) = (Fr_X(A) \times Cl_Y(B)) \cup (Cl_X(A) \times Fr_Y(B)).$$

Usando inducción matemática se obtiene:

Corolario 1.1.17. Sean X_1, \dots, X_n espacios topológicos y A_i cerrado en X_i , $i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$Fr\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times Fr(A_i) \times A_{i+1} \times \dots \times A_n). \quad (1.1)$$

Definición 1.1.18. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es una pareja de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$.

Diremos que X es **conexo**, si X no tiene una separación, de lo contrario, X es **disconexo**.

Un subconjunto no vacío A de X se dice que es **conexo**, si A como subespacio de X es conexo.

Se sabe que las funciones continuas mandan conexos a conexos. Además, el producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos conexos es también conexo.

En lo sucesivo, convendremos en denotar al **intervalo unitario** como $I := [0, 1]$.

Definición 1.1.19. Sea X un espacio topológico. Dados dos puntos $x, y \in X$, un **arco de x a y** en X es una función continua $f : I \rightarrow X$ con $f(0) = x$ y $f(1) = y$. En este contexto, se dice que x y y son los **puntos extremos** del arco f .

Un subespacio A de X es **arcoconexo**, si para cualesquiera $a, b \in A$, existe un arco f con puntos extremos a y b tal que $f(I) \subset A$.

Todo espacio topológico arcoconexo es conexo, sin embargo, el recíproco no siempre se cumple. Asimismo, las funciones continuas preservan la arcoconexidad.

En otro orden de ideas, dado un espacio topológico X , podemos definir una relación de equivalencia en X : x y y están relacionados si y sólo si existe un arco f en X con $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Definición 1.1.20. Sea X espacio topológico. Una familia $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de subconjuntos de X se dice que es una **cubierta** de X , si $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Si cada U_α es abierto en X , entonces nos referiremos a \mathcal{A} como una **cubierta abierta** de X . Diremos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una **subcubierta** de X , si \mathcal{B} es una cubierta de X . Un espacio X es **compacto**, si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Además, $Y \subset X$ es **compacto**, si es compacto con la topología relativa de X .

El siguiente lema exhibe que no existen subespacios compactos “relativos”.

Lema 1.1.21. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $B \subset A$ es compacto en X si y sólo si B es compacto en A .

Demostración. Dado que $B \subset A$ y A es subespacio topológico de X , entonces B es subespacio de A si y sólo si es subespacio de X . Sea $\tau_B = \{B \cap U : U \in \tau\}$ la topología inducida por X en B . Debido a lo anterior, \mathcal{A} es una cubierta de B con abiertos en la topología de B como subespacio de A si y sólo si \mathcal{A} es una cubierta de B con abiertos en τ_B . Por lo tanto, B es compacto en X si y sólo si B es compacto en A . ■

Es sabido que las funciones continuas mandan compactos a compactos.

Definición 1.1.22. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$ es no vacío y $p \in X$, la **distancia de p a A** , se define por

$$d(p, A) := \inf \{d(p, a) : a \in A\}.$$

Si A es acotado, su **diámetro** se define como el número

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Por otro lado, si también $B \subset X$ es no vacío, la **distancia de A a B** está dada por

$$d(A, B) := \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Proposición 1.1.23. Sea (X, d) un espacio métrico, $F \subset X$ cerrado y $p \in X - F$. Entonces $d(p, F) > 0$.

Proposición 1.1.24. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subset X$ no vacíos tales que A es compacto y B es cerrado. Si $d(A, B) = 0$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. Dado que $d(A, B) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tales que $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Esto implica que podemos escoger sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A y B , respectivamente, tales que $d(a_n, b_n) \rightarrow 0$. Dado que A es compacto, entonces $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{a_k\}$ en A y todavía se cumple que $\{d(a_k, b_k)\}$ converge a 0. Por lo anterior, sin perder generalidad se puede asumir que $a_n \rightarrow a \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $d(a_n, a), d(a_n, b_n) \rightarrow 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(b_n, a) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq m,$$

es decir, $b_n \rightarrow a$ y, en vista de que B es cerrado, se tiene que $a \in B$. Por lo tanto, $a \in A \cap B$ y $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Una propiedad importante de los espacios topológicos compactos es que cualquier subconjunto cerrado suyo también es compacto. Por otro lado, en un espacio métrico se cumple que todo subespacio compacto es cerrado y acotado. La unión finita de conjuntos compactos es compacta. También el producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos compactos es compacto, cuando se considera la topología producto.

Proposición 1.1.25. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ compacto. Si $B \subset A$ es cerrado en X , entonces B es compacto en X .

Demostración. Dado que B es cerrado en X y $B \subset A$, se sigue que B es cerrado en A . Así, B es compacto en A . No obstante, como $B \subset A \subset X$, por el lema 1.1.21, concluimos que B es compacto en X . ■

Lema 1.1.26. Sea X un espacio métrico. Si $A \subset X$ es compacto, entonces $\text{Fr}(A)$ es compacto en X .

Demostración. Como A es compacto y X es un espacio métrico, tenemos que A es cerrado en X , luego $\text{Fr}(A) = A - \text{Int}(A) \subset A$. También, $\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(X - A)$, lo cual nos dice que $\text{Fr}(A)$ es cerrado en X . Así, gracias a la proposición 1.1.25, tenemos que $\text{Fr}(A)$ es compacto en X . ■

Una caracterización de los compactos en espacios métricos euclidianos es la siguiente:

Teorema 1.1.27 (Teorema de Heine-Borel). *Un subconjunto de un espacio métrico euclidiano es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Definición 1.1.28. Un espacio topológico X se dice que es **Hausdorff**, si para cada $x_1, x_2 \in X$ distintos existen vecindades abiertas $V_1 \in \mathcal{N}(x_1)$, $V_2 \in \mathcal{N}(x_2)$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Todo subespacio de un espacio Hausdorff también es Hausdorff. Además, la propiedad Hausdorff es un invariante topológico. Por su parte, el producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios Hausdorff, con la topología producto, es Hausdorff. Otra propiedad importante relacionada con la compacidad es que todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado. Esto es lo que particularmente pasa en los espacios métricos, ya que todo espacio métrico es Hausdorff. Además, en un espacio Hausdorff la intersección arbitraria de compactos es compacta.

Lema 1.1.29 (Lema de la función cerrada). *Suponga que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua de un compacto a un espacio Hausdorff.*

- (1) f es una función cerrada.
- (2) Si f es inyectiva, es un encaje.
- (3) Si f es biyectiva, es un homeomorfismo.

Teorema 1.1.30. *Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es una familia de espacios topológicos, $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ se considera con la topología producto y $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ con (X, τ) espacio topológico, entonces f es continua si y sólo si $f_\beta = \mathbf{p}_\beta \circ f$ es continua, $\forall \beta \in J$, donde $\mathbf{p}_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es la β -ésima función proyección (esto es, f es continua si y sólo si sus funciones coordenadas son continuas).*

Definición 1.1.31. Sean X, Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Definimos la **gráfica** de f como

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}.$$

Lema 1.1.32. *Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Entonces la función*

$$\begin{aligned} \Gamma : X &\rightarrow \Gamma(f) \\ x &\mapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $D_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$. Debido al teorema 1.1.30, sabemos que $\text{id}_X \times f : X \times X \rightarrow X \times Y$ es continua y, en consecuencia, $(\text{id}_X \times f)|_{D_X} : D_X \rightarrow \Gamma(f)$ es continua debido al teorema 1.1.7. Mostraremos que $\varphi : X \rightarrow D_X$ dada por $\varphi(x) = (x, x)$ es

continua, ya que así tendremos que $\Gamma = ((id_X \times f)|_{D_X}) \circ \varphi$ es continua. Debido al teorema 1.1.7, es suficiente mostrar que $\varphi : X \rightarrow X \times X$ es continua. Consideremos una proyección $\mathfrak{q} : X \times X \rightarrow X$. Entonces $\mathfrak{q} \circ \varphi : X \rightarrow X$ está dada por $\mathfrak{q}(\varphi(x)) = \mathfrak{q}(x, x) = x, \forall x \in X$, es decir, $\mathfrak{q} \circ \varphi = id_X$. Por ende, las funciones componentes de φ son la identidad en X , por lo que son continuas. Así, por el teorema 1.1.30, $\varphi : X \rightarrow X \times X$ es continua y, en consecuencia, $\varphi : X \rightarrow D_X$ es continua, mostrando que Γ es continua.

Ahora bien, consideremos la función proyección $\mathfrak{p} : X \times Y \rightarrow X$. Por el teorema 1.1.7, $\mathfrak{p}|_{\Gamma(f)}$ es continua. Además, es fácil ver que $\Gamma^{-1} = \mathfrak{p}|_{\Gamma(f)}$. Por lo tanto, Γ es un homeomorfismo. ■

Puede mostrarse que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$, mediante el homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dado por $h((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, donde $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tiene la topología producto y $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+m}$ tienen la topología usual (que coincide con la topología producto). De este modo, podemos identificar los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ como puntos en \mathbb{R}^{n+m} mediante $h(x, y)$. Así, para $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ escribiremos simplemente A para referirnos a $h(A) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y también $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Asimismo, los subconjuntos (subespacios, abiertos, cerrados, compactos, etc.) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con la topología producto los pensaremos indistintamente como subconjuntos (subespacios, abiertos, cerrados, compactos, etc.) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ o bien en \mathbb{R}^{n+m} con la topología usual.

Por otro lado, aplicando la proposición 1.1.15 y mediante la convención hecha en la notación, es consecuencia directa que, para cualquier $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$:

$$\text{Int}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}(A) = \text{Int}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A). \quad (1.2)$$

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}(A) = \text{Cl}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A). \quad (1.3)$$

$$\text{Fr}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}(A) = \text{Fr}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A). \quad (1.4)$$

Esto nos permite pensar indistintamente en los conceptos de interior, cerradura y frontera de A ya sea en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con la topología producto o bien en \mathbb{R}^{n+m} con la topología usual. De aquí en adelante, y a menos que se especifique lo contrario, cuando A sea subconjunto de \mathbb{R}^n denotaremos su interior, cerradura y frontera en \mathbb{R}^n simplemente como $\text{Int}(A)$, $\text{Cl}(A)$ y $\text{Fr}(A)$, respectivamente.

Finalmente, dado que h es un homeomorfismo, si X es un espacio topológico cualquiera, entonces $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow X$ es continua si y sólo si $f \circ h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$ es continua, por lo que también podemos tratar indistintamente las funciones continuas $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow X$ como funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$ (y viceversa). Del mismo modo, es claro que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, entonces $g : A \times B \rightarrow X$ es continua, considerando $A \times B$ como subespacio de \mathbb{R}^{n+m} , si y sólo si g también es continua pensando $A \times B$ como subespacio de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 1.1.33. Un espacio topológico X se dice que es **localmente compacto en $x \in X$** , si existe $K \in \mathcal{N}(x)$ tal que K es un subespacio compacto de X . Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos simplemente que X es **localmente compacto**.

Definición 1.1.34. Sea X un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Una **compactación en un punto de X** es un espacio topológico definido como sigue: sea ∞ cualquier objeto que no sea un punto de X y sea $X^* = X \cup \{\infty\}$. Definamos

$$\tau = \{U \subset X : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{U \subset X^* : X^* - U \text{ es subespacio compacto de } X\}.$$

No es complicado verificar que τ es una topología en X^* . Por otro lado, con esta topología se cumple que X^* es compacto y Hausdorff. Además, puede mostrarse que X tiene la topología de subespacio de X^* , y también es abierto y denso en X^* . Asimismo, si Y es un espacio topológico Hausdorff y compacto, tal que $Y - X$ consiste en un sólo punto y X es subespacio de Y , entonces existe un homeomorfismo $h : X^* \rightarrow Y$ cuya restricción a X es la identidad. Por ende, la compactación en un punto de X es única salvo homeomorfismos.

Proposición 1.1.35. *Sean X y Y espacios topológicos no compactos, Hausdorff y localmente compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un único homeomorfismo $\hat{f} : X^* \rightarrow Y^*$.*

Es sabido que la **proyección estereográfica** $\phi : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}},$$

es un homeomorfismo, donde $N = (0, \dots, 0, 1)$ denota el “polo norte” de \mathbb{S}^n . Note que $\mathbb{S}^n - \{N\}$ es un subespacio abierto de \mathbb{S}^n , no compacto, localmente compacto y Hausdorff, ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^n . Dado que \mathbb{S}^n es compacto, Hausdorff y difiere de $\mathbb{S}^n - \{N\}$ en un punto, es claro que \mathbb{S}^n es la compactación en un punto de $\mathbb{S}^n - \{N\}$. Luego la proyección estereográfica nos dice que \mathbb{S}^n es la compactación en un punto de \mathbb{R}^n .

1.2. Geometría afín

Los resultados que presentamos en esta sección sin demostración aparecen en el capítulo 15 de Roman (1992) [33], junto con las definiciones asociadas. Sin embargo, la definición de *transformación afín* se tomó del capítulo 5 de Lee (2000) [19], mientras que la definición de bases ordenadas *equivalentes* y, por consiguiente, de *orientación* de un espacio vectorial real, es de acuerdo con la establecida para \mathbb{R}^n en Matveev (2006) [25]. Trabajaremos con espacios vectoriales reales de dimensión finita, los cuales denotaremos por V y W .

Definición 1.2.1. Sean S un subespacio vectorial de V y $x \in V$. El conjunto

$$x + S := \{x + s : s \in S\}$$

se dice que es un **subespacio afín** de V .

Teorema 1.2.2. *Sean S y T subespacios vectoriales de V , así como $x, y \in V$.*

(1) *Las siguientes son equivalentes:*

- a) $x + S = y + S$.
- b) $x \in y + S$.
- c) $x - y \in S$.

Sean $X = x + S$ y $Y = y + T$. Entonces

(2) $S \subset T \Leftrightarrow v + X \subset Y$ para algún $v \in V$.

- (3) $S = T \Leftrightarrow v + X = Y$ para algún $v \in V$.
 (4) $X \cap Y \neq \emptyset, S \subset T \Rightarrow X \subset Y$.
 (5) $X \cap Y \neq \emptyset, S = T \Rightarrow X = Y$.

La parte (1) del teorema 1.2.2 nos dice que un subespacio afín $x + S$ puede representarse de varias formas y cualquier elemento del subespacio afín puede usarse como representante suyo. Por otro lado, si $y + T$ es un subespacio afín tal que $x + S = y + T$, entonces usando (3) con $v = 0$, obtenemos que $S = T$. Esto nos permite formular la siguiente:

Definición 1.2.3. Sea S un subespacio vectorial de V y sea $x \in V$. La **dimensión** del subespacio afín $x + S$ es $\dim(S)$. Un subespacio afín de dimensión $\dim(V) - 1$ se llama un **hiperplano de V** .

Observación 1.2.4. Sean S y T subespacios vectoriales de V , $x, y \in V$ tales que $x + S \subset y + T$. Entonces por (2) del teorema 1.2.2 obtenemos que $S \subset T$. Así, $\dim(x + S) = \dim(S) \leq \dim(T) = \dim(y + T)$.

Definición 1.2.5. Sean $x_1, \dots, x_n \in V$. La combinación lineal $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ con $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ y $\sum_{i=1}^n r_i = 1$, se dice que es una **combinación afín** de los vectores x_1, \dots, x_n .

Teorema 1.2.6. Un subconjunto X de V es un subespacio afín de V si y sólo si es cerrado bajo combinaciones afines, es decir, $x_1, \dots, x_n \in X$ y $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ implican $\sum_{i=1}^n r_i x_i \in X$.

El teorema 1.2.6 permite mostrar fácilmente que la intersección arbitraria no vacía de subespacios afines de V es un subespacio afín de V , y entonces podemos dar la siguiente:

Definición 1.2.7. Sea C un conjunto no vacío de vectores de V . La **envolvente afín** de C , denotada $\text{aff}(C)$, es la intersección de todos los subespacios afines que contienen a C . También nos referiremos a $\text{aff}(C)$ como el **subespacio afín generado** por C .

La envolvente afín de un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ se denota por $\text{aff}(v_1, \dots, v_n)$.

Ejemplo 1.2.8. Sea $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$. Sea $F_i = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{c_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$, donde $c_i \in [a_i, b_i]$. Entonces $\text{aff}(F_i)$ es un hiperplano de \mathbb{R}^n . Además, $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tendremos que $\text{aff}(F_i)$ será un hiperplano si mostramos que

$$\text{aff}(F_i) = c_i e_i + \text{gen}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n),$$

ya que, de ser así, tendremos que $\dim(\text{aff}(F_i)) = \dim(\text{gen}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)) = n - 1$. Denotemos $S = \text{gen}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$. Es claro que $F_i \subset c_i e_i + S$, por lo que $\text{aff}(F_i) \subset c_i e_i + S$. Ahora bien, sea $A = x + T$ un subespacio afín de \mathbb{R}^n tal que $F_i \subset A$. Como $c_i e_i + S \cap A \neq \emptyset$, por el teorema 1.2.2 (4), se seguirá que $c_i e_i + S \subset A$ siempre que $S \subset T$. Notemos que $p := (a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in F_i$, entonces por el teorema 1.2.2 (1) tenemos que $A = p + T$. Para cada $j \neq i$, sea $\lambda_j \in [a_j, b_j]$. Puesto que $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, c_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in F_i \subset A = p + T$, por el teorema 1.2.2 (1) se sigue que $\sum_{j \neq i} (\lambda_j - a_j) e_j = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, c_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) - p \in T$. En particular, si $\mu_j \in (a_j, b_j], \forall j \neq i$, entonces $(\mu_j - a_j) e_j = (\mu_j - a_j) e_j + \sum_{k \neq j, i} (a_k - a_k) e_k \in T$ y como $\mu_j - a_j \neq 0$, se cumple que $e_j \in T, \forall j \neq i$. Por ende, T es un espacio

vectorial que contiene a cada e_j con $j \neq i$, por lo que $S \subset T$. Esto demuestra que $c_i e_i + S \subset A$, para cualquier subespacio afín $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F_i \subset A$. Dicho de otro modo, $c_i e_i + S \subset \text{aff}(F_i)$. Por lo tanto, $\text{aff}(F_i) = c_i e_i + S$ y $\text{aff}(F_i)$ es un hiperplano en \mathbb{R}^n .

Por otro lado, consideremos F_i y F_j con $i \neq j$. Tenemos que $\text{aff}(C) = x + S$ para algunos $x \in \mathbb{R}^n$ y S subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Como $F_i \subset C$, entonces $\text{aff}(F_i) \subset \text{aff}(C)$ y, por el teorema 1.2.2 (2), $\text{gen}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \subset S$, es decir, $e_k \in S$ para todo $k \neq i$. De manera similar y dado que $i \neq j$, $F_j \subset C$ implica que $e_i \in S$. En consecuencia, S es un espacio vectorial que contiene a la base canónica de \mathbb{R}^n , esto es, $S = \mathbb{R}^n$ y, así, $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$. ■

Teorema 1.2.9. *Sea $C \subset V$ no vacío. La envolvente afín de C es el conjunto de todas las combinaciones afines de vectores en C , esto es,*

$$\text{aff}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in C, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n r_i = 1 \right\}.$$

Definición 1.2.10. Diremos que $x_0, \dots, x_n \in V$ son **afínmente independientes**, si la igualdad de combinaciones afines $\sum_{i=0}^n r_i x_i = \sum_{i=0}^n s_i x_i$ implica que $r_i = s_i$, para todo $i = 0, \dots, n$.

Teorema 1.2.11. *Sean $x_0, \dots, x_n \in V$. Las siguientes son equivalentes:*

- (1) $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ es linealmente independiente.
- (2) $X = \text{aff}(x_0, \dots, x_n)$ tiene dimensión n .
- (3) $x_i \notin \text{aff}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, para cada $i = 0, \dots, n$.
- (4) x_0, \dots, x_n son afínmente independientes.

Definición 1.2.12. Sean V y W espacios vectoriales. Una **transformación afín** es una función $f : V \rightarrow W$ de la forma $f(x) = T(x) + a$, donde $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal y $a \in W$.

Proposición 1.2.13. *Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación afín. Para cualesquiera $v_i \in V$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ se cumple que*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

Demostración. Escribamos $f(x) = T(x) + a$, donde $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal y $a \in W$. Sean $v_i \in V$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) + a = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a = \sum_{i=1}^n \lambda_i [T(v_i) + a] = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i). \quad \blacksquare$$

Proposición 1.2.14. Sea $f : V \rightarrow W$ dada por $f(x) = T(x) + a$, $\forall x \in V$, para algunos $a \in W$ y $T : V \rightarrow W$ transformación lineal. Sean $A \subset V$ y $y + S$ un subespacio afín de V . Se cumple que:

- (1) f es inyectiva en A si y sólo si T es inyectiva en A .
- (2) f es suprayectiva (respectivamente, biyectiva) si y sólo si T es suprayectiva (respectivamente, biyectiva).
- (3) f es inyectiva en $y + S$ si y sólo si f es inyectiva en S .
- (4) f es continua. Más aún, si f es inyectiva, entonces f es un encaje.

Demostración. Consideremos la traslación $g : W \rightarrow W$ dada por $g(w) = w + a$, la cual es una biyección. Tenemos que $f = g \circ T$, lo cual implica $g^{-1} \circ f = T$. En consecuencia:

(1) Como g^{-1} es inyectiva, si f es inyectiva en A , entonces $g^{-1} \circ f = T$ es inyectiva en A . Recíprocamente, ya que g es inyectiva, si T es inyectiva en A , obtenemos que $f = g \circ T$ es inyectiva en A .

(2) Análogo a (1), por el hecho que g^{-1} y g son suprayectivas, se tiene que f es suprayectiva si y sólo si T es suprayectiva. Debido a lo anterior, así como de (1), se sigue que f es biyectiva si y sólo si T es biyectiva.

(3) Sean $s_1, s_2 \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} f(s_1) = f(s_2) &\Leftrightarrow T(s_1) + a = T(s_2) + a \Leftrightarrow T(y) + T(s_1) + a = T(y) + T(s_2) + a \\ &\Leftrightarrow T(y + s_1) + a = T(y + s_2) + a \Leftrightarrow f(y + s_1) = f(y + s_2), \end{aligned}$$

de modo que f es inyectiva en $y + S$ si y sólo si f es inyectiva en S .

(4) Es claro que f es continua por ser composición de la traslación g y la transformación lineal T , las cuales son continuas. Cuando f es inyectiva, por (1) tenemos que T es inyectiva, luego $T : V \rightarrow T(V)$ es un isomorfismo, de manera que $T^{-1} : T(V) \rightarrow V$ es una transformación lineal y es continua. Por otro lado, la restricción de la traslación $g^{-1} : f(V) \rightarrow T(V)$ es continua. Así, notando que $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ es igual a la composición de funciones continuas $T^{-1} \circ g^{-1}$, obtenemos que f^{-1} es continua, de donde se concluye que $f : V \rightarrow f(V)$ es un homeomorfismo y, por lo tanto, un encaje. ■

Definición 1.2.15. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es **lineal**, si es la restricción de una transformación afín $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Por otro lado $f : A \rightarrow B$ es un **homeomorfismo lineal**, si f es una biyección lineal y f^{-1} es lineal.

Gracias a la proposición 1.2.14, se verifica fácilmente que un homeomorfismo lineal es, en efecto, un homeomorfismo, porque tanto éste como su inversa son restricciones de transformaciones afines, las cuales son continuas.

Proposición 1.2.16. Sea X un subespacio afín de \mathbb{R}^m con $n = \dim(X)$. Entonces existe un homeomorfismo lineal $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demostración. Como X es un subespacio afín de \mathbb{R}^m de dimensión n , existen $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y un subespacio vectorial V de \mathbb{R}^m , con $\dim(V) = n$, tal que $X = x_0 + V$. Podemos hallar entonces una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V . En caso que $n < m$, escogemos $v_{n+1}, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$ tales que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de \mathbb{R}^m . Definamos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} T(v_i) &:= e_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ T(v_i) &:= 0, \quad i = n + 1, \dots, m; \end{aligned}$$

y extendemos linealmente. Con lo anterior, podemos definir $\hat{h} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\hat{h}(y) = T(y) - T(x_0) = T(y - x_0)$. Notemos que $T(x_0) \in \mathbb{R}^n$ está fijo, por lo que \hat{h} es una transformación afín. Además, observemos que $S := T|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo y, por ende, es un homeomorfismo. Debido al teorema 1.2.2 (1), cuando $y \in X$, se sigue que $y - x_0 \in V$, luego $g : X \rightarrow V$ dada por $g(y) = y - x_0$, es un homeomorfismo, ya que se trata de la restricción de una traslación. De esta forma, $h := \hat{h}|_X = S \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una biyección lineal y un homeomorfismo.

Asimismo, notemos que $h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ es la restricción de la transformación afín

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ y &\mapsto S^{-1}(y) + x_0, \end{aligned}$$

por lo que h^{-1} también es lineal. ■

Lema 1.2.17. Sea X un subespacio afín de \mathbb{R}^m con $n = \dim(X)$ y sean $x \in X$, $r > 0$. Entonces para $U = V_X(x, r)$ se cumple que $\text{aff}(U) = X$.

Demostración. Por la proposición 1.2.16, existe un homeomorfismo lineal $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $h(U)$ es abierto en \mathbb{R}^n , por lo que podemos hallar $C := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tal que $C \subset h(U)$. Asimismo, note que $h(\text{aff}(U))$ es un subespacio afín de \mathbb{R}^n que contiene a $h(U)$, esto debido a que h es una biyección lineal. Observamos que $\text{aff}(h(U)) \subset h(\text{aff}(U))$. En el ejemplo 1.2.8 se vio que $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$, luego $\mathbb{R}^n = \text{aff}(C) \subset \text{aff}(h(U))$, esto es, $\text{aff}(h(U)) = \mathbb{R}^n$. Como $\text{aff}(h(U)) \subset h(\text{aff}(U))$, se tiene que $h(\text{aff}(U)) = \mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, $\text{aff}(U) = X$. ■

Definición 1.2.18. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y suponga que $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $C = (w_1, \dots, w_n)$ son bases ordenadas de V . Para cada i , tenemos que existen $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni} \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} w_j.$$

La matriz

$$M_{B,C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de **matriz de cambio** de la base B a la base C .

Enunciaremos sin demostración algunas propiedades importantes de la matriz de cambio de base (si el lector así lo desea, puede consultar el teorema 7 de la sección 2.4 y el teorema 13 de la sección 3.4 de Hoffman y Kunze (1991) [12]).

Teorema 1.2.19. *Sea V un espacio vectorial real y suponga que B, C y D son bases ordenadas de V . Entonces*

- (1) $M_{B,C}$ es invertible y $M_{B,C}^{-1} = M_{C,B}$.
- (2) $M_{B,D} = M_{C,D} \cdot M_{B,C}$.

Definición 1.2.20. Dos bases ordenadas B y C de V son **equivalentes**, si el determinante de la matriz de cambio de la base B a la base C es positivo.

Proposición 1.2.21. *La relación establecida en la definición anterior es una relación de equivalencia que descompone al conjunto de todas las bases ordenadas de V en dos clases de equivalencia.*

Demostración. Una base ordenada B de V es equivalente consigo misma porque $M_{B,B}$ es la matriz identidad. La simetría es consecuencia del teorema 1.2.19 (1), mientras que la transitividad es debido a (2) del mismo teorema. Por lo tanto, tenemos una relación de equivalencia definida en el conjunto de bases ordenadas de V .

Veremos en esta parte que solamente hay dos clases de equivalencia. Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V arbitraria. Entonces una de las clases de equivalencia corresponde a la clase de B (por reflexividad) y si $n > 1$, otra clase es la de $C = (v_n, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1)$, ya que $M_{B,C}$ se obtiene intercambiando en $M_{B,B} = I_{n \times n}$ la primera y la última columna, que corresponde a un cambio de signo en el determinante, luego $\det(M_{B,C}) = -1$. Cuando $n = 1$, tomamos $C = (-v_1)$, de donde se seguirá nuevamente que $\det(M_{B,C}) = -1$. Escojamos ahora cualquier base D de V . Ocurre entonces que $\det(M_{D,B}) > 0$ ó $\det(M_{D,B}) < 0$. En el primer caso, D está en la clase de B ; mientras que en el segundo caso, dado que

$$\det(M_{D,B}) = \det(M_{C,B} \cdot M_{D,C}) = \det(M_{C,B}) \cdot \det(M_{D,C}),$$

entonces $\det(M_{D,B}) < 0$ y $\det(M_{C,B}) < 0$ implican que $\det(M_{D,C}) > 0$, esto es, D está en la clase de C . Esto muestra que sólo hay dos clases de equivalencia. ■

Definición 1.2.22. Una **orientación** de V es una clase de bases ordenadas equivalentes. La orientación está usualmente dada especificando una base ordenada que represente la respectiva clase de equivalencia.

La proposición anterior nos indica que todo espacio vectorial real V (no trivial) tiene dos orientaciones distintas. Por convención, el espacio vectorial trivial tiene dos orientaciones, la orientación “+” y la orientación “-”.

Podemos extender fácilmente la noción de orientación a subespacios afines, usando el hecho que todo subespacio afín es el trasladado de un espacio vectorial real. Haciendo una analogía con el concepto de bases de espacios vectoriales de dimensión finita, planteamos la siguiente definición:

Definición 1.2.23. Sea $X = x + S$ un subespacio afín de V . Diremos que $B = \{x_0, \dots, x_n\} \subset X$ es una **base afín** de X , si x_0, \dots, x_n son afínmente independientes y $\text{aff}(B) = X$.

Proposición 1.2.24. Sea $X = x + S$ un subespacio afín de V , con $n = \dim(X) \geq 1$ y $B = \{x_0, \dots, x_n\} \subset X$. Entonces B es una base afín de X si y sólo si $B' = \{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ es una base de S .

Demostración. Dado que $x_0 \in X$, sabemos que $X = x_0 + S$, es decir, $S = X - x_0$. En consecuencia, $X = \text{aff}(B)$ si y sólo si $S = \text{gen}(B')$. Además, gracias al teorema 1.2.11, tenemos que x_0, \dots, x_n son afínmente independientes si y sólo si $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ son linealmente independientes. De aquí se concluye que B es una base afín de X si y sólo si B' es una base de S . ■

La proposición anterior es la pauta para definir la orientación de un subespacio afín $X = x + S$, a partir de la orientación de S inducida por una base afín de X .

Definición 1.2.25. Sean $B = (x_0, \dots, x_n)$ y $C = (y_0, \dots, y_n)$ bases afines ordenadas del subespacio afín $X = x + S$. Diremos que B y C son **equivalentes**, si $B' = (x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$ y $C' = (y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0)$ son bases ordenadas equivalentes de S . Lo anterior define una relación de equivalencia que descompone al conjunto de las bases afines ordenadas de X en dos clases de equivalencia. Así, una **orientación** de X es una clase de bases afines ordenadas equivalentes.

Cuando $X = \{x\}$, convendremos en decir que “ $+x$ ” y “ $-x$ ” son las dos posibles orientaciones de X .

1.3. Convexidad

En esta sección, el concepto de *convexidad* se recuperó del capítulo 0 de Moise (1977) [26]. Las proposiciones 1.3.9, 1.3.14 y 1.3.16 aparecen en la sección 16 del capítulo 1 en Bredon (1993) [5].

Definición 1.3.1. Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ es **convexo**, si para cada $v, w \in C$ se cumple que el segmento $[v, w] := \{\lambda v + (1 - \lambda)w : \lambda \in I\}$ está contenido en C .

Claramente la intersección arbitraria no vacía de conjuntos convexos es convexa y así podemos dar la siguiente:

Definición 1.3.2. Para cualquier $A \subset \mathbb{R}^m$ no vacío, la **envolvente convexa** de A , denotada $\text{conv}(A)$, se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A o, equivalentemente, como el conjunto convexo más pequeño que contiene a A .

Proposición 1.3.3. Toda transformación afín $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ manda segmentos a segmentos y, por lo tanto, convexos a convexos.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación afín y $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, usando la proposición 1.2.13,

$$\begin{aligned} f([x_1, x_2]) &= \{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) : \lambda \in I\} = \{\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) : \lambda \in I\} \\ &= [f(x_1), f(x_2)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora bien, sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $y_1, y_2 \in f(C)$. Entonces existen $x_1, x_2 \in C$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Dado que C es convexo, $[x_1, x_2] \subset C$, luego usando (1.5), tenemos que $[y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)] = f([x_1, x_2]) \subset f(C)$. Por lo tanto, $f(C)$ es convexo. ■

Lema 1.3.4. Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^m$ convexos. Entonces $C \times D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es convexo.

Demostración. Sean $(c_1, d_1), (c_2, d_2) \in C \times D$. Sea $\lambda \in I$. Notemos que

$$x := \lambda(c_1, d_1) + (1 - \lambda)(c_2, d_2) = (\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2, \lambda d_1 + (1 - \lambda)d_2).$$

Dado que $c_1, c_2 \in C$, $d_1, d_2 \in D$, siendo C y D convexos, se obtiene que $\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2 \in C$ y $\lambda d_1 + (1 - \lambda)d_2 \in D$. Así, $x \in C \times D$, por lo cual $C \times D$ es convexo. ■

Ejemplo 1.3.5. Sea $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Entonces $(x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r)$ y $[x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$ son convexos. Esto se sigue directamente del hecho que cualquier intervalo abierto (respectivamente cerrado) es un subconjunto convexo de \mathbb{R} y del lema 1.3.4.

Definición 1.3.6. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$ distintos. El **rayo desde p que pasa por q** (o simplemente, el **rayo de p a q**) es el conjunto

$$R(p, q) := \{p + t(q - p) : t \geq 0\}.$$

Por su parte, el **rayo desde p en la dirección de q** es el conjunto

$$\vec{R}(p, q) := \{p + tq : t \geq 0\}.$$

Observación 1.3.7. Es claro que si $s \in R(p, q) - \{p\}$, entonces $R(p, q) = R(p, s)$. Similarmente, si $s \in \vec{R}(p, q) - \{p\}$, se cumple que $\vec{R}(p, q) = R(p, s)$.

Proposición 1.3.8. Sea A un subespacio afín de \mathbb{R}^n . Si $a_1, a_2 \in A$ y $a_1 \neq a_2$, entonces $R(a_1, a_2) \subset A$.

Demostración. Esto es debido a que $R(a_1, a_2) \subset \text{aff}(a_1, a_2)$ y, por el teorema 1.2.6, concluimos que $R(a_1, a_2) \subset A$. ■

Proposición 1.3.9. Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, convexo y $0 \in \text{Int}(C)$, entonces cualquier rayo desde el origen interseca $\text{Fr}(C)$ en a lo más un punto.

Demostración. Sea $p \in C - \{0\}$. Sea $t \in (0, 1)$. Ya que $0 \in \text{Int}(C)$, existe $r > 0$ tal que $V(0, r) \subset C$. Observemos que $1 - t > 0$ y, puesto que $r > 0$, se sigue que $(1 - t)r > 0$. Mostraremos que $V(tp, (1 - t)r) \subset C$ (figura 2). Sea $x \in V(tp, (1 - t)r)$, entonces

$$\|x - tp\| < (1 - t)r \Rightarrow \left\| \frac{x - tp}{1 - t} \right\| < r \Rightarrow \frac{x - tp}{1 - t} \in V(0, r) \subset C.$$

Debido a que C es convexo, tenemos que $\left[\frac{x - tp}{1 - t}, p \right] \subset C$. Notemos que

$$x = (1 - t) \frac{x - tp}{1 - t} + tp \in \left[\frac{x - tp}{1 - t}, p \right] \Rightarrow x \in C.$$

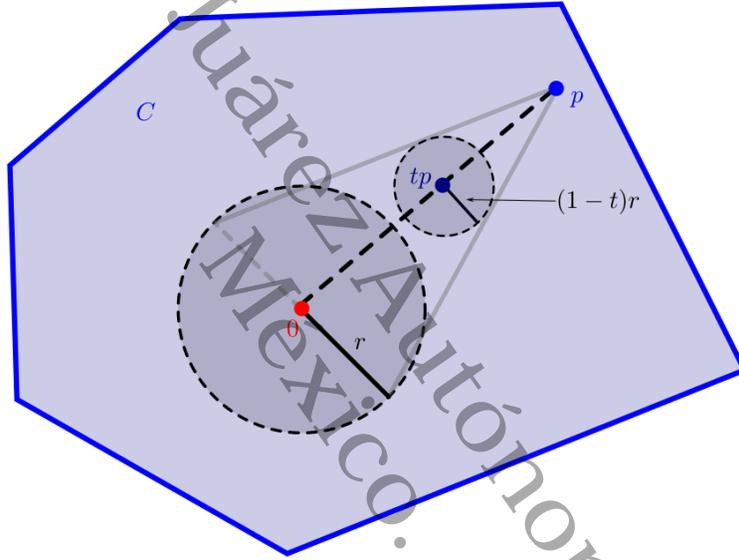


Figura 2: Si $V(0, r) \subset C$ y $p \in C - \{0\}$, para $t \in (0, 1)$ se cumple que $V(tp, (1 - t)r) \subset C$, caso $n = 2$.

Esto muestra que $V(tp, (1 - t)r) \subset C$ y, por ende, $tp \in \text{Int}(C)$. En consecuencia, para cualquier $p \in C - \{0\}$, es válido que $[0, p] - \{0, p\} \subset \text{Int}(C)$ (este hecho será retomado en la proposición 1.3.16).

Ahora bien, sea $R(0, q_0)$ un rayo desde el origen tal que $R(0, q_0) \cap \text{Fr}(C) \neq \emptyset$. Entonces existe un $s \geq 0$ tal que $sq_0 \in \text{Fr}(C)$. Probaremos que sq_0 es el único punto en $R(0, q_0) \cap \text{Fr}(C)$. Debido a que C es cerrado, tenemos que $\text{Fr}(C) = C - \text{Int}(C)$. Como $0 \in \text{Int}(C)$, se debe cumplir que $s > 0$, de otro modo tendríamos que $0 = sq_0 \in \text{Fr}(C) = C - \text{Int}(C)$, lo cual contradice $0 \in \text{Int}(C)$. De aquí, se sigue que $sq_0 \in C - \{0\}$. Supongamos que $0 < t < s$. Como $0 < \frac{t}{s} < 1$, es claro que $tq_0 \in [0, sq_0] - \{0, sq_0\}$, luego por lo anteriormente visto, $tq_0 \in \text{Int}(C)$, esto es, $tq_0 \notin \text{Fr}(C)$. Por su parte, si $t > s$ y suponiendo que $tq_0 \in \text{Fr}(C) \subset C - \{0\}$, entonces $sq_0 \in [0, tq_0] - \{0, tq_0\}$, por lo cual $sq_0 \in \text{Int}(C)$, contradiciendo que $sq_0 \in \text{Fr}(C)$. Por ende, $R(0, q_0) \cap \text{Fr}(C) = \{sq_0\}$. ■

Corolario 1.3.10. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Si $0 \in \text{Int}(C)$, entonces cualquier rayo desde el origen interseca $\text{Fr}(C)$ en exactamente un punto.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$. Veamos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $su \in \text{Fr}(C)$. Como C es compacto, entonces es acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M, \forall x \in C$. Sea $S = \{t \geq 0 : tu \in C\}$. Observemos que $0 \cdot u = 0 \in \text{Int}(C) \subset C$ por lo que $0 \in S$ y $S \neq \emptyset$. Además, si $tu \in C$, para algún $t \geq 0$:

$$\|tu\| \leq M \Rightarrow |t|\|u\| \leq M \Rightarrow |t| \leq M,$$

luego S está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $s = \sup S$. Sea $r > 0$. Queremos exhibir que $V(su, r) \cap C \neq \emptyset$. Dado que $s = \sup S$, de la definición de supremo se sigue que existe $t \in S$ tal que $s - r < t \leq s$, entonces $0 \leq s - t < r$, así,

$$\|su - tu\| = \|(s - t)u\| = |s - t|\|u\| = s - t < r,$$

por ende, $tu \in V(su, r)$ con $tu \in C$, lo cual muestra que $V(su, r) \cap C \neq \emptyset$.

Por otro lado,

$$\left\| \left(s + \frac{r}{2} \right) u - su \right\| = \left\| \left(s + \frac{r}{2} - s \right) u \right\| = \left\| \frac{r}{2} u \right\| = \frac{r}{2} < r \Rightarrow \left(s + \frac{r}{2} \right) u \in V(su, r).$$

Si $s = 0$, entonces tendríamos que $0 \in \text{Fr}(C)$, contradiciendo que $0 \in \text{Int}(C)$, luego $s > 0$. Como $\frac{r}{2} > 0$, entonces $s + \frac{r}{2} > 0$, por lo que, $\left(s + \frac{r}{2} \right) u \notin C$, obteniendo que $V(su, r) \cap (\mathbb{R}^n - C) \neq \emptyset$. Así, $su \in \text{Cl}(C) \cap \text{Cl}(\mathbb{R}^n - C) = \text{Fr}(C)$.

Finalmente, tomando un rayo arbitrario $R(0, p)$, el resultado se sigue aplicando lo anteriormente mostrado a $\frac{p}{\|p\|}$ y la proposición 1.3.9. ■

Observación 1.3.11. Si bien el corolario previo se demostró para $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto y convexo con $0 \in \text{Int}(C)$, usando una traslación es fácil probar que esto también es válido para cualquier compacto y convexo con interior no vacío.

Corolario 1.3.12. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo, con $c \in \text{Int}_{\text{aff}(C)}(C)$. Entonces cualquier rayo en $\text{aff}(C)$ desde c interseca a $\text{Fr}_{\text{aff}(C)}(C)$ en exactamente un punto.

Demostración. Sea $x \in \text{aff}(C) - \{c\}$ y sea $m = \dim(\text{aff}(C))$. Por la proposición 1.2.16, existe un homeomorfismo lineal $h : \text{aff}(C) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Como $c, x \in \text{aff}(C)$ y $c \neq x$, la proposición 1.3.8 garantiza que $R(c, x) \subset \text{aff}(C)$. De este modo, se verifica fácilmente que $h(R(c, x)) = R(h(c), h(x))$. Debido a esto, $h(R(c, x))$ es un rayo desde $h(c) \in h(\text{Int}_{\text{aff}(C)}(C))$. Dado que h es un homeomorfismo, entonces $h(\text{Int}_{\text{aff}(C)}(C)) = \text{Int}(h(C))$ y $h(C)$ es compacto. Usando ahora que C es convexo y que h es la restricción de una transformación afín, por la proposición 1.3.3 se tiene que $h(C)$ es convexo. Así, empleando el corolario 1.3.10, existe un único $w \in h(R(c, x)) \cap \text{Fr}(h(C))$. En consecuencia, como h^{-1} es también un homeomorfismo, $\{h^{-1}(w)\} = R(c, x) \cap \text{Fr}_{\text{aff}(C)}(C)$, que demuestra lo deseado. ■

Observación 1.3.13. Sea X un subespacio afín de \mathbb{R}^m y sean $x \in X$, $r > 0$. Entonces para $U = B_X(x, r)$, se cumple que $\text{aff}(U) = X$, esto debido al lema 1.2.17. Se tiene que U es convexo por ser intersección de convexos. También se verifica que U es compacto porque es un subconjunto cerrado del compacto $B(x, r)$. Además, $x \in \text{Int}_X(U)$ porque $x \in V_X(x, r)$. Por lo tanto, el corolario 1.3.12 asegura que cualquier rayo en X desde x interseca a $\text{Fr}_X(U)$ en tan sólo un punto.

Proposición 1.3.14. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo y compacto con $0 \in \text{Int}(C)$. Entonces la función $f : \text{Fr}(C) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Tenemos que la función $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es continua. Notemos que $g(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{S}^{n-1}$, luego por el teorema 1.1.7 tenemos que $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es continua. Dado que $0 \in \text{Int}(C)$, entonces $0 \notin \text{Fr}(C)$ y $\text{Fr}(C) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$. Así, ya que $f = g|_{\text{Fr}(C)}$, por el teorema 1.1.7, f es continua.

Ahora bien, sean $x_1, x_2 \in \text{Fr}(C)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} \Rightarrow x_2 = \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} x_1 \Rightarrow x_2 \in R(0, x_1).$$

En consecuencia, $x_1, x_2 \in \text{Fr}(C) \cap R(0, x_1)$ y, por la proposición 1.3.9, debe ocurrir que $x_1 = x_2$. Esto muestra que f es inyectiva.

Si $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $\|y\| = 1$, luego por el corolario 1.3.10 existe un $s > 0$ tal que $sy \in \text{Fr}(C)$ y $f(sy) = \frac{sy}{\|sy\|} = \frac{sy}{s} = y$. Por lo tanto, f es suprayectiva. Por el lema 1.1.26, ya que C es compacto, entonces $\text{Fr}(C)$ es compacto. Dado que $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es Hausdorff y como f es biyectiva y continua, por el lema de la función cerrada concluimos que f es un homeomorfismo. ■

Observación 1.3.15. En el contexto de la proposición 1.3.14, $f^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{Fr}(C)$ está dada por $f^{-1}(x) = sx$, donde $0 < s = \sup\{t \geq 0 : tx \in C\}$. Asimismo, f^{-1} es continua debido a que f es un homeomorfismo.

Proposición 1.3.16. Sea C compacto y convexo en \mathbb{R}^n con interior no vacío. Entonces existe un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya restricción $H|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow C$ es un homeomorfismo, llamado **proyección radial**, que lleva \mathbb{S}^{n-1} a la frontera de C .

Demostración. Sabemos que la compacidad y convexidad se preservan bajo traslaciones, las cuales recordemos que también son homeomorfismos. Por lo anterior, escogiendo $c \in \text{Int}(C)$ y definiendo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = x - c$, se tiene que $\varphi(C)$ es compacto, convexo y $0 \in \text{Int}(\varphi(C))$. De modo que, si la proposición es cierta para $\varphi(C)$, con $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el homeomorfismo en cuestión, entonces $H' := \varphi^{-1} \circ H$ es un auto-homeomorfismo de \mathbb{R}^n tal que $H'|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow C$ es un homeomorfismo y $H'(\mathbb{S}^{n-1}) = \varphi^{-1}(\text{Fr}(\varphi(C))) = \text{Fr}(\varphi^{-1}(\varphi(C))) = \text{Fr}(C)$. Así, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $0 \in \text{Int}(C)$.

Consideremos $f : \text{Fr}(C) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ y $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como en la proposición 1.3.14. Debido a que $f^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{Fr}(C)$ y g son continuas, se sigue que $f^{-1} \circ g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \text{Fr}(C)$ es

continua, luego por el teorema 1.1.7 $f^{-1} \circ g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua. Como $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(x) = \|x\|$ es continua, por la proposición 1.1.8, $k = h \cdot (f^{-1} \circ g) : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $k(x) = \|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right)$ es continua.

Definamos $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x) = \begin{cases} k(x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

cuyo efecto se ilustra en la figura 3.

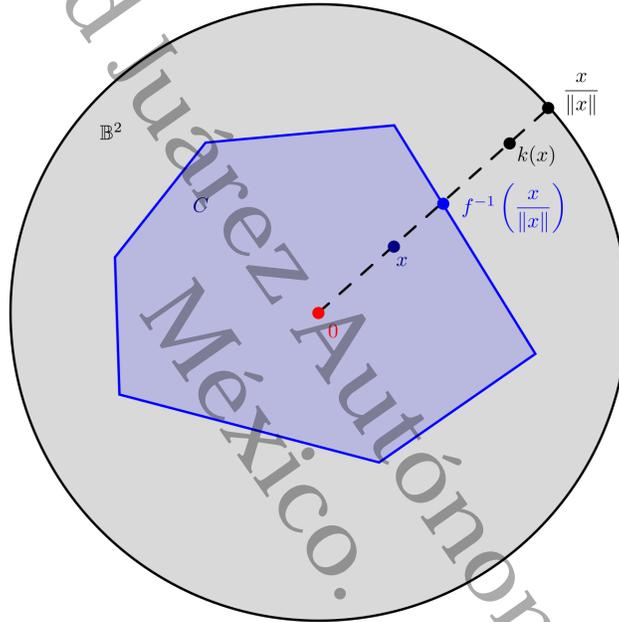


Figura 3: Proyección radial para el caso $n = 2$.

Debido a la continuidad de k , H es continua excepto quizás en 0. Para ver que también sigue la continuidad en este punto, sea $\varepsilon > 0$. Como C es compacto, entonces es cerrado y acotado. Esto nos dice que $\text{Fr}(C) \subset C$ y existe $M > 0$ tal que $\|y\| \leq M, \forall y \in C$. Ya que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se cumple que $f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \in \text{Fr}(C) \subset C$, entonces

$$\|H(x) - H(0)\| = \|k(x)\| = \left\| \|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| \left\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq M \|x\|,$$

donde $M \|x\| < \varepsilon$ si y sólo si $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M}$. De este modo, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M}$ se cumple que $\|H(x) - H(0)\| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Por ende, H es continua.

Para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, tenemos que $\|x\| > 0$ y $f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \neq 0$, por lo cual $k(x) \neq 0$, de manera

que $k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$. Definamos $l : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por $l(x) = \frac{x}{r}$, donde $r = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\} > 0$. A continuación, probaremos que $l = k^{-1}$:

Sea $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces $f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{sx}{\|x\|}$ para $s = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\} > 0$ y

$$l(k(x)) = l \left(\|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right) = \frac{\|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right)}{r} = \frac{\|x\| \frac{sx}{\|x\|}}{r} = \frac{sx}{r},$$

donde $r = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{k(x)}{\|k(x)\|} \in C \right\} = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\} = s$. Por ende, $l(k(x)) = x$.

Ahora bien, sea $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Como antes, $l(x) = \frac{x}{r}$, $r = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\} > 0$, luego $f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{rx}{\|x\|}$ y

$$k(l(x)) = k \left(\frac{x}{r} \right) = \left\| \frac{x}{r} \right\| f^{-1} \left(\frac{\frac{x}{r}}{\left\| \frac{x}{r} \right\|} \right) = \frac{\|x\|}{r} f^{-1} \left(\frac{\frac{x}{r}}{\frac{\|x\|}{r}} \right) = \frac{\|x\|}{r} f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{\|x\|}{r} \frac{rx}{\|x\|} = x.$$

Por lo tanto, $l = k^{-1}$ y $k : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es biyectiva. A su vez, esto demuestra que H es biyectiva.

Para concluir que H es un homeomorfismo, veremos que H es un homeomorfismo local y entonces, por la proposición 1.1.14, como H es continua y biyectiva tendremos que H es un homeomorfismo. Observemos que $H(\mathbb{S}^{n-1}) = k(\mathbb{S}^{n-1}) = f^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \text{Fr}(C)$. Probaremos que $H(\mathbb{B}^n) = C$, para obtener que $H(V(0, 1)) = H(\mathbb{B}^n - \mathbb{S}^{n-1}) = \text{Int}(C)$. Verifiquemos que $k(\mathbb{B}^n - \{0\}) \subset C - \{0\}$. Sea $x \in \mathbb{B}^n - \{0\}$. Observemos que $0 < \|x\| \leq 1$. Si $\|x\| = 1$, entonces $k(x) = f^{-1}(x) \in \text{Fr}(C) \subset C - \{0\}$. Supongamos que $0 < \|x\| < 1$. Entonces $f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{sx}{\|x\|}$, donde $0 < s = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\}$. Note que $sx = \|x\| s \frac{x}{\|x\|} \in \left[0, s \frac{x}{\|x\|} \right] - \left\{ 0, s \frac{x}{\|x\|} \right\}$ y, por lo visto en la proposición 1.3.9,

$$k(x) = \|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \|x\| \frac{sx}{\|x\|} = sx \in \text{Int}(C) \subset C.$$

Dado que $k(x) = sx \neq 0$, obtenemos que $k(x) \in C - \{0\}$. Así, $k(\mathbb{B}^n - \{0\}) \subset C - \{0\}$.

Ahora, sea $x \in C - \{0\}$. Tenemos que $l(x) = \frac{x}{r}$ con $r = \sup \left\{ t \geq 0 : t \frac{x}{\|x\|} \in C \right\} > 0$.

Notemos que $\|x\| \frac{x}{\|x\|} = x \in C$, por lo cual $\|x\| \leq r$ y $0 < \left\| \frac{x}{r} \right\| = \frac{\|x\|}{r} \leq 1$, es decir,

$l(x) = \frac{x}{r} \in \mathbb{B}^n - \{0\}$. Así, $l(C - \{0\}) \subset \mathbb{B}^n - \{0\}$. Puesto que $l = k^{-1}$, lo anterior nos dice que $C - \{0\} \subset k(\mathbb{B}^n - \{0\})$. En consecuencia, $H(\mathbb{B}^n - \{0\}) = k(\mathbb{B}^n - \{0\}) = C - \{0\}$ y $H(0) = 0$. Así, $H(\mathbb{B}^n) = C$ y $H(V(0, 1)) = \text{Int}(C)$.

Finalizaremos probando que H es un homeomorfismo local. Para cualquier $\varepsilon > 0$, consideremos el homeomorfismo $h_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = \varepsilon x$. Notar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,

$$H(h_\varepsilon(x)) = H(\varepsilon x) = \|\varepsilon x\| f^{-1} \left(\frac{\varepsilon x}{\|\varepsilon x\|} \right) = \varepsilon \|x\| f^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \varepsilon H(x) = h_\varepsilon(H(x))$$

y también, es fácil ver que $H(h_\varepsilon(0)) = h_\varepsilon(H(0))$, luego $H \circ h_\varepsilon = h_\varepsilon \circ H$. De este modo, usando que $H(\mathbb{B}^n) = C$,

$$H(B(0, \varepsilon)) = H(h_\varepsilon(\mathbb{B}^n)) = h_\varepsilon(H(\mathbb{B}^n)) = h_\varepsilon(C).$$

Gracias a que $h_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo y $H(V(0, 1)) = \text{Int}(C)$, se demuestra que $H(V(0, \varepsilon)) = H(\text{Int}(h_\varepsilon(\mathbb{B}^n))) = H(h_\varepsilon(\text{Int}(\mathbb{B}^n))) = h_\varepsilon(H(V(0, 1))) = \text{Int}(h_\varepsilon(C))$. Denotando $D = h_\varepsilon(C)$, puesto que H es continua y biyectiva, tenemos que $H|_{B(0, \varepsilon)} : B(0, \varepsilon) \rightarrow D$ es también continua y biyectiva. Además, como $B(0, \varepsilon)$ es compacto y D es Hausdorff, el lema de la función cerrada garantiza que $H|_{B(0, \varepsilon)}$ es un homeomorfismo, luego la restricción $H|_{V(0, \varepsilon)} : V(0, \varepsilon) \rightarrow \text{Int}(D)$ es un homeomorfismo, donde $V(0, \varepsilon)$ y $\text{Int}(D)$ son abiertos en \mathbb{R}^n . De esta parte tenemos que, en particular, $H|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow C$ es un homeomorfismo (tomando $\varepsilon = 1$).

Finalmente, si $x \in \mathbb{R}^n$, podemos tomar un $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V(0, \varepsilon)$, de manera que $V(0, \varepsilon)$ es una vecindad abierta de x para la cual, por lo mostrado en el párrafo anterior, $H|_{V(0, \varepsilon)} : V(0, \varepsilon) \rightarrow \text{Int}(D)$ es un homeomorfismo con $\text{Int}(D)$ abierto en \mathbb{R}^n . En consecuencia, H es un homeomorfismo local y se concluye que H es un homeomorfismo. ■

1.4. Juntas y conos

Las definiciones de esta sección y la proposición 1.4.3 se tomaron de los capítulos 1 y 2 de Rourke y Sanderson (1982) [34]. De manera complementaria, se consultó la sección 4.2 de Singer y Thorpe (1967) [37].

Definición 1.4.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^m$. La *junta* de A y B , es la unión de todos los segmentos $[a, b]$ tales que $a \in A$ y $b \in B$, es decir,

$$AB := \{\lambda a + (1 - \lambda)b : a \in A, b \in B, \lambda \in I\}.$$

Si $A = \emptyset$, definimos $AB := B$. Si $A = \{a\}$ es un conjunto que consiste en un punto, simplemente escribiremos aB .

Observación 1.4.2. En el contexto de la definición previa, es fácil ver que

$$AB = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B, \text{ con } \lambda, \mu \geq 0 \text{ y } \lambda + \mu = 1\}.$$

Proposición 1.4.3. La operación junta es conmutativa y asociativa. Además, para $A_0, A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^m$, definiendo inductivamente $A_0 A_1 \cdots A_n := (A_0 A_1 \cdots A_{n-1}) A_n$, entonces

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, a_i \in A_i \right\}. \quad (1.6)$$

Demostración. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^m$. Es claro que $AB = BA$ por la conmutatividad de la suma.

Mostraremos ahora que $A(BC) = (AB)C$. Consideremos el conjunto

$$S := \{\lambda a + \mu b + \eta c : \lambda, \mu, \eta \geq 0, \lambda + \mu + \eta = 1; a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Veremos que $A(BC) \subset S \subset (AB)C \subset A(BC)$ para obtener $A(BC) = S = (AB)C$.

Sean $a \in A$, $x \in BC$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Como $x \in BC$, existen $b \in B$, $c \in C$ y $\beta, \gamma \geq 0$, $\beta + \gamma = 1$ tales que $x = \beta b + \gamma c$. De este modo,

$$\lambda a + \mu x = \lambda a + \mu(\beta b + \gamma c) = \lambda a + \mu\beta b + \mu\gamma c$$

con $\lambda, \mu\beta, \mu\gamma \geq 0$ y $\lambda + \mu\beta + \mu\gamma = \lambda + \mu(\beta + \gamma) = \lambda + \mu = 1$. Por lo tanto, $A(BC) \subset S$.

Ahora bien, sean $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ y $\lambda, \mu, \eta \geq 0$ con $\lambda + \mu + \eta = 1$. Probaremos que $\lambda a + \mu b + \eta c \in (AB)C$. Si $\eta = 1$, entonces $\lambda + \mu = 0$ y ya que $\lambda, \mu \geq 0$, tenemos que $\lambda = \mu = 0$. Por ende, $\lambda a + \mu b + \eta c = c \in (AB)C$. Supongamos el caso $1 - \eta > 0$. Notemos que

$$\lambda a + \mu b + \eta c = (1 - \eta) \left(\frac{\lambda}{1 - \eta} a + \frac{\mu}{1 - \eta} b \right) + \eta c, \quad (1.7)$$

donde $\lambda, \mu \geq 0$ y $1 - \eta > 0$ implican $\frac{\lambda}{1 - \eta}, \frac{\mu}{1 - \eta} \geq 0$. Dado que $\lambda + \mu + \eta = 1$, entonces $\frac{\lambda + \mu}{1 - \eta} = 1$. Así, $\frac{\lambda}{1 - \eta} a + \frac{\mu}{1 - \eta} b \in AB$, luego de (1.7) se obtiene $\lambda a + \mu b + \eta c \in (AB)C$. Por lo tanto, $S \subset (AB)C$.

En esta parte, sean $y \in AB$, $c \in C$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Debido a que $y \in AB$, existen $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $a \in A$, $b \in B$ tales que $y = \alpha a + \beta b$. En consecuencia,

$$\lambda y + \mu c = \lambda(\alpha a + \beta b) + \mu c = \lambda\alpha a + \lambda\beta b + \mu c. \quad (1.8)$$

Como $\lambda\alpha + \lambda\beta + \mu = 1$ y $\alpha + \beta = 1$, observe que $\lambda\alpha = 1$ implica $\lambda\alpha a + \lambda\beta b + \mu c = a \in A(BC)$. Supongamos ahora que $1 - \lambda\alpha = \lambda\beta + \mu > 0$. Tenemos que

$$\lambda\alpha a + \lambda\beta b + \mu c = \lambda\alpha a + (1 - \lambda\alpha) \left(\frac{\lambda\beta}{1 - \lambda\alpha} b + \frac{\mu}{1 - \lambda\alpha} c \right), \quad (1.9)$$

con $\frac{\lambda\beta}{1 - \lambda\alpha}, \frac{\mu}{1 - \lambda\alpha} \geq 0$, y $\frac{\lambda\beta}{1 - \lambda\alpha} + \frac{\mu}{1 - \lambda\alpha} = 1$. Esto nos dice que $\frac{\lambda\beta}{1 - \lambda\alpha} b + \frac{\mu}{1 - \lambda\alpha} c \in BC$. Por ende, usando (1.8) y (1.9) se sigue que $\lambda y + \mu c \in A(BC)$. Por lo tanto, $(AB)C \subset A(BC)$.

Así, hemos probado que $A(BC) = S = (AB)C$, esto es, la operación junta es asociativa.

Ahora, sean $A_0, A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^m$ y veamos que se cumple (1.6). Por inducción sobre $n \geq 2$. Para $n = 2$, ya hemos mostrado que $(A_0 A_1) A_2 = A_0 A_1 A_2$. Supongamos que (1.6) se cumple para n y probaremos que también es válido para $n + 1$. Sean $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$,

$x \in A_0A_1 \cdots A_n$ y $a_{n+1} \in A_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, como $x \in A_0A_1 \cdots A_n$, existen $\lambda_i \geq 0$, $a_i \in A_i$, $i = 0, \dots, n$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ tales que $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$. Entonces

$$\alpha x + \beta a_{n+1} = \alpha \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i + \beta a_{n+1} = \sum_{i=0}^n \alpha \lambda_i a_i + \beta a_{n+1},$$

con $\alpha \lambda_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$, y $\sum_{i=0}^n \alpha \lambda_i + \beta = \alpha + \beta = 1$, de donde se sigue que

$$A_0A_1 \cdots A_{n+1} \subset \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1, a_i \in A_i \right\}.$$

Recíprocamente, si $\lambda_i \geq 0$, $a_i \in A_i$, $i = 0, \dots, n+1$ con $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1$ y asumiendo $1 - \lambda_{n+1} > 0$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i = (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i \right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \in (A_0A_1 \cdots A_n) A_{n+1} = A_0A_1 \cdots A_{n+1},$$

lo anterior ya que $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \geq 0$, $\forall i \leq n$ y $(1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \right) + \lambda_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, entonces $\lambda_i = 0$, $i = 0, \dots, n$, por lo que $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i = a_{n+1} \in A_0A_1 \cdots A_{n+1}$. Por lo tanto, (1.6) se cumple para $n+1$. Por inducción matemática, (1.6) es válido, $\forall n \geq 2$. ■

Proposición 1.4.4. Sean $a_1 \in \mathbb{R}^n$, $L_1 \subset \mathbb{R}^n$, $a_2 \in \mathbb{R}^m$ y $L_2 \subset \mathbb{R}^m$. Entonces $a_1L_1 \times a_2L_2 = (a_1, a_2)L$, donde $L = (L_1 \times a_2L_2) \cup (a_1L_1 \times L_2)$.

Demostración. Sea $(x, y) \in a_1L_1 \times a_2L_2$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in I$, $l_1 \in L_1$ y $l_2 \in L_2$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1)l_1$ y $y = \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2)l_2$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I: $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$. Entonces $(x, y) = (a_1, a_2) \in (a_1, a_2)L$.

Caso II: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \in [0, 1)$. Notemos que

$$\begin{aligned} (x, y) &= (a_1, \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2)l_2) = ((\lambda_2 + (1 - \lambda_2)) a_1, \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2)l_2) \\ &= (\lambda_2 a_1 + (1 - \lambda_2)a_1, \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2)l_2) = \lambda_2 (a_1, a_2) + (1 - \lambda_2) (a_1, l_2) \end{aligned}$$

con $(a_1, l_2) \in a_1L_1 \times L_2 \subset L$, por lo cual $(x, y) \in (a_1, a_2)L$.

Caso III: $\lambda_1 \in [0, 1)$ y $\lambda_2 = 1$. Similarmente al caso II, tenemos que

$$(x, y) = (\lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1)l_1, a_2) = \lambda_1 (a_1, a_2) + (1 - \lambda_1) (l_1, a_2),$$

donde $(l_1, a_2) \in L_1 \times a_2L_2 \subset L$, luego $(x, y) \in (a_1, a_2)L$.

Caso IV: $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$. Entonces $1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2 \in (0, 1]$.

Si $\lambda_2 \geq \lambda_1$, entonces $1 - \lambda_2 \leq 1 - \lambda_1$ y $0 < \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} \leq 1$. Además, $1 - \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 - \lambda_1}$,

luego $\left(l_1, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 - \lambda_1} a_2 + \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} l_2\right) \in L_1 \times a_2 L_2 \subset L$. De este modo,

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) L &\ni \lambda_1 (a_1, a_2) + (1 - \lambda_1) \left(l_1, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 - \lambda_1} a_2 + \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} l_2\right) \\ &= (\lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) l_1, \lambda_1 a_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) a_2 + (1 - \lambda_2) l_2) \\ &= (x, \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2) l_2) = (x, y). \end{aligned}$$

Ahora bien, si ocurre que $\lambda_2 < \lambda_1$, entonces $1 - \lambda_2 > 1 - \lambda_1$ y $1 > \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} > 0$. Esta vez,

$$1 - \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2}, \text{ por lo que } \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2} a_1 + \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} l_1, l_2\right) \in a_1 L_1 \times L_2 \subset L.$$

Así,

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) L &\ni \lambda_2 (a_1, a_2) + (1 - \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_2} a_1 + \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2} l_1, l_2\right) \\ &= (\lambda_2 a_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) a_1 + (1 - \lambda_1) l_1, \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2) l_2) \\ &= (\lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) l_1, y) = (x, y). \end{aligned}$$

En cualquier caso, se verifica que $(x, y) \in (a_1, a_2) L$. Por lo tanto, $a_1 L_1 \times a_2 L_2 \subset (a_1, a_2) L$.

Recíprocamente, sea $(x, y) \in (a_1, a_2) L$, entonces existen $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ y $(l_1, l_2) \in L$ tales que $(x, y) = \lambda (a_1, a_2) + \mu (l_1, l_2) = (\lambda a_1 + \mu l_1, \lambda a_2 + \mu l_2)$.

Si $(l_1, l_2) \in L_1 \times a_2 L_2$, entonces existen $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $l'_2 \in L_2$ tales que $l_2 = \alpha a_2 + \beta l'_2$, luego $\lambda + \mu \alpha, \mu \beta \geq 0$ y $\lambda + \mu \alpha + \mu \beta = \lambda + \mu(\alpha + \beta) = \lambda + \mu = 1$, por lo que

$$(x, y) = (\lambda a_1 + \mu l_1, (\lambda + \mu \alpha) a_2 + \mu \beta l'_2) \in a_1 L_1 \times a_2 L_2.$$

Por otro lado, si $(l_1, l_2) \in a_1 L_1 \times L_2$, existen $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, $l'_1 \in L_1$ tales que $l_1 = \alpha a_1 + \beta l'_1$ y como antes se sigue que

$$(x, y) = ((\lambda + \mu \alpha) a_1 + \mu \beta l'_1, \lambda a_2 + \mu l_2) \in a_1 L_1 \times a_2 L_2.$$

Esto prueba que $(a_1, a_2) L \subset a_1 L_1 \times a_2 L_2$, finalizando con la demostración. \blacksquare

Definición 1.4.5. Sean $B \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Diremos que la junta aB es un **cono** con **vértice** a y **base** B , o simplemente que aB es un **cono**, si $a \notin B$ y cada punto distinto de a puede expresarse únicamente como $\lambda a + (1 - \lambda)b$ con $b \in B$, $\lambda \in I$. Esto equivale a decir que $a \notin B$ y, para cualesquiera $b_1, b_2 \in B$ distintos, $[a, b_1] \cap [a, b_2] = \{a\}$. En este contexto, diremos que el par (a, B) está en **posición general**.

Observación 1.4.6.

- (1) Si aB es un cono y $C \subset B$, es claro que aC es también un cono.
- (2) Los puntos distintos de a de la forma $\lambda a + (1 - \lambda)b$ con $b \in B$ y $\lambda \in I$ son aquellos para los cuales $\lambda \in [0, 1)$ o, equivalentemente, $1 - \lambda \in (0, 1]$. De este modo, (a, B) está en posición general si y sólo si $a \notin B$ y $\lambda_1 a + (1 - \lambda_1)b_1 = \lambda_2 a + (1 - \lambda_2)b_2$ con $b_1, b_2 \in B$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Proposición 1.4.7. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación afín. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ tales que aB es un cono. Si f es inyectiva en aB , entonces $f(aB) = f(a)f(B)$ es también un cono.

Demostración. Usando la proposición 1.3.3 se tiene que:

$$f(aB) = f\left(\bigcup_{b \in B} [a, b]\right) = \bigcup_{b \in B} f([a, b]) = \bigcup_{b \in B} [f(a), f(b)] = f(a)f(B).$$

Para concluir que $f(a)f(B)$ es un cono, veamos que $(f(a), f(B))$ está en posición general. Dado que (a, B) está en posición general, tenemos que $a \notin B$. Si $f(a) \in f(B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $f(a) = f(b)$, pero $a, b \in aB$ y f es inyectiva en aB , luego $a = b \in B$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $f(a) \notin f(B)$.

Ahora bien, sean $x_1, x_2 \in f(B)$ distintos. Entonces existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $x_1 = f(b_1)$ y $x_2 = f(b_2)$. Si $b_1 = b_2$, tendríamos que $x_1 = f(b_1) = f(b_2) = x_2$, lo cual es contrario a nuestra hipótesis, por lo que $b_1 \neq b_2$. Así, gracias a que (a, B) está en posición general, $[a, b_1] \cap [a, b_2] = \{a\}$. Debido a que f es una transformación afín inyectiva en aB , $[a, b_1], [a, b_2] \subset aB$, aplicando nuevamente la proposición 1.3.3, se sigue que:

$$[f(a), f(b_1)] \cap [f(a), f(b_2)] = f([a, b_1]) \cap f([a, b_2]) = f([a, b_1] \cap [a, b_2]) = f(\{a\}) = \{f(a)\}.$$

Por lo tanto, $(f(a), f(B))$ está en posición general y $f(a)f(B)$ es un cono. ■

Proposición 1.4.8. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo y compacto con $c \in \text{Int}(C)$. Entonces C es el cono de c con la frontera de C , es decir, $C = cFr(C)$.

Demostración. Para $x \in C - \{c\}$, $x - c \neq 0$, luego por el corolario 1.3.10 existe $y \in Fr(C)$ tal que $R(c, x) \cap Fr(C) = \{y\}$. Esto nos dice que $x \in [c, y]$, luego $C \subset cFr(C)$. Por otro lado, si $y \in Fr(C) \subset C$, entonces $[c, y] \subset C$, ya que C es convexo, lo cual muestra que $cFr(C) \subset C$. Además, $c \notin Fr(C)$ porque $c \in \text{Int}(C)$ y si $y_1, y_2 \in Fr(C)$ con $y_1 \neq y_2$, entonces $[c, y_1] \cap [c, y_2] = \{c\}$, puesto que si existiera $z \in ([c, y_1] \cap [c, y_2]) - \{c\}$, ocurriría que $R(c, y_1) = R(c, z) = R(c, y_2)$, de modo que el rayo $R(c, z)$ interseca a $Fr(C)$ en y_1 y y_2 , dos puntos distintos en la frontera, lo cual contradice el corolario 1.3.10. Esto demuestra que $C = cFr(C)$ es un cono. ■

Corolario 1.4.9. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo, con $c \in \text{Int}_{\text{aff}(C)}(C)$. Entonces $C = cFr_{\text{aff}(C)}(C)$ es un cono.

Demostración. Sea $m = \dim(\text{aff}(C))$. Por la proposición 1.2.16, existe un homeomorfismo lineal $h : \text{aff}(C) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces $h(C)$ es compacto y, debido a la proposición 1.3.3, es también convexo. Además, $h(c) \in \text{Int}(h(C))$. Usando la proposición 1.4.8, tenemos que $h(C) = h(c)Fr(h(C))$ es un cono. Dado que h^{-1} es la restricción de una transformación afín inyectiva en \mathbb{R}^m , gracias a la proposición 1.4.7 obtenemos que $C = h^{-1}(h(c)Fr(h(C))) = cFr_{\text{aff}(C)}(C)$ es un cono. ■

Lema 1.4.10. Si $aL \subset \mathbb{R}^n$ es un cono con L compacto, entonces aL es compacto en \mathbb{R}^n .

Demostración. Definamos $\varphi : L \times I \rightarrow aL$ dada por $\varphi(l, t) = ta + (1 - t)l$. Observemos que φ es suprayectiva. Por otro lado, consideremos las funciones continuas $\mathbf{p}_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p}_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $\mathbf{p}_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{p}_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. Entonces φ es la restricción de la función $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\hat{\varphi}(l, t) = ta + (1 - t)l = \mathbf{p}_2(l, t)a + (1 - \mathbf{p}_2(l, t))\mathbf{p}_1(l, t)$, luego por la proposición 1.1.8, $\hat{\varphi}$ es continua y, gracias al teorema 1.1.7, $\varphi = \hat{\varphi}|(L \times I)$ es continua. Así, ya que φ es continua, suprayectiva y $L \times I$ es compacto, se concluye que $\varphi(L \times I) = aL$ es compacto. ■

1.5. n -variedades con frontera

Las definiciones contenidas en esta sección se recuperaron del capítulo 2 de Lee (2000) [19], excepto la definición 1.5.3 que es la dada por Moise (1977) [26] en el capítulo 0. El lema 1.5.6 aparece en la sección 24 del capítulo 5 de Munkres (1991) [27].

Definición 1.5.1. Diremos que $M \subset \mathbb{R}^m$ es una **n -variedad topológica con frontera**, o simplemente una **n -variedad**, si para cada $x \in M$ existen una vecindad abierta U_x en M y V_x abierto en el semiespacio superior $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ tales que $U_x \cong V_x$. Si $f : U \rightarrow V$, es un homeomorfismo con U abierto en M y V abierto en \mathbb{H}^n , diremos que f es una **carta** sobre U .

En general, un espacio topológico X es una n -variedad, si se cumplen las condiciones de la definición previa, pero en vez de pedir que X sea subespacio de \mathbb{R}^m , X debe ser Hausdorff y admitir una base contable. Sin embargo, en este trabajo nos limitaremos a trabajar con subespacios de \mathbb{R}^m , por lo que no utilizaremos esta versión de la definición.

Teorema 1.5.2. Sean M una n -variedad y $X \subset \mathbb{R}^m$. Si $M \cong X$, entonces X es una n -variedad.

Demostración. Por hipótesis, existe un homeomorfismo $f : M \rightarrow X$. Sea $x \in X$. Puesto que f es suprayectiva, existe $y \in M$ tal que $f(y) = x$. Para $y \in M$, tenemos que existe una vecindad abierta U_y en M y V_y abierto en \mathbb{H}^n tales que $U_y \cong V_y$. Como f es abierta, entonces $f(U_y)$ es un abierto en X tal que $x = f(y) \in f(U_y)$. Asimismo, es claro que la restricción $f : U_y \rightarrow f(U_y)$ es un homeomorfismo. Así, $f(U_y) \cong U_y \cong V_y$. Esto prueba que X es una n -variedad. ■

Definición 1.5.3. Si M es una n -variedad, definimos el **interior** de M , denotado M° , como el conjunto de puntos de M para los cuales existe una vecindad abierta homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n y la **frontera** de M como $\partial M = M - M^\circ$. Diremos que M es una **n -variedad sin frontera**, si $\partial M = \emptyset$.

Teorema 1.5.4. Sean M y N n -variedades y $f : M \rightarrow N$ un homeomorfismo. Entonces $f(\partial M) = \partial N$ y $f(M^\circ) = N^\circ$.

Demostración. Sea $x \in \partial M$. Mostraremos que $f(x) \in \partial N$. Por contradicción, supongamos que $f(x) \in N^\circ$. Entonces existen una vecindad abierta $U_{f(x)}$ de $f(x)$ en N y V abierto en \mathbb{R}^n tales que $U_{f(x)} \cong V$. Dado que f es un homeomorfismo, tenemos que $U_x := f^{-1}(U_{f(x)})$ es una

vecindad abierta de x en M y $f|_{U_x} : U_x \rightarrow U_{f(x)}$ es un homeomorfismo. Por ende, $U_x \cong V$ y se sigue que $x \in M^\circ$, contradiciendo que $x \in \partial M$. De este modo, $f(x) \in \partial N, \forall x \in \partial M$, es decir, $f(\partial M) \subset \partial N$. Aplicando un argumento similar para el homeomorfismo $f^{-1} : N \rightarrow M$, puede verse que $f^{-1}(\partial N) \subset \partial M$, lo cual implica $\partial N = f(f^{-1}(\partial N)) \subset f(\partial M)$. Así, $f(\partial M) = \partial N$. Finalmente, dado que $M^\circ = M - \partial M$ y $N^\circ = N - \partial N$, se sigue que $f(M^\circ) = N^\circ$. ■

Con tal de dar una caracterización del interior y la frontera de una n -variedad con frontera, enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en Kulpa (1998) [18].

Teorema 1.5.5 (Teorema de invariancia del dominio). *Sea U abierto en \mathbb{R}^n y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y continua. Entonces $f(U)$ es abierto en \mathbb{R}^n .*

Lema 1.5.6. *Sea M una n -variedad y sea $f : U \rightarrow V$ una carta sobre U alrededor del punto $p \in M$. Sea $x_0 = f(p)$.*

- (1) *Si $x_0 \in \text{Int}(\mathbb{H}^n)$, entonces $p \in M^\circ$.*
- (2) *Si $x_0 \in \text{Fr}(\mathbb{H}^n)$, entonces $p \in \partial M$.*

Demostración. (1) Sea $V_0 = V \cap \text{Int}(\mathbb{H}^n)$. Como V es abierto en \mathbb{H}^n , existe $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $V = A \cap \mathbb{H}^n$, entonces $V_0 = A \cap \mathbb{H}^n \cap \text{Int}(\mathbb{H}^n) = A \cap \text{Int}(\mathbb{H}^n)$, el cual es abierto en \mathbb{R}^n dado que $\text{Int}(\mathbb{H}^n)$ es abierto en \mathbb{R}^n . Sea $U_0 = f^{-1}(V_0)$. Ya que f es continua, se sigue que U_0 es abierto en U y como U es abierto en M , ocurre que U_0 también es abierto en M . Además, $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es un homeomorfismo y como $x_0 \in V_0$, tenemos que $p = f^{-1}(x_0) \in f^{-1}(V_0) = U_0$. Así, U_0 es una vecindad abierta de p en M homeomorfa a un abierto en \mathbb{R}^n , por lo que $p \in M^\circ$.

(2) Probaremos la contrarrecíproca: suponiendo que $p \in M^\circ$, mostraremos que $x_0 \in \text{Int}(\mathbb{H}^n)$. Existen una vecindad abierta U_1 de p en M , $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ abierto y un homeomorfismo $g : U_1 \rightarrow V_1$. Puesto que U y U_1 son abiertos en M , también lo es $W := U \cap U_1$. Sean $W_f := f(W)$ y $W_g := g(W)$, los cuales son abiertos en V y V_1 , respectivamente, debido a que W es abierto en U y en U_1 , así como del hecho que f y g son abiertas. Ya que $p \in W$, entonces $x_0 = f(p) \in W_f$. Dado que V es abierto en \mathbb{H}^n , observemos que W_f es también abierto en \mathbb{H}^n . Por su parte, como V_1 es abierto en \mathbb{R}^n , tenemos que W_g también es abierto en \mathbb{R}^n . Asimismo, $f|_W : W \rightarrow W_f$ y $g|_W : W \rightarrow W_g$ son homeomorfismos, de manera que $W_f \cong W \cong W_g$, por lo cual, existe un homeomorfismo $h : W_g \rightarrow W_f$. Recordando que W_f es subespacio de V , este último también subespacio de \mathbb{H}^n y siendo, a su vez, \mathbb{H}^n subespacio de \mathbb{R}^n , ocurre que W_f tiene la topología de subespacio de \mathbb{R}^n . Luego por el teorema 1.1.7, $\hat{h} : W_g \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\hat{h}(x) = h(x)$ es continua e inyectiva. Por el teorema de invariancia del dominio, tenemos que $\hat{h}(W_g) = h(W_g) = W_f$ es abierta en \mathbb{R}^n . Debido a que $W_f \subset \mathbb{H}^n$, lo anterior nos dice que $W_f \subset \text{Int}(\mathbb{H}^n)$ y dado que $p \in W$, obtenemos $x_0 \in W_f$. Así, $x_0 \in \text{Int}(\mathbb{H}^n)$. Por lo tanto, si $p \in M^\circ$, entonces $x_0 \in \text{Int}(\mathbb{H}^n)$, o equivalentemente, por ser \mathbb{H}^n cerrado en \mathbb{R}^n , si $x_0 \in \mathbb{H}^n - \text{Int}(\mathbb{H}^n) = \text{Fr}(\mathbb{H}^n)$, entonces $p \in M - M^\circ = \partial M$. ■

Proposición 1.5.7. Sean M una m -variedad y N una n -variedad. Entonces $M \times N$ es una $(m+n)$ -variedad y $\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$.

Demostración. Para que $M \times N$ sea una $(m+n)$ -variedad, basta con mostrar que $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n \cong \mathbb{H}^{m+n}$, ya que, para cualesquiera $(x, y) \in M \times N$, existen $U_x \in \mathcal{N}(x, M)$ y $V_y \in \mathcal{N}(y, N)$ abiertos homeomorfos a abiertos de \mathbb{H}^m y \mathbb{H}^n , respectivamente, luego $U_x \times V_y$ es una vecindad abierta de (x, y) en $M \times N$ homeomorfa a un abierto de $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$. De hecho, probaremos que existe un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\phi(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^{m+n}$.

Denotemos:

$$\begin{aligned} H_+ &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}, \mathbb{H}_{++}^2 := H_+ \cap \mathbb{H}^2, \\ H_- &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}, \mathbb{H}_{-+}^2 := H_- \cap \mathbb{H}^2, \\ H_{y \leq x} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}, H_1 := H_{y \leq x} \cap \mathbb{H}^2, \\ H_{x \leq y} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}, H_2 := H_{x \leq y} \cap H_+. \end{aligned}$$

Empezaremos exhibiendo un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}_{++}^2$. Consideremos el homeomorfismo $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T_1(x, y) = (x + y, y)$. Puede verse que $T_1(H_+) = H_{y \leq x}$ porque si $x \geq 0$, entonces $y \leq x + y$, probando $T_1(H_+) \subset H_{y \leq x}$; y si $y \leq x$, se cumple que $x - y \geq 0$ y $T_1(x - y, y) = (x, y)$, de donde se obtiene $H_{y \leq x} \subset T_1(H_+)$. Así, la restricción $T_1 : H_+ \rightarrow H_{y \leq x}$ es un homeomorfismo. Por otro lado, se verifica fácilmente que $T_1(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, luego $T_1(\mathbb{H}_{++}^2) = H_{y \leq x} \cap \mathbb{H}^2 = H_1$.

Esta vez definamos el homeomorfismo $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T_2(x, y) = (y, y - x)$. Si $x \leq 0$, entonces $y \leq y - x$, luego $T_2(H_-) \subset H_{x \leq y}$; y cuando $x \leq y$, se cumple que $x - y \leq 0$ y $T_2(x - y, x) = (x, y)$, por lo que $H_{x \leq y} \subset T_2(H_-)$. En consecuencia, la restricción $T_2 : H_- \rightarrow H_{x \leq y}$ es un homeomorfismo. Observando que $T_2(\mathbb{H}^2) = H_+$, se tiene que $T_2(\mathbb{H}_{-+}^2) = H_{x \leq y} \cap H_+ = H_2$.

Ahora, note que $H_+ \cap H_- = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ y $T_1|_{H_+ \cap H_-} = T_2|_{H_+ \cap H_-}$. Además, H_+ y H_- son cerrados en \mathbb{R}^2 con $H_+ \cup H_- = \mathbb{R}^2$, luego por el lema del pegado se sigue que $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $h|_{H_+} = T_1$ y $h|_{H_-} = T_2$, es un homeomorfismo. Recordando que $T_1(\mathbb{H}_{++}^2) = H_1$ y $T_2(\mathbb{H}_{-+}^2) = H_2$, obtenemos que $h(\mathbb{H}^2) = h(\mathbb{H}_{++}^2 \cup \mathbb{H}_{-+}^2) = T_1(\mathbb{H}_{++}^2) \cup T_2(\mathbb{H}_{-+}^2) = H_1 \cup H_2 = \mathbb{H}_{++}^2$ (figura 4).

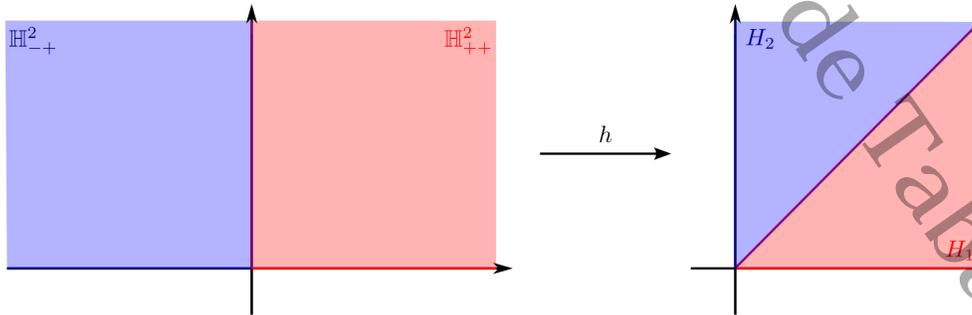


Figura 4: Prueba de que \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}_{++}^2 son homeomorfos.

Continuamos definiendo los homeomorfismos $h_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n-2} \times \mathbb{R}^2$ por

$$h_1((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1}), (x_m, y_n)$$

y $h_2 : \mathbb{R}^{m+n-2} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dado por

$$h_2((x_1, \dots, x_{m+n-2}), (y_1, y_2)) = (x_1, \dots, x_{m+n-2}, y_1, y_2).$$

De esta forma, $\phi = h_2 \circ (id_{\mathbb{R}^{m+n-2}} \times h^{-1}) \circ h_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es un homeomorfismo. Debido a que $\phi(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n) = h_2((id_{\mathbb{R}^{m+n-2}} \times h^{-1})(\mathbb{R}^{m+n-2} \times \mathbb{H}_{++}^2)) = h_2(\mathbb{R}^{m+n-2} \times \mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^{m+n}$, entonces $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n \cong \mathbb{H}^{m+n}$. Así, $M \times N$ es una $(m+n)$ -variedad.

Para finalizar, probaremos que $\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$. Notemos que

$$(M \times N) - (M^\circ \times N^\circ) = ((M - M^\circ) \times N) \cup (M \times (N - N^\circ)) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N).$$

De este modo, tendremos que $\partial(M \times N) \subset (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$ siempre que $M^\circ \times N^\circ \subset (M \times N)^\circ$. Sea $(x, y) \in M^\circ \times N^\circ$. Entonces existen $U_x \in \mathcal{N}(x, M)$ y $V_y \in \mathcal{N}(y, N)$ abiertos, tales que $U_x \cong U'$ y $V_y \cong V'$, para algunos abiertos $U' \subset \mathbb{R}^m$ y $V' \subset \mathbb{R}^n$. Esto significa que $U' \times V'$ es abierto en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$, luego $U_x \times V_y$ es una vecindad abierta de (x, y) en $M \times N$ y además $U_x \times V_y$ es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^{m+n} . En consecuencia, $(x, y) \in (M \times N)^\circ$. Lo anterior muestra que $\partial(M \times N) \subset (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$.

Recíprocamente, sea $(x, y) \in \partial M \times N$. Como $x \in \partial M$, del lema 1.5.6, existe una carta $f : U \rightarrow U'$ sobre U alrededor de x , tal que $f(x) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^m)$. Por su parte, ya que $y \in N$, existe una carta $g : V \rightarrow V'$ sobre V alrededor de y con $g(y) \in V' \subset \mathbb{H}^n$. Esto implica que $f \times g : U \times V \rightarrow U' \times V'$ es una carta sobre $U \times V$ alrededor del punto $(x, y) \in M \times N$, para la cual $(f \times g)(x, y) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^m) \times \mathbb{H}^n$. Recordando el homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\phi(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^{m+n}$, se tiene que $\phi(\text{Fr}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)) = \text{Fr}(\mathbb{H}^{m+n})$. Por otro lado, como $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ son cerrados, la proposición 1.1.16 asegura que $\text{Fr}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n) = (\text{Fr}(\mathbb{H}^m) \times \mathbb{H}^n) \cup (\mathbb{H}^m \times \text{Fr}(\mathbb{H}^n))$. De este modo, $(f \times g)(x, y) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)$ y entonces $\phi((f \times g)(x, y)) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^{m+n})$. Dado que $U' \times V'$ es abierto en $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ y la restricción $\phi : \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^{m+n}$ es un homeomorfismo, es claro que $(\phi|_{U' \times V'}) \circ (f \times g) : U \times V \rightarrow \phi(U' \times V')$ es una carta sobre $U \times V$ alrededor de $(x, y) \in M \times N$ y, puesto que $((\phi|_{U' \times V'}) \circ (f \times g))(x, y) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^{m+n})$, nuevamente por el lema 1.5.6 se concluye que $(x, y) \in \partial(M \times N)$. Similarmente, usando que $\mathbb{H}^m \times \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \subset \text{Fr}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)$, puede verse que $(x, y) \in M \times \partial N$ implica que $(x, y) \in \partial(M \times N)$. Por lo tanto, $(\partial M \times N) \cup (M \times \partial N) \subset \partial(M \times N)$, finalizando la demostración. ■

Corolario 1.5.8. Si M_i es una n_i -variedad, para $i = 1, \dots, k$, entonces $\prod_{i=1}^k M_i$ es una $(\sum_{i=1}^k n_i)$ -variedad y

$$\partial \left(\prod_{i=1}^k M_i \right) = \bigcup_{i=1}^k (M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times \partial M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_k). \quad (1.10)$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre $k \geq 2$. El caso $k = 2$ fue demostrado en la proposición 1.5.7. Sea $k > 2$ y supongamos que M_i es una n_i -variedad, para $i = 1, \dots, k+1$, y que $\prod_{i=1}^k M_i$ es una $(\sum_{i=1}^k n_i)$ -variedad que cumple (1.10). Consideremos el homeomorfismo $h : \left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times M_{k+1} \rightarrow \prod_{i=1}^{k+1} M_i$ definido por $h((p_1, \dots, p_n), p_{n+1}) = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$.

Por la proposición 1.5.7, tenemos que $\left(\prod_{i=1}^k M_i\right) \times M_{k+1}$ es una $\left(\sum_{i=1}^{k+1} n_i\right)$ -variedad y, aplicando el teorema 1.5.2, se sigue que $\prod_{i=1}^{k+1} M_i$ es una $\left(\sum_{i=1}^{k+1} n_i\right)$ -variedad. Entonces del teorema 1.5.4 obtenemos:

$$\partial \left(\prod_{i=1}^{k+1} M_i \right) = h \left(\partial \left(\left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times M_{k+1} \right) \right). \quad (1.11)$$

No obstante, la proposición 1.5.7 y nuestra hipótesis nos dicen que

$$\begin{aligned} \partial \left(\left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times M_{k+1} \right) &= \left(\partial \left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times M_{k+1} \right) \cup \left(\left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times \partial M_{k+1} \right) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^k (M_1 \times \cdots \times \partial M_i \times \cdots \times M_k) \times M_{k+1} \right) \cup \left(\left(\prod_{i=1}^k M_i \right) \times \partial M_{k+1} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia, por (1.11),

$$\partial \left(\prod_{i=1}^{k+1} M_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (M_1 \times \cdots \times \partial M_i \times \cdots \times M_{k+1})$$

y se tiene (1.10) para $k+1$, concluyendo la prueba por inducción. \blacksquare

Teorema 1.5.9. *Sea M una n -variedad con $\partial M \neq \emptyset$. Entonces ∂M es una $(n-1)$ -variedad sin frontera.*

Demostración. Sea $x \in \partial M$. Existen U_x vecindad abierta de x en M , V_x abierto en \mathbb{H}^n y un homeomorfismo $f : U_x \rightarrow V_x$. Ya que V_x es abierto en \mathbb{H}^n , existe $\varepsilon > 0$ tal que $V' := V_{\mathbb{H}^n}(f(x), \varepsilon) \subset V_x$ y como f es un homeomorfismo, entonces $f^{-1}(V')$ es una vecindad abierta de x en M . Asimismo, la restricción $f : f^{-1}(V') \rightarrow V'$ es un homeomorfismo. De esta forma, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $V_x = V'$ y $U_x = f^{-1}(V')$.

Sea $y \in \partial M \cap U_x$. Como $y \in \partial M$, por el lema 1.5.6 se tiene que $f(y) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^n)$. Así, $f(y) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$. Recíprocamente, si $z \in \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$, dado que f es suprayectiva, existe $y \in U_x$ tal que $f(y) = z$ y, por el lema 1.5.6, $y \in \partial M$, luego $y \in \partial M \cap U_x$. En consecuencia, $f(\partial M \cap U_x) = \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$. De este modo, dado que $f : U_x \rightarrow V_x$ es un homeomorfismo, la restricción $f : \partial M \cap U_x \rightarrow \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$ es un homeomorfismo. Como V_x es abierto en \mathbb{H}^n , entonces $\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$ es abierto en el subespacio $\text{Fr}(\mathbb{H}^n)$ y mediante el homeomorfismo $\pi : \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definido por $\pi(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = (z_1, \dots, z_{n-1})$ se tiene que $\pi(\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x)$ es abierto en \mathbb{R}^{n-1} .

Escribamos $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Sea $(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in V_x$. Puesto que $\|f(x) - y\| < \varepsilon$, entonces $f_{n-1}(x) - y_{n-1} < \varepsilon$, lo cual implica $0 < y_{n-1} - f_{n-1}(x) + \varepsilon$. Definamos el homeomorfismo $T_x : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ por $T_x(z_1, \dots, z_{n-1}) = (z_1, \dots, z_{n-1} - f_{n-1}(x) + \varepsilon)$. Como $\pi(\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x)$ es abierto en \mathbb{R}^{n-1} , obtenemos que $W_x := T_x(\pi(\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x))$ es abierto en \mathbb{R}^{n-1} . Ya que $z_{n-1} - f_{n-1}(x) + \varepsilon > 0$, $\forall (z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \in \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x$, se sigue que $W_x \subset \text{Int}(\mathbb{H}^{n-1})$, luego W_x es abierto en \mathbb{H}^{n-1} . Por ende, restringiendo $\pi : \text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x \rightarrow$

$\pi(\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x)$ y $T_x : \pi(\text{Fr}(\mathbb{H}^n) \cap V_x) \rightarrow W_x$, obtenemos que $T_x \circ \pi \circ f : \partial M \cap U_x \rightarrow W_x$ es una carta sobre $\partial M \cap U_x$ al abierto W_x en \mathbb{H}^{n-1} , con $(T_x \circ \pi \circ f)(x) \in \text{Int}(\mathbb{H}^{n-1})$.

Ya que esto es válido para cualquier $x \in \partial M$, a partir del lema 1.5.6 concluimos que ∂M es una $(n - 1)$ -variedad con $\partial M = (\partial M)^\circ$. ■

Observación 1.5.10. Es fácil verificar que I es una 1-variedad cuyo interior y frontera coinciden con su interior y frontera topológicos como subconjunto de \mathbb{R} . Así, en virtud de los corolarios 1.1.17 y 1.5.8, I^n es una n -variedad tal que $\partial I^n = \text{Fr}(I^n)$. Observando que I^n es un subconjunto de \mathbb{R}^n compacto, convexo y con interior no vacío, entonces por la proposición 1.3.16 se tiene un homeomorfismo $H : I^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ tal que $H(\text{Fr}(I^n)) = \mathbb{S}^{n-1}$. Por el teorema 1.5.2 se garantiza que \mathbb{B}^n es una n -variedad y, debido al teorema 1.5.4, $\partial \mathbb{B}^n = H(\partial I^n) = \mathbb{S}^{n-1}$. Asimismo, en vista del teorema 1.5.9, \mathbb{S}^{n-1} es una $(n - 1)$ -variedad sin frontera.

1.6. Simplejos

El desarrollo de esta sección se basa en el capítulo 5 de Lee (2000) [19], el capítulo 0 de Moise (1977) [26] y el capítulo 4 de Singer y Thorpe (1967) [37].

Definición 1.6.1. El *simplejo* generado por los puntos afínmente independientes $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ es el conjunto

$$\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

con la topología de subespacio. Cada uno de los puntos v_i se llama *vértice* de σ y denotaremos por $\text{vert}(\sigma)$ al conjunto de vértices. Si $v = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \in \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$, la $(n + 1)$ -ada $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ recibe el nombre de *coordenadas baricéntricas* de v .

El entero n recibe el nombre de *dimensión del simplejo*, y un simplejo de dimensión n a menudo se llama un *n -simplejo*. Por convención, consideraremos al conjunto vacío como un *(-1) -simplejo*, el cual no tiene vértices.

Dado que los vértices de un simplejo son afínmente independientes, se sigue que las coordenadas baricéntricas de todo elemento en un simplejo son únicas.

Proposición 1.6.2. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un simplejo en \mathbb{R}^m . Entonces

$$\text{aff}(\sigma) = v_0 + \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$$

y $\dim(\text{aff}(\sigma)) = n$.

Demostración. Como σ es un simplejo, sus vértices son afínmente independientes. Notando que $\text{aff}(\sigma) = \text{aff}(v_0, \dots, v_n)$, usando los teoremas 1.2.2 y 1.2.11 se concluye esta demostración. ■

Por el teorema 1.2.11, puede verse que subconjuntos no vacíos del conjunto de vértices de un simplejo son afínmente independientes. Esto permite dar la siguiente:

Definición 1.6.3. Sea $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ un simplejo. Cada simplejo τ generado por un subconjunto de $\text{vert}(\sigma)$ se llama una **cara** de σ . Si τ es un k -simplejo, entonces τ es una **k -cara** de σ y escribimos $\tau \leq \sigma$. Las caras τ que sean distintas de σ son sus **caras propias** y se escribe $\tau < \sigma$. Las $(n-1)$ -caras de σ suelen llamarse sus **caras frontera**. Denotaremos por $\sigma \setminus \langle v_i \rangle$ a la cara frontera de σ que no contiene al vértice v_i .

Observación 1.6.4.

- (1) \emptyset es una cara de cualquier simplejo.
- (2) Todo n -simplejo tiene $n+1$ caras frontera.
- (3) Cada cara propia de un simplejo está contenido en una cara frontera. Esto se debe a que cada cara propia de un n -simplejo tiene a lo más n vértices y las caras frontera son las que tienen exactamente n -vértices. En consecuencia, la unión de las caras propias de un simplejo es igual a la unión de sus caras frontera.

Lema 1.6.5. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un simplejo, $\tau \leq \sigma$ y $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Entonces $x \in \tau$ si y sólo si $v_j \in \tau$, para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\lambda_j > 0$.

Demostración. \Leftarrow) Supongamos que $v_j \in \tau$, para todo $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\lambda_j > 0$. Notando que $x = \sum_{\substack{i \in \{0, \dots, n\} \\ \lambda_i > 0}} \lambda_i v_i$, es claro que $x \in \tau$.

\Rightarrow) Supongamos que $x \in \tau$. Si $\tau = \sigma$, la afirmación es trivial. Asumamos, entonces que $\tau < \sigma$. Sin perder generalidad, podemos escribir $\tau = \langle v_0, \dots, v_m \rangle$ para algún $m < n$. Sea $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\lambda_j > 0$. Veamos que $v_j \in \tau$. Por contradicción, supongamos que $v_j \notin \tau$. Entonces $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Como $x \in \tau$, existen $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m \mu_i = 1$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^m \mu_i v_i = \sum_{i=0}^m \mu_i v_i + \sum_{i=m+1}^n 0 \cdot v_i.$$

Así, por la unicidad de las coordenadas baricéntricas y ya que $j \in \{m+1, \dots, n\}$, se tiene que $\lambda_j = 0$, pero esto contradice $\lambda_j > 0$. Por ende, $v_j \in \tau$, lo cual es válido para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\lambda_j > 0$. ■

Proposición 1.6.6. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo. Entonces $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_n$, es decir, σ es la junta repetida de sus vértices. Más aún, $\sigma = v_k(\sigma \setminus \langle v_k \rangle)$ es un cono, para $k = 0, \dots, n$.

Demostración. Se sigue de lo mostrado en la proposición 1.4.3 que $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_n$. Asimismo, por la conmutatividad y asociatividad de la operación junta, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que $\sigma = v_0 v_1 \cdots v_n = v_k (v_0 v_1 \cdots v_{k-1} v_{k+1} \cdots v_n) = v_k(\sigma \setminus \langle v_k \rangle)$. Fijemos $k \in \{0, \dots, n\}$. Renombrando de ser necesario, podemos asumir que $k = 0$. Tenemos que $v_0 \notin \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\lambda_1 + \mu_1 = 1 = \lambda_2 + \mu_2$ y $x_1, x_2 \in \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$ tales que

$$\lambda_1 v_0 + \mu_1 x_1 = \lambda_2 v_0 + \mu_2 x_2. \quad (1.12)$$

Como $x_1, x_2 \in \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 = \sum_{i=1}^n \beta_i$ tales que $x_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y $x_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Entonces por (1.12),

$$\lambda_1 v_0 + \sum_{i=1}^n \mu_1 \alpha_i v_i = \lambda_2 v_0 + \sum_{i=1}^n \mu_2 \beta_i v_i,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ y $\mu_1 \alpha_i, \mu_2 \beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Asimismo, $\lambda_1 + \sum_{i=1}^n \mu_1 \alpha_i = \lambda_1 + \mu_1 = 1$ y similarmente, $\lambda_2 + \sum_{i=1}^n \mu_2 \beta_i = 1$. Luego por la unicidad de las coordenadas baricéntricas, $\lambda_1 = \lambda_2$. Esto muestra que $\sigma = v_0(\sigma \setminus \langle v_0 \rangle)$ es un cono, como queríamos. ■

Corolario 1.6.7. *Todo simplejo es convexo. Más aún, todo simplejo es la envolvente convexa de sus vértices.*

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle \in \mathbb{R}^m$. Sean $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $x_1, x_2 \in \sigma$. Tenemos que existen $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^n \mu_i$ tales que $x_1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ y $x_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$. Entonces $\alpha x_1 + \beta x_2 = \sum_{i=0}^n (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) v_i$, donde $\alpha \lambda_i + \beta \mu_i \geq 0$, para $i = 0, \dots, n$, y $\sum_{i=0}^n (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) = \alpha \sum_{i=0}^n \lambda_i + \beta \sum_{i=0}^n \mu_i = \alpha + \beta = 1$. Esto nos dice que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \sigma$. Por ende, σ es convexo.

Debido a que también σ contiene a sus vértices, entonces $\text{conv}(v_0, \dots, v_n) \subset \sigma$. Ahora bien, sea $A \subset \mathbb{R}^m$ convexo tal que $\{v_0, \dots, v_n\} \subset A$. Como A es convexo, entonces $[v_0, v_1] \subset A$. Si $v_0 v_1 \dots v_k \subset A$ para cualquier $1 \leq k < n$, nuevamente por la convexidad de A y debido a la proposición 1.4.3, $v_0 v_1 \dots v_{k+1} = (v_0 v_1 \dots v_k) v_{k+1} \subset A$. Por inducción, se muestra que $v_0 \dots v_n \subset A$ y dado que, por la proposición 1.6.6, $v_0 \dots v_n = \sigma$, se sigue que $\sigma \subset A$. Así, $\sigma \subset A$ para cualquier $A \subset \mathbb{R}^m$ convexo tal que $\{v_0, \dots, v_n\} \subset A$, luego $\sigma \subset \text{conv}(v_0, \dots, v_n)$. Por lo tanto, $\sigma = \text{conv}(v_0, \dots, v_n)$. ■

En lo sucesivo, convendremos en denotar $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ como la base canónica de \mathbb{R}^n y $\rho^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle$.

Lema 1.6.8. *Sea $\sigma^n = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un simplejo en \mathbb{R}^m . Entonces existe un homeomorfismo lineal $h : \text{aff}(\sigma^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $h(v_i) = e_i$, para $i = 0, \dots, n$. En particular, cualquier n -simplejo es homeomorfo a ρ^n .*

Demostración. Por la proposición 1.6.2, como σ^n es un simplejo tenemos que $\text{aff}(\sigma^n) = v_0 + V$, donde $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es una base de V . De este modo, gracias a la proposición 1.2.16, existe un homeomorfismo lineal $h : \text{aff}(\sigma^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $h(x) = S(x - v_0)$, donde $S : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, $S(v_i - v_0) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Además, para cualesquiera

$\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$:

$$\begin{aligned}
 h\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i\right) &= S\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i - v_0\right) = S\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i\right) v_0\right) \\
 &= S\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i - v_0)\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i S(v_i - v_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\
 &= \lambda_0 e_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

De aquí, obtenemos que $h(\sigma^n) = \rho^n$ y como h es un homeomorfismo, entonces $\sigma^n \cong \rho^n$. ■

Proposición 1.6.9. *Todo n -simplejo es compacto.*

Demostración. Si $n = 0$, entonces el resultado es trivial, porque un 0-simplejo es solamente un conjunto que tiene un punto, que claramente es compacto. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$.

Paso 1: Mostraremos primero el resultado para ρ^n . Por el teorema de Heine-Borel, es suficiente con mostrar que ρ^n es cerrado y acotado para deducir que ρ^n es compacto. Sea $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ con $x_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^n x_i = 1$. Entonces

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| = \sum_{i=1}^n x_i \leq 1,$$

por lo cual ρ^n es acotado.

Probaremos que ρ^n es cerrado. Sea $H_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$, $i = 1, \dots, n$. Es claro que $H_n = \mathbb{H}^n$ es cerrado. Ahora bien, para $i < n$ definamos el homeomorfismo

$$\begin{aligned}
 T_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i).
 \end{aligned}$$

Se sigue que $T_i(\mathbb{H}^n) = H_i$ es cerrado porque T_i es una función cerrada.

Sea $H_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq x_n\}$ y veamos que también es cerrado. Consideremos el homeomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ del lema 1.6.8 tal que $h(e_0) = e_n$, $h(e_n) = e_0$ y $h(e_i) = e_i$, para $i \neq 0, n$. Afirmamos que $h(\mathbb{H}^n) = H_0$. Observe que, para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_0 \in \text{aff}(e_0, \dots, e_n). \tag{1.14}$$

Sea $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$, de modo que $x_n \geq 0$. Así, usando (1.14),

$$h(x_1, \dots, x_n) = h\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_0\right) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_n,$$

puesto que $x_n \geq 0$, entonces $1 - \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$, por lo cual $h(x_1, \dots, x_n) \in H_0$. Esto muestra que $h(\mathbb{H}^n) \subset H_0$. Ahora, sea $(x_1, \dots, x_n) \in H_0$, por lo que $1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq x_n$ y entonces $1 - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$. Debido a lo anterior, $\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + (1 - \sum_{i=1}^n x_i) e_n \in \mathbb{H}^n$ y

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_n\right) &= h\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + x_n e_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + x_n e_n + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e_0 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x_1, \dots, x_n) \in h(\mathbb{H}^n)$. En consecuencia, $H_0 \subset h(\mathbb{H}^n)$. Se cumple que $h(\mathbb{H}^n) = H_0$, por lo que al ser h un homeomorfismo y \mathbb{H}^n cerrado, obtenemos que H_0 es cerrado. Nuevamente por (1.14), note que $x := (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i + (1 - \sum_{i=1}^n x_i) e_0 \in \rho^n$ si y sólo si $x_i \geq 0$, $\forall i$ y $1 - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$, esto porque e_0, \dots, e_n son afinmente independientes. Pero $1 - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$ si y sólo si $1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq x_n$. Lo anterior nos dice que $x \in \rho^n$ si y sólo si $x \in \bigcap_{i=0}^n H_i$, es decir, $\rho^n = \bigcap_{i=0}^n H_i$. De este modo, ρ^n es una intersección de cerrados y es, por ende, cerrado.

Paso 2: Mostraremos ahora el caso general. Sea σ^n un n -simplejo en \mathbb{R}^m . Debido al lema 1.6.8, existe una función continua $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $h(\rho^n) = \sigma^n$. Gracias al paso 1, tenemos que ρ^n es compacto y la continuidad de h nos permite concluir que σ^n es compacto. ■

Teorema 1.6.10. *Todo n -simplejo es una n -bola y la unión de sus caras frontera es una $(n-1)$ -esfera, $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. *Paso 1:* Probaremos primero que el teorema es cierto para ρ^n . Sea $F = \bigcup_{i=0}^n (\rho^n \setminus \langle e_i \rangle)$. Mostraremos que $\text{Int}(\rho^n) = \rho^n - F$. Afirmamos que

$$\rho^n - F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 0 < \sum_{i=1}^n x_i < 1 \right\}.$$

En efecto:

⊂) Sea $x \in \rho^n - F$. Entonces existen $t_j \geq 0$, $j = 0, \dots, n$ tales que $\sum_{j=0}^n t_j = 1$ y $x = \sum_{j=0}^n e_j t_j = (t_1, \dots, t_n)$. Dado que $x \notin F$, entonces $t_j > 0$, $\forall j$ y $\sum_{j=1}^n t_j > 0$. Además, como $t_0 > 0$, se tiene que $\sum_{j=1}^n t_j < \sum_{j=0}^n t_j = 1$.

⊃) Recíprocamente, sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_i > 0$, $\forall i$ y $0 < \sum_{i=1}^n x_i < 1$. Sea $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$. Observamos que $x_0 > 0$. Asimismo, es claro que $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ y $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=0}^n x_i e_i$, lo cual exhibe que $(x_1, \dots, x_n) \in \rho^n$. Dado que $x_i > 0$ para $i = 0, \dots, n$, el lema 1.6.5 nos permite deducir que $x \notin F$.

Ahora bien, definamos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i$, la cual es claramente continua. Sea $P_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$, $i = 1, \dots, n$. Como cada P_i es abierto en \mathbb{R}^n , tenemos que $P = \bigcap_{i=1}^n P_i$ es abierto en \mathbb{R}^n . Así, $g = f|_P$ es continua y, gracias a que

$(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es abierto, obtenemos que $g^{-1}((0, 1)) = \rho^n - F$ es abierto en P con la topología relativa de \mathbb{R}^n . Ya que P es abierto en \mathbb{R}^n , se sigue que $\rho^n - F$ es abierto en \mathbb{R}^n .

Para ver que $\text{Int}(\rho^n) = \rho^n - F$, resta con probar que $\rho^n - F$ es el abierto en \mathbb{R}^n más grande contenido en ρ^n , lo cual se traduce en verificar que $F \cap \text{Int}(\rho^n) = \emptyset$. Sean $r > 0$ y $x := (x_1, \dots, x_n) \in \rho^n \setminus \langle e_0 \rangle$. Es fácil ver que $(x_1 + \frac{r}{2}, \dots, x_n) \in V(x, r)$, pero $(x_1 + \frac{r}{2}, \dots, x_n) \notin \rho^n$ porque la suma de sus coordenadas es mayor que 1. Asimismo, para $k \in \{1, \dots, n\}$ y $x := (x_1, \dots, x_n) \in \rho^n \setminus \langle e_k \rangle$, puede verse que $y = (x_1, \dots, x_{k-1}, -\frac{r}{2}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in V(x, r)$, pero $y \notin \rho^n$ ya que $-\frac{r}{2} < 0$. Así, $F \cap \text{Int}(\rho^n) = \emptyset$, lo cual nos dice que $\text{Int}(\rho^n) = \rho^n - F$. Además, como ρ^n es compacto (véase la proposición 1.6.9), tenemos que $\text{Fr}(\rho^n) = \rho^n - \text{Int}(\rho^n) = F$. Recordemos que ρ^n es convexo por el corolario 1.6.7. De este modo, tenemos que $\rho^n \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto y convexo con interior no vacío, luego, por la proposición 1.3.16, $\rho^n \cong \mathbb{B}^n$ y $F = \text{Fr}(\rho^n) \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

Paso 2: Sea $\sigma^n = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo. Sea $h : \sigma^n \rightarrow \rho^n$ como en el lema 1.6.8, entonces $\sigma^n \xrightarrow{h} \rho^n \cong \mathbb{B}^n$, por lo que σ^n es una n -bola. Asimismo, observemos que $h^{-1}(F) \cong F \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Usando (1.13), tenemos que $h^{-1}(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$, $\forall \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Así, se sigue que

$$h^{-1}(F) = h^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^n (\rho^n \setminus \langle e_i \rangle)\right) = \bigcup_{i=0}^n h^{-1}(\rho^n \setminus \langle e_i \rangle) = \bigcup_{i=0}^n (\sigma^n \setminus \langle v_i \rangle). \quad (1.15)$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^{n-1} \cong \bigcup_{i=0}^n (\sigma^n \setminus \langle v_i \rangle)$, esto es, la unión de las $(n-1)$ -caras de σ^n es una $(n-1)$ -esfera. ■

Corolario 1.6.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Todo n -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ es una n -variedad cuya frontera $\partial\sigma \neq \emptyset$ es una $(n-1)$ -variedad sin frontera y se cumple que:*

- (1) $\partial\sigma = \text{Fr}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma) = \bigcup_{i=0}^n (\sigma \setminus \langle v_i \rangle)$.
- (2) $\sigma^\circ = \text{Int}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma) = \{\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$.

Sea $x \in \sigma^\circ$. Entonces:

- (3) *Todo rayo desde x que pase por otro punto en $\text{aff}(\sigma)$ interseca a $\partial\sigma$ en sólo un punto.*
- (4) $\sigma = x\partial\sigma$ es un cono.
- (5) *Dado $z = x + t(y - x)$ para algunos $y \in \partial\sigma$ y $t \geq 0$, entonces $z \in \sigma$ si y sólo si $t \in I$.*

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Mostramos en el teorema 1.6.10 que $\rho^n \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, convexo y su interior es no vacío. Luego por la proposición 1.3.16, existe un homeomorfismo $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \rho^n$ tal que $f(\mathbb{S}^{n-1}) = f(\text{Fr}(\mathbb{B}^n)) = \text{Fr}(\rho^n)$. Por el teorema 1.5.2, como \mathbb{B}^n es una n -variedad y $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$, se sigue que ρ^n es una n -variedad y, debido al teorema 1.5.4, se verifica que $\partial\rho^n = \text{Fr}(\rho^n)$. Usando que ρ^n es cerrado, tenemos que $(\rho^n)^\circ = \text{Int}(\rho^n)$. Ahora, por el lema 1.6.8, existe un homeomorfismo $h : \text{aff}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(\sigma) = \rho^n$. El teorema 1.5.2 garantiza que σ es también una n -variedad porque ρ^n lo es, y en vista del teorema 1.5.9, $\partial\sigma$ es una $(n-1)$ -variedad sin frontera. Ya que $h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff}(\sigma)$ es un homeomorfismo, por el teorema 1.5.4 y (1.15), obtenemos que

$\partial\sigma = h^{-1}(\text{Fr}(\rho^n)) = \bigcup_{i=0}^n (\sigma \setminus \langle v_i \rangle)$. También, $\partial\sigma = h^{-1}(\text{Fr}(\rho^n)) = \text{Fr}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma)$, lo cual prueba (1). Asimismo, $\sigma^\circ = h^{-1}(\text{Int}(\rho^n)) = \text{Int}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma)$ y aplicando el lema 1.6.5:

$$x \in \sigma^\circ \Leftrightarrow x \notin \partial\sigma \Leftrightarrow x \notin \sigma \setminus \langle v_i \rangle, \forall i \Leftrightarrow x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \text{ para algunos } \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1,$$

de donde se obtiene (2).

Ahora, supongamos que $x \in \sigma^\circ$. Como ρ^n es compacto y convexo por ser un simplejo, usando (1), (2) y el corolario 1.3.12, se sigue (3). Por otro lado, (4) es consecuencia del corolario 1.4.9. Para mostrar (5), sean $y \in \partial\sigma$ y $t \geq 0$. Si $z := x + t(y - x) \in \sigma$, por (4) existen $\lambda \in I$, $w \in \partial\sigma$ tales que $z = (1 - \lambda)x + \lambda w$. Podemos escribir también $z = (1 - t)x + ty$. Debido a que $z \in R(x, w) \cap R(x, y)$, entonces $R(x, w) = R(x, z) = R(x, y)$, luego $w, y \in R(x, w) \cap \partial\sigma$ y por (3), $w = y$, así que $z = (1 - t)x + tw$. Como $x \neq w$, éstos son afínmente independientes, por lo que $z = (1 - \lambda)x + \lambda w = (1 - t)x + tw$ implica $t = \lambda \in I$, como queríamos. Recíprocamente, si $t \in I$, entonces $z = x + t(y - x) = (1 - t)x + ty \in [x, y] \subset x\partial\sigma = \sigma$. ■

Cuando $\sigma = \langle v_0 \rangle$, convendremos que $\sigma^\circ := \text{Int}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma) = \sigma$ y $\partial\sigma := \text{Fr}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma) = \emptyset$.

Lema 1.6.12. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo de \mathbb{R}^m , $n \in \mathbb{N}$. Sea $w \in (\sigma \setminus \langle v_n \rangle)^\circ$. Consideremos el semiespacio superior de $\text{aff}(\sigma)$ que contiene a σ , es decir,

$$H = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Si $X = \text{aff}(\sigma \setminus \langle v_n \rangle)$, entonces existe $r > 0$ tal que $\emptyset \neq V_H(w, r) - X \subset \sigma^\circ$ (ver figura 5).

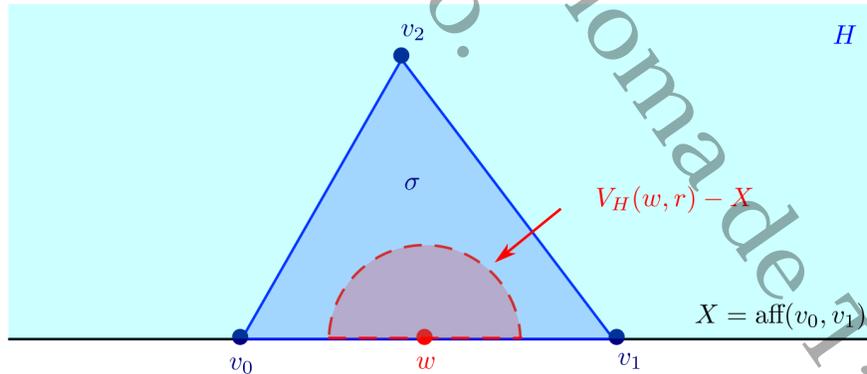


Figura 5: Caso $n = 2$, lema 1.6.12.

Demostración. Paso 1: Probaremos primero el resultado para ρ^n . Sea $w \in (\rho^n \setminus \langle e_n \rangle)^\circ$. En este caso, $H = \mathbb{H}^n$. Tenemos que $\rho^n = \bigcap_{i=0}^n H_i$, con cada H_i como en la proposición 1.6.9. Dado que $w \in (\sigma \setminus \langle v_n \rangle)^\circ$, entonces $w \notin \text{Fr}(H_i) = \text{aff}(\rho^n \setminus \langle e_i \rangle)$, para $i \neq n$. Además, $\text{Fr}(H_i)$ es cerrado en \mathbb{R}^n , luego $d(w, \text{Fr}(H_i)) > 0$ para $i \neq n$. Tomemos $0 < r < \min_{i \neq n} d(w, \text{Fr}(H_i))$.

Note que $V_H(w, r) - X \neq \emptyset$, porque tomando cualquier $0 < r' < r$, se sigue que $w + r'e_n \in V_H(w, r) - X$. Sea $z \in V_H(w, r) - X$. Dado que $\|w - z\| < r$, entonces $z \notin \text{Fr}(H_i)$ para todo

$i \neq n$. Esto significa que podemos escribir $z = (z_1, \dots, z_n)$, con $z_i \neq 0, \forall i \neq n$ y también $1 - \sum_{i=1}^n z_i \neq 0$. Por su parte, escribamos $w = (w_1, \dots, w_{n-1}, 0)$. Puesto que $w \in (\rho^n \setminus \langle e_n \rangle)^\circ$, es claro que $w_i > 0, i = 1, \dots, n-1$, y $\sum_{i=1}^{n-1} w_i < 1$. Sea $i \notin \{0, n\}$. Entonces

$$|z_i - w_i| \leq \|z - w\| < r < d(w, \text{Fr}(H_i)) \leq w_i,$$

ya que $(w_1, \dots, w_{i-1}, 0, w_{i+1}, \dots, w_{n-1}, 0) \in \text{Fr}(H_i)$. Si $z_i < 0$, tenemos que $z_i < w_i$, de modo que $w_i - z_i = |z_i - w_i| < w_i$, es decir, $z_i > 0$ que es contradictorio. Esto significa que $z_i > 0$, siempre que $i \neq n$. Asimismo, $z \in H - X$, luego $z_n > 0$. Debido a lo anterior, ocurrirá que $z \in (\rho^n)^\circ$ siempre que $\sum_{i=1}^n z_i < 1$. Observe que $\text{Fr}(H_0) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i = 1\}$. Además, note que $\sum_{i=1}^n z_i \neq 1$ porque $z \notin \text{Fr}(H_0)$. Supongamos que $\sum_{i=1}^n z_i > 1$. Recordando que $1 > \sum_{i=1}^{n-1} w_i$, entonces $\sum_{i=1}^n (z_i - w_i) > 0$, donde $w_n = 0$. Sea $\lambda := \frac{\sum_{i=1}^n z_i - 1}{\sum_{i=1}^n (z_i - w_i)} > 0$.

Dado que $1 > \sum_{i=1}^n w_i$ si y sólo si $\sum_{i=1}^n z_i - 1 < \sum_{i=1}^n (z_i - w_i)$, se cumple que $\lambda < 1$. Notemos que $\sum_{i=1}^n (\lambda w_i + (1 - \lambda)z_i) = 1$, de manera que $\lambda w + (1 - \lambda)z \in \text{Fr}(H_0) \cap [w, z]$. En vista de que $V(w, r)$ es convexo, se sigue que $\lambda w + (1 - \lambda)z \in V(w, r)$. Sin embargo,

$$d(w, \text{Fr}(H_0)) \leq \|w - (\lambda w + (1 - \lambda)z)\| < r \leq d(w, \text{Fr}(H_0)),$$

lo cual es absurdo. Esto prueba que $\sum_{i=1}^n z_i < 1$ y obtenemos que $z \in (\rho^n)^\circ$. Por lo tanto, $V_H(w, r) - X \subset (\rho^n)^\circ$.

Paso 2: Probaremos ahora el lema en general. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ y sea $w \in (\sigma \setminus \langle v_n \rangle)^\circ$. Consideremos el homeomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff}(\sigma)$ dado en el lema 1.6.8, para el cual $h(e_i) = v_i, i = 0, \dots, n$, y $h(\rho^n) = \sigma$. Observe que $h(\mathbb{H}^n) = H$. Tenemos que $w' := h^{-1}(w) \in (\rho^n \setminus \langle e_n \rangle)^\circ$, entonces por el paso 1, existe $r' > 0$ tal que $V_{\mathbb{H}^n}(w', r') - \text{aff}(\rho^n \setminus \langle e_n \rangle) \subset (\rho^n)^\circ$, luego $h(V_{\mathbb{H}^n}(w', r')) - X \subset \sigma^\circ$. Dado que $h(V(w', r'))$ es abierto en $\text{aff}(\sigma)$, existe $r > 0$ tal que $V_{\text{aff}(\sigma)}(w, r) \subset h(V(w', r'))$, por lo cual $V_H(w, r) - X = (V(w, r) \cap \text{aff}(\sigma) \cap H) - X \subset (h(V(w', r')) \cap H) - X \subset h(V_{\mathbb{H}^n}(w', r')) - X \subset \sigma^\circ$. ■

Lema 1.6.13. *Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Si (a, σ) está en posición general, entonces*

$$a\sigma = \langle v_0, \dots, v_n, a \rangle.$$

Dicho de otro modo, un cono cuya base sea un simplejo es un simplejo.

Demostración. Como (a, σ) está en posición general, entonces para cualesquiera $x, y \in \sigma$ y $x \neq y$ se cumple que $[a, x] \cap [a, y] = \{a\}$ o, equivalentemente, $[0, x - a] \cap [0, y - a] = \{0\}$. También se tiene que $a \notin \sigma$, luego $x - a \neq 0, \forall x \in \sigma$. Con esto en mente, demostraremos el lema en dos partes.

Paso 1: Sean $x, y \in \sigma$ tales que $x \neq y$. Mostraremos que $\text{gen}(x - a) \cap \text{gen}(y - a) = \{0\}$. Por contradicción, supongamos que existe $z \in \text{gen}(x - a) \cap \text{gen}(y - a)$ tal que $z \neq 0$. Entonces existen $\lambda_x, \lambda_y \neq 0$ tales que $z = \lambda_x(x - a) = \lambda_y(y - a)$, luego $x - a = c(y - a)$ con $c = \frac{\lambda_y}{\lambda_x} \neq 0$.

Si $c \in I$, entonces $c(y - a) \in [0, y - a]$, por lo cual $c(y - a) \in [0, y - a] \cap [0, x - a] = \{0\}$, de manera que $c(y - a) = 0$. Dado que $y - a \neq 0$, se tiene $c = 0$, pero esto contradice que

$c \neq 0$. Por ende, $c \notin I$, es decir, $c < 0$ o $c > 1$.

Si $c < 0$, entonces $c < 1$ y esto implica $0 < \frac{1}{1-c}$; además, $-c > 0$ nos dice que $1 > \frac{1}{1-c}$.

Por otro lado, $1 - \frac{1}{1-c} = \frac{c}{c-1}$. Debido a lo anterior, y a la convexidad de σ establecida

en el corolario 1.6.7, tenemos que $a = \frac{1}{1-c}[cy + (1-c)a] + \frac{c}{c-1}y \in [x, y] \subset \sigma$, lo cual contradice $a \notin \sigma$. Esto nos dice que $c < 0$ no puede ocurrir.

No obstante, si $c > 1$, entonces $1 > \frac{1}{c} > 0$, que implica $y - a = \frac{1}{c}(x - a) \in [0, x - a]$, es decir, $y - a \in [0, y - a] \cap [0, x - a] = \{0\}$, contrario al hecho que $y - a \neq 0$.

Todo lo anterior exhibe que no puede existir $z \neq 0$ tal que $z \in \text{gen}(x - a) \cap \text{gen}(y - a)$, demostrando que $\text{gen}(x - a) \cap \text{gen}(y - a) = \{0\}$.

Paso 2: Probaremos que $\{v_0 - a, \dots, v_n - a\}$ es linealmente independiente. Nuevamente por contradicción, supongamos que este conjunto es linealmente dependiente. Entonces existen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i(v_i - a) = 0$. Considerando solamente los escalares no nulos y renombrando de ser necesario, notemos que existe $m \leq n$ tal que $\lambda_i \neq 0, \forall i \leq m$, de modo que $\sum_{i=0}^m \lambda_i(v_i - a) = 0$. Para estos escalares no nulos se tiene alguna de las siguientes posibilidades:

Caso I: $\lambda_i > 0, \forall i$. Entonces $s = \sum_{i=0}^m \lambda_i > 0$, por lo que $\frac{\lambda_i}{s} > 0, \forall i$ y $\sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i}{s} = 1$. Así,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i(v_i - a) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i}{s}(v_i - a) = 0 \Rightarrow a = \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i}{s}v_i \in \sigma,$$

contradiendo que $a \notin \sigma$ y este caso no puede ocurrir.

Caso II: $\lambda_i < 0, \forall i$. Aquí, $-\lambda_i > 0, \forall i$ y por lo visto en el caso I, esto tampoco es posible.

Caso III: $\lambda_0, \dots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m < 0$. Esta vez,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i(v_i - a) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^p \lambda_i(v_i - a) = \sum_{i=p+1}^m \mu_i(v_i - a), \quad (1.16)$$

donde $\mu_i = -\lambda_i > 0, i = p + 1, \dots, m$. Sean $s = \sum_{i=0}^p \lambda_i > 0$ y $r = \sum_{i=p+1}^m \mu_i > 0$.

Observemos que $\frac{\lambda_i}{s} > 0, i = 0, \dots, p; \frac{\mu_i}{r} > 0, i = p + 1, \dots, m$, y $\sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{s} = 1 = \sum_{i=p+1}^m \frac{\mu_i}{r}$,

por lo que $x := \sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{s}v_i, y := \sum_{i=p+1}^m \frac{\mu_i}{r}v_i \in \sigma$. Dado que los vértices en la combinación lineal de x son distintos a aquellos en la combinación lineal de y , es claro que $x \neq y$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i(v_i - a) = s \sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{s}(v_i - a) = s(x - a) \in \text{gen}(x - a).$$

Asimismo, puede verse que $\sum_{i=p+1}^m \lambda_i(v_i - a) = -r(y - a) \in \text{gen}(y - a)$. Luego, por (1.16) y debido al paso 1, $s(x - a) = -r(y - a) \in \text{gen}(x - a) \cap \text{gen}(y - a) = \{0\}$, lo cual implica

$s(x - a) = 0$, es decir, $s = 0$, ya que $x - a \neq 0$. Sin embargo, teníamos que $s > 0$, lo cual es contradictorio y este caso es imposible.

Ya que cada posibilidad nos ha llevado a un absurdo, se deduce que $\{v_0 - a, \dots, v_n - a\}$ es linealmente independiente. Así, $\langle v_0, \dots, v_n, a \rangle$ es un simplejo. Finalmente, aplicando la proposición 1.6.6, se concluye que $a\sigma = \langle v_0, \dots, v_n, a \rangle$, pues $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n, a \rangle \setminus \langle a \rangle$. ■

Corolario 1.6.14. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Si $a \notin \text{aff}(\sigma)$, entonces $a\sigma$ es un simplejo.

Demostración. En virtud del lema 1.6.13, es suficiente con demostrar que (a, σ) está en posición general. Sean $x, y \in \sigma$, $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ tales que $\lambda_1 a + (1 - \lambda_1)x = \lambda_2 a + (1 - \lambda_2)y$. Supongamos que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, entonces $(\lambda_1 - \lambda_2)a = (1 - \lambda_2)y - (1 - \lambda_1)x$, por lo que $a = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}y - \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}x$, con $\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1$ y como $x, y \in \sigma$, se sigue que $a \in \text{aff}(\sigma)$. Esto prueba que $a \notin \text{aff}(\sigma)$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$. Por lo tanto, (a, σ) está en posición general y se concluye que $a\sigma$ es un simplejo. ■

Proposición 1.6.15. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle \subset P \subset \mathbb{R}^m$. Si $f : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función tal que

$$f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(v_i), \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1,$$

entonces $f|_\sigma$ es lineal.

Demostración. Dado que σ es un simplejo, tenemos que $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ es linealmente independiente. En caso que $k < m$, escogemos $u_{k+1}, \dots, u_m \in \mathbb{R}^m$ tales que $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ es una base de \mathbb{R}^m . Definamos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} T(v_i - v_0) &= f(v_i) - f(v_0), \quad i = 0, \dots, k; \\ T(u_i) &= 0, \quad i = k + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos definir $\hat{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\hat{f}(x) = T(x) - T(v_0) + f(v_0)$. Notemos que $-T(v_0) + f(v_0) \in \mathbb{R}^n$ está fijo, por lo que \hat{f} es una transformación afín. Además, es fácil ver que $\hat{f}(v_i) = f(v_i)$, $i = 0, \dots, k$. Por lo anterior y ya que para cualquier $x \in \sigma$ existen $\lambda_0, \dots, \lambda_k \geq 0$ tales que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$, entonces:

$$\hat{f}(x) = \hat{f}\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \hat{f}(v_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i\right) = f(x),$$

de donde se sigue que $\hat{f}|_\sigma = f|_\sigma$. Así, $f|_\sigma$ es la restricción de la transformación afín \hat{f} y, por lo tanto, es lineal. ■

2. Topología PL

2.1. Poliedros y funciones PL

Las definiciones y resultados de esta sección se encuentran en el capítulo 1 de Rourke y Sanderson (1982) [34], así como en algunos ejercicios planteados por estos autores. Aquí se han detallado las demostraciones con tal de justificarlas a través de la teoría que se ha desarrollado y porque al argumentar las pruebas se dieron origen a otros resultados que servirán en próximas secciones. A su vez, su planteamiento permitirá, en la sección 2.4, conciliar los conceptos de *poliedro* y *función PL* en el sentido de [34], con las formuladas en Moise (1977) [26], las cuales, para ciertos propósitos, son más prácticos de trabajar.

De ahora en adelante, consideraremos \mathbb{R}^n con la métrica producto d , es decir, si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$d(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|,$$

la cual define una norma en \mathbb{R}^n mediante:

$$\|x\| := d(x, 0) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Esta métrica induce en \mathbb{R}^n la topología producto. Más aún, es sabido que d es equivalente a la métrica euclidiana, por lo que \mathbb{R}^n con la topología inducida por d no es más que \mathbb{R}^n con la topología usual.

En (\mathbb{R}^n, d) notemos que, para $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$:

$$\begin{aligned} V(a, r) &= (a_1 - r, a_1 + r) \times \dots \times (a_n - r, a_n + r), \\ B(a, r) &= [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]. \end{aligned}$$

Definición 2.1.1. Un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ es un **poliedro**, si para cada $a \in P$ existe $L \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que $N = aL \in \mathcal{N}(a, P)$ es un cono. A N le llamaremos una **estrella** de a en P con **enlace** L , en cuyo caso escribiremos $N = N_a(P)$ y $L = L_a(P)$. Si $Q \subset P$ es un poliedro, diremos que Q es un **subpoliedro** de P .

Observación 2.1.2. En el contexto de la definición anterior:

- (1) No se está excluyendo el caso $L = \emptyset$, por lo que cualquier conjunto que consista de un punto es un poliedro.
- (2) Sin pérdida de generalidad, siempre podemos tomar $N = B_P(a, \varepsilon)$ y $L = \{x \in P : \|a - x\| = \varepsilon\}$, para algún $\varepsilon > 0$ adecuado.

En efecto, como L es cerrado en \mathbb{R}^n y $a \notin L$, por la proposición 1.1.23 se sigue que $d(a, L) > 0$. Puesto que $aL \in \mathcal{N}(a, P)$, existe A abierto en P tal que $a \in A \subset aL$, por lo que podemos hallar $\varepsilon' > 0$ tal que $B_P(a, \varepsilon') \subset A \subset aL$. Tomemos $\varepsilon = \min\{d(a, L), \varepsilon'\} > 0$ y sea $L' = \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap P$. Tenemos que $B_P(a, \varepsilon) \subset B_P(a, \varepsilon') \subset aL$. Mostraremos que $B_P(a, \varepsilon) = aL'$.

Sea $x \in aL'$, digamos $x = \lambda a + (1 - \lambda)l$ para algunos $\lambda \in I$ y $l \in L'$. Como $l \in L'$, ocurre que $\|a - l\| = \varepsilon$. De este modo, $\|a - x\| = (1 - \lambda)\|a - l\| = (1 - \lambda)\varepsilon \leq \varepsilon$, por lo que $x \in B_P(a, \varepsilon)$. Así, $aL' \subset B_P(a, \varepsilon)$. Ahora bien, sea $x \in B_P(a, \varepsilon)$. Como $B_P(a, \varepsilon) \subset aL$, entonces existen $\mu \in I$ y $l \in L$ tales que $x = \mu a + (1 - \mu)l$. Ya que $a \notin L$, se tiene que $\|a - l\| > 0$. Observemos que también se cumple $\varepsilon \leq d(a, L) \leq \|a - l\|$, luego $0 < \frac{\varepsilon}{\|a - l\|} \leq 1$. Esto nos dice que

$$y := \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|a - l\|}\right) a + \frac{\varepsilon}{\|a - l\|} l \in aL \subset P.$$

Además, $\|a - y\| = \frac{\varepsilon}{\|a - l\|} \|a - l\| = \varepsilon$, por lo que $y \in L'$. Tomemos $\lambda = \frac{1 - \mu}{\varepsilon} \|a - l\| \geq 0$. Debido a que $x \in B_P(a, \varepsilon)$, entonces $\varepsilon \geq \|a - x\| = (1 - \mu)\|a - l\|$, lo cual implica $1 \geq \frac{1 - \mu}{\varepsilon} \|a - l\| = \lambda$. En consecuencia, se verifica que $x = (1 - \lambda)a + \lambda y \in aL'$, demostrando que $B_P(a, \varepsilon) \subset aL'$. Por lo tanto, $B_P(a, \varepsilon) = aL'$.

Como $a \in \text{Int}(B(a, \varepsilon))$ y dado que $B(a, \varepsilon)$ es compacto y convexo (ejemplo 1.3.5), de la proposición 1.4.8 tenemos que $B(a, \varepsilon) = a\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ es un cono. En particular, $aL' = a(\text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap P)$ es un cono. Como $B(a, \varepsilon)$ es compacto en \mathbb{R}^n , por el lema 1.1.26, $\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ es compacto en \mathbb{R}^n . Asimismo, gracias al lema 1.4.10, ya que L es compacto en \mathbb{R}^n , entonces aL es compacto en \mathbb{R}^n . Observemos que $L' \subset aL' = B_P(a, \varepsilon) \subset aL \subset P$, de donde se sigue que $L' = L' \cap aL = \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap P \cap aL = \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap aL$, es decir, L' es una intersección de compactos en \mathbb{R}^n , de manera que L' es compacto en \mathbb{R}^n . Finalmente, es claro que $B_P(a, \varepsilon) = aL' \in \mathcal{N}(a, P)$. Por lo tanto, $B_P(a, \varepsilon)$ es una estrella de a en P , como queríamos.

(3) Del punto anterior, notemos que si $B_P(a, \varepsilon)$ es una estrella de a en P y $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, entonces $B_P(a, \varepsilon_1)$ también es una estrella de a en P .

Ejemplo 2.1.3.

- (1) \mathbb{R}^n es un poliedro.
- (2) Cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un poliedro.
- (3) \mathbb{H}^n es un poliedro.

Demostración.

(1) Sea $\varepsilon > 0$. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $B(x, \varepsilon) = x\text{Fr}(B(x, \varepsilon))$ es un cono con $\text{Fr}(B(x, \varepsilon))$ compacto en \mathbb{R}^n , y $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{N}(x)$.

(2) Notemos que $[a, b] = ab = ba$, el cual es un cono. Ya que $\{a\}$ y $\{b\}$ son compactos en \mathbb{R} por ser finitos, es claro que $[a, b]$ es una estrella de a y b en $[a, b]$. Para $x \in (a, b) = \text{Int}([a, b])$, dado que $[a, b]$ es convexo y compacto en \mathbb{R} , por la proposición 1.4.8 se sigue que $[a, b] = x\text{Fr}([a, b]) = x\{a, b\}$, es un cono con $\{a, b\}$ compacto en \mathbb{R} . Así, $[a, b]$ es una estrella de x en $[a, b]$. De este modo, se verifica que $[a, b]$ es un poliedro.

(3) Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$. Buscamos una estrella $N_x(\mathbb{H}^n)$ de x en \mathbb{H}^n . Si $x_n > 0$, dado que $\text{Int}(\mathbb{H}^n)$ es abierto en \mathbb{R}^n , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{H}^n$, de modo que $B(x, \varepsilon) \in$

$\mathcal{N}(x, \mathbb{H}^n)$ y $B(x, \varepsilon) = x\text{Fr}(B(x, \varepsilon))$ es un cono con $\text{Fr}(B(x, \varepsilon))$ compacto en \mathbb{R}^n , luego en este caso tomamos $N_x(\mathbb{H}^n) = B(x, \varepsilon)$. Ahora bien, supongamos que $x_n = 0$. Tenemos que $B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n \in \mathcal{N}(x, \mathbb{H}^n)$. Puesto que $B(x, 1) = x\text{Fr}(B(x, 1))$ es un cono, se tiene que $x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n)$ es también un cono. Gracias a que \mathbb{H}^n es cerrado en \mathbb{R}^n , obtenemos que $\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n$ es cerrado en el compacto $\text{Fr}(B(x, 1))$ y, por ende, es compacto en \mathbb{R}^n . Para concluir que $N_x(\mathbb{H}^n) = B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$, mostraremos que

$$B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n = x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n). \quad (2.1)$$

Sea $y = (y_1, \dots, y_n) \in B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$. Entonces $\|x - y\| \leq 1$ y $y_n \geq 0$. Como $y \in B(x, 1) = x\text{Fr}(B(x, 1))$, entonces existen $\lambda \in I$ y $z \in \text{Fr}(B(x, 1))$ tales que $\lambda x + (1 - \lambda)z = y$. Escribamos $z = (z_1, \dots, z_n)$. Note que $y_n = (1 - \lambda)z_n$, luego al ser $1 - \lambda, y_n \geq 0$, se sigue que $z_n \geq 0$, por lo cual $z \in \mathbb{H}^n$. Así, $z \in \text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n$ y $y \in x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n)$. Por ende, $B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n \subset x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n)$. Para verificar la otra contención, sea $y \in x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n)$. Entonces existen $\lambda \in I$ y $z \in \text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n$ tales que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. Como $x, z \in B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$ y $y \in [x, z]$, por la convexidad de $B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$ se sigue que $y \in B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$. En consecuencia, $x(\text{Fr}(B(x, 1)) \cap \mathbb{H}^n) \subset B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$. Así, obtenemos (2.17) y $N_x(\mathbb{H}^n) = B(x, 1) \cap \mathbb{H}^n$.

Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{H}^n$ existe alguna $N_x(\mathbb{H}^n)$, luego \mathbb{H}^n es un poliedro. ■

Proposición 2.1.4. Sean $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^m$ poliedros. Se cumple que:

- (1) $P = \bigcap_{i=1}^n P_i$ es un poliedro.
- (2) Si P_1, \dots, P_n son cerrados en \mathbb{R}^m , entonces $\bigcup_{i=1}^n P_i$ es un poliedro.

Demostración.

(1) Sea $p \in P$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B_{P_i}(p, \varepsilon_i)$ es una estrella de p en P_i . Tomemos $\varepsilon = \min_{i=1, \dots, n} \varepsilon_i > 0$, de donde se sigue que $N_p^i(P_i) = B_{P_i}(p, \varepsilon)$ es una estrella con enlace $L_p^i(P_i) = \text{Fr}(B(p, \varepsilon)) \cap P_i$, $i = 1, \dots, n$. Dado que $L_p^i(P_i)$ es compacto en \mathbb{R}^m para $\forall i$, tenemos que $\bigcap_{i=1}^n L_p^i(P_i)$ es compacto en \mathbb{R}^m . No obstante,

$$\bigcap_{i=1}^n L_p^i(P_i) = \text{Fr}(B(p, \varepsilon)) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) = \text{Fr}(B(p, \varepsilon)) \cap P \subset \text{Fr}(B(p, \varepsilon)),$$

por lo anterior y ya que $B(p, \varepsilon) = p\text{Fr}(B(p, \varepsilon))$ es un cono, se tiene que $p(\text{Fr}(B(p, \varepsilon)) \cap P) = B_P(p, \varepsilon)$ es un cono. Además, como $B_P(p, \varepsilon) \in \mathcal{N}(p, P)$, se concluye que $B_P(p, \varepsilon)$ es una estrella de p en P . Por lo tanto, P es un poliedro.

(2) Sea $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$ y sea $p \in P$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tomemos ε_i de la siguiente forma: si $p \in P_i$, entonces sea $\varepsilon_i > 0$ tal que se tenga la estrella $N_p^i(P_i) = B_{P_i}(p, \varepsilon_i)$. Si $p \notin P_i$, ya que P_i es cerrado, podemos tomar $\varepsilon_i = d(p, P_i) > 0$. Dado lo anterior, sea $0 < \varepsilon < \min_{i=1, \dots, n} \varepsilon_i$. Mostraremos que $N = B_P(p, \varepsilon)$ es una estrella de p en P . Es claro que $N \in \mathcal{N}(p, P)$. Sea

$i \in \{1, \dots, n\}$. Si $p \in P_i$, como $\varepsilon < \varepsilon_i$ se sigue que $B_{P_i}(p, \varepsilon) = pL_i$ es una estrella de p en P_i , con $L_i = \text{Fr}(B(p, \varepsilon)) \cap P_i$. Por su parte, cuando $p \notin P_i$, se verifica que $B(p, \varepsilon) \cap P_i = \emptyset$. Así,

$$N = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ p \in P_i}} (B(p, \varepsilon) \cap P_i) = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ p \in P_i}} B_{P_i}(p, \varepsilon) = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ p \in P_i}} pL_i = p \left(\bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ p \in P_i}} L_i \right).$$

Sea $L = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ p \in P_i}} L_i$. Observe que L es compacto en \mathbb{R}^m por ser una unión finita de compactos en \mathbb{R}^m . Además, $L \subset \text{Fr}(B(p, \varepsilon))$, luego $B_P(p, \varepsilon) = pL$ es un cono. Por lo tanto, $N_p(P) = B_P(p, \varepsilon)$. De este modo, concluimos que P es un poliedro en \mathbb{R}^m . ■

Proposición 2.1.5. Sean $P_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $P_2 \subset \mathbb{R}^m$ poliedros. Entonces $P_1 \times P_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es un poliedro.

Demostración. Sea $(a_1, a_2) \in P_1 \times P_2$. Existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que se tienen las estrellas $B_{P_1}(a_1, \varepsilon_1) = a_1L_1$ y $B_{P_2}(a_2, \varepsilon_2) = a_2L_2$, con $L_1 = \text{Fr}_{\mathbb{R}^n}(B(a_1, \varepsilon_1)) \cap P_1$ y $L_2 = \text{Fr}_{\mathbb{R}^m}(B(a_2, \varepsilon_2)) \cap P_2$ compactos. Sea $L = (L_1 \times a_2L_2) \cup (a_1L_1 \times L_2)$. Gracias a la proposición 1.4.4, se cumple que $a_1L_1 \times a_2L_2 = (a_1, a_2)L$.

Mostraremos que $N = (a_1, a_2)L$ es una estrella de (a_1, a_2) en $P_1 \times P_2$. Dado que $a_iL_i \in \mathcal{N}(a_i, P_i)$, $i = 1, 2$, entonces $N = a_1L_1 \times a_2L_2 \in \mathcal{N}((a_1, a_2), P_1 \times P_2)$. Como $L_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $L_2 \subset \mathbb{R}^m$ son compactos, por el lema 1.4.10 se tiene que $a_1L_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $a_2L_2 \subset \mathbb{R}^m$ son compactos. En consecuencia, $L_1 \times a_2L_2$ y $a_1L_1 \times L_2$ son compactos en \mathbb{R}^{n+m} y, así, L es compacto en \mathbb{R}^{n+m} . Para concluir que $N_{(a_1, a_2)}(P_1 \times P_2) = N$, falta exhibir que N es un cono. Denotemos $B_i = B(a_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2$. Puesto que $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $B_2 \subset \mathbb{R}^m$ son compactos y convexos, recordando que el producto cartesiano de un número finito de compactos es compacto, así como el lema 1.3.4, se sigue que $B_1 \times B_2$ es compacto y convexo en \mathbb{R}^{n+m} . Ya que $B_1 \times B_2 \in \mathcal{N}((a_1, a_2), P_1 \times P_2)$, entonces $(a_1, a_2) \in \text{Int}_{\mathbb{R}^{n+m}}(B_1 \times B_2)$. De este modo, por la proposición 1.4.8, se tiene el cono $(a_1, a_2)\text{Fr}_{\mathbb{R}^{n+m}}(B_1 \times B_2)$. Por (1.1) y (1.4):

$$\begin{aligned} \text{Fr}_{\mathbb{R}^{n+m}}(B_1 \times B_2) &= (\text{Fr}_{\mathbb{R}^n}(B_1) \times B_2) \cup (B_1 \times \text{Fr}_{\mathbb{R}^m}(B_2)) \\ \Rightarrow \text{Fr}_{\mathbb{R}^{n+m}}(B_1 \times B_2) \cap (P_1 \times P_2) &= ((\text{Fr}_{\mathbb{R}^n}(B_1) \cap P_1) \times (B_2 \cap P_2)) \cup ((B_1 \cap P_1) \times (\text{Fr}_{\mathbb{R}^m}(B_2) \cap P_2)) \\ &= (L_1 \times a_2L_2) \cup (a_1L_1 \times L_2) = L. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $(a_1, a_2)L$ es un cono, porque $L \subset \text{Fr}_{\mathbb{R}^{n+m}}(B(a_1, \varepsilon_1) \times B(a_2, \varepsilon_2))$. Por lo tanto, $N_{(a_1, a_2)}(P_1 \times P_2) = (a_1, a_2)L$. Como esto es válido para cualquier $(a_1, a_2) \in P_1 \times P_2$, obtenemos que $P_1 \times P_2$ es un poliedro. ■

Ejemplo 2.1.6 (Cubo). Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $B(a, \varepsilon) = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \dots \times [a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$ es un poliedro en \mathbb{R}^n , al cual llamaremos **cubo**. Esto es debido a la proposición 2.1.5, pues vimos que $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$ es un poliedro en \mathbb{R} , $i = 1, \dots, n$ (ejemplo 2.1.3). Una **cara** de $B(a, \varepsilon)$ se obtiene reemplazando cada factor $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$ ya sea por sí mismo o por $\{a_i - \varepsilon\}$ o $\{a_i + \varepsilon\}$ y, de nuevo por la proposición 2.1.5, las caras son también poliedros, los cuales son compactos en \mathbb{R}^n porque cada factor es compacto en \mathbb{R} . Usando

(1.1), puede probarse que $\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ es una unión finita de caras de $B(a, \varepsilon)$, las cuales son cerradas en \mathbb{R}^n , luego por la proposición 2.1.4 obtenemos que $\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ es un poliedro. A estas caras que conforman $\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ les llamaremos **caras frontera** del cubo.

Lema 2.1.7. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow B$ un homeomorfismo lineal. Si $P \subset A$ es un poliedro de \mathbb{R}^m , entonces $f(P)$ es un poliedro de \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $P \subset A$ un poliedro. Sea $y \in f(P)$. Entonces existe $x \in P$ tal que $y = f(x)$. Además, como P es un poliedro, se tiene una estrella $N_x(P) = xL_x(P)$ de x en P . Como $xL_x(P)$ es un cono y f es una inyección lineal, obtenemos que $f(xL_x(P)) = f(x)f(L_x(P)) = yf(L_x(P))$ es un cono (proposición 1.4.7). Asimismo, ya que $L_x(P)$ es compacto y f es continua, entonces $f(L_x(P))$ es compacto. Dado que f es un homeomorfismo, la restricción $f : P \rightarrow f(P)$ también es un homeomorfismo, y como $N_x(P) \in \mathcal{N}(x, P)$, se sigue que $f(N_x(P)) \in \mathcal{N}(y, f(P))$. Lo anterior nos dice que $f(N_x(P))$ es una estrella de y en $f(P)$. Como esto es válido para todo $y \in f(P)$, concluimos que $f(P)$ es un poliedro. ■

Corolario 2.1.8. Cualquier subespacio vectorial de \mathbb{R}^n es un poliedro.

Demostración. Si $V \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de dimensión m , entonces V es isomorfo a \mathbb{R}^m . Como \mathbb{R}^m es un poliedro, el resultado se sigue del lema 2.1.7. ■

Definición 2.1.9. Sea $f : P \rightarrow Q$ una función entre poliedros. Sea $a \in P$ y aL un cono. Diremos que f es **cónica** en aL , si para cada $x \in L$ y $\lambda \in I$ se cumple que

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)x) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(x).$$

La función $f : P \rightarrow Q$ es **PL**, si es continua y cada punto $a \in P$ tiene una estrella N tal que f es cónica en N .

Observación 2.1.10. En el contexto de la definición anterior, supongamos que $aL' \subset N = aL$ es un cono. Sean $x \in L'$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Como $x \in L' \subset aL' \subset aL$, existen $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $y \in L$ tales que $x = \alpha a + \beta y$, entonces por ser f cónica en aL , $f(x) = f(\alpha a + \beta y) = \alpha f(a) + \beta f(y)$.

Además, $\lambda a + \mu x = (\lambda + \mu\alpha)a + \mu\beta y$ con $\lambda + \mu\alpha, \mu\beta \geq 0$ y $(\lambda + \mu\alpha) + \mu\beta = 1$, luego

$$f(\lambda a + \mu x) = f((\lambda + \mu\alpha)a + \mu\beta y) = (\lambda + \mu\alpha)f(a) + \mu\beta f(y) = \lambda f(a) + \mu f(x).$$

Por lo tanto, si f es cónica en N y $aL' \subset N$, entonces f también es cónica en aL' .

Proposición 2.1.11. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación afín entre subespacios vectoriales. Entonces f es PL.

Demostración. Dado que V y W son subespacios vectoriales, por el corolario 2.1.8 tenemos que éstos son poliedros. Por la proposición 1.2.14, sabemos que f es continua. Sea $x \in V$. Ya que V es un poliedro, existe $N_x(V) = xL_x(V)$. Sean $\lambda \in I$ y $l \in L_x(V)$. Como f es una transformación afín, entonces $f(\lambda x + (1 - \lambda)l) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(l)$. Por ende, f es cónica en $N_x(V)$, lo cual demuestra que f es PL. ■

Lema 2.1.12. Sea $f : P \rightarrow Q$ una función PL. Si R es un subpoliedro de P , entonces $f|_R : R \rightarrow Q$ es una función PL.

Demostración. Sea $x \in R$. Ya que f es continua, entonces $f|_R$ es continua, la cual es una función entre poliedros. Como $R \subset P$ y f es PL, entonces existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que f es cónica en $B_P(x, \varepsilon_1)$. Por otro lado, ya que R es un poliedro, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_R(x, \varepsilon_2)$ es una estrella de x en R . Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tenemos que $B_R(x, \varepsilon)$ es una estrella de x en R . Además, como $B_R(x, \varepsilon) \subset B_P(x, \varepsilon_1)$ y f es cónica en $B_P(x, \varepsilon_1)$, se sigue que f es cónica en $B_R(x, \varepsilon)$ (observación 2.1.10). Lo anterior demuestra que $f|_R$ es PL. ■

Teorema 2.1.13.

- (1) Si $f : P \rightarrow Q$ y $g : Q \rightarrow R$ son funciones PL, entonces $g \circ f$ es PL.
- (2) Si $f : P \rightarrow Q$ y $g : R \rightarrow S$ son funciones PL, entonces $f \times g$ es PL.

Demostración.

(1) Como f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua. Sea $a \in P$. Ya que f es PL, para $a \in P$ existe una estrella $B_P(a, \delta_1)$ en la cual f es cónica. Asimismo, debido a que g es PL y $f(a) \in Q$, existe una estrella $B_Q(f(a), \varepsilon)$ en la cual g es cónica. Como f es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(B_P(a, \delta_2)) \subset B_Q(f(a), \varepsilon)$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces $B_P(a, \delta)$ es una estrella de a en P , en la cual f es cónica y tal que $f(B_P(a, \delta)) \subset B_Q(f(a), \varepsilon)$. Sean L y L' las bases de los conos $B_P(a, \delta)$ y $B_Q(f(a), \varepsilon)$, respectivamente. Sean $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ y $x \in L$. Puesto que f es cónica en $B_P(a, \delta)$, tenemos

$$f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x) \quad (2.2)$$

y como $f(x) \in f(B_P(a, \delta)) \subset B_Q(f(a), \varepsilon)$, entonces existen $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $y \in L'$ tales que $f(x) = \alpha f(a) + \beta y$, por lo que $\lambda f(a) + \mu f(x) = (\lambda + \mu\alpha) f(a) + \mu\beta y \in f(a)L' = B_Q(f(a), \varepsilon)$. Luego, ya que g es cónica en $B_Q(f(a), \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} g(\lambda f(a) + \mu f(x)) &= g((\lambda + \mu\alpha) f(a) + \mu\beta y) = (\lambda + \mu\alpha) g(f(a)) + \mu\beta g(y) \\ &= \lambda g(f(a)) + \mu(\alpha g(f(a)) + \beta g(y)) \\ &= \lambda g(f(a)) + \mu g(\alpha f(a) + \beta y) = \lambda g(f(a)) + \mu g(f(x)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Así,

$$(g \circ f)(\lambda a + \mu x) = g(f(\lambda a + \mu x)) \stackrel{(2.2)}{=} g(\lambda f(a) + \mu f(x)) \stackrel{(2.3)}{=} \lambda g(f(a)) + \mu g(f(x)),$$

lo cual nos dice que $g \circ f$ es cónica en $B_P(a, \delta)$. Por lo tanto, $g \circ f$ es PL.

(2) Por la proposición 2.1.5, sabemos que $P \times R$ y $Q \times S$ son poliedros. Además, gracias a que f y g son continuas, es claro que $f \times g$ es continua. Sea $(a_1, a_2) \in P \times R$. Como f y g son PL, existen estrellas $B_P(a_1, \varepsilon_1) = a_1 L_1$ y $B_R(a_2, \varepsilon_2) = a_2 L_2$ donde f y g es cónica, respectivamente. Por lo mostrado en la proposición 2.1.5, $a_1 L_1 \times a_2 L_2 = (a_1, a_2) L$, con $L = (L_1 \times a_2 L_2) \cup (a_1 L_1 \times L_2)$, es una estrella de (a_1, a_2) en $P \times R$. Entonces para

cualesquiera $(x, y) \in L$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, tenemos que $\lambda a_1 + \mu x \in a_1 L_1$ y $\lambda a_2 + \mu y \in a_2 L_2$, por lo cual

$$\begin{aligned} (f \times g)(\lambda(a_1, a_2) + \mu(x, y)) &= (f(\lambda a_1 + \mu x), g(\lambda a_2 + \mu y)) \\ &= (\lambda f(a_1) + \mu f(x), \lambda g(a_2) + \mu g(y)) \\ &= \lambda(f \times g)(a_1, a_2) + \mu(f \times g)(x, y). \end{aligned}$$

En consecuencia, $f \times g$ es cónica en $(a_1, a_2)L$. Por lo tanto, $f \times g$ es PL. ■

Proposición 2.1.14. Sean $P \subset \mathbb{R}^n$ y $Q \subset \mathbb{R}^m$ poliedros. Una función continua $f : P \rightarrow Q$ es PL si y sólo si $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in P\}$ es un poliedro.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que f es PL. Sea $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$. Por definición de función PL, existe $N_x(P) = xL$ en la cual f es cónica. Usando el lema 1.1.32, $\Gamma : P \rightarrow \Gamma(f)$ es un homeomorfismo y, en particular, tenemos que $\Gamma : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ es continua. Puesto que L es compacto en \mathbb{R}^n y $L \subset P$, entonces $\Gamma(L)$ es compacto en \mathbb{R}^{n+m} . Debido a que $xL \subset P$, entonces $\Gamma(xL) \subset \Gamma(P)$. Por otro lado, $xL \in \mathcal{N}(x, P)$ y como $\Gamma : P \rightarrow \Gamma(f)$ es un homeomorfismo, $\Gamma(xL) \in \mathcal{N}(\Gamma(x), \Gamma(f)) = \mathcal{N}((x, f(x)), \Gamma(f))$. Sin embargo, recordando que f es cónica en xL , es fácil ver que $\Gamma(xL) = (x, f(x))\Gamma(L)$. Además, se verifica que $M := (x, f(x))\Gamma(L)$ es un cono porque xL es un cono. En consecuencia, M es una estrella de $(x, f(x))$ en $\Gamma(f)$, lo cual demuestra que $\Gamma(f)$ es un poliedro en \mathbb{R}^{n+m} .

\Leftarrow Supongamos que $\Gamma(f)$ es un poliedro en \mathbb{R}^{n+m} . Sea $x \in P$. Entonces $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$, por lo que existe $N_{(x, f(x))}(\Gamma(f)) = (x, f(x))L$. Tenemos que $L \subset \Gamma(f)$. Además, notemos que, para cualesquiera $\lambda \in I$ y $y \in P$ tal que $(y, f(y)) \in L$:

$$\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) \in (x, f(x))L \subset \Gamma(f),$$

lo cual implica

$$\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) = (z, f(z)),$$

para algún $z \in P$, pero entonces

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) = (z, f(z)),$$

de donde se sigue que

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y). \quad (2.4)$$

Consideremos la función proyección $\mathbf{p} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mostraremos que $M = x\mathbf{p}(L)$ es una estrella de x en P y, dado que $\mathbf{p}(L) = \{\mathbf{p}(y, f(y)) : (y, f(y)) \in L\} = \{y \in P : (y, f(y)) \in L\}$, por (2.4) se seguirá que f es cónica en M .

Como L es compacto en \mathbb{R}^{n+m} y \mathbf{p} es continua, $\mathbf{p}(L)$ es compacto en \mathbb{R}^n . Por el lema 1.1.32, $\mathbf{p}|_{\Gamma(f)}$ es inyectiva, por lo que \mathbf{p} es inyectiva en el cono $(x, f(x))L$ y, ya que \mathbf{p} es una transformación lineal, de la proposición 1.4.7 obtenemos que $\mathbf{p}((x, f(x))L) = \mathbf{p}(x, f(x))\mathbf{p}(L) = x\mathbf{p}(L)$

es un cono. Por otro lado, $(x, f(x))L \in \mathcal{N}((x, f(x)), \Gamma(f))$ y debido a que $\mathbf{p}|\Gamma(f)$ es un homeomorfismo (ver lema 1.1.32), entonces $x\mathbf{p}(L) = \mathbf{p}((x, f(x))L) \in \mathcal{N}(\mathbf{p}(x, f(x)), P) = \mathcal{N}(x, P)$. Por ende, $M_x(P) = x\mathbf{p}(L)$ y f es cónica en $M_x(P)$. Como esto se cumple para cualquier $x \in P$, se concluye que f es PL. ■

Proposición 2.1.15. *Sea $f : P \rightarrow Q$ una función PL. Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también es PL.*

Demostración. Tenemos que $f^{-1} : Q \rightarrow P$ es continua ya que f es un homeomorfismo. Sea $q \in Q$. Sea $p = f^{-1}(q) \in P$. Como $f : P \rightarrow Q$ es PL, existe $\varepsilon > 0$ tal que f es cónica en $B_P(p, \varepsilon)$. Debido a que f^{-1} es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f^{-1}(B_Q(q, \delta_1)) \subset B_P(p, \varepsilon)$. Dado que Q es un poliedro, existe $\delta_2 > 0$ para el cual $B_Q(q, \delta_2)$ es una estrella de q . Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tenemos que $f^{-1}(B_Q(q, \delta)) \subset B_P(p, \varepsilon)$ y $B_Q(q, \delta)$ es una estrella de q . Veamos que f^{-1} es cónica en $B_Q(q, \delta)$. Sean $x \in Q$ tal que $\|x - q\| = \delta$ y $\lambda \in I$. Entonces $x \neq q$ y $\|f^{-1}(x) - p\| \leq \varepsilon$. Por la inyectividad de f^{-1} , tenemos que $\|f^{-1}(x) - p\| > 0$. Como f es cónica en $B_P(p, \varepsilon)$, se sigue que f es cónica en $B_P(p, \|f^{-1}(x) - p\|) \subset B_P(p, \varepsilon)$, luego

$$f(\lambda f^{-1}(q) + (1 - \lambda)f^{-1}(x)) = f(\lambda p + (1 - \lambda)f^{-1}(x)) = \lambda q + (1 - \lambda)x,$$

lo cual implica

$$\lambda f^{-1}(q) + (1 - \lambda)f^{-1}(x) = f^{-1}(\lambda q + (1 - \lambda)x).$$

Por lo tanto, f^{-1} es cónica en $B_Q(q, \delta)$. Esto demuestra que f^{-1} es PL. ■

Proposición 2.1.16. *Sea $P = \bigcup_{i=1}^n P_i \subset \mathbb{R}^m$ una unión finita de poliedros cerrados. Si Q es un poliedro y $f : P \rightarrow Q$ es una función tal que $f|_{P_i}$ es PL, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces f es PL.*

Demostración. Dado que P_1, \dots, P_n son poliedros cerrados en \mathbb{R}^m , por la proposición 2.1.4, P es un poliedro en \mathbb{R}^m . Además, para cada i , se tiene que $P_i \subset P$, de modo que P_i es cerrado en P . Asimismo, para cada i , ya que $f|_{P_i}$ es PL, entonces $f|_{P_i}$ es continua. Denotemos $f_i := f|_{P_i}, \forall i$. Es claro que f está definido por partes a partir de las funciones f_i y $f_i|(P_i \cap P_j) = f_j|(P_i \cap P_j)$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Así, por el lema del pegado, obtenemos que f es continua.

Ahora bien, sea $x \in P$. En la demostración de la proposición 2.1.4, vimos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_P(x, \varepsilon_0)$ es una estrella de x en P y $B(x, \varepsilon_0) \cap P_i = \emptyset$, para todo i tal que $x \notin P_i$. Para cada i tal que $x \in P_i$, como f_i es PL, entonces existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B_{P_i}(x, \varepsilon_i)$ es una estrella de x en P_i en la cual f_i es cónica. Denotando $P_0 := P$, sea $\varepsilon = \min_{\substack{i \in \{0, \dots, n\} \\ x \in P_i}} \varepsilon_i > 0$. Para cada i tal que

$x \in P_i$, es claro que $B_{P_i}(x, \varepsilon) = x(\text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i)$ es una estrella de x en P_i , en la cual f_i es cónica. También $B_P(x, \varepsilon) = xL$ es una estrella de x en P , donde $L = \text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P$. Por otro lado, como $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, para cada i tal que $x \notin P_i$, se cumple que $B(x, \varepsilon) \cap P_i \subset B(x, \varepsilon_0) \cap P_i = \emptyset$, es decir, $B(x, \varepsilon) \cap P_i = \emptyset$; de esta forma, ya que $\text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i \subset B(x, \varepsilon) \cap P_i$, entonces

$\text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i = \emptyset$. Por ende, $L = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ x \in P_i}} (\text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i)$. Veamos que f es cónica en xL .

Sean $\lambda \in I$ y $l \in L$. Tenemos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in P_i$ y $l \in \text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i$. Entonces $\lambda x + (1 - \lambda)l \in B_{P_i}(x, \varepsilon) \subset P_i$ y como f_i es cónica en $B_{P_i}(x, \varepsilon) = x(\text{Fr}(B(x, \varepsilon)) \cap P_i)$, tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)l) = f_i(\lambda x + (1 - \lambda)l) = \lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(l) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(l).$$

Así, f es cónica en xL . Ya que lo anterior es válido $\forall x \in P$, concluimos que f es PL. ■

Proposición 2.1.17. *Todo n -simplejo es un poliedro compacto.*

Demostración. Ya vimos en la proposición 1.6.9 que todo n -simplejo es compacto. Un 0-simplejo es trivialmente un poliedro. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos primero que ρ^n es un poliedro. En el ejemplo 2.1.3 vimos que $H_n := \mathbb{H}^n$ es un poliedro y en la proposición 1.6.9 se vio que $\rho^n = \bigcap_{i=0}^n H_i$, donde cada H_i es la imagen de \mathbb{H}^n bajo un homeomorfismo lineal y entonces el lema 2.1.7 afirma que H_i es un poliedro. Debido a la proposición 2.1.4, obtenemos que ρ^n es un poliedro, ya que es una intersección finita de poliedros.

Para el caso general, sea σ^n un n -simplejo. Debido al lema 1.6.8, existe un homeomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff}(\sigma^n)$ tal que $h(\rho^n) = \sigma^n$. Gracias a que ρ^n es un poliedro, el lema 2.1.7 nos permite concluir que σ^n es un poliedro. ■

Lema 2.1.18. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación afín. Para cualquier k -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$, si $k \in \{0, 1\}$ o f es inyectiva en $\text{aff}(\sigma)$, entonces $f(\sigma) = \langle f(v_0), \dots, f(v_k) \rangle$ es un simplejo. En general, $f(\sigma)$ es un poliedro compacto en \mathbb{R}^m .*

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Si $\sigma = \langle v_0 \rangle$, entonces $f(\sigma) = \langle f(v_0) \rangle$, el cual es un simplejo. Si $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$, entonces $f(v_1)$ y $f(v_0)$ son afinmente independientes siempre que $f(v_1) \neq f(v_0)$, en cuyo caso $\langle f(v_0), f(v_1) \rangle$ es un simplejo. Además, por ser f una transformación afín, $f((1 - t)v_0 + tv_1) = (1 - t)f(v_0) + tf(v_1)$, $\forall t \geq 0$, de donde se sigue que $f(\sigma) = \langle f(v_0), f(v_1) \rangle$. No obstante, si $f(v_1) = f(v_0)$, aun se cumple que $f(\sigma) = \langle f(v_0) \rangle$ es un simplejo.

Ahora, supongamos que f es inyectiva en $\text{aff}(\sigma)$. Veamos que $f(v_0), \dots, f(v_k)$ son afinmente independientes. Sean $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^k \mu_i$. Como f es una transformación afín inyectiva, $\sum_{i=0}^k \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=0}^k \mu_i f(v_i)$ implica $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^k \mu_i v_i$, pero, $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^k \mu_i v_i \in \text{aff}(\sigma)$ y como v_0, \dots, v_n son afinmente independientes, entonces $\lambda_i = \mu_i$, para $i = 0, \dots, n$. Esto demuestra que $f(v_0), \dots, f(v_k)$ son afinmente independientes y $\langle f(v_0), \dots, f(v_k) \rangle$ es un simplejo. Por otro lado, sean $\lambda_i \geq 0$, tales que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. De nuevo, $f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(v_i)$ y de aquí, es claro que $f(\sigma) = \langle f(v_0), \dots, f(v_k) \rangle$.

En los casos previos, por la proposición 2.1.17, $f(\sigma)$ es un poliedro por ser un simplejo.

Supongamos en esta parte que f no es inyectiva en $\text{aff}(\sigma)$ y que $k \geq 2$. Dado que f es una transformación afín, existen una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^m$ tales que $f(x) = T(x) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Por la proposición 1.6.2, $\text{aff}(\sigma) = v_0 + \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0)$ y

debido a la proposición 1.2.14, tenemos que T no es inyectiva en $\text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0)$, lo cual quiere decir que $\{T(v_1 - v_0), \dots, T(v_k - v_0)\} = \{T_1 - T_0, \dots, T_k - T_0\}$ es linealmente dependiente, donde estamos denotando $T(v_i) := T_i, \forall i$. De este modo, existen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^k c_i(T_i - T_0) = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c_1 \neq 0$. En consecuencia,

$$c_1(T_1 - T_0) = \sum_{i=2}^k c_i(T_0 - T_i) \Rightarrow T_1 = \left(1 + \sum_{i=2}^k \frac{c_i}{c_1}\right) T_0 - \sum_{i=2}^k \frac{c_i}{c_1} T_i = \sum_{i \neq 1} d_i T_i,$$

siendo $d_0 = 1 + \sum_{i=2}^k \frac{c_i}{c_1}$ y $d_i = -\frac{c_i}{c_1}, i = 2, \dots, k$. Note que $\sum_{i \neq 1} d_i = 1$. De esta forma,

$$T_1 + a = \sum_{i \neq 1} d_i(T_i + a) \Rightarrow f(v_1) = \sum_{i \neq 1} d_i f(v_i). \quad (2.5)$$

Mostraremos que $f(\sigma) = f(\partial\sigma)$. Tenemos que $\partial\sigma \subset \sigma$, luego $f(\partial\sigma) \subset f(\sigma)$. Recíprocamente, sea $z \in f(\sigma)$. Entonces existe $x \in \sigma$ tal que $z = f(x)$. Si $x \in \partial\sigma$, tenemos que $z = f(x) \in f(\partial\sigma)$. En caso contrario, $x \in \sigma^\circ$ y por el corolario 1.6.11, $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$ para algunos $\lambda_0, \dots, \lambda_k > 0$ tales que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Así, usando (2.5) y que f es una transformación afín,

$$f(x) = \sum_{i \neq 1} \lambda_i f(v_i) + \lambda_1 f(v_1) = \sum_{i \neq 1} \lambda_i f(v_i) + \lambda_1 \sum_{i \neq 1} d_i f(v_i) = \sum_{i \neq 1} (\lambda_i + \lambda_1 d_i) f(v_i),$$

pero $\sum_{i \neq 1} d_i = 1$, por lo cual $f(x) = f\left(\sum_{i \neq 1} (\lambda_i + \lambda_1 d_i) v_i\right)$. Note que $y := \sum_{i \neq 1} (\lambda_i + \lambda_1 d_i) v_i \in \text{aff}(\sigma)$. Además, $y = (\lambda_0 + \lambda_1 d_0) v_0 + 0 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^k (\lambda_i + \lambda_1 d_i) v_i$ y, dada la unicidad de las combinaciones afines de v_0, \dots, v_k por ser éstos afinmente independientes, como $\lambda_1 \neq 0$ se sigue que $x \neq y$. Observemos que $x, y \in f^{-1}(z) \cap \text{aff}(\sigma)$. No obstante,

$$f^{-1}(z) = \{w \in \mathbb{R}^n : f(w) = z\} = \{w \in \mathbb{R}^n : T(w) = z - a\} = T^{-1}(z - a).$$

Recordando que en toda transformación lineal las fibras son trasladados del núcleo y el núcleo es un subespacio vectorial del dominio, es claro que $f^{-1}(z)$ es un subespacio afín en \mathbb{R}^n . Ya que también $\text{aff}(\sigma)$ es un subespacio afín de \mathbb{R}^n y $f^{-1}(z) \cap \text{aff}(\sigma) \neq \emptyset$, obtenemos que $f^{-1}(z) \cap \text{aff}(\sigma)$ es un subespacio afín de \mathbb{R}^n . Puesto que $x, y \in f^{-1}(z) \cap \text{aff}(\sigma)$ y $x \neq y$, por la proposición 1.3.8 se tiene que $R(x, y) \subset f^{-1}(z) \cap \text{aff}(\sigma)$. Gracias a que $x \in \sigma^\circ$ y $y \in \text{aff}(\sigma) - \{x\}$, por el corolario 1.6.11 existe $w \in R(x, y) \cap \partial\sigma$ y como $R(x, y) \subset f^{-1}(z)$, obtenemos que $w \in f^{-1}(z) \cap \partial\sigma$, luego $z = f(w) \in f(\partial\sigma)$. Al ser esto válido $\forall z \in f(\sigma)$, tenemos que $f(\sigma) \subset f(\partial\sigma)$.

En resumen, hemos mostrado que, para cualquier k -simplejo σ con $k \geq 2$, $f(\sigma) = f(\partial\sigma)$. Con esto en mente, para cualquier k -simplejo σ con $k \leq n$, concluiremos que $f(\sigma)$ es un poliedro compacto. Por inducción sobre k . Ya hemos probado el caso $k \in \{0, 1\}$. Ahora, para cierto $1 \leq k < n$, supongamos que el resultado se cumple y veamos que también es válido para $k + 1$. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_{k+1} \rangle$. Ya que $k + 1 \geq 2$, sabemos que

$$f(\sigma) = f(\partial\sigma) = f\left(\bigcup_{i=0}^{k+1} \sigma \setminus \langle v_i \rangle\right) = \bigcup_{i=0}^{k+1} f(\sigma \setminus \langle v_i \rangle).$$

Pero para cada i , $\sigma \setminus \langle v_i \rangle$ es un k -simplejo y, por hipótesis de inducción, $f(\sigma \setminus \langle v_i \rangle)$ es un poliedro compacto. De esta forma, $f(\sigma)$ es una unión finita de poliedros compactos en \mathbb{R}^m , cada uno de los cuales son cerrados en \mathbb{R}^m . Aplicando la proposición 2.1.4, resulta que $f(\sigma)$ es un poliedro compacto en \mathbb{R}^m . Esto concluye la demostración por inducción. ■

Teorema 2.1.19. *Un poliedro compacto no vacío es una unión finita de simplejos.*

Demostración. Procederemos a realizar la demostración por inducción sobre la dimensión de la envolvente afín de poliedros compactos no vacíos. Sea $P \neq \emptyset$ un poliedro compacto en \mathbb{R}^m con $\dim(\text{aff}(P)) = 0$, entonces $\text{aff}(P) = \{x\}$ para algún $x \in \mathbb{R}^m$, pero como $P \subset \{x\}$ y $P \neq \emptyset$, se sigue que $P = \{x\}$, el cual es un simplejo.

Ahora bien, para algún $n \geq 0$, supongamos que cualquier poliedro compacto, cuya envolvente afín sea de dimensión n , es una unión finita de simplejos y veamos que esto también es cierto para $n + 1$. Sea $P \neq \emptyset$ un poliedro compacto con $\dim(\text{aff}(P)) = n + 1$. Sea $p \in P$. Dado que $p \in \text{aff}(P)$, por el teorema 1.2.2 podemos escribir $\text{aff}(P) = p + S$ para algún subespacio S de \mathbb{R}^m . Como $\dim(S) = n + 1$, existe un isomorfismo $T : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Ya que las traslaciones son homeomorfismos lineales, por el lema 2.1.7 tenemos que $P - p := \{x - p : x \in P\} \subset S$ es un poliedro. Puesto que T es una transformación lineal inyectiva, del mismo resultado se sigue que $T(P - p)$ es un poliedro en \mathbb{R}^{n+1} . Si $T(P - p)$ es una unión finita de simplejos, digamos $T(P - p) = \bigcup_{i=1}^k A_i$, definiendo la transformación afín inyectiva $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $f(x) = T^{-1}(x) + p$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$, usando el lema 2.1.18 obtenemos que $f(A_i)$ es un simplejo, para $i = 1, \dots, k$. Además, puede verse que $P = \bigcup_{i=1}^k f(A_i)$, por lo que tendremos que P será una unión finita de simplejos.

Debido a lo anterior podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $a \in P$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_P(a, \varepsilon) = aL$ es una estrella de a en P , con $L = \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap P$. Sea F una cara frontera del cubo $B(a, \varepsilon)$. Asumiendo que $L \cap F \neq \emptyset$, como $L \cap F \subset F$, entonces $\text{aff}(L \cap F) \subset \text{aff}(F)$, luego del ejemplo 1.2.8, $\dim(\text{aff}(L \cap F)) \leq \dim(\text{aff}(F)) = (n + 1) - 1 = n$. En el ejemplo 2.1.6 mostramos que $F \subset \text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ y vimos que F es un poliedro compacto. Puesto que P también es un poliedro compacto, por la proposición 2.1.4, se tiene que $L \cap F = \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) \cap P \cap F = F \cap P$ es un poliedro compacto. Así, por hipótesis de inducción, $L \cap F$ es una unión finita de simplejos, lo cual es válido para cualquier cara frontera F de $B(a, \varepsilon)$ tal que $L \cap F \neq \emptyset$. Ahora, sabemos que $\text{Fr}(B(a, \varepsilon))$ es la unión de todas las caras frontera F de $B(a, \varepsilon)$ y dado que $L \subset \text{Fr}(B(a, \varepsilon))$:

$$L = L \cap \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = L \cap \left(\bigcup_{\substack{F \text{ cara frontera de} \\ B(a, \varepsilon)}} F \right) = \bigcup_{\substack{F \text{ cara frontera de} \\ B(a, \varepsilon)}} (L \cap F),$$

de donde es claro que L es una unión finita de simplejos, digamos, $L = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Puesto que aL es un cono y $A_i \subset L$, para $i = 1, \dots, k$, entonces aA_i es un cono, luego (a, A_i) está en posición general y, por el lema 1.6.13, aA_i es un simplejo, para $i = 1, \dots, k$. En consecuencia, $aL = \bigcup_{i=1}^k aA_i$ es una unión finita de simplejos. Esto muestra que, para cada $a \in P$ existe $N_a(P)$, el cual es una unión finita de simplejos. Como también para cada $a \in P$ existe un abierto $V_a \in \mathcal{N}(a, P)$ tal que $V_a \subset N_a(P)$, entonces $\{V_a\}_{a \in P}$ es una cubierta

abierta de P y como P es compacto, existen $a_1, \dots, a_r \in P$ tales que $P = \bigcup_{i=1}^r V_{a_i}$. Pero $V_{a_i} \subset N_{a_i}(P)$, donde esta estrella es una unión finita de simplejos, para $i = 1, \dots, r$, por lo que $P = \bigcup_{i=1}^r N_{a_i}(P)$. Por lo tanto, P es una unión finita de simplejos. Así, por inducción, se muestra lo deseado. ■

Corolario 2.1.20. *Sea P un poliedro compacto en \mathbb{R}^n , Q un poliedro en \mathbb{R}^m y $f : P \rightarrow Q$ una función PL, entonces existe una descomposición finita de P en simplejos, $P = \bigcup_{i=1}^r A_i$, tal que $f|_{A_i}$ es lineal para cada i .*

Demostración. Como $f : P \rightarrow Q$ es PL, por la proposición 2.1.14 tenemos que $\Gamma(f)$ es un poliedro en \mathbb{R}^{n+m} . Considerando la función proyección $\mathfrak{p} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, en el lema 1.1.32 vimos que $\Gamma : P \rightarrow \Gamma(f)$ es un homeomorfismo con $\Gamma^{-1} = \mathfrak{p}|_{\Gamma(f)}$. En particular, $\Gamma : P \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ es continua y dado que P es compacto, entonces $\Gamma(P)$ es compacto en \mathbb{R}^{n+m} . Así, $\Gamma(P) \neq \emptyset$ es un poliedro compacto en \mathbb{R}^{n+m} y por el teorema 2.1.19, existen B_1, \dots, B_s simplejos tales que $\Gamma(P) = \bigcup_{i=1}^s B_i$, luego

$$P = \Gamma^{-1}(\Gamma(P)) = \Gamma^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^s B_i\right) = \bigcup_{i=1}^s \Gamma^{-1}(B_i) = \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}(B_i). \quad (2.6)$$

Puesto que \mathfrak{p} es una transformación lineal, ésta es una transformación afín y como B_i es un simplejo para cada $i = 1, \dots, s$, aplicando el lema 2.1.18, $\mathfrak{p}(B_i)$ es un poliedro compacto en \mathbb{R}^n , luego del teorema 2.1.19 obtenemos que $\mathfrak{p}(B_i)$ es una unión finita de simplejos, $\forall i = 1, \dots, s$. Por lo anterior y debido a (2.6), tenemos que P es una unión finita de simplejos, digamos, $P = \bigcup_{i=1}^r A_i$, donde para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ existe un $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $A_i \subset \mathfrak{p}(B_j)$. Fijemos i y j . Como $B_j \subset \Gamma(f)$, podemos escribir $B_j = \langle (b_0, f(b_0)), \dots, (b_k, f(b_k)) \rangle$ para algunos $b_0, \dots, b_k \in P$. Observemos que, como \mathfrak{p} es una transformación lineal, se sigue que $\mathfrak{p}(B_j) = \text{conv}(b_0, \dots, b_k)$. Sean $\lambda_0, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{t=0}^k \lambda_t = 1$, entonces $\sum_{t=0}^k \lambda_t (b_t, f(b_t)) \in B_j$, pero ya que $B_j \subset \Gamma(f)$, existe $x \in P$ tal que

$$(x, f(x)) = \sum_{t=0}^k \lambda_t (b_t, f(b_t)) = \left(\sum_{t=0}^k \lambda_t b_t, \sum_{t=0}^k \lambda_t f(b_t) \right),$$

y esto nos permite deducir que $f\left(\sum_{t=0}^k \lambda_t b_t\right) = \sum_{t=0}^k \lambda_t f(b_t)$. Dado que $A_i \subset \mathfrak{p}(B_j)$, escribiendo $A_i = \langle a_0, \dots, a_l \rangle$, se verifica que $f\left(\sum_{p=0}^l \mu_p a_p\right) = \sum_{p=0}^l \mu_p f(a_p)$, para cualesquiera $\mu_p \geq 0$ con $\sum_{p=0}^l \mu_p = 1$. Por ende, usando la proposición 1.6.15, se sigue que $f|_{A_i}$ es lineal. Dado que lo anterior se cumple para todo i , esto concluye la demostración. ■

La imagen de un poliedro no compacto bajo una inyección PL no necesariamente es un poliedro. Por ejemplo, consideremos $A = (0, 1) \times (0, 1) \times \{0\}$ y $B = \left[\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right] \times \{1\}$. Tanto A como B son poliedros por ser productos cartesianos de poliedros (proposición 2.1.5). Además, $\text{Cl}(A) \cap B = \emptyset$. Sea $P = A \cup B$. Observe que P no es compacto porque no es cerrado en \mathbb{R}^3 . Como A es un poliedro, para cada $a \in A$ podemos hallar un $\varepsilon' > 0$ tal que $B_A(a, \varepsilon')$ es una estrella de a en A . Es más, ya que $a \notin B$ y B es cerrado, es posible encontrar $\varepsilon < \varepsilon'$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap B = \emptyset$, de modo que $B_P(a, \varepsilon) = B_A(a, \varepsilon)$, luego $B_P(a, \varepsilon)$ es una estrella de a en

P por estar contenido en la estrella $B_A(a, \varepsilon')$. Similarmente, puesto que B es un poliedro y $\text{Cl}(A)$ es cerrado, para cada $b \in B$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_P(b, \varepsilon) = B_B(b, \varepsilon)$ es una estrella de b en B . Esto prueba que P es un poliedro.

Sea $\mathbf{p} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección dada por $\mathbf{p}(x, y, z) = (x, y)$. Ya que P es un subpoliedro de \mathbb{R}^3 y como \mathbf{p} es una transformación lineal, de la proposición 2.1.11 y el lema 2.1.12, obtenemos que $f := \mathbf{p}|_P : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ es PL. También, note que f es inyectiva. Sin embargo, $f(P)$ no es un poliedro, debido a que no es posible hallar una vecindad cónica de $(1, \frac{1}{2}) \in f(P)$ en P . Esto se debe a que, si existiera tal vecindad cónica, podríamos escoger $\varepsilon > 0$ de modo que $B_{f(P)}((1, \frac{1}{2}), \varepsilon) = (1, \frac{1}{2})L$, con $L = \text{Fr}(B((1, \frac{1}{2}), \varepsilon)) \cap f(P)$ compacto. De hecho, es posible escoger ε tal que $\text{Fr}(B((1, \frac{1}{2}), \varepsilon))$ interseque a $[(1, 0), (1, 1)]$ en dos puntos, pero esto implica que L no es cerrado y, por ende, no puede ser compacto (figura 6).

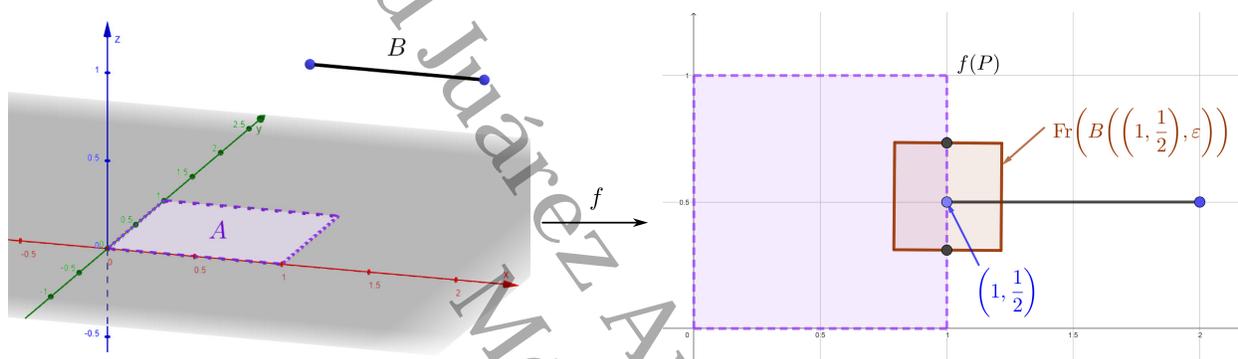


Figura 6: Un poliedro P no compacto y una inyección PL f cuya imagen no es un poliedro.

Lo anterior nos dice que debemos tener cuidado al definir encajes PL.

Definición 2.1.21. Diremos que una función PL $f : P \rightarrow Q$ es un **encaje PL**, si $f(P)$ es un subpoliedro de Q y $f : P \rightarrow f(P)$ es un homeomorfismo.

Teorema 2.1.22. *La imagen de un poliedro compacto bajo una función PL es un poliedro compacto.*

Demostración. Sean $P \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^m$ poliedros, con P compacto, y $f : P \rightarrow Q$ una función PL. Por el corolario 2.1.20, existen A_1, \dots, A_r simplejos tales que $P = \cup_{i=1}^r A_i$ y $f|_{A_i}$ es lineal para cada i . De esta forma, para cada i existe una transformación afín $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f_i|_{A_i} = f|_{A_i}$, pero debido al lema 2.1.18 $f(A_i) = f_i(A_i)$ es un poliedro compacto en \mathbb{R}^m y, por ende, es cerrado en \mathbb{R}^m . Así, por la proposición 2.1.4, $f(P) = \bigcup_{i=1}^r f(A_i)$ es un poliedro compacto por ser una unión finita de poliedros compactos. ■

En consecuencia, toda inyección PL cuyo dominio sea un poliedro compacto es un encaje PL.

2.2. Funciones simpliciales

La definición de función *simplicial* se encuentra en el capítulo 4 de Singer y Thorpe (1967) [37]. Asimismo, para desarrollar esta sección se consultó el capítulo 5 de Lee (2000) [19] y algunos comentarios en el capítulo 2 de Rourke y Sanderson [34].

Definición 2.2.1. Sea $f : \sigma \rightarrow \tau$ una función entre simplejos. Escribiendo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, diremos que f es **simplicial** si:

- (1) Para cada $v_i \in \text{vert}(\sigma)$, $f(v_i) \in \text{vert}(\tau)$.
- (2) Para cada $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \in \sigma$, $f(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i)$.

Observación 2.2.2. En el contexto de la definición previa, como $f(v_i) \in \text{vert}(\tau)$, entonces

$$f(\sigma) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i) : \lambda_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\} \leq \tau.$$

Además, esto exhibe que si $f : \sigma \rightarrow \tau$ es simplicial, entonces $f : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ también lo es.

Proposición 2.2.3. Sean σ y τ simplejos y $f_0 : \text{vert}(\sigma) \rightarrow \text{vert}(\tau)$. Entonces existe una única función continua simplicial $f : \sigma \rightarrow \tau$ tal que $f|_{\text{vert}(\sigma)} = f_0$.

Demostración. Escribamos $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Entonces $f_0(v_i) \in \text{vert}(\tau)$, para $i = 0, \dots, n$. De este modo, $\text{conv}(f_0(v_0), \dots, f_0(v_n)) \leq \tau$, por lo que podemos definir

$$\begin{aligned} f : \sigma &\rightarrow \tau \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i &\mapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i f_0(v_i). \end{aligned}$$

Notemos que $f(v_i) = f_0(v_i)$, $i = 0, \dots, n$, luego $f|_{\text{vert}(\sigma)} = f_0$. Asimismo, para cualesquiera $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, se cumple que $f(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i)$, por lo que f es simplicial. Además, dado que σ es un simplejo, gracias a la proposición 1.6.15, f es lineal, de manera que f es continua por ser la restricción de una transformación afín.

Ahora bien, si $f' : \sigma \rightarrow \tau$ es una función simplicial tal que $f'|_{\text{vert}(\sigma)} = f_0$, debe cumplirse que, para cualesquiera $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$,

$$f' \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f'(v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_0(v_i) = f \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \right),$$

luego $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in \sigma$ y $f = f'$, lo cual demuestra la unicidad. ■

Corolario 2.2.4. Toda función $f : \sigma \rightarrow \tau$ simplicial es continua. Más aún, f es PL.

Demostración. Dado que σ y τ son simplejos, gracias a la proposición 2.1.17 éstos son poliedros. De la unicidad establecida en la proposición 2.2.3, tenemos que f es la restricción de una transformación afín. Así, por la proposición 2.1.11 y el lema 2.1.12, se sigue que f es PL. ■

Proposición 2.2.5. Si $f : \sigma \rightarrow \tau$ es simplicial e inyectiva, entonces $f^{-1} : f(\sigma) \rightarrow \sigma$ es simplicial y, en particular, f es un encaje PL.

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Como f es inyectiva y simplicial, entonces $f : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es biyectiva y, por la observación 2.2.2, también f es simplicial con inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(\sigma) &\rightarrow \sigma \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i) &\mapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i. \end{aligned}$$

Notemos que $f^{-1}(f(v_i)) = v_i$, $i = 0, \dots, n$, y, en consecuencia,

$$f^{-1} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i) \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i f^{-1}(f(v_i)).$$

Lo anterior nos dice que f^{-1} es simplicial.

Como $f : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ y f^{-1} son simpliciales, por el corolario 2.2.4, ambas son continuas. Por ende, $f : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es un homeomorfismo. Debido a la proposición 2.1.17, $f(\sigma)$ es un poliedro ya que es un simplejo. Dado que f es PL gracias al corolario 2.2.4, lo anterior nos dice que f es un encaje PL. ■

Es consecuencia inmediata el siguiente:

Corolario 2.2.6. Sea $f : \sigma \rightarrow \tau$ biyectiva. Si f es simplicial, entonces $f^{-1} : \tau \rightarrow \sigma$ es simplicial. Más aún, f es un homeomorfismo PL.

En vista del corolario anterior, diremos que un **homeomorfismo simplicial** es una biyección que también es simplicial.

2.3. Complejos simpliciales

El desarrollo de esta sección está basado en el capítulo 5 de Lee (2000)[19], el capítulo 2 de Rourke y Sanderson (1982) [34] y el capítulo 0 de Moise (1977) [26]. La definición 2.3.5 se encuentra en el capítulo 1 de Munkres (1984) [28].

Definición 2.3.1. Un **complejo simplicial** es una colección finita K de simplejos en un espacio \mathbb{R}^m tales que:

- (1) Si $\sigma \in K$, entonces cada cara de σ pertenece a K .
- (2) Si $\sigma, \tau \in K$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara tanto de σ como de τ .

Los vértices de los simplejos en K se llamarán los **vértices** de K y al conjunto de vértices de K lo denotaremos por $\text{vert}(K)$. La **dimensión** de K se define como la máxima dimensión entre los simplejos de K . Si K tiene dimensión n , diremos que K es un **n -complejo**. Un **subcomplejo** L de K es un subconjunto de K que es un complejo simplicial. Para cada

$i \geq 0$, K^i es el ***i*-esqueleto** de K , esto es, el conjunto de todos los simplejos de K que tengan dimensión menor o igual que i .

La unión de todos los simplejos en K con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n , denotado por $|K|$, se llama el **poliedro subyacente** de K . Asimismo, para cada complejo K , diremos que K es una **triangulación** de $|K|$.

Observación 2.3.2. Sea K un complejo simplicial.

(1) Si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \cap \tau = \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y τ , ya que \emptyset es cara de cualquier simplejo. De este modo, para mostrar que se cumple (2) en la definición 2.3.1, basta con considerar $\sigma, \tau \in K$ tales que $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

(2) Para que $L \subset K$ sea un subcomplejo de K , la única condición que debe verificarse de la definición 2.3.1 es (1).

(3) Cada i -esqueleto de K es un subcomplejo suyo.

(4) Los interiores de cualesquiera dos simplejos de K distintos son disjuntos.

En efecto, supongamos que $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ son distintos. Tenemos que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de σ_1 y σ_2 . Si $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_1$, entonces σ_1 es una cara propia de σ_2 , por lo que $\sigma_1 \subset \partial\sigma_2$. Esto implica que $\sigma_1^\circ \cap \sigma_2^\circ \subset \partial\sigma_2 \cap \sigma_2^\circ = \emptyset$. Ahora, si $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \sigma_1$, entonces esta intersección es una cara propia de σ_1 , por lo que está contenida en $\partial\sigma_1$, en consecuencia, $\sigma_1^\circ \cap \sigma_2^\circ \subset \sigma_1^\circ \cap \sigma_2 = (\sigma_1 \cap \sigma_2) \cap \sigma_1^\circ \subset \partial\sigma_1 \cap \sigma_1^\circ = \emptyset$, como queríamos.

Ejemplo 2.3.3.

- (1) Cualquier n -simplejo σ^n junto con todas sus caras es un n -complejo, denotado $K(\sigma^n)$, cuyo poliedro subyacente es σ^n .
- (2) Las caras propias de un n -simplejo σ^n constituyen un $(n-1)$ -complejo, el cual denotaremos por $K(\partial\sigma^n)$, cuyo poliedro subyacente es $\partial\sigma^n$.

Demostración. (1) Sea σ^n un n -simplejo. Es claro que si $\tau \leq \sigma^n$, entonces $\tau \in K(\sigma^n)$.

Sean $\tau_1, \tau_2 \in K(\sigma^n)$ tales que $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in \tau_1 \cap \tau_2$. Debido a que $\tau_1 \leq \sigma^n$ y $x \in \tau_1$, tenemos que existen $v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \in \text{vert}(\tau_1) \subset \text{vert}(\sigma^n)$ y $\lambda_0, \dots, \lambda_k > 0$, $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$ tales que $x = \sum_{j=0}^k \lambda_j v_{ij}$. Como $x \in \tau_2$ y $\tau_2 \leq \sigma^n$, por el lema 1.6.5 obtenemos que $v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \in \text{vert}(\tau_2)$. Esto implica que $\text{vert}(\tau_1) \cap \text{vert}(\tau_2) \neq \emptyset$. Por lo anterior, sin perder generalidad asumiremos que $\tau_1 = \langle v_{i_0}, \dots, v_{i_r} \rangle$ y $\tau_2 = \langle w_{i_0}, \dots, w_{i_s} \rangle$ para algunos $v_{i_0}, \dots, v_{i_r}, w_{i_0}, \dots, w_{i_s} \in \text{vert}(\sigma^n)$; y existe $k \leq \min\{r, s\}$ para el cual $v_{ij} = w_{ij}$, $j = 0, \dots, k$, con $\{v_{i(k+1)}, \dots, v_{i_r}\} \cap \{w_{i(k+1)}, \dots, w_{i_s}\} = \emptyset$. Nuevamente, sea $x \in \tau_1 \cap \tau_2$. Por un lado, existen $\lambda_0, \dots, \lambda_r \geq 0$, $\sum_{j=0}^r \lambda_j = 1$ tales que

$$x = \sum_{j=0}^r \lambda_j v_{ij} = \sum_{j=0}^k \lambda_j v_{ij} + \sum_{j=k+1}^r \lambda_j v_{ij} + \sum_{j=k+1}^s 0 \cdot w_{ij}. \quad (2.7)$$

Por otro lado, podemos hallar $\mu_0, \dots, \mu_s \geq 0$, $\sum_{j=0}^s \mu_j = 1$ para los cuales

$$x = \sum_{j=0}^s \mu_j w_{ij} = \sum_{j=0}^k \mu_j w_{ij} + \sum_{j=k+1}^s \mu_j w_{ij} + \sum_{j=k+1}^r 0 \cdot v_{ij}. \quad (2.8)$$

Dado que $v_{ij} = w_{ij}$ para $j = 0, \dots, k$, $\{v_{i(k+1)}, \dots, v_{ir}\} \cap \{w_{i(k+1)}, \dots, w_{is}\} = \emptyset$ y por la independencia afín de $v_{i0}, \dots, v_{ir}, w_{i(k+1)}, \dots, w_{is}$, entonces de (2.7) y (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \mu_j, j = 0, \dots, k, \text{ y} \\ \lambda_j &= 0, j = k + 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Esto significa que $x \in \langle v_{i0}, \dots, v_{ik} \rangle$. Así, $\tau_1 \cap \tau_2 \subset \langle v_{i0}, \dots, v_{ik} \rangle$. Recíprocamente, como $v_{i0}, \dots, v_{ik} \in \text{vert}(\tau_1) \cap \text{vert}(\tau_2)$, se sigue que $\langle v_{i0}, \dots, v_{ik} \rangle \subset \tau_1 \cap \tau_2$. En consecuencia, $\tau_1 \cap \tau_2 = \langle v_{i0}, \dots, v_{ik} \rangle$, que es cara común de τ_1 y τ_2 . Por lo tanto, $K(\sigma^n)$ es un complejo simplicial, el cual tiene dimensión n porque su simplejo de mayor dimensión es σ^n .

(2) $K(\partial\sigma^n)$ es un $(n-1)$ -complejo porque es subcomplejo de $K(\sigma^n)$ y sus simplejos de mayor dimensión son las caras frontera de σ^n . ■

Proposición 2.3.4. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ es un poliedro compacto.*

Demostración. Consecuencia de que $|K|$ es una unión finita de simplejos, los cuales son poliedros compactos. ■

Definición 2.3.5. Si X es un espacio topológico y \mathcal{C} es una colección de subespacios de X cuya unión es X , entonces la topología de X se dice que es **coherente** con la colección \mathcal{C} , si se cumple que A es cerrado en X si y sólo si $A \cap C$ es cerrado en C , para cada $C \in \mathcal{C}$.

Proposición 2.3.6. *Sea X un espacio topológico y \mathcal{C} una colección de subespacios de X tales que $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Son equivalentes:*

- (1) *La topología de X es coherente con \mathcal{C} .*
- (2) *U es abierto en X si y sólo si $U \cap C$ es abierto en C , para cada $C \in \mathcal{C}$.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2): Supongamos que la topología de X es coherente con \mathcal{C} . Entonces U es abierto en X si y sólo si $X - U$ es cerrado en X , si y sólo si $(X - U) \cap C = C - U = (C - U) \cup (C - C) = C - (U \cap C)$ es cerrado en C , $\forall C \in \mathcal{C}$, si y sólo si $U \cap C$ es abierto en C , $\forall C \in \mathcal{C}$.

(2) \Rightarrow (1): Tenemos que A es cerrado en X si y sólo si $X - A$ es abierto en X . Por hipótesis, esto último ocurre si y sólo si $(X - A) \cap C = C - (A \cap C)$ es abierto en C , $\forall C \in \mathcal{C}$, si y sólo si $A \cap C$ es cerrado en C , $\forall C \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, la topología de X es coherente con \mathcal{C} . ■

Proposición 2.3.7. *Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^m . Entonces la topología de $|K|$ como subespacio de \mathbb{R}^m es coherente con K .*

Demostración. Sea $A \subset |K|$. Supongamos que A es cerrado en $|K|$, es decir, $A = B \cap |K|$ para algún B cerrado en \mathbb{R}^m . Como la proposición 2.3.4 asegura que $|K|$ es cerrado en \mathbb{R}^m , entonces A es cerrado en \mathbb{R}^m . Así, $A \cap \sigma$ es cerrado en σ , $\forall \sigma \in K$. Recíprocamente, supongamos que $A \cap \sigma$ es cerrado en σ , $\forall \sigma$. Puesto que cada σ es cerrado en \mathbb{R}^m por ser un simplejo, entonces $A \cap \sigma$ es cerrado en \mathbb{R}^m , $\forall \sigma \in K$. Dado que K es finito, entonces $\bigcup_{\sigma \in K} (A \cap \sigma)$ es una unión finita de cerrados en \mathbb{R}^m y entonces es cerrado en \mathbb{R}^m . Finalmente, $A = A \cap |K| = \bigcup_{\sigma \in K} (A \cap \sigma)$ es cerrado en \mathbb{R}^m . Por lo tanto, la topología de $|K|$ es coherente con K . ■

Proposición 2.3.8. *Sea K un m -complejo, $m \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- (1) $|K|$ es conexo.
- (2) K no es la unión de dos subcomplejos $K_1, K_2 \subset K$ tales que $|K_1|, |K_2| \neq \emptyset$ y $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$.
- (3) Para cualesquiera $v, w \in \text{vert}(K)$, existen $v_0, \dots, v_n \in \text{vert}(K)$ tales que $v_0 = v$, $v_n = w$ y $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in K$, $i = 0, \dots, n-1$.
- (4) $|K|$ es arcoconexo.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) : Procederemos probando la contrarrecíproca: supongamos que K es la unión de dos subcomplejos $K_1, K_2 \subset K$ tales que $|K_1|, |K_2| \neq \emptyset$ y $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$. Probaremos que $|K_1|$ y $|K_2|$ son abiertos en $|K|$, lo cual nos dará una separación de $|K|$ y, por ende, $|K|$ será desconexo. Recordando que la topología de $|K|$ es coherente con K (proposición 2.3.7) y por la proposición 2.3.6, es suficiente con mostrar que $\sigma \cap |K_1|$ y $\sigma \cap |K_2|$ son abiertos en σ , $\forall \sigma \in K$ no vacío. Sea $\sigma \in K$, entonces $\sigma \in K_1$ o $\sigma \in K_2$. Si $\sigma \in K_1$, puede verse que $\sigma \cap \tau = \emptyset$ para cada $\tau \in K_2$, debido a que $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$, luego $\sigma \cap |K_2| = \emptyset$; mientras que $\sigma \cap |K_1| = \sigma$. En ambas situaciones, se obtiene un abierto de σ . Similarmente, puede verse que $\sigma \cap |K_1| = \emptyset$ y $\sigma \cap |K_2| = \sigma$ cuando $\sigma \in K_2$. Así, $|K_1|$ y $|K_2|$ son abiertos en $|K|$, lo que implica que $|K|$ es desconexo.

(2) \Rightarrow (3) : Sea $v \in \text{vert}(K)$ fijo. Denotemos por V al conjunto de vértices w de K para los cuales existen $v_0, \dots, v_n \in \text{vert}(K)$ tales que $v_0 = v$, $v_n = w$ y $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in K$, $i = 0, \dots, n-1$. Sea K_1 el conjunto que tiene al vacío y a todos los simplejos de K cuyos vértices estén en V . Debe ocurrir que $\langle v \rangle$ es cara de otro simplejo de K , ya que de otro modo se contradiría la hipótesis. Esto implica que $v \in V$ porque podemos hallar un 1-simplejo en K que tenga a v como vértice, luego $K_1 \neq \{\emptyset\}$. Además, K_1 es subcomplejo de K : si $\sigma \in K_1$, entonces $\text{vert}(\sigma) \subset V$, por lo que si $\emptyset \neq \tau \leq \sigma$, se sigue que $\text{vert}(\tau) \subset V$, es decir, $\tau \in K_1$. Ahora, sea $K_2 = (K - K_1) \cup \{\emptyset\}$ y veamos que K_2 es subcomplejo de K . Sean $\sigma \in K_2$ y $\emptyset \neq \tau \leq \sigma$. Puesto que K es un complejo simplicial y $\sigma \in K$, entonces $\tau \in K$. Si $\tau \in K_1$, ocurre que $\text{vert}(\tau) \subset V$. Dados $w \in \text{vert}(\tau)$ y $w' \in \text{vert}(\sigma)$, se cumple que $\langle w, w' \rangle \in K$ y como $w \in V$, es claro que $w' \in V$, lo cual nos dice que $\text{vert}(\sigma) \subset V$, es decir, $\sigma \in K_1$, contradiciendo $\sigma \in K_2$. Así, $\tau \in K - K_1 \subset K_2$. Finalmente, como $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$, $K = K_1 \cup K_2$ y $|K_1| \neq \emptyset$, por hipótesis obtenemos que $|K_1| = \emptyset$, es decir, $K_1 = K$ y $V = \text{vert}(K)$, mostrando esta parte.

(3) \Rightarrow (4) : Sean $v, w \in |K|$, por lo que existen $\sigma, \tau \in K$ tales que $v \in \sigma$ y $w \in \tau$. Sean $v_0 \in \text{vert}(\sigma)$ y $w_0 \in \text{vert}(\tau)$. De la hipótesis, es claro que podemos hallar un arco de v_0 a w_0

en $|K|$. Por otro lado, dada la convexidad de σ y τ , existen arcos de v a v_0 en σ y de w a w_0 en τ . Así, existe un arco de v a w en $|K|$ y, por ende, $|K|$ es arcoconexo.

(4) \Rightarrow (1) : Se sigue porque todo espacio arcoconexo es conexo. ■

Proposición 2.3.9. *Sea K un complejo simplicial. Si $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y $f|_\sigma$ es lineal, para cada $\sigma \in K$, entonces $f(K) := \{f(\sigma) : \sigma \in K\}$ es un complejo simplicial en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sea $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inyección tal que $f|_\sigma$ es lineal, para cada $\sigma \in K$. Por el lema 2.1.18, para cada $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle \in K$ se tiene que $f(\sigma) = \langle f(v_0), \dots, f(v_r) \rangle$, lo cual nos dice que $f(K)$ es una colección finita de simplejos en \mathbb{R}^n . Veamos que se satisfacen las condiciones de la definición 2.3.1:

(1) Sea $\rho \in f(K)$ y sea $\tau \leq \rho$. Existe $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle \in K$ tal que $\rho = f(\sigma) = \langle f(v_0), \dots, f(v_r) \rangle$. Puesto que $\emptyset \in K$, si $\tau = \emptyset$, entonces $\emptyset = f(\emptyset) \in f(K)$. Supongamos que $\tau \neq \emptyset$, por lo cual $\tau = \langle f(v_{i_0}), \dots, f(v_{i_s}) \rangle = f(\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \rangle)$ para algunos $v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \in \text{vert}(\sigma)$, donde $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \rangle \leq \sigma$. Así, como $\sigma \in K$ y ya que K es un complejo simplicial, obtenemos que $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \rangle \in K$ y, en consecuencia, $\tau = f(\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \rangle) \in f(K)$.

(2) Sean $\rho_1, \rho_2 \in f(K)$ tales que $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$. Mostraremos que $\rho_1 \cap \rho_2 \leq \rho_1, \rho_2$. Para $i = 1, 2$, tenemos que existe $\sigma_i \in K$ tal que $\rho_i = f(\sigma_i)$. En vista de que K es un complejo simplicial, se cumple $\sigma_1 \cap \sigma_2 \leq \sigma_1, \sigma_2$. Por la inyectividad de f , se sigue que $\rho_1 \cap \rho_2 = f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) = f(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ y como $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$, es claro que $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$. Podemos escribir entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \langle u_0, \dots, u_r \rangle$ para algunos $u_0, \dots, u_r \in \text{vert}(\sigma_1) \cap \text{vert}(\sigma_2)$ y de esta forma, $f(\sigma_1 \cap \sigma_2) = \langle f(u_0), \dots, f(u_r) \rangle$. Asimismo, $f(u_0), \dots, f(u_r) \in \text{vert}(\rho_1) \cap \text{vert}(\rho_2)$, ya que $\text{vert}(\rho_i) = \{f(v) : v \in \text{vert}(\sigma_i)\}$, $i = 1, 2$. De aquí, $\rho_1 \cap \rho_2 = \langle f(u_0), \dots, f(u_r) \rangle \leq \rho_1, \rho_2$.

Por lo tanto, $f(K)$ es un complejo simplicial. ■

Definición 2.3.10. Sean K y L complejos simpliciales. Una función $f : |K| \rightarrow |L|$ es **simplicial**, si para cada $\sigma \in K$, la restricción $f : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es una función simplicial cuya imagen es un simplejo de L . La restricción $f|_{\text{vert}(K)}$ se llama **mapeo de vértices** de f .

Teorema 2.3.11. *Toda función simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Mejor aún, f es PL.*

Demostración. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ simplicial. Debido a la proposición 2.3.4, tenemos que $|L|$ es un poliedro. Ya que K es finito, escribamos $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ donde σ_i es un simplejo para cada i . Entonces $|K| = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i$. Fijemos i . Por la proposición 2.1.17, σ_i es un poliedro cerrado. Además, dado que f es simplicial, entonces $f|_{\sigma_i}$ es simplicial y, por el corolario 2.2.4, obtenemos que $f|_{\sigma_i}$ es PL. Como lo anterior es válido para cada i , aplicando la proposición 2.1.16, concluimos que f es PL. ■

Teorema 2.3.12. Sean K y L complejos simpliciales.

- (1) Sea $f_0 : \text{vert}(K) \rightarrow \text{vert}(L)$ una función tal que si $\{v_0, \dots, v_n\}$ son vértices de un simplejo de K , se cumple que $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_n)\}$ son vértices de un simplejo de L . Entonces f_0 es el mapeo de vértices de una única función simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$.
- (2) En particular, si f_0 es biyectiva y $\{v_0, \dots, v_k\}$ son vértices de un simplejo de K si y sólo si $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\}$ son vértices de un simplejo de L , entonces $|K|$ y $|L|$ son PL homeomorfos mediante una función simplicial.

Demostración. Sea $K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Fijemos i y sea $\sigma_i = \langle v_0, \dots, v_n \rangle \in K$. Por hipótesis, existe $\tau \in L$ tal que $f_0(v_0), \dots, f_0(v_n) \in \text{vert}(\tau)$. Debido a la proposición 2.2.3, existe una única función simplicial $f_i : \sigma_i \rightarrow \tau$ tal que $f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$. De hecho, por la observación 2.2.2, $\tau_i := f_i(\sigma_i) \leq \tau$ y $f_i : \sigma_i \rightarrow \tau_i$ es simplicial. Además, se sigue cumpliendo que $f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$. Puesto que L es un complejo simplicial y $\tau_i \leq \tau \in L$, tenemos que $\tau_i \in L$. En consecuencia, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe una única función simplicial $f_i : \sigma_i \rightarrow \tau_i$ tal que $\tau_i \in L$ y $f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$.

Ahora, sean $\sigma_i, \sigma_j \in K$. Como K es un complejo simplicial, entonces $\sigma_i \cap \sigma_j \leq \sigma_i, \sigma_j$, por lo que existen $v_{i0}, \dots, v_{ir} \in \text{vert}(\sigma_i)$ y $v_{j0}, \dots, v_{jr} \in \text{vert}(\sigma_j)$ tales que $\sigma_i \cap \sigma_j = \langle v_{i0}, \dots, v_{ir} \rangle = \langle v_{j0}, \dots, v_{jr} \rangle$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $v_{is} = v_{js}$, para $s = 0, \dots, r$. Entonces $f_0(v_{is}) = f_0(v_{js})$ para $s = 0, \dots, r$. Recordando que $f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$ y $f_j|_{\text{vert}(\sigma_j)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_j)}$, para cualesquiera $\lambda_0, \dots, \lambda_r \geq 0$ tales que $\sum_{s=0}^r \lambda_s = 1$ se cumple que $f_i(\sum_{s=0}^r \lambda_s v_{is}) = f_j(\sum_{s=0}^r \lambda_s v_{js})$. Esto demuestra que $f_i|_{(\sigma_i \cap \sigma_j)} = f_j|_{(\sigma_i \cap \sigma_j)}$ para cada $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Así, podemos definir $f : |K| \rightarrow |L|$ tal que $f|_{\sigma_i} = f_i$, para cada $i = 1, \dots, k$. Como $f|_{\sigma_i} = f_i : \sigma_i \rightarrow \tau_i$ es simplicial con $\tau_i \in L$ y $f|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$, $\forall i$, tenemos que f es simplicial y $f|_{\text{vert}(K)} = f_0$. Además, si $f' : |K| \rightarrow |L|$ es una función simplicial tal que $f'|_{\text{vert}(K)} = f_0$, por la unicidad de las funciones simpliciales $f_i : \sigma_i \rightarrow \tau_i$ tales que $f_i|_{\text{vert}(\sigma_i)} = f_0|_{\text{vert}(\sigma_i)}$, $\forall i$, es claro que $f = f'$, lo cual muestra la unicidad de f .

Suponiendo que f_0 es biyectiva y $\{v_0, \dots, v_k\}$ son vértices de un simplejo de K si y sólo si $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\}$ son vértices de un simplejo de L , entonces $L = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ y $f_i : \sigma_i \rightarrow \tau_i$ es una función simplicial biyectiva. Luego por el corolario 2.2.6, $f_i^{-1} : \tau_i \rightarrow \sigma_i$ es simplicial, $\forall i$. Asimismo, tenemos que $f^{-1} : |L| \rightarrow |K|$ está dada por $f^{-1}|_{\tau_i} = f_i^{-1}$, $i = 1, \dots, k$. Como $|L| = \bigcup_{i=1}^k \tau_i$, lo anterior nos dice que f^{-1} es simplicial. Por el teorema 2.3.11, f y f^{-1} son PL, de modo que f es un homeomorfismo PL. Así, concluimos que $|K|$ y $|L|$ son PL homeomorfos con f simplicial. ■

2.4. Subdivisiones

Esta parte se presenta de acuerdo con el planteamiento del capítulo 1 de Hudson (1969) [13]. Si bien las demostraciones siguen las ideas principales de este autor, se decidió ahondar en su desarrollo y adaptación conforme a lo que ya hemos probado en secciones previas. Esto con la finalidad de proporcionar al lector una mejor comprensión e integrar los resultados con el desarrollo teórico hecho hasta ahora. Asimismo, lo anterior atiende al propósito de rescatar y dar una versión actualizada de las pruebas de los lemas y proposiciones básicos

de subdivisión por su relevancia teórica para esta tesis. Por otro lado, el concepto de *malla* de un complejo simplicial es el que aparece en Armstrong (1983) [4].

Definición 2.4.1. Sean K y K' complejos simpliciales en el mismo espacio \mathbb{R}^m . Si $|K'| = |K|$ y para cada $\rho \in K'$ existe $\sigma \in K$ tal que $\rho \subset \sigma$, entonces K' es una **subdivisión** de K y escribiremos $K' \triangleleft K$.

Lema 2.4.2. Sea K un complejo simplicial. Si $K' \triangleleft K$, entonces cada $\sigma \in K$ es una unión de simplejos de K' .

Demostración. Sea $\sigma \in K$ y $x \in \sigma$. Puesto que $K' \triangleleft K$ y $x \in |K| = |K'|$, existe $\tau_x \in K'$ tal que $x \in \tau_x$. Además, existe $\sigma' \in K$ tal que $\tau_x \subset \sigma'$. Dado que σ y σ' pertenecen al complejo simplicial K , entonces $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$ y también se tiene que $x \in \sigma \cap \sigma'$. Mostraremos que existe $\rho_x \in K'$, tal que $x \in \rho_x$ y para el cual $\rho_x \subset \sigma$. Como $x \in \tau_x$, podemos hallar $S \subset \text{vert}(\tau_x)$ tal que, para cada $v \in S$, existe $\lambda_v > 0$ de manera que $\sum_{v \in S} \lambda_v = 1$ y $x = \sum_{v \in S} \lambda_v v$. Usando el corolario 1.6.7, observemos que $\rho_x := \text{conv}(S) \leq \tau_x$. Como K' es un complejo simplicial, $\tau_x \in K'$ y $\rho_x \leq \tau_x$, tenemos que $\rho_x \in K'$. Note que $x \in \rho_x$. Nos resta ver que $\rho_x \subset \sigma$. Sea $v \in S$. Ya que $S \subset \tau_x \subset \sigma'$, entonces podemos encontrar $S_v \subset \text{vert}(\sigma')$ tal que, para cada $w \in S_v$, existe $\lambda_{vw} > 0$, los cuales cumplen $\sum_{w \in S_v} \lambda_{vw} = 1$ y $v = \sum_{w \in S_v} \lambda_{vw} w$. Denotemos $R := \bigcup_{v \in S} S_v$ y sean r_1, \dots, r_n los elementos distintos de R . Observemos que cada r_i puede pertenecer a varios S_v y, por supuesto, al menos a uno de ellos. Dado $v \in S$, para cada $r_i \in S_v$, se tiene que $\lambda_{v_i} := \lambda_{v r_i} > 0$. Ahora, si para cada $r_i \notin S_v$ escribimos $\lambda_{v_i} := 0$, es claro que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_{v_i} r_i$, con $\lambda_{v_i} \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_{v_i} = \sum_{w \in S_v} \lambda_{vw} = 1$. En consecuencia,

$$x = \sum_{v \in S} \lambda_v \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{v_i} r_i \right) = \sum_{v \in S} \sum_{i=1}^n \lambda_v \lambda_{v_i} r_i = \sum_{i=1}^n \sum_{v \in S} \lambda_v \lambda_{v_i} r_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v \in S} \lambda_v \lambda_{v_i} \right) r_i.$$

Para cada $v \in S$, es claro que existe algún $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $r_j \in S_v$, de modo que $\sum_{v \in S} \lambda_v \lambda_{v_i} \geq \lambda_v \lambda_{v_j} > 0$. Además, $\sum_{i=1}^n \sum_{v \in S} \lambda_v \lambda_{v_i} = \sum_{v \in S} \lambda_v \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{v_i} \right) = \sum_{v \in S} \lambda_v = 1$. Así, dado que $x \in \sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$ y $R \subset \text{vert}(\sigma')$, aplicando el lema 1.6.5 se deduce que $R \subset \sigma \cap \sigma'$, luego $\gamma := \text{conv}(R) \subset \sigma \cap \sigma'$. Para cada $v \in S$, se cumple que $v \in \gamma$, entonces $\rho_x = \text{conv}(S) \subset \gamma \subset \sigma \cap \sigma' \subset \sigma$.

En resumen, hemos hallado $\rho_x \in K'$ tal que $x \in \rho_x \subset \sigma$. Por ser esto cierto para cualquier $x \in \sigma$, se concluye que σ es una unión de simplejos de K' . ■

Una subdivisión importante y útil que puede hacerse en un complejo simplicial K se basa en agregar un punto arbitrario $a \in |K|$ como vértice.

Definición 2.4.3. Sea K un complejo simplicial y $a \in |K|$. Definimos la **estrella de a en K** como el conjunto que consta de todos los simplejos en K que contienen a a junto con todas sus caras, es decir,

$$\text{St}(a, K) := \{\tau \leq \sigma : \sigma \in K, a \in \sigma\}.$$

El **enlace de a en K** es el conjunto de todos los simplejos en $\text{St}(a, K)$ que no contienen a a , el cual denotamos por

$$\text{Lk}(a, K) := \{\tau \in \text{St}(a, K) : a \notin \tau\}.$$

Si no hay riesgo de confusión, escribiremos simplemente $\text{St}(a)$ y $\text{Lk}(a)$.

Diremos que $K' \triangleleft K$ es el resultado de **estrellar K en a** , si K' se obtiene de K reemplazando el conjunto de los simplejos $\sigma \in K$ tal que $a \in \sigma$, por $a\text{Lk}(a, K) := \{a\tau : \tau \in \text{Lk}(a, K)\}$. El resultado de estrellar sucesivamente K en los puntos $a_1, \dots, a_r \in |K|$ es una subdivisión de K , la cual recibe el nombre de **subdivisión estelar**.

No es complicado verificar que la subdivisión estelar es, en efecto, una subdivisión de un complejo simplicial, probando primero que estrellar un complejo simplicial en cualquier punto de su poliedro subyacente genera una subdivisión y usando inducción.

Un tipo particular de subdivisión estelar con aplicaciones teóricas relevantes es la siguiente:

Definición 2.4.4. Sea K un complejo simplicial. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ los simplejos de K distintos con dimensión positiva, en orden de dimensión decreciente. Para cada i , sea $x_{\sigma_i} \in \sigma_i^\circ$. El resultado de estrellar sucesivamente K en $x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_m}$, se llama un **primer derivado** de K y se denota por $K^{(1)}$. Un **r -ésimo derivado** $K^{(r)}$ de K es definido inductivamente como el primer derivado de un $(r-1)$ -ésimo derivado $K^{(r-1)}$ (figura 7).

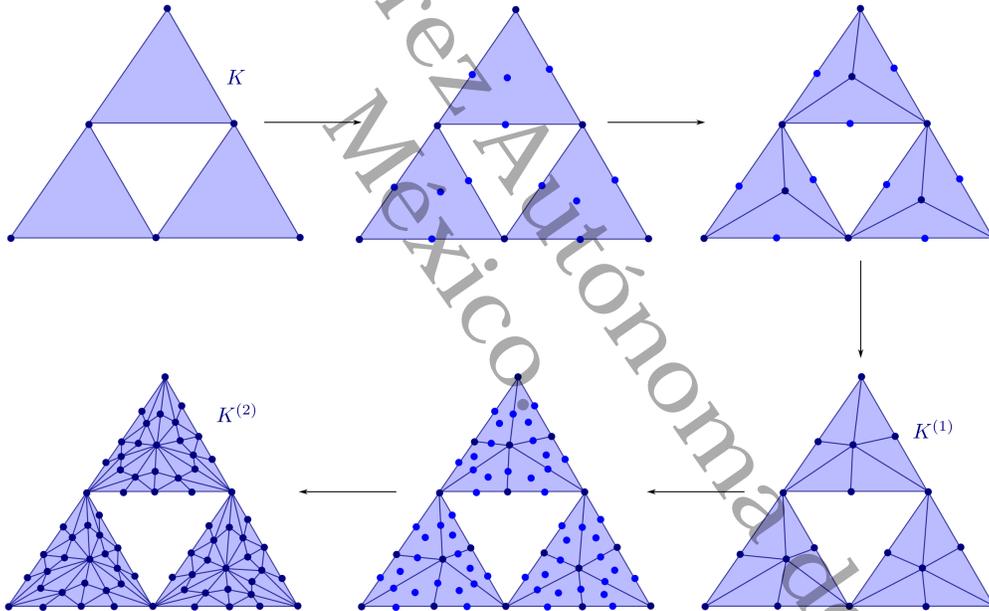


Figura 7: Primer y segundo derivados de un complejo simplicial.

En el contexto de la definición previa, si estrellamos K en x_{σ_1} y si $j \neq 1$, entonces σ_j será un simplejo de la subdivisión resultante. En efecto, sea $j \neq 1$. Tenemos que el resultado de estrellar K en x_{σ_1} es el complejo simplicial

$$K' = \{\sigma \in K : x_{\sigma_1} \notin \sigma\} \cup x_{\sigma_1}\text{Lk}(x_{\sigma_1}, K).$$

Como K es un complejo simplicial y $\sigma_1 \neq \sigma_j$, recordando el procedimiento de la observación 2.3.2 (4), obtenemos que $\sigma_1^\circ \cap \sigma_j = \emptyset$ y, por ende, $x_{\sigma_1} \notin \sigma_j$. De este modo, $\sigma_j \in \{\sigma \in K : x_{\sigma_1} \notin \sigma\} \subset K'$, como queríamos demostrar.

El argumento anterior revela que estrellar un complejo simplicial, en un punto interior de alguno de sus simplejos, solamente induce una subdivisión del simplejo en cuestión. De este modo, si K_d es la subdivisión estelar de K , resultante de estrellar sucesivamente K en puntos interiores de simplejos suyos de dimensión mayor o igual a d , se sigue que $\sigma \in K_d$, para todo $\sigma \in K$ tal que $\dim(\sigma) \leq d - 1$. Asimismo, notemos que el orden en que estrellemos en los puntos interiores de los simplejos de la misma dimensión en K no importa.

Lema 2.4.5. *Sea σ un simplejo de dimensión $d \geq 1$ y $K = K(\sigma)$. Para cada $\tau \leq \sigma$ con $\dim(\tau) \geq 1$, escojamos $x_\tau \in \tau^\circ$. Sea $K^{(1)}$ el primer derivado de K , resultado de estrellar sucesivamente K en los puntos x_τ en orden de dimensión decreciente. Si M es el subcomplejo de $K^{(1)}$ tal que $|M| = \partial\sigma$, entonces $x_\sigma A \in K^{(1)}$, para cada $A \in M$.*

Demostración. Sea K_0 el resultado de estrellar σ en x_σ y, para $s \geq 1$, sea K_s la subdivisión estelar aplicada a K_{s-1} , resultado de estrellar sucesivamente K_{s-1} en los puntos interiores seleccionados de simplejos en K_{s-1} con dimensión $d-s$. Notar que $K_{d-1} = K^{(1)}$. Mostraremos la siguiente afirmación, cuya situación se ejemplifica en la figura 8.

Afirmación 2.4.6. *Para cada $0 \leq s \leq d-1$, $K_s = \bigcup_{j=0}^n K(B_j)$, donde, para $j \in \{0, \dots, n\}$, B_j es un d -simplejo tal que:*

- (1) $x_\sigma \in \text{vert}(B_j)$.
- (2) $B_j \setminus \langle x_\sigma \rangle \subset \partial\sigma$.
- (3) Existe una única $(d-s-1)$ -cara ρ_j de σ tal que $\rho_j \leq B_j$.

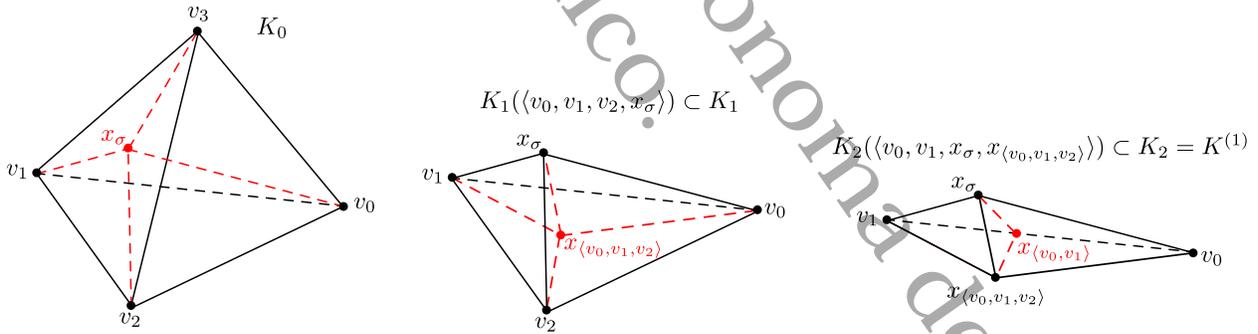


Figura 8: Ilustración de la afirmación 2.4.6.

Demostración de la afirmación. Procederemos por inducción sobre s . Para $s = 0$,

$$K_0 = \{\tau \in K : x_\sigma \notin \tau\} \cup x_\sigma \text{Lk}(x_\sigma, K) = \text{Lk}(x_\sigma, K) \cup x_\sigma \text{Lk}(x_\sigma, K).$$

Dado que $x_\sigma \notin \partial\sigma$, las caras de σ que no contienen a x_σ son sus caras propias, que corresponden a $\text{Lk}(x_\sigma, K)$. Sean $\sigma_0, \dots, \sigma_d$ las caras frontera de σ . Tenemos que $x_\sigma \sigma_j \in K_0$, el cual es un d -simplejo que cumple las tres condiciones de la afirmación, $\forall j \in \{0, \dots, d\}$. Además, como K_0 es un complejo simplicial, se tiene $\bigcup_{j=0}^d K(x_\sigma \sigma_j) \subset K_0$. La otra contención se obtiene de observar que cualquier $\tau \in \text{Lk}(x_\sigma, K)$, por ser cara propia de σ , es cara de algún σ_j .

Ahora, dado $s \geq 0$, supongamos que la afirmación es cierta y veamos que también lo es para $s + 1$. Para los d -simplejos B_j en cuestión, podemos escribir $K_s = \bigcup_{j=0}^n K(B_j)$. Tenemos que K_{s+1} se obtiene de estrellar cada simplejo en K_s de dimensión $d - s - 1$, es decir, las $(d - s - 1)$ -caras de σ , en puntos interiores suyos. Para cada $K(B_j)$, existe una única $(d - s - 1)$ -cara ρ_j de σ tal que $\rho_j \leq B_j$. Entonces, $K(B_j)$ se reemplaza en K_{s+1} por el complejo simplicial $K_{s+1}(B_j) := \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j)) \cup x_{\rho_j} \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j))$.

Sean $\tau_{j0}, \dots, \tau_{jr}$ las caras frontera de ρ_j . Note que $x_{\rho_j} \tau_{jk} \in K_{s+1}(B_j)$, $k \in \{0, \dots, r\}$. Consideremos el s -simplejo $\eta := \text{conv}(\text{vert}(B_j) - (\{x_\sigma\} \cup \text{vert}(\rho_j)))$, así como los d -simplejos $B_{jk} := \text{conv}(\{x_\sigma, x_{\rho_j}\} \cup \text{vert}(\tau_{jk}) \cup \text{vert}(\eta))$, $k \in \{0, \dots, r\}$. Veremos a continuación que

$$K_{s+1}(B_j) = \bigcup_{k=0}^r K(B_{jk}). \quad (2.9)$$

Para cada $k \in \{0, \dots, r\}$, observe que $C_{jk} := \text{conv}(\{x_\sigma\} \cup \text{vert}(\tau_{jk}) \cup \text{vert}(\eta)) \leq B_j$ y $x_{\rho_j} \notin C_{jk}$, luego $B_{jk} = x_{\rho_j} C_{jk} \in x_{\rho_j} \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j)) \subset K_{s+1}(B_j)$. De aquí, se obtiene $\bigcup_{k=0}^r K(B_{jk}) \subset K_{s+1}(B_j)$. Recíprocamente, si $\tau \in \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j))$, entonces $\tau \leq B_j$ y $x_{\rho_j} \notin \tau$. Tenemos las siguientes posibilidades:

Caso I: $x_\sigma \notin \text{vert}(\tau)$. Si además $\text{vert}(\tau) \cap \text{vert}(\rho_j) = \emptyset$, entonces $\tau \leq \eta$, por lo que tomando cualquier τ_{jk} tenemos que $\tau \leq B_{jk}$. Si por el contrario, $\text{vert}(\tau) \cap \text{vert}(\rho_j) \neq \emptyset$, no puede ocurrir que $\text{vert}(\rho_j) \subset \text{vert}(\tau)$ porque $x_{\rho_j} \notin \tau$. Así, existe $v \in \text{vert}(\rho_j) - \text{vert}(\tau)$. Tomando $\tau_{jk} = \rho_j \setminus \langle v \rangle$, es claro que $\text{vert}(\tau) \cap \text{vert}(\rho_j) \subset \text{vert}(\tau_{jk})$. De ser el caso, el resto de vértices de τ sólo pueden hallarse en $\text{vert}(B_j) - (\{x_\sigma\} \cup \text{vert}(\rho_j)) = \text{vert}(\eta)$. Por ende, $\tau \leq B_{jk}$.

Caso II: $x_\sigma \in \text{vert}(\tau)$. Entonces podemos hallar $\gamma \leq B_j \setminus \langle x_\sigma \rangle$ tal que $\tau = x_\sigma \gamma$. Aplicamos el procedimiento del caso I a γ y obtenemos que $\gamma \leq B_{jk}$, para algún $k \in \{0, \dots, r\}$. En consecuencia, tendremos también que $\tau \leq B_{jk}$.

Por otro lado, si $\tau \in x_{\rho_j} \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j))$, se cumple que $\tau = x_{\rho_j} \gamma$ para algún $\gamma \in \text{Lk}(x_{\rho_j}, K(B_j))$ y, como antes, existe $k \in \{0, \dots, r\}$ tal que $\gamma \leq B_{jk}$, de donde es claro que $\tau \leq B_{jk}$. Por lo tanto, se tiene (2.9). En otro orden de ideas, observemos que cada B_{jk} es un d -simplejo, $x_\sigma \in \text{vert}(B_{jk})$ y $B_{jk} \setminus \langle x_\sigma \rangle \subset B_j \setminus \langle x_\sigma \rangle \subset \partial\sigma$, con τ_{jk} la única $(d - s - 2)$ -cara de σ tal que $\tau_{jk} \leq B_{jk}$.

Como esto es válido para cada j , en vista que $K_{s+1} = \bigcup_{j=0}^n K_{s+1}(B_j)$ y dado (2.9), se concluye que la afirmación también es válida para $s + 1$. ■

Aplicando la afirmación 2.4.6 para $s = d - 1$, tenemos que $K^{(1)} = \bigcup_{j=0}^n K(B_j)$, donde cada B_j es un d -simplejo que cumple las condiciones (1) y (2). De (2) se sigue que $M = \bigcup_{j=0}^n K(B_j \setminus \langle x_\sigma \rangle)$. Sea $\tau \in M$. Entonces existe $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\tau \leq B_j \setminus \langle x_\sigma \rangle$. Puesto que $x_\sigma \in \text{vert}(B_j)$, obtenemos que $x_\sigma \tau \leq B_j$, por lo que $x_\sigma \tau \in K^{(1)}$. Esto concluye la demostración del lema. ■

Lema 2.4.7. *Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^m y sea $a \in \mathbb{R}^m$. Si $(a, |K|)$ está en posición general, entonces $a * K := \{\tau \leq a\sigma : \sigma \in K\}$ es un complejo simplicial y $|a * K| = a|K|$.*

Demostración. Como $(a, |K|)$ está en posición general, entonces, para cualquier $\sigma \in K$, (a, σ) está en posición general y, por el lema 1.6.13, se sigue que $a\sigma$ es un simplejo. De este modo, $a * K$ es una colección finita de simplejos. Es fácil verificar que, si $\rho \in a * K$, entonces $\tau \in a * K, \forall \tau \leq \rho$. Ahora bien, sean $\rho_1, \rho_2 \in a * K$ tales que $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$. Si $\rho_1, \rho_2 \in K$, se cumple que $\rho_1 \cap \rho_2 \leq \rho_1, \rho_2$. Si $\rho_1 = a\sigma_1$ para algún $\sigma_1 \in K$ y $\rho_2 \in K$, entonces por ser $a|K|$ un cono, obtenemos que $\rho_1 \cap \rho_2 = \sigma_1 \cap \rho_2 \leq \sigma_1, \rho_2$, luego $\rho_1 \cap \rho_2 \leq \rho_1, \rho_2$. Asimismo, si $\rho_i = a\sigma_i$ para algún $\sigma_i \in K, i = 1, 2$, también del hecho que $a|K|$ es un cono se tiene que $\rho_1 \cap \rho_2 = a(\sigma_1 \cap \sigma_2) \leq \rho_1, \rho_2$. Por lo tanto, $a * K$ es un complejo simplicial. Finalmente, $|a * K| = \bigcup_{\sigma \in K} a\sigma = a\left(\bigcup_{\sigma \in K} \sigma\right) = a|K|$. ■

La idea de la demostración del siguiente resultado es debida a Munkres (1984) [28], formulada como el lema 15.3. Aunque el autor lo muestra para un tipo particular de primer derivado de un complejo simplicial, presentamos una adaptación al caso general:

Proposición 2.4.8. *Sea K un complejo simplicial y, para cada $\sigma \in K$, seleccionemos $x_\sigma \in \sigma^\circ$. Entonces el primer derivado $K^{(1)}$, resultado de estrellar sucesivamente K en los puntos x_σ , es la colección que tiene a \emptyset y a todos los simplejos de la forma*

$$\langle x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n} \rangle, \text{ donde } \sigma_1 < \dots < \sigma_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n \in K. \quad (2.10)$$

Demostración. Probaremos este hecho por inducción sobre $p = \dim(K^p)$, donde K^p es el p -esqueleto de K . Como los simplejos no vacíos de K^0 son 0-simplejos de K , cada uno de los cuales es su propio interior, entonces K y $K^{(1)}$ comparten el mismo 0-esqueleto. Así, los simplejos en el 0-esqueleto de $K^{(1)}$, que corresponden a la única subdivisión posible de K^0 , son de la forma (2.10).

Suponga ahora que cada simplejo de $K^{(1)}$ en $|K^p|$ es como en (2.10). Sea τ un simplejo de $K^{(1)}$ contenido en $|K^{p+1}|$, pero no en $|K^p|$. Entonces existe $\sigma \in K^{p+1}$ tal que $\tau \subset \sigma$. Ya que $\tau \not\subset |K^p|$, se sigue que $\dim(\sigma) = p + 1$. Observe que $K^{(1)}$ induce un primer derivado L_σ de $K(\partial\sigma)$. Sea $x_\sigma * L_\sigma := \{\rho \leq x_\sigma A : A \in L_\sigma\}$, el cual es un complejo simplicial por el lema 2.4.7 y debido a que $(x_\sigma, |L_\sigma|) = (x_\sigma, \partial\sigma)$ está en posición general. Gracias al lema 2.4.5, tenemos que $x_\sigma A \in K^{(1)}, \forall A \in L_\sigma$, de modo que $x_\sigma * L_\sigma$ es subcomplejo de $K^{(1)}$. Como también $\sigma = x_\sigma \partial\sigma$, entonces $\sigma = x_\sigma |L_\sigma| = |x_\sigma * L_\sigma|$. Así, dado que $\tau \subset \sigma$, se cumple que

$$\tau = \tau \cap \sigma = \tau \cap \left(\bigcup_{\rho \in x_\sigma * L_\sigma} \rho \right) = \bigcup_{\rho \in x_\sigma * L_\sigma} (\tau \cap \rho).$$

Por lo anterior, escogiendo cualquier $x \in \tau^\circ$, obtenemos que $x \in \tau \cap \rho$ para algún $\rho \in x_\sigma * L_\sigma$. Debido a que $\tau, \rho \in K^{(1)}$, entonces $\tau \cap \rho \leq \tau, \rho$. De este modo, x es un punto interior de τ que está en $\tau \cap \rho \leq \tau$, luego el lema 1.6.5 garantiza que $\tau \cap \rho = \tau$, por lo que $\tau \leq \rho$. Esto último, junto con el hecho que $\rho \in x_\sigma * L_\sigma$, implica que $\tau \in x_\sigma * L_\sigma$. Por ende, $x_\sigma \in \text{vert}(\tau)$, de otra forma, tendríamos que $\tau \in L_\sigma$, es decir, $\tau \subset |L_\sigma| = \partial\sigma \subset |K^p|$, contrario al hecho que $\tau \not\subset |K^p|$. Así, $\tau = x_\sigma A$ para algún $A \in L_\sigma$. Por hipótesis de inducción, existen $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in K, \sigma_1 < \dots < \sigma_n$, tales que $A = \langle x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n} \rangle$. Esto nos dice que $A \subset \sigma \cap \sigma_n \leq \sigma, \sigma_n$. Igual que antes, como $x_{\sigma_n} \in \sigma_n^\circ \cap \sigma$, se tiene que $\sigma_n \leq \sigma$. Si $\sigma_n = \sigma$, tendríamos que $x_\sigma = x_{\sigma_n} \in A$, contradiciendo $x_\sigma \notin A$. En consecuencia, $\tau = \langle x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}, x_\sigma \rangle$ con $\sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma$, que es de la forma dada en (2.10). ■

Lema 2.4.9. Sea $r > 0$ y $V(0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $V(0, r) \subset \sigma$, para algún n -simplejo σ .

Demostración. Consideremos $\rho^n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$. Sea $x_0 \in \text{Int}(\rho^n)$. Entonces existe $r' > 0$ tal que $V(x_0, r') \subset \rho^n$. Defina $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\psi(y) = \frac{r}{r'}(y - x_0)$. Observe que ψ es una transformación afín inyectiva por ser la composición de una traslación con una homotecia. Notemos que $\psi(V(x_0, r')) = V(0, r)$. Además, por el lema 2.1.18, $\sigma := \psi(\rho^n)$ es un n -simplejo. Dado que $V(x_0, r') \subset \rho^n$, se sigue que $V(0, r) = \psi(V(x_0, r')) \subset \sigma$. ■

Lema 2.4.10. Sea K un complejo simplicial. Si L es un subcomplejo de K tal que $|L| = |K|$, entonces $K = L$.

Demostración. Sea L un subcomplejo de K tal que $|L| = |K|$. Entonces $L \subset K$. Sea $\sigma \in K$ y tomemos $x \in \sigma^\circ$. Como $x \in |L|$, existe $\rho \in L$ tal que $x \in \rho$. De esta forma, $x \in \rho \cap \sigma$, con $\rho, \sigma \in K$, de manera que $\rho \cap \sigma \leq \rho, \sigma$. Puesto que $\rho \cap \sigma \leq \sigma$ y $x \in \sigma^\circ$, del lema 1.6.5 se tiene que $x \in \rho \cap \sigma$ implica $\rho \cap \sigma = \sigma$. En consecuencia, $\sigma \leq \rho$ y usando que L es un complejo simplicial con $\rho \in L$, entonces $\sigma \in L$. Por ende, $K \subset L$, lo cual concluye la demostración. ■

Proposición 2.4.11. Sean A_1, \dots, A_n simplejos. Sea K un complejo simplicial tal que $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset |K|$. Entonces existe un r -ésimo derivado $K^{(r)}$ de K que contiene subdivisiones de $K(A_1), \dots, K(A_n)$.

Demostración. Sean c_1, \dots, c_k las caras no vacías de A_1, \dots, A_n , en orden de dimensión creciente. De este modo, $c_1 = \langle c \rangle$ cumple que c es un vértice de algún A_j , por lo que $c \in |K|$. Si $c \in \text{vert}(K)$, cualquier primer derivado $K^{(1)}$ contiene a c como vértice. Si $c \notin \text{vert}(K)$, entonces $c \in B$ para algún $B \in K$, donde c no es vértice de B . Escribamos $B = \langle v_0, \dots, v_m \rangle$. Notemos que $m \geq 1$, porque $c \notin \text{vert}(B)$. Así, existen $\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_s} > 0$, $\sum_{j=0}^s \alpha_{ij} = 1$, tales que $c = \sum_{j=0}^s \alpha_{ij} v_{ij}$, para algunos $v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \in \text{vert}(B)$, $s \geq 1$. Esto nos dice que c está en el interior de $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_s} \rangle$. En consecuencia, es posible hallar un primer derivado $K^{(1)}$ de K donde c sea vértice, tomando c en el interior del simplejo de K que contiene a c y, para el resto de simplejos en K , cualquier punto arbitrario en su interior. En cualquier caso, hay un primer derivado $K^{(1)}$ de K que contiene a la única subdivisión posible de $K(c_1)$.

Supongamos que existe un $(r-1)$ -ésimo derivado $K^{(r-1)}$ de K que contiene subdivisiones de $K(c_1), \dots, K(c_{r-1})$. Para cada simplejo $\sigma \in K^{(r-1)}$, sea $x_\sigma \in \sigma^\circ \cap c_r^\circ$ cuando esta intersección no sea vacía, de lo contrario, escojamos cualquier $x_\sigma \in \sigma^\circ$. Sea $K^{(r)}$ el r -ésimo derivado de K obtenido de estrellar $K^{(r-1)}$ en cada x_σ , en orden de dimensión decreciente. Mostraremos que $K^{(r)}$ contiene un subcomplejo cuyo poliedro subyacente es $\sigma \cap c_r$, para cada $\sigma \in K^{(r-1)}$ tal que $\sigma \cap c_r \neq \emptyset$. Puesto que $c_r \subset |K| = |K^{(r)}|$, esto claramente implicará que $K^{(r)}$ contiene una subdivisión de $K(c_r)$.

Sea $\sigma \in K^{(r-1)}$ tal que $\sigma \cap c_r \neq \emptyset$. Procederemos por inducción en la dimensión de σ . Si $\dim(\sigma) = 0$, entonces $\sigma = \langle x_\sigma \rangle$ y $\sigma \cap c_r = \langle x_\sigma \rangle = \sigma$. Dado que σ es un 0-simplejo de $K^{(r-1)}$, también lo es de $K^{(r)}$, pues los 0-simplejos se preservan con las subdivisiones estelares y aquí es claro que $K(\sigma)$ es el subcomplejo de $K^{(r)}$ tal que $|K(\sigma)| = \sigma = \sigma \cap c_r$. Por hipótesis de inducción, supongamos que $K^{(r)}$ contiene una subdivisión L tal que $|L| = \sigma \cap c_r$, para cada $\sigma \in K^{(r-1)}$, $\sigma \cap c_r \neq \emptyset$ con $\dim(\sigma) = d$. Sea $\sigma \in K^{(r-1)}$ un $(d+1)$ -simplejo que interseca

a c_r . Dado que las caras frontera de σ tienen dimensión d , se sigue que $K^{(r)}$ contiene un subcomplejo L tal que $|L| = \partial\sigma \cap c_r$. Consideremos las siguientes posibilidades:

Caso I: $\sigma^\circ \cap c_r = \emptyset$. Entonces $\sigma \cap c_r = \partial\sigma \cap c_r = |L|$, con L subcomplejo de $K^{(r)}$.

Caso II: $\sigma^\circ \cap \partial c_r \neq \emptyset$. Sea $x \in \sigma^\circ \cap \partial c_r$. Note que cada cara frontera de c_r es igual a algún c_s con $s \in \{1, \dots, r-1\}$ y puesto que $K^{(r-1)}$ contiene una subdivisión de $K(c_s)$, existe un subcomplejo de $K^{(r-1)}$ que es una subdivisión de $K(\partial c_r)$. Así, como $\sigma \in K^{(r-1)}$, tenemos que $\sigma \cap \partial c_r$ es una unión de caras de σ . Debido a que $x \in \sigma \cap \partial c_r$, existe $\tau \leq \sigma$ tal que $x \in \tau$ y ya que $x \in \sigma^\circ$, es claro que $\tau = \sigma$. Esto implica que $\partial c_r \cap \sigma = \sigma$, de modo que $\sigma \cap c_r = \sigma$. Dado que $K^{(r)}$ contiene una subdivisión de $K(\sigma)$, se cumple que esta subdivisión es el subcomplejo de $K^{(r)}$ cuyo poliedro subyacente es $\sigma = \sigma \cap c_r$.

Caso III: $\sigma^\circ \cap c_r \neq \emptyset$ y $\sigma^\circ \cap \partial c_r = \emptyset$. Esta vez, observamos que $\sigma^\circ \cap c_r^\circ = \sigma^\circ \cap c_r \neq \emptyset$, lo cual nos dice que se ha elegido $x_\sigma \in \sigma^\circ \cap c_r^\circ$. Probaremos que $\sigma \cap c_r = x_\sigma |L|$ y que $x_\sigma * L := \{\tau \leq x_\sigma A : A \in L\}$ es un subcomplejo de $K^{(r)}$, para el cual se tendrá que $|x_\sigma * L| = x_\sigma |L| = \sigma \cap c_r$. Sea $x \in \sigma \cap c_r$. Afirmamos que existe $A \in L$ tal que $x \in x_\sigma A$. En efecto, por el corolario 1.6.11, como $x_\sigma \in \sigma^\circ$ entonces $\sigma = x_\sigma \partial\sigma$, luego existe $y \in \partial\sigma$ tal que $x \in [x_\sigma, y]$ y $y \in R(x_\sigma, x)$. Dado que $x_\sigma \in c_r^\circ$, también del corolario 1.6.11 tenemos que $c_r = x_\sigma \partial c_r$, por lo que existe $z \in \partial c_r$ tal que $x \in [x_\sigma, z]$. Observemos que $z \in R(x_\sigma, x)$. Entonces $y = z$ ó $y \neq z$. Si $y = z$, se sigue que $y \in \partial\sigma \cap \partial c_r \subset \partial\sigma \cap c_r = |L|$, esto es, $y \in A$ para algún $A \in L$, lo que implica $x \in [x_\sigma, y] \subset x_\sigma A$. Supongamos ahora que $y \neq z$. Ocurre que $[x_\sigma, y] \subset [x_\sigma, z]$ o bien $[x_\sigma, z] \subset [x_\sigma, y]$, pero no ambos. Si $[x_\sigma, y] \subset [x_\sigma, z]$, entonces $y \in [x_\sigma, z] \subset x_\sigma \partial c_r = c_r$, luego $y \in \partial\sigma \cap c_r = |L|$ y, como antes, podemos hallar $A \in L$ tal que $x \in x_\sigma A$. Si $[x_\sigma, z] \subset [x_\sigma, y]$, entonces $z \in x_\sigma \partial\sigma = \sigma$ y ya que $z \neq y$, no pasa que $z \in \partial\sigma$, porque el corolario 1.6.11 nos dice que y es el único punto en $\partial\sigma$ que interseca a $R(x_\sigma, x)$. Esto significa que $z \in \sigma^\circ \cap \partial c_r = \emptyset$, lo cual es contradictorio, y entonces no sucede que $[x_\sigma, z] \subset [x_\sigma, y]$. Sin embargo, en el resto de posibilidades, para cada $x \in \sigma \cap c_r$, hemos visto que existe $A \in L$ tal que $x \in x_\sigma A$. Así, $\sigma \cap c_r \subset x_\sigma |L|$. Por otro lado, $x_\sigma |L| \subset x_\sigma (\partial\sigma \cap c_r) \subset (x_\sigma \partial\sigma) \cap (x_\sigma c_r) \subset \sigma \cap c_r$. En consecuencia, $\sigma \cap c_r = x_\sigma |L|$.

Sólo queda develar que $x_\sigma * L$ es un subcomplejo de $K^{(r)}$. Observe que $x_\sigma * L$ es un complejo simplicial, debido a que $(x_\sigma, |L|)$ está en posición general al ser $|L| \subset \partial\sigma$ y por el lema 2.4.7. Puesto que $\sigma \in K^{(r-1)}$, el primer derivado de $K^{(r-1)}$, que es propiamente $K^{(r)}$, induce en $K(\sigma)$ un primer derivado $K^{(1)}(\sigma)$, el cual es subcomplejo de $K^{(r)}$. Si M es el subcomplejo de $K^{(1)}(\sigma)$ tal que $|M| = \partial\sigma$, en virtud del lema 2.4.5, para cada $A \in M$ se cumple que $x_\sigma A \in K^{(1)}(\sigma) \subset K^{(r)}$. Observando que L es la colección de simplejos que conforman $\partial\sigma$ y que están contenidos en c_r , se tiene que $L \subset M$ y $x_\sigma A \in K^{(r)}$, para cada $A \in L$. Esto confirma que $x_\sigma L$ es un subcomplejo de $K^{(r)}$. De aquí se sigue que $|x_\sigma * L| = \sigma \cap c_r$ y entonces hemos hallado un subcomplejo de $K^{(r)}$ cuyo poliedro subyacente es $\sigma \cap c_r$, tal como queríamos.

En consecuencia, hemos demostrado que $K^{(r)}$ contiene una subdivisión de $K(c_r)$. Así, para cada $r \in \{1, \dots, k\}$, podemos hallar un r -ésimo derivado $K^{(r)}$ de K que contiene subdivisiones de $K(c_1), \dots, K(c_r)$. Tomando $r = k$, se concluye que K tiene un r -ésimo derivado $K^{(r)}$ que contiene subdivisiones de $K(A_1), \dots, K(A_n)$. ■

Corolario 2.4.12. Sean K y L complejos simpliciales. Si $|L| \subset |K|$, entonces existen $L' \triangleleft L$

y $K' \triangleleft K$ tales que $L' \subset K'$. En particular, cualesquiera dos subdivisiones de un mismo complejo simplicial tienen una subdivisión en común.

Demostración. Supongamos que $|L| \subset |K|$. Entonces $\bigcup_{\sigma \in L} \sigma \subset |K|$, luego la proposición 2.4.11 nos dice que existe $K' \triangleleft K$ y $K'(\sigma) \triangleleft K(\sigma)$ tales que $K'(\sigma) \subset K'$, para cada $\sigma \in L$. De este modo, $L' = \bigcup_{\sigma \in L} K'(\sigma) \subset K'$ y $L' \triangleleft L$. Ahora bien, asumiendo que $|L| = |K|$, el lema 2.4.10 nos dice que $L' = K'$, por lo cual K' es una subdivisión de K y L . ■

Corolario 2.4.13. *Todo poliedro compacto no vacío es el poliedro subyacente de algún complejo simplicial.*

Demostración. Sea $P \neq \emptyset$ un poliedro compacto en \mathbb{R}^m . Por el teorema 2.1.19, $P = \bigcup_{i=1}^n A_i$ para algunos A_1, \dots, A_n simplejos en \mathbb{R}^m . Puesto que P es compacto, entonces es acotado, luego existe $r > 0$ tal que $P \subset V(0, r)$ y, gracias al lema 2.4.9, podemos hallar un m -simplejo σ^m tal que $V(0, r) \subset \sigma^m$. De esta forma, $P = \bigcup_{i=1}^n A_i \subset |K(\sigma^m)|$ y por la proposición 2.4.11 podemos hallar una subdivisión de $K(\sigma^m)$ que contiene subdivisiones de $K(A_1), \dots, K(A_n)$, y tomando K como la unión de éstas subdivisiones, se sigue que $|K| = P$. ■

Proposición 2.4.14. *Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro compacto y sea $a \in \mathbb{R}^n$ tal que (a, P) está en posición general. Entonces aP es un poliedro compacto.*

Demostración. Debido al corolario 2.4.13, existe un complejo simplicial K en \mathbb{R}^n tal que $P = |K|$, luego por el lema 2.4.7, $a * K$ es un complejo simplicial para el cual $|a * K| = a|K| = aP$, lo cual demuestra que aP es un poliedro compacto (proposición 2.3.4). ■

Proposición 2.4.15. *Sea K un complejo simplicial y Q un poliedro. Si $f : |K| \rightarrow Q$ es una función PL, entonces existe $K' \triangleleft K$ tal que $f|_{\sigma}$ es lineal, para cada $\sigma \in K'$.*

Demostración. Supongamos que $f : |K| \rightarrow Q$ es PL. Dado que $|K|$ es un poliedro compacto, por el corolario 2.1.20 existen simplejos A_1, \dots, A_n tales que $|K| = \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $f|_{A_i}$ es lineal para cada i . Por la proposición 2.4.11, podemos hallar $K' \triangleleft K$ y $K'(A_i) \triangleleft K(A_i)$ tales que $K'(A_i) \subset K'$, $i = 1, \dots, n$. Dado que $|\bigcup_{i=1}^n K'(A_i)| = \bigcup_{i=1}^n A_i = |K| = |K'|$, del lema 2.4.10 obtenemos que $K' = \bigcup_{i=1}^n K'(A_i)$. Entonces, para cada $\sigma \in K'$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\sigma \subset A_i$ y puesto que $f|_{A_i}$ es lineal, es claro que $f|_{\sigma}$ también es lineal. ■

Teorema 2.4.16. *Sean K y L complejos simpliciales. Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo PL, entonces existen $K' \triangleleft K$ y $L' \triangleleft L$ tales que $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial.*

Demostración. Por la proposición 2.4.15, existe $K'' \triangleleft K$ tal que $f|_{\sigma}$ es lineal, $\forall \sigma \in K''$. Puesto que f es inyectiva, del lema 2.1.18 se sigue que $f(\sigma)$ es un simplejo, $\forall \sigma \in K''$. Por suprayectividad $|L| = \bigcup_{\sigma \in K''} f(\sigma)$, luego la proposición 2.4.11 garantiza la existencia de $L' \triangleleft L$ tal que, para cada $\sigma \in K''$, existe un subcomplejo $K''(f(\sigma)) \subset L'$ que cumple $K''(f(\sigma)) \triangleleft K(f(\sigma))$. Debido a lo anterior, se verifica que $\bigcup_{\sigma \in K''} K''(f(\sigma))$ es un subcomplejo de L' tal que $|L'| = |\bigcup_{\sigma \in K''} K''(f(\sigma))|$, y, por el lema 2.4.10, $L' = \bigcup_{\sigma \in K''} K''(f(\sigma))$. Sea $K' = f^{-1}(L')$. Mostraremos que $K' \triangleleft K$. Sea $\tau \in L'$. Entonces existe $\sigma \in K''$ tal que

$\tau \subset f(\sigma)$. Tenemos que $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es una biyección lineal entre simplejos, por lo que $f|_{\sigma}$ es un homeomorfismo simplicial y, debido al corolario 2.2.6, $(f|_{\sigma})^{-1} = f^{-1}|_{f(\sigma)}$ es un homeomorfismo simplicial. De esta forma, la restricción $f^{-1}|_{\tau}$ es una biyección lineal. En consecuencia, $f^{-1} : |L'| \rightarrow |K|$ es una biyección tal que $f^{-1}|_{\tau}$ es lineal, para cada $\tau \in L'$. Por ende, la proposición 2.3.9 nos dice que K' es un complejo simplicial. Es fácil corroborar que $|K'| = |K|$. Si $\tau \in L'$, recordemos que existe $\sigma \in K''$ tal que $\tau \subset f(\sigma)$ y entonces $f^{-1}(\tau) \subset \sigma$, pero también $K'' \triangleleft K$, luego existe $\rho \in K$ tal que $f^{-1}(\tau) \subset \sigma \subset \rho$. Asimismo, en vista de que $\sigma \in K''$, habíamos mostrado que $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es una biyección lineal, de modo que $f|_{f^{-1}(\tau)} : f^{-1}(\tau) \rightarrow \tau$ es una biyección lineal y, por ende, un homeomorfismo simplicial. En consecuencia, $K' \triangleleft K$ y $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial. ■

Cabe destacar que el teorema 2.4.16 es válido aún si $f : |K| \rightarrow |L|$ es solamente una función PL. La demostración de este hecho involucra estudiar complejos celulares, los cuales son una generalización de los complejos simpliciales. Sin embargo, esto queda fuera de los objetivos de este trabajo. El lector interesado puede consultar el teorema 2.14 de [34].

Proposición 2.4.17. *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ un homeomorfismo simplicial. Si $K' \triangleleft K$, entonces $L' := f(K') \triangleleft L$ y $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial.*

Demostración. Sean $K' \triangleleft K$ y $\tau \in K'$. Entonces existe $\sigma \in K$ tal que $\tau \subset \sigma$. Dado que $f : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo simplicial, se tiene que $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es un homeomorfismo simplicial y $f(\sigma) \in L$, luego $f|_{\tau} : \tau \rightarrow f(\tau)$ es también un homeomorfismo simplicial y $f(\tau) \subset f(\sigma)$, esto es, $f(\tau)$ está contenido en algún simplejo de L . Debido a lo anterior, $f|_{\tau}$ es una inyección lineal, para cada $\tau \in K'$, luego la proposición 2.3.9 nos dice que $L' := f(K')$ es un complejo simplicial. También, se verifica que $|L'| = |L|$, y ya hemos visto que, para cada $\tau \in K'$, $f|_{\tau} : \tau \rightarrow f(\tau)$ es un homeomorfismo simplicial y $f(\tau) \subset \rho$, para algún $\rho \in L$. Por lo tanto, $L' \triangleleft L$ y $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial. ■

Proposición 2.4.18. *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ un homeomorfismo PL. Si $|K_1|, \dots, |K_n| \subset |K|$, entonces existen $K' \triangleleft K$ y $L' \triangleleft L$ tales que $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial, donde K' contiene una subdivisión de K_i , para cada $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Por el teorema 2.4.16, existen $K'' \triangleleft K$ y $L'' \triangleleft L$ tales que $f : |K''| \rightarrow |L''|$ es un homeomorfismo simplicial. Usando la proposición 2.4.11, podemos hallar $K' \triangleleft K''$ tal que, para cada i , existe $K'_i \subset K''$ que cumple $K'_i \triangleleft K_i$. Finalmente, por la proposición 2.4.17, existe $L' \triangleleft L''$ para la cual $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial. ■

Definición 2.4.19. Dado un simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, el **baricentro** de σ es el punto

$$\hat{\sigma} := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i.$$

Sea K un complejo simplicial. El primer derivado de K , que denotaremos por $\text{sd}K$, resultado de estrellar sucesivamente K en los baricentros $\hat{\sigma}$, siguiendo un orden de dimensión decreciente de los simplejos σ de K , recibe el nombre de **primera subdivisión baricéntrica**

de K . Definimos la ***m*-ésima subdivisión baricéntrica** $sd^m K$ de K inductivamente por $sd^m K := sd(sd^{m-1} K)$.

Definición 2.4.20. Sea K un complejo simplicial. La ***mall*** $\mu(K)$ de K es el máximo de los diámetros de sus simplejos.

Una ventaja de las subdivisiones baricéntricas es que, tomando m lo suficientemente grande, podemos hacer que los diámetros de los simplejos de $sd^m K$ sean tan pequeños como queramos. Esto es lo que establece el siguiente resultado, cuya prueba no daremos, pero el lector puede encontrar una demostración detallada y comprensible en Munkres (1984) [28], correspondiente al teorema 15.4.

Teorema 2.4.21. *Sea K un complejo simplicial y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(sd^m K) < \varepsilon$.*

2.5. Aproximación simplicial

El propósito de esta sección es presentar algunos resultados básicos de la teoría de aproximación simplicial para futuras referencias en la última sección de este capítulo. Las definiciones y resultados que aquí presentamos se basan en la sección 6.3 y algunos problemas de la sección 8.6 de Armstrong (1983) [4], así como en las secciones 14, 15 y 17 de Munkres (1984) [28]. Sólo por esta sección consideraremos \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana.

Definición 2.5.1. Sea K un complejo simplicial. Para cada vértice v de K , la unión de los interiores de los simplejos de K que tienen a v como vértice es la ***estrella abierta*** de v en K y la denotaremos por $star(v, K)$. Si $K = K(\sigma)$ con σ un simplejo, convendremos en denotar $star(v, K) = star(v, \sigma)$.

Lema 2.5.2. *Sea K un complejo simplicial. Dado $x \in |K|$, existe un único $\sigma \in K$ tal que $x \in \sigma^\circ$. Este simplejo recibe el nombre de **portador** de x en K .*

Demostración. Sea $x \in |K|$. Si x es un vértice de K , entonces $x \in \langle x \rangle^\circ = \{x\}$. Si x no es un vértice de K , entonces existe $\sigma' \in K$ tal que $x \in \sigma'$. Podemos expresar $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ para algunos $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, y $v_i \in \text{vert}(\sigma')$. Denotando $\sigma := \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, lo anterior nos dice que $x \in \sigma^\circ$. Puesto que $\sigma \leq \sigma'$, se sigue que $\sigma \in K$. Finalmente, σ es el único simplejo de K que tiene a x en su interior, porque los interiores de cualesquiera dos simplejos de un complejo simplicial son disjuntos (observación 2.3.2(4)). ■

Proposición 2.5.3. *Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^n y sea $v \in \text{vert}(K)$. Entonces $|K| - star(v, K)$ es la unión de todos los simplejos de K que no tienen a v como vértice y, por lo tanto, $star(v, K)$ es abierto en $|K|$.*

Demostración. Sea S la unión de todos los simplejos de K que no tienen a v como vértice. Veamos que $S = |K| - star(v, K)$. Sea $x \in S$. Entonces existe $\sigma \in K$ tal que $x \in \sigma$ y $v \notin \text{vert}(\sigma)$. Esto significa que ninguna cara de σ tiene a v como vértice. Sea ρ el portador de x en K . Entonces $x \in \rho \cap \sigma$, donde esta intersección es una cara de ρ y σ . Sin embargo, $x \in \rho^\circ$,

por lo que $\rho \cap \sigma = \rho$, luego $\rho \leq \sigma$. Así, $v \notin \text{vert}(\rho)$ y se obtiene que $x \in |K| - \text{star}(v, K)$, de otro modo, $x \in \tau^\circ$ para algún $\tau \in K$ tal que $v \in \text{vert}(\tau)$, pero por la unicidad establecida en el lema 2.5.2, tenemos que $\tau = \rho$ y entonces $v \in \text{vert}(\rho)$, que es contradictorio. Recíprocamente, sea $x \in |K| - \text{star}(v, K)$, lo cual implica que $x \notin \tau^\circ$, para todo $\tau \in K$ tal que $v \in \text{vert}(\tau)$. Nuevamente el lema 2.5.2 nos dice que existe un simplejo $\rho \in K$ para el cual $x \in \rho^\circ$, de manera que $v \notin \text{vert}(\rho)$ y $x \in \rho \subset S$. Por lo tanto, $S = |K| - \text{star}(v, K)$.

Mostraremos ahora que $|K| - \text{star}(v, K)$ es cerrado en $|K|$, de donde se seguirá que $\text{star}(v, K)$ es abierto en $|K|$. Sea $\sigma \in K$. Como $|K| - \text{star}(v, K)$ es una unión de simplejos de K , tenemos que $\sigma \cap (|K| - \text{star}(v, K))$ es una unión de caras τ de σ . Si $\tau = \emptyset$, entonces es cerrada en σ , y si τ es una cara no vacía de σ , al ser un simplejo se tiene que es cerrado en \mathbb{R}^n , por lo que τ es cerrado en σ . Lo anterior nos dice que $\sigma \cap (|K| - \text{star}(v, K))$ es una unión finita de cerrados de σ y es, por ende, cerrado en σ . Ya que esto se cumple para cualquier $\sigma \in K$, recordando que la topología de $|K|$ es coherente con K (proposición 2.3.7), se concluye que $|K| - \text{star}(v, K)$ es cerrado en $|K|$, como queríamos. ■

Definición 2.5.4. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Una función simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$ es una **aproximación simplicial** de f , si $f(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}(s(v), L)$, $\forall v \in \text{vert}(K)$.

Teorema 2.5.5. Sean $f : |K| \rightarrow |L|$ y $g : |L| \rightarrow |M|$ continuas con aproximaciones simpliciales $s : |K| \rightarrow |L|$ y $t : |L| \rightarrow |M|$, respectivamente. Entonces $t \circ s : |K| \rightarrow |M|$ es una aproximación simplicial de $g \circ f : |K| \rightarrow |M|$.

Demostración. Tenemos que $t \circ s$ es simplicial por ser composición de funciones simpliciales. Por otro lado, si $v \in \text{vert}(K)$, dado que s es una aproximación simplicial de f , resulta que $f(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}(s(v), L)$, que implica $g(f(\text{star}(v, K))) \subset g(\text{star}(s(v), L))$. Asimismo, puesto que $s(v) \in \text{vert}(L)$ y t es una aproximación simplicial de g , obtenemos que $g(\text{star}(s(v), L)) \subset \text{star}(t(s(v)), M)$. Por lo tanto, $(g \circ f)(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}((t \circ s)(v), M)$, demostrando que $t \circ s$ es una aproximación simplicial de $g \circ f$. ■

Definición 2.5.6. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Diremos que f satisface la **condición de estrella** con respecto a K y L , si para cada vértice v de K , existe un vértice w de L tal que $f(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}(w, L)$.

Lema 2.5.7. Sean v_0, \dots, v_n vértices de un complejo simplicial K .

- (1) Si $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K)$, entonces v_0, \dots, v_n son vértices de una cara del portador de x .
- (2) v_0, \dots, v_n son vértices de un simplejo de K si y sólo si $\bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K) \neq \emptyset$.

Demostración. (1) Sea $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K)$ y sea σ' el portador de x en K . Para cada i , existe $\sigma_i \in K$ tal que $v_i \in \text{vert}(\sigma_i)$ y $x \in \sigma_i^\circ$. No obstante, esto nos dice que σ_i es el portador de x y, por unicidad (lema 2.5.2), tenemos que $\sigma' = \sigma_i$, $\forall i$. Como $v_i \in \text{vert}(\sigma_i) = \text{vert}(\sigma')$, $\forall i$, luego $\langle v_0, \dots, v_n \rangle \leq \sigma'$.

(2) Supongamos que v_0, \dots, v_n son los vértices de un simplejo $\sigma \in K$. Entonces $\sigma^\circ \subset \text{star}(v_i, K)$ para $i = 0, \dots, n$, de modo que $\bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K) \neq \emptyset$. Recíprocamente, suponiendo

que existe $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K)$, en (1) vimos que $\sigma := \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ es cara del portador σ' de x en K y, como $\sigma' \in K$, obtenemos que $\sigma \in K$, como queríamos. ■

Proposición 2.5.8. *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua. Si f satisface la condición de estrella, entonces f tiene una aproximación simplicial.*

Demostración. Supongamos que f satisface la condición de estrella. Definamos una función $s : \text{vert}(K) \rightarrow \text{vert}(L)$, donde para cada $v \in \text{vert}(K)$ escogemos un $w \in \text{vert}(L)$, tal que $f(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}(w, L)$, posible gracias a que f satisface la condición de estrella, y hacemos $s(v) := w$. Ahora bien, sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Entonces $\sigma^\circ \subset \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K)$, lo cual implica que $f(\sigma^\circ) \subset \bigcap_{i=0}^n f(\text{star}(v_i, K)) \subset \bigcap_{i=0}^n \text{star}(s(v_i), L)$. Así, $\bigcap_{i=0}^n \text{star}(s(v_i), L) \neq \emptyset$ y el lema 2.5.7 (2) garantiza que $s(v_0), \dots, s(v_n)$ son los vértices de un simplejo de L . De este modo, por el teorema 2.3.12, s se extiende a una función simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$. Finalmente, s aproxima simplicialmente a f porque $f(\text{star}(v, K)) \subset \text{star}(s(v), L)$. ■

Proposición 2.5.9. *Sea K un complejo simplicial y $K' \triangleleft K$. Entonces la identidad $id : |K'| \rightarrow |K|$ tiene una aproximación simplicial $s : |K'| \rightarrow |K|$.*

Demostración. Sea v un vértice de K' . Sean σ el portador de v en K y $w \in \text{vert}(\sigma)$. Mostraremos que $\text{star}(v, K') \subset \text{star}(w, K)$, para ello, es suficiente con probar que

$$|K| - \text{star}(w, K) \subset |K| - \text{star}(v, K'). \quad (2.11)$$

De la proposición 2.5.3, se sigue que $|K| - \text{star}(w, K)$ es la unión de todos los simplejos de K que no tienen a w como vértice, cada uno de los cuales es unión de simplejos τ de K' , debido al lema 2.4.2. Ninguno de estos τ tiene a v como vértice, ya que $v \in \sigma^\circ \subset \text{star}(w, K)$. Nuevamente usando la proposición 2.5.3, $|K| - \text{star}(v, K') = |K'| - \text{star}(v, K')$ es la unión de los simplejos de K' que no tienen a v como vértice. En consecuencia, cualquiera de los τ están contenidos en $|K| - \text{star}(v, K')$ y se consigue (2.11).

Finalmente, dado que $id(\text{star}(v, K')) = \text{star}(v, K') \subset \text{star}(w, K)$, obtenemos que id satisface la condición de estrella con respecto a K' y K , entonces la proposición 2.5.8 garantiza que $id : |K'| \rightarrow |K|$ tiene una aproximación simplicial $s : |K'| \rightarrow |K|$. ■

No siempre es posible hallar una aproximación simplicial de una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$, pero sí podemos garantizar su existencia cuando reemplazamos K por una subdivisión baricéntrica $\text{sd}^m K$ adecuada. Para probar este resultado, requerimos el conocido:

Lema 2.5.10 (Lema de Lebesgue). *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X . Entonces existe $\delta > 0$, llamado **número de Lebesgue** de la cubierta \mathcal{A} , tal que para todo subconjunto A de X cuyo diámetro es menor que δ , se cumple que $A \subset A_j$ para algún $j \in J$.*

Una prueba del lema de Lebesgue se puede consultar en [29].

Teorema 2.5.11 (Teorema de aproximación simplicial). *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f : |sd^m K| \rightarrow |L|$ tiene una aproximación simplicial $s : |sd^m K| \rightarrow |L|$.*

Demostración. La colección \mathcal{A} de las estrellas abiertas de los vértices de L forman una cubierta abierta de $|L|$: los elementos de \mathcal{A} son abiertos en $|L|$ gracias a la proposición 2.5.3, y dado $x \in |L|$, tomando cualquier vértice v del portador de x en L se tiene que $x \in \text{star}(v, L)$, así que la unión de los elementos de \mathcal{A} es igual a $|L|$.

Sea $\mathcal{A}' = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Dado que f es continua, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto en $|K|$, para cada $A \in \mathcal{A}$, por lo que \mathcal{A}' es una cubierta abierta de $|K|$. Ya que $|K|$ tiene la topología de subespacio de algún \mathbb{R}^n , entonces $|K|$ es un espacio métrico, el cual es compacto por la proposición 2.3.4. Aplicando el lema de Lebesgue, obtenemos un número de Lebesgue $\delta > 0$ para la cubierta abierta \mathcal{A}' de $|K|$. El teorema 2.4.21 garantiza que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(sd^m K) < \frac{\delta}{3}$. Sea v un vértice de $sd^m K$. Sean $u_1, u_2 \in \text{star}(v, sd^m K)$. Entonces existen $\sigma_1, \sigma_2 \in sd^m K$ tales que $v \in \text{vert}(\sigma_1) \cap \text{vert}(\sigma_2)$ y $u_i \in \sigma_i^\circ$, $i = 1, 2$. Por lo anterior,

$$d(u_1, u_2) \leq d(u_1, v) + d(v, u_2) \leq \text{diam}(\sigma_1) + \text{diam}(\sigma_2) \leq 2\mu(sd^m K) < \frac{2\delta}{3}.$$

En consecuencia, $\text{diam}(\text{star}(v, sd^m K)) < \delta$, por lo que existe un vértice w de L tal que $\text{star}(v, sd^m K) \subset f^{-1}(\text{star}(w, L))$, lo cual implica que $f(\text{star}(v, sd^m K)) \subset \text{star}(w, L)$. Así, f satisface la condición de estrella con respecto a $sd^m K$ y L , concluyéndose por la proposición 2.5.8 que $f : |sd^m K| \rightarrow |L|$ tiene una aproximación simplicial $s : |sd^m K| \rightarrow |L|$. ■

Definición 2.5.12. Diremos que las funciones simpliciales $s, t : |K| \rightarrow |L|$ son **contiguas**, si para cada simplejo $\sigma \in K$ existe $\tau \in L$ tal que $s(\sigma), t(\sigma) \leq \tau$.

Lema 2.5.13. *Si $s, t : |K| \rightarrow |L|$ son aproximaciones simpliciales de $f : |K| \rightarrow |L|$, entonces s y t son contiguas.*

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle \in K$. Sea $x \in \sigma^\circ$ y sea τ el portador de $f(x)$ en L . Para cada i , se tiene que $x \in \text{star}(v_i, K)$ y como s es una aproximación simplicial de f , se sigue que $f(x) \in \text{star}(s(v_i), L)$. Por lo visto en el lema 2.5.7 (1), esto implica que $s(\sigma) \leq \tau$. Del mismo modo, ya que t es aproximación simplicial de f , se cumple que $f(\text{star}(v_i, K)) \subset \text{star}(t(v_i), L)$ para todo i , luego $t(\sigma) \leq \tau$. La conclusión es que s y t son contiguas. ■

Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son funciones continuas y $\delta > 0$, escribiremos $d(f, g) < \delta$ para indicar que $d(f(x), g(x)) < \delta$, para todo $x \in |K|$.

Lema 2.5.14. *Sean $f, g : |K| \rightarrow |L|$ continuas. Si $\delta > 0$ es un número de Lebesgue para la cubierta abierta de $|L|$ formada por las estrellas abiertas de los vértices de L , y si $d(f, g) < \frac{\delta}{3}$, entonces $\mathcal{A} = \{f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))\}_{v \in \text{vert}(L)}$ forma una cubierta abierta de $|K|$.*

Demostración. Sea $v \in \text{vert}(L)$. Dado que $\text{star}(v, L)$ es abierto en $|L|$ (proposición 2.5.3), de la continuidad de f y g tenemos que $f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$ es abierto en $|K|$. Entonces \mathcal{A} es una colección de abiertos en $|K|$. La demostración estará completa si mostramos que $|K|$ es igual a la unión de los conjuntos en \mathcal{A} . Es suficiente con probar que,

para cada $x \in |K|$, existe $v \in \text{vert}(L)$ tal que $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$. Sea $x \in |K|$. Observemos que $\text{diam}(V_{|L|}(f(x), \frac{\delta}{3})) \leq \frac{2\delta}{3} < \delta$, por lo que existe $v \in \text{vert}(L)$ tal que $V_{|L|}(f(x), \frac{\delta}{3}) \subset \text{star}(v, L)$, así que $f(x) \in \text{star}(v, L)$. Como $d(f(x), g(x)) < \frac{\delta}{3}$, entonces $g(x) \in V_{|L|}(f(x), \frac{\delta}{3})$. En consecuencia, $f(x), g(x) \in \text{star}(v, L)$ y, por lo tanto, $x \in f^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap g^{-1}(\text{star}(v, L))$. ■

Proposición 2.5.15. *Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son homotópicas, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y una secuencia de funciones simpliciales $s_1, \dots, s_n : |\text{sd}^m K| \rightarrow |L|$ tales que s_1 es aproximación simplicial de f , s_n es aproximación simplicial de g , y cada s_i, s_{i+1} son contiguas.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue para la cubierta de $|L|$ formada por los abiertos $\text{star}(v, L)$, $v \in \text{vert}(L)$. Sea $F : |K| \times I \rightarrow |L|$ una homotopía entre f y g . Escribamos $f_t(x) := F(x, t)$. Buscamos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) < \frac{\delta}{3}, \quad 0 \leq r < n, r \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Ya que F es una función continua entre espacios métricos con $|K| \times I$ compacto, entonces F es uniformemente continua. Así, existe $\beta > 0$ tal que, para cualesquiera $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in |K| \times I$ con $d((x_1, t_1), (x_2, t_2)) < \beta$, se cumple $d(f_{t_1}(x_1), f_{t_2}(x_2)) < \frac{\delta}{3}$. En particular, siempre que $|t_1 - t_2| < \beta$ tendremos que $d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) < \frac{\delta}{3}, \forall x \in |K|$. Ahora, por la propiedad Arquimadiana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \beta$. De este modo, se tiene (2.12).

Por lo anterior y el lema 2.5.14, $\mathcal{A}_r := \{f_{r/n}^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap f_{(r+1)/n}^{-1}(\text{star}(v, L))\}_{v \in \text{vert}(L)}$ forma una cubierta abierta de $|K|$, para cada $0 \leq r < n, r \in \mathbb{Z}$. Aplicando el lema de Lebesgue, para cada r existe un número de Lebesgue $\delta_r > 0$ de \mathcal{A}_r . Tomemos $\delta^* = \min \delta_r$. Por el teorema 2.4.21, podemos hallar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\text{sd}^m K) < \frac{\delta^*}{3}$. Dado r , así como se mostró en el teorema de aproximación simplicial, si u es un vértice de $\text{sd}^m K$, entonces $\text{diam}(\text{star}(u, \text{sd}^m K)) < \delta^* \leq \delta_r$, luego $\text{star}(u, \text{sd}^m K) \subset f_{r/n}^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap f_{(r+1)/n}^{-1}(\text{star}(v, L))$, para algún $v \in \text{vert}(L)$. Esto implica que $f_{r/n}(\text{star}(u, \text{sd}^m K))$ y $f_{(r+1)/n}(\text{star}(u, \text{sd}^m K))$ están contenidos en $\text{star}(v, L)$. Usando la proposición 2.5.8, obtenemos una aproximación simplicial $s_{r+1} : |\text{sd}^m K| \rightarrow |L|$ tanto de $f_{r/n}$ como de $f_{(r+1)/n}$. Aquí, s_1 aproxima simplicialmente a $f_0 = f$ y s_n a $f_1 = g$. Además, s_i y s_{i+1} son contiguas porque son aproximaciones simpliciales de $f_{i/n}$ (lema 2.5.13). ■

2.6. Conexidad fuerte

El propósito de esta sección es introducir el concepto de conexidad fuerte de complejos simpliciales, rescatado de Aleksandrov (1956) [2], y algunos resultados relacionados que nos serán de utilidad en el tratamiento de la orientación de complejos simpliciales.

Definición 2.6.1. Sea K un complejo simplicial. Un simplejo $\sigma \in K$ es **principal**, si σ no es una cara propia de algún simplejo de K . Diremos que K es **puro**, si todos sus simplejos principales son de la misma dimensión.

Dado un complejo simplicial K , es claro que $|K|$ es la unión de los complejos simpliciales $K(\sigma)$ donde σ es un simplejo principal de K .

Por otro lado, como consecuencia de la afirmación 2.4.6, dado un n -simplejo σ , cualquier r -ésimo derivado $K^{(r)}(\sigma)$ de $K(\sigma)$ es un complejo simplicial que consiste de n -simplejos junto con sus caras. A partir de este hecho, demostraremos el siguiente:

Lema 2.6.2. *Sea σ un n -simplejo y sea $K' \triangleleft K(\sigma)$. Entonces K' es un n -complejo puro.*

Demostración. Observamos que $K' = \bigcup_{i=1}^m \tau_i$ donde cada τ_i es un simplejo principal de K' . En vista de que $\tau_i \subset |K'| = |K(\sigma)|$, por la proposición 2.4.11, existe un r -ésimo derivado $K^{(r)}(\sigma)$ de $K(\sigma)$ que contiene una subdivisión $L_i \triangleleft K(\tau_i)$, para $i = 1, \dots, m$. Puesto que $|\bigcup_{i=1}^m L_i| = |K^{(r)}(\sigma)|$, del lema 2.4.10 obtenemos que $K^{(r)}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^m L_i$.

Por otro lado, si ρ_1, \dots, ρ_p son los n -simplejos principales de $K^{(r)}(\sigma)$, entonces $K^{(r)}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^p K(\rho_i)$. De este modo, para cada $j \in \{1, \dots, p\}$ existe un $j' \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\rho_j \in L_{j'}$, es decir, $\rho_j \subset \tau_{j'}$. Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Mostraremos que existe $k' \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\rho_{k'} \subset \tau_k$. Por contradicción, supongamos que $\rho_j \not\subset \tau_k$, para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Dado que $L_k \triangleleft K(\tau_k)$, entonces $\tau_k = \bigcup_{i=1}^s \theta_i$ para algunos $\theta_i \in K^{(r)}(\sigma)$. En consecuencia, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\theta_i \leq \rho_j$. A su vez, existe $j' \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\rho_j \subset \tau_{j'}$. Esto quiere decir que existen $k_1, \dots, k_t \in \{1, \dots, m\}$ tales que $\tau_k \subset \bigcup_{i=k_1}^{k_t} \tau_i$, luego $\tau_k = \tau_k \cap \left(\bigcup_{i=k_1}^{k_t} \tau_i \right) = \bigcup_{i=k_1}^{k_t} (\tau_k \cap \tau_i)$, donde notemos $\tau_k \cap \tau_i \leq \tau_k, \tau_i$, para $i = k_1, \dots, k_t$. No puede ocurrir que $\tau_k \cap \tau_i = \tau_k$, porque entonces $\tau_k \leq \tau_i$ contradice que τ_k sea un simplejo principal de K' . Por ende, τ_k es una unión de sus caras propias, pero esto es absurdo. Así, debe existir $k' \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\rho_{k'} \subset \tau_k$. Esto implica que $n = \dim(\rho_{k'}) \leq \dim(\tau_k)$. Como también ocurre que $\tau_k \subset \sigma$, entonces $\dim(\tau_k) \leq \dim(\sigma) = n$. Por lo tanto, τ_k es un n -simplejo. Al ser esto válido para cualquier $k \in \{1, \dots, m\}$, queda demostrado que los simplejos principales de K' tienen dimensión n . ■

Respecto a los $(n-1)$ -simplejos en una subdivisión arbitraria del complejo simplicial de un n -simplejo, enunciaremos el siguiente teorema, del cual puede consultarse una demostración elemental y detallada en Maschler *et al* (2013) [24], concretamente en el teorema 23.15.

Teorema 2.6.3. *Sea σ un n -simplejo, $n \in \mathbb{N}$. Sea $K' \triangleleft K(\sigma)$, $K' \neq K(\sigma)$, y sea $\tau \in K'$ un $(n-1)$ -simplejo. Si $\tau \subset \partial\sigma$, entonces τ es cara de un único n -simplejo de K' . Si $\tau \not\subset \partial\sigma$, entonces τ es cara de precisamente dos n -simplejos de K' .*

Lema 2.6.4. *Sea K un n -complejo puro, $n \in \mathbb{N}$, en el cual cada n -simplejo tiene una cara frontera que es cara de al menos dos n -simplejos. Sean $\sigma, \sigma' \in K$ n -simplejos. Definamos la relación $\sigma \sim \sigma'$ si y sólo si existe una secuencia $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ de n -simplejos de K tales que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_m = \sigma'$ y $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ es una $(n-1)$ -cara, para $i = 1, \dots, m-1$. Entonces \sim es una relación de equivalencia sobre el conjunto de n -simplejos de K .*

Demostración. Es fácil ver que \sim es simétrica, ya que basta con invertir el orden de la secuencia en cuestión, mientras que la transitividad se sigue al juntar las secuencias involucradas. Finalmente, la reflexividad es consecuencia de la simetría y la transitividad, ya que

si σ es un n -simplejo en K , seleccionando una cara frontera τ de σ , para la cual exista un n -simplejo $\sigma' \in K$ tal que $\sigma \cap \sigma' = \tau$, se tiene que $\sigma \sim \sigma'$ y, por ende, $\sigma \sim \sigma$. ■

Definición 2.6.5. Sea K un n -complejo puro. Diremos que K es **fuertemente conexo**, si $\sigma \sim \sigma'$ para cualesquiera n -simplejos $\sigma, \sigma' \in K$ distintos.

Proposición 2.6.6. Sea σ un n -simplejo, $n \in \mathbb{N}$. Sea $K' \triangleleft K(\sigma)$ tal que $K' \neq K(\sigma)$. Entonces K' es un n -complejo fuertemente conexo.

Demostración. Debido al lema 2.6.2, tenemos que K' es un n -complejo puro.

Paso 1. Mostraremos primero el caso particular donde K' es un primer derivado de $K(\sigma)$. Por inducción sobre n . Supongamos que $n = 1$ y escribamos $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$. Entonces existe $x_\sigma \in \sigma^\circ$ tal que $K' = K(\langle v_0, x_\sigma \rangle) \cup K(\langle v_1, x_\sigma \rangle)$, donde $\langle v_0, x_\sigma \rangle \cap \langle v_1, x_\sigma \rangle = \langle x_\sigma \rangle$, lo cual muestra que K' es fuertemente conexo. Dado $n \geq 1$, supongamos que la proposición es cierta para el primer derivado de un n -simplejo y veamos que lo mismo se sigue para $n+1$. Sea σ un $(n+1)$ -simplejo y K' un primer derivado de $K(\sigma)$. Tenemos que K' es un $(n+1)$ -complejo puro. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ los simplejos principales de K' . Recordando la afirmación 2.4.6, es claro que existe $x_\sigma \in \sigma^\circ$ tal que $x_\sigma \in \text{vert}(\sigma_i)$ y $\rho_i := \sigma_i \setminus \langle x_\sigma \rangle \subset \partial\sigma$, para $i = 1, \dots, m$. Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$ con $j \neq k$. Puesto que $\rho_j, \rho_k \subset \partial\sigma$ y como K' es un primer derivado de $K(\sigma)$, por la proposición 2.4.8 existen τ_j, τ_k caras fronteras de σ tales que $\rho_j \subset \tau_j$ y $\rho_k \subset \tau_k$. Asimismo, por ser K' un primer derivado de $K(\sigma)$, el subcomplejo L_i de K' tal que $|L_i| = \tau_i$ es un primer derivado de $K(\tau_i)$ con $\rho_i \in L_i$, para $i = j, k$. Por otro lado, $\gamma = \tau_j \cap \tau_k$ es una cara frontera común de τ_j y τ_k , de modo que el subcomplejo L de K' tal que $|L| = \gamma$ también es un primer derivado de $K(\gamma)$. De hecho, puede verse que L es un subcomplejo común de L_j y L_k , el cual es de dimensión $n-1$. Sea $\theta \in L$ un $(n-1)$ -simplejo. Como L_j y L_k son subdivisiones de los n -complejos $K(\tau_j)$ y $K(\tau_k)$, respectivamente, gracias a que $\theta \subset \gamma \subset \partial\tau_j \cap \partial\tau_k$, por el teorema 2.6.3 podemos encontrar $\theta_j \in L_j$ y $\theta_k \in L_k$ tales que θ es cara frontera común de θ_j y θ_k . Dado que ρ_j y θ_j son n -simplejos de L_j , el cual es un primer derivado del n -complejo $K(\tau_j)$, entonces por hipótesis de inducción existe una secuencia de n -simplejos $\rho_j, \omega_1, \dots, \omega_p, \theta_j$ de L_j , en la cual dos simplejos consecutivos se intersecan en una $(n-1)$ -cara. Análogamente, podemos hallar una secuencia de n -simplejos $\theta_k, \omega_{p+1}, \dots, \omega_r, \rho_k$ de L_k con las mismas características de la secuencia previa. Ya que los simplejos en las secuencias previas son, de hecho, simplejos de K' y puesto que $\theta_k \cap \theta_j = \theta$, escribiendo $\alpha_i = x_\sigma \omega_i$ para cada i , $\beta_j = x_\sigma \theta_j$ y $\beta_k = x_\sigma \theta_k$, obtenemos una secuencia de n -simplejos $\sigma_j, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_j, \beta_k, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r, \sigma_k$ de K' en la que cualesquiera dos simplejos consecutivos se intersecan en una cara frontera. Al ser j y k seleccionados arbitrariamente, queda demostrado que K' es fuertemente conexo.

Paso 2. Demostraremos ahora el caso en que K' es un r -ésimo derivado de $K(\sigma)$. Por inducción sobre $r \geq 1$. El caso $r = 1$ ya se mostró en el paso 1. Asumiendo que para cierto $r \geq 1$ la proposición es válida, probaremos que también es cierto para un $(r+1)$ -ésimo derivado K' de $K(\sigma)$. Entonces $K' = (K'')^{(1)}$, donde K'' es un r -ésimo derivado de $K(\sigma)$. Sean $\rho, \rho' \in K'$ n -simplejos. Como $K' \triangleleft K''$, entonces existen n -simplejos $\tau, \tau' \in K''$ tales que $\rho \subset \tau$ y $\rho' \subset \tau'$. Por hipótesis de inducción, se tiene una secuencia de n -simplejos τ_1, \dots, τ_p de K'' , con $\tau_1 = \tau$, $\tau_p = \tau'$ y en la que dos simplejos consecutivos se intersecan en una misma cara frontera. Para cada i , observe que el subcomplejo L_i de K' tal que $|L_i| = \tau_i$ es un primer derivado de $K(\tau_i)$,

por lo que L_i es un n -complejo puro. Así, para cada $i = 1, \dots, p-1$, podemos seleccionar en L_i un $(n-1)$ -simplejo $\gamma_i \subset \tau_i \cap \tau_{i+1}$ y podemos hallar n -simplejos $\theta_i \in L_i$ y $\theta'_i \in L_{i+1}$ tales que $\theta_i \cap \theta'_i = \gamma_i$, de modo que $\theta_i \sim \theta'_i$. Ahora, como ρ y θ_1 son n -simplejos de L_1 , aplicando el paso 1 para L_1 , tenemos que $\rho \sim \theta_1$ mediante una secuencia de n -simplejos de L_1 y, por ende, de K' . Del mismo modo, como $\theta'_{p-1}, \rho' \in L_p$, entonces $\theta'_{p-1} \sim \rho'$. Para $i = 2, \dots, p-1$, tenemos que $\theta'_{i-1}, \theta_i \in L_i$, luego $\theta'_{i-1} \sim \theta_i$. Así, $\rho \sim \theta_1 \sim \theta'_1 \sim \theta_2 \sim \theta'_2 \sim \dots \sim \theta_{p-1} \sim \theta'_{p-1} \sim \rho'$ y, por transitividad (lema 2.6.4), obtenemos que $\rho \sim \rho'$, lo que nos permite deducir que K' es fuertemente conexo.

Paso 3. Probaremos la proposición para $K' \triangleleft K(\sigma)$ arbitraria. Gracias a la proposición 2.4.11, existe un r -ésimo derivado $K^{(r)}(\sigma)$ de $K(\sigma)$ tal que, para cada n -simplejo τ de K' , $K^{(r)}(\sigma)$ contiene un subcomplejo L_τ que es subdivisión de $K(\tau)$. De hecho, $K^{(r)}(\sigma)$ es la unión de los complejos L_τ mencionados anteriormente. Sean $\tau, \tau' \in K'$ n -simplejos distintos. Escojamos n -simplejos $\rho \in L_\tau$ y $\rho' \in L_{\tau'}$, por lo cual $\rho \subset \tau$ y $\rho' \subset \tau'$. Debido al paso 2, existe una secuencia de n -simplejos ρ_1, \dots, ρ_m con $\rho_1 = \rho$ y $\rho_m = \rho'$, en la cual $\rho_i \cap \rho_{i+1}$ es una $(n-1)$ -cara, para $i = 1, \dots, m-1$. Para cada i , tenemos que existe un n -simplejo $\tau_i \in K'$ tal que $\rho_i \subset \tau_i$. Dado $j \in \{1, \dots, m-1\}$, ocurre que $\tau_j = \tau_{j+1}$ o bien $\tau_j \neq \tau_{j+1}$. En este último caso, como $\rho_j \cap \rho_{j+1}$ es una $(n-1)$ -cara contenida en el simplejo $\tau_j \cap \tau_{j+1}$ (el cual es cara propia de τ_j y τ_{j+1}), entonces $\tau_j \cap \tau_{j+1}$ es una $(n-1)$ -cara. Observe que existen $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, m\}$ para los cuales: $\tau_j = \tau_1, \forall j \leq k_1$; $\tau_j = \tau_m, \forall j \geq k_s$; y, para $2 \leq p \leq s-1$, $\tau_j = \tau_{k_p}, \forall k_p \leq j < k_{p+1}$. Por lo anterior, obtenemos una sucesión de n -simplejos $\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_s}$ en K' con $\tau_{k_1} = \tau_1 = \tau$ y $\tau_{k_s} = \tau_m = \tau'$, en la que $\tau_{k_j} \cap \tau_{k_{j+1}}$ es una $(n-1)$ -cara, para $j = 1, \dots, s-1$. En consecuencia, $\tau \sim \tau'$ y, por lo tanto, K' es fuertemente conexo. ■

2.7. Orientación

Esta sección se basa en el tratamiento dado en el capítulo 5 de Lee (2000) [19] y el capítulo 6 de Singer y Thorpe (1967) [37]. A lo largo de esta sección, la envolvente afín de un simplejo σ se denotará por X_σ .

Definición 2.7.1. Sea σ un n -simplejo con vértices v_0, \dots, v_n . Diremos que dos órdenes $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$ y $(v_{j_0}, \dots, v_{j_n})$ de los vértices de σ son **equivalentes**, si existe una permutación par s de $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $s(i_q) = j_q$, para $q = 0, \dots, n$.

Proposición 2.7.2. La relación dada en la definición anterior es de equivalencia y, para $n > 0$, particiona el conjunto de los órdenes de v_0, \dots, v_n en dos clases de equivalencia; mientras que, para $n = 0$, sólo hay una clase de equivalencia. Cada una de estas clases recibe el nombre de **orientación** de un simplejo.

Demostración. La relación es reflexiva, simétrica y transitiva debido a que la identidad es una permutación par, la inversa de una permutación par es par y la composición de permutaciones pares es par, respectivamente. Por lo tanto, tenemos una relación de equivalencia definida en el conjunto de los órdenes de v_0, \dots, v_n . Si $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$ es un orden arbitrario de los vértices v_0, \dots, v_n , entonces existe una única permutación s de $\{0, \dots, n\}$ tal que $s(q) = i_q, \forall q$, y ya que toda permutación es par o impar, entonces hay dos clases de equi-

valencia: la primera corresponde a la clase de (v_0, \dots, v_n) y la segunda es la clase de los órdenes $(v_{s(0)}, \dots, v_{s(n)})$ donde s es una permutación impar. Cuando $n = 0$, solamente hay una clase de equivalencia, que es la de (v_0) . ■

Definición 2.7.3. Un *simplejo orientado* es un simplejo junto con una elección de orientación. Si v_0, \dots, v_n son los vértices de un simplejo σ , entonces el simplejo orientado determinado por el orden (v_0, \dots, v_n) será denotado por $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ y denotaremos por $-\sigma = -[v_0, \dots, v_n]$ al mismo simplejo, pero con la orientación opuesta. Si $n = 0$, denotaremos $[v_0]$ simplemente por v_0 y haremos la convención de considerar dos posibles elecciones para orientar σ , ya sea $\sigma = +v_0$ o bien $\sigma = -v_0$.

Cabe destacar que un 1-simplejo orientado tiene un sentido de dirección ligado, un 2-simplejo tiene un sentido de rotación ligado, y así sucesivamente (figura 9). Esto es debido a que orientar un simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ mediante $[v_0, \dots, v_n]$ equivale a orientar su envolvente afín $X_\sigma = x_0 + S$ a través de la base afín ordenada (v_0, \dots, v_n) , es decir, es lo mismo que orientar S a partir de la base ordenada $(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$, a como mostraremos en la proposición 2.7.5. A esta orientación de X_σ le llamaremos la *orientación inducida* por $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$.

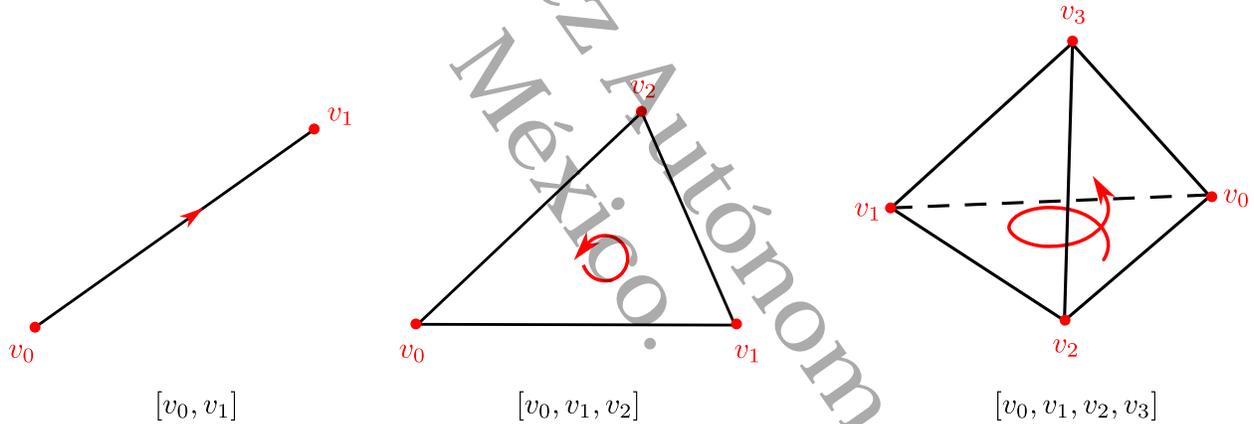


Figura 9: Interpretación geométrica de la orientación de un simplejo.

Lema 2.7.4. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Sea s una transposición del conjunto $\{0, \dots, n\}$. Si $B' = (v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$ y $C' = (v_{s(1)} - v_{s(0)}, \dots, v_{s(n)} - v_{s(0)})$, entonces $\det(M_{B',C'}) = -1$.

Demostración. Tenemos que existen $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i \neq j$ tales que $s(i) = j$, $s(j) = i$ y $s(k) = k$, para todo $k \neq i, j$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Consideremos primero el caso $i \neq 0$. Entonces

$$M_{B',C'} = [e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n],$$

e intercambiando en esta matriz la j -ésima con la i -ésima columna, obtenemos la matriz identidad $I_{n \times n}$. El intercambio hecho implica un cambio en el signo del determinante, es decir, $\det(M_{B',C'}) = -\det(I_{n \times n}) = -1$. Ahora bien, supongamos que $i = 0$. En este caso,

$C' = (v_1 - v_j, \dots, v_{j-1} - v_j, v_0 - v_j, v_{j+1} - v_j, \dots, v_n - v_j)$ y $v_k - v_j = (v_k - v_0) - (v_j - v_0)$, $\forall k$. En particular, cuando $k = 0$, tenemos que $v_0 - v_j = -(v_j - v_0)$. En consecuencia,

$$M_{C',B'} = [e_1 - e_j, \dots, e_{j-1} - e_j, -e_j, e_{j+1} - e_j, \dots, e_n - e_j]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-ésima fila}$$

↑
 j -ésima columna

y se sigue que $\det(M_{C',B'}) = -(-1)^{2j} \det(I_{(n-1) \times (n-1)}) = -1$. Así, también obtenemos $\det(M_{B',C'}) = -1$. ■

Proposición 2.7.5. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ y sean $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}), (v_{j_0}, \dots, v_{j_n})$ dos órdenes de los vértices de σ . Entonces $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ y $[v_{j_0}, \dots, v_{j_n}]$ inducen la misma orientación en X_σ si y sólo si $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{j_0}, \dots, v_{j_n}]$.

Demostración. Denotemos $B = (v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$ y $C = (v_{j_0}, \dots, v_{j_n})$. Entonces $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ y $[v_{j_0}, \dots, v_{j_n}]$ inducen la misma orientación de X_σ si y sólo si B y C son bases afines equivalentes de X_σ , es decir, siempre y cuando $B' = (v_{i_1} - v_{i_0}, \dots, v_{i_n} - v_{i_0})$ y $C' = (v_{j_1} - v_{j_0}, \dots, v_{j_n} - v_{j_0})$ sean bases equivalentes. Tenemos que existe una única permutación s del conjunto $\{0, \dots, n\}$ tal que $s(i_q) = j_q, \forall q$. Además, existen transposiciones s_1, \dots, s_m de $\{0, \dots, n\}$ tales que $s = s_m \circ s_{m-1} \circ \dots \circ s_1$. Escribamos $r_p = s_p \circ \dots \circ s_1$, para $p = 1, \dots, m$. Sean $B'_0 = B'$ y, para cada p , $B'_p = (v_{r_p(i_0)} - v_{r_p(i_1)}, \dots, v_{r_p(i_n)} - v_{r_p(i_0)})$. Note que $B'_m = C'$. Esquemáticamente, tenemos la siguiente sucesión de bases ordenadas:

$$B' = B'_0 \xrightarrow{s_1} B'_1 \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_m} B'_m = C',$$

donde dos bases consecutivas difieren por una transposición. De este modo, por el lema 2.7.4, $\det(M_{B'_{p-1}, B'_p}) = -1, p = 1, \dots, m$. Ya que $M_{B', C'} = M_{B'_0, B'_m} = \prod_{i=1}^m M_{B'_{m-i}, B'_{m-i+1}}$, entonces $\det(M_{B', C'}) = (-1)^m$, el cual es positivo si y sólo si m es par. Esto implica que B' y C' son equivalentes, si y sólo si s es una permutación par, si y sólo si $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{j_0}, \dots, v_{j_n}]$. ■

Definición 2.7.6. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ es un n -simplejo orientado, entonces la orientación de σ determina una orientación en cada una de sus caras frontera, llamada la **orientación inducida**, por la siguiente regla: la orientación inducida de la cara $\tau_i = \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ se define por $\sigma|_{\tau_i} := (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, donde \hat{v}_i indica que se ha omitido el vértice v_i (véase la figura 10).

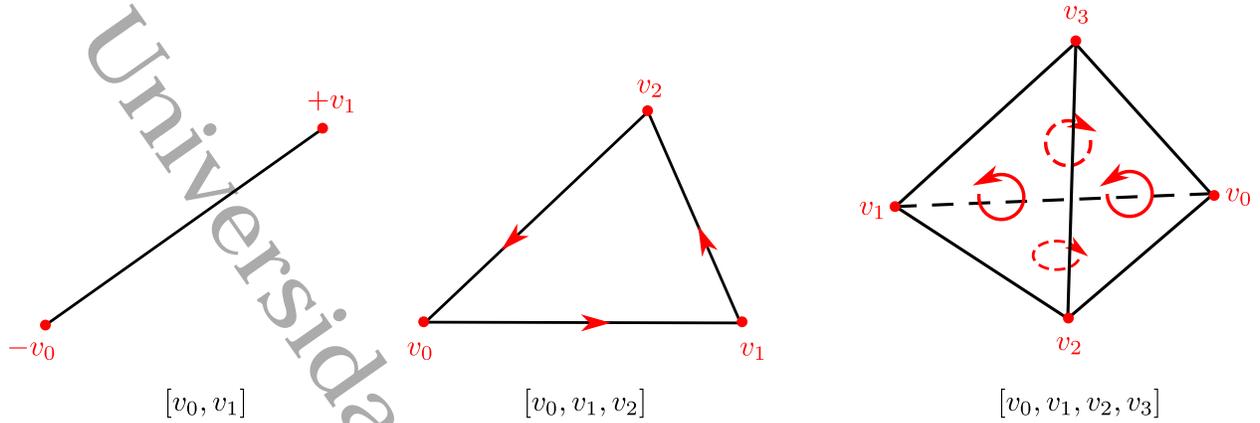


Figura 10: Orientaciones inducidas en las caras frontera por un simplejo orientado.

Definición 2.7.7. Sea K un n -simplejo puro. Si $\sigma, \sigma' \in K$ son dos n -simplejos distintos que compartan una cara frontera τ , diremos que las orientaciones de σ y σ' son **consistentes**, si inducen orientaciones opuestas en τ . Una **orientación** de K es una elección de orientación para cada n -simplejo, de tal forma que cualesquiera dos de estos simplejos que se intersequen en una $(n-1)$ -cara estén consistentemente orientados. Diremos que K es **orientable**, si K admite una orientación.

Ejemplo 2.7.8. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$, $n \geq 1$. Consideremos el $(n-1)$ -simplejo puro $K = K(\partial\sigma)$ y orientemos cada cara $\tau_i = (\sigma \setminus \langle v_i \rangle)$ con la orientación inducida $\sigma|_{\tau_i}$. Veamos que hemos dado una orientación de K . Sean $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i < j$. Entonces $\rho := \tau_i \cap \tau_j = (\sigma \setminus \langle v_i \rangle) \setminus \langle v_j \rangle$. Tenemos que $\sigma|_{\tau_i} = (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j, v_n]$, donde v_j se encuentra en la $(j-1)$ -ésima posición. En consecuencia,

$$(\sigma|_{\tau_i})|_{\rho} = (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]. \quad (2.13)$$

Por su parte, $\sigma|_{\tau_j} = (-1)^j [v_0, \dots, v_i, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n]$ y tenemos que v_i está justamente en la i -ésima posición. Luego,

$$(\sigma|_{\tau_j})|_{\rho} = (-1)^{j+i} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]. \quad (2.14)$$

Comparando (2.13) y (2.14), es claro que $(\sigma|_{\tau_i})|_{\rho} = -[(\sigma|_{\tau_j})|_{\rho}]$. Esto demuestra que τ_i y τ_j están consistentemente orientados. Al ser esto válido para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, n\}$ distintos, se concluye que hemos producido una orientación para K .

Lema 2.7.9. Sea σ un n -simplejo y sea $K' \triangleleft K(\sigma)$. Entonces K' es orientable si y sólo si cualesquiera n -simplejos orientados $\sigma_1, \sigma_2 \in K'$ inducen la misma orientación en X_{σ} .

Demostración. Si $K' = K(\sigma)$, entonces σ es el único n -simplejo orientado de K' y el resultado es trivial. Supongamos que $K' \neq K(\sigma)$. Primero, sean $\sigma_1 = [v_0, \dots, v_n]$ y $\sigma_2 = [w_0, \dots, w_n]$ simplejos orientados de K' que se intersecan en una cara frontera común τ .

Caso I: $n = 1$. Aquí tenemos que $\sigma_1 = [v_0, v_1]$ y $\sigma_2 = [w_0, w_1]$. Además, como τ es cara frontera de σ_1 , tenemos que $\tau = \langle v_0 \rangle$ o bien $\tau = \langle v_1 \rangle$.

Asumiendo que K' es orientable, debe cumplirse que las orientaciones de σ_1 y σ_2 son consistentes. Supongamos que $\tau = \langle v_0 \rangle$. Por contradicción, se demuestra que $v_0 \neq w_0$, ya que $\sigma_1|_\tau$ y $\sigma_2|_\tau$ tienen orientaciones opuestas. Así, $w_1 = v_0$ y $\sigma_2 = [w_0, v_0]$. Dado que $X_{\sigma_1} = X_{\sigma_2}$, existe $\lambda \neq 0$ tal que $v_0 - w_0 = \lambda(v_1 - v_0)$. Para que (v_0, v_1) y (w_0, v_0) sean bases afines ordenadas de X_σ equivalentes, debe ocurrir que $\lambda > 0$ (pues λ es el determinante de la matriz de cambio respectiva). Supongamos que $\lambda < 0$. Entonces $-\lambda > 0$ y $w_0 - v_0 = -\lambda(v_1 - v_0)$, es decir, $w_0 = v_0 - \lambda(v_1 - v_0)$. Si $-\lambda \leq 1$, se tiene que $w_0 \in \langle v_0, v_1 \rangle$ y, en consecuencia, $w_0 \in \sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau = \langle v_0 \rangle$, contrario al hecho que $v_0 \neq w_0$. Por otro lado, si $-\lambda > 1$, se tiene que $v_1 \in \langle w_0, v_0 \rangle$ y entonces $v_1 = v_0$, que tampoco es posible porque $v_0 \neq v_1$ al ser v_0 y v_1 afínmente independientes. De lo anterior se deduce que $\lambda > 0$ y, por ende, σ_1 y σ_2 inducen la misma orientación en X_σ . Un argumento similar se aplica cuando $\tau = \langle v_1 \rangle$, en cuyo caso $v_1 \neq w_1$ y se prueba que $w_1 - v_1 = \lambda(v_1 - v_0)$ para algún $\lambda > 0$.

Recíprocamente, partamos del supuesto que σ_1 y σ_2 inducen la misma orientación en X_σ . De nuevo, suponiendo que $\tau = \langle v_0 \rangle$, tenemos que $v_0 = w_0$ ó $v_0 = w_1$. Si $v_0 = w_0$, ya que $X_{\sigma_1} = X_{\sigma_2}$, podemos hallar $\lambda \neq 0$ tal que $w_1 - v_0 = \lambda(v_1 - v_0)$. Como (v_0, v_1) y (v_0, w_1) son bases afines ordenadas de X_σ equivalentes, se cumple que $\lambda > 0$. De este modo, $w_1 = v_0 + \lambda(v_1 - v_0)$ con $\lambda > 0$. Cuando $\lambda < 1$, entonces $w_1 \in \langle v_0, v_1 \rangle$ y se contradice que $v_0 \neq w_1$. Pero si $\lambda > 1$, tenemos que $v_1 \in \langle w_1, v_0 \rangle$, que igual es contradictorio. Esto nos dice que sólo puede ocurrir que $v_0 = w_1$, por lo que $\sigma_2 = [w_0, v_0]$. Así, $\sigma_1|_\tau = -v_0$ y $\sigma_2|_\tau = +v_0$, demostrando que las orientaciones de σ_1 y σ_2 son consistentes. Si $\tau = \langle v_1 \rangle$, un argumento similar al presentado en este párrafo muestra que $v_1 = w_0$ y que las orientaciones $\sigma_1|_\tau$ y $\sigma_2|_\tau$ son opuestas.

Caso II: $n > 1$. Como τ es una $(n-1)$ -cara de σ_1 , tenemos que existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $v_i \notin \text{vert}(\tau)$. Intercambiando v_i con v_n , la orientación de $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_i]$ es opuesta a la de σ_1 . Puesto que $n > 1$, entonces τ tiene al menos dos vértices distintos de v_i . Intercambiando dos de éstos, la orientación resultante será la misma de σ_1 , pero los primeros $n-1$ vértices en este arreglo son los que generan a τ . De este modo, renombrando de ser necesario, podemos asumir que $\tau = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$. Dado que τ también es cara frontera de σ_2 , existe $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $w_j \notin \text{vert}(\tau)$. Así como hicimos con σ_1 , podemos obtener un orden equivalente de los vértices de σ_2 , de manera que los primeros $n-1$ vértices generen a τ y el último sea w_j . Por ende, renombrando los vértices de σ_2 si hace falta, podemos suponer que existe una permutación s de $\{0, \dots, n-1\}$ tal que $\sigma_2 = [v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)}, w_n]$ y $\tau = \langle v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)} \rangle$.

Denote $B'_1 = (v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$, $B'_2 = (v_{s(1)} - v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)} - v_{s(0)}, w_n - v_{s(0)})$, $C'_1 = (v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0)$ y $C'_2 = (v_{s(1)} - v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)} - v_{s(0)})$, las cuales son bases ordenadas. Dado que $X_{\sigma_1} = X_{\sigma_2}$, entonces $w_n \in X_{\sigma_1} = v_{s(0)} + \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$, es decir, $w_n - v_{s(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v_i - v_0)$, para algunos $\lambda_i \in \mathbb{R}$. No puede ocurrir que $\lambda_n = 0$, de otro modo, $w_n \in v_{s(0)} + \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0) = X_\tau$, pues $s(0) \in \{0, \dots, n-1\}$ implica que $v_{s(0)} \in \text{vert}(\tau)$, y esto contradice que v_0, \dots, v_{n-1}, w_n son afínmente independientes. Así, $\lambda_n \neq 0$. Cuando $v_{s(0)} \neq v_0$, entonces existe un $p \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $v_{s(p)} = v_0$. En consecuencia,

$$M_{B'_2, B'_1} = \begin{bmatrix} e_{s(1)} - e_{s(0)}, \dots, e_{s(p-1)} - e_{s(0)}, -e_{s(0)}, e_{s(p+1)} - e_{s(0)}, \dots, e_{s(n-1)} - e_{s(0)}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{bmatrix}.$$

Ya que $e_{s(j)} \neq e_n$ para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces en la n -ésima fila de $M_{B'_2, B'_1}$ todas las entradas son cero salvo la (n, n) -ésima que es λ_n . Borrando la última columna y la última fila

de $M_{B'_2, B'_1}$, observamos que se obtiene $M_{C'_2, C'_1}$, luego $\det(M_{B'_2, B'_1}) = \lambda_n \det(M_{C'_2, C'_1})$. Cuando $v_{s(0)} = v_0$, note que $M_{B'_2, B'_1} = [e_{s(1)}, \dots, e_{s(n-1)}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i]$ y $\det(M_{B'_2, B'_1}) = \lambda_n \det(M_{C'_2, C'_1})$. Ahora, probaremos que $\lambda_n < 0$. Por contradicción, supongamos que $\lambda_n > 0$. Note que

$$w_n - v_{s(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i - v_0) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i v_i + \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i v_i - \left(\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \right) v_0 - \left(\sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \right) v_0,$$

lo cual implica

$$w_n + \sum_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i) v_i + \left(\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \right) v_0 = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i v_i + \sum_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i) v_0 + v_{s(0)}.$$

Sea $r = 1 + \sum_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i) + \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$, el cual es positivo. Entonces

$$x := \frac{1}{r} w_n + \sum_{\lambda_i < 0} \frac{-\lambda_i}{r} v_i + \left(\sum_{\lambda_i > 0} \frac{\lambda_i}{r} \right) v_0 = \sum_{\lambda_i > 0} \frac{\lambda_i}{r} v_i + \left(\sum_{\lambda_i < 0} \frac{-\lambda_i}{r} \right) v_0 + \frac{1}{r} v_{s(0)}, \quad (2.15)$$

donde los escalares involucrados en cada parte de la igualdad son positivos y suman $\frac{r}{r} = 1$. Sean $S^+ := \{v_i : \lambda_i > 0\}$ y $S^- := \{v_i : \lambda_i < 0\}$. Dado que $\lambda_n > 0$, entonces $v_n \in S^+$ y $v_n \notin S^-$, luego $x \in \text{conv}(\{v_0, w_n\} \cup S^-) \cap \text{conv}(\{v_{s(0)}, v_0\} \cup S^+) \subset \sigma_2 \cap \sigma_1 = \tau$. No obstante, como $\tau \leq \sigma_1$ y $x \in \tau$, donde la combinación afín de x dada en el miembro derecho de (2.15) tiene a v_n con $\lambda_n > 0$, por el lema 1.6.5, debe ocurrir que $v_n \in \text{vert}(\tau)$, que contradice $v_n \notin \text{vert}(\tau)$. Esto demuestra que $\lambda_n < 0$.

Ahora, observemos que $\sigma_1|_{\tau} = (-1)^n [v_0, \dots, v_{n-1}]$ y $\sigma_2|_{\tau} = (-1)^n [v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)}]$, luego $\sigma_1|_{\tau} = -(\sigma_2|_{\tau})$ si y sólo si $[v_0, \dots, v_{n-1}] = -[v_{s(0)}, \dots, v_{s(n-1)}]$. Así, las orientaciones de σ_1 y σ_2 son consistentes si y sólo si s es una permutación impar y, por la proposición 2.7.5, esto ocurre si y sólo si $\sigma_1|_{\tau}$ y $\sigma_2|_{\tau}$ inducen orientaciones opuestas en X_{τ} , si y sólo si $\det(M_{C'_2, C'_1}) < 0$. Dado que $\lambda_n < 0$ y $\det(M_{B'_2, B'_1}) = \lambda_n \det(M_{C'_2, C'_1})$, tenemos que $\det(M_{C'_2, C'_1}) < 0$ si y sólo si $\det(M_{B'_2, B'_1}) > 0$, si y sólo si B'_1 y B'_2 son equivalentes y, nuevamente por la proposición 2.7.5, esto pasa si y sólo si σ_1 y σ_2 inducen la misma orientación en X_{σ} .

De este modo, cualesquiera n -simplejos orientados de K' que se intersecan en una cara frontera común tienen orientaciones consistentes si y sólo si inducen la misma orientación en X_{σ} . Esto demuestra directamente la condición necesaria del lema. La condición suficiente es consecuencia de la proposición 2.6.6, a partir de la cual K' es fuertemente conexo: esto implica que cualesquiera dos n -simplejos de K' pueden unirse mediante una secuencia de n -simplejos de K' , en la que dos simplejos consecutivos se intersecan en una cara frontera, de manera que, cuando K' es orientable, dos simplejos consecutivos inducen la misma orientación en X_{σ} , por tener orientaciones consistentes y, por ende, cada n -simplejo en la secuencia induce en X_{σ} la misma orientación. De aquí, se sigue que cualesquiera dos n -simplejos de K' inducen la misma orientación en X_{σ} cuando K' es orientable. ■

Lema 2.7.10. Sean $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ y $\sigma' = [v'_0, \dots, v'_n]$ n -simplejos orientados y sean $\tau \leq \sigma$, $\tau' \leq \sigma'$ caras fronteras suyas. Supongamos que $\sigma' \subset \sigma$ y $\tau' \subset \tau$. Si σ y σ' inducen la misma orientación en X_{σ} , entonces $\sigma|_{\tau}$ y $\sigma'|_{\tau'}$ inducen la misma orientación en X_{τ} .

Demostración. *Caso I:* $n = 1$. Aquí $\sigma = [v_0, v_1]$ y $\sigma' = [v'_0, v'_1]$. Supongamos que $\tau' = \langle v'_0 \rangle$. Por hipótesis, τ' debe estar contenida en una 0-cara τ de σ , ya sea $\langle v_0 \rangle$ o bien $\langle v_1 \rangle$, por lo cual $v'_0 = v_0$ ó $v'_0 = v_1$. Asumamos que $v'_0 = v_1$. No puede ocurrir que también $v'_1 = v_0$, porque entonces $\sigma' = [v_1, v_0] = -\sigma$, luego la proposición 2.7.5 implica que σ y σ' inducen orientaciones opuestas en X_σ , contraria a la hipótesis. Por ende, $v'_1 \neq v_0$. Como $v'_1 \in \langle v_0, v_1 \rangle$, entonces existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $v'_1 = \lambda v_0 + (1 - \lambda)v_1$, por lo cual, $v'_1 - v'_0 = -\lambda(v_1 - v_0)$. Esto quiere decir que $\det(M_{(v'_1 - v'_0), (v_1 - v_0)}) = -\lambda < 0$, lo cual implica que (v'_0, v'_1) y (v_0, v_1) son bases ordenadas de X_σ con orientaciones opuestas, que es contradictorio. Por lo tanto, $v'_0 \neq v_1$ y, en consecuencia, $v'_0 = v_0$. Así, $\tau' = \tau$ y $\sigma|\tau = -v_0 = \sigma'|\tau'$, que inducen la misma orientación en $X_\tau = \{v_0\}$. Análogamente, cuando $\tau' = \langle v'_1 \rangle$ se tiene que $\tau' = \langle v_1 \rangle = \tau$ y $\sigma|\tau = +v_1 = \sigma'|\tau'$ inducen la misma orientación en $X_\tau = \{v_1\}$.

Caso II: $n > 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tau = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ y $\tau' = \langle v'_0, \dots, v'_{n-1} \rangle$. Entonces $\sigma|\tau = (-1)^n [v_0, \dots, v_{n-1}]$ y $\sigma'|\tau' = (-1)^n [v'_0, \dots, v'_{n-1}]$. Mostraremos que $C'_1 = (v'_1 - v'_0, \dots, v'_{n-1} - v'_0)$ y $C'_2 = (v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0)$ son bases ordenadas equivalentes, ya que esto implicará que las orientaciones de $\sigma|\tau$ y $\sigma'|\tau'$ inducen la misma orientación en X_τ . Para cada $i = 1, \dots, n-1$, tenemos que $v'_i - v'_0 \in \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0)$, por lo que existen $\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{n-1,i} \in \mathbb{R}$ tales que $v'_i - v'_0 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ji}(v_j - v_0) + 0 \cdot (v_n - v_0)$. Por otro lado, como $v'_n - v'_0 \in \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0)$, se sigue que $v'_n - v'_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_{jn}(v_j - v_0)$, para algunos $\lambda_{1n}, \dots, \lambda_{nn} \in \mathbb{R}$. Note que $\lambda_{nn} \neq 0$, porque $v'_n \notin X_{\tau'} = X_\tau = v'_0 + \text{gen}(v_1 - v_0, \dots, v_{n-1} - v_0)$. De esta forma, denotando $B'_1 = (v'_1 - v'_0, \dots, v'_n - v'_0)$ y $B'_2 = (v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$,

$$M_{B'_1, B'_2} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} M_{C'_1, C'_2} & \begin{matrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{n-1,n} \end{matrix} \\ \hline 0 & \lambda_{nn} \end{array} \right].$$

Por hipótesis, σ y σ' inducen la misma orientación en X_σ . Esto significa que B'_1 y B'_2 son bases equivalentes. En consecuencia, $\det(M_{B'_1, B'_2}) = \lambda_{nn} \det(M_{C'_1, C'_2}) > 0$. De aquí, se seguirá que C'_1 y C'_2 son bases equivalentes si mostramos que $\lambda_{nn} > 0$. Por contradicción, supongamos que $\lambda_{nn} < 0$. Tenemos que

$$v'_n + \left(\sum_{\lambda_{jn} > 0} \lambda_{jn} \right) v_0 + \sum_{\lambda_{jn} < 0} (-\lambda_{jn}) v_j = v'_0 + \sum_{\lambda_{jn} > 0} \lambda_{jn} v_j + \left(\sum_{\lambda_{jn} < 0} (-\lambda_{jn}) \right) v_0.$$

Sea $r = 1 + \sum_{\lambda_{jn} > 0} \lambda_{jn} + \sum_{\lambda_{jn} < 0} (-\lambda_{jn})$, el cual es positivo, y definamos $\mu_{jn} := \frac{|\lambda_{jn}|}{r}$, $\forall j$. Entonces $\frac{1}{r} + \sum_j \mu_{jn} = \frac{r}{r} = 1$, con $\frac{1}{r} > 0$ y $\mu_{jn} > 0$, $\forall j$. Escribamos

$$x := \frac{1}{r} v'_n + \left(\sum_{\lambda_{jn} > 0} \mu_{jn} \right) v_0 + \sum_{\lambda_{jn} < 0} \mu_{jn} v_j = \frac{1}{r} v'_0 + \sum_{\lambda_{jn} > 0} \mu_{jn} v_j + \left(\sum_{\lambda_{jn} < 0} \mu_{jn} \right) v_0. \quad (2.16)$$

Notemos que v_n aparece en el miembro izquierdo de (2.16), por ser $\lambda_{nn} < 0$. Esto nos dice que $x = \frac{1}{r} v'_0 + \sum_{\lambda_{jn} > 0} \mu_{jn} v_j + \left(\sum_{\lambda_{jn} < 0} \mu_{jn} \right) v_0 \in v'_0 \tau \subset \tau$, porque $v'_0 \in \tau$ y τ es convexo. Por

otro lado, sabemos que $v'_n \notin \text{aff}(v'_0, \dots, v'_{n-1}) = X_\tau$, pero $v'_n \in \sigma - \tau$, luego $v'_n = \sum_{i=0}^n \gamma_i v_i$, con $\gamma_i \geq 0$, $\gamma_n > 0$ y $\sum_{i=0}^n \gamma_i = 1$. En consecuencia,

$$x = \left[\sum_{\lambda_{jn} > 0} \left(\mu_{jn} + \frac{\gamma_j}{r} \right) \right] v_0 + \sum_{\lambda_{jn} < 0} \left(\mu_{jn} + \frac{\gamma_j}{r} \right) v_j + \sum_{\lambda_{jn} = 0} \frac{\gamma_j}{r} v_j.$$

Como $\lambda_{nn} < 0$ y $\frac{\gamma_n}{r} > 0$, se sigue que $\mu_{nn} + \frac{\gamma_n}{r} > 0$. Puesto que $x \in \tau$, lo anterior implica que $v_n \in \text{vert}(\tau)$, que no es posible. Por lo tanto, $\lambda_{nn} > 0$ y, en consecuencia, C'_1 y C'_2 son equivalentes. Así, $\sigma|_\tau$ y $\sigma'|_\tau$ inducen la misma orientación en X_τ . ■

Teorema 2.7.11. *Sea K un n -complejo puro y sea $K' \triangleleft K$. Entonces una orientación ya sea de K o K' determina una orientación en el otro.*

Demostración. Si $K = K'$ no hay nada que demostrar, por lo que podemos asumir que $K \neq K'$. Sea $\sigma \in K$ un n -simplejo. Entonces K' tiene una subdivisión $K'(\sigma)$ de $K(\sigma)$, la cual, por el lema 2.6.2, es un n -complejo puro. Como $|K|$ es la unión de sus simplejos principales σ de dimensión n , y puesto que $|K| = |K'|$ con cada $K'(\sigma)$ subcomplejo de K' , obtenemos que K' es la unión de los complejos simpliciales $K'(\sigma)$ obtenidos por cada n -simplejo σ de K . En consecuencia, se sigue que K' es un n -complejo puro.

Supongamos que K tiene una orientación. Sea $\sigma' \in K'$ un n -simplejo y sea $\sigma \in K$ un n -simplejo tal que $\sigma' \subset \sigma$. Note que σ es el único n -simplejo en K que puede contener a σ' . Además, observe que $X_\sigma = X_{\sigma'}$. Suponiendo que $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$, entonces se induce una orientación en X_σ dada por la base afín ordenada (v_0, \dots, v_n) . Escribiendo $\sigma' = \langle v'_0, \dots, v'_n \rangle$, si $[v'_0, \dots, v'_n]$ induce en $X_{\sigma'}$ la misma orientación de σ , orientamos $\sigma' = [v'_0, \dots, v'_n]$. En caso contrario, orientamos $\sigma' = -[v'_0, \dots, v'_n]$, luego la proposición 2.7.5 nos dice que σ' induce en $X_{\sigma'}$ la orientación opuesta a la inducida por $[v'_0, \dots, v'_n]$, es decir, la orientación de $X_{\sigma'}$ inducida por σ' coincide con la inducida por σ . Ahora bien, sean $\sigma'_1, \sigma'_2 \in K'$ n -simplejos tales que $\sigma'_1 \cap \sigma'_2 = \tau'$ es una $(n-1)$ -cara común de σ'_1 y σ'_2 . Entonces existen $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ tales que $\sigma'_i \subset \sigma_i$, para $i = 1, 2$. Cuando $\sigma_1 = \sigma_2$, dado que cada n -simplejo orientado del subcomplejo $K'(\sigma_1)$ de K' , cuyo poliedro subyacente es σ_1 , induce en X_{σ_1} la misma orientación, entonces el lema 2.7.9 garantiza que $K'(\sigma_1)$ es orientable usando la misma orientación que tienen sus n -simplejos en la orientación de K' . Así, las orientaciones de σ'_1 y σ'_2 son consistentes. Supongamos que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Dado que K es un complejo simplicial, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara propia de σ_1 y σ_2 , la cual contiene al $(n-1)$ -simplejo $\sigma'_1 \cap \sigma'_2 = \tau'$, por lo que $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ es un $(n-1)$ -simplejo. Por hipótesis, $\sigma_1|_\tau = -(\sigma_2|_\tau)$, lo cual nos dice, gracias a la proposición 2.7.5, que $\sigma_1|_\tau$ y $\sigma_2|_\tau$ inducen orientaciones opuestas en X_τ . Ya que, σ_i y σ'_i inducen en X_{σ_i} la misma orientación, por el lema 2.7.10 $\sigma_i|_\tau$ y $\sigma'_i|_\tau$ inducen la misma orientación en X_τ , para $i = 1, 2$. En consecuencia, $\sigma'_1|_\tau$ y $\sigma'_2|_\tau$ inducen orientaciones opuestas en X_τ y, por la proposición 2.7.5, $\sigma'_1|_\tau = -(\sigma'_2|_\tau)$, es decir, σ'_1 y σ'_2 tienen orientaciones consistentes. Esto muestra que K' es orientable.

Recíprocamente, supongamos que se tiene una orientación de K' . Sea $\sigma \in K$ un n -simplejo. Escogiendo un n -simplejo $\sigma' \in K'$ tal que $\sigma' \subset \sigma$, podemos orientar a σ de tal forma que la orientación de X_σ inducida por σ , coincida con la orientación inducida por σ' . Gracias al lema 2.7.9, la elección de σ' es irrelevante, ya que, para cualquier otro n -simplejo $\sigma'' \in K'$

tal que $\sigma'' \subset \sigma$, se cumple que σ' y σ'' inducen en X_σ la misma orientación. Ahora, sean $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ n -simplejos tales que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ es una cara frontera común. Es claro que K' tiene un subcomplejo L_τ que es subdivisión de $K(\tau)$. Por ser $K(\tau)$ un $(n-1)$ -complejo, entonces L_τ es un $(n-1)$ -complejo puro (véase el lema 2.6.2). Sea $\tau' \in L$ un $(n-1)$ -simplejo. Como $\sigma_1 \in K$, entonces K' también tiene un n -complejo puro L_{σ_1} tal que $|L_{\sigma_1}| = \sigma_1$. Debido a que $\tau' \subset \tau \subset \partial\sigma_1$, por el teorema 2.6.3 existe un único $\sigma'_1 \in L_{\sigma_1}$ tal que τ' es cara frontera de σ'_1 . Del mismo modo, como $\tau' \subset \partial\sigma_2$, podemos hallar un único $\sigma'_2 \in K'$ tal que $\sigma'_2 \subset \sigma_2$ y para el cual τ' sea una cara frontera. Así, $\sigma'_1 \cap \sigma'_2 = \tau'$ y, en consecuencia, $\tau' \subset \sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$. Por ser σ'_1 y σ'_2 n -simplejos orientados de K' , entonces $\sigma'_1|_{\tau'} = -(\sigma'_2|_{\tau'})$. Ya que σ_i y σ'_i inducen en X_{σ_i} la misma orientación, por el lema 2.7.10 tenemos que $\sigma_i|_\tau$ y $\sigma'_i|_{\tau'}$ inducen en X_τ la misma orientación, para $i = 1, 2$. Esto nos permite deducir que $\sigma_1|_\tau = -(\sigma_2|_\tau)$, por lo cual las orientaciones dadas de σ_1 y σ_2 son consistentes. Se concluye que K es orientable. ■

2.8. Auto-homeomorfismos de esferas que preservan la orientación

El objetivo de esta sección es entender el concepto de auto-homeomorfismo de una esfera que preserva la orientación y establecer la relación que guarda con la noción de orientación que hemos definido para complejos simpliciales, concretamente en la proposición 2.8.20. Un estudio formal y riguroso de este tipo de homeomorfismos se hace desde el punto de vista de la homología simplicial. De este modo, introduciremos aquellas definiciones y resultados relevantes que permitan formular este concepto. No obstante, y a diferencia de la forma en que hemos presentado las secciones anteriores en esta tesis, procuraremos no profundizar tanto en los detalles técnicos de las demostraciones. Esto debido a que un estudio minucioso de la teoría de homología simplicial supera los objetivos de este trabajo. Remitimos al lector a que consulte el capítulo 8 y la primera sección del capítulo 9 de Armstrong (1983) [4], o bien, para un tratamiento más formal y detallado, se recomiendan los primeros dos capítulos de Munkres (1984) [28]. Ambas referencias son las que se han consultado para desarrollar lo que aquí presentamos.

Definición 2.8.1. Sea K un complejo simplicial. Una **p -cadena** en K es una función c del conjunto de los p -simplejos orientados de K a los enteros \mathbb{Z} tal que:

- (1) $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo simplejo.
- (2) $c(\sigma) = 0$ para todos salvo un número finito de p -simplejos σ .

Definamos una operación en el conjunto de p -cadenas en K , que denotaremos como suma, de la siguiente forma: si c_1 y c_2 son p -cadenas, definimos la función $c_1 + c_2$ como $(c_1 + c_2)(\sigma) := c_1(\sigma) + c_2(\sigma)$. El grupo resultante se denota $C_p(K)$ y se llama **grupo de p -cadenas** de K . Si $p < 0$ o $p > \dim(K)$, convendremos en denotar $C_p(K)$ al grupo trivial.

Si σ es un simplejo orientado, la **cadena elemental** c correspondiente a σ es la función definida por $c(\sigma) = 1$, $c(\sigma') = -1$, si σ' es la orientación opuesta de σ , y $c(\tau) = 0$ para cualquier otro simplejo orientado τ .

Una cadena $c \in C_p(K)$ está **soportada** por un subcomplejo L de K , si c tiene valor 0 en cada simplejo que no está en L . Esto nos permite considerar a c como una p -cadena en L .

Admitiremos denotar por σ no solamente a un simplejo o un simplejo orientado, sino también a la p -cadena elemental c correspondiente al simplejo orientado σ . Así, si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo simplejo, escribiremos $\sigma' = -\sigma$, ya que esta ecuación se sigue cuando σ y σ' se interpretan como cadenas elementales.

Definición 2.8.2. Sea G un grupo abeliano aditivo. Diremos que G es **libre**, si tiene una **base libre**, esto es, si existe una familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de elementos de G tal que cada $g \in G$ puede escribirse únicamente como una suma finita $g = \sum_{i=1}^m n_i g_i$, $g_i \in \{g_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

La unicidad nos dice que cada g_α es de orden infinito y, por ende, genera un subgrupo cíclico infinito de G . Asimismo, la existencia de una base libre nos permite extender únicamente cualquier función f , del conjunto $\{g_\alpha\}_{\alpha \in J}$ a un grupo abeliano H , a un homomorfismo de G en H . A saber, si f es la función en cuestión, su extensión única es el homomorfismo $f : G \rightarrow H$, para el cual $f(g) = \sum_{i=1}^m n_i f(g_i)$, dado $g = \sum_{i=1}^m n_i g_i$.

Ahora bien, sucede que $C_p(K)$ es un grupo abeliano libre, ya que una base libre suya puede obtenerse tras orientar arbitrariamente cada p -simplejo y usando las cadenas elementales correspondientes como base. Es decir, si c es una p -cadena, ésta puede escribirse de forma única como la suma finita $c = \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i$, donde $c(\sigma_i) = n_i$, $c(-\sigma_i) = -n_i$ y $c(\tau) = 0$ para cualquier p -simplejo orientado τ que no aparezca en la suma.

De esta forma, para definir un homomorfismo f de $C_p(K)$ a cualquier grupo abeliano G , basta con definir f para cada p -simplejo orientado σ de K y que se cumpla $f(-\sigma) = -f(\sigma)$, porque así f se extenderá únicamente a un homomorfismo $f : C_p(K) \rightarrow G$.

Sabiendo esto, definamos un homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ llamado **operador frontera**. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ es un simplejo orientado con $p > 0$, definimos

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p].$$

Si denotamos $\tau_i = \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$, entonces podemos simplemente escribir $\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p \sigma | \tau_i$. Puede verificarse que $\partial_p(-\sigma) = -\partial_p(\sigma)$, ya que $(-\sigma) | \tau_i = -(\sigma | \tau_i)$. Por lo que ∂_p se extiende únicamente a un homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$. Cuando $p \leq 0$, definiremos el operador ∂_p como el homomorfismo trivial. El operador frontera cumple la siguiente propiedad fundamental para definir los grupos de homología:

Lema 2.8.3. $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Demostración. Sea σ un p -simplejo orientado, y denotemos $\tau_i = \sigma \setminus \langle v_i \rangle$ y $\rho_{ij} = (\sigma \setminus \langle v_i \rangle) \setminus \langle v_j \rangle$, para cada i y para cada j . Fijando i , note que $\partial_{p-1}(\sigma | \tau_i) = \sum_{j \neq i} (\sigma | \tau_i) | \rho_{ij}$. En consecuencia,

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sum_{i=0}^p \sum_{j \neq i} (\sigma | \tau_i) | \rho_{ij}. \quad (2.17)$$

Ahora, para cada $i, j \in \{0, \dots, p\}$ distintos, $\rho_{ij} = \tau_i \cap \tau_j$. Por lo mostrado en el ejemplo 2.7.8, se sigue que $(\sigma | \tau_i) | \rho_{ij} = -[(\sigma | \tau_j) | \rho_{ij}]$, además, los términos $(\sigma | \tau_i) | \rho_{ij}$ y $(\sigma | \tau_j) | \rho_{ij}$ aparecen solamente una vez como sumandos en el miembro derecho de (2.17). Por lo tanto, $\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sum_{i \neq j} ([(\sigma | \tau_i) | \rho_{ij}] + [(\sigma | \tau_j) | \rho_{ij}]) = 0$. ■

Definición 2.8.4. El núcleo de $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ se llama el grupo de ***p*-ciclos** de K y se denota por $Z_p(K)$. La imagen de $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$ se llama el grupo de ***p*-fronteras** y es denotado por $B_p(K)$.

Gracias al lema 2.8.3, cada frontera de una $(p+1)$ -cadena es un p -ciclo, o sea, $B_p(K) \subset Z_p(K)$. Además, por ser $Z_p(K)$ abeliano, todo subgrupo suyo es normal. Esto nos permite definir el grupo cociente

$$H_p(K) := Z_p(K)/B_p(K),$$

llamado el ***p*-ésimo grupo de homología** de K . Nos referiremos a cada clase de $H_p(K)$, determinadas por un p -ciclo z , como la ***clase de homología*** de z que denotamos por $[z]$. Dos p -ciclos que compartan la misma clase de homología se dirán que son ***homólogos***.

Dado un n -simplejo σ con $n > 1$, nos interesan los grupos de homología de $K(\partial\sigma)$, que en el futuro identificaremos como los grupos de homología de una n -esfera. Esto lo enunciamos en el siguiente resultado, se recomienda consultar la prueba de Munkres (1984) [28].

Teorema 2.8.5. *Sea σ un n -simplejo orientado con $n > 1$. Denotemos por Σ^{n-1} al complejo simplicial $K(\partial\sigma)$. Entonces $H_{n-1}(\Sigma^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ y es generado por la cadena $\partial_n(\sigma)$. De hecho, podemos identificar $H_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = Z_{n-1}(\Sigma^{n-1})$. Más aún, $H_i(\Sigma^{n-1}) = 0$ para $i \neq 0, n-1$.*

Definición 2.8.6. La colección de grupos y homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

recibe el nombre de ***complejo de cadenas*** de K y lo denotaremos simplemente por $C(K)$.

Si $\phi_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ es un homomorfismo que para cada p satisface $\partial_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p$, abreviaremos la colección entera

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(K) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ & & \phi_p \downarrow & & \phi_{p-1} \downarrow & & & & \phi_0 \downarrow & & \phi_{-1} \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(L) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(L) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

como $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ y llamaremos a ϕ un ***mapeo de cadenas***.

Todo mapeo de cadenas $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ induce homomorfismos $\phi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ de los grupos de homología, a saber, $\phi_{p*}([z]) = [\phi_p(z)]$, para cualquier p -ciclo z . Esta función está bien definida, porque 1) si z es un p -ciclo, entonces $\partial_p(z) = 0$, luego $\partial_p(\phi_p(z)) = \phi_{p-1}(\partial_p(z)) = 0$, por lo que $\phi_p(z) \in Z_p(L)$; y 2) si $[z] = [z']$, se tiene que existe $c \in C_{p+1}(K)$ tal que $\partial_{p+1}(c) = z - z'$, lo cual implica que $\phi_p(z) - \phi_p(z') = \partial_{p+1}(\phi_{p+1}(c)) \in B_p(L)$ y obtenemos que $[\phi_p(z)] = [\phi_p(z')]$. Convendremos en denotar ϕ_{p*} simplemente por ϕ_* para cada p . Más adelante también optaremos por escribir ϕ en vez de ϕ_p .

Ahora, si $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$ es otro mapeo de cadenas, entonces para cada p ,

$$\partial_p \circ (\psi \circ \phi)_p = \partial_p \circ (\psi_p \circ \phi_p) = (\psi_{p-1} \circ \partial_p) \circ \phi_p = \psi_{p-1} \circ (\phi_{p-1} \circ \partial_p) = (\psi \circ \phi)_{p-1} \circ \partial_p.$$

Por lo cual, $\psi \circ \phi : C(K) \rightarrow C(M)$ es un mapeo de cadenas y además se cumple que $(\psi \circ \phi)_{p*} = \psi_{p*} \circ \phi_{p*}, \forall p$.

Dada una función simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$, podemos construir un homomorfismo $s_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L), \forall p$, con el cual obtendremos un homomorfismo de grupos de homología:

Proposición 2.8.7. *Toda función simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$ induce un mapeo de cadenas, que denotaremos por $s : C(K) \rightarrow C(L)$, y, por ende, un homomorfismo $s_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$.*

Demostración. Sea $s : |K| \rightarrow |L|$ una función simplicial. Dado un p -simplejo orientado $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ de K , definimos:

$$s_p(\sigma) := \begin{cases} [s(v_0), \dots, s(v_p)], & \text{si } s(v_0), \dots, s(v_p) \text{ son distintos,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esto determina un homomorfismo $C_p(K) \rightarrow C_p(L)$, porque $s_p(-\sigma) = -s_p(\sigma)$: si $s_p(\sigma) = 0$, esto es claro; en el otro caso, intercambiar dos vértices distintos v_i y v_j de σ nos da $-\sigma$ y entonces en $s_p(-\sigma)$ se han intercambiado $s(v_i)$ y $s(v_j)$ con respecto a $s_p(\sigma)$. Como $\partial_p \circ s_p = s_{p-1} \circ \partial_p$ (véase el lema 12.1 de Munkres (1984)[28]), se deduce que $s : C(K) \rightarrow C(L)$ es un mapeo de cadenas, el cual induce un homomorfismo $s_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$, dado por $s_*([z]) = [s(z)], \forall z \in Z_p(K)$. ■

Es inmediato el siguiente:

Corolario 2.8.8.

- (1) Si $id : |K| \rightarrow |K|$ es la función simplicial identidad, entonces $id_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$ es el homomorfismo identidad.
- (2) Si $s : |K| \rightarrow |L|$ y $t : |L| \rightarrow |M|$ son funciones simpliciales, entonces $t \circ s : |K| \rightarrow |M|$ es simplicial y $(t \circ s)_* = t_* \circ s_*$.

El siguiente teorema es consecuencia de los teoremas 12.4 y 12.5 de [28].

Teorema 2.8.9. *Si $s, t : |K| \rightarrow |L|$ son contiguas, entonces los homomorfismos inducidos s_* y t_* son iguales.*

Nuestro próximo paso es entender de qué manera las subdivisiones de un complejo simplicial afectan a sus grupos de homología. Para ello, introduciremos un poco de terminología para entender el contexto del resultado que revela la invariancia de los grupos de homología al subdividir un complejo simplicial.

Definición 2.8.10. Sea $\varepsilon_K : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo suprayectivo definido por $\varepsilon_K(v) = 1$, para cada vértice v de K . Si c es una 0-cadena, entonces $\varepsilon_K(c)$ es igual a la suma de los valores de c en los vértices de K . Este homomorfismo se llama **mapeo de aumentación** para $C(K)$.

Un mapeo de cadenas $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ se dice que **preserva la aumentación**, si $\varepsilon_L \circ \phi_0 = \varepsilon_K$.

Es claro que los homomorfismos inducidos por funciones simpliciales preservan la aumentación, pues mandan vértices a vértices.

Dado una subdivisión $K' \triangleleft K$ y $\sigma \in K$, denotaremos por $K'(\sigma)$ al subcomplejo de K' cuyo poliedro subyacente es σ .

Teorema 2.8.11 (Teorema de subdivisión algebraica). *Sea $K' \triangleleft K$. Entonces existe un único mapeo de cadenas que preserva la aumentación $\lambda : C(K) \rightarrow C(K')$ tal que $\lambda(\sigma)$ está soportada por $K'(\sigma)$, para cada $\sigma \in K$. Si $g : |K'| \rightarrow |K|$ es cualquier aproximación simplicial de la identidad, entonces λ_* y g_* son inversos uno de otro, de modo que son isomorfismos.*

Llamaremos a λ el **operador de subdivisión**.

El teorema de subdivisión algebraica es concretamente el teorema 17.2 de [28], aunque la construcción del operador de subdivisión se argumenta teóricamente en el teorema 13.3. A priori, este operador es desconocido y, naturalmente, depende de cómo K' subdivide a $K(\sigma)$. Con lo desarrollado en la sección anterior, podemos caracterizar λ .

Proposición 2.8.12. *Sea $K' \triangleleft K$. Si σ es un p -simplejo orientado de K , entonces $\lambda(\sigma)$ es la suma de los p -simplejos orientados σ' de $K'(\sigma)$, donde σ' y σ inducen la misma orientación en $\text{aff}(\sigma)$.*

Demostración. Dado un p -simplejo orientado $\sigma \in K$, denotaremos por S_σ al conjunto de los p -simplejos orientados σ' de $K'(\sigma)$ tales que σ' y σ inducen en $\text{aff}(\sigma)$ la misma orientación. Sea $p \geq 0$. Definamos la función χ de tal modo que, para cada p -simplejo orientado $\sigma \in K$, $\chi(\sigma)$ es la cadena que se expresa como la suma de los p -simplejos en S_σ . Observe que $\chi(-\sigma) = -\chi(\sigma)$: tenemos que σ y $-\sigma$ inducen en $\text{aff}(\sigma)$ orientaciones opuestas (proposición 2.7.5), por lo que si $\sigma' \in S_\sigma$, entonces $-\sigma'$ y $-\sigma$ inducen en $\text{aff}(\sigma)$ la misma orientación. Así, χ se extiende a un homomorfismo $C_p(K) \rightarrow C_p(K')$, $\forall p$.

Veamos que $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$ es un mapeo de cadenas. Para ello, sea $\sigma \in K$ un p -simplejo orientado. Debemos mostrar que $\partial_p(\chi(\sigma)) = \chi(\partial_p(\sigma))$. Tenemos que $\partial_p(\chi(\sigma)) = \sum_{\sigma' \in S_\sigma} \partial_p(\sigma')$. Para cada $\sigma' \in S_\sigma$, sabemos que $\partial_p(\sigma')$ es la suma de las caras frontera de σ' con la orientación inducida por σ' . Ahora, debido al teorema 2.6.3, cada $(p-1)$ -simplejo τ' de $K'(\sigma)$ contenido en $\partial\sigma$ es cara de tan sólo un p -simplejo de $K'(\sigma)$, y cuando τ' no está completamente contenido en $\partial\sigma$, se tiene que τ' es cara de exactamente dos p -simplejos $\sigma'_1, \sigma'_2 \in K'(\sigma)$; en este último caso, si σ'_1 y σ'_2 inducen la misma orientación en $\text{aff}(\sigma)$, sabemos que $\sigma'_1|\tau' = -\sigma'_2|\tau'$ (véase el lema 2.7.9). Esto implica que cada $(p-1)$ -simplejo orientado $\tau' \in K'(\sigma)$ aparece una sola vez en $\sum_{\sigma' \in S_\sigma} \partial_p(\sigma')$ y siempre que $\tau' \not\subset \partial\sigma$, también tendremos que $-\tau'$ aparece una vez en la suma. Así, tras simplificar, tenemos que en $\sum_{\sigma' \in S_\sigma} \partial_p(\sigma')$ sólo quedan los $(p-1)$ -simplejos τ' de $K'(\sigma)$ contenidos en $\partial\sigma$, cada uno de los cuales tienen la orientación inducida por el p -simplejo σ' de $K'(\sigma)$ tal que $\tau' \leq \sigma'$. Puesto que σ y cada $\sigma' \in K'(\sigma)$ inducen en $\text{aff}(\sigma)$ la misma orientación entonces, gracias al lema 2.7.10, para cada cara frontera $\tau \leq \sigma$ y cada cara frontera $\tau' \leq \sigma'$ tales que $\tau' \subset \tau$, tanto $\sigma|\tau$ y $\sigma'|\tau'$ inducen la misma orientación en $\text{aff}(\tau)$. De este modo, si τ'_1 y τ'_2 son $(p-1)$ -simplejos que aparecen en la suma $\sum_{\sigma' \in S_\sigma} \partial_p(\sigma')$ y que están contenidos en la misma cara frontera τ de σ , entonces

τ'_1 y τ'_2 inducen la misma orientación en $\text{aff}(\tau)$. En consecuencia,

$$\sum_{\sigma' \in S_\sigma} \partial_p(\sigma') = \sum_{\substack{\tau \leq \sigma \\ \dim(\tau)=p-1}} \sum_{\tau' \in S_{\sigma|\tau}} \tau' = \sum_{\substack{\tau \leq \sigma \\ \dim(\tau)=p-1}} \chi(\sigma|\tau) = \chi \left(\sum_{\substack{\tau \leq \sigma \\ \dim(\tau)=p-1}} \sigma|\tau \right) = \chi(\partial_p(\sigma)).$$

Por lo tanto, $\partial_p(\chi(\sigma)) = \chi(\partial_p(\sigma))$. Esto muestra que $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$ es un mapeo de cadenas. Por definición, $\chi(\sigma)$ está soportada por $K'(\sigma)$, $\forall \sigma \in K$. Además, si v es un vértice de K , entonces $K(v) = K'(v)$, luego $\chi(v) = v$, de modo que χ preserva la aumentación. La conclusión es que $\chi = \lambda$, debido al teorema de subdivisión algebraica. ■

Ya estamos en condición de definir el homomorfismo inducido por una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$.

Definición 2.8.13. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua entre los complejos simpliciales K y L . Escojamos $K' \triangleleft K$ tal que f tiene una aproximación simplicial $s : |K'| \rightarrow |L|$ y sea $\lambda : C(K) \rightarrow C(K')$ el operador de subdivisión. El **homomorfismo inducido por f** es el homomorfismo $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ dado por la ecuación $f_* = s_* \circ \lambda_*$.

Note que, por el teorema de aproximación simplicial, siempre es posible escoger $K' \triangleleft K$ tal que $f : |K'| \rightarrow |L|$ tiene una aproximación simplicial $s : |K'| \rightarrow |L|$. En Munkres (1984) [28], se discute que el homomorfismo f_* está bien definido. Esto es porque, una vez que $K' \triangleleft K$ ha sido escogido, f_* no depende de la elección de la aproximación simplicial s . Es más, f_* tampoco depende de la subdivisión de K escogida.

Note que la definición de homomorfismo inducido por una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ es consistente con el caso donde f es simplicial: en esta situación, claramente f es una aproximación simplicial de sí mismo y el operador de subdivisión $\lambda : C(K) \rightarrow C(K)$ no es otro más que la identidad, luego f_* es justamente el homomorfismo de la proposición 2.8.7.

Teorema 2.8.14. Si f es la identidad de $|K|$, entonces cada $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$ es el homomorfismo identidad. Si tenemos dos funciones continuas $f : |K| \rightarrow |L|$ y $g : |L| \rightarrow |M|$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(M)$, $\forall p$.

Demostración. La primera parte del teorema se sigue porque la identidad es una función simplicial, luego el homomorfismo inducido por la identidad de $|K|$ es el inducido por considerar a la identidad como una función simplicial y entonces del corolario 2.8.8 obtenemos que es el homomorfismo identidad $H_p(K) \rightarrow H_p(K)$.

Supongamos ahora que tenemos funciones continuas $f : |K| \rightarrow |L|$ y $g : |L| \rightarrow |M|$. Escojamos una aproximación simplicial $t : |L'| \rightarrow |M|$ de $g : |L| \rightarrow |M|$ para algún $L' \triangleleft L$, y después una aproximación simplicial $s : |K'| \rightarrow |L'|$ de $f : |K| \rightarrow |L|$ para algún $K' \triangleleft K$. Sean $\lambda_1 : C(K) \rightarrow C(K')$ y $\lambda_2 : C(L) \rightarrow C(L')$ los operadores de subdivisión respectivos. Dado que $L' \triangleleft L$, podemos tomar una aproximación simplicial $h : |L'| \rightarrow |L|$ de la identidad de $|L|$ (proposición 2.5.9). Por el teorema de subdivisión algebraica, tenemos que $\lambda_{2*} = h_*^{-1}$. Debido al teorema 2.5.5, $h \circ s : |K'| \rightarrow |L|$ es una aproximación simplicial de $f : |K'| \rightarrow |L|$, y también $t \circ s : |K'| \rightarrow |M|$ es una aproximación simplicial de $g \circ f : |K'| \rightarrow |M|$. En consecuencia, $g_* \circ f_* = (t_* \circ \lambda_{2*}) \circ ((h \circ s)_* \circ \lambda_{1*}) = (t_* \circ s_*) \circ \lambda_{1*} = (t \circ s)_* \circ \lambda_{1*} = (g \circ f)_*$. ■

Teorema 2.8.15. Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son homotópicas, entonces $f_* = g_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$.

Demostración. Es consecuencia de la proposición 2.5.15 y del teorema 2.8.9: si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son homotópicas, entonces podemos hallar una subdivisión $K' \triangleleft K$ y una secuencia de funciones simpliciales $s_1, \dots, s_n : |K'| \rightarrow |L|$ tales que s_1 aproxima simplicialmente a f , s_n a g , y cada par s_i, s_{i+1} son contiguas, de modo que, $f_* = s_{1*} \circ \lambda_* = \dots = s_{n*} \circ \lambda_* = g_*$. ■

Teorema 2.8.16. Si $|K|$ y $|L|$ son del mismo tipo de homotopía, entonces K y L tienen grupos de homología isomorfos.

Demostración. Supongamos que $f : |K| \rightarrow |L|$ es una equivalencia homotópica, con inversa homotópica $g : |L| \rightarrow |K|$. Entonces $g \circ f \simeq id_{|K|}$ y $f \circ g \simeq id_{|L|}$, luego por los teoremas 2.8.14 y 2.8.15, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = id_{H_p(K)}$ y $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = id_{H_p(L)}$. Por lo tanto, $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ es un isomorfismo para cada p . ■

En vista de que espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía, obtenemos:

Corolario 2.8.17 (Invariancia topológica de grupos homológicos). Si $h : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo, entonces $h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ es un isomorfismo.

Ya estamos en condiciones de hablar propiamente sobre funciones continuas de esferas desde el punto de vista de la homología simplicial y siguiendo el planteamiento de Armstrong (1983) [4]. Sea K un complejo simplicial tal que $S^n = |K|$ es una n -esfera. Ya sabemos que $\partial\sigma \cong S^n$, para cualquier $(n+1)$ -simplejo σ , entonces del teorema 2.8.5 y por la invariancia topológica de grupos homológicos, obtenemos que $H_n(K) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Ahora bien, escojamos un generador $[z]$ para el grupo cíclico infinito $H_n(K)$. Dada una función continua $f : S^n \rightarrow S^n$, entonces el homomorfismo inducido $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$ manda $[z]$ a un múltiplo entero $\gamma[z]$. Este entero γ se llama **grado** de la función f y se escribe $\deg f$.

Observemos que el grado de f no depende de la triangulación de S^n ni del generador del grupo de homología. En efecto, supongamos que L es una triangulación de S^n y tomemos $[w]$ como un generador para $H_n(L)$, y sea $f'_* : H_n(L) \rightarrow H_n(L)$ el homomorfismo inducido por $f : |L| \rightarrow |L|$. Denotemos por $\phi : |L| \rightarrow |K|$ a la identidad de S^n . Dado que ϕ es un homeomorfismo, por la invariancia topológica de grupos homológicos, $\phi_* : H_n(L) \rightarrow H_n(K)$ es un isomorfismo. Ahora, $f = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$, donde en el lado izquierdo estamos considerando $f : |L| \rightarrow |L|$ y en el lado derecho es $f : |K| \rightarrow |K|$. Así, por el teorema 2.8.14 y recordando que f_* multiplica a cada elemento de $H_n(K)$ por γ , obtenemos:

$$f'_*([w]) = \phi_*^{-1}(f_*(\phi_*([w]))) = \phi_*^{-1}(\gamma\phi_*([w])) = \gamma[w],$$

de manera que f'_* multiplica $[w]$ por el mismo entero γ , como se quería.

Teorema 2.8.18. Sea K un complejo simplicial tal que $S^n = |K|$ es una n -esfera.

(1) El grado de la identidad de S^n es 1.

Sean $f, g : S^n \rightarrow S^n$ continuas. Se cumple que:

(2) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

- (3) Si $f \simeq g$, entonces $\deg f = \deg g$.
- (4) Si f es un homeomorfismo, entonces $\deg f = \pm 1$.

Demostración. (1) Se sigue del hecho que el homomorfismo inducido por la identidad de S^n es la identidad de $H_n(K)$ (teorema 2.8.14).

(2) Sea $[z]$ un generador de $H_n(K)$. Debido al teorema 2.8.14:

$$(f \circ g)_*([z]) = f_*(g_*([z])) = f_*((\deg g)[z]) = (\deg f \cdot \deg g)[z],$$

por lo cual $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

(3) Si $f \simeq g$, por el teorema 2.8.15 tenemos que $f_* = g_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$, de donde es claro que $\deg f = \deg g$.

(4) Si f es un homeomorfismo, entonces $f \circ f^{-1} = id$, luego por (1) y (2), $\deg(f \circ f^{-1}) = \deg(id)$ implica $\deg f \cdot \deg(f^{-1}) = 1$ y obtenemos $\deg f = \deg(f^{-1}) = \pm 1$. ■

Gracias al teorema 2.8.18(4), culminamos con el siguiente concepto:

Definición 2.8.19. Sea K un complejo simplicial tal que $S^n = |K|$ es una n -esfera. Un auto-homeomorfismo h de S^n **preserva la orientación**, si el grado de h es 1, e **invierte la orientación**, si su grado es -1 .

El resultado con el que finalizamos es la realización del objetivo de esta sección:

Proposición 2.8.20. Sea σ^{n+1} un $(n+1)$ -simplejo y sea f un auto-homeomorfismo PL de $\partial\sigma^{n+1}$ que preserva la orientación. Sean $K', K'' \triangleleft \Sigma^n = K(\partial\sigma^{n+1})$ tales que $f : |K'| \rightarrow |K''|$ es un homeomorfismo simplicial. Orientemos Σ^n a partir de una orientación dada para σ^{n+1} , como en el ejemplo 2.7.8. Consideremos K' y K'' con la orientación determinada por Σ^n (véase el teorema 2.7.11). Si $[v_0, \dots, v_n]$ es un n -simplejo orientado de K' , cuya orientación corresponde a la escogida para $\tau = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ en la orientación de K' , entonces $[f(v_0), \dots, f(v_n)]$ tiene la orientación que hemos escogido para $f(\tau)$ en la orientación de K'' .

Demostración. Sean $\lambda_1 : C(\Sigma^n) \rightarrow C(K')$ y $\lambda_2 : C(\Sigma^n) \rightarrow C(K'')$ los operadores de subdivisión respectivos. Sea $g : |K''| \rightarrow |\Sigma^n|$ una aproximación simplicial de la identidad. Entonces $g \circ f : |K'| \rightarrow |\Sigma^n|$ es una aproximación simplicial de $f : |K'| \rightarrow |\Sigma^n|$ y, como f preserva la orientación, tenemos que $f_* : H_n(\Sigma^n) \rightarrow H_n(\Sigma^n)$ es la identidad, luego

$$f_* = (g \circ f)_* \circ \lambda_{1*} \Rightarrow f_* \circ \lambda_{1*} = (g_*)^{-1} = \lambda_{2*}. \quad (2.18)$$

Note que $\lambda_1(\partial_n(\sigma^{n+1})) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_1(\sigma^{n+1}|_{\sigma_i})$, donde $\sigma_0, \dots, \sigma_{n+1}$ son las caras fronteras de σ^{n+1} . Por la proposición 2.8.12, sabemos que cada n -simplejo orientado en la suma $\lambda_1(\sigma^{n+1}|_{\sigma_i})$ induce en $\text{aff}(\sigma_i)$ la misma orientación que $\sigma^{n+1}|_{\sigma_i}$ induce en $\text{aff}(\sigma_i)$. Lo mismo ocurre cuando λ_1 se sustituye por λ_2 . Debido a (2.18):

$$f_*(\lambda_{1*}(\partial_n(\sigma^{n+1}))) = \lambda_{2*}(\partial_n(\sigma^{n+1})) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} f(\lambda_1(\sigma^{n+1}|_{\sigma_i})) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_2(\sigma^{n+1}|_{\sigma_i}), \quad (2.19)$$

esto último porque, recordando el teorema 2.8.5, podemos identificar $H_n(\Sigma^n) = Z_n(\Sigma^n)$. Note que cada n -simplejo con la orientación de K' aparece como sumando en $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_1(\sigma^{n+1}|\sigma_i)$, los cuales son mandados a K'' mediante el homeomorfismo simplicial $f : |K'| \rightarrow |K''|$, por lo que la suma de los n -simplejos orientados de K'' es igual a $\sum_{i=0}^{n+1} f(\lambda_1(\sigma^{n+1}|\sigma_i))$. A su vez, en $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_2(\sigma^{n+1}|\sigma_i)$ aparecen todos los n -simplejos ρ con la orientación de K'' , luego cada ρ está contenido en algún σ_i y tanto ρ como $\sigma^{n+1}|\sigma_i$ inducen en $\text{aff}(\sigma_i)$ la misma orientación.

Así, si $\tau = [v_0, \dots, v_n]$ es un n -simplejo con la orientación de K' y σ_j es la cara que contiene a τ , entonces τ y $\sigma^{n+1}|\sigma_j$ inducen en $\text{aff}(\sigma_j)$ la misma orientación, por lo que τ aparece en $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_1(\sigma^{n+1}|\sigma_i)$, lo cual nos dice que $f(\tau) = [f(v_0), \dots, f(v_n)]$ aparece en la suma $\sum_{i=0}^{n+1} f(\lambda_1(\sigma^{n+1}|\sigma_i))$. Dado (2.19) y la unicidad de las n -cadenas de K'' , se sigue que $f(\tau)$ es igual a uno de los n -simplejos orientados en la suma $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_2(\sigma^{n+1}|\sigma_i)$, digamos ρ , y si σ_k es la cara que contiene a ρ , entonces $f(\tau) = \rho$ y $\sigma^{n+1}|\sigma_k$ inducen en $\text{aff}(\sigma_k)$ la misma orientación, por lo que $f(\tau)$ tiene la orientación que hemos escogido en K'' . ■

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
 México.

3. Nudos

3.1. Nociones básicas

El desarrollo de esta sección, así como del capítulo en general, se basa principalmente en el primer capítulo de Burde, Zieschang y Heusener (2014) [8]. En concordancia con esta última referencia, las definiciones de *nudo poligonal* y *nudo manso* son de acuerdo con las establecidas en el capítulo 10 de Armstrong (1983) [4], que se corresponden con las definiciones de *nudo* dadas en el capítulo 2 de Livingston (1993) [22] y en el capítulo 1 de Lickorish (1997) [20]. También se consultó la definición de *isotopía de ambiente* dada en el capítulo 3 de Rourke y Sanderson (1982) [34], así como las proporcionadas en la introducción del capítulo 2 de Welsh (1993) [38] y en el artículo de Hudson y Zeeman (1964) [14].

En lenguaje matemático, podemos definir un nudo en el sentido de una curva cerrada simple en un espacio tridimensional, es decir, una función continua e inyectiva $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, excepto en $f(0) = f(1)$. Esto es equivalente a decir que:

Definición 3.1.1. Un **nudo** es un encaje $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o bien, $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$.

También es posible definir los nudos sustituyendo \mathbb{S}^3 por cualquier otra 3-esfera. Con la finalidad de plantear la primera noción de equivalencia de nudos, presentamos las siguientes definiciones:

Definición 3.1.2. Una función continua $F : X \times I \rightarrow Y \times I$ se dice que **preserva niveles**, si $F(X \times \{t\}) \subset Y \times \{t\}$ para cada $t \in I$.

Definición 3.1.3. Dos encajes $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ son **ambiente isotópicos**, si existen una función $h : Y \times I \rightarrow Y$ y un auto-homeomorfismo H de $Y \times I$ dado por $H(y, t) = (h(y, t), t)$ tal que $h(y, 0) = y, \forall y \in Y$ y $f_1(x) = h(f_0(x), 1), \forall x \in X$. En esta situación también diremos que $f_0(X)$ y $f_1(X)$ son ambiente isotópicos. La función H recibe el nombre de **isotopía de ambiente**. Para cada $t \in I$, denotaremos $h_t(y) = h(y, t), \forall y \in Y$. Nos referiremos a $h_1 : Y \rightarrow Y$ como el **homeomorfismo final** de la isotopía de ambiente y diremos que h_1 es **ambiente isotópico a la identidad**.

Observe que toda isotopía de ambiente preserva niveles. Por otro lado, la interpretación del efecto de una isotopía de ambiente es que, conforme el nudo se mueve en el espacio Y , una vecindad suya tiene que ser “arrastrado” junto con él. Más adelante, esta idea cobrará sentido cuando empecemos a construir isotopías de ambiente.

Lema 3.1.4. Sean $f_0 : X \rightarrow Y$ y $f_1 : X \rightarrow Y$ encajes. Si f_0 y f_1 son ambiente isotópicos, entonces existe una familia de auto-homeomorfismos h_t de $Y, t \in I$, tales que $h_0 = id, f_1 = h_1 \circ f_0$ y para los cuales la función $h : Y \times I \rightarrow Y$ dada por $h(y, t) = h_t(y)$ es continua. Si $Y = \mathbb{R}^n$, el recíproco también se cumple.

Demostración. Supongamos que f_0 y f_1 son ambiente isotópicos. Entonces existe una función $h : Y \times I \rightarrow Y$ tal que $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$, definida por $H(y, t) = (h(y, t), t)$, es un homeomorfismo y, para $h_t : Y \rightarrow Y$ dado por $h_t(y) = h(y, t), t \in I$, se cumple que $h_0 = id$ y

$$f_1 = h_1 \circ f_0.$$

Sea $t \in I$. Veremos que h_t es un homeomorfismo. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $h_t(y_1) = h_t(y_2)$. Entonces $H(y_1, t) = H(y_2, t)$ y como H es inyectiva, se deduce que $y_1 = y_2$. Así, h_t es inyectiva. Ahora, sea $y \in Y$. Dado que H es suprayectiva, para (y, t) existe $(y', t') \in Y \times I$ tal que $H(y', t') = (y, t)$, es decir, $(h_{t'}(y'), t') = (y, t)$, luego $t' = t$ y $h_t(y') = y$. Esto muestra que h_t es suprayectiva. Consideremos la proyección $\mathbf{p}_1 : Y \times I \rightarrow Y$. Sabemos que H es continua, luego $h_t = \mathbf{p}_1 \circ H$ es continua. En particular, $h|Y \times \{t\}$ es continua. Puesto que $f : Y \rightarrow Y \times \{t\}$ dada por $f(y) = (y, t)$ es continua, obtenemos que $h_t = (h|Y \times \{t\}) \circ f$ es continua. Notemos que $H^{-1} : Y \times I \rightarrow Y \times I$ está dada por $H^{-1}(h(y', s), s) = (y', s)$. Tenemos también que H^{-1} es continua, por lo que $g = \mathbf{p}_1 \circ H^{-1}$ es continua y la restricción $g|Y \times \{t\}$ también. En consecuencia, $g_t = (g|Y \times \{t\}) \circ f : Y \rightarrow Y$ es continua. Observemos que $f(g(y, t)) = H^{-1}(y, t)$, $\forall y \in Y$. Es fácil verificar que $h_t^{-1} = g_t$. Lo anterior muestra que h_t es un homeomorfismo, válido para cada $t \in I$.

Supongamos ahora que $Y = \mathbb{R}^n$ y existe una familia de auto-homeomorfismos h_t de \mathbb{R}^n , $t \in I$, tales que $h_0 = id$, $f_1 = h_1 \circ f_0$ y para los cuales la función $h : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $h(y, t) = h_t(y)$ es continua. Entonces la función $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times I$, $H(y, t) = (h(y, t), t)$, es continua. Tendremos que f_0 y f_1 son ambiente isotópicos, si mostramos que H es un homeomorfismo. Puesto que h_t es un homeomorfismo para cada $t \in I$, definamos $G : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times I$ por $G(y, t) = (h_t^{-1}(y), t)$. Entonces $G = H^{-1}$, esto es, H es biyectiva. Definamos ahora $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (x, t), & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0], \\ H(x, t), & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times I, \\ (h_1(x), t), & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [1, \infty). \end{cases}$$

Observemos que Φ está definida por partes en cerrados de \mathbb{R}^{n+1} tales que

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= (x, 0) = H(x, 0), \quad \forall (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} = (\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]) \cap (\mathbb{R}^n \times I), \\ \Phi(x, 1) &= (h_1(x), 1) = H(x, 1), \quad \forall (x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \{1\} = (\mathbb{R}^n \times I) \cap (\mathbb{R}^n \times [1, \infty)). \end{aligned}$$

Además, $\Phi|(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]) = id_{\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]}$ y $\Phi|(\mathbb{R}^n \times I) = H$, las cuales son continuas y biyectivas. Por otro lado, $\Phi|(\mathbb{R}^n \times [1, \infty)) = h_1 \times id_{\mathbb{R}^n \times [1, \infty)}$, donde h_1 y $id_{\mathbb{R}^n \times [1, \infty)}$ son continuas y biyectivas, por lo que $\Phi|(\mathbb{R}^n \times [1, \infty))$ es continua y biyectiva. Usando el lema del pegado, se deduce que Φ es continua. Asimismo, Φ es inyectiva y entonces, por el teorema de invariancia del dominio (teorema 1.5.5), obtenemos que Φ es abierta. De esta forma, Φ es una biyección continua y abierta, por lo cual es un homeomorfismo. En particular, obtenemos que $\Phi|(\mathbb{R}^n \times I) = H$ es un homeomorfismo. ■

Observación 3.1.5. En el contexto de la demostración previa, note que $G : Y \times I \rightarrow Y \times I$ dada por $G(y, t) = (h_t^{-1}(y), t)$ es la inversa de H , aun si Y no es \mathbb{R}^n . Sin embargo, en general no se garantiza que G sea continua dada la continuidad de h_t^{-1} , $t \in I$. Esto sí fue cierto para $Y = \mathbb{R}^n$ gracias al teorema de invariancia del dominio.

Proposición 3.1.6. Sea $\mathcal{E}(X, Y)$ el conjunto de encajes de X a Y . Para $f_0, f_1 \in \mathcal{E}(X, Y)$, definamos la relación $f_0 \sim f_1$ si y sólo si f_0 y f_1 son ambiente isotópicos. Entonces \sim es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}(X, Y)$.

Demostración. Sean $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{E}(X, Y)$.

(1) *Reflexividad:* la función identidad $id : Y \times I \rightarrow Y \times I$ es una isotopía de ambiente, ya que es un homeomorfismo y, para la proyección $h : Y \times I \rightarrow Y$ dada por $h(y, t) = y$, obtenemos que $id(y, t) = (y, t) = (h(y, t), t)$. Además, $h_0(y) = y$ y $h_1(f_0(y)) = f_0(y)$, $\forall y \in Y$. Por lo tanto, $f_0 \sim f_0$.

(2) *Simetría:* supongamos que $f_0 \sim f_1$. Entonces existe un homeomorfismo $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$, $H(y, t) = (h(y, t), t)$, para alguna función $h : Y \times I \rightarrow Y$, tal que $h_0 = id_Y$ y $f_1 = h_1 \circ f_0$. Por el lema 3.1.4, h_t es un homeomorfismo, $\forall t \in I$. Definamos $G : Y \times I \rightarrow Y \times I$ por $G(y, t) = (g(y, t), t)$, con $g : Y \times I \rightarrow Y$, $g(y, t) = h_t^{-1}(y)$. Observamos que $G = H^{-1}$. Tenemos que G es un homeomorfismo ya que H lo es. Además, como H es una isotopía de ambiente, se cumple que $h_0 = id_Y$ y $h_1 \circ f_0 = f_1$, de donde se sigue que $g_0 = h_0^{-1} = id_Y$ y $g_1 \circ f_1 = h_1^{-1} \circ f_1 = f_0$. Esto demuestra que G es una isotopía de ambiente y $f_1 \sim f_0$.

(3) *Transitividad:* supongamos que $f_0 \sim f_1$ y $f_1 \sim f_2$. Entonces existen $h : Y \times I \rightarrow Y$, $g : Y \times I \rightarrow Y$ y H, G auto-homeomorfismos de $Y \times I$ dados por $H(y, t) = (h(y, t), t)$, $G(y, t) = (g(y, t), t)$, tales que $h_0 = id_Y = g_0$, $f_1 = h_1 \circ f_0$ y $f_2 = g_1 \circ f_1$. Dado que H y G son auto-homeomorfismos de $Y \times I$, entonces $\Phi = G \circ H$ es un auto-homeomorfismo de $Y \times I$. Notemos que $\Phi(y, t) = (g_t(h_t(y)), t)$, $\forall (y, t) \in Y \times I$. Sea $\phi : Y \times I \rightarrow Y$ dado por $\phi(y, t) = g_t(h_t(y))$. Entonces $\phi_0 = g_0 \circ h_0 = id_Y \circ id_Y = id_Y$ y $\phi_1 \circ f_0 = (g_1 \circ h_1) \circ f_0 = g_1 \circ f_1 = f_2$. Por lo tanto, Φ es una isotopía de ambiente y $f_0 \sim f_2$.

Concluimos que \sim es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}(X, Y)$. ■

A partir de ahora, convendremos en llamar ***n-simplejo estándar*** al simplejo generado por la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , es decir,

$$\Delta^n := \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Del mismo modo, optaremos por denotar $\Sigma^{n-1} := K(\partial\Delta^n)$.

Definición 3.1.7. Dado un conjunto ordenado de puntos distintos (p_1, p_2, \dots, p_n) en \mathbb{R}^3 , o bien en $\partial\Delta^4$, la unión de los segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n]$ y $[p_n, p_1]$ se llama una ***curva poligonal cerrada*** con ***vértices*** p_1, p_2, \dots, p_n . Si cada segmento interseca exactamente a otros dos segmentos, cada uno en solamente un vértice, entonces se dice que la curva es ***simple***. Un ***nudo poligonal*** es una curva poligonal cerrada simple en \mathbb{R}^3 , o bien en $\partial\Delta^4$. Diremos que un nudo es ***manso***, si es ambiente isotópico a un encaje $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial\Delta^4$, cuya imagen sea un nudo poligonal, en caso contrario, tal nudo se llamará ***salvaje***.

Ejemplo 3.1.8. Considerando la función inclusión

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, x_2, 0), \end{aligned}$$

el ***nudo trivial*** está dado por el encaje $f_0 = i|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y es manso.

Demostración. A lo largo de esta prueba consideraremos la norma euclidiana usual. Sea $\rho^2 = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Para la traslación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = x - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, tenemos que $\sigma = T(\rho^2)$ es un simplejo (ver lema 2.1.18). Además, ya que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \text{Int}(\rho^2)$, como T es un homeomorfismo se tiene que $0 = T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \text{Int}(\sigma)$. Dado que σ es compacto y convexo, por la proposición 1.3.14, $f : \partial\sigma \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es un homeomorfismo. En consecuencia, $f_1 = (i|\partial\sigma) \circ f^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un encaje y $f_1(\mathbb{S}^1) = i(\partial\sigma)$. Gracias a que T es un homeomorfismo tal que $T(\rho^2) = \sigma$ y es también una transformación afín, usando el teorema 1.5.4 y la proposición 1.3.3, se tiene que $\partial\sigma = T(\partial\rho^2) = [T(e_0), T(e_1)] \cup [T(e_1), T(e_2)] \cup [T(e_2), T(e_0)]$. Por lo anterior, ya que $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación afín inyectiva, también se sigue que $i(\partial\sigma)$ es un nudo poligonal con vértices $i(T(e_j))$, $j = 0, 1, 2$.

Veamos en esta parte que f_0 y f_1 son ambiente isotópicos, de donde se seguirá que f_0 es manso. Sea $C = \sigma \times [-1, 1]$. Entonces $\text{Int}(C) = \text{Int}(\sigma) \times (-1, 1)$, lo cual nos dice que $0 \in \text{Int}(C)$. También, C es convexo y compacto porque σ y $[-1, 1]$ lo son. Así, por la proposición 1.3.16, se tiene el homeomorfismo $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$G(x) = \begin{cases} \|x\|g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde $g : \text{Fr}(C) \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un homeomorfismo dado por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $\forall x \in \text{Fr}(C)$. Definamos:

$$h : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, t) \mapsto (1-t)x + tG(x).$$

Es fácil verificar que h es continua porque G lo es. Para cada $t \in I$, probaremos que $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo. Para $t = 0$, tenemos que $h_0 = id$, mientras que para $t = 1$, $h_1 = G$, teniéndose en ambos casos un homeomorfismo. Sea $t \in (0, 1)$. Como h es continua, en la demostración del lema 3.1.4 se vio que h_t es continua. Sea $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Por la observación 1.3.15, como $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^2$, entonces existe $s > 0$ tal que $g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = s\frac{x}{\|x\|}$, por lo cual $\left\|g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = s > 0$. Ahora, si $1 + t(s-1) \leq 0$, entonces $s \leq 1 - \frac{1}{t}$, pero $t < 1$ implica que $1 - \frac{1}{t} < 0$ luego $s \leq 1 - \frac{1}{t} < 0$ que es contradictorio. Por lo tanto, $1 + t(s-1) > 0$. Esto es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. De este modo, podemos definir $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + t\left(\left\|g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| - 1\right)}x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $h_t^{-1} = \varphi_t$. Tenemos que $h_t(\varphi_t(0)) = h_t(0) = 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Como antes, existe $s > 0$ tal que $g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = s\frac{x}{\|x\|}$ y, en consecuencia, $s = \left\|g^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$. Recordando que $1 + t(s-1) > 0$, se verifica que $h_t(\varphi_t(x)) = x$. En consecuencia, $h_t \circ \varphi_t = id$ y h_t es suprayectiva. Mostraremos que h_t es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $h_t(x_1) = h_t(x_2)$. Observemos primero que si $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, entonces $h_t(x) = (1-t)x + tG(x)$, donde $1-t, t \neq 0$ y, dado que G es inyectiva, como $x \neq 0$ se sigue que $G(x) \neq 0$, luego $h_t \neq 0$. Así, para probar

que h_t es inyectiva, debemos revisar el caso $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Sea $s_i = \left\| g^{-1} \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right) \right\| > 0$, $i = 1, 2$. Puesto que $h_t(x_1) = h_t(x_2)$ y $1 - t > 0$, entonces

$$(1-t)x_1 + ts_1x_1 = (1-t)x_2 + ts_2x_2 \Rightarrow \left(1 + \frac{ts_1}{1-t}\right)x_1 = \left(1 + \frac{ts_2}{1-t}\right)x_2.$$

Dado que $t, s_i, 1-t > 0$, obtenemos que $z_i := 1 + \frac{ts_i}{1-t} > 0$. También, se tiene que $\frac{z_2}{z_1} > 0$. De este modo,

$$x_1 = \frac{z_2}{z_1}x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{\frac{z_2}{z_1}x_2}{\left\| \frac{z_2}{z_1}x_2 \right\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} \Rightarrow g^{-1} \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \right) = g^{-1} \left(\frac{x_2}{\|x_2\|} \right) \Rightarrow s_1 = s_2,$$

por lo cual $z_1 = z_2$ y $x_1 = x_2$. Por ende, h_t es inyectiva. Invocando el teorema de invariancia del dominio, se demuestra que h_t es abierta. Así, h_t es un homeomorfismo.

Recordando que $h_1 = G$, notemos que, para cualquier $x \in \mathbb{S}^1$, $(h_1 \circ f_0)(x) = G(x, 0) = g^{-1}(x, 0) = (sx, 0)$, donde $s > 0$ cumple que $s(x, 0) \in \text{Fr}(C)$. No obstante, $(sx, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ y $\text{Fr}(C) = (\text{Fr}(\sigma) \times [-1, 1]) \cup (\sigma \times \{-1, 1\})$, por lo cual $(sx, 0) \in \text{Fr}(\sigma) \times \{0\}$, esto es, $sx \in \text{Fr}(\sigma) = \partial\sigma$. De aquí, es claro que $sx = f^{-1}(x)$ y, en consecuencia, $(h_1 \circ f_0)(x) = i(sx) = i(f^{-1}(x)) = f_1(x)$. En resumen, hemos hallado una familia de homeomorfismos $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in I$, para los cuales $h_0 = id$, $h_1 \circ f_0 = f_1$ y la función $h : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(x, t) = h_t(x)$ es continua. Por lo tanto, del lema 3.1.4 concluimos que f_0 y f_1 son ambiente isotópicos, siendo f_1 un encaje cuya imagen es un nudo poligonal (véase la figura 11). Por lo tanto, el nudo trivial f_0 , es manso. ■

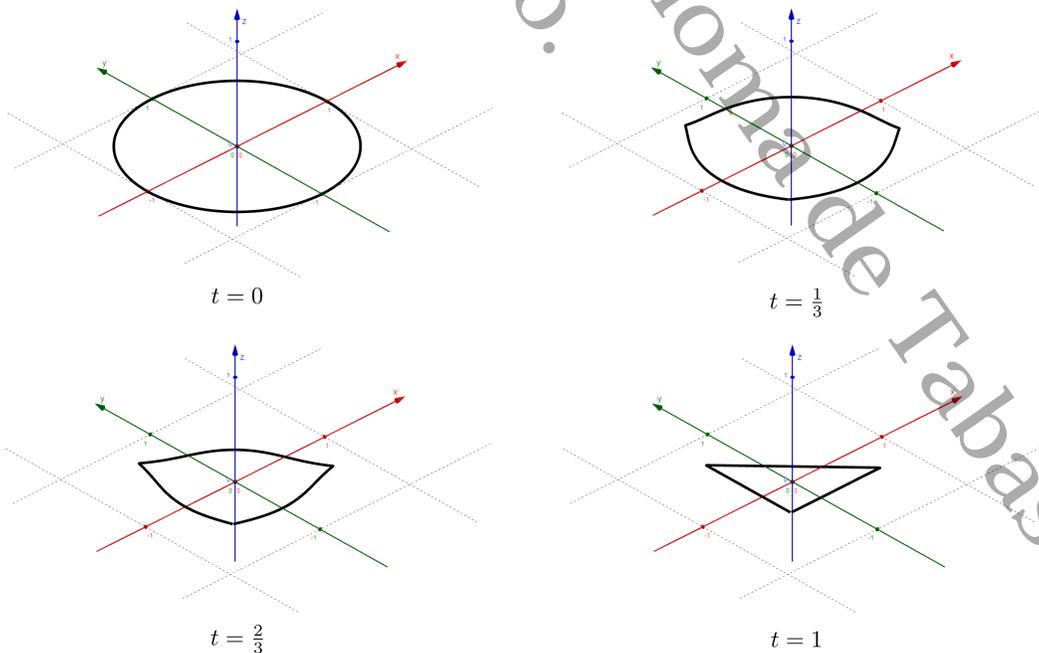


Figura 11: Efecto de h_t sobre la imagen de f_0 . Para $t = 1$ se obtiene un nudo poligonal.

Como se ha visto con el ejemplo anterior, argumentar que un nudo es manso puede resultar extenuante. Sin embargo, en Cromwell (2004) [9] se describen las ideas para mostrar que los nudos que sean imágenes de funciones continuamente diferenciables son mansos (véase el teorema 1.11.6). Aquí el autor define un nudo no como un encaje, sino más bien como un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Enunciamos a continuación el teorema en cuestión, en términos de nuestra definición de nudos:

Teorema 3.1.9. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un nudo. Si $f(\mathbb{S}^1)$ es la imagen de una función continuamente diferenciable, entonces f es manso.*

Ejemplo 3.1.10. Consideremos la curva dada por la función continuamente diferenciable

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (\sin t + 2 \sin 2t, \cos t - 2 \cos 2t, -\sin 3t).$$

A partir de C es posible obtener un encaje $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con la de C , llamado el **nudo trébol**. En vista del teorema 3.1.9, se tiene que f es manso (véase la figura 12).

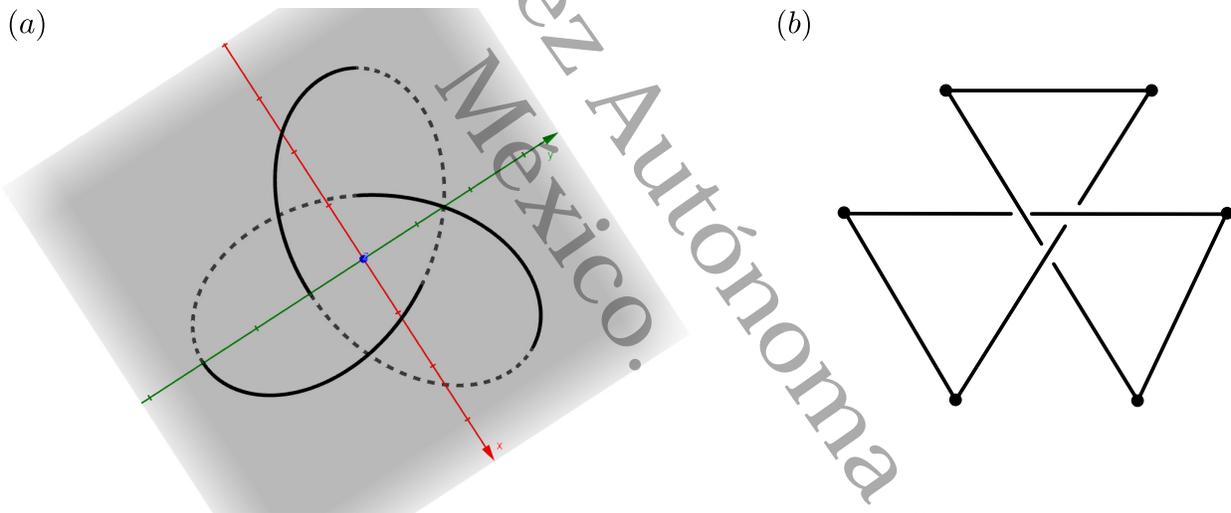


Figura 12: (a) Imagen de f . (b) Bosquejo de un nudo poligonal ambiente isotópico a $f(\mathbb{S}^1)$.

Proposición 3.1.11. *Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ encajes. Si f_0 y f_1 son ambiente isotópicos, entonces $Y - f_0(X)$ es homeomorfo a $Y - f_1(X)$.*

Demostración. Supongamos que f_0 y f_1 son ambiente isotópicos. Entonces existen $h : Y \times I \rightarrow Y$ y un homeomorfismo $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$ dado por $H(y, t) = (h(y, t), t)$ para el cual $h_1 \circ f_0 = f_1$. Por el lema 3.1.4, $h_1 : Y \rightarrow Y$ es un homeomorfismo. Por biyectividad,

$$h_1(Y - f_0(X)) = h_1(Y) - h_1(f_0(X)) = Y - f_1(X).$$

En consecuencia, la restricción $h_1 : (Y - f_0(X)) \rightarrow (Y - f_1(X))$, es un homeomorfismo de los complementos de $f_0(X)$ y $f_1(X)$, respectivamente, en Y . ■

La proposición 3.1.11 ofrece un criterio para determinar si dos nudos no son ambiente isotópicos. Por ejemplo, usando herramientas de topología algebraica, específicamente la llamada presentación de Wirtinger, puede mostrarse que los complementos de las imágenes del nudo trivial y el nudo trébol no son homeomorfos (véase el capítulo 6 de Crowell y Fox (1977)[10]), por lo tanto, estos nudos no son ambiente isotópicos.

Proposición 3.1.12. *Todo nudo poligonal en \mathbb{R}^3 (respectivamente, en $\partial\Delta^4$) es la imagen de un encaje PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (respectivamente, $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$). El recíproco también se cumple.*

Demostración. Sea N un nudo poligonal en \mathbb{R}^3 con vértices ordenados p_1, p_2, \dots, p_n y denotemos $p_{n+1} := p_1$. Por la definición de nudo poligonal, es claro que $K = \{\tau \leq \langle p_i, p_{i+1} \rangle : i = 1, \dots, n\}$ es un 1-complejo puro y $|K| = N$. Si $n = 3$, definamos la biyección $f_0 : \text{vert}(\Sigma^1) \rightarrow \text{vert}(K)$ por $f_0(e_i) = p_i$. Observemos que f_0 tiene la propiedad de mandar vértices de un simplejo de Σ^1 a vértices de un simplejo en K , luego el teorema 2.3.12 garantiza que existe un homeomorfismo PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow |K|$. En caso de que $n > 3$, seleccionemos $x_4, \dots, x_n \in \langle e_3, e_1 \rangle^\circ$, siguiendo la orientación $[e_3, e_1]$, y aplicamos subdivisión estelar a Σ^1 estrellando sucesivamente en x_4, \dots, x_n . Renombrando $x_i = e_i$, $i = 1, 2, 3$, y denotando $x_{n+1} := x_1$, obtenemos $L \triangleleft \Sigma^1$, a saber, $L = \{\tau \leq \langle x_i, x_{i+1} \rangle : i = 1, \dots, n\}$. Así, definimos esta vez la biyección $f_0 : \text{vert}(L) \rightarrow \text{vert}(K)$ por $f_0(x_i) = p_i$ que se extiende a un homeomorfismo PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow |K|$ (figura 13).

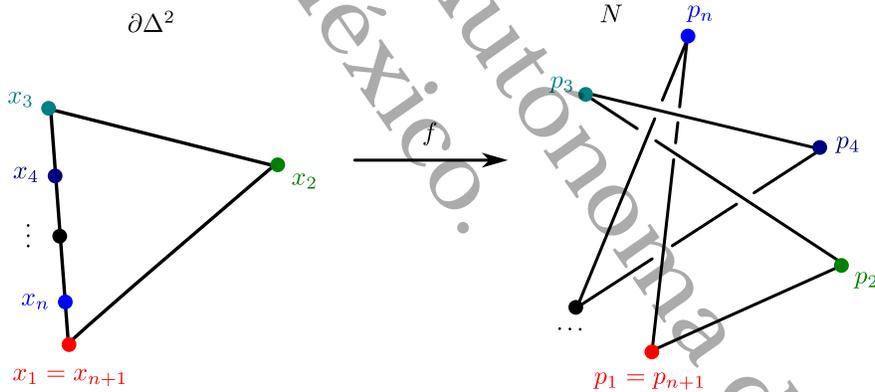


Figura 13: Idea de la demostración de la proposición 3.1.12.

Puesto que $|K| = N$, en ambos casos hemos hallado un homeomorfismo PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow N$ y considerando $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se tiene que f es un encaje PL tal que $f(\partial\Delta^2) = N$.

Recíprocamente, supongamos que $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un encaje PL. Probaremos que $f(\partial\Delta^2)$ es un nudo poligonal. Tenemos que $f : \partial\Delta^2 \rightarrow f(\partial\Delta^2)$ es un homeomorfismo PL. Usando el teorema 2.4.16, existen $K' \triangleleft \Sigma^1$ y un complejo simplicial L tal que $|L| = f(\partial\Delta^2)$, para los cuales $f : |K'| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo simplicial. Dado que Σ^1 es un 1-complejo puro, y en vista del lema 2.6.2, obtenemos que K' también lo es. Además, por ser $f : |K'| \rightarrow |L|$ un homeomorfismo simplicial se sigue que $|L|$ es un 1-complejo puro, ya que cada simplejo principal de L es la imagen de un único 1-simplejo de K' . Notando que $|K'| = \partial\Delta^2$ es un

nudo poligonal, sin mayor problema se concluye que $f(|K'|) = |L|$ es un nudo poligonal. El caso en que \mathbb{R}^3 se sustituye por $\partial\Delta^4$ en las situaciones previamente analizadas es análogo. ■

De acuerdo con Rourke y Sanderson (1982) [34], cualquier poliedro S^n que es PL homeomorfo a $\partial\Delta^{n+1}$ cumple que \mathbb{R}^n es PL homeomorfo a $S^n - \{p\}$, $\forall p \in S^n$. Esto es consecuencia del teorema del anillo combinatorio, cuyo estudio va más allá de los alcances de esta tesis.

De esta forma, un nudo poligonal N en \mathbb{R}^3 puede encajarse en $\partial\Delta^4$. Basta con escoger cualquier $p \in \partial\Delta^4$ para tener un homeomorfismo PL $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \partial\Delta^4 - \{p\}$. Entonces, por la proposición 3.1.12, existe un encaje PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\partial\Delta^2) = N$ y se sigue que $g \circ f : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$ es un encaje PL. Más aún, en vista de que g es un homeomorfismo PL, al ser N un nudo poligonal en \mathbb{R}^3 puede verse que también $g(N)$ es un nudo poligonal, pero en $\partial\Delta^4$. Recíprocamente, si N es un nudo poligonal en $\partial\Delta^4$, escogiendo $p \in \partial\Delta^4 - N$, a partir del homeomorfismo PL $g : \partial\Delta^4 - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ se tiene que $g(N)$ es un nudo poligonal en \mathbb{R}^3 .

Debido a la observación previa, trabajaremos principalmente con nudos poligonales en $\partial\Delta^4$ y, por la proposición 3.1.12, estaremos tratando con encajes PL $\partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$. Siguiendo este enfoque, se da la siguiente:

Definición 3.1.13. Un *nudo PL* es un encaje PL $f : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$.

Estamos en condiciones de dar una definición de equivalencia de nudos.

Definición 3.1.14. Diremos que dos nudos son *equivalentes*, si son ambiente isotópicos.

En vista de esta definición y a que los nudos a considerar son mansos, nos centraremos en estudiar nudos poligonales y, en consecuencia, estudiaremos nudos PL. Esto implica ajustar las definiciones que teníamos hasta el momento, para tratar exclusivamente con la categoría PL:

Definición 3.1.15. Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ encajes PL. Diremos que f_0 y f_1 son *PL-ambiente isotópicos*, si son ambiente isotópicos mediante un homeomorfismo PL $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$, al cual llamaremos *PL-isotopía de ambiente*.

Argumentando de forma similar, es posible demostrar las versiones PL del lema 3.1.4 y la proposición 3.1.6:

Lema 3.1.16. Sean $f_0 : X \rightarrow Y$ y $f_1 : X \rightarrow Y$ encajes PL. Si f_0 y f_1 son PL-ambiente isotópicos, entonces existe una familia de auto-homeomorfismos PL h_t de Y , $t \in I$, tales que $h_0 = id$, $f_1 = h_1 \circ f_0$ y para los cuales la función $h : Y \times I \rightarrow Y$ dada por $h(y, t) = h_t(y)$ es PL.

Demostración. Supongamos que existe una función $h : Y \times I \rightarrow Y$ tal que $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$, definida por $H(y, t) = (h(y, t), t)$, es un homeomorfismo PL y, para $h_t : Y \rightarrow Y$ dado por $h_t(y) = h(y, t)$, $t \in I$, se cumple que $h_0 = id$ y $f_1 = h_1 \circ f_0$.

Sea $t \in I$. Es fácil ver que h_t es biyectiva. Note que la proyección $\mathfrak{p}_1 : Y \times I \rightarrow Y$ es PL porque es lineal y manda el poliedro $Y \times I$ al poliedro Y . Sabemos que H es PL, luego $h = \mathfrak{p}_1 \circ H$

es PL. En particular, $h|Y \times \{t\}$ es PL ya que $Y \times \{t\}$ es subpoliedro de $Y \times I$. Puesto que $f : Y \rightarrow Y \times \{t\}$ dada por $f(y) = (y, t)$ es la restricción de una transformación afín con Y y $Y \times \{t\}$ poliedros, entonces f es PL. Así, $h_t = (h|Y \times \{t\}) \circ f$ es PL. Notemos que H^{-1} es PL, por lo que $g = p_1 \circ H^{-1}$ es PL y la restricción $g|Y \times \{t\}$ también. En consecuencia, $g_t = (g|Y \times \{t\}) \circ f : Y \rightarrow Y$ es PL. Observando que $f(g(y, t)) = H^{-1}(y, t)$, $\forall y \in Y$, es fácil verificar que $h_t^{-1} = g_t$. Lo anterior muestra que h_t es un homeomorfismo PL, válido para cada $t \in I$. ■

Proposición 3.1.17. *Sea $\mathcal{PL}\mathcal{E}(X, Y)$ el conjunto de encajes PL de X a Y . Para $f_0, f_1 \in \mathcal{PL}\mathcal{E}(X, Y)$, definamos la relación $f_0 \sim f_1$ si y sólo si f_0 y f_1 son PL-ambiente isotópicos. Entonces \sim es una relación de equivalencia en $\mathcal{PL}\mathcal{E}(X, Y)$.*

Demostración. Análogo a la proposición 3.1.6, pero aplicando el lema 3.1.16 en vez del lema 3.1.4. ■

Definición 3.1.18. Diremos que dos nudos PL son **PL-equivalentes**, si son PL-ambiente isotópicos.

3.2. n -bolas y n -esferas combinatorias

En esta sección, las definiciones de *n -bola combinatoria* y *n -esfera combinatoria* se siguen en el sentido de Zeeman (1960) [40]. El propósito de esta parte consiste en presentar algunas propiedades importantes respecto a estos conceptos, así como resultados que nos permitan construir PL-isotopías de ambiente relativamente sencillas a partir de n -bolas combinatorias. Éstos nos serán de utilidad en el desarrollo de las próximas secciones. Asimismo, se da una demostración del teorema de Alexander-Tietze (teorema 3.2.5) basado en las ideas de Hudson y Zeeman (1964) [14] y de Burde *et al* (2014) [8]. También se enuncia una versión del teorema de Alexander-Schoenflies (teorema 3.2.6).

Definición 3.2.1. Una **n -bola combinatoria** B (respectivamente, **n -esfera combinatoria** S) es el poliedro subyacente de un complejo simplicial PL-homeomorfo a un n -simplejo σ^n (respectivamente, a $\partial\sigma^{n+1}$ de un $(n+1)$ -simplejo σ^{n+1}).

Proposición 3.2.2. *Sea K un complejo simplicial. Si $B = |K|$ es una n -bola combinatoria, entonces K es un n -complejo puro. Además, si K no es el complejo simplicial de las caras de un n -simplejo, entonces K es fuertemente conexo.*

Demostración. Supongamos que B es una n -bola combinatoria. Entonces existe un n -simplejo σ y un homeomorfismo PL $f : \sigma \rightarrow B$. Además, por el teorema 2.4.16, existen $K' \triangleleft K(\sigma)$ y $L \triangleleft K$ tales que $f : |K'| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo simplicial. Gracias al lema 2.6.2, tenemos que K' es un n -complejo puro. Como f es un homeomorfismo simplicial, entonces $L = f(K')$, lo cual quiere decir que L es un n -complejo puro porque K' lo es. Siguiendo un argumento similar al hecho en el lema 2.6.2, ya que $L \triangleleft K$ y L es un n -complejo puro, resulta que K es un n -complejo puro. Si K no es el complejo simplicial de las caras de un n -simplejo, se tiene que K tiene más de un n -simplejo y, nuevamente por

ser f un homeomorfismo simplicial, se sigue que $K' \neq K(\sigma)$. Gracias a la proposición 2.6.6, tenemos que K' es un n -complejo fuertemente conexo. Sean $\tau, \tau' \in L$ un par de n -simplejos distintos. Observe que $\rho = f^{-1}(\tau)$ y $\rho' = f^{-1}(\tau')$ son n -simplejos distintos en K' y como éste es fuertemente conexo, existen n -simplejos $\rho_1, \dots, \rho_m \in K'$ tales que $\rho_1 = \rho$, $\rho_m = \rho'$ y $\rho_i \cap \rho_{i+1}$ es una $(n-1)$ -cara, $i = 1, \dots, m-1$. Denotando $\tau_i = f(\rho_i)$, $i = 1, \dots, m$, se sigue que $\tau_1, \dots, \tau_m \in L$ son n -simplejos, para los cuales $\tau_1 = \tau$, $\tau_m = \tau'$ y $\tau_i \cap \tau_{i+1}$ es una $(n-1)$ -cara, $i = 1, \dots, m-1$; es decir, $\tau \sim \tau'$. Por ende, L es fuertemente conexo. Finalmente, procediendo de manera parecida al paso 3 de la proposición 2.6.6, como $L \triangleleft K$ y L es fuertemente conexo, uno puede convencerse que K debe ser fuertemente conexo. ■

Definición 3.2.3. Diremos que una isotopía de ambiente $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$ **fija** un subconjunto $V \subset Y$, si $H(y, t) = (y, t)$, $\forall y \in V$ y $\forall t \in I$.

Observación 3.2.4. Si B es una n -bola combinatoria, como $\Delta^n \cong \rho^n$, entonces existe un homeomorfismo $h : \rho^n \rightarrow B$. Dado que, por el corolario 1.6.11, ρ^n es una n -variedad tal que $\partial\rho^n = \text{Fr}(\rho^n)$, por los teoremas 1.5.2 y 1.5.4 se sigue que B es una n -variedad y $\partial B = h(\text{Fr}(\rho^n))$.

Teorema 3.2.5 (Teorema de Alexander-Tietze). *Sea $h : B \rightarrow B$ un homeomorfismo PL de una n -bola combinatoria B que mantenga la frontera fija, es decir, $h|_{\partial B} = \text{id}_{\partial B}$. Entonces h es isotópica a la identidad por una PL-isotopía de ambiente que fija ∂B .*

Demostración. *Paso 1:* Mostraremos primero el caso $B = \rho^n$. Dado que $h : \rho^n \rightarrow \rho^n$ es un homeomorfismo PL, existen $K, L \triangleleft K(\rho^n)$ tales que $h : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo simplicial (teorema 2.4.16). Notemos que $\rho^n \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es compacto, convexo y con interior no vacío. Escojamos $c_0 \in \text{Int}(\rho^n \times I)$. Entonces por la proposición 1.4.8, se sigue que $\rho^n \times I = c_0 \text{Fr}(\rho^n \times I) = c_0[(\partial\rho^n \times I) \cup (\rho^n \times \{0, 1\})]$ es un cono. Usando la proposición 2.3.9, puede verse que $\rho^n \times \{1\} = |K \times \{1\}| = |L \times \{1\}|$, donde $K \times \{1\} := \{\sigma \times \{1\} : \sigma \in K\}$ y $L \times \{1\} := \{\sigma \times \{1\} : \sigma \in L\}$ son complejos simpliciales, vía la transformación afín inyectiva $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(x) = (x, 1)$. Ya que $c_0 \text{Fr}(\rho^n \times I)$ es un cono, entonces $(c_0, \rho^n \times \{1\})$ está en posición general y, por el lema 2.4.7, $c_0 * (K \times \{1\})$ y $c_0 * (L \times \{1\})$ son complejos simpliciales cuyo poliedro subyacente es $c_0(\rho^n \times \{1\})$. Definamos el homeomorfismo simplicial $H_1 : |c_0 * (K \times \{1\})| \rightarrow |c_0 * (L \times \{1\})|$ cuyo mapeo de vértices es $H_1(c_0) = c_0$ y $H_1(v, 1) = (h(v), 1)$, $\forall v \in \text{vert}(K)$. Note que si $\sigma \in K$ con $\sigma \subset \partial\rho^n$, entonces por hipótesis $h|_{\sigma} = \text{id}_{\sigma}$. Esto implica que $H_1|_{c_0(\partial\rho^n \times \{1\})}$ es la identidad.

Por otro lado, sabemos que $P = (\partial\rho^n \times I) \cup (\rho^n \times \{0\})$ es un poliedro por ser la unión de productos de poliedros compactos. Entonces, por la proposición 2.4.14, al estar (c_0, P) en posición general se obtiene que $c_0 P$ es un poliedro. Así, la identidad $\text{id} : c_0 P \rightarrow c_0 P$ es un homeomorfismo PL. Dado que $c_0(\rho^n \times \{1\}) \cap c_0 P = c_0((\rho^n \times \{1\}) \cap P) = c_0(\partial\rho^n \times \{1\})$, podemos definir $H : \rho^n \times I \rightarrow \rho^n \times I$ por $H|_{c_0(\rho^n \times \{1\})} = H_1$ y $H|_{c_0 P} = \text{id}$, el cual es un homeomorfismo PL gracias a la proposición 2.1.16, porque H_1 y id son homeomorfismos PL de poliedros cerrados (véase la figura 14).

Por el modo en que hemos definido H , se verifica que $H(x, 1) = (h(x), 1)$ y $H(x, 0) = (x, 0)$, $\forall x \in \rho^n$. Veamos que H preserva niveles. Sea $x \in \rho^n$ y $t \in I$. Escribamos $c_0 = (x_0, t_0)$. Entonces existe $(u, v) \in \text{Fr}(\rho^n \times I)$ y $s \in I$ tal que $(x, t) = sc_0 + (1-s)(u, v)$, lo cual implica

que $t = st_0 + (1 - s)v$. En caso de que $(u, v) \in \rho^n \times \{1\}$, es decir, cuando $v = 1$, se tiene que $H(x, t) = sc_0 + (1 - s)(h(u), 1)$ y la segunda coordenada de $H(x, t)$ es $st_0 + (1 - s) = t$. Por su parte, cuando $(u, v) \in P$, es directo ver que $H(x, t) = (x, t)$.

Lo anterior prueba que H es una PL-isotopía de ambiente cuyo homeomorfismo final es h y H fija $\partial\rho^n$ porque $H|(\partial\rho^n \times I)$ es la identidad.

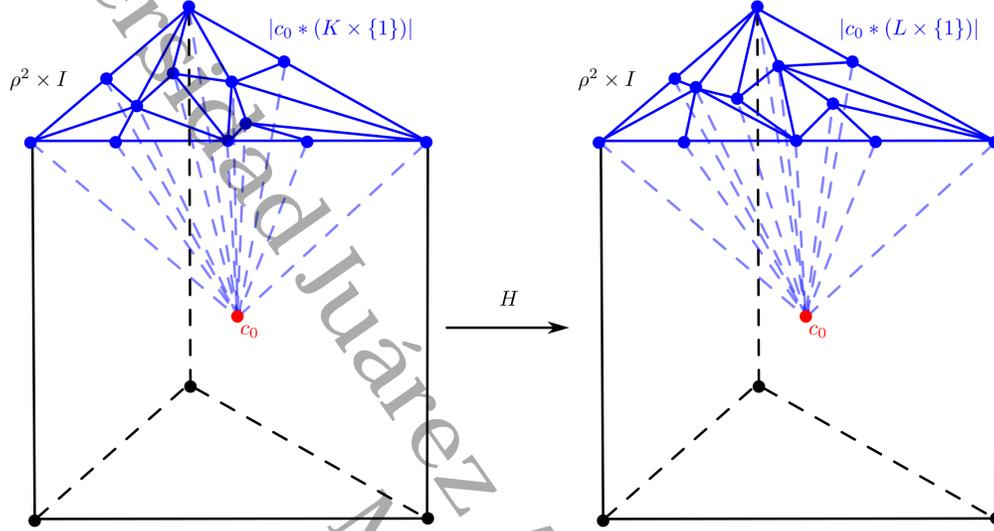


Figura 14: Demostración del teorema de Alexander-Tietze, caso $n = 2$.

Paso 2: Ahora probaremos el teorema en general para una n -bola combinatoria B . Tenemos que existe homeomorfismo PL $\psi : \rho^n \rightarrow B$ y, debido a la observación 3.2.4, $\partial B = \psi(\partial\rho^n)$. Por el teorema 2.1.13 y la proposición 2.1.15, dado que ψ y h son homeomorfismos PL, entonces $(\psi^{-1} \circ h \circ \psi) : \rho^n \rightarrow \rho^n$ es un homeomorfismo PL y observemos que, para todo $x \in \partial\rho^n$, se cumple que $\psi(x) \in \partial B$ y $(\psi^{-1} \circ h \circ \psi)(x) = \psi^{-1}(h(\psi(x))) = \psi^{-1}(\psi(x)) = x$. Así, por el paso 1, $\psi^{-1} \circ h \circ \psi$ es ambiente isotópica a la identidad mediante una PL-isotopía de ambiente $F : \rho^n \times I \rightarrow \rho^n \times I$, $F(x, t) = (f(x, t), t)$, que fija $\partial\rho^n$, donde $(x, t) \in \rho^n \times I$ y $f : \rho^n \times I \rightarrow \rho^n$. Afirmamos que $H = (\psi \times id) \circ F \circ (\psi^{-1} \times id) : B \times I \rightarrow B \times I$ es la PL-isotopía de ambiente deseada, donde $id : I \rightarrow I$ es la identidad en I . En efecto, dado que F , ψ y id son homeomorfismos PL, usando el teorema 2.1.13 y la proposición 2.1.15, puede verse que H es un homeomorfismo PL. Por otro lado,

$$H(x, t) = [(\psi \times id) \circ F \circ (\psi^{-1} \times id)](x, t) = (\psi(f(\psi^{-1}(x), t)), t), \forall (x, t) \in B \times I.$$

Identificamos $g : B \times I \rightarrow B$ dada por $g(x, t) = \psi(f(\psi^{-1}(x), t))$. Notemos que $\psi^{-1}(x) \in \partial\rho^n$, para todo $x \in \partial B$. Entonces, ya que F fija ρ^n , se verifica que $g(x, t) = x, \forall (x, t) \in \partial B \times I$, es decir, H fija ∂B . Finalmente, para cualquier $x \in B$:

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= \psi(f(\psi^{-1}(x), 0)) = \psi(\psi^{-1}(x)) = x, \\ g(x, 1) &= \psi(f(\psi^{-1}(x), 1)) = \psi((\psi^{-1} \circ h \circ \psi)(\psi^{-1}(x))) = h(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h : B \rightarrow B$ es ambiente isotópico a la identidad mediante la PL-isotopía ambiente $H : B \times I \rightarrow B \times I$ que fija la frontera de B . ■

De acuerdo con Luft (1965) [23], la versión combinatoria de la conjetura de Schoenflies en dimensión n asegura que una $(n - 1)$ -esfera combinatoria contenida en una n -esfera combinatoria descompone a esta última en dos n -bolas combinatorias. Nos interesa particularmente el caso $n = 3$, que fue demostrado originalmente en Alexander (1924) [3]. Una prueba alternativa puede consultarse también en Lickorish (1989) [21].

Teorema 3.2.6 (Teorema de Alexander-Schoenflies). *Si S^2 es una 2-esfera combinatoria contenida en una 3-esfera combinatoria S^3 , entonces $S^3 - S^2$ tiene dos componentes, cuyas cerraduras B_1 y B_2 son 3-bolas combinatorias y $S^2 = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$.*

Lema 3.2.7. *Sean S^3 una 3-esfera combinatoria y $\tau \subset S^3$ un 3-simplejo. Si $x_1, x_2 \in \tau^\circ$, entonces existe una PL-isotopía de ambiente $H : S^3 \times I \rightarrow S^3 \times I$ tal que la restricción del homeomorfismo final $h_1 : x_1(\tau \setminus \langle v \rangle) \rightarrow x_2(\tau \setminus \langle v \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\tau \setminus \langle v \rangle$, $\forall v \in \text{vert}(\tau)$ y $h_1(x_1) = x_2$. Además, h_1 es la identidad fuera de τ .*

Demostración. Escribamos $\tau = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$. Sean $x_1, x_2 \in \tau^\circ$. Por el corolario 1.6.11, tenemos que $\tau = \bigcup_{i=0}^3 x_j(\tau \setminus \langle v_i \rangle)$, de modo que $K_j := \bigcup_{i=0}^3 K(x_j(\tau \setminus \langle v_i \rangle)) \triangleleft K(\tau)$, ya que K_j se obtiene estrellando $K(\tau)$ en x_j , para $j = 1, 2$. Definiendo la biyección $f_0 : \text{vert}(K_1) \rightarrow \text{vert}(K_2)$ por $f_0(x_1) = x_2$, $f_0(v_i) = v_i$, $\forall i$, el teorema 2.3.12 garantiza que f_0 se extiende a un homeomorfismo simplicial $f : |K_1| \rightarrow |K_2|$. Observe que f cumple que $f|(\tau \setminus \langle v_i \rangle) = \text{id}_{(\tau \setminus \langle v_i \rangle)}$, $\forall i$, esto es, $f|_{\partial\tau}$ es la identidad, y $f(x_1) = x_2$ (véase la figura 15). Como τ es una 3-bola combinatoria, del teorema de Alexander-Tietze, existe una PL-isotopía de ambiente $\tilde{H} : \tau \times I \rightarrow \tau \times I$ tal que \tilde{H} fija $\partial\tau$ y $\tilde{h}_1 = f$.

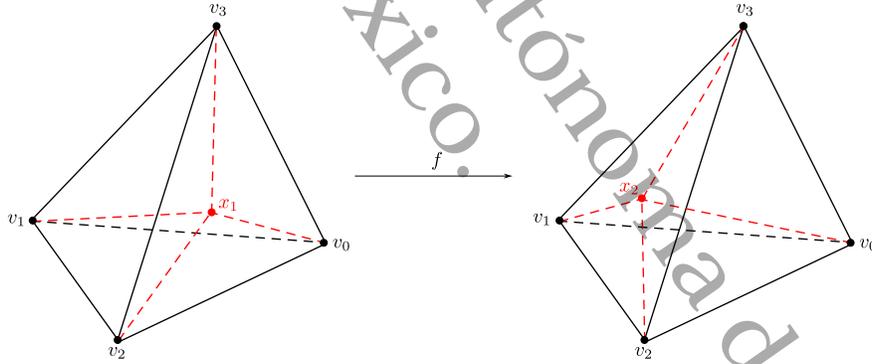


Figura 15: Auto-homeomorfismo simplicial f del 3-simplejo τ que mueve $x_1 \in \tau^\circ$ a $x_2 \in \tau^\circ$ y deja $\partial\tau$ fija.

Puesto que $\partial\tau \subset S^3$, donde $\partial\tau$ es una 2-bola combinatoria y S^3 una 3-esfera combinatoria, el teorema de Alexander-Schoenflies garantiza que $B = \text{Cl}_{S^3}(S^3 - \tau)$ es una 3-bola combinatoria y $\tau \cap B = \partial\tau$. Definamos $H : S^3 \times I \rightarrow S^3 \times I$ por $H|(\tau \times I) = \tilde{H}$ y $H|(B \times I)$ como la identidad. H está bien definida, ya que $(\tau \times I) \cap (B \times I) = \partial\tau \times I$. Además, para $(x, t) \in \partial\tau \times I$, tenemos que $H(x, t) = (x, t)$ porque \tilde{H} fija $\partial\tau$. Dado que B es un poliedro compacto por ser una 3-bola combinatoria, obtenemos que $B \times I$ también es un poliedro compacto. En consecuencia, $H|(B \times I) = \text{id}_{B \times I}$ es un homeomorfismo PL. Dado lo anterior, y al hecho que $\tau \times I$ y $B \times I$ son poliedros cerrados, la proposición 2.1.16 permite deducir que H es un

homeomorfismo PL. Tenemos que:

$$H(x, 0) = (x, 0), \forall x \in S^3,$$

$$H(x, 1) = \begin{cases} (f(x), 1), & \text{si } x \in \tau, \\ (x, 1), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

De esta forma, H es una PL-isotopía de ambiente con $h_t : S^3 \rightarrow S^3$, $t \in I$, dada por

$$h_t(x) = \begin{cases} \tilde{h}_t(x), & \text{si } x \in \tau, \\ x, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Finalmente, como $h_1|_{\tau} = f$, se cumple que la restricción $h_1 : x_1(\tau \setminus \langle v_i \rangle) \rightarrow x_2(\tau \setminus \langle v_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\tau \setminus \langle v_i \rangle$, $\forall i$ y $h_1(x_1) = x_2$. ■

Lema 3.2.8. Sean $\tau_1 = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ y $\tau_2 = \langle w_0, v_1, \dots, v_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\tau_1 \cap \tau_2 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Entonces $B := \tau_1 \cup \tau_2$ es una n -bola combinatoria con $\partial B = (\partial\tau_1 \cup \partial\tau_2) - \langle v_1, \dots, v_n \rangle^\circ$ y $B^\circ = \tau_1^\circ \cup \tau_2^\circ \cup \langle v_1, \dots, v_n \rangle^\circ$. Si τ_1 y τ_2 generan el mismo subespacio afín X , entonces $B^\circ = \text{Int}_X(\tau_1 \cup \tau_2)$ y $\partial B = \text{Fr}_X(\tau_1 \cup \tau_2)$.

Demostración. Sea $K = K(\tau_1) \cup K(\tau_2)$, el cual es un complejo simplicial. Mostraremos que $B = \tau_1 \cup \tau_2$ es una n -bola combinatoria, para ello, veamos que es PL homeomorfo a $\rho^n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$. Sea $x_1 \in \langle e_0, e_1 \rangle^\circ$. Denotando $\rho_1 = \langle e_0, x_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ y $\rho_2 = \langle e_1, x_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, estrellando $K(\rho^n)$ en x_1 , obtenemos $L = K(\rho_1) \cup K(\rho_2) \triangleleft K(\rho^n)$, como en la figura 16 que ilustra el caso $n = 3$.

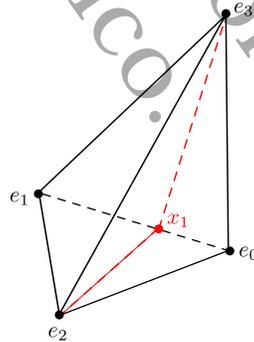


Figura 16: Resultado de estrellar $K(\rho^3)$ en $x_1 \in \langle e_0, e_1 \rangle^\circ$.

Definamos la biyección $f_0 : \text{vert}(L) \rightarrow \text{vert}(K)$ por $f_0(x_1) = v_1$, $f_0(e_i) = v_i$, $\forall i \neq 1$, y $f_0(e_1) = w_0$. Por el teorema 2.3.12, f_0 se extiende a un homeomorfismo simplicial $f : |L| \rightarrow |K|$, para el cual las restricciones $f : \rho_1 \rightarrow \tau_1$ y $f : \rho_2 \rightarrow \tau_2$ son homeomorfismos simpliciales (figura 17). Por ende, $\tau_1 \cup \tau_2$ es una n -bola combinatoria. Usando los teoremas 1.5.2 y 1.5.4, gracias a que ρ^n es una n -variedad, obtenemos que $B = \tau_1 \cup \tau_2$ es una n -variedad y

$$\partial B = f(\partial\rho^n) = f((\partial\rho_1 \cup \partial\rho_2) - (\rho_1 \cap \rho_2)^\circ) = (\partial\tau_1 \cup \partial\tau_2) - \langle v_1, \dots, v_n \rangle^\circ,$$

$$B^\circ = f((\rho^n)^\circ) = f(\rho_1^\circ \cup \rho_2^\circ \cup (\rho_1 \cap \rho_2)^\circ) = \tau_1^\circ \cup \tau_2^\circ \cup \langle v_1, \dots, v_n \rangle^\circ.$$

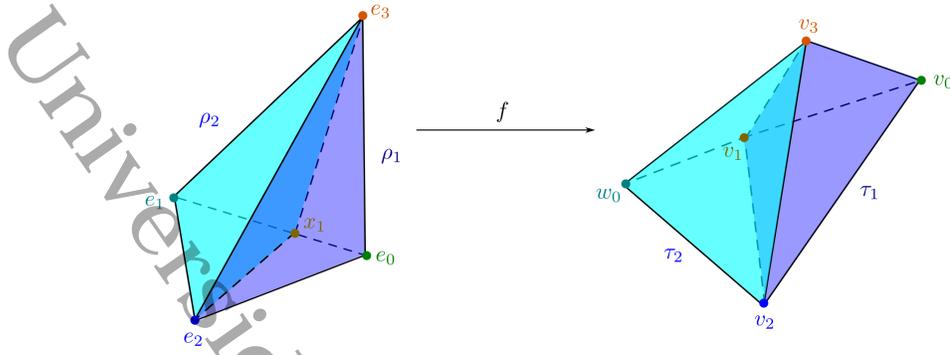


Figura 17: f manda ρ_1 a τ_1 y ρ_2 a τ_2 , $n = 3$.

Supongamos que $X = \text{aff}(\tau_1) = \text{aff}(\tau_2)$. Mediante el lema 1.6.8, existen homeomorfismos lineales $h_1 : \text{aff}(\rho_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h'_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff}(\tau_1)$ tales que $h_1(e_i) = e_i$, $\forall i \neq 1$, $h_1(x_1) = e_1$ y $h'_1(e_i) = v_i$, $\forall i$. Esto nos dice que $\hat{f}_1 := h'_1 \circ h_1 : \text{aff}(\rho_1) \rightarrow X$ es un homeomorfismo lineal tal que $\hat{f}_1|_{\text{vert}(\rho_1)} = f|_{\text{vert}(\rho_1)}$, de modo que \hat{f}_1 es una extensión de $f : \rho_1 \rightarrow \tau_1$. Del mismo modo, podemos extender $f : \rho_2 \rightarrow \tau_2$ a un homeomorfismo lineal $\hat{f}_2 : \text{aff}(\rho_2) \rightarrow X$. De hecho, $\text{aff}(\rho_1)$ y $\text{aff}(\rho_2)$ son subespacios afines n -dimensionales de \mathbb{R}^n , luego $\text{aff}(\rho_1) = \mathbb{R}^n = \text{aff}(\rho_2)$. Note que $\hat{f}_1|_{\text{aff}(x_1, e_2, \dots, e_n)} = \hat{f}_2|_{\text{aff}(x_1, e_2, \dots, e_n)}$. Asimismo, observemos que $\text{aff}(\rho_1 \cap \rho_2)$ divide a \mathbb{R}^n en dos semiespacios C_1 y C_2 , esto es, $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n$ y $C_1 \cap C_2 = \text{aff}(\rho_1 \cap \rho_2)$, para los cuales $\rho_i \subset C_i$, $i = 1, 2$. Definamos $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ por $\varphi|_{C_1} = \hat{f}_1|_{C_1}$ y $\varphi|_{C_2} = \hat{f}_2|_{C_2}$. Debido a que C_1 y C_2 son cerrados en \mathbb{R}^n , $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n$, $\hat{f}_1|_{C_1 \cap C_2} = \hat{f}_2|_{C_1 \cap C_2}$, y dado que \hat{f}_1 y \hat{f}_2 son homeomorfismos, por el lema del pegado podemos ver que φ es un homeomorfismo. Además, note que $\varphi|_B = f|_B$. Debido a lo anterior:

$$B^\circ = (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ = f((\rho^n)^\circ) = \varphi(\text{Int}(\rho^n)) = \text{Int}_X(\tau_1 \cup \tau_2), \quad (3.1)$$

$$\partial B = \partial(\tau_1 \cup \tau_2) = f(\partial\rho^n) = \varphi(\text{Fr}(\rho^n)) = \text{Fr}_X(\tau_1 \cup \tau_2). \quad (3.2)$$

■

Lema 3.2.9. Sean $\tau_1 = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\tau_2 = \langle w_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ contenidos en $\partial\Delta^4$ tales que $\tau_1 \cap \tau_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Denotemos $B = \tau_1 \cup \tau_2$. Dados $y_1, y_2 \in B^\circ$, existe una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, tal que $h_1(y_1) = y_2$. Si además $y_1 \in \tau_1^\circ$ y $y_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$, o bien, si $\text{aff}(\tau_1) = \text{aff}(\tau_2)$ y B es convexo, se cumple que la restricción $h_1 : y_1(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle) \rightarrow y_2(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle$, $\forall i \neq 0$. En cualquier caso, h_1 es la identidad fuera de B .

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ$. Consideremos x_1, ρ_1, ρ_2 y f como en la demostración del lema anterior. Entonces $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in (\rho^3)^\circ$. Así, a como se mostró en el lema 3.2.7, existe un homeomorfismo PL $g : \rho^3 \rightarrow \rho^3$ tal que la restricción $g : f^{-1}(y_1)(\rho^3 \setminus \langle e_i \rangle) \rightarrow f^{-1}(y_2)(\rho^3 \setminus \langle e_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\rho^3 \setminus \langle e_i \rangle$, $\forall i \geq 0$; y $g(f^{-1}(y_1)) = f^{-1}(y_2)$. Por lo anterior, $\phi = f \circ g \circ f^{-1} : B \rightarrow B$ es un homeomorfismo PL tal que $\phi(y_1) = y_2$. Además, para cualquier $x \in \partial B$, se tiene que $f^{-1}(x) \in \partial\rho^3$ y como g fija $\partial\rho^3$, entonces $g(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$, por lo cual, $\phi(x) = x$, luego ϕ fija ∂B . Siguiendo un proceso similar al del lema 3.2.7, como ϕ es un auto-homeomorfismo PL de la 3-bola combinatoria

B que fija ∂B , podemos hallar una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, tal que $h_1|_{(\partial\Delta^4 - B)}$ es la identidad y $h_1|_B = \phi$, de modo que $h_1(y_1) = y_2$.

Ahora, supongamos que $y_1 \in \tau_1^\circ$ y $y_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$. Dado $i > 0$, tenemos que $y_1, y_2 \notin \tau_1 \setminus \langle v_i \rangle$, por lo que $\gamma_{1i} := y_1(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ y $\gamma_{2i} := y_2(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ son 3-simplejos contenidos en τ_1 . Como $f^{-1} : \tau_1 \rightarrow \rho_1$ es un homeomorfismo simplicial, entonces $f^{-1}(\gamma_{1i}) = f^{-1}(y_1)(\rho_1 \setminus \langle f^{-1}(v_i) \rangle)$ y $f^{-1}(\gamma_{2i}) = f^{-1}(y_2)(\rho_1 \setminus \langle f^{-1}(v_i) \rangle)$ son simplejos contenidos en ρ_1 . En consecuencia, la restricción $f^{-1} : \gamma_{1i} \rightarrow f^{-1}(\gamma_{1i})$ es un homeomorfismo simplicial, con $f^{-1}(v_i) \neq e_0$.

Recordemos que la restricción $g : f^{-1}(y_1)(\rho^3 \setminus \langle e_j \rangle) \rightarrow f^{-1}(y_2)(\rho^3 \setminus \langle e_j \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\rho^3 \setminus \langle e_j \rangle$, $j > 0$. Probaremos que la restricción $g : f^{-1}(\gamma_{1i}) \rightarrow f^{-1}(\gamma_{2i})$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\rho_1 \setminus \langle e_i \rangle$. Cuando $i = 1$, tenemos que $f^{-1}(v_1) = x_1$ y $f^{-1}(\gamma_{k1}) = f^{-1}(y_k)(e_0, e_2, e_3)$, $k = 1, 2$. Esto nos dice que la restricción $g : f^{-1}(\gamma_{11}) \rightarrow f^{-1}(\gamma_{21})$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\rho_1 \setminus \langle f^{-1}(v_1) \rangle = \rho^3 \setminus \langle e_1 \rangle$. Si $i > 1$, se tiene que $\rho_1 \setminus \langle f^{-1}(v_i) \rangle = \rho_1 \setminus \langle e_i \rangle$ y $x_1 \in \text{vert}(\rho_1 \setminus \langle e_i \rangle)$. Asimismo, $\rho_1 \setminus \langle e_i \rangle \subset \rho^3 \setminus \langle e_i \rangle$ y entonces la restricción $g : f^{-1}(\gamma_{1i}) \rightarrow f^{-1}(\gamma_{2i})$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\rho_1 \setminus \langle e_i \rangle$.

Continuando con la demostración, puesto que $f : \rho_1 \rightarrow \tau_1$ es un homeomorfismo simplicial, la restricción $f : f^{-1}(\gamma_{2i}) \rightarrow \gamma_{2i}$ es un homeomorfismo simplicial. Debido a lo anterior, $h_1|_{\gamma_{1i}} = \phi|_{\gamma_{1i}} = (f \circ g \circ f^{-1})|_{\gamma_{1i}}$, por lo que la restricción $h_1 : y_1(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle) \rightarrow y_2(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial. Además, para cualquier $x \in \tau_1 \setminus \langle v_i \rangle$, ocurre que $f^{-1}(x) \in \rho_1 \setminus \langle f^{-1}(v_i) \rangle \subset \partial\rho^3$ y se tiene $g(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$, de manera que $h_1(x) = (f \circ g \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, es decir, h_1 fija $\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle$ (figura 18).

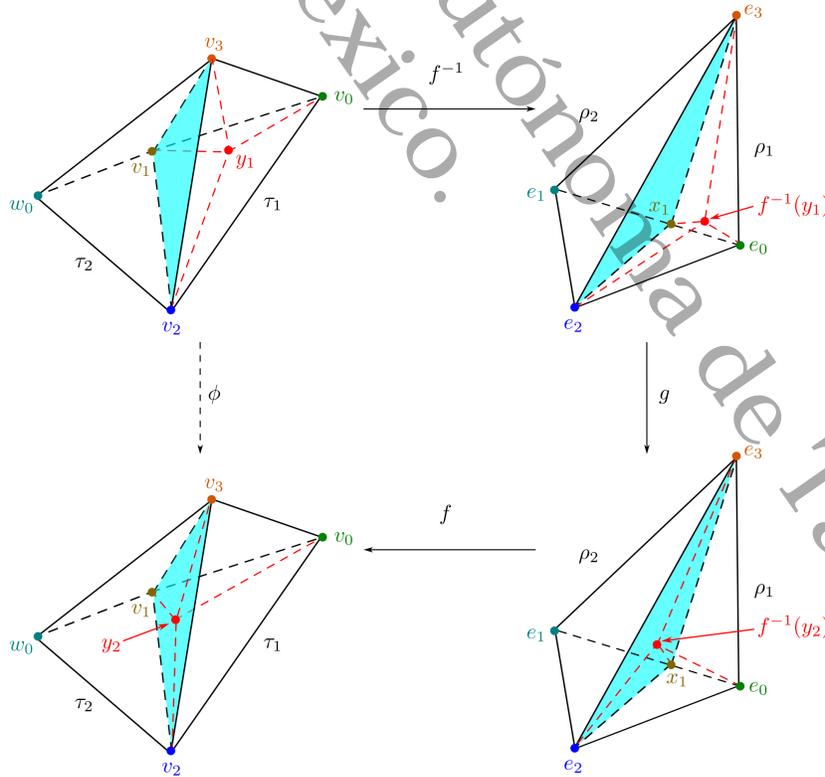


Figura 18: Demostración del lema 3.2.9, caso $y_1 \in \tau_1^\circ$ y $y_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$.

En esta última parte, supongamos que $\text{aff}(\tau_1) = \text{aff}(\tau_2)$ y B es convexo. Note que $\text{aff}(B) \subset \text{aff}(\tau_1)$. Sin embargo, también se cumple que $\tau_1 \subset B$, luego $\text{aff}(\tau_1) \subset \text{aff}(B)$. Esto prueba que B , τ_1 y τ_2 generan el mismo subespacio afín. Debido a lo anterior, el lema 3.2.8 garantiza que (3.1) y (3.2) se cumplen con $X := \text{aff}(B)$. Por otro lado, B es compacto por ser unión de compactos. Así, como $y_1, y_2 \in B^\circ$, por el corolario 1.4.9 obtenemos que $B = y_1 \partial B = y_2 \partial B$ son conos. Recuerde que ∂B es la unión de las caras frontera de τ_1 y τ_2 distintas de $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, por lo que al hacer el cono con vértice y_1 (respectivamente y_2) y alguna de estas caras frontera, se obtiene un 3-simplejo (lema 1.6.13). Entonces se inducen triangulaciones de B , a saber,

$$K_i = \bigcup_{j=1}^3 [K(y_i(\tau_1 \setminus \langle v_j \rangle)) \cup K(y_i(\tau_2 \setminus \langle v_j \rangle))], i = 1, 2.$$

Definamos la biyección $g_0 : \text{vert}(K_1) \rightarrow \text{vert}(K_2)$ por $g_0(y_1) = y_2$, $g_0(v_i) = v_i$, $i > 0$ y $g_0(w_0) = w_0$. Gracias al teorema 2.3.12, obtenemos esta vez un homeomorfismo simplicial $g : |K_1| \rightarrow |K_2|$ que fija ∂B , con $g(y_1) = y_2$ y cuya restricción $g : y_1(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle) \rightarrow y_2(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial, $\forall i \neq 0$ (figura 19). Así, tal como hemos hecho antes, podemos obtener una PL-isotopía de ambiente $H : \partial \Delta^4 \times I \rightarrow \partial \Delta^4 \times I$, $H(x, t) = (h_t(x), t)$, tal que $h_1|_{(\partial \Delta^4 - B)}$ es la identidad y $h_1|_B = g$, de modo que $h_1(y_1) = h_1(y_2)$ y la restricción $h_1 : y_1(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle) \rightarrow y_2(\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle)$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\tau_1 \setminus \langle v_i \rangle$, $\forall i \neq 0$. ■

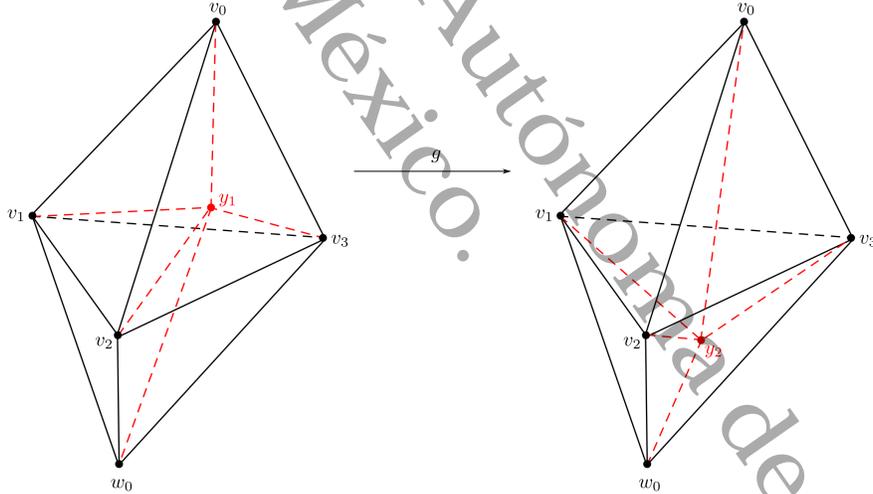


Figura 19: Auto-homeomorfismo simplicial g de la 3-bola combinatoria convexa B , que manda $y_1 \in B^\circ$ a $y_2 \in B^\circ$ y fija ∂B .

Lema 3.2.10. Sean σ un 3-simplejo y $\tau = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle \subset \sigma$. Si $p_0 \in (\text{aff}(\tau) - \text{aff}(v_0, v_1)) \cap \sigma^\circ$, entonces existe $w_2 \in \sigma \cap \text{aff}(\tau)$ tal que v_0, v_1, w_2 son afínmente independientes y $p_0 \in \langle v_0, v_1, w_2 \rangle^\circ$.

Demostración. Dado que $p_0 \in \sigma^\circ = \text{Int}_{\text{aff}(\sigma)}(\sigma)$ (corolario 1.6.11), existe $\varepsilon > 0$ tal que $V := B(p_0, \varepsilon) \cap \text{aff}(\sigma) \subset \sigma^\circ$. Sea $U := B(p_0, \varepsilon) \cap \text{aff}(\tau)$, el cual es cerrado en $\text{aff}(\tau)$. Como $\tau \subset \sigma$, tenemos que $\text{aff}(\tau) \subset \text{aff}(\sigma)$, de modo que $U \subset V$. Por la observación 1.3.13, existen

$x_0 \in \vec{R}(p_0, p_0 - v_0) \cap \text{Fr}_{\text{aff}(\tau)}(U)$ y $x_1 \in \vec{R}(p_0, p_0 - v_1) \cap \text{Fr}_{\text{aff}(\tau)}(U)$.

Mostraremos que $x_0 \neq x_1$. Por contrarrecíproca, supongamos que $x_0 = x_1$. Entonces $\text{aff}(p_0, x_0) = \text{aff}(p_0, x_1)$. Sin embargo, para cada $i \in \{0, 1\}$, existe $t_i > 0$ tal que

$$x_i = p_0 + t_i(p_0 - v_i) = (1 + t_i)p_0 - t_i v_i, \quad (3.3)$$

lo cual implica

$$v_i = \frac{1 + t_i}{t_i} p_0 - \frac{1}{t_i} x_i \in \text{aff}(p_0, x_i).$$

Esto nos dice que $v_0, v_1 \in \text{aff}(p_0, x_0)$ y puesto que $v_0 \neq v_1$, entonces $\text{aff}(p_0, x_0) = \text{aff}(v_0, v_1)$, en particular, $p_0 \in \text{aff}(v_0, v_1)$.

De este modo, como $p_0 \notin \text{aff}(v_0, v_1)$, se cumple que $x_0 \neq x_1$.

Sea $w_2 \in \langle x_0, x_1 \rangle^\circ$. Afirmamos que v_0, v_1 y w_2 son afinmente independientes (véase la figura 20). Tenemos que existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $w_2 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$, por lo que usando (3.3):

$$w_2 = [\lambda(1 + t_0) + (1 - \lambda)(1 + t_1)]p_0 - \lambda t_0 v_0 - (1 - \lambda)t_1 v_1 \in \text{aff}(p_0, v_0, v_1). \quad (3.4)$$

Debido a que $p_0 \notin \text{aff}(v_0, v_1)$, el corolario 1.6.14 nos dice que p_0, v_0 y v_1 son afinmente independientes. Dado que $\lambda \in (0, 1)$, $t_0, t_1 > 0$, se sigue que $\lambda(1 + t_0) + (1 - \lambda)(1 + t_1) > 0$, luego por (3.4), $w_2 \notin \text{aff}(v_0, v_1)$, dada la independencia afín de p_0, v_0 y v_1 . En consecuencia, v_0, v_1 y w_2 son afinmente independientes. De (3.4) se tiene que $p_0 = \frac{w_2 + \lambda t_0 v_0 + (1 - \lambda)t_1 v_1}{\lambda(1 + t_0) + (1 - \lambda)(1 + t_1)}$, donde $\lambda t_0, (1 - \lambda)t_1 > 0$ y $\lambda(1 + t_0) + (1 - \lambda)(1 + t_1) = 1 + \lambda t_0 + (1 - \lambda)t_1 > 0$, y se deduce que $p_0 \in \langle v_0, v_1, w_2 \rangle^\circ$. Como U es cerrado en $\text{aff}(\tau)$, ocurre que $\text{Fr}_{\text{aff}(\tau)}(U) \subset U$. Entonces $x_0, x_1 \in U$ y, por convexidad, $w_2 \in [x_0, x_1] \subset U \subset V \subset \sigma$. ■

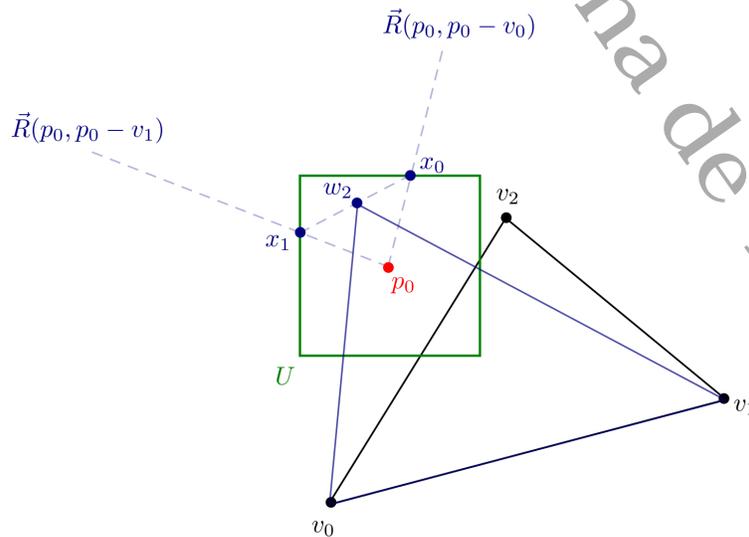


Figura 20: Demostración del lema 3.2.10.

Lema 3.2.11. Sean σ un n -simplejo, $x_0 \in \sigma^\circ$ y $x_1 \in \partial\sigma$. Sea τ una cara frontera de σ tal que $x_1 \in \tau$. Entonces, para $y = x_0 + t(x_1 - x_0)$ con $t > 1$, se cumple que $\rho = y\tau$ es un n -simplejo y $\sigma \cap \rho = \tau$.

Demostración. Mostraremos primero que $y \notin \text{aff}(\tau)$ y, siguiendo el corolario 1.6.14, se probará que $\rho = y\tau$ es un n -simplejo. Por contradicción, supongamos que $y \in \text{aff}(\tau)$. Puesto que $x_1 \in \text{aff}(\tau)$, del teorema 1.2.2 se sigue que $\text{aff}(\tau) = x_1 + V$, para algún espacio vectorial real V , de modo que $y - x_1 \in V$. Ahora, usando el corolario 1.6.11, se sabe que $\sigma = x_0\partial\sigma$ es un cono, en particular, $x_0\tau$ es un cono y, por el lema 1.6.13, se trata de un simplejo tal que $\text{vert}(x_0\tau) = \{x_0\} \cup \text{vert}(\tau)$. Entonces el teorema 1.2.11 nos dice que $x_0 \notin \text{aff}(\tau) = x_1 + V$ y, nuevamente empleando el teorema 1.2.2, $x_0 - x_1 \notin V$. Por otro lado, $x_0, x_1, y \in R(x_0, x_1) \subset \text{aff}(x_0, x_1)$, luego $S := \text{aff}(x_0, x_1) - x_1$ es un espacio vectorial real de dimensión 1 y $y - x_1 \in S$. Asimismo, $x_0 - x_1 \in S$ y entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 - x_1 = \lambda(y - x_1) \in V$, lo cual es contradictorio. De esta forma, $y \notin \text{aff}(\tau)$ y $\rho = y\tau$ es un n -simplejo.

Ahora probaremos que $\sigma \cap \rho = \tau$. Es claro que $\tau \subset \sigma \cap \rho$. Sea $z_0 = \lambda y + (1 - \lambda)z$ tal que $\lambda \in (0, 1]$ y $z \in \tau$, de modo que $z_0 \in \rho - \tau$. Veremos que $z_0 \notin \sigma$, lo cual nos permitirá deducir que $\sigma \cap \rho = \tau$. Dado que $t > 1$, entonces $\lambda t + 1 - \lambda > 1$, por lo que:

$$z_0 = \lambda(1 - t)x_0 + (\lambda t + 1 - \lambda) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + 1 - \lambda} x_1 + \frac{1 - \lambda}{\lambda t + 1 - \lambda} z \right),$$

donde observemos $w := \frac{\lambda t}{\lambda t + 1 - \lambda} x_1 + \frac{1 - \lambda}{\lambda t + 1 - \lambda} z \in [x_1, z] \subset \tau$, ya que $x_1, z \in \tau$ y τ es convexo. Haciendo $\mu := \lambda t + 1 - \lambda$, escribimos $z_0 = (1 - \mu)x_0 + \mu w = x_0 + \mu(w - x_0)$, con $\mu > 1$, $w \in \tau \subset \partial\sigma$. Así, por el corolario 1.6.11, se sigue que $z_0 \notin \sigma$. Por lo tanto, $\sigma \cap \rho = \tau$ (figura 21). ■

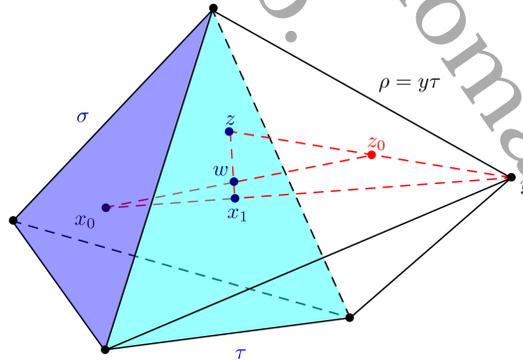


Figura 21: Demostración del lema 3.2.11, caso $n = 3$.

Lema 3.2.12. Sean $\tau = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ y $p_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$, $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Si $y_0 \in \vec{R}(p_0, p_0 - v_n)$, $y_0 \neq p_0$, entonces $\sigma = y_0 \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ es un n -simplejo, $\tau \cap \sigma = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ y $\tau \cup \sigma$ es una n -bola combinatoria convexa.
- (2) Si $y_0 \in R(p_0, v_n)$, $y_0 \notin \langle p_0, v_n \rangle$, entonces $\sigma = y_0 \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ es un n -simplejo y $\text{star}(v_n, \tau) \subset \sigma^\circ$.

En la figura 22 se ilustra el caso $n = 3$.

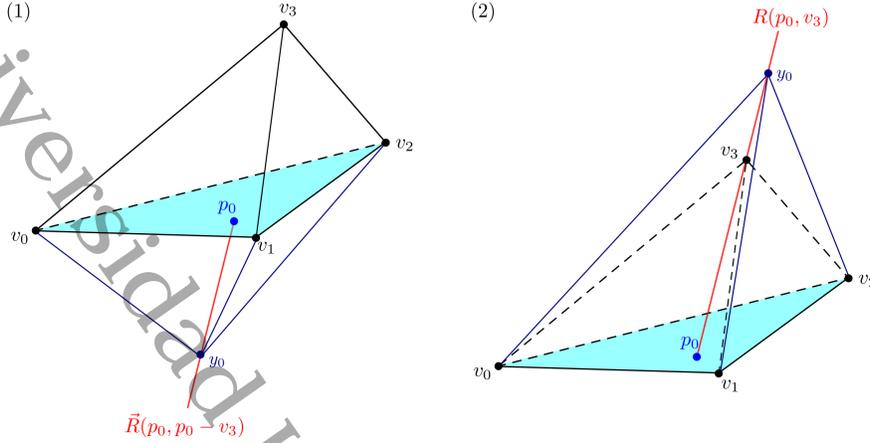


Figura 22: Situación del lema 3.2.12, caso $n = 3$.

Demostación. (1) Sea $y_0 \in \vec{R}(p_0, p_0 - v_n)$, $y_0 \neq p_0$. Probaremos que existe $x_0 \in \tau^\circ$ y $t_0 > 1$ tal que $y_0 = x_0 + t_0(p_0 - x_0)$ porque esto implicará, de acuerdo con el lema 3.2.11, que σ es un n -simplejo y $\tau \cap \sigma = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$. Entonces por el lema 3.2.8, tendremos que $\tau \cup \sigma$ es una n -bola combinatoria. Primero, $y_0 = p_0 + s(p_0 - v_n) = (1 + s)p_0 - sv_n$ para algún $s > 0$. Sea $x_0 := (1 - r)v_n + rp_0$, con $r \in (0, 1)$, de manera que $x_0 \in \langle v_n, p_0 \rangle^\circ$. Como $p_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$ y $\tau = v_n \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$, obtenemos que $x_0 \in \tau^\circ$. Note que $v_n = \frac{x_0 - rp_0}{1 - r}$, por lo cual,

$$y_0 = x_0 + \left(1 + s + \frac{sr}{1 - r}\right)(p_0 - x_0),$$

y dado que $s > 0$, se sigue que $t_0 := 1 + s + \frac{sr}{1 - r} > 1$, como queríamos.

Ahora bien, mostraremos en esta parte que $\tau \cup \sigma$ es convexo. Sean $x, y \in \tau \cup \sigma$. Si $x, y \in \tau$, por la convexidad de τ , entonces $[x, y] \subset \tau \subset \tau \cup \sigma$. Un argumento similar muestra que, si $x, y \in \sigma$, o bien, si $x, y \in \tau \cap \sigma$, entonces $[x, y] \subset \tau \cup \sigma$. El caso que queda por analizar es cuando $x \in \tau - \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ y $y \in \sigma - \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$. Como $\tau = v_n \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ y $\sigma = y_0 \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$, tenemos que existen $\lambda_x, \lambda_y \in (0, 1]$, $z_x, z_y \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ tales que $x = \lambda_x v_n + (1 - \lambda_x)z_x$ y $y = \lambda_y y_0 + (1 - \lambda_y)z_y$. Por otro lado, existen $\mu_i^x, \mu_i^y \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^x = 1 = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^y$, tales que $z_x = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^x v_i$ y $z_y = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i^y v_i$. Además, ya que $p_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$, podemos escribir $p_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i$, para algunos $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1$. De aquí, $y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + s)\lambda_i v_i - sv_n$ con $\sum_{i=0}^{n-1} (1 + s)\lambda_i - s = 1$. Así,

$$x = \lambda_x v_n + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda_x) \mu_i^x v_i, \quad (3.5)$$

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} [\lambda_y (1 + s) \lambda_i + (1 - \lambda_y) \mu_i^y] v_i - \lambda_y s v_n. \quad (3.6)$$

A continuación, demostraremos que existe $w \in [x, y] \cap \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$ (figura 23), de donde obtendremos que $[x, y] = [x, w] \cup [w, y]$. Entonces, por la convexidad de τ y σ , se cumplirá

que $[x, w] \subset \tau$ y $[w, y] \subset \sigma$, por lo cual $[x, y] \subset \tau \cup \sigma$.

Puesto que $\lambda_x, \lambda_y, s > 0$, se sigue que $\lambda_x + \lambda_y s > \lambda_y s > 0$, luego $t := \frac{\lambda_y s}{\lambda_x + \lambda_y s} \in (0, 1)$.

Sea $w := tx + (1-t)y$, de modo que $w \in [x, y]$. Observemos que $t\lambda_x - (1-t)\lambda_y s = t(\lambda_x + \lambda_y s) - \lambda_y s = 0$. Debido a lo anterior, así como por (3.5) y (3.6), se verifica que

$$w = \sum_{i=0}^{n-1} [t(1-\lambda_x)\mu_i^x + (1-t)(\lambda_y(1+s)\lambda_i + (1-\lambda_y)\mu_i^y)]v_i,$$

con escalares positivos y $\sum_{i=0}^{n-1} [t(1-\lambda_x)\mu_i^x + (1-t)(\lambda_y(1+s)\lambda_i + (1-\lambda_y)\mu_i^y)] = 1$. Así, $w \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$ y, por lo tanto, $[x, y] \subset \tau \cup \sigma$. Habiendo analizado cada caso, se concluye que $\tau \cup \sigma$ es convexo.

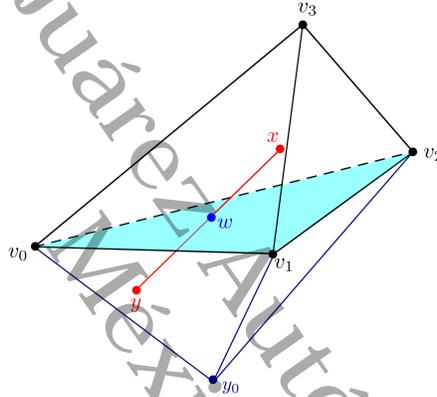


Figura 23: Existencia de $w \in [x, y] \cap \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$, caso $n = 3$.

(2) Sea $y_0 \in R(p_0, v_n)$, $y_0 \notin \langle p_0, v_n \rangle$. Debido a que $p_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$ y usando que $v_n \notin \text{aff}(v_0, \dots, v_{n-1})$ por la independencia afín de los vértices de τ (teorema 1.2.11), puede verificarse que $y_0 \notin \text{aff}(v_0, \dots, v_{n-1})$ y, por ende, $\sigma = y_0 \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ es un n -simplejo. Por hipótesis, tenemos que $v_n \in \langle p_0, y_0 \rangle^\circ$, luego $v_n = (1-s)p_0 + sy_0$ para algún $s \in (0, 1)$. Escribamos también $p_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i$, para algunos $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1$. Sea $x \in \text{star}(v_n, \tau) = \tau - \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$. Entonces existen $t \in [0, 1)$ y $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i = 1$, tales que $x = (1-t)v_n + t \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i v_i$. Lo anterior implica que $x = \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t)(1-s)\lambda_i + t\mu_i]v_i + (1-t)sy_0$, donde se checa fácilmente que $(1-t)(1-s)\lambda_i + t\mu_i, (1-t)s > 0$ y la suma de estos escalares es 1, es decir, $x \in \sigma^\circ$. En consecuencia, $\text{star}(v_n, \tau) \subset \sigma^\circ$. ■

Lema 3.2.13. Sean $\tau_1 = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ y $\tau_2 = \langle v_0, \dots, v_{n-1}, w_n \rangle$ simplejos que generan el mismo subespacio afín X , tales que $\tau_1 \cap \tau_2 = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$. Entonces existe $q_1 \in \tau_2^\circ$ tal que, para $\tau_3 = q_1(\tau_1 \cap \tau_2)$, $\tau_1 \cup \tau_3$ es una n -bola combinatoria convexa.

Demostración. Sea $q_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$. Del lema 3.2.8 se tiene que $\tau_1 \cup \tau_2$ es una n -bola combinatoria y $q_0 \in (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ$, donde éste último es abierto en X , luego existe $r > 0$,

$U := B_X(q_0, r)$, tal que $U \subset (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ$. Usando la observación 1.3.13, tenemos que existe un único $q_1 \in \text{Fr}_X(U) \cap \vec{R}(q_0, q_0 - v_n)$ (figura 24). Como U es cerrado en X , entonces $\text{Fr}_X(U) \subset U$, por lo que $q_1 \in (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ$. Además, existe $s > 0$ tal que $q_1 = (1 + s)q_0 - sv_n$. Ya que $q_0 \in \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ$, podemos escribir $q_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i$, para algunos $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1$. De aquí, $q_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + s)\lambda_i v_i - sv_n$ con $\sum_{i=0}^{n-1} (1 + s)\lambda_i - s = 1$, entonces $q_1 \in X - \tau_1$, esto por el hecho que $-s < 0$ y la independencia afín de los vértices de τ_1 . Debido a lo anterior y dado que $q_1 \in (\tau_1 \cup \tau_2)^\circ \subset \tau_1 \cup \tau_2^\circ$, obtenemos que $q_1 \in \tau_2^\circ$. Finalmente, como $q_1 \neq q_0$ y $q_1 \in \vec{R}(q_0, q_0 - v_n)$, el lema 3.2.12(1) nos permite concluir que $\tau_1 \cup \tau_3$ es una n -bola combinatoria convexa. ■

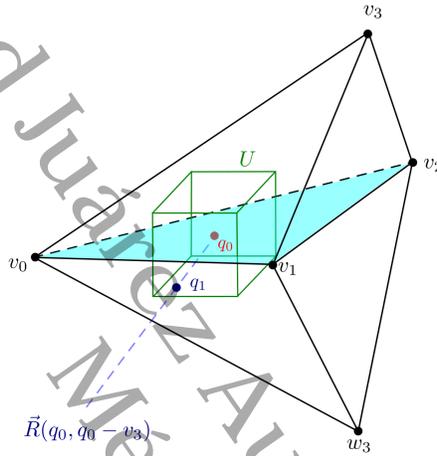


Figura 24: Demostración del lema 3.2.13, caso $n = 3$.

3.3. Equivalencia combinatoria

Definición 3.3.1. Consideremos M como \mathbb{R}^3 o $\partial\Delta^4$. Sea u un segmento de recta de un nudo poligonal N en M , y D un triángulo en M , $\partial D = u \cup v \cup w$; donde u, v, w son las 1-caras de D . Si $D \cap N = u$, entonces $N' = (N - u) \cup v \cup w$ define otro nudo poligonal y diremos que N' resulta de N por una **movida** Δ (figura 25). El proceso inverso es denotado por Δ^{-1} .

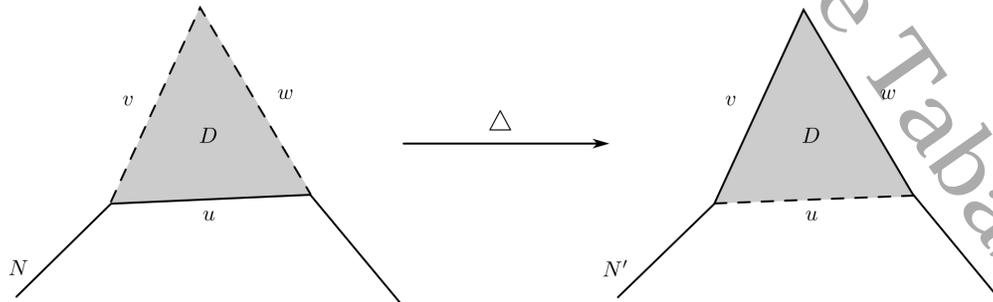


Figura 25: Movida Δ .

Definición 3.3.2. Dos nudos poligonales son **combinatoriamente equivalentes**, si existe una secuencia finita de movidas Δ y Δ^{-1} que transformen un nudo en el otro.

Lema 3.3.3. Sea D un 2-simplejo en \mathbb{R}^3 o $\partial\Delta^4$. Si D define una movida $\Delta^{\pm 1}$ y $K^{(r)}$ es un r -ésimo derivado de $K(D)$, entonces la movida $\Delta^{\pm 1}$ puede efectuarse a partir de una secuencia finita de movidas Δ y Δ^{-1} sobre 2-simplejos en $K^{(r)}$.

Demostración. Por inducción sobre r . Sea $K^{(1)}$ un primer derivado de $K(D)$. Sean u, v, w las 1-caras de D . Supongamos que D define una movida Δ , en la cual u se quiere reemplazar por $v \cup w$. En la figura 26 se muestran esquemáticamente los pasos que describimos a continuación, para realizar la movida Δ mediante 2-simplejos de $K^{(1)}$. Usando la proposición 2.4.8, uno puede convencerse que $K^{(1)}$ consta de seis 2-simplejos τ_1, \dots, τ_6 como simplejos principales, dispuestos de la siguiente forma: denotando $\rho_{ij} := \tau_i \cap \tau_j$, tenemos que $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{36}, \rho_{14}, \rho_{45}$ y ρ_{56} son 1-caras, y existen caras fronteras $\rho_i < \tau_i$ tales que $\rho_1 \cup \rho_2 = u$, $\rho_3 \cup \rho_6 = w$ y $\rho_4 \cup \rho_5 = v$.

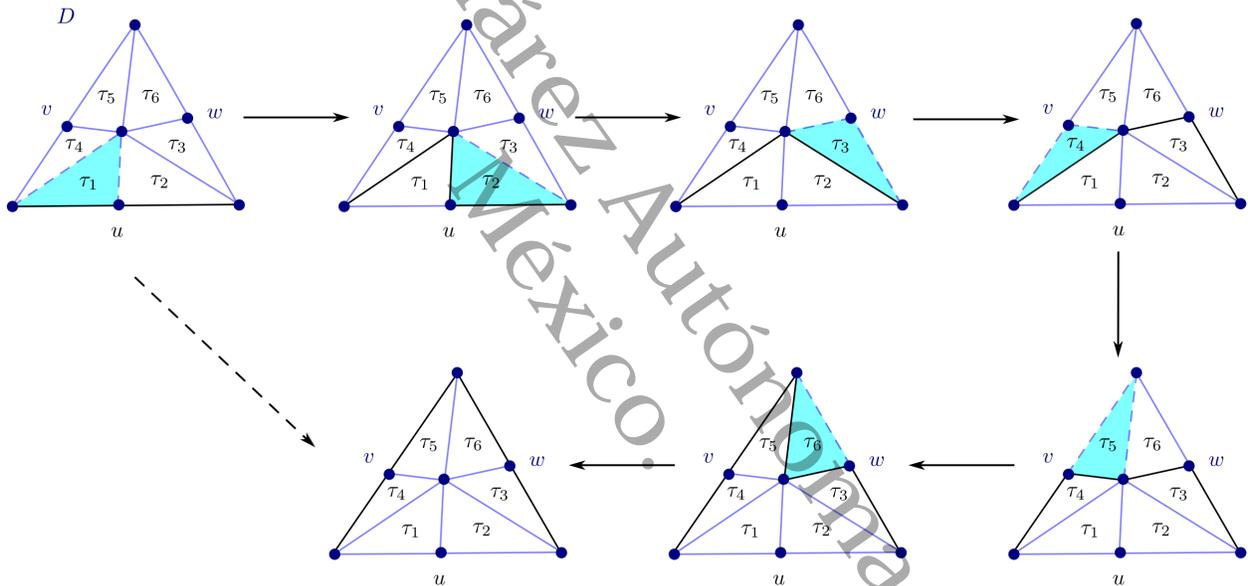


Figura 26: Pasos para efectuar una movida Δ con 2-simplejos del primer derivado de $K(D)$.

Primero, mediante τ_1 realizamos la movida Δ que mueve ρ_1 a $\rho_{14} \cup \rho_{12}$. Acto seguido, hacemos la movida Δ^{-1} en τ_2 que sustituye $\rho_{12} \cup \rho_2$ por ρ_{23} . Aplicamos la movida Δ en τ_3 para reemplazar ρ_{23} por $\rho_{36} \cup \rho_3$ y después hacemos lo mismo en τ_4 , pero para mover ρ_{14} a $\rho_4 \cup \rho_{45}$. Hasta aquí ρ_3 y ρ_4 están bien posicionados, aunque todavía debemos seguir desplazando ρ_{45} a $\rho_5 \cup \rho_{56}$ en τ_5 con una movida Δ y, como último paso, con una movida Δ^{-1} en τ_6 cambiamos $\rho_{56} \cup \rho_{36}$ por ρ_6 .

El caso donde D define una movida Δ^{-1} se tiene revirtiendo los pasos que efectuaríamos si D definiera una movida Δ .

Supongamos ahora que, dado $r \in \mathbb{N}$, para cada r -ésimo derivado de $K(D)$ con D un 2-simplejo, el lema es cierto. Sea $K^{(r+1)}$ un $(r+1)$ -ésimo derivado de $K(D)$. Consideremos el

primer derivado $K^{(1)}$ de $K(D)$, a partir del cual se definió inductivamente $K^{(r+1)}$, y sean $\tau_1, \dots, \tau_6 \in K^{(1)}$ como en el caso $r = 1$. Entonces $K^{(r+1)}$ define en cada τ_i un r -ésimo derivado $K_i^{(r)} \subset K^{(r+1)}$ de $K(\tau_i)$. Por hipótesis de inducción, cualquier movida $\Delta^{\pm 1}$ definida en τ_i puede efectuarse usando 2-simplejos en $K_i^{(r)}$. Debido a lo anterior, resulta claro que mediante 2-simplejos de $K^{(r+1)}$ podemos realizar movidas $\Delta^{\pm 1}$ que repliquen las movidas $\Delta^{\pm 1}$ sobre cada τ_i , las cuales en el caso $r = 1$ nos permitieron efectuar una movida $\Delta^{\pm 1}$ con las 1-caras de D . ■

Proposición 3.3.4. *Sea N_0 y N_1 nudos poligonales en \mathbb{R}^3 , o bien en $\partial\Delta^4$, combinatoriamente equivalentes. Sea P un poliedro compacto que contenga a N_0, N_1 y a los 2-simplejos τ usados para realizar las movidas $\Delta^{\pm 1}$ que transforman N_0 en N_1 . Si P' es un poliedro compacto contenido en \mathbb{R}^3 o $\partial\Delta^4$ y $f : P \rightarrow P'$ es un homeomorfismo PL, entonces $f(N_0)$ y $f(N_1)$ son nudos poligonales combinatoriamente equivalentes.*

Demostración. Sea $f : P \rightarrow P'$ un homeomorfismo PL. Es suficiente con mostrar el caso donde N_0 y N_1 difieren por una movida $\Delta^{\pm 1}$, ya que el caso general es una aplicación sucesiva y finita de esta situación. Sea τ el 2-simplejo en cuyas aristas se realizó la movida respectiva. Como P y P' son poliedros compactos y $N_0, N_1, \tau \subset P$, ya que $f : P \rightarrow P'$ es un homeomorfismo PL, usando la proposición 2.4.18 existen complejos simpliciales K y L , y subcomplejos $K_0, K_1, K_\tau \subset K$ tales que $f : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo simplicial, $|K_0| = N_0, |K_1| = N_1$ y $K_\tau \triangleleft K(\tau)$. Ya que las restricciones $f||K_0|$ y $f||K_1|$ son homeomorfismos simpliciales, es claro que $f(|K_0|) = f(N_0)$ y $f(|K_1|) = f(N_1)$ son nudos poligonales porque N_0 y N_1 lo son.

Mediante la proposición 2.4.11, podemos hallar un r -ésimo derivado $K^{(r)}$ de $K(\tau)$ tal que $K^{(r)} \triangleleft K_\tau$. Puesto que $f||K_\tau|$ es un homeomorfismo simplicial, se sigue de la proposición 2.4.17 que $f||K^{(r)}|$ es también un homeomorfismo simplicial. Como $K^{(r)}$ es un r -ésimo derivado de $K(\tau)$, debido al lema 3.3.3 la movida $\Delta^{\pm 1}$ que se realiza en τ puede efectuarse mediante una secuencia finita de movidas $\Delta^{\pm 1}$ sobre 2-simplejos de $K^{(r)}$. Sea $\tau_0 \in K^{(r)}$ uno de estos 2-simplejos. Si u, v, w son las 1-caras de τ_0 y se hace la movida Δ que sustituye u por $v \cup w$, ya que $f||K^{(r)}|$ es un homeomorfismo simplicial, tenemos que $f(\tau_0)$ es un 2-simplejo con caras frontera $f(u), f(v), f(w)$, en el cual se replica la movida Δ que cambia $f(u)$ por $f(u) \cup f(w)$. Análogamente, una movida Δ^{-1} sobre aristas de τ_0 se replica en las aristas bajo f que ahora son caras frontera de $f(\tau_0)$. Lo anterior nos dice que $f(N_0)$ y $f(N_1)$ son combinatoriamente equivalentes, siguiendo las movidas $\Delta^{\pm 1}$ definidas sobre 2-simplejos de $K^{(r)}$, que transforman N_0 en N_1 , bajo f . ■

Lema 3.3.5. *Una traslación de un nudo poligonal N en \mathbb{R}^3 se puede realizar a partir de movidas $\Delta^{\pm 1}$.*

Demostración. Paso 1: comenzaremos mostrando el caso donde $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una traslación sobre el eje z , específicamente, $T(x) = x - ae_3$ con $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$. Sea K un 1-complejo puro tal que $|K| = N$. En lo sucesivo, para cada 1-simplejo $s = \langle s_0, s_1 \rangle \in K$, denotaremos por s' y s'' a los 1-simplejos en K tales que $s' \cap s = \langle s_0 \rangle$ y $s'' \cap s = \langle s_1 \rangle$. Convendremos en que si K tiene una sucesión de 1-simplejos verticales dados por los vértices

ordenados (p_1, \dots, p_n) , consideraremos solamente el 1-simplejo vertical $\langle p_1, p_n \rangle$, de modo que si $s \in K$ es un 1-simplejo vertical, se asegura que s' y s'' no son verticales. Sea $s = \langle s_0, s_1 \rangle \in K$ un 1-simplejo. Si s es un segmento vertical, definimos $\varepsilon_s = \|s_1 - s_0\|$. Supongamos que s no es un segmento vertical. Sea H_s el semiplano inferior del plano vertical P_s que contiene a $\text{aff}(s)$, es decir, $(x, y, z) \in H_s$ si y sólo si $(x, y, z) \in P_s$ y el único punto (x_0, y_0, z_0) de la intersección $\bar{R}((x, y, z), e_3) \cap \text{aff}(s)$ cumple que $z_0 \geq z$. Si $N \cap H_s = s$, entonces tomamos $\varepsilon_s = a$. Por otro lado, sea $B = \text{Cl}(N - (s \cup s' \cup s'')) \cap H_s$. Si $s' \cap H_s = \langle s_0 \rangle$, $s'' \cap H_s = \langle s_1 \rangle$ y $B \neq \emptyset$, como s es compacto, B es cerrado y $s \cap B = \emptyset$, por la proposición 1.1.24 se tiene que $d(B, s) > 0$, luego tomamos $0 < \varepsilon_s < d(B, s)$. Esta elección garantiza que el paralelogramo $R_s := \{ty + (1-t)(y - \varepsilon_s e_3) : t \in I, y \in s\}$ no interseca a B , ya que si $y \in s$ y $x \in \langle y, y - \varepsilon_s e_3 \rangle$, obtenemos que $\|y - x\| \leq \|y - (y - \varepsilon_s e_3)\| = \varepsilon_s$. En el caso donde $s' \subset H_s$ o $s'' \subset H_s$, tomamos simplemente $\varepsilon_s = a$. Finalmente, sea $0 < \varepsilon < \min_{\substack{s \in K \\ \dim(s)=1}} \varepsilon_s$ y sea $T_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la traslación dada

por $T_\varepsilon(x) = x - \varepsilon e_3, \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Cuando s no es vertical, es posible trasladar s a $T_\varepsilon(s)$ mediante movidas $\Delta^{\pm 1}$ sobre el paralelogramo $R'_s := \{ty + (1-t)(y - \varepsilon e_3) : t \in I, y \in s\}$, a como se muestra en la figura 27(a), pero agregando dos segmentos verticales $r_0 = \langle s_0, T_\varepsilon(s_0) \rangle$ y $r_1 = \langle s_1, T_\varepsilon(s_1) \rangle$ en los extremos de $T_\varepsilon(s)$. Designaremos la anterior como una movida Δ_1 . Asimismo, podemos mover $r_1 \cup s$ a $T_\varepsilon(s) \cup r_0$ mediante movidas $\Delta^{\pm 1}$ (figura 27(b)). Similarmente, podemos sustituir $r_0 \cup s$ por $T_\varepsilon(s) \cup r_1$ (figura 27(c)). Ambas las nombraremos como una movida Δ_2 . Por otro lado, una movida Δ_3 consiste en trasladar $s \cup r_0 \cup r_1$ a $T_\varepsilon(s)$ con movidas $\Delta^{\pm 1}$ como en la figura 27(d).

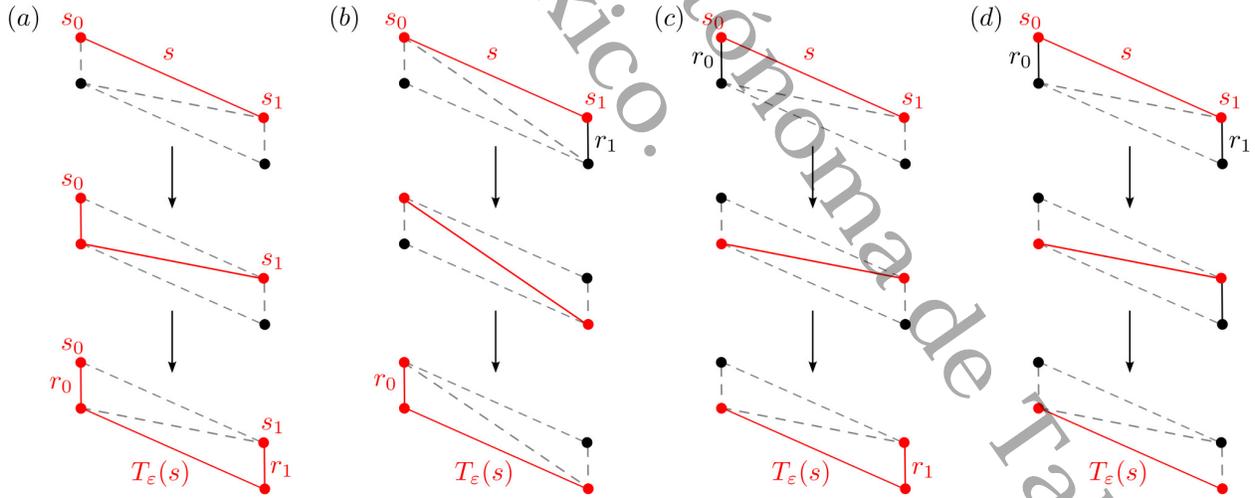


Figura 27: (a) Movida Δ_1 . (b) y (c) Movidas Δ_2 . (d) Movida Δ_3 .

En otro orden de ideas, si s es un segmento vertical, pero s' y s'' no son verticales, entonces para trasladar s a $T_\varepsilon(s)$ lo que hacemos es mover s' a $T_\varepsilon(s')$, ya sea con una movida Δ_2 si el segmento distinto de s que interseca a s' ha sido desplazado con alguna movida $\Delta_i, i \neq 3$, o bien una movida Δ_1 en otro caso. Posteriormente, trasladamos s'' a $T_\varepsilon(s'')$, usando una movida Δ_3 si el otro segmento distinto de s que interseca a s'' ha sido desplazado usando

alguna movida Δ_i , de nuevo $i \neq 3$, o en su defecto una movida Δ_2 . Es fácil convencerse que lo anterior es realizable porque ε es menor que la longitud de s . Note que al final se habrá desplazado también s como en la figura 28 (considere que s, s' y s'' podrían estar en planos distintos). También es posible optar por desplazar primero s'' y luego a s' .

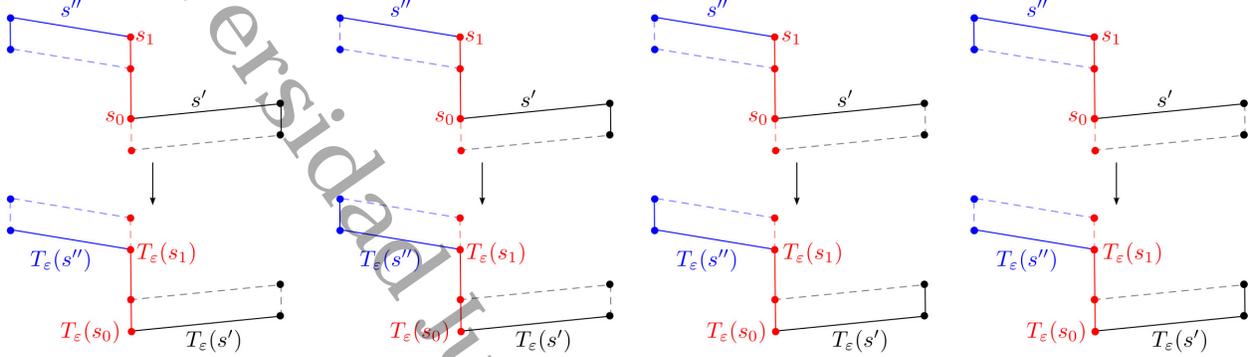


Figura 28: Formas de desplazar un segmento vertical s a partir de segmentos adyacentes s' y s'' no verticales.

A partir de lo explicado en los párrafos anteriores, podemos trasladar N a $T_\varepsilon(N)$ de la siguiente forma. Escojamos $s = \langle s_0, s_1 \rangle \in K$ no vertical. Las siguientes situaciones son posibles:

Caso I: Si $H_s \cap N = s$, o bien, $s' \cap H_s = \langle s_0 \rangle$, $s'' \cap H_s = \langle s_1 \rangle$ y $\text{Cl}(N - (s \cup s' \cup s'')) \cap H_s \neq \emptyset$, simplemente trasladamos s a $T_\varepsilon(s)$ con una movida Δ_1 , generando los respectivos segmentos verticales r_0 y r_1 en los extremos de s . Note que la elección de ε exhibe que N y $(N - s) \cup T_\varepsilon(s) \cup r_0 \cup r_1$ son combinatoriamente equivalentes, porque $R'_s \cap N = s$. Denotemos $\tilde{s} = s''$ y $\tilde{r} = r_1$, es decir, el segmento vertical tal que $\tilde{r} \cap T_\varepsilon(s) = \langle T_\varepsilon(s_1) \rangle$ y $\tilde{r} \cap s'' = \langle s_1 \rangle$.

Caso II: Supongamos que $s' \subset H_s$ y s'' no es vertical o no está contenido en H_s . Es más, asumamos que existen $p_1, \dots, p_n \in H_s$, $p_n = s_0$, tales que, si $\mathbf{p}_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la tercera coordenada, $\mathbf{p}_3(p_i) \leq \mathbf{p}_3(p_{i+1})$, con $q_i := \langle p_i, p_{i+1} \rangle \in K$, $i = 1, \dots, n-1$ y $s' = \langle p_{n-1}, p_n \rangle$. Adicionalmente, consideremos que si $q'_1 \in K$ es el 1-simplejo tal que $q'_1 \cap q_1 = \langle p_1 \rangle$, entonces $q'_1 \cap H_s = \langle p_1 \rangle$. Cuando q_1 no sea vertical, la estrategia consiste en aplicar una movida Δ_1 a q_1 para trasladarlo a $T_\varepsilon(q_1)$ y, posteriormente, realizar movidas Δ_2 de manera sucesiva a q_2, \dots, q_n, s , por supuesto, considerando los segmentos verticales respectivas que se vayan añadiendo con cada movida, de modo que se logre desplazar $S := (\bigcup_{i=1}^{n-1} q_i) \cup s$ a $T_\varepsilon(S) \cup \tilde{r} \cup \tilde{r}'$, siendo \tilde{r} y \tilde{r}' segmentos verticales tales que $\tilde{r} \cap T_\varepsilon(s) = \langle T_\varepsilon(s_1) \rangle$, $\tilde{r} \cap s'' = \langle s_1 \rangle$, $\tilde{r}' \cap T_\varepsilon(q_1) = \langle T_\varepsilon(p_1) \rangle$ y $\tilde{r}' \cap q'_1 = \langle p_1 \rangle$ (figura 29). Por otro lado, si ocurre que q_i es un segmento vertical, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, se procede como se ha indicado antes, sólo que en vez de desplazar q_i lo que hacemos es mover q_{i+1} cuando $i < n-1$, o bien s cuando $i = n-1$, pero siempre con una movida Δ_2 como en la figura 28, ya que eventualmente q_i se trasladará a $T_\varepsilon(q_i)$ en el momento en que se haya trasladado su otro segmento adyacente. Aquí, nuevamente denotamos $\tilde{s} = s''$.

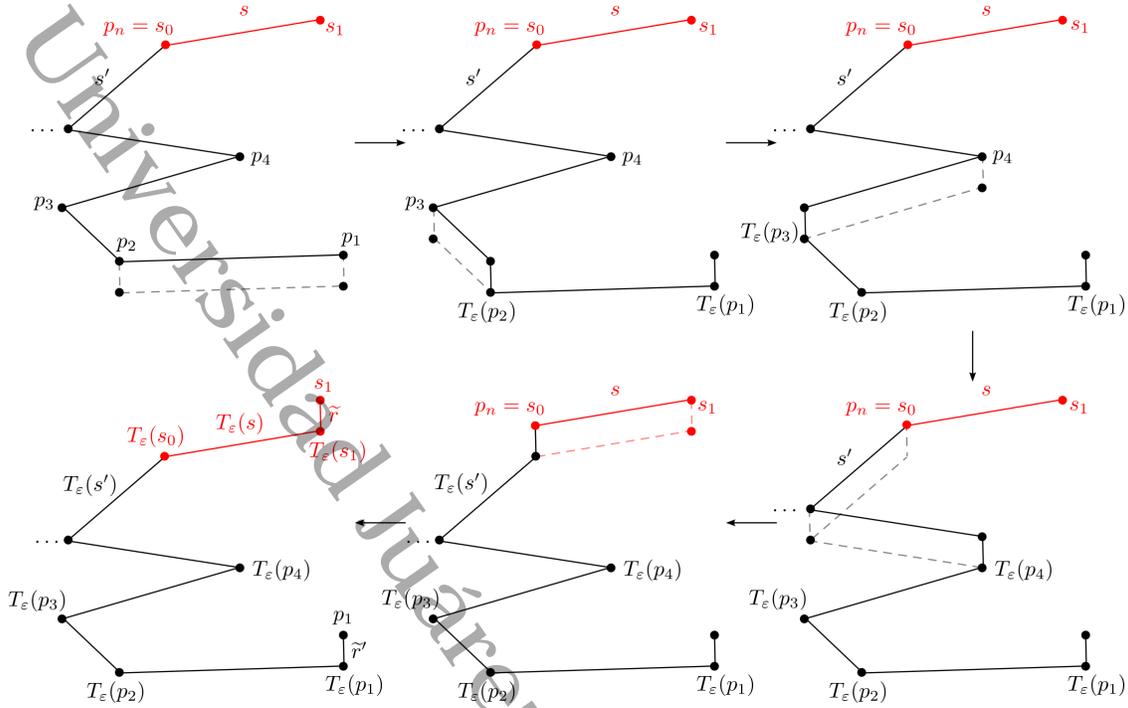


Figura 29: Idea de la demostración del caso II.

Caso III: Asumamos que $s' \subset H_s$, $s'' \subset H_s$ es vertical y existen $p_1, \dots, p_n \in H_s$, $p_n = s_0$, tales que $\mathfrak{p}_3(p_i) \leq \mathfrak{p}_3(p_{i+1})$, $q_i := \langle p_i, p_{i+1} \rangle \in K$, $i = 1, \dots, n-1$, $s'' = \langle p_{n-1}, p_n \rangle$. También supongamos que $q'_1 \in K$ es el 1-simplejo para el cual $q'_1 \cap q_1 = \langle p_1 \rangle$ con $q'_1 \cap H_s = \langle p_1 \rangle$. Procedemos como en el caso anterior, sólo que ahora a s se le aplicará una movida Δ_3 como en la figura 28 y entonces \tilde{s} será lo que reste del segmento s'' . Note que en esta ocasión no se añade un segmento vertical \tilde{r} que interseque en un vértice a $T_\varepsilon(s)$ y \tilde{s} .

Caso IV: Supongamos que $s' \cap H_s = \langle s_0 \rangle$ y existen $p_1, \dots, p_n \in H_s$, $p_n = s_1$, tales que $\mathfrak{p}_3(p_i) \leq \mathfrak{p}_3(p_{i+1})$, $q_i := \langle p_i, p_{i+1} \rangle \in K$, $i = 1, \dots, n-1$, $s'' = \langle p_{n-1}, p_n \rangle$ y $q'_1 \in K$ es el 1-simplejo para el cual $q'_1 \cap q_1 = \langle p_1 \rangle$ con $q'_1 \cap H_s = \langle p_1 \rangle$. Note que un argumento similar al del caso II funciona para este contexto, pero en esta ocasión, tendremos que \tilde{r} y \tilde{r}' son segmentos verticales que cumplen $\tilde{r} \cap T_\varepsilon(s) = \langle T_\varepsilon(s_0) \rangle$, $\tilde{r} \cap s' = \langle s_0 \rangle$, $\tilde{r}' \cap T_\varepsilon(q_1) = \langle T_\varepsilon(p_1) \rangle$ y $\tilde{r}' \cap q'_1 = \langle p_1 \rangle$. Esta vez $\tilde{s} = s'$.

Ahora trasladaremos \tilde{s} a $T_\varepsilon(\tilde{s})$. Supongamos que \tilde{s} no es vertical. Si ocurriera que solamente nos hace falta trasladar este segmento de N , debido a que el resto del nudo poligonal ha sido trasladado, sólo resta mover $\tilde{s} \cup r_0 \cup r_1$, donde r_0 y r_1 son segmentos verticales en los extremos de \tilde{s} , los cuales se originaron al mover \tilde{s}' y \tilde{s}'' a $T_\varepsilon(\tilde{s}')$ y $T_\varepsilon(\tilde{s}'')$, respectivamente. Sin embargo, es posible sustituir $\tilde{s} \cup r_0 \cup r_1$ por $T_\varepsilon(\tilde{s})$ mediante una movida Δ_3 , obteniéndose finalmente $T_\varepsilon(N)$. En caso de que \tilde{s} no es el último segmento de N que haga falta por trasladar, si nos hallamos como en el caso I, procedemos aplicando una movida Δ_2 para mover $\tilde{s} \cup \tilde{r}$ a $T_\varepsilon(\tilde{s}) \cup \hat{r}$, donde \hat{r} es el segmento vertical que se genera al aplicar la movida respectiva y se continuará con el 1-simplejo $\hat{s} \in K$ adyacente a \tilde{s} que no ha sido desplazado. Las situaciones restantes, todavía bajo la hipótesis de que \tilde{s} no es vertical, consisten en tener una secuencia de 1-simplejos de K , digamos $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m \subset H_{\tilde{s}}$ como en el caso II o IV. Puede pasar que

el segmento $\tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_2$, que interseca a \tilde{q}_1 en un vértice p haya sido trasladado, generando un segmento vertical \hat{r} que interseca a \tilde{q}_1 en p . Pero en vista de que previamente se ha desplazado una secuencia de 1-simplejos $q_1, \dots, q_n \in K$, con $q_n = s$, en la que $q_i \cap q_{i+1}$ es una cara frontera común de q_i y q_{i+1} , $i = 1, \dots, n$; debido a que s y \tilde{s} se intersecan en un vértice, debe ocurrir que $q_1 = \tilde{q}_1$. Esto tiene como consecuencia que $N = (\bigcup_{i=1}^n q_i) \cup \tilde{s} \cup (\bigcup_{i=1}^m \tilde{q}_i)$, por lo que, cuando \tilde{q}_1 no sea vertical, aplicamos una movida Δ_2 a $\tilde{q}_1 \cup \hat{r}$ para realizar la traslación $T_\varepsilon(\tilde{q}_1)$ (más un segmento vertical que se añade), o en su defecto, si \tilde{q}_1 es vertical, efectuamos una movida Δ_2 a \tilde{q}_2 junto con una porción del segmento \tilde{q}_1 (similar al procedimiento de la figura 28) y continuamos a como indican el caso II o IV, según corresponda, realizando movidas Δ_2 sobre cada \tilde{q}_i junto con los segmentos verticales que se requieran. Al final, cuando llegemos a \tilde{s} , tan sólo nos restará mover este segmento junto con \tilde{r} y otro segmento vertical que comparte vértice con \tilde{s} , distinto del vértice que comparten \tilde{r} y \tilde{s} , por lo que aplicando una movida Δ_3 habremos desplazado N a $T_\varepsilon(N)$. Si por el contrario \tilde{q}_1 aún no ha sido desplazado, procedemos a como indican el caso II o el caso IV, pero añadiendo en la secuencia respectiva a \tilde{r} , lo cual implica que, al llegar a \tilde{s} , debemos efectuar una movida Δ_3 . Esto se debe a que \tilde{q}_m es el 1-simplejo en la secuencia que interseca a \tilde{s} en un vértice, por lo que si éste segmento no es vertical, al haber sido trasladado generó un segmento vertical; o si \tilde{r} es vertical, es necesario tomar una porción suya para que, al hacer la movida Δ_3 en \tilde{s} , \tilde{q}_m termine de desplazarse. Continuaremos aquí el proceso con el 1-simplejo $\hat{s} = \tilde{q}_1 \in K$ y, si \tilde{q}_1 no es vertical, considerando \hat{r} el segmento vertical que resultó de mover a \tilde{q}_1 .

Cuando \tilde{s} es vertical y suponiendo que todavía no se ha desplazado todo N , dado que ya se ha desplazado un segmento \tilde{s}' adyacente a \tilde{s} , para mover \tilde{s} a $T_\varepsilon(\tilde{s})$ sólo requerimos trasladar el otro segmento adyacente \tilde{s}'' mediante una movida Δ_i , en concordancia con el caso que corresponda de los anteriormente analizados.

Continuamos de este modo hasta que eventualmente logremos mover N en su totalidad a $T_\varepsilon(N)$, probándose así que éstos nudos poligonales son combinatoriamente equivalentes. Ahora bien, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\varepsilon > a$. Sea $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > a\}$, el cual existe por el principio del buen orden. Aplicando sucesivamente el procedimiento anteriormente descrito, tenemos que N y $T_\varepsilon^{n_0-1}(N)$ son combinatoriamente equivalentes, donde $T_\varepsilon^{n_0-1}$ denota la composición de T_ε consigo mismo $(n_0 - 1)$ -veces. Si $(n_0 - 1)\varepsilon = a$, entonces $T_\varepsilon^{n_0-1} = T$, por lo que N y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes. En caso contrario, tenemos que $(n_0 - 1)\varepsilon < a$. Sea $\varepsilon' = a - (n_0 - 1)\varepsilon$. Puesto que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, podemos también replicar los pasos hechos para trasladar N a $T_\varepsilon(N)$ con movidas Δ_i , pero reemplazando $(\varepsilon, N, T_\varepsilon(N))$ por $(\varepsilon', T_\varepsilon^{n_0-1}(N), T(N))$, luego $T_\varepsilon^{n_0-1}(N)$ y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes y, así, N y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes. Note que cuando $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una traslación tal que $T(x) = x + ae_3$ con $a \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, lo recién mostrado nos dice que $T(N)$ y N son combinatoriamente equivalentes.

Paso 2: probaremos ahora el lema para el caso donde $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una traslación sobre el eje x , digamos, $T(w) = w + ae_1$, $\forall w \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. Considerando el isomorfismo $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $S(x, y, z) = (y, z, x)$, es claro que $S(N)$ y $S(T(N))$ son nudos poligonales. Sea $T' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T'(w) = w + ae_3$. Note que $S(T(N)) = \{(y, z, x + a) : (x, y, z) \in N\} = T'(S(N))$, entonces al ser T' una traslación sobre el eje z , por lo visto en el paso 1 obtenemos que $S(N)$ y $S(T(N))$ son combinatoriamente equivalentes. Como $S^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo, recordando el lema 2.1.18, S^{-1} manda 2-simplejos a 2-simplejos. Esto

quiere decir que las movidas $\Delta^{\pm 1}$ efectuadas para transformar $S(N)$ en $S(T(N))$, a partir de una secuencia de triángulos τ_1, \dots, τ_n , pueden seguirse fácilmente bajo S^{-1} para exhibir que N y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes, realizando movidas $\Delta^{\pm 1}$ sobre los triángulos $S^{-1}(\tau_1), \dots, S^{-1}(\tau_n)$. Un argumento similar demuestra que N y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes cuando se tiene la traslación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre el eje y , esta vez mediante el isomorfismo $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $S(x, y, z) = (x, z, y)$.

Paso 3: finalmente, si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una traslación arbitraria, podemos descomponerla en traslaciones T_x, T_y y T_z sobre el eje x, y y z , respectivamente, es decir, $T = T_x \circ T_y \circ T_z$. Aplicando sucesivamente el paso 1 y el paso 2, se prueba que N y $T(N)$ son combinatoriamente equivalentes. ■

Lema 3.3.6. *Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Si $\tau = \langle w_0, \dots, w_m \rangle \subset \partial\sigma$, entonces τ está contenido en alguna cara frontera de σ .*

Demostración. Procederemos por inducción sobre m . Para $m = 0$, el lema se cumple. Dado $m - 1 \geq 0$ para el cual el lema sea válido, mostraremos que también lo es para m . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\tau \setminus \langle w_m \rangle \subset \sigma \setminus \langle v_n \rangle$. Si $w_m \in \sigma \setminus \langle v_n \rangle$, por convexidad tendremos que $\tau = w_m \tau \setminus \langle w_m \rangle \subset \sigma \setminus \langle v_n \rangle$. Supongamos entonces que nos encontramos en el caso donde, renombrando de ser necesario, $w_m \in \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$, de modo que existen $\lambda_{mj} \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \lambda_{mj} = 1$ tales que $w_m = \sum_{j=1}^n \lambda_{mj} v_j$. Asimismo, para $i = 0, \dots, m - 1$, podemos hallar $\lambda_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij} = 1$ tales que $w_i = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij} v_j$. Sea $x \in \tau^\circ$, digamos, $x = \sum_{i=0}^m \mu_i w_i$ para algunos $\mu_i > 0$, $\sum_{i=0}^m \mu_i = 1$. Entonces

$$x = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \mu_i \lambda_{i0} \right) v_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^m \mu_i \lambda_{ij} \right) v_j + \mu_m \lambda_{mn} v_n \in \sigma.$$

Sin embargo, dado que $\tau \subset \partial\sigma$, debe ocurrir que alguno de los escalares en la suma debe ser cero:

- Si $\sum_{i=0}^{m-1} \mu_i \lambda_{i0} = 0$, dado que $\mu_i > 0$, entonces $\lambda_{i0} = 0$, lo cual quiere decir que $w_i \in \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$, $i = 0, \dots, m - 1$. En consecuencia, como $\sigma \setminus \langle v_0 \rangle$ es convexo, obtenemos que $\tau \subset \sigma \setminus \langle v_0 \rangle$.
- Si $\sum_{i=0}^m \mu_i \lambda_{ik} = 0$ para algún $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, entonces $\lambda_{ik} = 0$ y $w_i \in \sigma \setminus \langle v_k \rangle$, $i = 0, \dots, m$, luego $\tau \subset \sigma \setminus \langle v_k \rangle$.
- Si $\mu_m \lambda_{mn} = 0$, entonces $\lambda_{mn} = 0$, por lo que $w_m \in \sigma \setminus \langle v_n \rangle$ y así $\tau \subset \sigma \setminus \langle v_n \rangle$.

En cualquier caso, τ está contenido en alguna cara frontera de σ . ■

Proposición 3.3.7. *Sea $\langle u, v \rangle$ un segmento de un nudo poligonal N en $\partial\Delta^4$ y sea $D = \langle u, v, w \rangle \subset \partial\Delta^4$ tal que $N \cap D = \langle u, v \rangle$. Sea $N' = (N - \langle u, v \rangle) \cup \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$. Entonces existe una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ tal que su homeomorfismo final cumple $h_1(N) = N'$. En consecuencia, h_1 describe una movida Δ y h_1^{-1} efectúa una movida Δ^{-1} .*

Demostración. Primero, por el lema 3.3.6, $D \subset \sigma = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ para alguna cara frontera σ de Δ^4 .

Mostraremos que existe una 3-bola combinatoria $B \subset \partial\Delta^4$ tal que $(N - \langle u, v \rangle)^\circ \cap B = \{u, v\} = N \cap \partial B$ y un homeomorfismo PL $h : B \rightarrow B$ para el cual $h|_{\partial B}$ es la identidad y $h(\langle u, v \rangle) = \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$. Una vez probado esto, el teorema de Alexander-Tietze nos permitirá hallar una PL-isotopía de ambiente $H : B \times I \rightarrow B \times I$ cuyo homeomorfismo final es h , y extendiendo a la identidad tendremos la PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ deseada.

Caso I: $D - \{u, v\} \subset \sigma^\circ$. Consideremos $P = \text{aff}(D) \cap \sigma$. Sean $l, l' \neq \langle u, v \rangle$ los segmentos de N que tienen a u y v como vértices, respectivamente. Observe que $\text{aff}(u, v)$ divide a $\text{aff}(D)$ en dos semiplanos P_1 y P_2 , siendo P_1 aquel que contiene a D . Para $i = 1, 2$, escojamos $q_i \in (P_i \cap P) - D$ tal que se tenga el simplejo $\langle u, v, q_i \rangle$ y de manera que $B' = \langle u, v, q_1 \rangle \cup \langle u, v, q_2 \rangle$ sea una 2-bola combinatoria (véase el lema 3.2.8), con $D \subset \langle u, q_1, v \rangle$, $D \cap \partial B' = \{u, v\}$, $l \cap B' = \{u\}$ y $l' \cap B' = \{v\}$, como aparece en la figura 30.

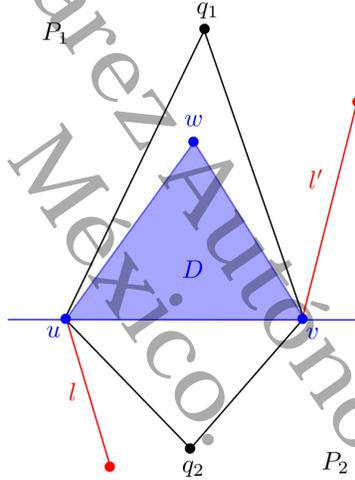


Figura 30: Construcción de una 2-bola combinatoria adecuada para D .

Por la convexidad de σ , se tiene que $B' \subset \sigma$. Ahora, sea $C' = \text{Cl}(N - (l \cup l' \cup \langle u, v \rangle)) \cap B'$. Si ocurre que $C' \neq \emptyset$, como $A = \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$ es compacto, C' es cerrado y $A \cap C' = \emptyset$, entonces la proposición 1.1.24 garantiza que $d(A, C') > 0$. Sea $p \in \langle u, v \rangle^\circ$ y escojamos $q'_1 \in R(p, w) \cap \langle u, v, q_1 \rangle$ tal que $q'_1 \notin \langle p, w \rangle$ y $0 < \delta' := \|q'_1 - w\| < d(A, C')$. Por el lema 3.2.12(2), $\text{star}(w, D) \subset \langle u, q'_1, v \rangle^\circ$. Probaremos que $\langle u, q'_1, v \rangle \cap C' = \emptyset$. Dado que $D \cap C' = \emptyset$, basta con mostrar que $[\langle u, q'_1, w \rangle \cup \langle w, q'_1, v \rangle - (\langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle)] \cap C' = \emptyset$. Observe que, para cualquier $x \in [w, q'_1]$, se cumple que $\|x - w\| \leq \delta'$, por lo que $x \notin C'$, sino se contradiría que $d(A, C')$ es el ínfimo de las distancias entre elementos de A y C' . Sea $y \in \langle u, w \rangle^\circ$, digamos, $y = \lambda u + (1 - \lambda)w$ para algún $\lambda \in (0, 1)$. Entonces $y' := \lambda u + (1 - \lambda)q'_1 = y + (1 - \lambda)(q'_1 - w) \in \vec{R}(y, q'_1 - w) \cap \langle u, q'_1 \rangle$ y de hecho y' es el único elemento en esta intersección, ya que $y \in \langle u, q'_1, v \rangle^\circ$ (ver corolario 1.6.11(3)). Si $\|y' - y\| = \delta'$, entonces existe $\gamma \neq 0$ tal que $\gamma(q'_1 - u) = w - u$, y si $\|y' - y\| > \delta'$, entonces $\text{aff}(u, q'_1) \cap \text{aff}(u, w) = \{z_0\}$ con $z_0 \neq u$; ambas situaciones son absurdas, de modo que $\|y' - y\| < \delta'$ (figura 31).

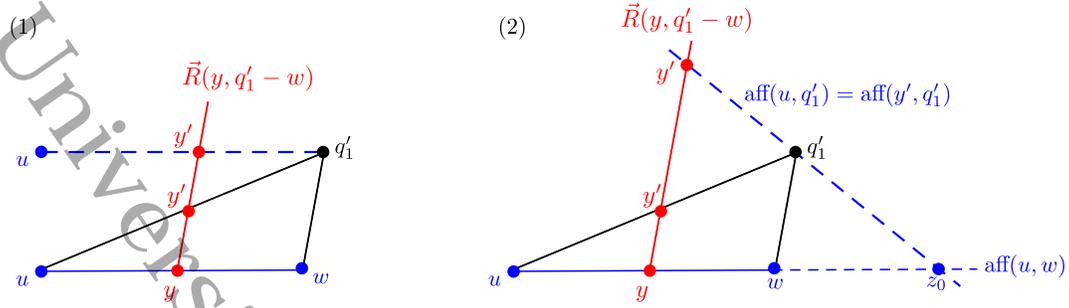


Figura 31: Situaciones hipotéticas donde (1) $\|y' - y\| = \delta'$ y (2) $\|y' - y\| > \delta'$.

En consecuencia, para cada $x \in [y, y']$ ocurre que $d(y, x) \leq \|y' - y\| < \delta'$. Esto prueba que $(\langle u, q'_1, w \rangle - \langle u, w \rangle) \cap C' = \emptyset$. Un argumento similar muestra que $(\langle w, q'_1, v \rangle - \langle w, v \rangle) \cap C' = \emptyset$. Por ende, $\langle u, q'_1, v \rangle \cap C' = \emptyset$. Análogamente, podemos encontrar $q'_2 \in \vec{R}(p, p-w) \cap \langle u, v, q_2 \rangle$ tal que $\langle u, q'_2, v \rangle \cap C' = \emptyset$. Es posible escoger q'_2 de manera que $\langle u, v, q'_1 \rangle \cup \langle u, v, q'_2 \rangle$ sea una 2-bola combinatoria convexa (véase el lema 3.2.13). Así, reemplazando (q_1, q_2) por (q'_1, q'_2) , podemos suponer, sin perder generalidad, que B' es convexa, $B' \cap N = \langle u, v \rangle$ y $\partial B' \cap N = \{u, v\}$.

Ahora consideremos el subespacio afín tridimensional $E = \text{aff}(\sigma)$ que contiene al plano $\text{aff}(B') = \text{aff}(D)$. Esta vez $\text{aff}(D)$ divide a E en dos semiespacios, H_1 y H_2 , donde $\text{aff}(D) \subset H_1 \cap H_2$. Seleccionemos $r_i \in (H_i - \text{aff}(D)) \cap \sigma$, $i = 1, 2$, de tal manera que, denotando $B = r_1 B' \cup r_2 B'$, se cumpla $l \cap B = \{u\}$ y $l' \cap B = \{v\}$. Observe que $B \subset \sigma$. Sea $C = \text{Cl}(N - (l \cup l' \cup \langle u, v \rangle)) \cap B$. En caso de que $C \neq \emptyset$, apliquemos el siguiente procedimiento, de cierto modo parecido al del párrafo anterior. Tenemos que $d(B', C) > 0$. Sea $Q \in (B')^\circ$ y sea $R \subset H_1$ el rayo desde Q que es ortogonal a $\text{aff}(D)$, escojamos $r'_1 \in r_1 B' \cap R$ tal que $0 < \delta := \|r'_1 - Q\| < d(B', C)$. Queremos exhibir que $r'_1 B' \cap C = \emptyset$. Consideremos $F = \{ty + (1-t)(y + r'_1 - Q) : t \in I, y \in B'\}$. Dado $y \in B'$ y $x \in \langle y, y + r'_1 - Q \rangle$, observemos que $\|y - x\| \leq \|y - (y + r'_1 - Q)\| = \delta$, lo cual garantiza que $x \notin C$. Así, $F \cap C = \emptyset$. Notando que $F = \{y + t(r'_1 - Q) : y \in B', t \in I\}$, dado que B' y I son convexos, puede verificarse que F es convexo (figura 32). Por lo anterior y debido a que $r'_1 \in F$ y $B' \subset F$, se sigue que $r'_1 B' \subset F$, luego $r'_1 B' \cap C = \emptyset$.

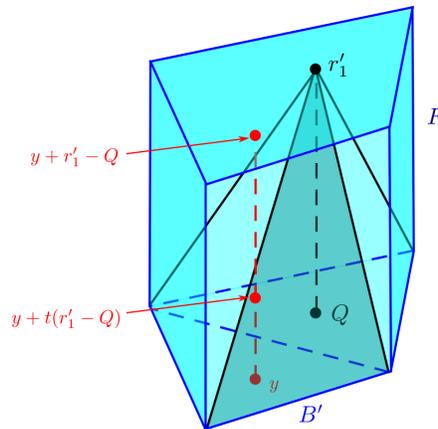


Figura 32: Ilustración del conjunto F .

De la misma manera, podemos hallar $r'_2 \in r_2 B' \cap R$, esta vez con $R \subset H_2$, para que se cumpla $r'_2 B' \cap C = \emptyset$. Reemplazando (r_1, r_2) por (r'_1, r'_2) , se asume sin perder generalidad que $B \cap N = \langle u, v \rangle$ y $\text{Fr}_E(B) \cap N = \{u, v\}$. También se satisface que $D - \{u, v\} \subset \text{Int}_E(B)$.

Existe una 3-bola combinatoria B'' y un homeomorfismo PL $f : B \rightarrow B''$ tal que $f|_D = \text{id}_D$ y, en consecuencia, $D - \{u, v\} \subset (B'')^\circ$. En efecto, recordando que $D \subset \langle u, q_1, v \rangle$, tomemos $q'_2 \in R(q_1, v) - \langle q_1, v \rangle$ de modo que el 2-simplejo $\langle u, q_1, q'_2 \rangle$ contenga a $\langle u, q_1, v \rangle$ y en cuyo interior se halle $D - \{u, v\}$. Entonces $\langle u, q_1, q'_2, r_1 \rangle \cup \langle u, q_1, q'_2, r_2 \rangle$ es una 3-bola combinatoria (lema 3.2.8) contenida en E . Gracias al lema 3.2.13, podemos hallar $r'_2 \in \langle u, q_1, q'_2, r_2 \rangle$ tal que $B'' = \langle u, q_1, q'_2, r_1 \rangle \cup \langle u, q_1, q'_2, r'_2 \rangle \subset E$ es una 3-bola combinatoria convexa y, usando el lema 3.2.8, puede verse que $D - \{u, v\} \subset \langle u, q_1, q'_2 \rangle^\circ \subset (B'')^\circ$. El homeomorfismo PL $f : B \rightarrow B''$ que buscamos es aquel que se obtiene del homeomorfismo simplicial que fija u, q_1, v, r_1 , y para el cual $f(q_2) = q'_2$ y $f(r_2) = r'_2$ (véase la figura 33). Esto también nos dice que B es una 3-bola combinatoria.

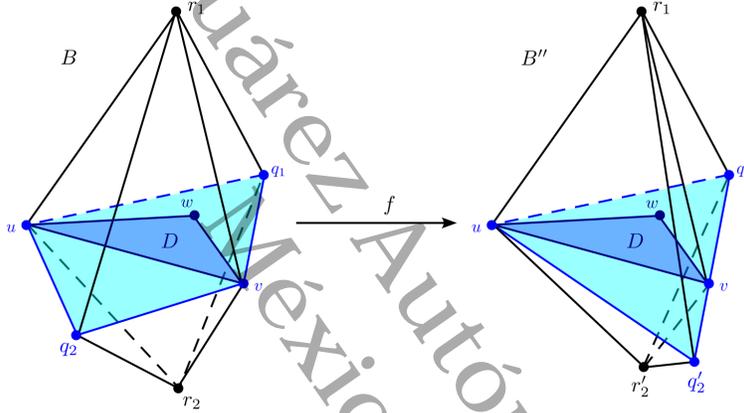


Figura 33: Homeomorfismo PL $f : B \rightarrow B''$ que es la identidad en D .

Siguiendo lo mostrado en el lema 3.2.9, puesto que B'' es convexo y $w \in (B'')^\circ$, escogiendo cualquier $w' \in \langle u, v \rangle^\circ \subset (B'')^\circ$, existe un homeomorfismo PL $g : B'' \rightarrow B''$ tal que $g(w') = w$ y $g|_{\partial B''} = \text{id}_{\partial B''}$, para el cual $g(\langle u, v \rangle) = \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$. Así, $h = f^{-1} \circ g \circ f : B \rightarrow B$ es un homeomorfismo PL que fija ∂B y $h(\langle u, v \rangle) = \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$, como queríamos.

En los siguientes casos probaremos que existen una 3-bola combinatoria $B'' \subset \partial \Delta^4$, un 3-simplejo $\sigma' \subset E$ y un homeomorfismo PL $g : B'' \rightarrow \sigma'$ tal que $g|_D = \text{id}_D$ y $D - \{u, v\} \subset (\sigma')^\circ$. Entonces aplicando el procedimiento visto en el caso I, podremos encontrar una 3-bola combinatoria $B' \subset \sigma'$ tal que $(g(N \cap B'') - \langle u, v \rangle^\circ) \cap B' = \{u, v\} = g(N \cap B'') \cap \partial B'$ y un homeomorfismo PL $h' : B' \rightarrow B'$ para el cual $h'|_{\partial B'}$ es la identidad y $h'(\langle u, v \rangle) = \langle u, w \rangle \cup \langle w, v \rangle$. En consecuencia, obtendremos que $B = g^{-1}(B') \subset \partial \Delta^4$ es una 3-bola combinatoria y $h = (g^{-1}|_{B'}) \circ h' \circ (g|_B) : B \rightarrow B$ es un homeomorfismo PL con las características deseadas.

Caso II: $w \in \partial \sigma$ y $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $\tau = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es una cara frontera de σ que contiene a w y para la cual $w \in \text{star}(v_1, \tau)$. Escribamos $\Delta^4 = v_4 \sigma$, donde $v_4 \in \text{vert}(\Delta^4) - \text{vert}(\sigma)$. Mostraremos que la unión B'' de las caras frontera de Δ^4 que tienen a v_1 como vértice es la 3-bola combinatoria en $\partial \Delta^4$ que estamos buscando.

Sea $p_0 \in \langle v_0, v_2 \rangle^\circ$ y sea $w'_4 \in R(p_0, v_1) - \sigma$. Del lema 3.2.12(2) tenemos que $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle \subset \langle v_0, w'_4, v_2 \rangle$ y $\text{star}(v_1, \langle v_0, v_1, v_2 \rangle) \subset \langle v_0, w'_4, v_2 \rangle^\circ$. Escojamos ahora $w_4 \in R(v_3, w'_4) - \langle v_3, w'_4 \rangle$. No es difícil convencerse que v_0, v_2, v_3, w_4 son afinmente independientes y que, denotando $\sigma' = \langle v_0, v_2, v_3, w_4 \rangle \subset E$, se cumple $\text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$ (figura 34). Además, $\sigma' = \langle v_0, v_1, v_3, w_4 \rangle \cup \langle v_1, v_2, v_3, w_4 \rangle \cup \sigma \cup \langle v_0, v_1, v_2, w_4 \rangle$.

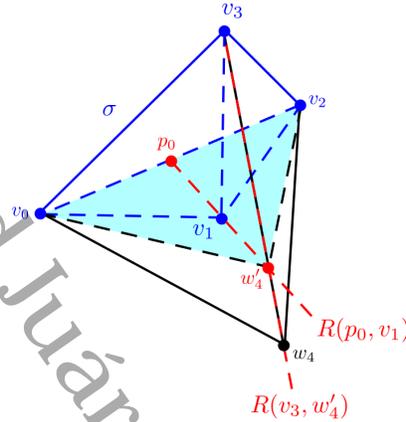


Figura 34: Construcción del 3-simplejo $\sigma' \subset E$ tal que $\text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$.

Definamos el homeomorfismo simplicial $g : B'' \rightarrow \sigma'$ tal que $g(v_i) = v_i, \forall i \neq 4$ y $g(v_4) = w_4$, el cual manda las caras frontera de $\partial\Delta^4$ contenidas en B'' a 3-simplejos en una subdivisión de $K(\sigma')$, tal como se ilustra en la figura 35 (considere que los 3-simplejos que forman B'' están en subespacios afines distintos). Podemos ver que g está bien definido porque los 3-simplejos de B'' se intersecan en las caras fronteras del mismo modo que lo hacen los simplejos que constituyen σ' .

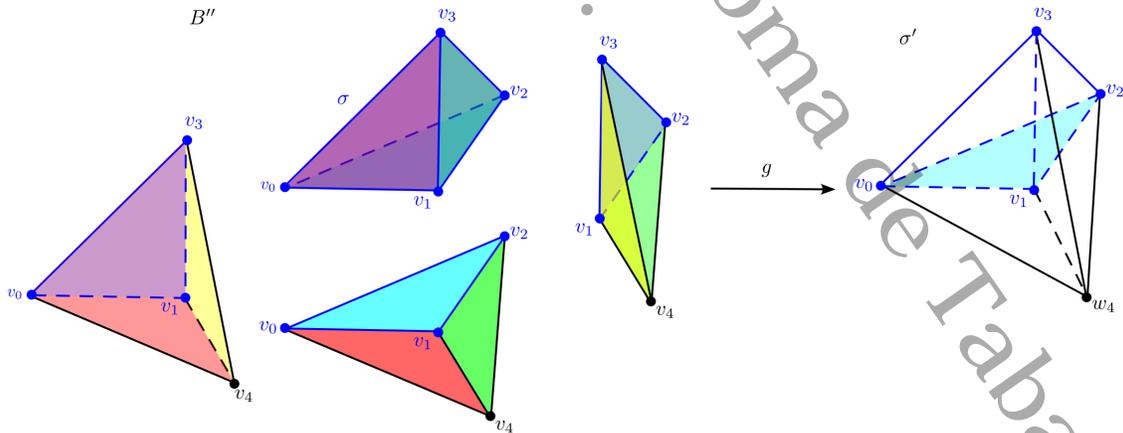


Figura 35: Visualización del homeomorfismo simplicial $g : B'' \rightarrow \sigma'$.

Debido a que $g|_\sigma$ es la identidad y $D \subset \sigma$, entonces $g|_D$ es la identidad. Ya que $w \in \text{star}(v_1, \tau) \subset \text{star}(v_1, \sigma)$ y $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ \subset \text{star}(v_1, \sigma)$, recordando que $\text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$, obtenemos que $D - \{u, v\} \subset (\sigma')^\circ$, como queríamos.

Caso III. $w \in \partial\sigma$ y $\langle u, v \rangle \subset \partial\sigma$. De nuevo, podemos asumir que $\tau = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es una cara frontera de σ para la cual $w \in \text{star}(v_1, \tau)$ y como en el caso II, escribamos $\Delta^4 = v_4\sigma$.

(1) Asumamos que $D \subset \tau$. Si $\langle u, v \rangle \not\subset \langle v_3, v_2 \rangle$, entonces tomamos B'', σ' y g como en II, ya que $D - \{v_3, v_2\} \subset (\sigma')^\circ$. Si ocurre que $\langle u, v \rangle \subset \langle v_3, v_2 \rangle$, consideremos nuevamente B'', σ' y g como en II, pero hagamos algunas modificaciones acordes. Sean $p_0 \in \langle v_0, v_3, w_4 \rangle^\circ$ y $w_2 \in R(p_0, v_2) - \langle p_0, v_2 \rangle$. Entonces v_0, w_2, v_3, w_4 son afinmente independientes y $\langle v_0, v_2, v_3, w_4 \rangle \subset \sigma'' := \langle v_0, w_2, v_3, w_4 \rangle$. Además, $\text{star}(v_2, \sigma') \subset (\sigma'')^\circ$ y, en particular, $\langle v_3, v_2 \rangle^\circ \subset (\sigma'')^\circ$ (figura 36).

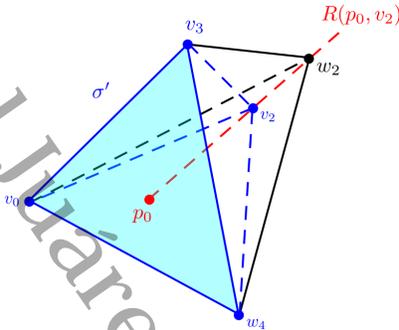


Figura 36: Construcción del 3-simplejo $\sigma'' \subset E$ tal que $\text{star}(v_2, \sigma') \subset (\sigma'')^\circ$.

Escojamos $v'_2 \in \langle v_0, v_2, v_3, v_4 \rangle^\circ$ y sea $B''' = B'' \cup \langle v'_2, v_0, v_2, v_3 \rangle \cup \langle v'_2, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Definamos $g' : B''' \rightarrow \sigma''$ como el homeomorfismo simplicial tal que $g'|_{B''} = g$ y $g(v'_2) = w_2$ (véase la figura 37), el cual envía los 3-simplejos contenidos en B''' a 3-simplejos en una subdivisión de $K(\sigma'')$. Así, $g'|_D = g|_D$ es la identidad y se garantiza que $D - \{v_3\} \subset (\sigma'')^\circ$. Finalmente, reemplazamos (B'', σ', g) por (B''', σ'', g') .

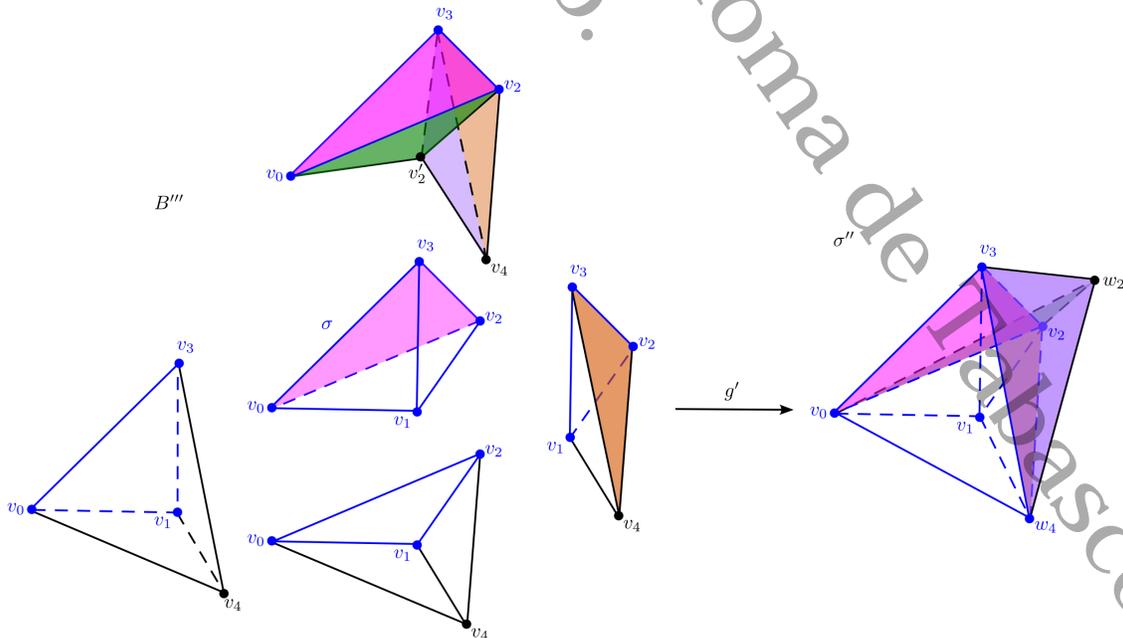


Figura 37: Visualización del homeomorfismo simplicial $g' : B''' \rightarrow \sigma''$.

(2) Esta vez supongamos que $u \in \tau$ y $v \notin \tau$ (el caso donde $v \in \tau$ y $u \notin \tau$ es análogo). Puesto que $w \in \text{star}(v_1, \tau)$, para todo $x \in D - \langle u, v \rangle$, al expresar x como una combinación convexa de los vértices de σ , la coordenada baricéntrica que corresponde a v_1 es positiva, luego x está en el interior de una cara de σ que tiene a v_1 como vértice, esto es, $x \in \text{star}(v_1, \sigma)$. Esto implica que $D - \langle u, v \rangle \subset \text{star}(v_1, \sigma)$. Ahora, si $v \in \text{star}(v_1, \sigma) \cap \partial\sigma$, entonces B'' , σ' y g dados como en II nos sirven porque $\text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$, luego la convexidad de $(\sigma')^\circ$ garantiza que $D - \{v_3\} \subset (\sigma')^\circ$. Asumamos que $v \in (\sigma - \text{star}(v_1, \sigma)) \cap \partial\sigma = \langle v_0, v_2, v_3 \rangle$. Si $u \notin \langle v_2, v_3 \rangle$, entonces $w, u \in \text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$ y, en vista de que $v \in \langle v_0, v_2, v_3 \rangle \subset \partial\sigma'$, dados $x \in \langle u, w \rangle$ y $y \in \langle x, v \rangle$ con $y \neq v$, se cumple que $y \in (\sigma')^\circ$. En consecuencia, $D - \{v\} \subset (\sigma')^\circ$, por lo que B'' , σ' y g siguen sirviendo. Por su parte, cuando $u \in \langle v_2, v_3 \rangle$ se tiene que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \langle v_0, v_2, v_3 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \subset \text{star}(v_0, \sigma) \cap \partial\sigma$, debido a que $v \notin \tau$ implica que $v \notin \langle v_2, v_3 \rangle$. Todavía en el caso donde $\langle u, v \rangle \not\subset \langle v_0, v_3 \rangle$ podemos usar B''' , σ'' y g' como en (1), ya que $\langle v_0, v_2, v_3 \rangle - \langle v_0, v_3 \rangle \subset (\sigma'')^\circ$ y $(\sigma')^\circ \subset (\sigma'')^\circ$, que implica $D - \langle u, v \rangle \subset (\sigma'')^\circ$. La situación restante consiste en que $\langle u, v \rangle \subset \langle v_0, v_3 \rangle$, aquí se construyen B''' , σ'' y g' de forma parecida al procedimiento descrito en (1), salvo que ahora escogeremos $p_0 \in \langle v_2, v_3, w_4 \rangle^\circ$ y $w_0 \in R(p_0, v_0) - \langle p_0, v_0 \rangle$. Nombrando en esta ocasión $\sigma'' = \langle w_0, v_2, v_3, w_4 \rangle$, se tiene que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \langle v_0, v_3 \rangle^\circ \subset \text{star}(v_0, \sigma') \subset (\sigma'')^\circ$ y de nuevo $(\sigma')^\circ \subset (\sigma'')^\circ$, luego $D - \{u, v\} \subset (\sigma'')^\circ$. Se toman $v'_0 \in \langle v_0, v_2, v_3, v_4 \rangle^\circ$ y $B''' = B'' \cup \langle v'_0, v_0, v_2, v_3 \rangle \cup \langle v'_0, v_0, v_3, v_4 \rangle$, y, en lugar de $g'(v'_2) = w_2$, se define $g'(v'_0) = w_0$.

(3) Supongamos que los tres vértices de D están en caras frontera de σ distintas. Note que ningún vértice de D puede ser vértice de σ , de otro modo, los dos vértices de D restantes solamente podrían hallarse dentro de una misma cara frontera de σ , lo cual dejaría a uno de ellos sin posibilidad de estar en una cara frontera. Entonces cada vértice de D está en el interior de al menos un 1-simplejo de $K(\partial\sigma)$. A partir de lo anterior, probaremos que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$ y recordando que $D - \langle u, v \rangle \subset \text{star}(v_1, \sigma)$, resultará $D - \{u, v\} \subset \text{star}(v_1, \sigma)$. Si u y v están en el interior de caras fronteras de σ distintas, es claro que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$. Por otro lado, si w se encuentra en el interior de una 1-cara, ya que $w \in \text{star}(v_1, \tau)$, obtenemos $w \in \langle v_1, v_2 \rangle^\circ \cup \langle v_1, v_3 \rangle^\circ$. Cuando $w \in \langle v_1, v_2 \rangle^\circ$, se tiene que $w \in \tau \cup \sigma \setminus \langle v_3 \rangle$, por lo que alguno de los otros dos vértices de D , digamos u , sólo puede pertenecer a $(\sigma \setminus \langle v_1 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle) - \langle v_0, v_2 \rangle$ o $(\sigma \setminus \langle v_2 \rangle - \langle v_1, v_3 \rangle) - \langle v_0, v_1 \rangle$. Debido a esto, u debe estar en el interior de $\sigma \setminus \langle v_1 \rangle$ o de $\sigma \setminus \langle v_2 \rangle$, de lo contrario, u está en el interior de la 1-cara de estos simplejos que no forman parte de τ ni de $\sigma \setminus \langle v_3 \rangle$ (o sea, $\langle v_0, v_3 \rangle$), pero esto implica descartar las dos caras fronteras restantes de σ en las cuales se podría hallar v . Un argumento similar se sigue cuando se reemplaza u por v y también para $w \in \langle v_1, v_3 \rangle^\circ$. Lo anterior muestra que, si w está en el interior de una 1-cara de τ , alguno de los otros vértices de D debe estar en el interior de una cara frontera de σ , en cuyo caso puede verse que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$.

En otro orden de ideas, suponiendo que $w \in \tau^\circ$ y u está en el interior de una 1-cara γ de σ , con $\gamma \not\subset \tau$, se tiene que v no puede pertenecer a ninguna de las dos caras frontera de σ que se intersecan en γ , de modo que v se encuentra en la cara frontera η restante de σ , pero ya que cada cara frontera de η es también cara de otra 2-cara de σ , obtenemos que $v \in \eta^\circ$. Lo mismo pasa cuando u se sustituye por v . Así, nuevamente se cumple que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$. Por último, si $w \in \tau^\circ$ y u o v está en el interior de una cara frontera η de σ , puede verse que el vértice de D restante debe estar en el interior de la 1-cara que no está contenida ni en τ ni en η , o bien en el interior de una cara frontera de σ distinta de τ y η ; pero en ambas

situaciones se cumple que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \sigma^\circ$.

En consecuencia, cuando los tres vértices de D están en caras frontera de σ distintas, podemos usar B'', σ' y g de II, gracias a que hemos demostrado que $D - \{u, v\} \subset \text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$.

(4) Ahora partamos del supuesto que u y v están en la misma cara frontera de σ , pero $u, v \notin \tau$. Si $\langle u, v \rangle \subset \text{star}(v_1, \sigma) - \tau$, entonces aún $\sigma' = \langle v_0, v_2, v_3, w_4 \rangle$ tiene la ventaja que $D \subset (\sigma')^\circ$. Falta analizar cuando $\langle u, v \rangle \subset \text{star}(v_0, \langle v_0, v_2, v_3 \rangle)$, pero para $\sigma'' = \langle w_0, v_2, v_3, w_4 \rangle$ descrito en (2), se cumple que $D \subset (\sigma'')^\circ$, esto se debe a que $\text{star}(v_0, \langle v_0, v_2, v_3 \rangle) \subset \text{star}(v_0, \sigma') \subset (\sigma'')^\circ$.

Caso IV: $w \in \sigma^\circ$ y $\langle u, v \rangle \subset \partial\sigma$. Debido al lema 3.3.6, podemos suponer que $\tau = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ contiene a $\langle u, v \rangle$. También se puede asumir que $\langle u, v \rangle^\circ \subset \text{star}(v_1, \tau)$. Entonces basta con considerar B'', σ' y g como en II gracias a que $D - \{u, v\} \subset \text{star}(v_1, \sigma) \subset (\sigma')^\circ$. ■

3.4. Vecindades regulares

En esta sección presentamos las nociones básicas y algunos resultados relativos a la teoría de vecindades regulares, basado principalmente en las cuatro primeras secciones del capítulo 2 de Hudson (1969) [13]. Sin embargo, un enfoque más actualizado puede hallarse en el capítulo 3 de Rourke y Sanderson (1982) [34]. Específicamente, se ha extraído de [34] la definición 3.4.1 y el lema 3.4.2. Para un estudio más detallado de los resultados que aquí se presentan, se sugiere consultar las referencias previas. Por otro lado, del artículo de Hudson y Zeeman (1964) [14] se deben los conceptos de la definición 3.4.4, complementando con las establecidas en [13].

Definición 3.4.1. Suponga que $L \subset K$ son complejos simpliciales. Diremos que L es **completo** en K , si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (1) Definiendo la función simplicial $f_L : |K| \rightarrow I$, estableciendo $f_L(v) = 0$ para $v \in \text{vert}(L)$ y $f_L(v) = 1$ para otros vértices, entonces $|L| = f_L^{-1}(0)$.
- (2) Cada simplejo de K interseca a $|L|$ en una cara, posiblemente vacía.
- (3) Ningún simplejo de $K - L$ interseca a $|L|$ en toda su frontera, esto es, si $\sigma \in K - L$, entonces existe una cara propia $\tau < \sigma$ tal que $\tau \in K - L$.

Lema 3.4.2. Si $L \subset K$, entonces existe $K' \triangleleft K$ tal que L es completo en K' .

Demostración. Para cada simplejo $\sigma \in K - L$ tal que $\partial\sigma \subset |L|$, seleccionemos cualquier punto interior suyo y, posteriormente, formemos K' estrellando sucesivamente K en los puntos escogidos. Notemos que $L \subset K'$. Ahora bien, sea $\sigma \in K' - L$. Mostraremos que σ no interseca a $|L|$ en toda su frontera. Por contradicción, supongamos que $\partial\sigma \subset |L|$. Como $K' \triangleleft K$, tenemos que existe $\rho \in K$ tal que $\sigma \subset \rho$. En particular, $\partial\sigma \subset \rho$. Entonces, para cada cara frontera τ de σ , se cumple que $\tau \cap \rho = \tau \leq \rho$. Esto significa que todos los vértices de σ son también vértices de ρ , es decir, $\sigma \leq \rho$, por lo que $\sigma \in K$. Por ende, $\sigma \in K - L$ y como también $\partial\sigma \subset |L|$, se sigue que K' tiene una subdivisión de $K(\sigma)$, distinta de ésta, ya que σ ha sido estrellado en un punto interior suyo, lo cual es contradictorio porque $K(\sigma) \subset K'$.

Lo anterior implica que ningún simplejo de $K' - L$ interseca a L en toda su frontera y, por consiguiente, L es completo en K' . ■

Definición 3.4.3. Suponga que L es un subcomplejo de K . Definimos la **vecindad simplicial cerrada de L en K** como $N(L, K) := \bigcup_{v \in \text{vert}(L)} \text{St}(v, K)$.

Definición 3.4.4. Una **variedad PL de dimensión n** , o simplemente una **n -variedad PL**, es un poliedro en el cual cada punto tiene una vecindad cerrada que es una n -bola combinatoria.

Por otro lado, un complejo simplicial K se dice que es una **n -variedad combinatoria**, si para cada vértice v de K se cumple que $|\text{St}(v, K)|$ es una n -bola combinatoria.

Naturalmente, una n -variedad PL es una n -variedad topológica. Además, es sabido que $|K|$ es una n -variedad PL si y sólo si K es una n -variedad combinatoria (véase el capítulo 1, sección 5 de Hudson (1969) [13]). De hecho, cuando $|K|$ es conexo, se cumple la siguiente:

Proposición 3.4.5. *Sea K una n -variedad combinatoria, $n \in \mathbb{N}$. Si $|K|$ es conexo y K no es el complejo simplicial de un n -simplejo y sus caras, entonces K es un n -complejo fuertemente conexo.*

Demostración. Para cada $v \in \text{vert}(K)$ se tiene que $|\text{St}(v, K)|$ es una n -bola combinatoria, luego por la proposición 3.2.2, $\text{St}(v, K)$ es un n -complejo puro. Ya que cada $\text{St}(v, K)$ es un subcomplejo de K y $|K| = \left| \bigcup_{v \in \text{vert}(K)} \text{St}(v, K) \right|$, por el lema 2.4.10 obtenemos que $K = \bigcup_{v \in \text{vert}(K)} \text{St}(v, K)$. Lo anterior nos dice que K es un n -complejo puro. Ahora bien, sean $\tau_1, \tau_2 \in K$ un par de n -simplejos distintos. Escojamos $v_1 \in \text{vert}(\tau_1)$ y $v_2 \in \text{vert}(\tau_2)$. Puesto que $|K|$ es conexo, gracias a la proposición 2.3.8, podemos hallar $w_1, \dots, w_m \in \text{vert}(K)$ tales que $w_1 = v_1$, $w_m = v_2$ y $\langle w_i, w_{i+1} \rangle \in K$, $i = 1, \dots, m-1$. Fijando i , observemos que existen n -simplejos $\sigma_{i-1}, \sigma_i \in \text{St}(w_i, K)$ tales que $\langle w_{i-1}, w_i \rangle \leq \sigma_{i-1}$ y $\langle w_i, w_{i+1} \rangle \leq \sigma_i$. Si $\text{St}(w_i, K)$ tiene un sólo n -simplejo principal, entonces $\sigma_{i-1} = \sigma_i$. De lo contrario, la proposición 3.2.2 garantiza que $\text{St}(w_i, K)$ es fuertemente conexo, por lo que $\sigma_{i-1} \sim \sigma_i$. Debido a lo anterior, podemos hallar n -simplejos $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in K$ tales que $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_r = \tau_2$ y $\sigma_1 \sim \dots \sim \sigma_r$. La conclusión es que K es fuertemente conexo. ■

Ejemplo 3.4.6. Note que si $v \in \text{vert}(\Delta^4)$, entonces $|\text{St}(v, \Sigma^3)|$ es una 3-bola combinatoria y, por ende, Σ^3 es una 3-variedad combinatoria. Esto se consigue aplicando un procedimiento similar al hecho en el caso II de la demostración de la proposición 3.3.7, para cada vértice de Δ^4 . En consecuencia, $\partial\Delta^4$ es una 3-variedad PL. Una idea parecida funciona para exhibir que Σ^1 es una 1-variedad combinatoria y, por lo tanto, $\partial\Delta^2$ es una 1-variedad PL.

Definición 3.4.7. Suponga que X es un poliedro compacto y M una variedad PL con $X \subset M$. Sean $L \subset K$ complejos simpliciales tales que $|K| = M$ y $|L| = X$ con L completo en K . Entonces $\mathcal{N} = |N(L^{(1)}, K^{(1)})|$ se dice que es una **vecindad derivada de X en M** , donde $L^{(1)} \subset K^{(1)}$ son primeros derivados de $L \subset K$.

Lema 3.4.8. *Sea L un subcomplejo completo de K . Suponga que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existen primeros derivados $L^{(1)} \subset K^{(1)}$ de $L \subset K$ tales que $f_L^{-1}([0, \varepsilon]) = |N(L^{(1)}, K^{(1)})|$.*

Demostración. Sea $K^{(1)}$ un primer derivado obtenido de K estrellando cada simplejo σ en $x_\sigma \in \sigma^\circ$, en orden de dimensión decreciente, escogiendo $x_\sigma \in f_L^{-1}(\varepsilon)$ siempre que $\sigma^\circ \cap f_L^{-1}(\varepsilon) \neq \emptyset$. Tenemos que $K^{(1)}$ induce un primer derivado $L^{(1)} \subset K^{(1)}$ de L . Mostraremos que $|N(L^{(1)}, K^{(1)})| = f_L^{-1}([0, \varepsilon])$.

Sea $\sigma \in N(L^{(1)}, K^{(1)})$ principal. Ya que también $\sigma \in K^{(1)}$, debido a la proposición 2.4.8 existen $\sigma_1 < \dots < \sigma_r$ simplejos en K tales que $\sigma = \langle x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_r} \rangle$. De hecho, recordando que $N(L^{(1)}, K^{(1)}) = \bigcup_{v \in \text{vert}(L^{(1)})} \text{St}(v, K^{(1)})$, por ser σ principal se sigue que existe algún i tal que $x_{\sigma_i} \in L^{(1)}$ y, entonces, σ_i interseca a $|L|$ en x_{σ_i} . Dado que L es completo en K , ocurre que $\sigma_i \cap |L| \leq \sigma_i$, pero ya que $x_{\sigma_i} \in \sigma_i^\circ$, obtenemos $\sigma_i \cap |L| = \sigma_i$ y, en consecuencia, $\sigma_i \in L$. Escojamos i tan grande como sea posible con $\sigma_i \in L$. Para cada $j < i$, debido a que $\sigma_j < \sigma_i$ implica que $\sigma_j \in L$, ocurre que cada vértice v de σ_j es vértice de L , es decir, $f_L(v) = 0$ para todo $v \in \text{vert}(\sigma_j)$ y, al ser x_{σ_j} una combinación afín de los vértices de σ_j , se tiene que $f_L(x_{\sigma_j}) = 0$ por la linealidad de f_L sobre simplejos de K . Por otro lado, para cada $i+1 \leq j \leq r$, se tiene que $\sigma_j \in K - L$ y $\sigma_i \subset \sigma_j \cap |L|$, entonces al ser L completo en K se cumple que existe una cara propia de σ_j en $K - L$, es decir, σ_j tiene vértices que no pertenecen a L . Lo anterior nos dice que $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_r$ tienen vértices cuyos valores bajo f_L son 1. Sea $i < s \leq r$. Probaremos que $f_L^{-1}(\varepsilon) \cap \sigma_s^\circ \neq \emptyset$. Dado que $\sigma_i < \sigma_s$, $\sigma_i \in L$ y $\sigma_s \notin L$, podemos escribir $\sigma_i = \langle v_0, \dots, v_{n_i} \rangle$ y $\sigma_s = \langle v_0, \dots, v_{n_i}, v_{n_i+1}, \dots, v_{n_s} \rangle$, con $n_i < n_s$ y podemos asumir que existe $t \geq n_i + 1$ tal que $f_L(v_u) = 1$, para todo $u \geq t$. Como $0 < \varepsilon < 1$, sean $\lambda_j := \frac{1-\varepsilon}{t} > 0$, para $j = 0, \dots, t-1$; y $\lambda_j := \frac{\varepsilon}{n_s - t + 1} > 0$, $j = t, \dots, n_s$. De este modo, $x := \sum_{j=0}^{n_s} \lambda_j v_j \in \sigma_s^\circ$ y se verifica que $f_L(x) = \sum_{j=t}^{n_s} \lambda_j = \varepsilon$. Por lo tanto, $f_L^{-1}(\varepsilon) \cap \sigma_s^\circ \neq \emptyset$. Así, para cada $i < s \leq r$, se escogió $x_{\sigma_s} \in \sigma_s^\circ$ tal que $f_L(x_{\sigma_s}) = \varepsilon$. Debido a esto, si $x \in \sigma$, existen $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$ tales que $x = \sum_{j=1}^r \lambda_j x_{\sigma_j}$ y entonces $0 \leq f_L(x) = \sum_{j=i+1}^r \lambda_j \varepsilon = \varepsilon \left(\sum_{j=i+1}^r \lambda_j \right) \leq \varepsilon$. Luego $\sigma \subset f_L^{-1}([0, \varepsilon])$. Por ende, $|N(L^{(1)}, K^{(1)})| \subset f_L^{-1}([0, \varepsilon])$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in f_L^{-1}([0, \varepsilon])$. Observe que, para cualquier $\sigma \in K$, como $x_\sigma \in \sigma^\circ$ y L es completo en K , se tiene que $f_L(x_\sigma) \in \{0, 1, \varepsilon\}$:

- (1) $f_L(x_\sigma) = 0$ si y sólo si $\sigma \in L$.
- (2) $f_L(x_\sigma) = 1$ si y sólo si $\sigma \cap |L| = \emptyset$.
- (3) $f_L(x_\sigma) = \varepsilon$ si y sólo si $\sigma \in K - L$ y $\sigma \cap |L| \neq \emptyset$, esto último siguiendo un argumento similar al del párrafo previo para exhibir que $f_L^{-1}(\varepsilon) \cap \sigma^\circ \neq \emptyset$.

Como $x \in |K| = |K^{(1)}|$, sea σ el portador de x en $K^{(1)}$, digamos $\sigma = \langle x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_r} \rangle$ para algunos $\sigma_1 < \dots < \sigma_r$ simplejos en K . Analicemos cada situación:

- Si $f_L(x_{\sigma_1}) = 0$, entonces por (1) se tiene $\sigma_1 \in L$, por lo que seleccionando $v \in \text{vert}(\sigma_1)$, es claro que $v \in \text{vert}(L) \subset \text{vert}(L^{(1)})$ y $x \in \langle v, x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_r} \rangle \subset |N(L^{(1)}, K^{(1)})|$, ya que $\langle v, x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_r} \rangle \in K^{(1)}$ por la proposición 2.4.8.
- Si $f_L(x_{\sigma_1}) = \varepsilon$, entonces por (3) σ_1 tiene un vértice en $v \in \text{vert}(L)$ y $\sigma_1 \neq \langle v \rangle$, luego como antes $x \in |N(L^{(1)}, K^{(1)})|$.
- Si pasa que $f_L(x_{\sigma_1}) = 1$, dado que $f_L(x) \leq \varepsilon$, existe $j > 1$ tal que $f_L(x_{\sigma_j}) \neq \{1\}$, de

otro modo, tendríamos que $f_L(x) = 1 > \varepsilon$ que es contradictorio. Además, observe que si existe $j > 1$ tal que $f_L(\sigma_j) = \{1\}$, obtenemos $f_L(v) = 1$, para todo $v \in \text{vert}(\sigma_j)$ y se tiene que $f_L(\sigma_k) = \{1\}$ para cada $k \leq j$, porque $\sigma_k \leq \sigma_j$. Tomamos j tan grande como sea posible con $f_L(\sigma_j) = \{1\}$. En este caso, no pasa que $f_L(x_{\sigma_k}) = 0$ para $k > j$, ya que esto implicaría que $\sigma_k \in L$ y como $\sigma_j < \sigma_k$, tendríamos que $\sigma_j \in L$, o sea, $f_L(\sigma_j) = \{0\}$. Así, $f_L(x_{\sigma_k}) = \varepsilon$ para todo $k > j$. Sea $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_{\sigma_i}$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Lo anterior nos dice que $f_L(x) = \sum_{i=1}^j \lambda_i + \varepsilon \left(\sum_{i=j+1}^r \lambda_i \right) = \varepsilon + \left(\sum_{i=1}^j \lambda_i \right) (1 - \varepsilon) > \varepsilon$, contradiciendo $f_L(x) \leq \varepsilon$, así que $f_L(x_{\sigma_1}) = 1$ no es posible.

Esto prueba que $f_L^{-1}([0, \varepsilon]) \subset |N(L^{(1)}, K^{(1)})|$, finalizando la demostración. ■

Definición 3.4.9. Suponga que $P_0 \subset P$ son poliedros y suponga que $B = \text{Cl}_P(P - P_0)$ es una n -bola combinatoria tal que $B \cap P_0$ es una $(n - 1)$ -bola combinatoria contenida en ∂B . Entonces diremos que **P colapsa a P_0 por un colapso elemental**, y escribiremos $P \searrow^e P_0$. Por su parte, **P colapsa a P_0** , denotado $P \searrow P_0$, si existe una secuencia finita $P = P_r \searrow^e P_{r-1} \searrow^e \cdots \searrow^e P_0$. Se dice que P es **retractable**, si P colapsa a un sólo punto y escribiremos $P \searrow 0$.

Definición 3.4.10. Sea X un poliedro compacto contenido en una m -variedad PL M . Diremos que $\mathcal{N} \subset M$ es una **vecindad regular** de X en M , si:

- (1) \mathcal{N} es una vecindad cerrada de X en M .
- (2) \mathcal{N} es una m -variedad PL.
- (3) $\mathcal{N} \searrow X$.

Enunciamos el siguiente resultado importante que asegura la existencia y unicidad (salvo homeomorfismo PL) de las vecindades regulares, cuya demostración se recomienda consultar en [13].

Teorema 3.4.11. *Sea $X \subset M$ con X un poliedro compacto y M una m -variedad PL. Se cumple que:*

- (1) *Cualquier vecindad derivada de X es una vecindad regular.*
- (2) *Si \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 son vecindades regulares de X en M , entonces existe un homeomorfismo PL $h : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ tal que $h(x) = x$, $\forall x \in X$.*
- (3) *Si X es retractable, entonces cualquier vecindad regular de X es una m -bola combinatoria.*

Nos será de utilidad el siguiente hecho, demostrado como el corolario 3.14 en Rourke y Sanderson (1982) [34].

Teorema 3.4.12. *Si $Q \subset M^\circ$ son n -variedades PL, entonces $\text{Cl}_M(M - Q)$ es una n -variedad PL.*

De acuerdo con Lickorish (1997) [20], si N es un nudo poligonal en $\partial\Delta^4$, entonces cada vecindad regular \mathcal{N} de N es homeomorfo a un toro sólido, es decir, a $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$. Además, si

$X = \text{Cl}_{\partial\Delta^4}(\partial\Delta^4 - \mathcal{N})$, entonces X es una 3-variedad conexa, cuya frontera ∂X es homeomorfa a un toro, esto es, a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. También, se cumple que $X \cap \mathcal{N} = \partial X = \partial\mathcal{N}$ y $X \cup \mathcal{N} = \partial\Delta^4$.

Como aplicación de la teoría previa, en conjunto con lo visto en secciones anteriores, demostraremos la siguiente proposición para agilizar la argumentación del teorema principal.

Proposición 3.4.13. *Sea $f : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ un homeomorfismo PL que preserva la orientación y sea N_0 un nudo poligonal en $\partial\Delta^4$. Entonces existe un homeomorfismo PL $h : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ que fija N_0 y cumple que $h \circ f$ fija un 3-simplejo $\langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ en $\partial\Delta^4 - N_0$.*

Demostración. Paso 1: Mostraremos primero que existen un 3-complejo fuertemente conexo M tal que $|M| \subset \partial\Delta^4$, $|M| \cap N_0 = \emptyset$ y un 3-simplejo $\rho \in M$ tal que $\rho' := f(\rho) \subset |M|$ es un 3-simplejo.

Dado que N_0 es un poliedro compacto contenido en la 3-variedad PL $\partial\Delta^4$, usando el teorema 3.4.11 podemos hallar una vecindad regular \mathcal{N} de N_0 en $\partial\Delta^4$, la cual es una 3-variedad PL y, como mencionamos anteriormente, $X := \text{Cl}_{\partial\Delta^4}(\partial\Delta^4 - \mathcal{N})$ es una 3-variedad conexa y $X \cap \mathcal{N} = \partial X = \partial\mathcal{N}$. Recordando el corolario 1.6.11, tenemos que $\partial\Delta^4$ es una 3-variedad sin frontera. Esto quiere decir que $(\partial\Delta^4)^\circ = \partial\Delta^4$ y en vista de que $\mathcal{N} \subset \partial\Delta^4$ es una 3-variedad PL, el teorema 3.4.12 asegura que X es también una 3-variedad PL. Debido a que X es conexa, por la proposición 3.4.5 existe un 3-complejo fuertemente conexo M'' tal que $X = |M''|$. Como f es un auto-homeomorfismo PL de $\partial\Delta^4$ y $X, N_0 \subset \partial\Delta^4$, por la proposición 2.4.18 existen $K', L' \triangleleft \Sigma^3$, tales que $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial, donde K' contiene una subdivisión $M' \triangleleft M''$ y un complejo simplicial R tal que $|R| = f^{-1}(N_0)$. Es consecuencia de la proposición 2.6.6 que M' es un 3-complejo fuertemente conexo porque M'' lo es. En otro orden de ideas, sea σ un 3-simplejo en M' y consideremos $x_0 \in \sigma^\circ$. Supongamos que $f(x_0) \in N_0$. Ya que $f(R) \subset L'$ y $|f(R)| = N_0$, puede verse que $f(R)$ es un 1-complejo puro, entonces existe un 1-simplejo $\omega \in f(R)$ tal que $f(x_0) \in \omega$. No obstante, $x_0 \in \sigma^\circ$ implica que $f(x_0) \in f(\sigma)^\circ$, con $f(\sigma) \in L'$ un 3-simplejo, luego $f(x_0) \in \omega \cap f(\sigma)^\circ$ y así $f(\sigma) \leq \omega$, que es absurdo. Por ende $f(x_0) \notin N_0$.

Ahora, si $f(x_0) \in \partial\Delta^4 - \mathcal{N}$, puesto que $\partial\Delta^4 - \mathcal{N}$ es abierto en $\partial\Delta^4$, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\partial\Delta^4}(f(x_0), \varepsilon) \subset \partial\Delta^4 - \mathcal{N} \subset X$. Además, como f es continua, existe $\delta' > 0$ para el cual $f(V_{\partial\Delta^4}(x_0, \delta')) \subset V_{\partial\Delta^4}(f(x_0), \varepsilon) \subset X$. Usando que la topología de $\partial\Delta^4 = |K'|$ es coherente con K' (proposición 2.3.7) se sigue que σ° es abierto en $\partial\Delta^4$, luego existe $\delta'' > 0$ tal que $V_{\partial\Delta^4}(x_0, \delta'') \subset \sigma^\circ$. Tomemos $\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0$. Entonces $V_{\partial\Delta^4}(x_0, \delta) \subset \sigma^\circ$ y también $f(V_{\partial\Delta^4}(x_0, \delta)) \subset X$. Aplicando el teorema 2.4.21, podemos hallar $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\mu(\text{sd}^m M') < \delta$. Escogiendo cualquier 3-simplejo $\rho \in M := \text{sd}^m M'$ tal que $x_0 \in \rho$, obtenemos que $d(x_0, y) \leq \text{diam}(\rho) \leq \mu(M) < \delta$, $\forall y \in \rho$. Esto significa que $\rho \subset V_{\partial\Delta^4}(x_0, \delta) \subset \sigma^\circ$. Dado que $f|_\sigma$ es un homeomorfismo simplicial, es claro que $f(\rho) \subset X$ es un 3-simplejo. Nuevamente, gracias a que M' es fuertemente conexo y $M \triangleleft M'$, obtenemos que M es fuertemente conexo. Como \mathcal{N} es una vecindad regular de N_0 en $\partial\Delta^4$, entonces existe U abierto en $\partial\Delta^4$ tal que $N_0 \subset U \subset \mathcal{N}$. Puesto que $\partial\Delta^4 = (\partial\Delta^4)^\circ$, puede verse que cada $x \in U$ tiene una vecindad abierta en $\partial\Delta^4$, contenida en U , que es homeomorfa a algún abierto de \mathbb{R}^3 . Esto exhibe que $U \subset \mathcal{N}^\circ$, luego $N_0 \cap \partial\mathcal{N} = N_0 \cap (\mathcal{N}^\circ \cap \partial\mathcal{N}) = \emptyset$. Así, se verifica que $|M| \cap N_0 = (X \cap \mathcal{N}) \cap N_0 = \emptyset$. En particular, como $\sigma \subset X$, se tiene que $N_0 \cap \sigma = \emptyset$, este

hecho lo retomaremos más adelante.

Si por el contrario $f(x_0) \in \mathcal{N}$, realizamos el siguiente procedimiento. Sea K un complejo simplicial tal que $|K| = \partial\Delta^4$, $f(x_0) \in \text{vert}(K)$ y para el cual existan $J, L \subset K$ con $|J| = \sigma$ y $|L| = N_0$. Debido al lema 3.4.2, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que L es completo en K . Recordando que $f(x_0) \notin N_0$, entonces $f_L(f(x_0)) = 1$. Por lo anterior, tomando cualquier $0 < \varepsilon \leq 1$, el lema 3.4.8 asegura que $\mathcal{N}' = f_L^{-1}([0, \varepsilon])$ es una vecindad derivada de N_0 en $\partial\Delta^4$, con $f(x_0) \in \partial\Delta^4 - \mathcal{N}'$. Así, en virtud del teorema 3.4.11, \mathcal{N}' es una vecindad regular de N_0 en $\partial\Delta^4$, y como antes, $X' = \text{Cl}_{\partial\Delta^4}(\partial\Delta^4 - \mathcal{N}')$ es una 3-variedad PL conexa para la cual $X' \cap \mathcal{N}' = \partial X' = \partial \mathcal{N}'$. Debido a la proposición 3.2.2, podemos hallar un 3-complejo fuertemente conexo M''' tal que $X' = |M'''|$. Además, para cada $\gamma \in J$ no vacío, se tiene que $\gamma \cap N_0 = \emptyset$, esto significa que $v \notin \text{vert}(L)$, para todo $v \in \text{vert}(\gamma)$, por lo que $f_L(\gamma) = \{1\}$. En consecuencia, $f_L(\sigma) = \{1\}$ y entonces $\sigma \subset \partial\Delta^4 - \mathcal{N}' \subset X'$. Argumentado de manera similar al párrafo previo, pero reemplazando (X', \mathcal{N}', M''') por (X, \mathcal{N}, M') , obtenemos un 3-complejo fuertemente conexo M tal que $|M| \cap N_0 = \emptyset$ y existe un 3-simplejo $\rho \in M$ para el cual $\rho \subset \sigma^\circ$ y $f(\rho) \subset |M|$ es un 3-simplejo.

Paso 2: Escojamos cualquier $P_0 \in \rho^\circ$, de modo que $P_0^* := f(P_0) \in (\rho')^\circ$. Sea $M' \triangleleft M$ tal que M' contenga una subdivisión de $K(\rho')$, posible por la proposición 2.4.11. Seleccionemos un 3-simplejo $\rho'' \in M'$ tal que $\rho'' \subset \rho'$ y sea $x_0 \in (\rho'')^\circ$, de modo que $x_0 \in (\rho')^\circ$. Por otro lado, $M' \triangleleft M$ implica que existe un 3-simplejo $\tilde{\rho} \in M$ tal que $\rho'' \subset \tilde{\rho}$, por lo cual $x_0 \in \tilde{\rho}^\circ$. Usando que M es un 3-complejo fuertemente conexo y $\rho, \tilde{\rho} \in M$ son 3-simplejos, podemos hallar una secuencia de 3-simplejos $\rho_0, \dots, \rho_n \in M$, $\rho_0 = \rho$, $\rho_n = \tilde{\rho}$, tales que $\rho_i \cap \rho_{i+1}$ es una cara frontera de ρ_i y ρ_{i+1} , $i = 0, \dots, n-1$. Denotemos $Q_0 = P_0$, $Q_n = x_0$ y para cada i , tomemos $Q_i \in \rho_i^\circ$. En virtud del lema 3.2.9, para cada $i = 0, \dots, n-1$, podemos hallar una PL-isotopía de ambiente $F^i : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ cuyo homeomorfismo final cumple que $f_1^i(Q_i) = Q_{i+1}$ y $f_1^i|(\partial\Delta^4 - (\rho_i \cup \rho_{i+1}))$ es la identidad, por lo que $f_1^i|N_0$ es la identidad al tenerse que $\rho_i \cup \rho_{i+1} \subset |M|$ y $|M| \cap N_0 = \emptyset$. Finalmente, como $Q_n, P_0^* \in (\rho')^\circ$, aplicando el lema 3.2.7 obtenemos una PL-isotopía de ambiente $F^n : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ tal que $f_1^n(Q_n) = P_0^*$ y $f_1^n|(\partial\Delta^4 - \rho')$ es la identidad, de modo que $f_1^n|N_0$ es la identidad. Así, $H^0 = (F^n \circ F^{n-1} \circ \dots \circ F^0)^{-1} : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ es una PL-isotopía de ambiente tal que $(h_1^0 \circ f)(P_0) = P_0$ y $h_1^0|N_0$ es la identidad.

Paso 3: Recordemos el 3-simplejo σ del paso 1 tal que $\rho \subset \sigma^\circ$ y $N_0 \cap \sigma = \emptyset$. Ahora, como $P_0 \in \rho^\circ \subset \sigma^\circ$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $V_{\partial\Delta^4}(P_0, \delta_1) \subset \sigma^\circ$. Puesto que $h_1^0 \circ f$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $(h_1^0 \circ f)(V_{\partial\Delta^4}(P_0, \delta)) \subset V_{\partial\Delta^4}(P_0, \delta_1) \subset \sigma^\circ$. Además, dado que $h_1^0 \circ f : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ es un homeomorfismo PL, por la proposición 2.4.18, existen $K', L' \triangleleft \Sigma^3$ tales que $h_1^0 \circ f : |K'| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial y $P_0 \in \text{vert}(K')$. Existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\mu(\text{sd}^m K') < \delta$ y, en vista de la proposición 2.4.17, $L'' := (h_1^0 \circ f)(\text{sd}^m K') \triangleleft L'$ y $h_1^0 \circ f : |\text{sd}^m K'| \rightarrow |L''|$ es un homeomorfismo simplicial. Sin perder generalidad, reemplazando (K', L') por $(\text{sd}^m K', L'')$, podemos asumir que $\mu(K') < \delta$, luego podemos hallar un 3-simplejo $\tau \in K'$ tal que $P_0 \in \text{vert}(\tau)$. Debido a que $\text{diam}(\tau) < \delta$, se sigue que $\tau \subset \sigma^\circ$ y $\tilde{\tau} := (h_1^0 \circ f)(\tau) \subset \sigma^\circ$. Sea $P_1 \in \tau^\circ$. Dado que $(h_1^0 \circ f)|\tau$ es un homeomorfismo simplicial y $\tilde{\tau} \in L''$, entonces $P_0 \in \text{vert}(\tilde{\tau})$ y $P_1^* := (h_1^0 \circ f)(P_1) \in \tilde{\tau}^\circ$. Además, $P_0 \notin \{P_1, P_1^*\}$, ya que $P_0 \in \partial\tau \cap \partial\tilde{\tau}$.

Probaremos ahora que existen una PL-isotopía de ambiente $H^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$,

$\langle P_0, P_1, v_2, v_3 \rangle \subset \tau$ y $\langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle \subset \sigma$, tales que $(h_1^1 \circ h_1^0)|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, v_2, v_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1 \rangle$. Escribiremos $\tau = \langle P_0, u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\tilde{\tau} = \langle P_0, u_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle$, donde $u_i^* = (h_1^0 \circ f)(u_i)$. En cada uno de los siguientes casos, los vértices de $\tilde{\tau}$ y τ tendrán cierto rol dependiendo de la situación y, de ser necesario, se asumirá que se ha hecho un renombramiento de los vértices.

Caso I. Supongamos que $P_1 \in \tilde{\tau}^\circ$. Por el lema 3.2.7, existe una PL-isotopía de ambiente $H^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ tal que la $h_1^1|_{(\partial\Delta^4 - \tilde{\tau})}$ es la identidad y la restricción $h_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_2^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_2^*, u_3^* \rangle$ y $h_1^1(P_1^*) = P_1$. Observando que $(h_1^0 \circ f)|_{\langle P_0, P_1, u_2, u_3 \rangle}$ es simplicial, se sigue que la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_2, u_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_2^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial y se verifica fácilmente que $h_1^1 \circ h_1^0 \circ f$ fija $\langle P_0, P_1 \rangle$. Además, es claro que $(h_1^1 \circ h_1^0)|_{N_0}$ es la identidad porque $\tilde{\tau} \subset \sigma$, esto es, $N_0 \subset \partial\Delta^4 - \sigma \subset \partial\Delta^4 - \tilde{\tau}$.

Caso II. Supongamos que existe una cara frontera χ de $\tilde{\tau}$ tal que $P_0 \in \chi$ y $P_1 \in \text{aff}(\chi)$. Notemos que es posible hallar $v \in \text{vert}(\chi)$ tal que $P_1 \notin \text{aff}(P_0, v)$, de otro modo, P_1 pertenecería a la intersección de los subespacios afines generados por las caras frontera de χ que contienen a P_0 , cuya intersección es en P_0 , contradiciendo $P_0 \neq P_1$. Asumiremos que $\chi = \langle P_0, u_2^*, u_3^* \rangle$ con $P_1 \notin \text{aff}(P_0, u_2^*)$. Como también $P_1 \in \sigma^\circ$, aplicando el lema 3.2.10, existe $a_3 \in \sigma \cap \text{aff}(\chi)$ tal que P_0, u_2^*, a_3 son afinmente independientes y $P_1 \in \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle^\circ$. Tenemos que existe $x \in R(P_1^*, a_3) \cap \partial\tilde{\tau}$, por lo que $a_3 = P_1^* + t(x - P_1^*)$ para algún $t \geq 0$. De aquí, se desprenden dos posibilidades:

(2.1) Si $t \in I$, entonces $a_3 \in \tilde{\tau}$. Sin embargo, $a_3 \in \text{aff}(\chi)$, esto es, $a_3 \in \chi$ y $x = a_3$. En vista de que también $P_0, u_2^* \in \chi$, obtenemos que $\langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle \subset \chi$ y, por ende, $P_1 \in \chi$. De hecho, como $a_3 \in \chi$, entonces $a_3 = \lambda_0 P_0 + \lambda_2 u_2^* + \lambda_3 u_3^*$, con $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Pero $a_3 \notin \text{aff}(P_0, u_2^*)$, lo cual implica que $\lambda_3 > 0$. En vista de que $P_1 \in \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle^\circ$, se tiene $P_1 \in \chi^\circ$. Sea $y \in R(P_1^*, P_1) \cap \partial\sigma$, el cual existe por el corolario 1.6.11(3). Puesto que $P_1^*, P_1 \in \sigma^\circ$, entonces $y = P_1^* + s(P_1 - P_1^*)$ con $s > 1$, luego al cumplirse que $P_1^* \in \tilde{\tau}^\circ$ y $P_1 \in \chi^\circ \subset \partial\tilde{\tau}$, el lema 3.2.11 garantiza que $\eta_1 := y\chi$ es un 3-simplejo y $\tilde{\tau} \cap \eta_1 = \chi$. Asimismo, usando el lema 3.2.9, se tiene una PL-isotopía de ambiente $H^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ tal que h_1^1 es la identidad fuera de $\tilde{\tau} \cup \eta_1 \subset \sigma$ y la restricción $h_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_1^*, u_2^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, u_2^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$ y $h_1^1(P_1^*) = P_1$ (figura 38). Así, $(h_1^1 \circ h_1^0)|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_1, u_2 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, u_2^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1 \rangle$.

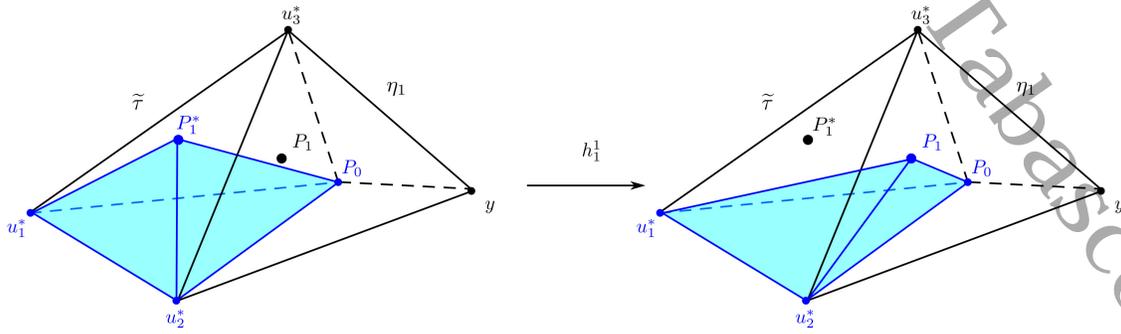


Figura 38: Caso II (2.1) del paso 3.

(2.2) Supongamos que $t > 1$. Dado que los vértices de $\tilde{\tau}$ son afínmente independientes, por el teorema 1.2.11, $u_1^* \notin \text{aff}(\chi)$. Como $P_0, u_2^*, a_3 \in \text{aff}(\chi)$, se sigue que $\text{aff}(P_0, u_2^*, a_3) = \text{aff}(\chi)$, de manera que $u_1^* \notin \text{aff}(P_0, u_2^*, a_3)$ y, por el corolario 1.6.14, P_0, u_1^*, u_2^*, a_3 son afínmente independientes. Denotemos $\eta_1 := \langle P_0, u_1^*, u_2^*, a_3 \rangle$. Así, como $a_3 = P_1^* + t(x - P_1^*)$ con $P_1^* \in \tilde{\tau}^\circ$, $x \in \partial\tilde{\tau}$ y $t > 1$, usando el lema 3.2.11 se cumple que $\tilde{\tau} \cup \eta_1$ es una 3-bola combinatoria y $\tilde{\tau} \cap \eta_1$ es una cara frontera común de $\tilde{\tau}$ y η_1 . Observe que $u_3^* \notin \tilde{\tau} \cap \eta_1$ porque de ser así, $\text{vert}(\tilde{\tau}) \subset \eta_1$ y, por convexidad, $\tilde{\tau} \subset \eta_1$, es decir, $\tilde{\tau} \cap \eta_1 = \tilde{\tau}$, lo cual es absurdo. Debe ocurrir entonces que $\tilde{\tau} \cap \eta_1 = \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$. Gracias al lema 3.2.13, existe $Q_1 \in \eta_1^\circ$ tal que, denotando $\eta_2 := \langle Q_1, P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$, $\tilde{\tau} \cup \eta_2$ es una 3-bola combinatoria convexa. Sean $Q_0 \in \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ$ y $Q_2 \in \langle Q_0, Q_1 \rangle^\circ$, que implica $Q_2 \in \eta_2^\circ \cap \eta_1^\circ$. Como $P_1^*, Q_2 \in (\tilde{\tau} \cup \eta_2)^\circ$ con $\tilde{\tau} \cup \eta_2$ convexa, aplicando el lema 3.2.9, existe una PL-isotopía de ambiente $\tilde{H}^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, tal que \tilde{h}_1^1 es la identidad fuera de $\tilde{\tau} \cup \eta_2 \subset \sigma$, la restricción $\tilde{h}_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, Q_2, u_2^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija χ y $\tilde{h}_1^1(P_1^*) = Q_2$.

Sea $Q_3 \in \chi^\circ$, de modo que $Q_3 \in \tilde{\tau} - \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$ y notando que $Q_2 \in \eta_2 - \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$, siguiendo lo mostrado en el lema 3.2.12(1), sabemos que existe $Q_4 \in \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ \cap \langle Q_2, Q_3 \rangle^\circ$. Tomemos en esta ocasión $v_3^{**} \in \langle Q_2, Q_4 \rangle^\circ$ (figura 39). Como $Q_4 \in \langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ$, se sigue que $v_3^{**} \in \langle P_0, Q_2, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ$, pero también $Q_4 \in \langle Q_2, Q_3 \rangle^\circ$ y $Q_3 \in \langle P_0, u_2^*, u_3^* \rangle^\circ$, luego puede verse que $v_3^{**} \in \langle P_0, Q_2, u_2^*, u_3^* \rangle^\circ$. Dado que $\tilde{h}_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, Q_2, u_2^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial, entonces $v_3^* := (\tilde{h}_1^1)^{-1}(v_3^{**}) \in \langle P_0, P_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle^\circ$ y la restricción $\tilde{h}_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_2^*, v_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, Q_2, u_2^*, v_3^{**} \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_2^* \rangle$. Recordando que la restricción $h_1^0 \circ f : \langle P_0, P_1, u_2, u_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1^*, u_2^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial, puede verse que $v_3 := (h_1^0 \circ f)^{-1}(v_3^*) \in \langle P_0, P_1, u_2, u_3 \rangle^\circ$ y entonces la restricción $h_1^0 \circ f : \langle P_0, P_1, u_2, v_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1^*, u_2^*, v_3^* \rangle$ es también un homeomorfismo simplicial.

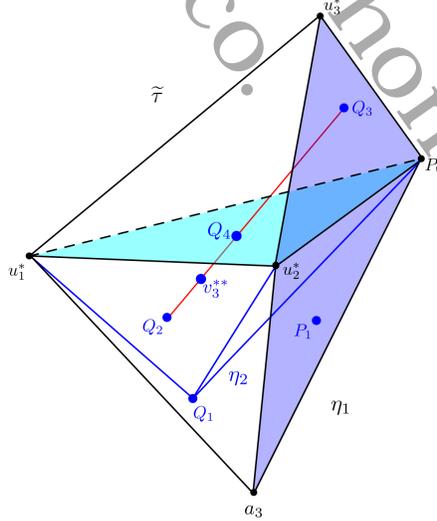


Figura 39: Construcciones auxiliares para obtener v_3^{**} .

Tomando $y \in R(Q_2, P_1) \cap \partial\sigma$, puesto que $Q_2 \in \sigma^\circ$ (ya que Q_2 está en el interior de un 3-simplejo contenido en σ), procediendo similar a (2.1), $\eta_3 := y \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle$ es un 3-simplejo y $\eta_1 \cup \eta_3$ es una 3-bola combinatoria con $\eta_1 \cap \eta_3 = \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle$. Como $Q_2 \in \eta_1^\circ$ y $P_1 \in \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle^\circ$,

por el lema 3.2.9, podemos hallar una PL-isotopía de ambiente $\hat{H}^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, tal que \hat{h}_1^1 es la identidad fuera de $\eta_1 \cup \eta_3 \subset \sigma$ y la restricción $\hat{h}_1^1 : \langle P_0, Q_2, u_1^*, u_2^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, u_2^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_1^*, u_2^* \rangle$ con $\hat{h}_1^1(Q_2) = P_1$. Tenemos entonces que $w_3 := \hat{h}_1^1(v_3^{**}) \in \langle P_0, P_1, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ$, luego la restricción $\hat{h}_1^1 : \langle P_0, Q_2, u_2^*, v_3^{**} \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_2^*, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_2^* \rangle$ y $\hat{h}_1^1(Q_2) = P_1$, $\hat{h}_1^1(v_3^{**}) = w_3$. De esta forma, $H^1 = \hat{H}^1 \circ \tilde{H}^1$ con $h_t^1 = \hat{h}_t^1 \circ \tilde{h}_t^1$, es una PL-isotopía de ambiente y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_2, v_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_2^*, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1 \rangle$. También, $h_1^1|_{N_0}$ es la identidad porque $\tilde{h}_1^1|_{N_0}$ y $\hat{h}_1^1|_{N_0}$ son identidades. En la figura 40 se aprecia el efecto del homeomorfismo final de H^1 .

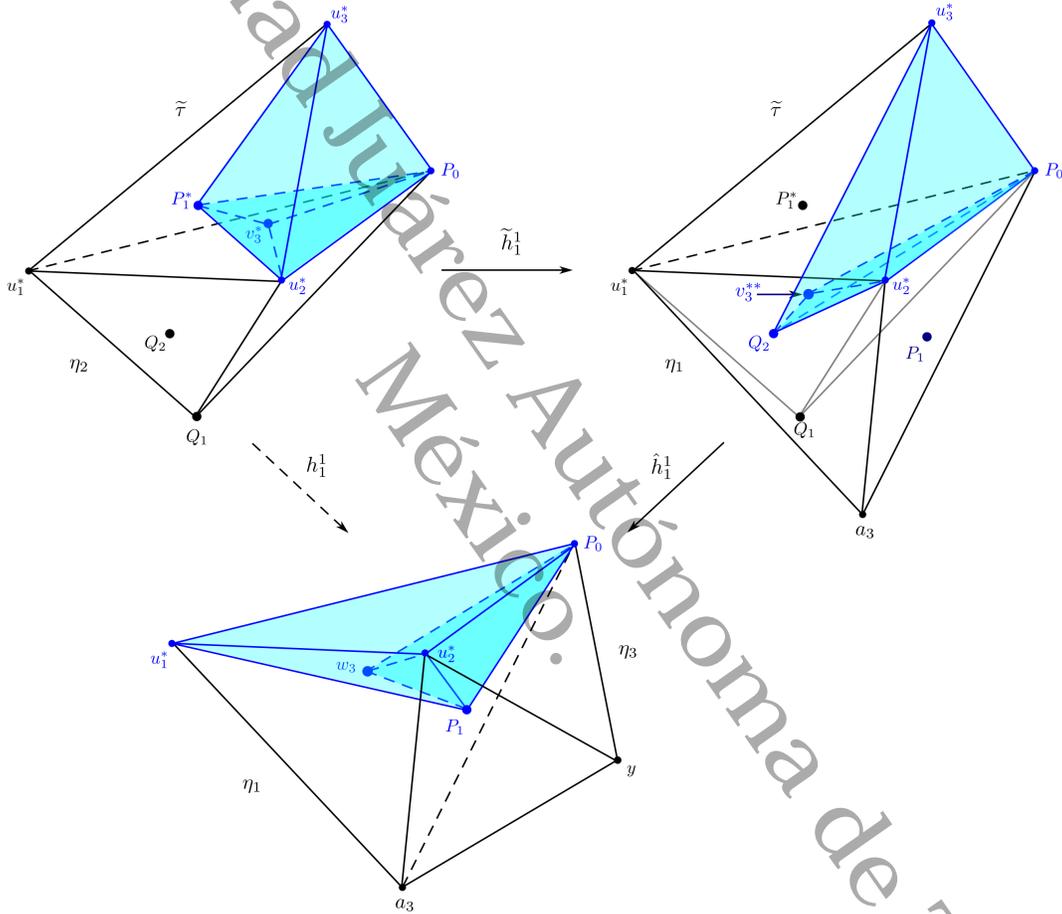


Figura 40: Homeomorfismo final h_1^1 del caso II (2.2) del paso 3.

Caso III. Supongamos que $P_1 \in \text{aff}(\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle)$. La forma de proceder es similar al caso II, aunque indicaremos los ajustes que deben hacerse. Ahora $\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle$ toma el papel de χ y esta vez, seleccionando $u_1^* \in \text{vert}(\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle)$ distinto de P_1 , podemos hallar $u_2^* \in \text{vert}(\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle)$ tal que $P_1 \notin \text{aff}(u_1^*, u_2^*)$. Tome en cuenta que aquí P_0 y u_1^* intercambian sus roles respecto al caso II. Existe $a_3 \in \sigma \cap \text{aff}(\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle)$ tal que $P_1 \in \langle u_1^*, u_2^*, a_3 \rangle^\circ$ y expresamos $a_3 = P_1^* + t(x - P_1^*)$, para algunos $x \in \partial\tilde{\tau}$, $t \geq 1$.

(3.1) Cuando $t = 1$, realizamos el mismo procedimiento de (2.1), en donde se tendrá que

$P_1 \in (\tilde{\tau} \setminus \langle P_0 \rangle)^\circ$ y al final obtendremos una PL-isotopía de ambiente $H^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ tal que $h_1^1|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_1, u_2 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, u_2^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1 \rangle$.

(3.2) La segunda situación corresponde a tener $t > 1$, donde el procedimiento a seguir es como en (2.2), pero en este caso escogemos la restricción $\tilde{h}_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_1^*, u_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, Q_2, u_1^*, u_3^* \rangle$, que es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_1^*, u_3^* \rangle$ y $\tilde{h}_1^1(P_1^*) = Q_2$. Tomamos $Q_3 \in \langle P_0, u_1^*, u_3^* \rangle^\circ$, para así obtener $v_3^{**} \in \langle P_0, Q_2, u_1^*, u_3^* \rangle^\circ \cap \langle P_0, Q_2, u_1^*, u_2^* \rangle^\circ$. Entonces $v_3^* := (\tilde{h}_1^1)^{-1}(v_3^{**}) \in \langle P_0, P_1^*, u_1^*, u_3^* \rangle^\circ$ y se tiene el homeomorfismo simplicial $\tilde{h}_1^1 : \langle P_0, P_1^*, u_1^*, v_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, Q_2, u_1^*, v_3^* \rangle$ que fija $\langle P_0, u_1^* \rangle$. Como la restricción $h_1^0 \circ f : \langle P_0, P_1, u_1, u_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1^*, u_1^*, u_3^* \rangle$ es un homeomorfismo simplicial, se sigue que $v_3 := (h_1^0 \circ f)^{-1}(v_3^*) \in \langle P_0, P_1, u_1, u_3 \rangle^\circ$ y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_1, v_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial. Siendo ahora $\eta_3 = y \langle u_1^*, u_2^*, a_3 \rangle$ y considerando la restricción $\hat{h}_1^1 : \langle P_0, Q_2, u_1^*, v_3^{**} \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, w_3 \rangle$ que es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, u_1^* \rangle$ con $\hat{h}_1^1(Q_2) = P_1$ y $\hat{h}_1^1(v_3^{**}) = w_3$, siguiendo el resto de la demostración de (2.2), obtenemos una PL-isotopía de ambiente $H^1 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, tal que $h_1^1|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, u_1, v_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, u_1^*, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1 \rangle$. En la figura 41 se ilustra el comportamiento del homeomorfismo final de H^1 para esta última situación.

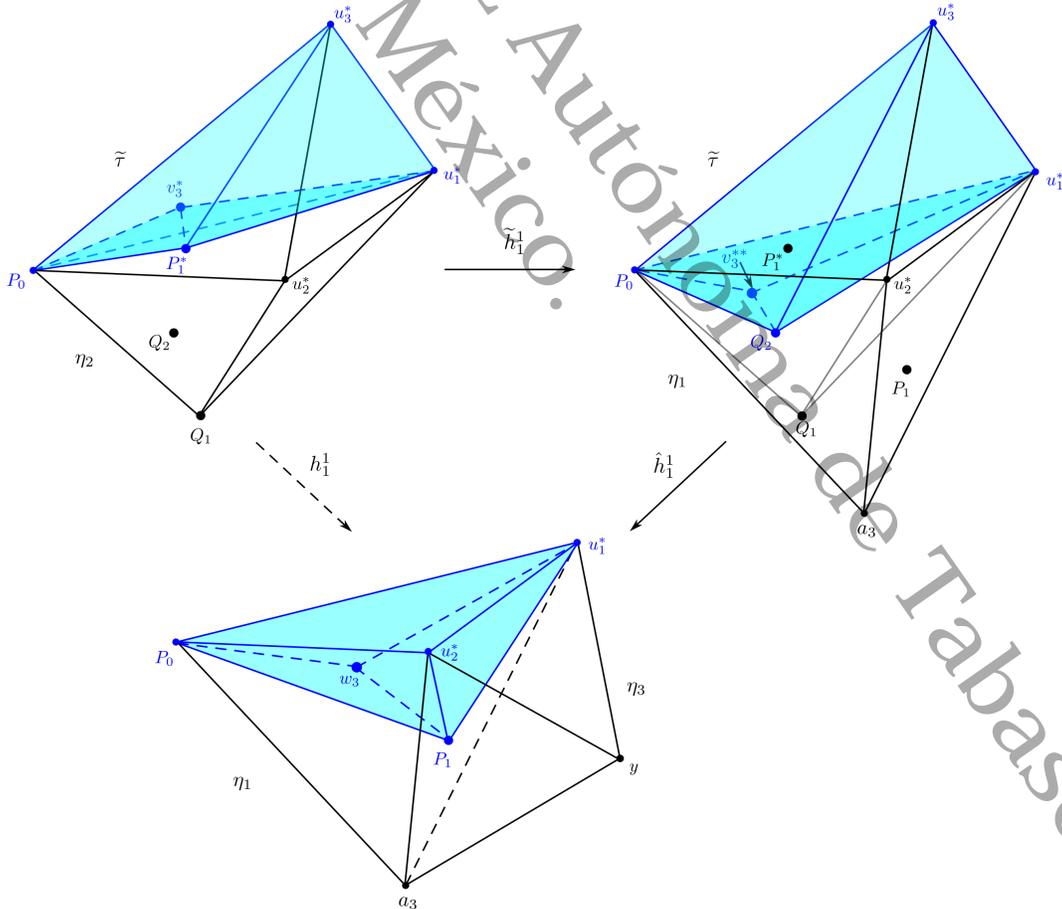


Figura 41: Homeomorfismo final h_1^1 del caso III (3.2) del paso 3.

Caso IV. Supongamos que $P_1 \notin \text{aff}(\chi)$, para toda cara frontera χ de $\tilde{\tau}$ y $P_1 \notin \tilde{\tau}^\circ$. Esto nos dice que $P_1 \notin \tilde{\tau}$. Sea $x_0 \in R(P_1^*, P_1) \cap \partial\tilde{\tau}$ y sea χ una cara frontera de $\tilde{\tau}$ tal que $x_0 \in \chi$. Consideremos los siguientes escenarios posibles:

(4.1) Si $\chi = \langle P_0, u_2^*, u_3^* \rangle$, afirmamos que existe $x^* \in \text{aff}(\chi) \cap R(u_1^*, P_1)$. En efecto, como $x_0 \in R(P_1^*, P_1)$, entonces $P_1 \in R(P_1^*, P_1) = R(P_1^*, x_0)$, es decir, $P_1 = (1-s)P_1^* + sx_0$, para algún $s \geq 0$. Ya que $P_1^*, x_0 \in \tilde{\tau}$ y $P_1 \notin \tilde{\tau}$, debe ocurrir que $s > 1$. Por otro lado, $P_1^* \in \tilde{\tau}^\circ = (u_1^*\chi)^\circ$, así que existen $\lambda \in (0, 1)$ y $x_1^* \in \chi$ tales que $P_1^* = \lambda u_1^* + (1-\lambda)x_1^*$. Debido a lo anterior, $P_1 = (1-s)\lambda u_1^* + (1-s)(1-\lambda)x_1^* + sx_0$. Ahora, puesto que $s > 1$ y dado que $\lambda > 0$, entonces $t := \frac{1}{1+\lambda(s-1)} \in (0, 1)$. Así, $x^* := u_1^* + t(P_1 - u_1^*) \in \langle u_1^*, P_1 \rangle^\circ \subset R(u_1^*, P_1)$. Esto también implica que $x^* \in \sigma^\circ$, ya que $P_1 \in \sigma^\circ$. Además, observe que $x^* = [(1-t) + t(1-s)\lambda]u_1^* + t[(1-s)(1-\lambda)x_1^* + sx_0] = t[(1-s)(1-\lambda)x_1^* + sx_0^*]$, donde $t[(1-s)(1-\lambda) + s] = 1$, con $x_1^*, x_0^* \in \chi$, por lo cual $x^* \in \text{aff}(\chi)$.

Ahora, notemos que $x^* \notin \text{aff}(P_0, u_2^*)$, de otro modo, $x^* \in \text{aff}(P_0, u_1^*, u_2^*)$ y como $x^* \in R(u_1^*, P_1)$, entonces $P_1 \in R(u_1^*, x^*) \subset \text{aff}(P_0, u_1^*, u_2^*)$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Debido al lema 3.2.10, podemos hallar $a_3 \in \sigma \cap \text{aff}(\chi)$ tal que $x^* \in \langle P_0, u_2^*, a_3 \rangle^\circ \subset \text{aff}(\chi)$. Note que nos encontramos ahora en la situación del caso II, pero reemplazando x^* por P_1 . Podemos proceder similar, salvo que en esta ocasión tomaremos $y \in \vec{R}(P_1, P_1 - u_1^*) \cap \partial\sigma$. Observe que $\vec{R}(P_1, P_1 - u_1^*) \subset \vec{R}(x^*, x^* - u_1^*)$ y no ocurre que $y = x^*$, ya que $x^* \in \sigma^\circ$. Si estamos en el contexto del caso II (2.1), entonces $x^* \in \chi^\circ$ lo cual hará que, para $\eta_1 = y\chi$, $\tilde{\tau} \cup \eta_1$ sea una 3-bola combinatoria convexa (siguiendo el lema 3.2.12(1)) con $P_1 \in \eta_1^\circ$, y, aplicando el lema 3.2.9, obtenemos la PL-isotopía de ambiente H^1 con h_1^1 deseado (figura 42).

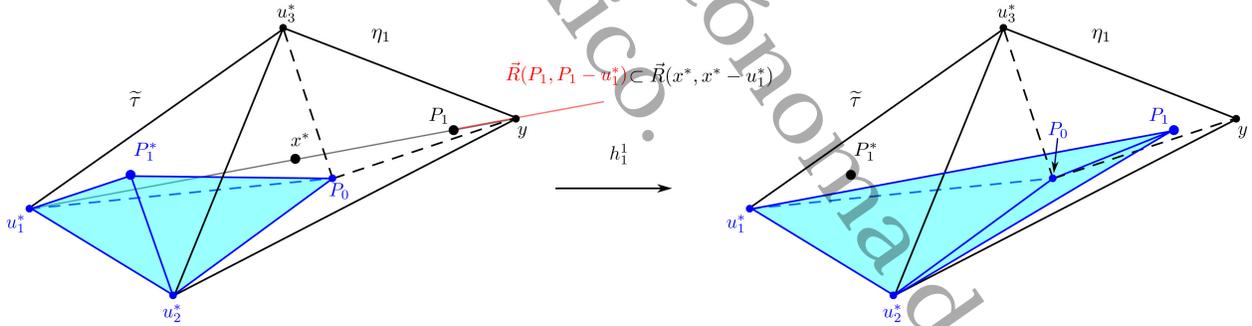


Figura 42: Modificación para el caso IV (4.1) del paso 3, situación similar a caso II (2.1) del paso 3.

Supongamos que nos situamos en el contexto del caso II (2.2). Ya que $x^* \in \langle P_0, u_1^*, a_3 \rangle^\circ$, tendremos que $\eta_2 \cup \eta_3$ es una 3-bola combinatoria convexa y $P_1 \in \eta_3^\circ$, luego usando el lema 3.2.9, obtenemos la PL-isotopía de ambiente \hat{H}^1 tal que \hat{h}_1^1 nos permite realizar el movimiento de Q_2 hacia P_1 (figura 43).

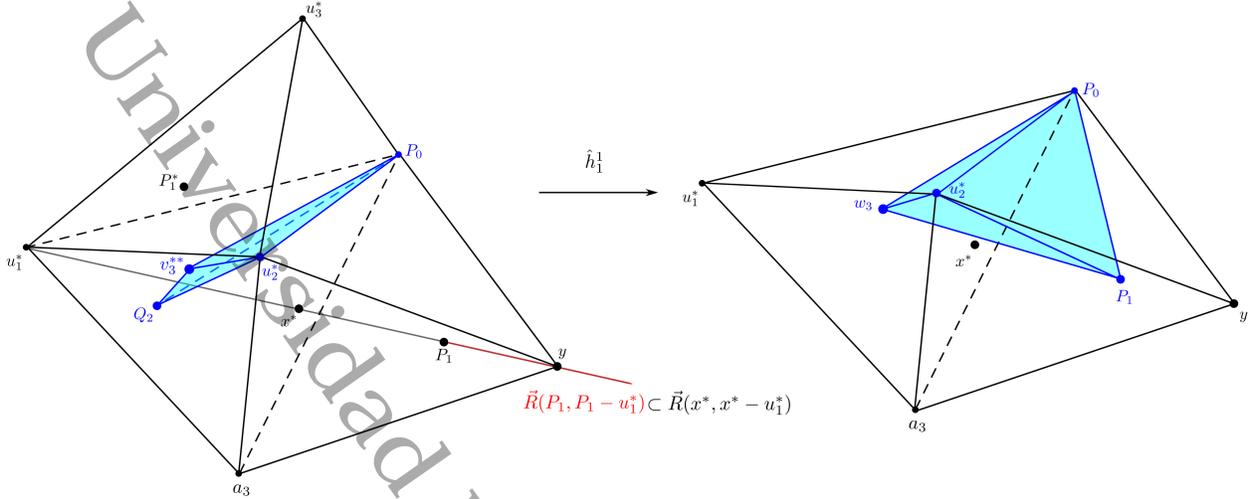


Figura 43: Modificación para el caso IV (4.1) del paso 3, situación similar al caso II (2.2) del paso 3.

(4.2) Si $P_0 \notin \chi$, procediendo como en (4.1) de este caso, podemos hallar $x^* \in \text{aff}(\chi) \cap R(P_0, P_1)$, simplemente sustituyendo en aquel argumento u_1^* por P_0 . Para $u_1^*, u_2^* \in \chi$, no puede ocurrir que $x^* \in \text{aff}(u_1^*, u_2^*)$, porque si esto pasa, $P_1 \in R(P_0, P_1) = R(P_0, x^*) \subset \text{aff}(P_0, u_1^*, u_2^*)$ que no es posible. Entonces podemos seleccionar $a_3 \in \sigma \cap \text{aff}(\chi)$ para el cual $x^* \in \langle u_1^*, u_2^*, a_3 \rangle^\circ$ y nos encontraremos como en el caso III. Aplicamos el procedimiento ahí descrito, sin embargo, escogeremos $y \in \vec{R}(P_1, P_1 - P_0) \cap \partial\sigma$ nuevamente para obtener 3-bolas combinatorias convexas al momento de hallar la PL-isotopía de ambiente respectiva que nos desplace a P_1 .

Paso 4: Nuestro próximo paso es seleccionar $P_2 \in \langle P_0, P_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$, de modo que $P_2^* := (h_1^1 \circ h_0^0 \circ f)(P_2) \in \langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle^\circ$. Como antes, podemos obtener una PL-isotopía de ambiente $H^2 : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$, $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \subset \langle P_0, P_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle \subset \sigma$, tales que $(h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0)|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $(h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0 \circ f) : \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$. En efecto, aplicamos los casos ya analizados en el paso anterior, pero ahora P_2 toma el rol de P_1 :

Caso I. Supongamos que $P_2 \in \langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle^\circ$. En analogía al caso I del paso 3, u_2 ahora es reemplazado por P_1 , $u_2^* = (h_1^0 \circ f)(u_2)$ por $(h_1^1 \circ h_1^0 \circ f)(P_1) = P_1$ y u_3^* por w_3 . Se obtiene entonces que $h_1^2|_{N_0}$ es la identidad y la restricción $h_1^2 : \langle P_0, P_1, P_2^*, w_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, w_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1, w_3 \rangle$ y $h_1^2(P_2^*) = P_2$.

Caso II. Asumamos que existe una cara frontera χ de $\langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle$ tal que $P_0 \in \chi$ y $P_2 \in \text{aff}(\chi)$. Ahora puede ocurrir que $P_1 \in \chi$ o $P_1 \notin \chi$. En la primera situación, podemos continuar tal como en el caso II del paso 3, reemplazando u_2 y u_2^* con P_1 , pues $P_2 \notin \text{aff}(P_0, P_1)$ dado que $P_2 \in \langle P_0, P_1, v_2, v_3 \rangle^\circ$; y también sustituimos (u_1, u_1^*, u_3, u_3^*) por $(v_2, (h_1^1 \circ h_1^0 \circ f)(v_2), v_3, (h_1^1 \circ h_1^0 \circ f)(v_3)) = (v_2, w_2, v_3, w_3)$. Cuando $P_1 \notin \chi$, recurrimos al caso III del paso 3, esta vez P_1 toma el lugar de P_0 mientras que P_0 sustituye a u_1 y u_1^* .

Caso III. Si $P_2 \in \text{aff}(P_1, w_2, w_3)$, entonces se procede análogo a la segunda situación del caso II de este paso, intercambiando los roles de P_0 y P_1 .

Caso IV. Supongamos que $P_2 \notin \text{aff}(\chi)$, para toda cara frontera χ de $\langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle$ y

$P_2 \notin \langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle^\circ$. Este caso tiene similitudes con el caso IV del paso 3, pero considerando algunas modificaciones. Se seleccionan $x_0 \in R(P_2^*, P_2) \cap \partial \langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle$ y χ una cara frontera de $\langle P_0, P_1, w_2, w_3 \rangle$ tal que $x_0 \in \chi$. Podemos hallar $x^* \in \text{aff}(\chi) \cap R(v, P_2)$, donde v es el vértice que no está en χ . Se escoge $y \in \vec{R}(P_2, P_2 - v) \cap \partial \sigma$, para aplicar el procedimiento descrito en el caso IV del paso 3 y así obtener la PL-isotopía de ambiente respectiva que nos permita realizar el movimiento hacia P_2 a partir de una 3-bola combinatoria convexa, en cada uno de los contextos siguientes. Si $v \notin \{P_0, P_1\}$, entonces $P_0, P_1 \in \text{vert}(\chi)$ y usamos las PL-isotopías de ambiente de la primera situación del caso II. Si $v = P_0$, entonces $P_1 \in \text{vert}(\chi)$ y podemos usar las PL-isotopías de ambiente del caso III. Finalmente, cuando $v = P_1$, se sigue con las PL-isotopías de ambiente en la segunda situación del caso II.

Paso 5: Denotemos $\phi := h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0 \circ f : \partial \Delta^4 \rightarrow \partial \Delta^4$. Sea $P_3 \in \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ$, de modo que $P_3^* := \phi(P_3) \in \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$. Probaremos que existe un homeomorfismo PL $h^3 : \partial \Delta^4 \rightarrow \partial \Delta^4$ que fija N_0 y cuya restricción $h^3 : \langle P_0, P_1, P_2, P_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ con $h^3(P_3^*) = P_3$.

Primero mostraremos que existe $z_3 \in \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ \cap \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$. Dado que cada h_1^i y f son homeomorfismos PL, entonces $\phi : \partial \Delta^4 \rightarrow \partial \Delta^4$ es un homeomorfismo PL. Por el teorema 2.4.16, podemos hallar $K, K' \triangleleft \Sigma^3$ tales que $\phi : |K| \rightarrow |K'|$ es un homeomorfismo simplicial. Sin perder generalidad, podemos asumir que $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \in K$ y $\langle P_0, P_2, P_2, y_3 \rangle \in K'$, a continuación explicamos por qué. Si $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \notin K$, entonces podemos usar la proposición 2.4.11 para hallar $L \triangleleft K$ tal que L contiene una subdivisión M de $K(\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle)$. Posteriormente, la proposición 2.4.17 garantiza que $L' := \phi(L) \triangleleft K'$ y $\phi : |L| \rightarrow |L'|$ es un homeomorfismo simplicial. En este caso, note que M contiene un 2-complejo puro que es subdivisión de $K(\langle P_0, P_1, P_2 \rangle)$, de modo que existe un 2-simplejo $\langle P'_0, P'_1, P'_2 \rangle \in M$, contenido en $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ y, por ende, en $\partial \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle$. Debido a esto, el teorema 2.6.3 asegura que $\langle P'_0, P'_1, P'_2 \rangle$ es cara de un 3-simplejo en M , digamos $\langle P'_0, P'_1, P'_2, x'_3 \rangle \subset \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle$. Dado que la restricción $\phi : \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, entonces ϕ fija $\langle P'_0, P'_1, P'_2 \rangle$ y además, denotando $y'_3 = \phi(x'_3)$, se cumple que $\phi(\langle P'_0, P'_1, P'_2, x'_3 \rangle) = \langle P'_0, P'_1, P'_2, y'_3 \rangle \in \phi(L) = L'$. Así, en este caso podemos reemplazar (K, K') por (L, L') y también $(\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle, \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle)$ por $(\langle P'_0, P'_1, P'_2, x'_3 \rangle, \langle P'_0, P'_1, P'_2, y'_3 \rangle) \in L \times L'$.

Ahora, recordemos que f preserva la orientación por hipótesis. Por su parte, h_1^i son ambiente isotópicos a la identidad de $\partial \Delta^4$, luego son homotópicos a esta identidad, y entonces usando (1) y (3) del teorema 2.8.18, resulta que $\deg h_1^i$ es igual al grado de la identidad, $\forall i$. Aplicando esta vez (2) del mismo teorema, se sigue que $\deg \phi = 1$, luego ϕ es un homeomorfismo PL que preserva la orientación. Sea γ la cara frontera de Δ^4 que contenga a σ y, por ende, a $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle$ y $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle$. Orientemos Δ^4 de tal modo que se obtenga una orientación de Σ^3 (como en el ejemplo 2.7.8), en la cual $[P_0, P_1, P_2, x_3]$ y $\Delta^4|_\gamma$ induzcan en $\text{aff}(\gamma)$ la misma orientación. Consideremos también K y K' con la orientación determinada por la que hemos dado para Σ^3 , recordando lo visto en el teorema 2.7.11. Debido a este último resultado, la orientación que hemos escogido para K implica que justamente, para $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle$, se eligió la orientación $[P_0, P_1, P_2, x_3]$. Así, gracias a la proposición 2.8.20, $[\phi(P_0), \phi(P_1), \phi(P_2), \phi(x_3)] = [P_0, P_1, P_2, y_3]$ es la orientación que hemos seleccionado para $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle$ en la orientación de K' . De nuevo, en virtud del teorema 2.7.11, como $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle \subset \gamma$, tenemos que $[P_0, P_1, P_2, y_3]$ y $\Delta^4|_\gamma$ inducen en $\text{aff}(\gamma)$ la misma orienta-

ción. Por lo tanto, $[P_0, P_1, P_2, x_3]$ y $[P_0, P_1, P_2, y_3]$ inducen en $\text{aff}(\gamma)$ la misma orientación. Esto implica que $B = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, x_3 - P_0)$ y $C = (P_1 - P_0, P_2 - P_0, y_3 - P_0)$ son bases equivalentes, es decir, $\det(M_{B,C}) > 0$. Dado que $x_3 - P_0 \in \text{gen}(P_1 - P_0, P_2 - P_0, y_3 - P_0)$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_3 - P_0 = \lambda_1(P_1 - P_0) + \lambda_2(P_2 - P_0) + \lambda_3(y_3 - P_0)$, luego

$$M_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M_{B,C}) = \lambda_3 > 0.$$

Entonces podemos escribir

$$x_3 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 y_3, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_3 > 0. \quad (3.7)$$

Sea $Q_0 \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle^\circ$. Denotando $Y := \text{aff}(P_0, P_1, P_2)$, por el lema 1.6.12 podemos hallar $r > 0$ tal que $\emptyset \neq (V(Q_0, r) \cap H_1) - Y \subset \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ$ y $\emptyset \neq (V(Q_0, r) \cap H_2) - Y \subset \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$, donde H_1 y H_2 son los semiespacios de $\text{aff}(\sigma)$ que contienen a $\langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle$ y $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle$, respectivamente. Debido a (3.7), puede verse que $H_1 \subset H_2$, lo cual nos dice que $(V(Q_0, r) \cap H_1) - Y \subset \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ \cap \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$. En consecuencia, podemos tomar $z_3 \in \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ \cap \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$, como se muestra en la figura 44.

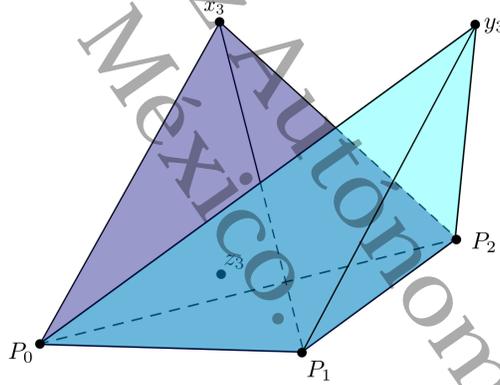


Figura 44: Existencia de $z_3 \in \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle^\circ \cap \langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle^\circ$.

Usando el lema 3.2.7, podemos hallar homeomorfismos PL \tilde{h}^3 y \hat{h}^3 de $\partial\Delta^4$, los cuales son iguales a las identidades fuera de $\langle P_0, P_1, P_2, y_3 \rangle, \langle P_0, P_1, P_2, x_3 \rangle \subset \sigma$, respectivamente, y cumplen que las restricciones $\tilde{h}^3 : \langle P_0, P_1, P_2, P_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, z_3 \rangle$ y $\hat{h}^3 : \langle P_0, P_1, P_2, z_3 \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ son homeomorfismos simpliciales que fijan $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, con $\tilde{h}^3(P_3^*) = z_3$ y $\hat{h}^3(z_3) = P_3$. Así, $h^3 = \hat{h}^3 \circ \tilde{h}^3 : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ es un homeomorfismo PL que fija N_0 y la restricción $h^3 : \langle P_0, P_1, P_2, P_3^* \rangle \rightarrow \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ es un homeomorfismo simplicial que fija $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ con $h^3(P_3^*) = P_3$.

Esto nos dice que $h = h^3 \circ h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0$ fija N_0 y $h \circ f$ fija $\langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \subset \sigma$, el cual no interseca a N_0 porque $N_0 \cap \sigma = \emptyset$. ■

XI. Resultados

Con lo que hemos estudiado en las secciones y capítulos anteriores, presentamos ahora la demostración del teorema principal.

Teorema de equivalencia de equivalencias. Sean $i_0, i_1 : \partial\Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^4$ nudos PL. Las siguientes son equivalentes:

- (1) i_0 y i_1 son **equivalentes positivos**, es decir, existe un homeomorfismo PL $f : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ que preserva la orientación y para el cual $f \circ i_0 = i_1$.
- (2) i_0 y i_1 son PL-equivalentes.
- (3) $N_0 = i_0(\partial\Delta^2)$ y $N_1 = i_1(\partial\Delta^2)$ son combinatoriamente equivalentes.

Demostración. (1) \Rightarrow (2): Por la proposición 3.4.13, existe un homeomorfismo PL $h : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ que fija $N_1 = i_1(\partial\Delta^2)$ y cumple que $h \circ f$ fija un 3-simplejo $\sigma \subset \partial\Delta^4$. Debido al teorema de Alexander-Schoenflies, dado que $\partial\sigma$ es una 2-esfera combinatoria contenida en la 3-esfera combinatoria $\partial\Delta^4$, entonces $B^3 = \text{Cl}_{\partial\Delta^4}(\partial\Delta^4 - \sigma)$ es una 3-bola combinatoria, para la cual $\partial B^3 = \partial\sigma$. Como $h \circ f$ fija σ , se sigue que $(h \circ f)(B^3) = B^3$, así que $(h \circ f)|_{B^3} : B^3 \rightarrow B^3$ es un homeomorfismo PL que fija ∂B^3 y entonces por el teorema de Alexander-Tietze, existe una PL-isotopía de ambiente $\tilde{H} : B^3 \times I \rightarrow B^3 \times I$ cuyo homeomorfismo final es $(h \circ f)|_{B^3}$ y \tilde{H} fija ∂B^3 . Así, podemos construirnos una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} (x, t), & \text{si } (x, t) \in \sigma \times I, \\ \tilde{H}(x, t), & \text{si } (x, t) \in B^3 \times I. \end{cases}$$

Ya que $(h \circ f)|_{\sigma}$ es la identidad y el homeomorfismo final de \tilde{H} es $(h \circ f)|_{B^3}$, es claro que el homeomorfismo final de H es $h \circ f : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$. Como por hipótesis $f \circ i_0 = i_1$ y recordando que $h|_{N_1}$ es la identidad, entonces $(h \circ f) \circ i_0 = h \circ i_1 = i_1$ y puesto que $h \circ f$ es ambiente isotópico a la identidad mediante H , se concluye que i_0 y i_1 son PL-ambiente isotópicos.

(2) \Rightarrow (1): Existe una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ con homeomorfismo final $h_1 : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ tal que $h_1 \circ i_0 = i_1$. Entonces h_1 es homotópico a la identidad de $\partial\Delta^4$, luego de (1) y (3) del teorema 2.8.18, se sigue que h_1 es un homeomorfismo PL que preserva la orientación. Tomando $f = h_1$, se tiene lo deseado.

(1) \Rightarrow (3): Sea $f : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ un homeomorfismo PL que preserva la orientación tal que $f \circ i_0 = i_1$. Dado que $f^{-1} : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ también es un homeomorfismo PL que preserva la orientación, por la proposición 3.4.13, existe un homeomorfismo PL $\tilde{h} : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$, $\tilde{h}(N_0) = N_0$ y un 3-simplejo $\sigma \subset \partial\Delta^4 - N_0$, tales que $(\tilde{h} \circ f^{-1})|_{\sigma}$ es la identidad. Tomando $h = \tilde{h}^{-1}$, tenemos que $h : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ es un homeomorfismo PL tal que $h(N_0) = N_0$ y $(f \circ h)|_{\sigma}$ es la identidad.

Sea $p \in \sigma^\circ$. Existe un homeomorfismo PL $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \partial\Delta^4 - \{p\}$. Recordando que $\partial\Delta^4$ es una 3-esfera (teorema 1.6.10), esto quiere decir que $\partial\Delta^4$ es homeomorfo a la compactación en

un punto de \mathbb{R}^3 y podemos extender g al homeomorfismo $\hat{g} : \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \partial\Delta^4$, $\hat{g}(\infty) = p$. Dado que $\sigma \subset \partial\Delta^4$, gracias al lema 3.3.6 existe una cara frontera ρ de Δ^4 tal que $\sigma \subset \rho$ y entonces $\text{aff}(\sigma) = \text{aff}(\rho)$. Como $p \in \sigma^\circ$, del corolario 1.6.11 se sigue que existe una vecindad abierta V de p en $\text{aff}(\sigma)$ tal que $V \subset \sigma^\circ$. Es claro que $V \subset \rho^\circ$, por lo que V es abierto en ρ . Ya que $\rho \in \Sigma^3$, obtenemos que $V \cap \tau = \emptyset$ es abierto en τ , para todo $\tau \in \Sigma^3$ distinto de ρ . En vista de que la topología de $\partial\Delta^4$ es coherente con Σ^3 , se sigue que V es abierto en $\partial\Delta^4$. Esto nos dice que $W := \hat{g}^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de ∞ en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Puesto que W no es abierto en \mathbb{R}^3 (por contener a ∞), pero ya que W es abierto en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, entonces $W' := (\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}) - W$ es compacto en \mathbb{R}^3 . Debido a lo anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que $W' \subset V(0, \varepsilon)$. Puesto que $N_0 \subset \partial\Delta^4 - \sigma$, se tiene que $N'_0 := g^{-1}(N_0) \subset g^{-1}(\partial\Delta^4 - \sigma)$ es un nudo poligonal en \mathbb{R}^3 . Por otro lado, $V \subset \sigma$ implica que $g^{-1}(\partial\Delta^4 - \sigma) \subset g^{-1}(\partial\Delta^4 - V)$, es decir, $N'_0 \subset g^{-1}(\partial\Delta^4 - V) = \hat{g}^{-1}(\partial\Delta^4 - V) = (\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}) - \hat{g}^{-1}(V) = W' \subset V(0, \varepsilon)$. De este modo, podemos trasladar N'_0 a un nudo poligonal $N'' \subset \mathbb{R}^3 - V(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3 - W' \subset W$ y, en consecuencia, $N' := g(N'') \subset g(W) \subset \hat{g}(W) = V \subset \sigma$. Por el lema 3.3.5, obtenemos que N'_0 y N'' son nudos poligonales en \mathbb{R}^3 combinatoriamente equivalentes. Escojamos un poliedro compacto $P \subset \mathbb{R}^3$ que contenga a N'_0 , N'' y a los 2-simplejos usados para realizar las movidas $\Delta^{\pm 1}$ que transforman N'_0 en N'' . Dado que $g|_P$ es un homeomorfismo PL, la proposición 3.3.4 asegura que $N_0 = g(N'_0)$ y $N' = g(N'')$ son nudos poligonales en $\partial\Delta^4$ combinatoriamente equivalentes. Así, hemos hallado un nudo poligonal $N' \subset \sigma$ que es combinatoriamente equivalente a N_0 . Del mismo modo, ya que $f \circ h : \partial\Delta^4 \rightarrow \partial\Delta^4$ es un homeomorfismo PL, y recordando que $(f \circ h)|_\sigma$ es la identidad, $N' \subset \sigma$ y $h(N_0) = N_0$, por ser N_0 y N' combinatoriamente equivalentes, entonces $(f \circ h)(N_0) = f(N_0) = N_1$ y $(f \circ h)(N') = N'$ son combinatoriamente equivalentes. Por lo tanto, N_0 y N_1 son combinatoriamente equivalentes.

(3) \Rightarrow (2): Es consecuencia de la proposición 3.3.7, mediante la cual se cumple que cualesquiera dos nudos combinatoriamente equivalentes son PL-ambiente isotópicos. ■

XII. Discusión

Para lograr nuestro objetivo general, fue necesario entender que la topología PL tiene como preliminares algunos conceptos y resultados de geometría afín, en conjunción con la convexidad de conjuntos compactos con interior no vacío en un subespacio afín, particularmente aplicable a los simplejos. Se destaca que la noción de interior y frontera de un subespacio de \mathbb{R}^n como n -variedad con frontera es más adecuado que su interior y frontera como subconjunto de \mathbb{R}^n . En un primer momento, las definiciones de poliedro y función PL, en el sentido de Rourke y Sanderson (1982) [34], tuvieron su importancia teórica para probar de un modo relativamente sencillo que el producto cartesiano finito de poliedros, la unión finita de poliedros cerrados y las intersecciones finitas de poliedros, son poliedros; asimismo, que la composición de funciones PL, la inversa de un homeomorfismo PL y el producto cartesiano de funciones PL, es PL. No obstante, resulta más práctico definir funciones PL a partir de complejos simpliciales, subdivisiones y funciones simpliciales, a como define directamente Moise (1977) [26], aunque a partir de estas definiciones, al depender de triangulaciones, se complica exhibir los hechos básicos previamente enunciados. Por otro lado, es más sencillo probar, sin aludir a alguna triangulación, que una función, sobre una unión finita de poliedros cerrados, cuya restricción a cada uno de estos poliedros es una función PL, también es PL. Sin embargo, ambos enfoques son reconciliables. Hacia esta dirección nos dirigimos al verificar las pruebas de Rourke y Sanderson (1982) [34], cuando estudiamos que todo poliedro compacto no vacío es una unión finita de simplejos y que toda función PL cuyo dominio sea un poliedro compacto es propiamente una función lineal por partes, sobre una descomposición finita de simplejos del dominio. Tras tratar con subdivisiones de complejos simpliciales, específicamente con r -ésimos derivados, pudimos argumentar la proposición 2.4.11 debida a Hudson (1969) [13], crucial para justificar que todo poliedro compacto es el poliedro subyacente de algún complejo simplicial y, por ende, que al menos todo homeomorfismo PL, entre poliedros subyacentes de complejos simpliciales, es un homeomorfismo simplicial bajo subdivisiones adecuadas, lo cual fue suficiente para nuestros propósitos.

Fue pertinente estudiar la orientación de subespacios afines, primero desde un punto de vista geométrico y riguroso mediante las bases orientadas de un espacio vectorial, en el sentido del álgebra lineal, para poder establecer la orientación de simplejos y, por consiguiente, de complejos simpliciales, como define Lee (2000) [19]. Asimismo, lo anterior requirió del concepto de conexidad fuerte de complejos simpliciales, para comprender que, dado un n -complejo puro K y una subdivisión $K' \triangleleft K$, una orientación de K o K' determina una orientación en el otro (teorema 2.7.11). Posteriormente, con tal de formalizar y entender el concepto de auto-homeomorfismos de esferas (combinatorias) que preservan la orientación, fue preciso abordar la noción de orientación desde la perspectiva algebraica de la homología simplicial, de acuerdo con la formulación de Munkres (1984) [28] y Armstrong (1983) [4]. Comprender el teorema de subdivisión algebraica hallado en [28] fue clave para caracterizar el operador de subdivisión, como se formula en la proposición 2.8.12. En consecuencia, dado un $(n+1)$ -simplejo σ y escogiendo una orientación de $\Sigma^n = K(\sigma)$, cualquier auto-homeomorfismo PL f que preserve la orientación de $\partial\sigma$ cumple que preserve la orientación inducida en las sub-

divisiones $K', K'' \triangleleft \Sigma^n$, para las cuales $f : |K'| \rightarrow |K''|$ es un homeomorfismo simplicial (proposición 2.8.20).

Considerando los nudos como encajes de la 1-esfera unitaria al espacio euclidiano tridimensional, o mejor todavía, a la 3-esfera unitaria, se formula el concepto de equivalencia a partir de isotopías de ambiente y, por ende, desde una perspectiva funcional. Seguidamente, delimitar nuestro interés a los nudos mansos, da la pauta de trabajar exclusivamente en la categoría PL y, así se integró la teoría revisada y desarrollada en los primeros capítulos. Por otro lado, trabajar propiamente con nudos poligonales dio la apertura para establecer otra definición de equivalencia de estos tipos de nudos, aprovechando la naturaleza combinatoria subyacente, siguiendo entonces la línea de las movidas $\Delta^{\pm 1}$ que permiten transformar un nudo en otro y hablando, por consiguiente, de una equivalencia combinatoria. Habiendo estudiado en rigor la noción de orientación con el enfoque de la homología simplicial, pudimos abordar una tercera noción de equivalencia de nudos, a través de un auto-homeomorfismo PL que preserva la orientación de $\partial\Delta^4$, el cual, al componerse con un nudo PL, define otro nudo PL.

Vimos una aplicación importante del teorema de Alexander-Tietze: este resultado redujo el problema de definir una PL-isotopía de ambiente $H : \partial\Delta^4 \times I \rightarrow \partial\Delta^4 \times I$ a simplemente definir un auto-homeomorfismo PL de una 3-bola combinatoria $B \subset \partial\Delta^4$, que sea la identidad en su frontera, ya que ésta daba lugar a una PL-isotopía de ambiente $B \times I \rightarrow B \times I$ que fija ∂B y que, por ende, puede extenderse fácilmente a la PL-isotopía de ambiente H deseada. Esta estrategia se aprovechó para construir PL-isotopías de ambiente con características técnicas (lemas 3.2.7 y 3.2.9). Por otro lado, se dieron construcciones auxiliares para, posteriormente, formar n -bolas combinatorias sencillas (lemas 3.2.8 y del 3.2.10 al 3.2.13). Argumentamos el hecho crucial que las movidas $\Delta^{\pm 1}$ pueden seguirse a través de un homeomorfismo PL, que manden los 2-simplejos involucrados a 2-simplejos en el contradominio, de modo que la equivalencia combinatoria de nudos poligonales se preserve bajo homeomorfismos PL. Esto tiene como consecuencia que la equivalencia combinatoria de nudos poligonales en \mathbb{R}^3 coincide con la equivalencia combinatoria de nudos poligonales en $\partial\Delta^4$, ya que siempre existe un homeomorfismo PL $\mathbb{R}^3 \rightarrow \partial\Delta^4 - \{p\}$, $\forall p \in \partial\Delta^4$. Un breve estudio del teorema de Alexander-Schoenflies, así como de la teoría de vecindades regulares, fue clave para exhibir que todo auto-homeomorfismo PL de $\partial\Delta^4$ que preserve la orientación, puede componerse con otro auto-homeomorfismo PL de $\partial\Delta^4$ que fije un nudo poligonal N_0 dado, y que también la composición de los homeomorfismos fije un 3-simplejo fuera de una vecindad regular de N_0 (proposición 3.4.13), fundamental en dos partes de la demostración del teorema principal. No obstante, no se logró exponer el contenido teórico requerido en su cabalidad para proporcionar demostraciones comprensibles a nivel licenciatura del teorema de Alexander-Schoenflies, ni de los resultados sobre vecindades regulares, ya que habría alargado bastante el contenido de esta tesis, sin mencionar que nos habría desviado de nuestro objetivo.

De esta forma, se presentó y desarrolló la teoría necesaria, procurando mantenerse a un nivel elemental de licenciatura en la medida de lo posible, para fundamentar los argumentos establecidos por Burden *et al* (2014) [8] en la demostración del teorema de equivalencia de equivalencias de nudos mansos, lo cual se traduce en una respuesta positiva a nuestra pregunta de investigación.

XIII. Conclusiones y recomendaciones

Tal y como hemos podido corroborar, estudiar la teoría clásica de la topología PL nos dio las herramientas para poder establecer las conexiones entre las tres nociones de equivalencia de nudos PL. Esto significa que la hipótesis planteada se verifica: las definiciones de equivalencia positiva y PL-equivalencia de nudos PL, y la equivalencia combinatoria de nudos poligonales, sí están relacionadas, puesto que, afirmando la pregunta de investigación, dos nudos PL son equivalentes positivos, si y sólo si son PL-equivalentes, si y sólo si sus imágenes son combinatoriamente equivalentes. La realización de lo anterior, y por ende, del objetivo general, se refleja propiamente en la prueba del teorema de equivalencia de equivalencias, argumentado y fundamentado conforme a los lemas, proposiciones y teoremas que se plantearon a lo largo de la tesis. Ciertamente, la demostración detallada que presentamos de este teorema es muy larga y tuvo que separarse en varios lemas y proposiciones previos, pero también refleja el arduo desarrollo teórico en este trabajo. En este sentido, un área de oportunidad sería dar una prueba alternativa, más concisa aunque todavía comprensible para un estudiante de licenciatura.

Desafortunadamente, un estudio detallado y riguroso del teorema de Alexander-Schoenflies como el planteado en Lickorish (1989) [21], o bien de la teoría de vecindades regulares siguiendo la ideas de Hudson (1969) [13] y Rourke y Sanderson (1982) [34], excedieron los alcances y objetivos de esta investigación. Se requiere una mayor comprensión de la topología PL que la aquí presentada y, por sí mismos, cada uno podrían conformar un trabajo de tesis, ya sea buscando fundamentarlos a un nivel elemental de licenciatura, o ya reservándolos para una investigación de maestría.

Referencias

- [1] Adams, C. C. (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society.
- [2] Aleksandrov P. S. (1956). *Combinatorial Topology*. (Vol. 1). Graylock Press.
- [3] Alexander, J. W. (1924). On the Subdivision of 3-Space by Polyhedron. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 10(1), 6–8.
- [4] Armstrong, M. A. (1983). *Basic Topology*. Springer Science+Business Media New York.
- [5] Bredon, G. E. (1993). *Topology and Geometry*. Springer Science+Business Media New York.
- [6] Bryant, J. L. (2002). Piecewise Linear Topology. En Daverman R. J. y Sher, R. B. (Ed.), *Handbook of Geometric Topology* (1ª ed., pp. 219–259). Elsevier Science.
- [7] Burde, G. y Zieschang, H. (1985). *Knots*. De Gruyter.
- [8] Burde, G., Zieschang, H. y Heusener, M. (2014). *Knots*. De Gruyter.
- [9] Cromwell, P. R. (2004). *Knots and Links*. Cambridge University Press.
- [10] Crowell, R. H. y Fox, C. (1977). *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag.
- [11] Daverman, R. J. y Venema, G. A. (2009). *Embeddings in Manifolds*. American Mathematical Society.
- [12] Hoffman, K. y Kunze, R. (1991). *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- [13] Hudson, J. F. P. (1969). *Piecewise Linear Topology*. W. A. Benjamin, Inc.
- [14] Hudson, J. F. P. y Zeeman, E. C. (1964). On Combinatorial Isotopy. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 19, 69–94. <http://eudml.org/doc/103842>
- [15] Johnson, J. (2018). *Notes on Piecewise-linear Topology*.
- [16] Kawauchi, A. (1996). *A Survey of Knot Theory*. Birkhäuser Verlag.
- [17] Kosniowski, C. (1980). *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [18] Kulpa, W. (1998). Poincaré and Domain Invariance Theorem. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 39(1–2), 127–136. <http://dml.cz/dmlcz/702050>
- [19] Lee, J. M. (2000). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag.
- [20] Lickorish, W. B. R. (1997). *An Introduction to Knot Theory*. Springer Science+Business Media New York.

- [21] Lickorish, W. B. R. (1989). The Irreducibility of the 3-Sphere. *Michigan Mathematical Journal*, 36(3), 345–349.
- [22] Livingston, C. (1993). *Knot Theory*. The Mathematical Association of America.
- [23] Luft, E. (1965). On the Combinatorial Schoenflies Conjecture. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16(5), 1008–1011.
- [24] Maschler, M., Solan, E. y Zamir, S. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press.
- [25] Matveev, S. V. (2006). *Lectures on Algebraic Topology*. European Mathematical Society.
- [26] Moise, E. E. (1977). *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer Science+Business Media New York.
- [27] Munkres, J. R. (1991). *Analysis on Manifolds*. Addison-Wesley.
- [28] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [29] Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Prentice Hall.
- [30] Pérez Pérez, A., Nájera Rangel, E., Cruz Suárez, H. D. y Flowers Jarvis, R. J. (2011). *Introducción Básica al Estudio del Análisis Matemático*. UJAT.
- [31] Reidemeister, K. (1983). *Knot Theory*. BCS Associates.
- [32] Rolfsen, D. (2003). *Knots and links*. AMS Chelsea Publishing.
- [33] Roman, S. (1992). *Advanced Linear Algebra*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [34] Rourke, C. P. y Sanderson, B. J. (1982). *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag.
- [35] Rudyak, Y. (2016). *Piecewise Linear Structures on Topological Manifolds*. World Scientific.
- [36] Schultens, J. (2014). *Introduction to 3-Manifolds*. American Mathematical Society.
- [37] Singer, L. M. y Thorpe, J. A. (1967). *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag.
- [38] Welsh, D. J. A. (1993). *Complexity: Knots, Colourings and Counting*. Cambridge University Press.
- [39] Zeeman, E. C. (1963). *Seminar on Combinatorial Topology*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques.
- [40] Zeeman, E. C. (1960). Unknotting Spheres. *Annals of Mathematics*, 72(2), 350–361. <http://www.jstor.org/stable/1970138>

Anexo

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de Tesis:	El teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos
Autor de la Tesis:	Ronaldo Álvarez Rivera
ORCID:	0009-0006-2890-1240
Resumen de la Tesis:	<p>Un nudo es un encaje de la 1-esfera unitaria en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3, o bien en su compactación en un punto, que es la 3-esfera unitaria. Se define un nudo poligonal como una curva poligonal cerrada simple en \mathbb{R}^3 o en la frontera del 4-simplejo estándar. Por su parte, un nudo es manso, si es ambiente isotópico a un nudo cuya imagen sea un nudo poligonal. Desde el punto de vista de la topología PL, un nudo manso puede considerarse como un encaje PL de la frontera del 2-simplejo estándar en la frontera del 4-simplejo estándar, puesto que la imagen de este es un nudo poligonal. En este sentido, en la literatura se encuentran hasta tres nociones principales de equivalencia de nudos: PL-equivalencia de encajes PL a partir de PL-isotopías de ambiente, equivalencia combinatoria entre nudos poligonales mediante las llamadas movidas $\Delta^{\pm 1}$ y equivalencia positiva, cuando existe un auto-homeomorfismo PL de la frontera del 4-simplejo estándar que preserva la orientación y manda un nudo poligonal a otro.</p> <p>En esta tesis daremos una demostración detallada del teorema de equivalencia de equivalencias para nudos mansos, que establece la equivalencia de las tres nociones previamente mencionadas; seguiremos la prueba proporcionada por Burde <i>et al</i> (2014) y presentaremos el fundamento teórico básico de la topología PL para su comprensión a nivel licenciatura.</p>
Palabras claves de la Tesis:	Nudo manso, nudo poligonal, PL-equivalencia, equivalencia combinatoria, equivalencia positiva.
Referencias citadas:	Adams, C. C. (2004). <i>The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots</i> . American Mathematical Society.

Universidad Juárez Autónoma de Chihuahua	<p>Aleksandrov P. S. (1956). <i>Combinatorial Topology</i>. (Vol. 1). Graylock Press.</p> <p>Alexander, J. W. (1924). On the Subdivision of 3-Space by Polyhedron. <i>Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America</i>, 10(1), 6–8.</p> <p>Armstrong, M. A. (1983). <i>Basic Topology</i>. Springer Science+Business Media New York.</p> <p>Bredon, G. E. (1993). <i>Topology and Geometry</i>. Springer Science+Business Media New York.</p> <p>Bryant, J. L. (2002). Piecewise Linear Topology. En Daverman R. J. y Sher, R. B. (Ed.), <i>Handbook of Geometric Topology</i> (1ª ed., pp. 219–259). Elsevier Science.</p> <p>Burde, G. y Zieschang, H. (1985). <i>Knots</i>. De Gruyter.</p> <p>Burde, G., Zieschang, H. y Heusener, M. (2014). <i>Knots</i>. De Gruyter.</p> <p>Cromwell, P. R. (2004). <i>Knots and Links</i>. Cambridge University Press.</p> <p>Crowell, R. H. y Fox, C. (1977). <i>Introduction to Knot Theory</i>. Springer-Verlag.</p> <p>Daverman, R. J. y Venema, G. A. (2009). <i>Embeddings in Manifolds</i>. American Mathematical Society.</p> <p>Hoffman, K. y Kunze, R. (1991). <i>Álgebra Lineal</i>. Prentice-Hall Hispanoamericana.</p> <p>Hudson, J. F. P. (1969). <i>Piecewise Linear Topology</i>. W. A. Benjamin, Inc.</p> <p>Hudson, J. F. P. y Zeeman, E. C. (1964). On Combinatorial Isotopy. <i>Publications Mathématiques de l’IHÉS</i>, 19, 69–94. http://eudml.org/doc/103842</p> <p>Johnson, J. (2018). <i>Notes on Piecewise-linear Topology</i>.</p> <p>Kawauchi, A. (1996). <i>A Survey of Knot Theory</i>. Birkhäuser Verlag.</p>
--	--

Universidad Juárez Autónoma de Chihuahua	<p>Kosniowski, C. (1980). <i>A First Course in Algebraic Topology</i>. Cambridge University Press.</p> <p>Kulpa, W. (1998). Poincaré and Domain Invariance Theorem. <i>Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica</i>, 39(1-2), 127–136. http://dml.cz/dmlcz/702050</p> <p>Lee, J. M. (2000). <i>Introduction to Topological Manifolds</i>. Springer-Verlag.</p> <p>Lickorish, W. B. R. (1997). <i>An Introduction to Knot Theory</i>. Springer Science+Business Media New York.</p> <p>Lickorish, W. B. R. (1989). The Irreducibility of the 3-Sphere. <i>Michigan Mathematical Journal</i>, 36(3), 345–349.</p> <p>Livingston, C. (1993). <i>Knot Theory</i>. The Mathematical Association of America.</p> <p>Luft, E. (1965). On the Combinatorial Schoenflies Conjecture. <i>Proceedings of the American Mathematical Society</i>, 16(5), 1008–1011.</p> <p>Maschler, M., Solan, E. y Zamir, S. (2013). <i>Game Theory</i>. Cambridge University Press.</p> <p>Matveev, S. V. (2006). <i>Lectures on Algebraic Topology</i>. European Mathematical Society.</p> <p>Moise, E. E. (1977). <i>Geometric Topology in Dimensions 2 and 3</i>. Springer Science+Business Media New York.</p> <p>Munkres, J. R. (1991). <i>Analysis on Manifolds</i>. Addison-Wesley.</p> <p>Munkres, J. R. (1984). <i>Elements of Algebraic Topology</i>. Addison-Wesley Publishing Company.</p> <p>Munkres, J. R. (2000). <i>Topology</i>. Prentice Hall.</p> <p>Pérez Pérez, A., Nájera Rangel, E., Cruz Suárez, H. D. y Flowers Jarvis, R. J. (2011). <i>Introducción Básica al Estudio del Análisis Matemático</i>. UJAT.</p> <p>Reidemeister, K. (1983). <i>Knot Theory</i>. BCS Associates.</p> <p>Rolfsen, D. (2003). <i>Knots and links</i>. AMS Chelsea Publishing.</p>
--	---

<p style="text-align: center;">Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.</p>	<p>Roman, S. (1992). <i>Advanced Linear Algebra</i>. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.</p>
	<p>Rourke, C. P. y Sanderson, B. J. (1982). <i>Introduction to Piecewise-Linear Topology</i>. Springer-Verlag.</p>
	<p>Rudyak, Y. (2016). <i>Piecewise Linear Structures on Topological Manifolds</i>. World Scientific.</p>
	<p>Schultens, J. (2014). <i>Introduction to 3-Manifolds</i>. American Mathematical Society.</p>
	<p>Singer, L. M. y Thorpe, J. A. (1967). <i>Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry</i>. Springer-Verlag.</p>
	<p>Welsh, D. J. A. (1993). <i>Complexity: Knots, Colourings and Counting</i>. Cambridge University Press.</p>
	<p>Zeeman, E. C. (1963). <i>Seminar on Combinatorial Topology</i>. Institut des Hautes Etudes Scientifiques.</p> <p>Zeeman, E. C. (1960). Unknotting Spheres. <i>Annals of Mathematics</i>, 72(2), 350–361. http://www.jstor.org/stable/1970138</p>