



**UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO**  
**DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS**



---

---

**RADIACIÓN DE UN DIPOLO ELÉCTRICO  
DINÁMICO CUYA CARGA DECAE EN EL  
TIEMPO**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**LICENCIADO EN FÍSICA**

PRESENTA

**JUAN MANUEL CORONEL CARRILLO**

DIRECTOR

**DR. JORGE MAURICIO PAULIN FUENTES**

CODIRECTOR

**DR. JAIME MANUEL CABRERA**

Cunduacán, Tab.

19 de Mayo del 2025

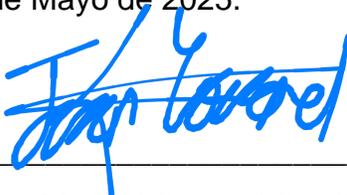
## Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, el día 08 del mes de Mayo del año 2025, el que suscribe Juan Manuel Coronel Carrillo, alumno del Programa de Licenciatura en Física con número de matrícula 192A12001, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del grado de Licenciatura y titulada "Radiación de un Dipolo Eléctrico Dinámico cuya Carga Decae en el Tiempo" dirigida por el doctor Jorge Mauricio Paulin Fuentes y codirigida por el doctor Jaime Manuel Cabrera.

### DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 08 de Mayo de 2025.



---

Juan Manuel Coronel Carrillo

# LICENCIATURA - RADIACIÓN DE UN DIPOLO ELÉCTRICO DINÁMICO CUYA CARGA DECAE EN EL TIEMPO

INFORME DE ORIGINALIDAD

# 6%

ÍNDICE DE SIMILITUD



## FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="https://archive.org">archive.org</a> Internet	77 palabras — 1%
2	<a href="https://documents.mx">documents.mx</a> Internet	73 palabras — 1%
3	<a href="https://vdoc.pub">vdoc.pub</a> Internet	68 palabras — 1%
4	<a href="https://docplayer.es">docplayer.es</a> Internet	43 palabras — < 1%
5	<a href="https://documentop.com">documentop.com</a> Internet	34 palabras — < 1%
6	<a href="https://idoc.pub">idoc.pub</a> Internet	34 palabras — < 1%
7	<a href="https://www.academia.edu">www.academia.edu</a> Internet	33 palabras — < 1%
8	<a href="https://mineranet.com.ar">mineranet.com.ar</a> Internet	32 palabras — < 1%
9	<a href="https://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a> Internet	30 palabras — < 1%
10	<a href="https://www.mitecnologico.com">www.mitecnologico.com</a> Internet	

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

ESTUDIOS  
TERMINALES



**UJAT**  
UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 08 de mayo de 2025.

**C. JUAN MANUEL CORONEL CARRILLO  
PASANTE DE LA LIC. EN FÍSICA  
PRESENTE**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado: **“RADIACIÓN DE UN DIPOLO ELÉCTRICO DINÁMICO CUYA CARGA DECAE EN EL TIEMPO”** dirigido por el Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes con la codirección del Dr. Jaime Manuel Cabrera, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Mtro. Ricardo Arias Palacios, Mtro. Alejandro Torres Hernández, Dr. Ibis Ricárdez Vargas, Dr. Cristino Ricárdez Jiménez y Dr. Esteban Andrés Zárate, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL  
DIRECTORA**

C.c.p. Archivo.

DIR´DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

## Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 08 de mayo del 2025.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTOR(A) y/o AUTORES(RAS) en la producción, creación y/o realización de la obra denominada "RADIACIÓN DE UN DIPOLO ELÉCTRICO DINÁMICO CUYA CARGA DECAE EN EL TIEMPO".

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

### COLABORADORES



JUAN MANUEL CORONEL CARRILLO



DR. JORGE MAURICIO PAULIN FUENTES

AUTOR



DR. JAIME MANUEL CABRERA

DIRECTOR

CODIRECTOR

### TESTIGOS



ÁNGEL EDUARDO DE LA CRUZ CARRETA



Lorena del Carmen Ochoa López

# Dedicatoria

A mi abuelito Beto.

*“No te des por vencido, ni aun vencido.”*

— Almafuerite

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Agradecimientos

A lo largo de este trabajo he aprendido que la investigación no solo requiere tiempo y esfuerzo, sino también una red de apoyo que hace posible avanzar incluso cuando las cosas se complican.

Agradezco sinceramente a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por haber sido mi casa de estudios durante esta etapa. A la División Académica de Ciencias Básicas por brindarme las herramientas formativas que hicieron posible esta tesis.

A mi asesor de tesis, el Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes, gracias por su paciencia, exigencia y tiempo. Su guía fue fundamental para aterrizar ideas, superar trabas técnicas y dar forma a un proyecto que comenzó como un simple póster.

A los profesores-investigadores Dr. Jorge Alejandro Bernal Arroyo, Dr. José Guadalupe Segovia López, Dr. Richard Falconi Calderón y Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo, gracias por enseñarme con tanta pasión y por hacer de la física algo más que un conjunto de fórmulas. Sus clases dejaron huella.

Agradezco profundamente a mi comité sinodal por la disposición y generosidad con la que revisaron mi tesis con tanta antelación. Al Dr. Francisco Alejandro De la Rosa Priego por agilizar mi proceso tanto como fue posible. Su compromiso facilitó en gran medida este cierre de etapa.

A mi familia, quienes han sido mi soporte emocional desde el inicio.

Finalmente, a mis amigos, por las charlas que empezaban como dudas y acababan como ideas.

Esta tesis es la suma de pequeños esfuerzos de muchas manos invisibles.

# Resumen

En esta tesis se estudia la radiación electromagnética de un dipolo eléctrico cuya carga decae exponencialmente en el tiempo. Se derivan las expresiones para los campos eléctricos y magnéticos, y la potencia total radiada en un ciclo de oscilación a partir de los potenciales retardados y las ecuaciones de Maxwell. Se encuentra que la presencia del factor de decaimiento de la carga modifica la estructura espectral de la radiación y atenúa su intensidad. Se comparan los resultados con el caso clásico de un dipolo con carga constante, destacando las diferencias en la potencia radiada y su dependencia con las frecuencias de oscilación  $\omega$  y  $1/\tau$ . Se implementa un modelo motivado por el reporte de estructuras dipolares y cuadrupolares dinámicas con estas características en plasmas inducidos por láser obtenidos experimentalmente en [1, 2, 3, 4] y recientemente en [5, 6], esto con el objetivo de analizar la potencia radiada por dichos dipolos. Considerando nuestro modelo matemático de un dipolo eléctrico que decae con el tiempo, se observa que la potencia radiada presenta un acoplamiento entre la frecuencia de decaimiento  $1/\tau$  y la frecuencia de oscilación  $\omega$ ; esto contrasta con la expresión clásica para la potencia radiada formulada por [7]. A diferencia del caso clásico, se encuentra una dependencia en  $r$ , que se explica como interferencia constructiva y destructiva en la propagación de la onda electromagnética; sin embargo, esta no afecta en gran medida a la magnitud de la potencia, como sí lo hace el factor de decaimiento  $e^{-t/\tau}$ , que hace que la potencia radiada decaiga a medida que avanza entre ciclos de oscilación.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	8
1.2. Justificación . . . . .	8
1.3. Objetivos . . . . .	9
1.3.1. Objetivo general . . . . .	9
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	9
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>10</b>
2.0.1. Radiación electromagnética . . . . .	10
2.0.2. El Vector de Poynting y el Transporte de Energía . . . . .	11
2.0.3. Dipolos eléctricos . . . . .	12
2.0.4. Movimiento espacial del dipolo . . . . .	12
2.0.5. Decaimiento temporal de la carga . . . . .	12
2.0.6. Potencia radiada por un dipolo eléctrico . . . . .	13
2.0.7. Factor de decaimiento de la carga . . . . .	13
2.1. Antecedentes . . . . .	13
<b>3. Metodología</b>	<b>17</b>
3.1. Enfoque . . . . .	17
3.2. Procedimiento . . . . .	17
3.2.1. Flujo eléctrico . . . . .	20
3.2.2. Campo eléctrico . . . . .	22
3.2.3. Campo magnético . . . . .	23
3.2.4. Vector de Poynting . . . . .	23
3.2.5. Potencia radiada . . . . .	26
<b>4. Resultados</b>	<b>30</b>
4.1. Discusión sobre la radiación en un ejemplo real . . . . .	31
<b>5. Conclusiones</b>	<b>37</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	37

5.2. Investigaciones futuras . . . . .	38
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Índice de figuras

3.1. Distribución espacial propuesta. . . . .	18
3.2. Distribución de corriente entre las cargas. . . . .	21
3.3. Distribución propuesta con el vector $\theta$ . . . . .	21
4.1. Distribución espacial del dipolo. . . . .	32
4.2. Gráfica de la potencia radiada en función de $\omega$ y $\tau$ en un rango de $5.43 \times 10^{-9} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-9}$ , $1.87 \times 10^8 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^8$ , con $r = 1.03 \times 10^2 m$ . . . . .	33
4.3. Gráfica de la potencia radiada contra $\omega$ y $\tau$ en un rango de $5.43 \times 10^{-10} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-8}$ y $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ , con $r = 1.03 \times 10^2 m$ . . . . .	33
4.4. Gráfica de la potencia radiada en función de $\omega$ para el caso del dipolo con decaimiento temporal, en un rango de $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ , $r = 1.03 \times 10^2 m$ . . . . .	34
4.5. Gráfica de la potencia radiada en función de $\omega$ para el caso del dipolo estacionario en un rango de $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ , $r = 1.03 \times 10^2 m$ . . . . .	35
4.6. Gráfica de la potencia radiada en función de $\omega$ para el caso del dipolo con decaimiento temporal, en un rango de $1.75 \times 10^8 \leq \omega \leq 3 \times 10^8$ , con $r = 1.03 \times 10^2 m$ . . . . .	35

# Capítulo 1

## Introducción

La radiación electromagnética es un fenómeno físico fundamental, descrito por las ecuaciones de Maxwell, que unifican el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Este conjunto de ecuaciones, desarrollado por James Clerk Maxwell en el siglo XIX, no solo consolidó las bases de la electrodinámica clásica, sino que también demostró que la luz es una forma de radiación electromagnética, ampliando nuestra comprensión del espectro electromagnético, que abarca desde ondas de radio hasta rayos gamma [8].

Una de las principales fuentes de radiación electromagnética son las cargas aceleradas, las cuales generan ondas cuya propagación está determinada por la interacción entre sus componentes eléctricas y magnéticas. En este contexto, el estudio de los dipolos eléctricos ha sido clave para modelar sistemas físicos en campos como las telecomunicaciones, la óptica y la astrofísica [9, 10].

Un dipolo eléctrico, formado por dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia finita, es caracterizado por su momento dipolar. Cuando el momento dipolar varía con el tiempo, como en el caso de oscilaciones periódicas, el dipolo emite radiación electromagnética cuya intensidad y distribución angular dependen de las características de esta variación [11].

Los estudios tradicionales se han enfocado en dipolos estacionarios, donde el dipolo permanece fijo mientras su momento oscila. Sin embargo, los dipolos en movimiento, que combinan desplazamiento espacial con aceleración variable de las cargas, presentan patrones de radiación más complejos. Además, fenómenos como el decaimiento temporal de la carga añaden una dimensión adicional al análisis, afectando tanto la intensidad como la distribución de la radiación.

El análisis de dipolos dinámicos con carga en decaimiento temporal tiene implicaciones tanto teóricas como prácticas. Por un lado, contribuye en la comprensión de los fenómenos de la radiación electromagnética. Por otro lado, puede tener aplicaciones en áreas como el diseño de antenas, donde es esencial modelar la emisión de ondas bajo condiciones dinámicas complejas.

En este trabajo, se busca aportar nuevos conocimientos a la literatura mediante un

análisis teórico de la radiación de un dipolo eléctrico cuya carga disminuye en el tiempo. Este enfoque ofrece una perspectiva novedosa para analizar la interacción entre el movimiento espacial de un dipolo, el decaimiento de la carga y la potencia radiada, estableciendo un marco teórico que puede extenderse a otros sistemas físicos.

## 1.1. Planteamiento del problema

Un dipolo eléctrico, formado por dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia finita, es caracterizado por su momento dipolar. Cuando el momento dipolar varía con el tiempo, como en el caso de oscilaciones periódicas, el dipolo emite radiación electromagnética cuya intensidad y distribución angular dependen de las características de esta variación [11]. Este trabajo se enfoca en un dipolo eléctrico cuyas cargas oscilan espacialmente y decaen exponencialmente con el tiempo. Este tipo de sistema podría tener implicaciones importantes en el análisis de radiación electromagnética en condiciones realistas, como en sistemas de osciladores con pérdidas energéticas o decaimiento natural de átomos radiactivos [12] y podría ayudar a entender los mecanismos de radiación generados por plasmas inducidos por láser [5, 6].

Hasta donde se sabe, este tipo particular de dipolos dinámicos aún no cuenta con una descripción teórica rigurosa. En ese sentido, este trabajo busca analizar la radiación electromagnética emitida por un dipolo eléctrico, cuya carga decae con el tiempo, en la zona de radiación, definida como la región donde  $||\vec{r}'|| \rightarrow \infty$ , donde  $\vec{r}'$  es el vector de posición del observador. Se analizarán tanto los campos eléctricos como magnéticos generados, así como la potencia total radiada del sistema.

## 1.2. Justificación

La radiación electromagnética generada por dipolos eléctricos dinámicos es un tema de gran interés tanto en la física teórica como en la aplicada, ya que permite entender fenómenos fundamentales y diseñar tecnologías basadas en la emisión y recepción de ondas electromagnéticas. En particular, la combinación de movimiento espacial y decaimiento temporal de las cargas introduce nuevas complejidades en la descripción de la radiación, abriendo una línea de investigación que aún no ha sido explorada completamente en la literatura.

Se han reportado en la literatura trabajos experimentales donde se han observado momentos dipolares y cuadrupolares eléctricos, producidos por plasmas inducidos por láser [1, 2, 3, 4]; y recientemente estructuras dinámicas similares, con la característica de que su densidad de carga disminuye con el tiempo, han sido reportadas en [5, 6]. Sin embargo, hasta donde sabemos, no se ha desarrollado un marco analítico detallado para

describir la radiación de dipolos eléctricos con estas características. Esta falta de modelos analíticos limita nuestra capacidad de predecir con precisión el comportamiento de la potencia radiada emitida por estos sistemas dipolares. Esto podría tener aplicaciones prácticas relevantes, como la optimización de antenas, la caracterización de emisiones radiactivas en plasmas, o el modelado de sistemas astrofísicos.

Al desarrollar una descripción matemática que permita predecir el comportamiento de la potencia radiada por un dipolo eléctrico oscilante cuya carga decae en el tiempo, el presente trabajo pretende contribuir al entendimiento de la interacción entre la dinámica espacial del dipolo y los efectos del decaimiento de la carga, en la potencia radiada, proporcionando herramientas teóricas con posibles aplicaciones que podrían extenderse más allá de los sistemas de emisiones radiativas en plasmas. Además, esta investigación tiene el potencial de sentar las bases para futuras simulaciones computacionales y estudios experimentales que validen los modelos desarrollados.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo general**

Analizar la potencia radiada por un dipolo eléctrico con carga oscilante y decaimiento temporal, obteniendo los campos electromagnéticos y determinando el flujo de energía radiada.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Desarrollar expresiones matemáticas para los campos eléctricos y magnéticos generados por un dipolo oscilante cuya carga decae exponencialmente con el tiempo.
- Determinar el vector de Poynting, calcular su promedio temporal sobre un ciclo completo de oscilación, y la potencia total radiada integrando el flujo de energía a través de una superficie.
- Analizar el efecto del decaimiento temporal de la carga de un dipolo oscilante sobre la radiación emitida y la magnitud de la potencia radiada, comparándolo con la magnitud de la potencia radiada en el caso de un dipolo oscilante con carga constante.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.0.1. Radiación electromagnética

La radiación electromagnética es un fenómeno físico descrito por las ecuaciones de Maxwell, las cuales explican la interacción entre los campos eléctricos y magnéticos [8]. Este tipo de radiación se genera por cargas aceleradas y se propaga en forma de ondas, con componentes eléctricas y magnéticas perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Comprender este fenómeno es esencial para analizar sistemas como dipolos eléctricos, que son fuentes fundamentales de radiación [9].

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío, sin fuentes, son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

donde:

- $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico.
- $\mathbf{B}$  es el campo magnético.

Aplicando la operación rotacional ( $\nabla \times$ ) a la ecuación de Faraday (2.2):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Usando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

y considerando que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

Esta es la ecuación de onda para el campo eléctrico, lo que demuestra que el campo  $\mathbf{E}$  se propaga como una onda en el vacío con velocidad:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (2.7)$$

De manera análoga, aplicando el mismo procedimiento al campo magnético, se obtiene la ecuación de onda para  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones muestran que tanto  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{B}$  se propagan en el vacío en forma de ondas electromagnéticas con velocidad  $c$ , esta corresponde a la velocidad de la luz en el vacío (aproximadamente  $2.99792 \times 10^8 m/s$ ).

## 2.0.2. El Vector de Poynting y el Transporte de Energía

Además de describir la propagación de los campos eléctricos y magnéticos, es fundamental describir cómo la energía se transporta en una onda electromagnética. Esto se logra mediante el vector de Poynting, definido como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.9)$$

El Vector de Poynting representa la densidad de flujo de energía electromagnética [ $W/m^2$ ] y describe cómo la energía viaja en la dirección de propagación de la onda. En el caso de una onda electromagnética plana que se propaga, con el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , en la dirección  $x$  y el campo magnético,  $\mathbf{B}$ , en la dirección  $y$ , el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación  $z$ , lo cual indica que el flujo de energía ocurre en dicha dirección.

El promedio temporal sobre un ciclo de oscilación,  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , de la onda electromagnética da la intensidad de radiación, expresada como:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dt. \quad (2.10)$$

Este análisis es crucial para entender la transferencia de energía en sistemas radiantes, como antenas dipolares, en las cuales la energía electromagnética es emitida en el espacio y propagada en forma de ondas.

El estudio de la radiación electromagnética a partir de las ecuaciones de Maxwell permite obtener la ecuación de onda electromagnética, demostrando que los campos eléctricos

y magnéticos se propagan en el espacio en forma de ondas con la velocidad de la luz,  $c$ . Además, el vector de Poynting proporciona una herramienta fundamental para describir cómo la energía es transportada en la radiación electromagnética, siendo clave en el análisis de dipolos eléctricos y otros sistemas radiantes.

### 2.0.3. Dipolos eléctricos

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia finita. El momento dipolar eléctrico se define como:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad (2.11)$$

donde  $q$  es la magnitud de la carga y  $\mathbf{d}$  es el vector de separación entre las cargas [10]. Un dipolo estacionario no genera radiación porque su campo eléctrico es estático. Cuando un dipolo oscila, su momento dipolar varía en el tiempo, lo que genera radiación electromagnética cuya intensidad depende de la variación temporal del momento dipolar. La radiación emitida por dipolos con carga estacionaria ha sido estudiada ampliamente, pero los patrones generados por dipolos dinámicos requieren un análisis más detallado debido a la complejidad de su dinámica [11].

### 2.0.4. Movimiento espacial del dipolo

El movimiento espacial de un dipolo modifica la distribución de los campos eléctricos y magnéticos generados, alterando los patrones de radiación. La descripción del fenómeno radiativo engloba la información del movimiento espacial del dipolo. Esto involucra ecuaciones vectoriales que incluyen trayectoria, velocidad y aceleración del dipolo. En sistemas donde las velocidades se acercan a la de la luz, deben considerarse efectos relativistas, como la dilatación temporal y contracción espacial [13]. Estos efectos son relevantes en la caracterización precisa de la radiación emitida por dipolos en movimiento relativista.

### 2.0.5. Decaimiento temporal de la carga

En ciertos sistemas dinámicos, la densidad de cargas eléctricas libres puede experimentar un decaimiento temporal, que se modela comúnmente mediante una función exponencial:

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.12)$$

donde  $q_0$  es la carga inicial,  $\gamma = 1/\tau$  es la constante de decaimiento y  $\tau$  es el tiempo característico o constante de tiempo eléctrico [12]. Este fenómeno introduce cambios en el momento dipolar, afectando tanto la intensidad como la distribución de la radiación. Incorporar el efecto del decaimiento de la carga en los análisis de la radiación dipolar es

el eje central para determinar el comportamiento de la potencia radiada por este tipo de dipolo.

### 2.0.6. Potencia radiada por un dipolo eléctrico

La potencia total radiada por un dipolo eléctrico oscilante se describe clásicamente por la expresión:

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}, \quad (2.13)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $p_0$  es el momento dipolar y  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del dipolo; a esta ecuación se le conoce como Fórmula de Larmor, y su derivación explícita se puede encontrar en [10, 9, 12].

En 1897, Joseph Larmor derivó esta fórmula de radiación para una carga oscilante al analizar el comportamiento de un dipolo de longitud finita y pequeña en comparación con la longitud de onda de la radiación emitida. [7]. Esta expresión mostró que cualquier carga acelerada emite radiación, lo que constituye la base para el estudio de la radiación de dipolos eléctricos.

Para un dipolo con carga que decae en el tiempo, esta fórmula requiere ajustes, ya que el momento dipolar disminuye progresivamente, lo que puede afectar tanto la frecuencia de emisión como la distribución angular de la radiación, modificando la energía radiada.

### 2.0.7. Factor de decaimiento de la carga

El análisis de la radiación emitida por un dipolo con carga variable y movimiento espacial implica considerar el decaimiento temporal dentro de la ecuación  $\mathbf{p}(t) = q_0 \mathbf{d} \cos \omega t$ , que modela la oscilación del momento dipolar eléctrico. Esto es,

$$\mathbf{p}(t) = (q_0 e^{-t/\tau}) \mathbf{d} \cos \omega t, \quad (2.14)$$

donde hemos introducido el factor de decaimiento,  $e^{-t/\tau}$ , sobre la carga. De esta manera, podemos determinar el comportamiento de los campos electromagnéticos y su impacto en la radiación emitida.

## 2.1. Antecedentes

El fenómeno de la radiación electromagnética ha sido objeto de estudio desde el siglo XIX, con avances teóricos y experimentales que han permitido una comprensión más profunda de la propagación de la energía en forma de ondas electromagnéticas. Entre los investigadores más influyentes en este campo se encuentran James Clerk Maxwell y John Henry Poynting, quienes formularon las ecuaciones que describen el fenómeno

electromagnético en el espacio, y Heinrich Hertz, quien comprobó experimentalmente su existencia.

El estudio formal de la radiación electromagnética se consolidó con las ecuaciones de Maxwell, formuladas en 1865, las cuales describen cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan y se propagan en el espacio [8]. Este trabajo fue precedido por descubrimientos fundamentales como la inducción electromagnética, descrita por Michael Faraday en 1831, que estableció la conexión entre los campos eléctricos y magnéticos [14].

La teoría de Maxwell predecía la existencia de ondas electromagnéticas que viajan con una velocidad  $c$ , la misma que la luz [8]. Sin embargo, en ese momento no existía una forma matemática clara para describir cómo se transportaba la energía en dichas ondas.

En 1884, John Henry Poynting introdujo un concepto crucial en la teoría del electromagnetismo: el vector de Poynting, que describe la densidad de flujo de energía electromagnética [15]. Su formulación matemática es:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (2.15)$$

donde:

- $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,
- $\mathbf{B}$  es el campo magnético.

El vector de Poynting permitió entender cómo la energía electromagnética fluye en el espacio y cómo se disipa en sistemas físicos, siendo una herramienta clave para analizar potencia radiada en dipolos eléctricos, entre otras aplicaciones.

Aunque Maxwell había predicho la existencia de ondas electromagnéticas, su existencia no fue confirmada experimentalmente hasta 1887, cuando Heinrich Hertz logró generar y detectar ondas de radio en su laboratorio mediante un dipolo eléctrico oscilante. Sus experimentos mostraron que estas ondas pueden reflejarse, refractarse e interferir, similar a la luz visible, validando la teoría de Maxwell y el flujo de energía descrito por Poynting [16].

El siguiente paso importante fue dado por Joseph Larmor en 1897, quien derivó la fórmula de radiación para una carga acelerada [7]. Su expresión:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (2.16)$$

mostró que cualquier carga acelerada emite radiación, lo que constituye la base para el estudio de la radiación de dipolos oscilantes, tema que resultó ser fundamental en electrodinámica.

El siglo XX trajo avances significativos en el estudio de la radiación electromagnética:

- Max Planck introdujo, en 1901, la cuantización de la radiación electromagnética, dando origen a la teoría cuántica [17].
- Albert Einstein descubrió el efecto fotoeléctrico en 1905, demostrando que la luz tiene un comportamiento tipo partícula [18].
- En 1924, Louis De Broglie propone que no solo la luz, sino toda la materia presenta una dualidad onda-partícula [19].
- Paul Dirac desarrolló, en 1927, la electrodinámica cuántica (QED), que describe la interacción de la luz con la materia a nivel cuántico [20].

Actualmente, el estudio de la emisión electromagnética sigue siendo fundamental en antenas, telecomunicaciones, astrofísica, óptica cuántica y plasmas.

El vector de Poynting es esencial en el análisis de la potencia radiada por dipolos eléctricos; su importancia radica en:

- Permitir la evaluación de la potencia electromagnética radiada en la región de campo lejano ( $r \gg \lambda$ ).
- Servir como base para derivar la expresión de la intensidad de radiación de un dipolo eléctrico.
- Relacionar la distribución de energía electromagnética con la estructura del campo generado.

En el trabajo [21], se explora la generación de campos electromagnéticos por un dipolo, destacando la importancia de la aceleración de cargas como mecanismo fundamental para la radiación. En ese trabajo se considera un dipolo en el que la corriente se propaga a velocidad finita a lo largo del canal conductor, lo que implica que la información no se transmite instantáneamente a lo largo del dipolo, explorando cómo este fenómeno afecta la generación de radiación. Así mismo, su análisis parte de los campos generados por cargas en movimiento, específicamente de las ecuaciones para cargas aceleradas. Con esto, Cooray encuentra que la velocidad de propagación de la corriente en el dipolo solo aparece en términos de orden superior en  $d$  (longitud del dipolo), lo que permite descartar sus efectos en el límite de dipolo corto.

El trabajo [22] presenta un análisis teórico sobre la radiación electromagnética de un dipolo eléctrico en un régimen donde la longitud de onda de la radiación es mucho menor que la separación entre las cargas del dipolo ( $\lambda \ll d$ ). En este contexto, los autores encuentran que, además de la radiación transversal convencional, existe una componente

de ondas eléctricas longitudinales en el vacío, una predicción que se aparta del modelo clásico de radiación dipolar.

En el trabajo de Zhakatayev y Tlebaldiyeva [22], el dipolo se modela con cargas fijas pero con una separación grande comparada con la longitud de onda de la radiación, lo que altera la estructura de los campos electromagnéticos generados, lo que causa que la potencia radiada se modifique en función de la separación del dipolo  $d$  y la frecuencia, estableciendo un nuevo régimen donde la potencia ya no sigue la relación  $P \propto d^2\omega^4$  del caso clásico, sino que escala como  $P \propto d\omega^3$ . Este análisis tiene implicaciones en la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío y en el diseño de sistemas de transmisión de energía o información basados en ondas longitudinales eléctricas.

En el trabajo de Paulin-Fuentes, et al. [5], se hizo un estudio experimental de la estructura eléctrica y magnética de un plasma inducido por láser (LIP, por sus siglas en inglés) en aire, encontrándose que la distribuciones eléctrica y magnética producidas corresponden a un dipolo dinámico, con un tiempo de duración aproximado de  $50 \text{ ns}$ , que es del orden de la interacción del pulso láser con el aire ( $10 \text{ ns}$  a FWHM, por sus siglas en inglés, Full-Wide at Half Maximum). En este trabajo se estimaron los valores de la carga efectiva del dipolo,  $q_0$ , y su distancia máxima de separación entre cargas,  $d$ , encontrando:

$$q_0 = 4.23 \times 10^{-14} \text{ C}, \quad (2.17)$$

$$d = 4.00 \times 10^{-3} \text{ m}. \quad (2.18)$$

Los resultados también mostraron la presencia de un campo magnético azimutal, el cual fue detectado mediante una sonda de inducción magnética. Estas mediciones confirmaron la configuración dipolar del plasma y permitieron caracterizar la dinámica del efecto colectivo de las cargas en los primeros  $50 \text{ ns}$ .

# Capítulo 3

## Metodología

### 3.1. Enfoque

El estudio se desarrolla mediante un enfoque analítico, siguiendo los pasos:

1. Analizar el sistema de un dipolo eléctrico con carga oscilante que decae exponencialmente en el tiempo, considerando tanto su movimiento espacial como la dinámica temporal del decaimiento de la carga.
2. Describir los campos eléctricos y magnéticos generados por el dipolo eléctrico, incorporando el decaimiento temporal de la carga en las expresiones para el momento dipolar.
3. Derivar la expresión para el vector de Poynting como densidad de flujo de energía en función de los campos electromagnéticos.
4. Realizar el promedio temporal del vector de Poynting sobre un ciclo completo de oscilación para describir la energía radiada.
5. Integrar el flujo de energía (vector de Poynting) sobre una superficie esférica en la región de radiación lejana para obtener la potencia total radiada.
6. Comparar la potencia radiada por el dipolo eléctrico con decaimiento en la densidad de carga con el modelo de radiación clásica para un dipolo con carga constante. Identificar diferencias clave en la radiación emitida y la magnitud de la potencia radiada.

### 3.2. Procedimiento

Para obtener la potencia radiada de un dipolo eléctrico dinámico cuya carga decae con el tiempo, se seguirá un procedimiento análogo al empleado en [10]. Se proponen dos

cargas separadas por una distancia  $d$  orientadas sobre el eje  $z$ . En un tiempo  $t$ , la carga superior es  $q(t)$  y la carga inferior es  $-q(t)$ .

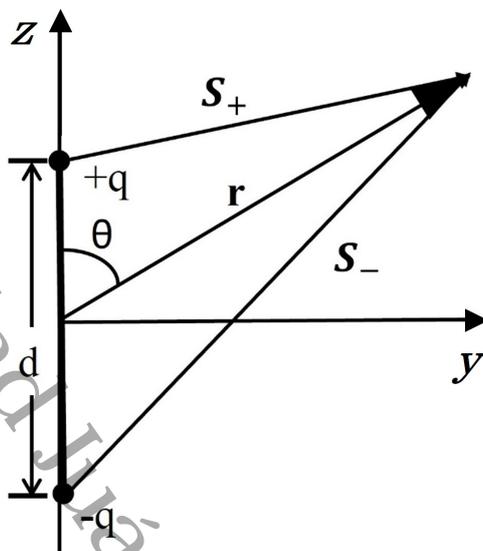


Figura 3.1: Distribución espacial propuesta.

Si las cargas se mueven de arriba hacia abajo y viceversa a una frecuencia angular  $\omega$ , y proponiendo que las cargas tengan un decaimiento con un factor de  $e^{-t/\tau}$ , entonces:

$$q(t) = (q_0 e^{-t/\tau}) \cos(\omega t). \quad (3.1)$$

Esto resulta en un dipolo eléctrico oscilante que decae en el tiempo:

$$\mathbf{p}(t) = p_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t) \hat{z}. \quad (3.2)$$

donde:  $p_0 = q_0 d$  es el valor máximo del momento dipolar.

Para poder estudiar este fenómeno, se toman 3 consideraciones principales:

$$d \ll r, \quad (3.3)$$

$$d \ll \frac{c}{\omega}, \quad (3.4)$$

$$\frac{c}{\omega} \ll r. \quad (3.5)$$

Estas consideraciones son necesarias para asegurarnos de que la distancia en la que trabajamos esté dentro de la zona de radiación.

El potencial retardado es:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\cos\left(\omega\left(t - \frac{S_+}{c}\right)\right)}{S_+} - \frac{\cos\left(\omega\left(t - \frac{S_-}{c}\right)\right)}{S_-} \right]. \quad (3.6)$$

Donde, por ley de cosenos:  $S_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ .  
 Siguiendo la primera de las consideraciones, (3.3):

$$S_{\pm} = r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}.$$

Elevando ambos términos a la potencia  $-1$ :

$$\frac{1}{S_{\pm}} = \frac{1}{r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}}. \quad (3.7)$$

Se identifica la función generatriz de los polinomios de Legendre. Por lo tanto:

$$\frac{1}{S_{\pm}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\pm \frac{d}{2r}\right)^n. \quad (3.8)$$

Tomando los primeros dos términos, que corresponden a  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$\frac{1}{S_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta\right). \quad (3.9)$$

Reacomodando términos:

$$S_{\pm} = \frac{r}{\left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta\right)}. \quad (3.10)$$

Realizando una expansión a los primeros dos términos en serie de Taylor:

$$S_{\pm} = r \mp \frac{d}{2} \cos \theta. \quad (3.11)$$

De modo que:

$$\cos \left[ \omega \left( t - \frac{S_{\pm}}{c} \right) \right] = \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]. \quad (3.12)$$

El coseno de la suma es:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] &= \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left( \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \\ &\mp \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left( \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

A partir de la aproximación (3.4), se deduce que:

$$\cos \left[ \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \simeq 1. \quad (3.14)$$

$$\sin \left[ \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \simeq \frac{\omega d}{2c} \cos \theta. \quad (3.15)$$

Se encuentra entonces que:

$$\cos \left[ \omega \left( t - \frac{S_{\pm}}{c} \right) \right] \simeq \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.6), se obtiene:

$$V(\mathbf{r}, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{-\omega}{c} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right]. \quad (3.17)$$

Tomando en cuenta la aproximación (3.5), se puede despreciar el segundo término de la suma. Se encuentra así que el potencial es:

$$V(\mathbf{r}, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega \cos \theta e^{-t/\tau} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi\epsilon_0 c r}. \quad (3.18)$$

### 3.2.1. Flujo eléctrico

Por otro lado, la corriente entre las cargas es:

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq}{dt} \hat{z} = \frac{d}{dt} [q_0 \cos(\omega t) e^{-t/\tau}] \hat{z}. \quad (3.19)$$

Derivando la ecuación (3.1) respecto al tiempo, resulta:

$$\mathbf{I}(t) = \left[ -q_0 e^{-t/\tau} \omega \sin(\omega t) - \frac{q_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \cos(\omega t) \right] \hat{z}. \quad (3.20)$$

El vector potencial magnético se obtiene a partir de la expresión:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\mathbf{I}(t - \frac{S}{c})}{S} dz. \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.20) en la ecuación (3.21), resulta:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{-q_0 e^{-t/\tau} \left[ \omega \sin \left( \omega \left( t - \frac{S}{c} \right) \right) + \frac{1}{\tau} \cos \left( \omega \left( t - \frac{S}{c} \right) \right) \right]}{r \left( 1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} \hat{z} dz. \quad (3.22)$$

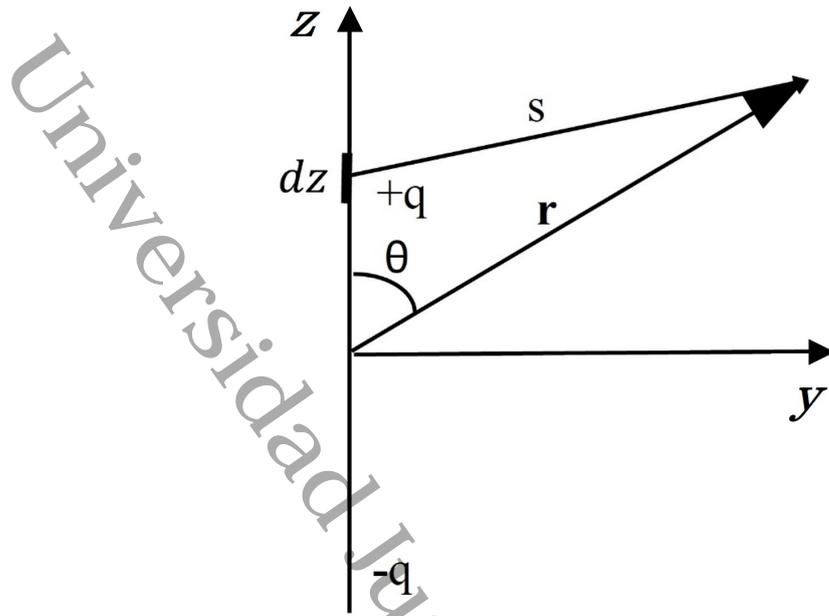


Figura 3.2: Distribución de corriente entre las cargas.

Integrando:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 p_0 e^{-t/\tau} \left[ \frac{\omega \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r \tau} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \right] \hat{z}. \quad (3.23)$$

Este es el vector potencial magnético resultante para nuestro dipolo dinámico. Por simplicidad de cálculos posteriores, es conveniente expresar el vector unitario  $\hat{z}$  en términos de los vectores unitarios  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ . Esto se deduce de la siguiente forma:

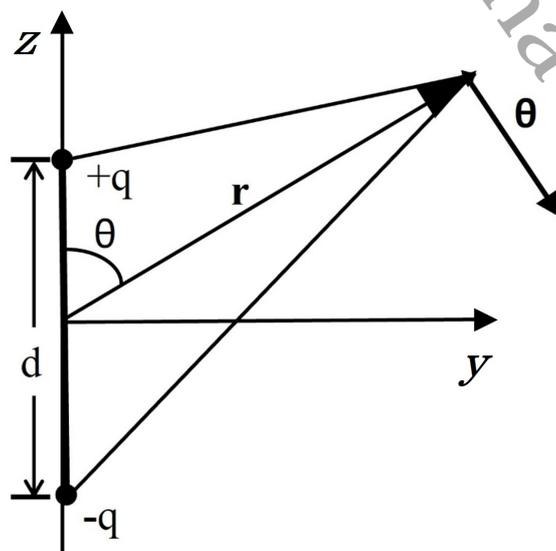


Figura 3.3: Distribución propuesta con el vector  $\theta$ .

De la figura:

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}. \quad (3.24)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{z}. \quad (3.25)$$

De esto se obtiene:

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}. \quad (3.26)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.23) se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & -\mu_0 p_0 \cos \theta e^{-t/\tau} \left[ \frac{\omega \sin \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r \tau} \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \hat{r} \\ & + \mu_0 p_0 \sin \theta e^{-t/\tau} \left[ \frac{\omega \sin \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r \tau} \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.2.2. Campo eléctrico

El campo eléctrico para un dipolo eléctrico dinámico se expresa como:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.28)$$

Aquí,  $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$ .

Obteniendo el gradiente al potencial eléctrico (3.18) y sustituyendo junto a (3.27) en la ecuación (3.28), el campo eléctrico resultante es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, t) = & \frac{-P_0 \omega^2 \cos \theta e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{r} \\ & + \frac{\mu_0 P_0 \cos \theta e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi r} \left[ \frac{-1}{\tau^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{2\omega}{\tau} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \hat{r} \\ & - \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi r} \left[ \frac{-1}{\tau^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{2\omega}{\tau} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Maxwell encontró que para la radiación electromagnética,  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ ; [8].

Utilizando este resultado y simplificando, se obtiene el campo eléctrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, t) = & \frac{\mu_0 p_0 e^{-t/\tau}}{4\pi r} \left[ \left( \frac{-1}{\tau^2} \cos \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{2\omega}{\tau} \cos \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \hat{r} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\tau^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{2\omega}{\tau} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \hat{\theta} \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.2.3. Campo magnético

Por otro lado, el campo magnético se calcula mediante el rotacional del vector potencial magnético:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.31)$$

Donde:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}.$$

Calculando:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi} \left( \frac{-\omega^2}{c} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\omega}{\tau c} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \right. \\ \left. - \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \left( \omega \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{\tau} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así, el campo magnético resultante es:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \left[ \left( \frac{-\omega^2}{c} - \frac{1}{\tau r} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{\omega}{\tau c} - \frac{\omega}{r} \right) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.2.4. Vector de Poynting

Una vez obtenido el campo eléctrico y el campo magnético para nuestro dipolo, los utilizamos para calcular el vector de Poynting, cuyo módulo representa la intensidad instantánea de energía electromagnética, y su sentido es el de propagación de la onda.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (3.34)$$

Notando que:

$$\mathbf{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}.$$

$$\mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi}.$$

El producto vectorial:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & B_\phi \end{vmatrix} = E_\theta B_\phi \hat{r} - E_r B_\phi \hat{\theta}.$$

Para nuestro análisis, solo es de interés la componente radial del vector de Poynting, puesto que hemos de integrarlo sobre la superficie de una esfera, donde el producto escalar con el vector normal a la superficie provocará que las componentes tangencial y azimutal se anulen.

$$S_r \hat{r} = E_\theta B_\phi \hat{r}.$$

Calculando:

$$E_\theta B_\phi = \left( \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \right)^2 \left( \frac{1}{\tau^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{2\omega}{\tau} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \left( \left( \frac{-\omega^2}{c} - \frac{1}{r\tau} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \left( \frac{\omega}{c\tau} - \frac{\omega}{r} \right) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right). \quad (3.35)$$

Desarrollando esta expresión:

$$E_\theta B_\phi = \left( \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \right)^2 \left( \frac{-\omega^2}{c\tau^2} \cos^3 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{1}{r\tau^3} \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\omega}{c\tau^3} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{3\omega}{r\tau^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\omega^4}{c} \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\omega^2}{r\tau} \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega^3}{c\tau} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\omega^3}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{2\omega^3}{c\tau} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{2\omega^2}{r\tau} \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right). \quad (3.36)$$

Simplificando:

$$E_\theta B_\phi = \left( \frac{\mu_0 P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \right)^2 \left[ \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left( \frac{3\omega^2}{r\tau} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} - \frac{1}{r\tau^3} + \frac{\omega^4}{c} \right) + \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left( \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega}{r\tau^2} - \frac{3\omega^3}{c\tau} + \frac{\omega^3}{r} \right) + \frac{2\omega^2}{c\tau^2} - \frac{2\omega^2}{r\tau} \right]. \quad (3.37)$$

Utilizando el criterio de la aproximación (3.5), se pueden despreciar los términos que dependen de  $\frac{1}{r}$ ; sustituyendo en la ecuación (3.34), resulta:

$$S_r \hat{r} = \mu_0 \left( \frac{P_0 \sin \theta e^{-t/\tau}}{4\pi r} \right)^2 \left( \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left( \frac{\omega^4}{c} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} \right) \right)$$

$$+ \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left( \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega^3}{c\tau} \right) + \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \right) \hat{r}. \quad (3.38)$$

La intensidad de radiación se obtiene integrando el vector de Poynting sobre un ciclo completo de oscilación  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$\langle \mathbf{S}_r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}_r dt. \quad (3.39)$$

Sustituyendo la ecuación (3.38) en (3.39):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_r \rangle = & \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[ \left( \frac{\omega^4}{c} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 e^{\frac{-2t}{\tau}} \cos^2 \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] \right. \\ & + \left( \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega^3}{c\tau} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 e^{\frac{-2t}{\tau}} \cos \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] \sin \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] \\ & \left. + \left( \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 e^{\frac{-2t}{\tau}} \right] \hat{r} dt. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Factorizando los términos que no dependen de  $t$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_r \rangle = & \frac{\omega}{2\pi} \left[ \left( \frac{\omega^4}{c} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} \cos^2 \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] dt \right. \\ & + \left( \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega^3}{c\tau} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} \cos \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] \sin \left[ \omega t - \frac{\omega r}{c} \right] dt \\ & \left. + \left( \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} dt \right] \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2u), \\ \sin u \cos u &= \frac{1}{2} \sin 2u. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_r \rangle = & \frac{\omega}{2\pi} \left[ \left( \frac{\omega^4}{c} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} \cos \left[ 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right] dt \right) \right. \\ & + \left( \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega^3}{c\tau} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} \sin \left[ 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right] dt \\ & \left. + \left( \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \right) \mu_0 \left( \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{\frac{-2t}{\tau}} dt \right] \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Integrando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_r \rangle = & \left[ \frac{\mu_0 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} \left( \tau^2 \omega \sin \left( 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right) - \tau \cos \left( 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right) - \tau^3 \omega^2 - \tau \right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \right] \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
& - \frac{\mu_0 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left[ \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} \left( \tau^2 \omega \cos \left( 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau \sin \left( 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \right) \right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
& + \frac{\mu_0 p_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^3 r^2} \left( \frac{\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ -\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \hat{r}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Evaluando en los límites de integración y factorizando términos semejantes; para esto resulta útil identificar que:

$$\begin{aligned}
\cos \left( 4\pi - \frac{2\omega r}{c} \right) &= \cos(4\pi) \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \sin(4\pi) \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right), \\
\cos \left( 4\pi - \frac{2\omega r}{c} \right) &= \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right), \\
\sin \left( 4\pi - \frac{2\omega r}{c} \right) &= \sin(4\pi) \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) - \cos(4\pi) \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right), \\
\sin \left( 4\pi - \frac{2\omega r}{c} \right) &= -\sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right), \\
\cos \left( 0 - \frac{2\omega r}{c} \right) &= \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right), \\
\sin \left( 0 - \frac{2\omega r}{c} \right) &= -\sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_r \rangle = & \left( \frac{\mu_0 P_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ \frac{\tau^2 \omega \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left[ \frac{\tau \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right) - \tau^2 \omega \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) + \frac{\omega^3}{c\tau} \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \right] \hat{r}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

### 3.2.5. Potencia radiada

Finalmente, calculando la potencia total radiada mediante la integración sobre la superficie de una esfera de radio  $r$ :

$$\langle P \rangle = \iint_s \langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot d\mathbf{a}.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\langle P \rangle = \iiint_S \left( \frac{\mu_0 P_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) - \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left[ \frac{\tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) + \frac{\omega^3}{c\tau} \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \right] da. \quad (3.45)$$

En coordenadas esféricas, el diferencial de área de una esfera es:  $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ .

Sustituyendo en la integral:

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\mu_0 P_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) - \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left[ \frac{\tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) + \frac{\omega^3}{c\tau} \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.46)$$

Extrayendo los términos que no dependen de las variables de integración:

$$\langle P \rangle = \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{32\pi^3} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left[ \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi - \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left[ \frac{\tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right] \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi + \frac{\omega^3}{c\tau} \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \right]. \quad (3.47)$$

Se encuentra la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi &= 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \left[ \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned}$$

Estas integrales tienen soluciones ampliamente conocidas y estudiadas en cualquier libro de Cálculo [23], por lo que no profundizaré en su solución explícita.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi &= 2\pi \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right] \Big|_0^\pi \\ &= 2\pi \left( \frac{-1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Volviendo a la integral de la potencia radiada, desarrollando utilizando el resultado encontrado:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{32\pi^3} \right) \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) \left( \frac{8\pi}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) \left( \frac{8\pi}{3} \right) + \left( \frac{\omega^3}{c\tau} \right) \left( \frac{8\pi}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{32\pi^3} \right) \left( \frac{8\pi}{3} \right) \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) + \left( \frac{\omega^3}{c\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

La potencia radiada total obtenida es:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) + \left( \frac{\omega^3}{c\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Comparando la expresión para la potencia de radiación de un dipolo con carga constante [10]:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 P_0^2 \omega^4}{12\pi c}, \quad (3.51)$$

y la expresión para la potencia del dipolo con cargas que decaen en el tiempo:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right) + \frac{4\omega^3}{c\tau} \right]. \quad (3.52)$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Capítulo 4

### Resultados

Las expresiones matemáticas resultantes para los campos eléctrico y magnético generados por un dipolo eléctrico oscilante cuya carga decae exponencialmente con el tiempo, con la distribución espacial propuesta en la figura 3.1, son las siguientes.

Campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, t) = \frac{\mu_0 P_0 e^{-t/\tau}}{4\pi r} \left[ \left( \frac{1}{\tau^2} - \frac{2\omega}{\tau} \right) \cos \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{r} \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\omega}{\tau} - \omega^2 \right) \sin \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta} \right]. \quad (4.1)$$

Resulta de interés notar que; a diferencia del caso del dipolo con carga constante, cuya expresión es [10]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta, t) = -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta}, \quad (4.2)$$

nuestro dipolo con carga en decaimiento tiene además una componente en la dirección radial.

Campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 P_0 e^{-t/\tau}}{4\pi r} \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c} - \frac{1}{\tau r} \right) \sin \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{\omega}{\tau c} - \frac{\omega}{r} \right) \sin \theta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \hat{\phi}. \quad (4.3)$$

Otra gran diferencia entre el dipolo de estudio y el dipolo con carga constante es que en el caso con decaimiento temporal se obtienen expresiones que no corresponden a ondas monocromáticas, pues en ellas se encuentra dependencia en la frecuencia angular  $\omega$  y la frecuencia resultante del término  $1/\tau$ .

La componente radial del vector de Poynting calculada para esta distribución es la si-

guiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r = & \mu_0 \left( \frac{P_0 \sin \theta e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi r} \right)^2 \left[ \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left[ \frac{\omega^4}{c} - \frac{3\omega^2}{c\tau^2} \right] \right. \\ & \left. + \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left[ \frac{\omega}{c\tau^3} - \frac{3\omega^3}{c\tau} \right] + \frac{2\omega^2}{c\tau^2} \right] \hat{r}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Su promedio temporal sobre un ciclo completo de oscilación  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_r \rangle = & \left( \frac{\mu_0 P_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^3 r^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) (1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}}) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) (1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}}) \left( \frac{\tau^2 \omega \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) - \tau \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right)}{4\tau^2 \omega^2 + 4} \right) + \left( \frac{\omega^3}{c\tau} \right) (1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}}) \right] \hat{r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Notamos que como  $\sin \theta = 0$ , cuando  $\theta = 0$ , no hay radiación sobre el eje del dipolo, y esta alcanza su valor máximo en el plano ortogonal a dicho eje, justo como sucede con el caso del dipolo con carga constante descrito en [10].

La potencial total radiada resulta ser:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle = & \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi^2} \right) (1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}}) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) + \tau^3 \omega^2 + \tau}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau^2 \omega \cos \left( \frac{2\omega r}{c} \right) - \tau \sin \left( \frac{2\omega r}{c} \right)}{\tau^2 \omega^2 + 1} \right) + \frac{4\omega^3}{c\tau} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 4.1. Discusión sobre la radiación en un ejemplo real

Un caso particular de dipolos con carga en decaimiento temporal ha sido observado experimentalmente en [5], donde se lograron medir diversos parámetros físicos característicos. En dichos experimentos, se determinaron los siguientes valores:

$$\begin{aligned} q_0 &= 4.23 \times 10^{-14} \text{ C} = 42.3 \text{ fC}, \\ d &= 4.00 \times 10^{-3} \text{ m} = 4.00 \text{ mm}, \\ v &= 3.75 \times 10^5 \text{ m/s} = 375 \text{ km/s}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde:  $q_0$  es la carga máxima del dipolo eléctrico,  $d$  es la separación máxima entre las cargas, y  $v$  es la velocidad promedio de expansión del frente de ionización, y el tiempo de detección del dipolo eléctrico fue de aproximadamente 50 ns. Con estos datos se puede determinar la frecuencia angular  $\omega$ , con la que oscila el dipolo eléctrico, y el tiempo de

decaimiento  $\tau$  de la carga eléctrica, para la descripción de nuestro modelo:

$$\begin{aligned}\omega &= 1.87 \times 10^8 \text{ rad/s} = 187 \text{ Mrad/s}, \\ \tau &= 5.43 \times 10^{-9} \text{ s} = 5.43 \text{ ns}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

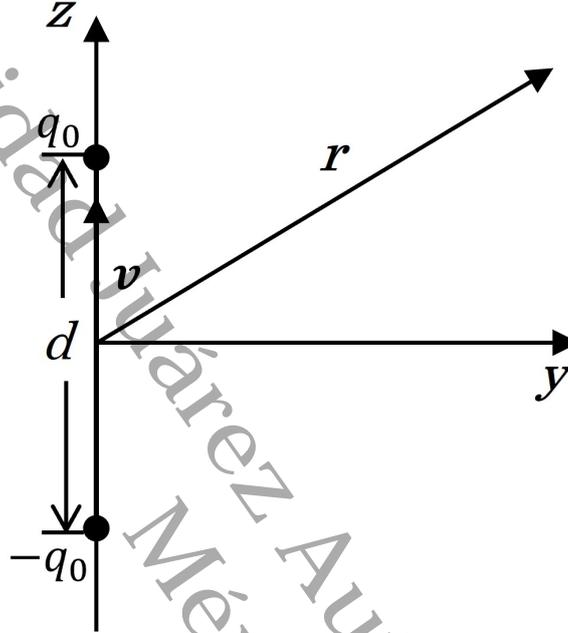


Figura 4.1: Distribución espacial del dipolo.

Cuando se evalúa la potencia radiada para un dipolo con decaimiento temporal, en  $r = 1.03 \times 10^2 \text{ m}$ , considerando los valores en (4.7) y (4.8), se obtiene:

$$\langle P \rangle = 1.23 \times 10^{-15} \text{ W},$$

Y para la fórmula de Larmor:

$$\langle P \rangle = 3.93 \times 10^{-15} \text{ W}.$$

Graficando la potencia radiada, por el dipolo con decaimiento temporal, en función de  $\tau$  y  $\omega$  en el rango de:  $5.43 \times 10^{-9} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-9}$ ,  $1.87 \times 10^8 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^8$ , y tomando  $r = 1.03 \times 10^2 \text{ m}$ :

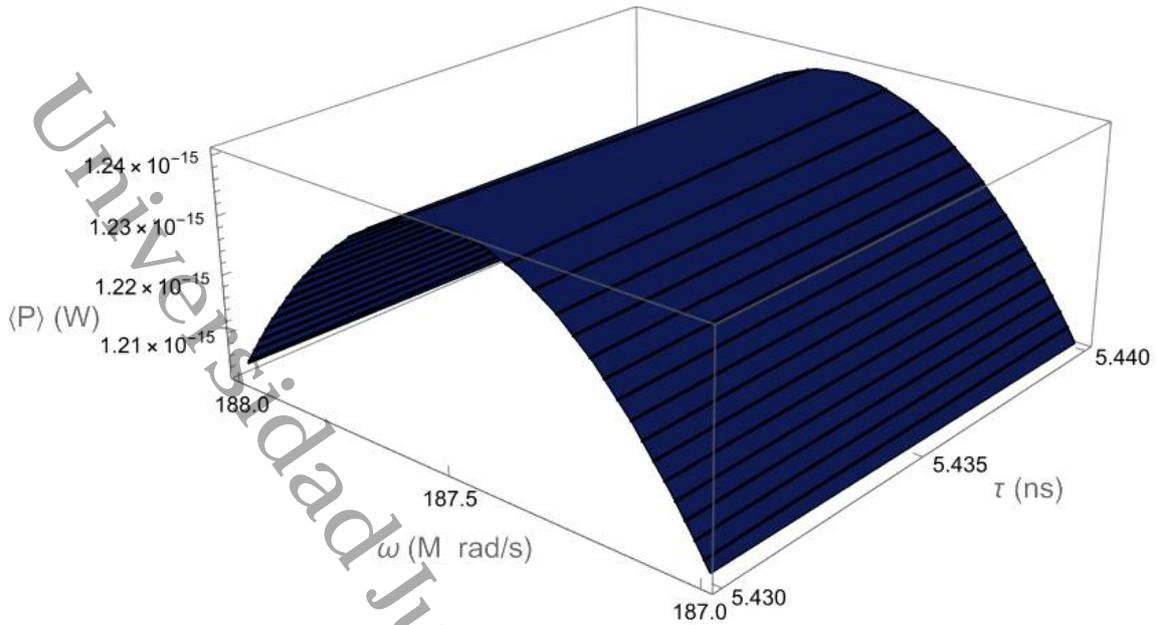


Figura 4.2: Gráfica de la potencia radiada en función de  $\omega$  y  $\tau$  en un rango de  $5.43 \times 10^{-9} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-9}$ ,  $1.87 \times 10^8 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^8$ , con  $r = 1.03 \times 10^2 m$ .

Ahora graficando en un rango más amplio,  $5.43 \times 10^{-10} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-8}$  y  $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ , para la misma  $r$ :

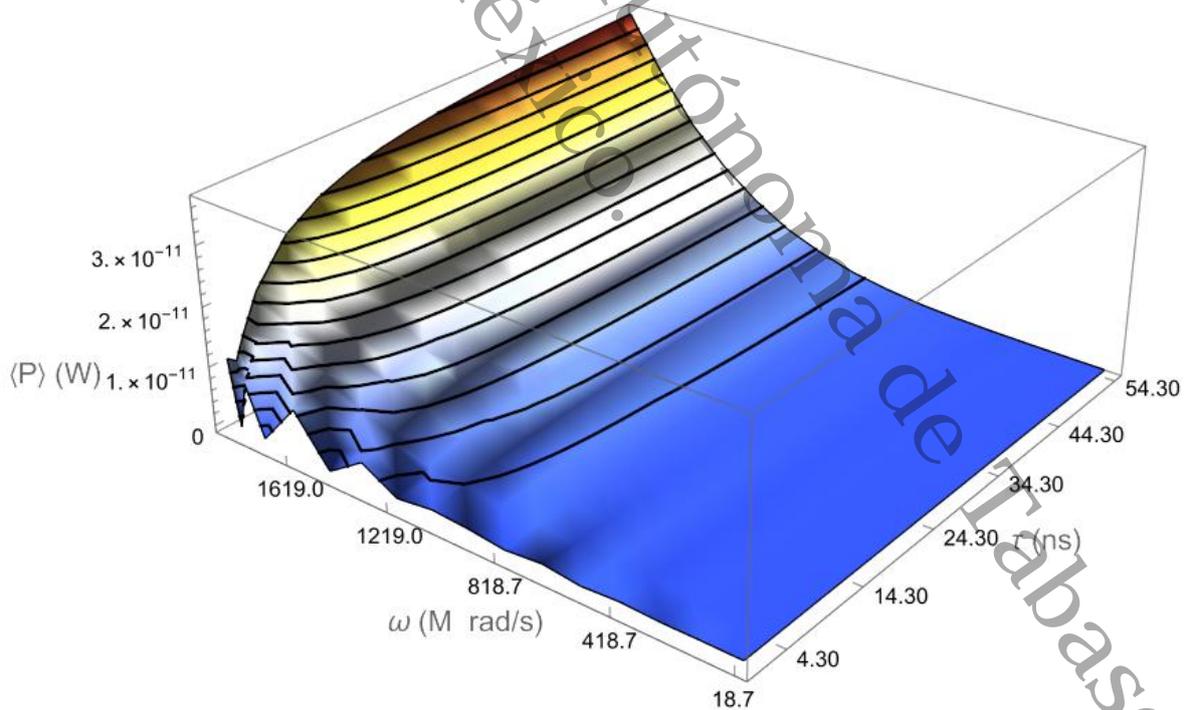


Figura 4.3: Gráfica de la potencia radiada contra  $\omega$  y  $\tau$  en un rango de  $5.43 \times 10^{-10} \leq \tau \leq 5.44 \times 10^{-8}$  y  $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ , con  $r = 1.03 \times 10^2 m$ .

A partir de la gráfica 4.3 se puede ver que para valores suficientemente grandes de  $\tau$ , ( $54.30 ns$ ), la potencia radiada dependerá mayormente de  $\omega$ , y su dependencia en  $\tau$  será

despreciable. Esto es, a medida que la tasa de decaimiento  $\gamma = 1/\tau$  tiende a 0, corresponde a un dipolo físico cuyo decaimiento temporal es muy lento o extremadamente lento, por lo que los resultados tienden a los resultados de la potencia radiada de la fórmula de Larmor.

Tomando el valor de  $\tau = 5.43 \times 10^{-9}$  s de los datos (4.8) y graficando la potencia únicamente en función de  $\omega$ , se obtiene:

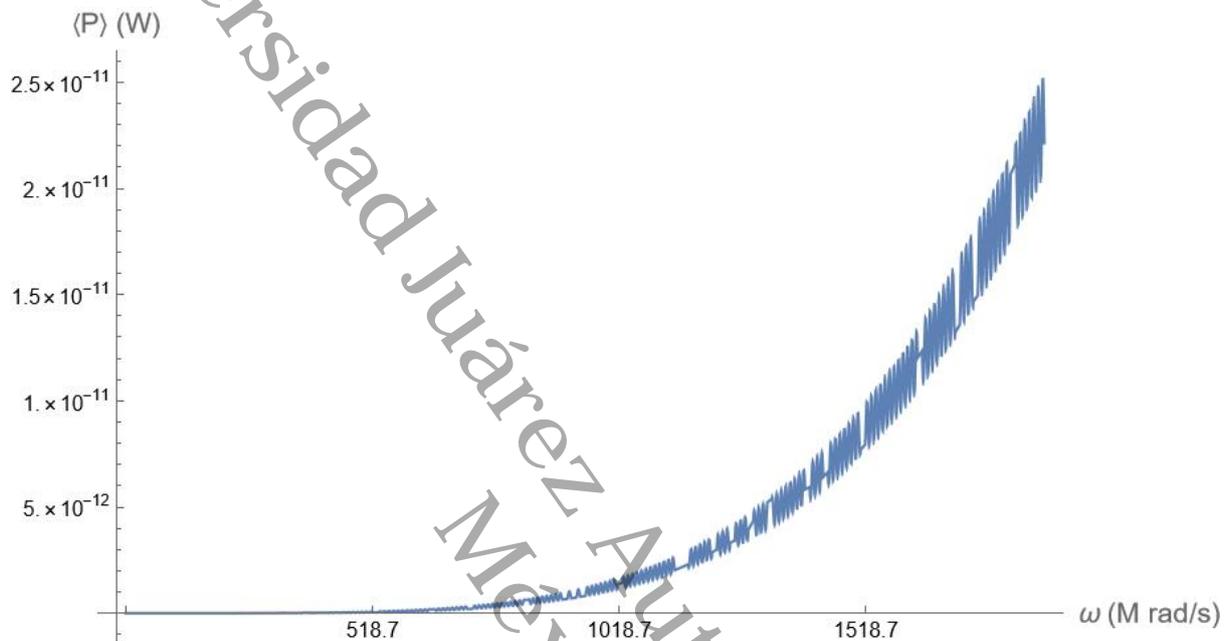


Figura 4.4: Gráfica de la potencia radiada en función de  $\omega$  para el caso del dipolo con decaimiento temporal, en un rango de  $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ ,  $r = 1.03 \times 10^2$  m.

Y graficando la fórmula de Larmor para el mismo rango de la frecuencia  $\omega$ :

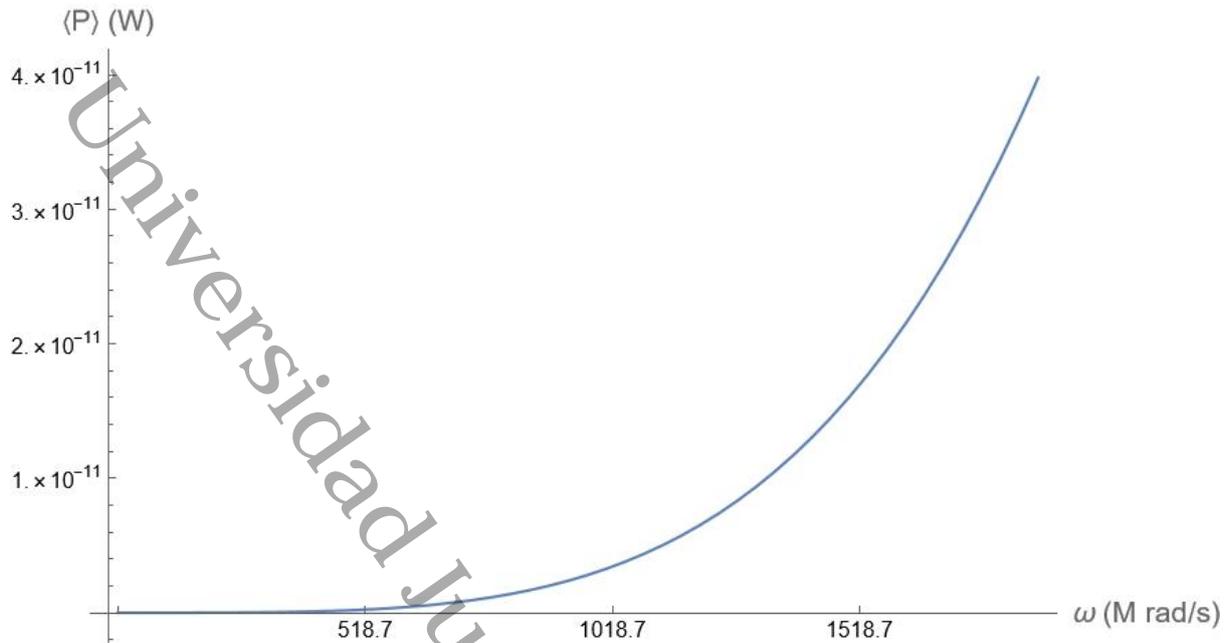


Figura 4.5: Gráfica de la potencia radiada en función de  $\omega$  para el caso del dipolo estacionario en un rango de  $1.87 \times 10^7 \leq \omega \leq 1.88 \times 10^9$ ,  $r = 1.03 \times 10^2$  m.

Considerando un intervalo menor en la frecuencia angular,  $1.75 \times 10^8 \leq \omega \leq 3 \times 10^8$ , con  $r = 1.03 \times 10^2$  m, de la figura 4.4, donde la línea punteada representa la frecuencia angular del dipolo  $\omega = 1.875 \times 10^8$  rad/s, se aprecia el efecto de la interferencia en la potencia total radiada:

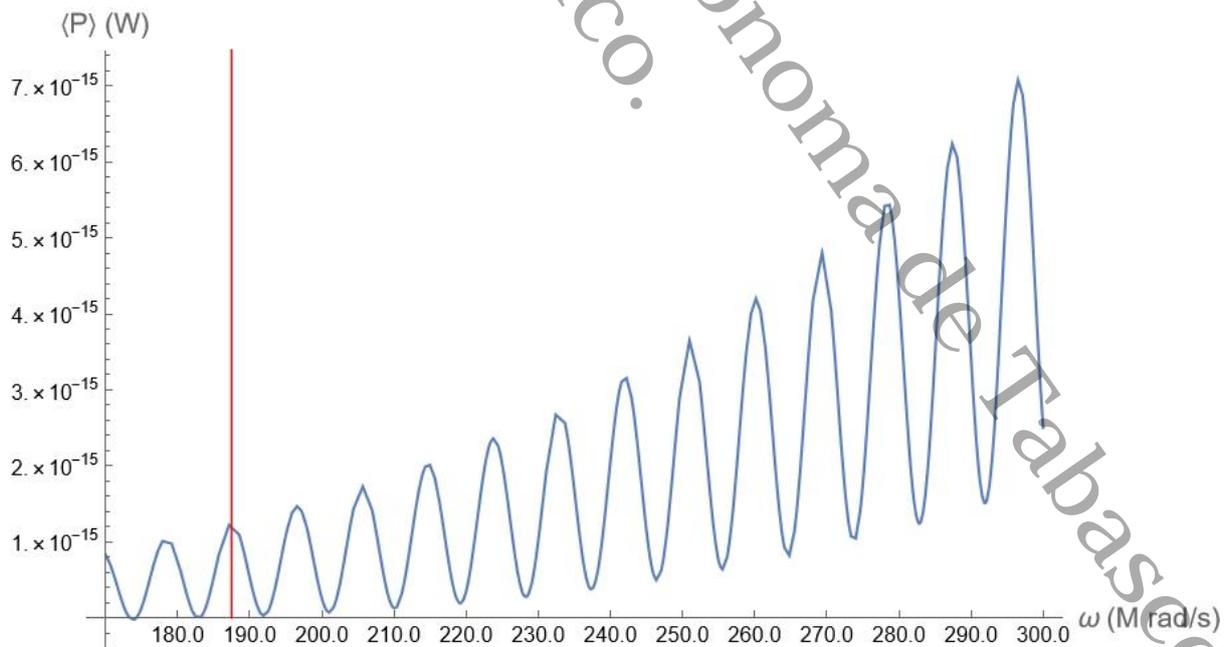


Figura 4.6: Gráfica de la potencia radiada en función de  $\omega$  para el caso del dipolo con decaimiento temporal, en un rango de  $1.75 \times 10^8 \leq \omega \leq 3 \times 10^8$ , con  $r = 1.03 \times 10^2$  m.

Partiendo de la frecuencia angular calculada (4.8),  $\omega = 1.87 \times 10^8$  rad/s, podemos

calcular la frecuencia correspondiente, mediante la definición:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f, \\ \lambda &= \frac{v}{f} = \frac{2\pi c}{\omega},\end{aligned}$$

encontrando que la frecuencia es:

$$f = 29.76 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad (4.9)$$

a la cual le corresponde una longitud de onda  $\lambda = 10.07 \text{ m}$ .

La frecuencia que resulta de la constante de tiempo eléctrico se obtiene como:

$$f' = 1/\tau,$$

que resulta en:

$$f' = 184.16 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad (4.10)$$

cuya longitud de onda es  $\lambda' = 1.62 \text{ m}$

Estas frecuencias, (4.9) y (4.10), corresponden a ondas de alta y muy alta frecuencia, respectivamente. Las ondas de alta frecuencia (3 MHz a 30 MHz) se propagan prevalentemente en la ionósfera, y tienen fuertes variaciones estacionales. Su uso típico es en comunicaciones de media y larga distancia, principalmente por aficionados, que tiene por objeto la instrucción individual, la intercomunicación y los estudios técnicos, con carácter exclusivamente personal y sin fines de lucro; además de su uso en telecomunicaciones móviles: radiotelefonía celular, radiocomunicación móvil especializada de flotillas, radiolocalización móvil de personas, búsqueda de personal, radiotelefonía privada, banda civil, Servicios de Comunicación Personal (PCS), etcétera [24]. Las ondas de muy alta frecuencia (30 MHz a 300 MHz) son mayormente de propagación directa, pero esporádicamente de propagación ionosférica o troposférica. Se usan en enlaces de radio a corta distancia, televisión y frecuencia modulada (FM) [25], además de servicios de radiocomunicación entre puntos fijos determinados o estaciones móviles [24].

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo, se ha analizado la radiación electromagnética generada por un dipolo eléctrico cuyo momento dipolar decae exponencialmente en el tiempo. A diferencia del caso clásico de dipolos con carga constante, se ha demostrado que la potencia radiada no solo depende de la frecuencia angular  $\omega$ , sino también de la frecuencia característica o tasa de decaimiento  $1/\tau$ , la cual introduce un factor de atenuación en la radiación emitida. Además, la combinación de estos términos genera patrones de radiación más complejos que los observados en dipolos estacionarios.

A través del desarrollo teórico basado en las ecuaciones de Maxwell y los potenciales retardados, se obtuvo una expresión para la potencia total radiada por un dipolo eléctrico oscilante cuya carga decae en el tiempo. Se encontró que la emisión electromagnética en este sistema no solo está determinada por la oscilación de las cargas, sino también por la tasa de decaimiento de la carga en el tiempo, lo que impacta directamente en la intensidad de la radiación, creando interferencia constructiva y destructiva en la distribución espectral de la radiación.

Se concluye que la potencia total radiada por un dipolo eléctrico con decaimiento temporal en la carga, en el primer ciclo de oscilación, está dada por:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{4\pi}{\omega\tau}} \right) \left[ \left( \frac{\omega^5}{c} - \frac{3\omega^3}{c\tau^2} \right) \left( \frac{\tau^2\omega \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) + \tau^3\omega^2 + \tau}{\tau^2\omega^2 + 1} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c\tau^3} - \frac{3\omega^4}{c\tau} \right) \left( \frac{\tau^2\omega \cos\left(\frac{2\omega r}{c}\right) - \tau \sin\left(\frac{2\omega r}{c}\right)}{\tau^2\omega^2 + 1} \right) + \frac{4\omega^3}{c\tau} \right],$$

donde se observa la dependencia de  $\omega$ ,  $\tau$ , e incluso en la distancia al punto de observación  $r$ , la cual no aparece en el caso de la potencia radiada por un dipolo estacionario.

En el caso particular de un dipolo con carga que decae en el tiempo analizado en la sección 4.1, y al compararlo con el caso de un dipolo eléctrico oscilante con carga

constante, se observa la atenuación en la intensidad de la radiación emitida producto del decaimiento temporal, así como la interferencia constructiva y destructiva en la intensidad de la radiación, pero la tendencia de la gráfica de la potencia radiada es parecida en ambos casos.

Se observa también que para valores suficientemente grandes de  $\tau$ , la potencia radiada dependerá mayormente de  $\omega$ , y su dependencia en  $\tau$  será despreciable. Esto es, a medida que la tasa de decaimiento  $\gamma = 1/\tau$  tiende a 0, los resultados tienden a los resultados de la potencia radiada de la fórmula de Larmor.

## 5.2. Investigaciones futuras

Para mejorar la comprensión y aplicación de este estudio, se sugieren las siguientes líneas de investigación futura:

- **Simulaciones numéricas avanzadas:** Se recomienda realizar simulaciones computacionales que permitan visualizar con mayor detalle la distribución espectral y angular de la radiación en un dipolo con carga decreciente. Esto facilitaría la comparación con sistemas físicos reales y ayudaría a identificar posibles efectos no considerados en el análisis teórico.
- **Validación experimental:** Dado que la presente investigación se basa en un desarrollo teórico, sería valioso realizar experimentos con plasmas inducidos por láser con distintas características o sistemas de antenas con modulación de carga para verificar la atenuación de la potencia radiada. Estas pruebas permitirían evaluar la precisión del modelo y determinar su aplicabilidad en escenarios reales.
- **Extensión a distribuciones cuadrupolares:** Como paso siguiente, se propone estudiar la potencia radiada por sistemas con configuraciones de carga más complejas, como distribuciones cuadrupolares.
- **Consideraciones relativistas:** En sistemas donde las velocidades de las cargas sean cercanas a la velocidad de la luz, será necesario incluir efectos relativistas en la descripción del dipolo. Esto permitiría extender el estudio a regímenes donde la emisión de radiación sea influenciada por efectos de contracción temporal y transformación de los campos electromagnéticos en marcos de referencia inerciales.
- **Análisis en  $\lambda \ll d$ :** En futuras investigaciones, podría ser de interés explorar el modelo de radiación de dipolos con carga decreciente en el régimen de ondas  $\lambda \ll d$ , como el descrito en [22].

# Bibliografía

- [1] Smirnova A.D. and Studenov V.B. Askar'yan G.A., Rabinovich M.S. Polarization of the ionization aureole of a light spark in a constant electric field. *JETP Lett*, 1965.
- [2] Markelov E.Y. Korobkin V.V Zhivopistev E.S., Klimov I.V. and Motylev S.L. Study of the electric field of a laser spark produced in a breakdown of the air. *Bull. Russian Acad. Sci.*, 1992.
- [3] Mašek M. Rohlena K. Laser spark as a source of electric and magnetic fields in the ambient gas. In *EPS Conference 16<sup>th</sup> Int. Congress on Plasmaphysics*, 2012.
- [4] James K Koga, Kengo Moribayashi, Yuji Fukuda, Sergei V Bulanov, Akito Sagisaka, Koichi Ogura, Hiroyuki Daido, Mitsuru Yamagiwa, Toyooki Kimura, Taketoshi Fujikawa, Masaki Ebina, and Kazuhiro Akihama. Simulation and experiments of the laser induced breakdown of air for femtosecond to nanosecond order pulses. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 43(2):025204, December 2009.
- [5] J. M. Paulin-Fuentes, C. Sánchez-Aké, F. O. Bredice, and M. Villagrán-Muniz. Dipolar distribution generated by laser-induced plasma (lip) in air in earliest instants. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 46(49):495202, November 2013.
- [6] J. M. Paulin-Fuentes, C. Sánchez-Aké, F. O. Bredice, and M. Villagrán-Muniz. Quadrupole distribution generated by a laser-induced plasma (lip) in air in earliest instants using pulses of 532 or 355 nm. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 48(28):285204, June 2015.
- [7] J. Larmor. On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 190:205–300, December 1897.
- [8] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–512, December 1865.
- [9] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3rd edition, 1999.
- [10] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, 4th edition, 2013.

- [11] W. K. H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, 1st edition, 1962.
- [12] A. Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 1st edition, 2013.
- [13] W. Rindler. *Introduction to Special Relativity*. Oxford University Press, 1st edition, 2001.
- [14] M. Faraday. Experimental researches in electricity. *The Royal Society Archives*, 1831.
- [15] J. H. Poynting. On the transfer of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 175:343–361, December 1884.
- [16] H. Hertz. On electromagnetic waves in air and their reflection. *Annalen der Physik*, 1887.
- [17] Max Planck. Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309(3):553–563, January 1901.
- [18] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, January 1905.
- [19] Louis de Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d'affectation, November 1924.
- [20] P. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265, March 1927.
- [21] Gerald Cooray and Vernon Cooray. Electromagnetic fields of a short electric dipole in free space – revisited. *Progress In Electromagnetics Research*, 131:357–373, 2012.
- [22] A. Zhakatayev and L. Tlebaldiyeva. Long-range longitudinal electric wave in vacuum radiated by electric dipole: Part i. *Radio Science*, 55(5), April 2020.
- [23] F Ayres Jr. *Cálculo Diferencial e Integral*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1972.
- [24] Secretaría de Comunicaciones y Transportes. *Cuadro nacional de atribución de frecuencias: México 1999*. Área General de Ingeniería y Tecnología, México, 1999.
- [25] Organización de los Estados Americanos. ¿Qué es el espectro radioeléctrico?, 2008. Consultado el 22 de abril de 2025.

<b>Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional</b>	
<b>Título de Tesis:</b>	Radiación de un Dipolo Eléctrico Dinámico cuya Carga Decae en el Tiempo
<b>Autor(a) o autores(ras) de la Tesis:</b>	Juan Manuel Coronel Carrillo
<b>ORCID:</b>	0009-0000-2113-4751
<b>Resumen de la Tesis:</b>	<p>En esta tesis se estudia la radiación electromagnética de un dipolo eléctrico cuya carga decae exponencialmente en el tiempo. Se derivan las expresiones para los campos eléctricos y magnéticos, y la potencia total radiada en un ciclo de oscilación a partir de los potenciales retardados y las ecuaciones de Maxwell. Se encuentra que la presencia del factor de decaimiento de la carga modifica la estructura espectral de la radiación y atenúa su intensidad. Se comparan los resultados con el caso clásico de un dipolo con carga constante, destacando las diferencias en la potencia radiada y su dependencia con las frecuencias de oscilación <math>\omega</math> y <math>1/\tau</math>. Se implementa un modelo motivado por el reporte de estructuras dipolares y cuadrupolares dinámicas con estas características en plasmas inducidos por láser obtenidos experimentalmente en [Askar'yan, G.A., 1965], [Zhivopistev, E.S. and S.L., 1992], [Rohlena, K., 2012], [Koga et al., 2009] y recientemente en [Paulin-Fuentes et al., 2013, Paulin-Fuentes et al., 2015], esto con el objetivo de analizar la potencia radiada por dichos dipolos. Considerando nuestro modelo matemático de un dipolo eléctrico que decae con el tiempo, se observa que la</p>

	<p>potencia radiada presenta un acoplamiento entre la frecuencia de decaimiento <math>1/\tau</math> y la frecuencia de oscilación <math>\omega</math>; esto contrasta con la expresión clásica para la potencia radiada formulada por [Larmor, 1897]. A diferencia del caso clásico, se encuentra una dependencia en <math>r</math>, que se explica como interferencia constructiva y destructiva en la propagación de la onda electromagnética; sin embargo, esta no afecta en gran medida a la magnitud de la potencia, como sí lo hace el factor de decaimiento <math>e^{-t/\tau}</math>, que hace que la potencia radiada decaiga a medida que avanza entre ciclos de oscilación.</p>
<p><b>Palabras claves de la Tesis:</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Radiación</li> <li>• Dipolo eléctrico</li> <li>• Decaimiento temporal</li> <li>• Potencia</li> <li>• Campos</li> <li>• Cargas eléctricas</li> </ul>
<p><b>Referencias citadas:</b></p>	<p>Askar'yan, G.A., Rabinovich, M.S., Smirnova, A., Studenov, V. (1965). Polarization of the ionization aureole of a light spark in a constant electric field. JETP Lett.</p> <p>Ayres, F. (1972). Cálculo Diferencial e Integral. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, New York, 2<sup>nd</sup> edition.</p> <p>Cooray, G., Cooray, V. (2012). Electromagnetic fields of a short electric dipole in free space – revisited. Progress In Electromagnetics Research, 131:357–373.</p> <p>De Broglie, L. (1924). Recherches sur la théorie des Quanta. Theses, Migration - universit'e en cours d'affectation.</p> <p>Dirac, P. (1927). The quantum theory of the emission and absorption of</p>

radiation. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 114(767):243–265.

Einstein, A. (1905). "Über einen die erzeugung und verwandlung des lichts betreffenden heuristischen gesichtspunkt. Annalen der Physik, 322(6):132–148.

Faraday, M. (1831). Experimental researches in electricity. The Royal Society Archives.

Griffiths, D. J. (2013). Introduction to Electrodynamics. Pearson, 4<sup>th</sup> edition.

Hertz, H. (1887). On electromagnetic waves in air and their reflection. Annalen der Physik.

Jackson, J. D. (1999). Classical Electrodynamics. Wiley, 3<sup>rd</sup> edition.

Koga, J. K., Moribayashi, K., Fukuda, Y., Bulanov, S. V., Sagisaka, A., Ogura, K., Daido, H., Yamagiwa, M., Kimura, T., Fujikawa, T., Ebina, M., Akihama, K. (2009). Simulation and experiments of the laser induced breakdown of air for femtosecond to nanosecond order pulses. Journal of Physics D: Applied Physics, 43(2):025204.

Larmor, J. (1897). On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 190:205–300.

Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. Philosophical Transactions of the

<p>Universidad Juárez México</p>	<p>Royal Society of London, 155:459–512.</p> <p>Organización de los Estados Americanos (2008). ¿Qué es el espectro radioeléctrico? Consultado el 22 de abril de 2025.</p> <p>Panofsky, W. K. H., Phillips, M. (1962). Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley, 1<sup>st</sup> edition.</p> <p>Paulin-Fuentes, J. M., Sánchez-Aké, C., Bredice, F. O., Villagrán-Muniz, M. (2013). Dipolar distribution generated by laser-induced plasma (lip) in air in earliest instants. Journal of Physics D: Applied Physics, 46(49):495202.</p> <p>Paulin-Fuentes, J. M., Sánchez-Aké, C., Bredice, F. O., Villagáan-Muniz, M. (2015). Quadrupole distribution generated by a laser-induced plasma (lip) in air in earliest instants using pulses of 532 or 355 nm. Journal of Physics D: Applied Physics, 48(28):285204.</p> <p>Planck, M. (1901). Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum. Annalen der Physik, 309(3):553–563.</p> <p>Poynting, J. H. (1884). On the transfer of energy in the electromagnetic field. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 175:343–361.</p> <p>Rindler, W. (2001). Introduction to Special Relativity. Oxford University Press, 1<sup>st</sup> edition.</p> <p>Rohlana, K., Mašek, M. (2012). Laser spark as a source of electric and magnetic fields in the ambient gas. In</p>
--------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Universidad Juárez México.</p>	<p>EPS Conference 16<sup>th</sup> Int.Congress on Plasmaphysics.</p> <p>Secretaría de Comunicaciones y Transportes (1999). Cuadro nacional de atribución de frecuencias: México 1999. Área General de Ingeniería y Tecnología, México.</p> <p>Zangwill, A. (2013). Modern Electrodynamics. Cambridge University Press, 1<sup>st</sup> edition.</p> <p>Zhakatayev, A., Tlebaldiyeva, L. (2020). Long-range longitudinal electric wave in vacuum radiated by electric dipole: Part i. Radio Science, 55(5).</p> <p>Zhivopistev E.S., Klimov, I.V., Markelov, E., Korobkin, V., Motylev, S.L. (1992). Study of the electric field of a laser spark produced in a breakdown of the air. Bull. Russian Acad. Sci.</p>
---------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Autónoma de Tabasco.