



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
“Estudio en la duda. Acción en la fe”



**DESARROLLO DE SOFTWARE DIDÁCTICO PARA ANALIZAR VIBRACIONES DE
SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CON PARÁMETROS
DISCRETOS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIATURA EN INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA

PRESENTA:
ISIDRO NARES LOPEZ

BAJO LA DIRECCIÓN DE:
M.C. JULIO CÉSAR RAMÍREZ HERNÁNDEZ

CODIRECTOR:
DR. CARLOS ENRIQUE TORRES AGUILAR

CUNDUACÁN, TABASCO, SEPTIEMBRE DE 2024

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

En la ciudad de Cunduacán, Tabasco, el día 02 del mes de agosto del año 2024. El que suscribe Isidro Nares Lopez alumno del programa de Ingeniería Mecánica Eléctrica con número de matrícula 182D23085, adscrito a la División académica de Ingeniería y Arquitectura, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor (a) (es) de la tesis presentada para la obtención del título en Ingeniero Mecánico Electricista y titulada Desarrollo de software didáctico para analizar vibraciones mecánicas de sistemas de múltiples grados de libertad con parámetros discretos dirigida por el M.C Julio César Ramírez Hernández y el Dr. Carlos Enrique Torres Aguilar.

DECLARO QUE:

La tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la ley federal de Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente

Villahermosa, Tabasco a 05 de septiembre de 2024

Nombre y Firma



Isidro Nares Lopez



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ingeniería
y Arquitectura



2024
Felipe Carrillo
PUERTO
CONSEJO DE
MEXICO

DIRECCIÓN

OFICIO: DAIA/DIR/CD/824/2024
FECHA: 09 de septiembre de 2024
ASUNTO: Autorización de Impresión
Definitiva

C. ISIDRO NARES LÓPEZ
PASANTE DE LA LICENCIATURA EN
INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA
P R E S E N T E.

En virtud de haber elaborado el trabajo recepcional para obtener el Título de Licenciatura en INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA, bajo la modalidad de "Tesis", el cual ha sido dirigido por el M.C. JULIO CÉSAR RAMÍREZ HERNÁNDEZ y el DR. CARLOS ENRIQUE TORRES AGUILAR, titulado:

"Desarrollo de software didáctico para analizar vibraciones de sistemas de múltiples grados de libertad con parámetros discretos."

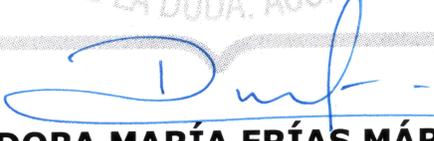
Tengo a bien autorizarle la **IMPRESIÓN DEFINITIVA** de dicho trabajo, continuando con los trámites correspondientes para su examen profesional.

Asimismo, le informo que en el artículo 113, del Capítulo IV, de nuestro Reglamento de Titulación vigente, a la letra dice:

"Una vez emitido el oficio de autorización de impresión del Trabajo Recepcional por la Dirección de la División Académica correspondiente, el egresado tendrá un plazo máximo de seis meses para efectos de presentar el Examen Profesional. En caso contrario, podrá optar por la misma u otra modalidad que señale el presente Reglamento, llevando a cabo los trámites correspondientes".

Sin otro particular por el momento, me despido deseándole éxito en su carrera profesional.

ATENTAMENTE


DRA. DORA MARÍA FRÍAS MÁRQUEZ
DIRECTORA



DIRECCIÓN

C.c.p. Archivo-INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA-336
DRA' DMFM/M' LHC

Miembro CUMEX desde 2008
Consortio de
Universidades
Mexicanas
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, km. 1, Col. La Esmeralda
C.P.86690 Cunduacán, Tabasco
Tel. (993) 358.15.00 Ext. 6752
direccion.daia@ujat.mx

www.ujat.mx



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



**División
Académica
de Ingeniería
y Arquitectura**



**2024
Felipe Carrillo
PUERTO**
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
PÚBLICA Y CULTURA
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

DIRECCIÓN

MEMORANDO

PARA: DRA. DORA MARÍA FRÍAS MÁRQUEZ
DIRECTORA DE LA DAIA.
DE: COMISIÓN REVISORA DE TRABAJO RECEPCIONAL
FECHA: 05 DE SEPTIEMBRE DE 2024
ASUNTO: ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEFINITIVA DE TRABAJO RECEPCIONAL
CCP: ARCHIVO.
MEM/CET/336/ID336/2024

PRESENTE.

En cumplimiento a lo estipulado en el Art. 112 del Reglamento de Titulación aplicable, y después de revisar el Trabajo Recepcional denominado:

"Desarrollo de software didáctico para analizar vibraciones de sistemas de múltiples grados de libertad con parámetros discretos."

Desarrollado por el C. ISIDRO NARES LÓPEZ de la Licenciatura en INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA bajo la modalidad de "Tesis", le comunicamos que aceptamos la impresión final de dicho trabajo, ya que el mismo ha cumplido con los requisitos necesarios.

COMISIÓN REVISORA

M.C. IVÁN OLÁN BRITO
Revisor

DR. IVAN ALEJANDRO HERNÁNDEZ PÉREZ
Revisor

DR. LENÍN RAMOS CANTÚ
Revisor

DR. LUIS MANUEL LOPEZ MANRIQUE
Revisor

DR. RUBÉN VÁSQUEZ LEÓN
Revisor

M.C. JULIO CÉSAR RAMÍREZ HERNÁNDEZ
Director de Trabajo Recepcional

DR. CARLOS ENRIQUE TORRES AGUILAR
Co-Director de Trabajo Recepcional

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

Villahermosa, Tabasco a 05 de septiembre de 2024

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autor (a) y/o autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada: DESARROLLO DE SOFTWARE DIDÁCTICO PARA ANALIZAR VIBRACIONES MECÁNICAS DE SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CON PARÁMETROS DISCRETOS

Con fundamento en el artículo 83 de la ley Federal de Derecho de Autor y a toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un periodo de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES

Isidro Nares Lopez



ALUMNO O EGRESADO

Julio Cesar Ramirez Hernandez

DIRECTOR

Carlos Enrique Torres Aguilar

CO-DIRECTOR

TESTIGOS

Karla Maria Aguilar Castro

Dedicatoria

Al comenzar mi etapa como universitario experimenté diferentes situaciones que me llevaron a tomar decisiones inesperadas que marcarían en gran parte mi vida, después de una larga travesía y nuevas experiencias puedo decir que al fin logre el sueño que tenía cuando era pequeño que era ser Ing. Mecánico Electricista, por eso este trabajo que es fruto de mi esfuerzo, sacrificio y muchas horas de desvelo que dedique para lograr esta meta, el logro aparte de ser mío, es también de padres por haberme apoyado incondicionalmente y por darme su amor, tiempo, comprensión y por alentarme a superarme día a día, a mis hermanos por haber estado en cada momento de alegría, tristeza, desagrado, también quiero agradecer a mi mejor amigo Pablo por haber estado conmigo en todo momento, por la gran amistad que tenemos y por su apoyo incondicional para que yo hiciera de este sueño una realidad.

Con mucho amor y entre lágrimas de felicidad les dedico esta tesis

En memoria de Luis Ángel, mi querido y amado hermano.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme regalado la vida, por haberme dado el entendimiento y por permitirme culminar esta grandiosa etapa, agradezco por darme la dicha de conocer y coincidir con personas maravillosas como lo son algunos compañeros de clases por todo el apoyo brindado, por sus consejos y por todos los momentos que pasamos dentro de la Universidad.

A la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco División Académica de Ingeniería y Arquitectura en la Unidad Chontalpa por darme la oportunidad de realizar mis estudios de formación profesional.

En especial al M.C. Julio César Ramírez Hernández y al Dr. Carlos Enrique Torres Aguilar, director y Co-Director de este trabajo de tesis, quienes siempre me han apoyado, instruido y guiado de una manera incondicional y extraordinaria durante todo este tiempo y han sido fuertes pilares en mi desarrollo profesional. Así como, la confianza brindada para el desarrollo y conclusión de este trabajo de tesis.

A todos los miembros de mi comité revisor, Dr. Luis Manuel López Manrique, Dr. Rubén Vásquez León, Dr. Iván Alejandro Hernández Pérez, M.C.I. Iván Olán Brito y Dr. Lenin Ramos Cantú por todos los comentarios, correcciones y sugerencias que sin duda ayudaron a enriquecer este trabajo de tesis.

A los maestros por compartir sus conocimientos, experiencias y consejos que han contribuido en gran medida a mi formación académica.

A mi familia por todo su apoyo brindado, por las palabras de aliento, por confiar en que podía lograr lo que me propusiera.

¡Gracias!

Índice general

	Pág.
CAPÍTULO 1. Introducción	
1.1 Generalidades.....	2
1.2 Revisión bibliográfica.....	4
1.2.1 Enfoque teórico para el análisis de vibraciones mecánicas.....	4
1.2.2 Métodos para el análisis de vibraciones mecánicas.....	5
1.3 Conclusión de revisión bibliográfica.....	9
1.4 Objetivo general.....	9
1.4.1 Objetivos particulares.....	9
1.5 Alcances.....	10
1.6 Estructura de la tesis.....	10
CAPÍTULO 2. Fundamentos Teóricos y Metodología	
2.1 Fundamentos teóricos.....	12
2.1.1 Modelación de sistemas mecánicos.....	12
2.1.2 Modelo matemático de un sistema de oscilación amortiguada.....	15
2.1.3 Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	22
2.2 Propuesta de algoritmo para la solución de SEDO.....	28
2.3 Modelos físicos y matemáticos de casos para verificación de metodología desarrollada.....	31
2.4 Sistema de tres grados de libertad con oscilación forzada.....	33
CAPÍTULO 3. Resultados y Discusión	
3.1 Resultados de los ejercicios de verificación	37
3.1.1 Sistema de un grado de libertad con oscilación forzada.....	37

3.1.2 Sistema de dos grados de libertad con oscilación libre.....	40
3.1.3 Sistema de tres grados de libertad.....	45
CAPÍTULO 4. Conclusiones.....	52
Referencias bibliográficas.....	54
Anexo A.....	56

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice de Tablas

Tabla	Descripción	Página
3.1	Resultados obtenidos de un Sistema de 1 GDL...	39
3.2	Resultados obtenidos de un sistema de 2 GDL	43
3.3	Resultados obtenidos de un sistema de tres GDL con vibración forzada	49

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice de figuras

Figura	Descripción	Página
2.1	Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad	15
2.2	Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad con oscilaciones forzadas.	19
2.3	Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de dos grados de libertad con oscilación libre	32
2.4	Representación de un sistema mecánico traslacional de tres grados de libertad.	34
3.1	Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK 2do orden.	37
3.2	Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK 3er orden	38
3.3	Respuesta de Sistema de 1GDL, solución analítica y RK 4to orden	38
3.4	Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK Fehlberg 5to orden.	39
3.5	Respuesta de sistema de 2 GDL solución analítica.	40
3.6	Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 2do orden.	41
3.7	Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 3er orden.	42

3.8	Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 4to orden	42
3.9	Respuesta de sistema de 2GDL: solución analítica y RK Fehlberg 5to orden	43
3.10	Respuesta de un sistema de tres GDL con vibración forzada mediante RK 2do orden- posiciones: a) RK 2do orden, b) RK 3er orden, c) RK 4to orden y d) RK 5to orden	46
3.11	Respuesta de un sistema de tres GDL con vibración forzada mediante RK 2do orden- Velocidades: a) RK 2do orden, b) RK 3er orden, c) RK 4to orden y d) RK 5to orden	49

Índice de Pseudocódigos

Algoritmo	Descripción	Página
2.1	Pseudocódigo Método de Euler	24
2.2	Pseudocódigo Método de Runge Kutta general	28
2.3	Pseudocódigo de Algoritmo propuesto para solución de sistemas de EDO	29

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Nomenclatura

Variables	Descripción	Unidades
a	Constante de proporcionalidad	Nm ² /C ² .
A	Factor de agrupación	Adimensional
B	Factor de agrupación	Adimensional
c	Coefficiente de amortiguamiento de la masa	N s/m
C	Factor de agrupación	Adimensional
C_1	Coefficiente de masa	Adimensional
C_2	Coefficiente de masa	Adimensional
C_3	Coefficiente de masa	Adimensional
C_4	Coefficiente de masa	Adimensional
dW	Trabajo de fuerzas no potenciales	Joule
F	Fuerza de amortiguamiento viscoso	Newton
$f'(x_{i+1})$	Pendiente	Adimensional
h	Tamaño de paso	Adimensional
k_n	Constante de recurrencia	Adimensional
k	Coefficiente de fricción de la masa	Adimensional
m	masa	kg
Q_l	Fuerzas generalizadas	Newton
$RMSD$	Raíz del error medio cuadrático	%
t	Tiempo	segundos
T	Energía cinética	kg·m ² /s ²
U	Energía potencial	kg·m ² /s ²
ω	Frecuencia de excitación	Adimensional
ω_A	Frecuencia de oscilación amortiguada	k/m
W	Trabajo	Joule
x	desplazamiento	metros

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

\dot{x}	Velocidad	m/s
X	Amplitud de oscilación	Hz
$\sum_j F_{ij}$	Suma de todas las Fuerzas que actúan en m	Newton
$\sum_j M_{ij}$	Suma de momentos de todas las fuerzas que actúan en un cuerpo rígido del momento de inercia J_i	kg · m / s
$(x_{i+1} - x_i)$	Distancias entre x_i y x_{i+1} .	m
$\phi(x_i, y_i, h)h$	Función incremento	
Símbolo		
λ_1	Distancia 1	m
λ_2	Distancia 2	m
R_n	Residuo de aproximación de n-ésimo orden	%
ξ	Valor de x entre el rango x_i y x_{i+1} .	Adimensional
ϕ	Fase de desplazamiento con respecto a la fuerza de excitatriz	m
Subíndice		
n	n-esimo orden	

**DESARROLLO DE SOFTWARE DIDÁCTICO
PARA ANALIZAR VIBRACIONES DE SISTEMAS
DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CON
PARÁMETROS DISCRETOS**

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Resumen

En la enseñanza de ingeniería es necesario el estudio y solución de modelos dinámicos como los estudiados en vibraciones mecánicas o circuitos resistivos-conductivos-capacitivos, es por ello la necesidad de emplear herramientas computacionales para el análisis de sistemas de múltiples grados de libertad, sin embargo, gran parte de las herramientas existentes se encuentran limitadas en cuanto a opciones de métodos para solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y carecen de un método de ajuste para minimizar el tamaño del paso en función del error establecido. Por esta razón, el presente trabajo aborda el desarrollo de un algoritmo para el análisis de sistemas con parámetros discretos de múltiples grados de libertad sometidos a oscilaciones forzadas empleando métodos numéricos que pueden utilizarse con fines didácticos y para aplicaciones en ingeniería. En el algoritmo se incluyeron los métodos de Runge Kutta de orden superior, para la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El algoritmo es capaz de ajustar el tamaño del paso o intervalo de tiempo para reducir el error impuesto como parte de los criterios para obtener la solución aproximada. El código computacional se desarrolló empleando el lenguaje de programación Python y se estableció una serie de ejercicios para la verificación de la metodología desarrollada a partir de lo reportado en la literatura. Los resultados numéricos presentaron diferencias menores al 1%, por lo cual se estableció la fiabilidad para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con la metodología propuesta. Además, se encontró que el método de Runge Kutta de 4to orden presentó los mejores tiempos de ejecución y los valores de RMSD menores de entre todos los métodos que se incluyeron en el algoritmo.

Los resultados obtenidos revelan la capacidad del algoritmo para obtener la solución aproximada de sistemas dinámicos en un tiempo de cómputo aceptable lo cual es benéfico en distintas áreas de la ingeniería, como es el caso de las vibraciones mecánicas. Sin embargo, es necesario continuar con el desarrollo de una interfaz que facilite el uso e implementación del algoritmo en aulas y facilite la comprensión de los problemas que se abordan en ingeniería.

Abstract

In teaching engineering, it is necessary to study and solve dynamic models such as those studied in mechanical vibrations or resistive-conductive-capacitive circuits. Therefore, computational tools are needed to analyze multi-degree-of-freedom systems. However, many existing tools need to be improved in their options for solving systems of ordinary differential equations. Adjusting the step size is needed to minimize the error based on a specified tolerance. For this reason, the present work addresses the development of an algorithm for analyzing systems with discrete parameters subjected to forced oscillations using numerical methods that can be employed for educational purposes and engineering applications. The algorithm includes higher-order Runge-Kutta methods for the numerical solution of systems of ordinary differential equations. The algorithm can adjust the step size or time interval to reduce the imposed error as part of the criteria for obtaining the approximate solution. The computational code was developed using the Python programming language, and a series of exercises were established to verify the developed methodology based on what is reported in the literature. The numerical results presented less than 1% differences, thus establishing the reliability of solving systems of ordinary differential equations with the proposed methodology. Furthermore, it was found that the fourth-order Runge-Kutta method showed the best execution times and the lowest RMSD values among all the methods included in the algorithm.

The obtained results reveal the algorithm's ability to approximate the solution of dynamic systems in an acceptable computation time, which is beneficial in various areas of engineering, such as mechanical vibrations. This algorithm has the potential to simplify the analysis of complex problems, providing a sense of relief to engineers and students. However, it is necessary to continue developing an interface that facilitates the use and implementation of the algorithm in classrooms and aids in understanding the problems addressed in engineering.

Palabras claves

Vibraciones mecánicas, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales ordinarias, software didáctico

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes y la revisión bibliográfica del marco referencial del estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y vibraciones mecánicas, así como los objetivos, los alcances del trabajo y una descripción general de la estructura del proyecto de tesis.

1.1 Generalidades

Las vibraciones están presentes a lo largo nuestra vida, algunos ejemplos cotidianos en los que se experimentan las vibraciones mecánicas influyen en el cuerpo humano como son los molinos de mano, aparatos electrodomésticos, aparatos de higiene personal, cepillos de dientes, secadoras de cabello, máquinas para afeitar, por otra parte, existen maquinas que generan grandes vibraciones las cuales están ligadas con los humanos, entre ellas están: retroexcavadoras, camiones para arar tierra, compactadoras, topadora, camiones de transporte de arena, máquinas de industrias del plástico, martillos neumáticos, entre otros.

Gran parte de los sistemas creados por el hombre experimentan o pueden llegar a producir alguna vibración mecánica, cualquier desbalance en máquinas giratorias ocasionan vibración, este tipo de vibraciones no son deseables y generan afectaciones como daño de dispositivos y reducción de la eficiencia.

Las partes importantes en un sistema de movimiento vibratorios son: resorte, amortiguador y masa. El resorte, se encarga de almacenar energía potencial, mientras que, el amortiguador es el elemento que se encarga de disipar la energía cinética, y la masa es el sistema del cual interesa conocer su posición.

Para el modelar sistemas vibratorios, existen cuatro tipos de mecanismos de amortiguamiento: amortiguamiento viscoso, amortiguamiento de coulomb o fricción seca, amortiguamiento por histéresis, amortiguamiento por fluido (Singiresu,2012). En todos estos mecanismos, la fuerza de amortiguamiento se expresa como una función de la velocidad. Una representación usual de un amortiguador viscoso es un cilindro con cabeza de pistón, la cabeza del embolo se desplaza a una velocidad dada en relación con la carcasa del cilindro la cual esta fija. La magnitud de la fuerza del amortiguador siempre se opone a la de la velocidad, el amortiguamiento viscoso también se puede llamar amortiguamiento hidráulico lento.

Los sistemas mecánicos al ser sometidos a fuerzas que varían en el tiempo, generalmente se comportan de forma periódica, responden al variar su estado de equilibrio presentando cambios en su configuración perturbando su funcionamiento. Este tipo de sistemas mecánicos como: sistema biela-manivela, palanca, sistema de

poleas, engranajes, bobinas y que están expuestos a tales fuerzas, presentan molestias al personal que los maneja y acortan la vida útil del mecanismo.

Cuando un sistema está restringido a modo que pueda vibrar de una sola forma, o este necesite únicamente una coordenada independiente para poder determinar el sistema de masas en el espacio, se dice que el sistema tiene un “grado de libertad” (GDL) (Leos Santiago.I,2013).

Los sistemas de múltiples grados de libertad son sistemas en los que influyen tres o más formas en las que los elementos que lo conforman pueden vibrar o desplazarse.

Para llevar a cabo el análisis de un sistema de múltiples grados de libertad, es necesario contar con la solución a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, algunas resultan ser simple, sin embargo, otras pueden ser más complejas. Conforme va aumentando el número de grados de libertad, incrementa la dificultad para determinar la solución del sistema.

Existen casos en el que los sistemas son no lineales, por ejemplo: un péndulo, en el que su comportamiento se puede determinar a través del uso de las ecuaciones de LaGrange, con las que se demuestra que el comportamiento del péndulo puede ser descrito por una ecuación no lineal adimensional.

Gran parte de los softwares existentes para el análisis de sistemas están limitados a cuatro GDL, muchos de estos son de licencia y no permiten la modificación al código fuente para el desarrollo de nuevas aplicaciones o mejoras en el análisis de sistemas mecánicos.

Uno de los métodos analíticos para resolver los sistemas de múltiples GDL es el método de la transformada de Laplace, el cual se puede aplicar a sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. El proceso para determinar la solución es transformar el sistema de ecuaciones diferenciales rectoras en sistemas de ecuaciones algebraicas aplicando la transformada de Laplace, después se resuelve el sistema algebraico para encontrar las soluciones a diversos elementos de inercia en el dominio de Laplace. Por último, se aplica la transformada inversa de Laplace para pasar las respuestas al dominio del tiempo. Con el fin de obtener operaciones algebraicas sencillas, el análisis de las vibraciones es limitado a sistemas de dos grados de libertad. (Magrab & Balachandran, 2006). Sin embargo, su aplicación está limitada y se

ve comprometida si el sistema presenta no linealidades como la variación de las propiedades y su dependencia con variables de espacio y tiempo.

Por otro lado, están presentes los métodos numéricos para generar soluciones aproximadas como el método de Euler-Cauchy, que simplifica el análisis de efectos lineales y no lineales para sistemas de más de un GDL. Sin embargo, debido a que la solución aproximada se ve afectada por el intervalo de evaluación (paso de tiempo), el tiempo de cómputo para obtener la solución numérica incrementa considerablemente. Ante ello es necesario implementar metodologías que mejoren la aproximación numérica de la solución sin comprometer el recurso computacional.

1.2 Revisión bibliográfica

A continuación, se describirán los trabajos previos sobre el análisis de vibraciones en sistemas mecánicos empleando diferentes metodologías:

1.2.1 Enfoques teóricos para el análisis de vibraciones mecánicas

Para la derivación de las ecuaciones de movimiento en un sistema de múltiples grados de libertad en donde se aplica la segunda ley de movimiento de Newton es posible llevar a cabo la siguiente metodología:

- I. Establecer coordenadas aptas para describir el conjunto de posiciones de varias masas puntuales y cuerpos rígidos en los sistemas, considerando direcciones positivas aptas para los desplazamientos, velocidades, cuerpos rígidos y aceleración de masas.
- II. Establecer la configuración de equilibrio estático del sistema y comparar los desplazamientos de las masas y cuerpos rígidos con respecto a sus posiciones de equilibrio estático.
- III. Dibujar un diagrama de cuerpo libre (DCL) por cada masa o cuerpo rígido. Definir las fuerzas de resorte, amortiguamiento y fuerzas externas que se ejerce en cada masa o cuerpo rígido cuando realiza un desplazamiento y velocidad positiva al cuerpo rígido

- IV. Aplicar la segunda ley de Newton a cada masa o cuerpo rígido que es mostrado en el diagrama de frecuencia.

1.2.2 Métodos para el análisis de vibraciones mecánicas

Jang y Jeong (2002) Presentaron un modelo no lineal para el análisis vibracional de cojinetes, debido a la ondulación en un rotor rígido soportado por dos o más cojinetes. Modelaron la superposición de una función sinusoidal y los vectores de posición del centro del radio de la ranura exterior e interior, se definen con respecto al centro de masa del rotor-cojinete. Utilizaron la teoría de contacto hertziana para calcular la deflexión elástica y la fuerza de contacto no lineal resultante de la ondulación, mientras el rotor tiene movimiento traslacional y angular. Utilizaron el algoritmo de Runge-Kutta Fehlberg para resolver las ecuaciones de movimiento no lineales con cinco grados de libertad. El modelo que propusieron puede calcular el desplazamiento traslacional al igual que el desplazamiento angular del rotor sostenido por dos o más cojinetes con ondulaciones.

Castañeda et al. (2003) desarrollaron un programa en lenguaje de programación Fortran, en el que analizaron vibraciones libres en ejes utilizando elementos finitos. Realizaron una serie de pruebas al programa comparando los resultados obtenidos con los resultados teóricos a partir de un análisis de vibraciones para medios continuos. Observaron que el error se va reduciendo hasta valores aceptables, a medida que se aumenta el número de elementos y aún más si se utilizan elementos cuadráticos. Con base en los resultados obtenidos se probó que el método de elementos finitos, así como los elementos elegidos son bastante precisos para realizar análisis en ingeniería.

Yáñez (2003) realizó un análisis computacional de vibraciones mecánicas en el software Matlab, la interfaz que utilizó fue el sistema operativo Windows 95,98 y NT. Esos sistemas están compuestos de 3 subsistemas, el primero consta de un aparato electromecánico, el segundo es una unidad control de tiempo real, el tercer subsistema es la paquetería del programa ejecutivo(executive), el cual corre en una computadora MS dos, concluyó que los resultados físicos, los resultados computacionales (Matlab). Con lo que demostró que el análisis fue el adecuado.

Gómez et al (2007) presentaron una metodología para la identificación del desbalance de sistemas rotodinámicos basado en la técnica de identificación algebraica a través del modelo matemático que emula el comportamiento dinámico de un rotor de múltiples grados de libertad. Se debe realizar las mediciones geométricas del rotor, ubicación de los soportes debe investigar las propiedades físicas de los materiales existentes en el eje y rotor, se utilizó el dinamómetro para obtener la carga aplicada y el sensor de proximidad para registrar la posición inicial la pendiente de la recta, muestra el valor de la rigidez del soporte obtenida de un ajuste por mínimos cuadrados. Se desarrolló un código computacional para tener la solución aproximada de la ecuación Se obtuvo que en la matriz de masa los valores fuera de la diagonal se pueden despreciar dando como resultado a una matriz diagonal, se desarrolla habilidades de programación debido a la complejidad numérica de los métodos.

Briceño Magaña. (2010) aplicó la ecuación de movimiento para analizar las vibraciones mecánicas provocadas por una fuente de excitación. Para realizar este estudio se implementaron simulaciones del desplazamiento y la fuerza dinámica compresiva en la sarta con el fin de controlar las vibraciones mecánicas. Se llevó a cabo el análisis de vibraciones en cuatro pozos de la región sur durante el diseño y la perforación. obtuvo el comportamiento de las vibraciones mecánicas en cada uno de los 4 pozos, así como su graficación en Matlab. Concluyó que al tener un cambio brusco de las áreas transversales se tiene una amplificación de las vibraciones mecánicas en la sarta de perforación, por lo que el cambio entre las áreas transversales no debe ser tan drástico.

S.D Yu, B.C Wen (2012) Presentaron un procedimiento para predecir comportamientos vibratorios en el dominio del tiempo de múltiples grados de libertad de sistemas mecánicos con fricción seca. Utilizaron el esquema de integración de Bozzak-Newmark para discretizar las ecuaciones del sistema de movimiento. El procedimiento que propusieron se consideró, preciso, eficiente y robusto para resolver problemas de vibración no suave de sistemas de múltiples grados de libertad con fricción seca, también puede aplicarse a sistemas con restricciones de fricción bidimensionales y sistemas más robustos.

Leos Santiago (2013) realizó un manual interactivo para el laboratorio de la Facultad de Estudios Superiores (FES) Aragón concentrándose en el equipo didáctico TM16 de vibraciones Mecánicas. El manual se realizó en Visual Basic con el fin de facilitar el entendimiento de las prácticas realizadas en él, se puede observar de manera interactiva las prácticas que pueden realizarse en el equipo. Se modificó el contenido del manual agregando una sección de conceptos teóricos y dos prácticas demostrativas. Logró enriquecer el manual de prácticas del equipo TM16 para vibraciones mecánicas existentes en el laboratorio.

Luna Díaz A.I.(2019), realizó una propuesta de configuración distinta a las convencionales de una configuración paralela, la cual requiere de un análisis detallado y minucioso debido a que no es común la aplicación de este tipo de configuraciones a máquinas y herramientas. Se llevó a cabo el análisis dinámico de la máquina herramienta planteada, las simulaciones por elementos finitos en el software CAD, necesario para tener información del sistema analizado con la final de comprobar la validez y fiabilidad del procedimiento a seguir en las simulaciones. concluyó que la simulación por elementos finitos y atender las características geométricas de cada propuesta resultados fue necesario para llevar a cabo los cálculos.

Juárez Martínez (2020) para el sistema rotodinámico se utilizó la técnica de elementos finitos considerando un elemento tipo viga de cuatro grados de libertad. Para la identificación de desbalance de forma experimental se utilizaron las formas modales en dirección horizontal y vertical correspondientes al primer modo de vibración de un rotor tipo Jeffcot. Propuso un tratamiento a la señal de vibración obtenida aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), con lo que se logra asegurar que la señal de vibración corresponda únicamente a los efectos generados por las fuerzas de desbalance del sistema rotodinámico. Obtuvo que el rotor se balanceo en un 100% al colocar la masa de balaceo corregido en una posición angular de 337.5 grados, la posición angular de desbalance identificada promedio fue de 108.18°. Concluyó que la identificación de los parámetros del desbalance se ve afectado por las variaciones de amplitud y frecuencia de las señales de vibración obtenidos a velocidad constante.

Pozo Fernando et al. (2022) Evaluaron el uso de una interfaz gráfica de usuario para modelar vibraciones mecánicas mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, mediante el método de Runge-Kutta usando el programa MATLAB. Las resoluciones de ecuaciones se aplicaron a vibraciones no amortiguadas, vibraciones amortiguadas y vibraciones forzadas. Validaron el método mediante la aplicación de la herramienta Design Thinking, la cual permitió su validación a través de la aplicación de un test de usabilidad. Obtuvieron que la interfaz desarrollada fue útil para la identificación, análisis y formulación de soluciones sobre la problemática de vibraciones mecánicas y el mantenimiento mecánico preventivo.

Pingting Ying. et al (2022) Estudiaron las características dinámicas vibraciones de un sistema multicuerpo en una bomba de pistones axiales basado en un modelo de parámetros agrupados. El modelo fue utilizado para predecir las respuestas de vibración del conjunto motor y el conjunto separador. Basaron su estudio en el método de la familia de Runge-Kutta (RK). El modelo que desarrollaron fue utilizado para investigar el efecto de circunstancias de funcionamiento y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento sobre la respuesta de vibración de amplitud-frecuencia y el diagrama de trayectoria de fase. Los resultados demostraron que la frecuencia simulada por el modelo es similar a la medida por el estudio experimental y su error es de 8.85%.

Torres Molano H.F(2023) Presentó una metodología para el desarrollo de análisis de un sistema de transmisión de potencia de engranajes cilíndricos de dientes rectos para la reducción de vibraciones. Utilizó el software MATLAB, para solucionar ecuaciones diferenciales y usar librerías de optimización. Realizó un estudio sobre la dinámica de transmisión de potencia, revisando los tipos de modelos, su planteamiento matemático, factores que generan vibraciones y parámetros geométricos del sistema que afectan su masa, rigidez y amortiguamiento. Planteó un modelo dinámico, por medio de parámetros concentrados teniendo en cuenta todas sus características geométricas, condiciones iniciales y parámetros con el fin de validar la rigidez y desplazamientos con respecto a un caso de estudio.

1.3 Conclusión de revisión bibliográfica

Los estudios realizados abarcan un inmenso campo de aplicación de los diferentes análisis de vibraciones mecánicas por medio de modelos matemáticos o diferentes prototipos experimentales. A la fecha, se encontraron estudios experimentales sobre análisis de vibraciones para prever fallas, manuales interactivos de prácticas en vibraciones mecánicas y desarrollo de herramientas utilizando software libre al igual que software de licencia pagada. Sin embargo, en la mayoría de los trabajos, la metodología presentada solo permite analizar sistemas de uno o dos grados de libertad, incluso la solución de estos métodos para sistemas de 4 grados de libertad o superior resulta poco factible su resolución debido a que conlleva mucho análisis matemático. En gran parte de los estudios analizados se observó que abordaban temas relacionados a métodos numéricos dentro de los que se centran en los métodos de Runge Kutta de cuarto orden y orden superior, así como del método de Bozak-Newmark. Por lo tanto, se realiza la necesidad de presentar una metodología para el análisis de sistemas de múltiples grados de libertad que sea compatible con las aplicaciones para investigación y de industria solicitados en ingeniería.

1.4 Objetivo general

Desarrollar un algoritmo para el análisis de sistemas de múltiples grados de libertad sometido a oscilaciones forzadas a través de métodos numéricos.

1.4.1 Objetivos particulares

- ❖ Realizar un análisis de las metodologías reportadas a la fecha sobre vibraciones mecánicas.
- ❖ Plantear un algoritmo para la solución de sistemas de múltiples grados de libertad considerando oscilaciones forzadas.
- ❖ Desarrollar un código computacional del algoritmo propuesto para analizar el comportamiento oscilatorio de sistemas de múltiples grados de libertad.
- ❖ Verificar el algoritmo a partir de soluciones reportadas en la literatura.
- ❖ Comparar el algoritmo propuesto con diferentes métodos reportados en la literatura.

1.5 Alcances

- ❖ Desarrollar un código computacional para el desarrollo de sistemas de múltiples grados de libertad.
- ❖ Publicar un artículo de congreso de los resultados obtenidos de la metodología desarrollada.
- ❖ Escritura de la tesis de licenciatura y el examen de grado

1.6 Estructura de la tesis

La estructura del trabajo de investigación comprende de cuatro capítulos que se distribuyen de la siguiente manera:

Capítulo 1: Presentación de los antecedentes, la revisión bibliográfica del marco referencial sobre los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como los objetivos y alcances del trabajo.

Capítulo 2: Presentación de los fundamentos teóricos sobre el estudio de las vibraciones mecánicas, la metodología de aplicación de los métodos numéricos para la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y la presentación del algoritmo propuesto.

Capítulo 3: Presentación de los resultados obtenidos.

Capítulo 4: Presentación de las conclusiones del estudio realizado y recomendaciones para los trabajos futuros

Capítulo 2

Fundamento teórico y Metodología

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos para el análisis de sistemas mecánicos de oscilación libre y forzada, los métodos numéricos empleados para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, la metodología propuesta para el algoritmo computacional que forma parte del software para analizar vibraciones de sistemas de múltiples grados de libertad y el planteamiento de los casos a evaluar para la verificación de la solución numérica.

2.1 Fundamentos teóricos

A continuación, se describen los fundamentos teóricos de la modelación de sistemas mecánicos bajo oscilación libre y forzada, así como los métodos numéricos empleados para la solución de las ecuaciones diferencias ordinarias.

2.1.1 Modelación de sistemas mecánicos

Un enfoque tradicional para describir el movimiento de los cuerpos es través de las leyes de Newton. A continuación, se presentan las ecuaciones que describen la interacción de los objetos en términos de fuerza y momento considerando los principios de la segunda ley de Newton:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \quad (\text{para masa } m_i) \quad \text{Ec.2.1}$$

$$J_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \quad (\text{para cuerpo rígido de inercia } J_i) \quad \text{Ec.2.2}$$

Donde, $\sum_j F_{ij}$ es la suma de todas las fuerzas que actúan en la masa m_i , $\sum_j M_{ij}$, es la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en un cuerpo rígido del momento de inercia de masa J_i .

Para la derivación de las ecuaciones de movimiento en un sistema de múltiples grados de libertad en donde se aplica la segunda ley de Newton, es posible llevar a cabo la siguiente metodología:

- I. Establecer coordenadas aptas para describir el conjunto de posiciones de varias masas puntuales y cuerpos rígidos en los sistemas; considerando direcciones positivas aptas para los desplazamientos, velocidades, cuerpos rígidos y aceleración de masas.
- II. Establecer la configuración de equilibrio estático del sistema y comparar los desplazamientos de las masas y cuerpos rígidos con respecto a sus posiciones de equilibrio estático.
- III. Dibujar un diagrama de cuerpo libre (DCL) por cada masa o cuerpo rígido. Definir las fuerzas de resorte, amortiguamiento y fuerzas externas que se ejerce en cada masa o cuerpo rígido cuando realiza un desplazamiento y velocidad positiva al cuerpo rígido.

IV. Aplicar la segunda ley de Newton a cada masa o cuerpo rígido que es mostrado en el diagrama de frecuencia.

Otro de los enfoques utilizados en mecánica para describir el movimiento de cuerpos rígidos es a través de funciones que evalúan la interacción energética como las que estableció LaGrange (Singiresu 2012). LaGrange elaboró un conjunto de estrategias de sistemas dinámicos, planteado a partir de magnitudes escalares de energía cinética (T), energía potencial (U) y trabajo (W). Las ecuaciones de LaGrange son ecuaciones diferenciales de movimiento expresadas en términos de coordenadas generalizadas. La forma general de las ecuaciones está dada en términos de energía cinética y potencial, en donde la sumatoria de las energías

$$d(T + U) = 0 \quad \text{Ec.2.3}$$

La energía cinética T es una función de las coordenadas generalizadas q_1 de las velocidades generalizadas \dot{q}_1 , en tanto la energía potencial U es solo de q_1 .

$$T = T(q_1, q_2 \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n) \quad \text{Ec.2.4}$$

$$U = U(q_1, q_2 \dots q_n)$$

El diferencial de T es:

$$dT = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad \text{Ec.2.5}$$

Para descartar el segundo termino con $d\dot{q}_i$, partimos de la ecuación para la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{Ec.2.6}$$

Al diferenciar la Ec.2.6 con respecto a \dot{q}_i , multiplicar por \dot{q}_i y, sumar desde $i=1$ hasta $i=N$, se obtiene un resultado igual a:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \quad \text{Ec.2.7}$$

$$2T = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

Utilizando la regla del producto definimos el diferencial de $2T$:

$$2dT = \sum_{i=1}^N d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad \text{Ec.2.8}$$

Al restar la Ec. 2.5 de la Ec.2.8, el segundo termino con $d\dot{q}_i$ queda eliminado.

Quedando como resultado:

$$dT = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] d\dot{q}_i \quad \text{Ec.2.9}$$

El diferencial de U es:

$$dU = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \quad \text{Ec.2.10}$$

Al derivar la invariancia de la energía total esta se convierte en:

$$d(T+U) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] d\dot{q}_i = 0 \quad \text{Ec.2.11}$$

Dado que las N coordenadas generalizadas son independientes entre ellas, las $d\dot{q}_i$ toman valores aleatorios, por lo que la ecuación solo se satisface si:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, ..i = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec.2.12}$$

La ecuación de LaGrange en el que todas las fuerzas tienen un potencial U , la ecuación 2.11 puede ser modificada un poco al introducir el langrangiano $L = T - U$, la Ec.2.12 puede escribirse en términos de L .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, ..i = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec.2.13}$$

Cuando el sistema está sometido a fuerzas dadas que no tienen un potencial, se sustituye Ec.2.13 por:

$$d(T + U) = dW \quad \text{Ec.2.14}$$

Donde dW es el trabajo de las Fuerzas no potenciales, cuando el sistema es sometido a un desplazamiento infinitesimal arbitrario. dW puede expresarse en términos de las coordenadas generalizadas q_i .

$$dW = \sum_{i=1}^N Q_i dq_i \quad \text{Ec.2.15}$$

Donde Q_i son las fuerzas generalizadas que están asociadas con la coordenada generalizada q_i . Por lo tanto, la ecuación de LaGrange es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, i = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec.2.16}$$

2.1.2 Modelo matemático de un sistema de oscilación amortiguada

Se plantea un sistema masa-resorte-amortiguador, en el que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento están fijos en sus extremos y la masa se mueve de forma lineal al de los coeficientes, la masa se encuentra a una distancia x_0 de una posición de equilibrio. En la Fig.2.1 se muestra el modelo físico.

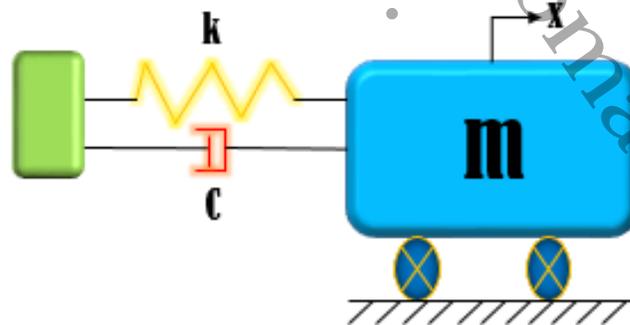


Figura 2.1 Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad

La fuerza de amortiguamiento viscoso F es proporcional a la x' o v y se expresa como:

$$F = a - \dot{x}$$

El signo negativo indica que la fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección de velocidad. Sustituyendo el signo α por la constante de proporcionalidad c que es el coeficiente de amortiguamiento.

$$F = -c\dot{x} \quad \text{Ec.2.17}$$

Se procede a determinar la EDO de un sistema de oscilación amortiguada

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt} - kx \quad \text{Ec.2.18}$$

La solución analítica de la Ec. 2.18 es:

$$x = C_1 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} e^{\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)}} + C_2 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} e^{-\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}} \quad \text{Ec 2.19}$$

A partir de la Ec. 2.19, al momento de obtener los coeficientes C_1 y C_2 existen tres posibilidades debido a la potencia a la que se encuentra elevado el número de Euler: (Sobre amortiguado, sub amortiguado y críticamente amortiguado). A continuación, se presenta el primer escenario:

Para el sistema sobre amortiguado $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \left(\frac{k}{m}\right)$; tiempo $t = 0$, desplazamiento $x = x_0$,

velocidad $\dot{x} = 0$.

Se obtiene el valor de C_2

$$C_2 = \frac{x_0 \left(-\left(\frac{c}{2m}\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)} \right)}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}} \quad \text{Ec.2.20}$$

Luego se obtiene el valor del coeficiente C_1

$$C_1 = x_0 \left[\frac{-\left(\frac{c}{2m}\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}}{2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}} \right] \quad \text{Ec.2.21}$$

La ecuación característica de un sistema sobre amortiguado tomando en cuenta las condiciones iniciales es la siguiente:

$$x = C_1 e^{\left[-\left(\frac{c}{2m}\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}\right]t} + C_2 e^{\left[-\left(\frac{c}{2m}\right) - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}\right]t} \quad \text{Ec.2.22}$$

Para el sistema críticamente amortiguado $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \left(\frac{k}{m}\right) \cdot \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \left(\frac{k}{m}\right)$; Tiempo $t = 0$,

Desplazamiento $x = x_0$, Velocidad $\dot{x} = 0$.

Al sustituir X por x_0

$$x = C e^{\left[-\left(\frac{c}{2m}\right)t\right]} \rightarrow x_0 = C e^{\left[-\left(\frac{c}{2m}\right) \cdot 0\right]} \quad \text{Ec.2.23}$$

Reduciendo x_0

$$x_0 = C e^{0^1}$$

Entonces:

$$x_0 = C$$

La ecuación característica de un sistema críticamente amortiguado tomando en cuenta las condiciones iniciales es la siguiente:

$$x = x_0 e^{\left[-\left(\frac{c}{2m}\right)t\right]} \quad \text{Ec.2.24}$$

Para el sistema sub amortiguado $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \left(\frac{k}{m}\right)$; Tiempo $t = 0$, Desplazamiento $x = x_0$,

Velocidad $\dot{x} = 0$.

La frecuencia de oscilación amortiguada se expresa como:

$$\omega_A = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{Ec.2.25}$$

Sustituyendo los valores de las condiciones iniciales en:

$$x_0 = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \left[C_1 \cos(\omega_A t) + C_2 \text{sen}(\omega_A t) \right]$$

El valor del coeficiente C_1 es:

$$x_0 = [C_1] \rightarrow C_1 = x_0 \quad \text{Ec.2.26}$$

Determinando el valor del coeficiente C_2 :

$$C_2 = \left(\frac{c}{2m}\right) \frac{[C_1]}{\omega_A} = \left(\frac{c}{2m}\right) \frac{x_0}{\omega_A}$$

El valor del coeficiente C_2 es:

$$C_2 = \left(\frac{c}{2m}\right) \frac{x_0}{\omega_A} \quad \text{Ec.2.27}$$

La ecuación característica de un sistema sobre amortiguado tomando en cuenta las condiciones iniciales es la siguiente:

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \left[C_1 \cos(\omega_A t) + C_2 \text{sen}(\omega_A t) \right] \quad \text{Ec. 2.28}$$

De acuerdo con la literatura se ha identificado que el caso críticamente amortiguado requiere el menor tiempo para alcanzar a la estabilidad del sistema, mientras que el sistema que demora más tiempo es el sub amortiguado.

Ahora, se plantea un sistema masa-resorte-amortiguador, en el que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento están fijos en sus extremos y la masa se mueve de forma lineal al de los coeficientes y sobre ella actúa una fuerza externa en sentido contrario. En la Fig.2.2 se muestra el modelo físico de un sistema sometido a oscilaciones forzadas.

La vibración forzada es una forma de vibración en el cual un sistema mecánico es provocado por una fuerza que actúa de manera externa, la cual es periódica y constante. La frecuencia de la fuerza provocada es igual o diferente a la fuerza natural del sistema.

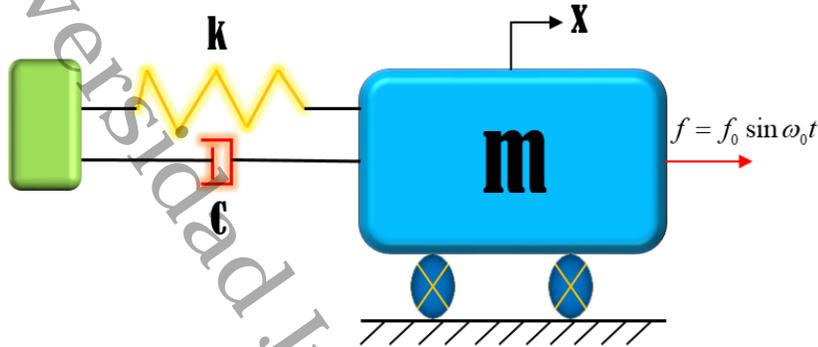


Figura 2.2 Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad con oscilaciones forzadas

El rango de amplitud de la vibración depende de la magnitud de fuerza, así como de las propiedades del sistema. La ecuación de movimiento es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \sin \omega_0 t \quad \text{Ec.2.29}$$

La solución consta de dos partes: función complementaria, que es la solución homogénea y la función integral particular. La solución a la función particular es una oscilación estacionaria en la misma frecuencia de excitación ω . La solución particular es de la forma:

$$x = X \sin(\omega t - \phi) \quad \text{Ec.2.30}$$

Donde X es la amplitud de oscilación y ϕ es la fase del desplazamiento con respecto a la fuerza excitatriz. La amplitud y la fase son calculadas sustituyendo la ecuación 2.30 en la ecuación diferencial 2.29, quedando de la siguiente manera:

Amplitud

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \text{Ec.2.31}$$

Fase de desplazamiento

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad \text{Ec.2.32}$$

Se muestra la solución particular del sistema masa-resorte amortiguador con vibración forzada.

$$x_{permanente} = C_3 \sin(\omega_0 t) + C_4 \cos(\omega_0 t) \quad \text{Ec.2.33}$$

Tomando en cuenta un caso genérico, la ecuación 2.28 queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = Cf_0 \sin \omega_0 t \quad \text{Ec.2.34}$$

Se asigna la letra A como forma de agrupación para simplificar los términos del coeficiente de amortiguamiento y masa $A=c/m$. Se asigna la letra B como forma de agrupación para simplificar los términos de los coeficientes de rigidez y masa $B=k/m$. Se asigna la letra C como forma de agrupación para simplificar los términos del coeficiente de amortiguamiento crítico $C=1/m$

Se reescribe la ecuación permanente, incluyendo los términos de agrupación A , B , C , mostrado en la siguiente ecuación:

$$x_{permanente} = \left[\frac{Cf_0(\omega_0^2 - B)}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \sin(\omega_0 t) + \left[\frac{ACf_0\omega_0}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t) \quad \text{Ec.2.35}$$

Sistema sobreamortiguado $\left(\frac{A}{2}\right)^2 > (B)$:

El valor de C_1 en un sistema sobreamortiguado queda de la siguiente forma:

$$C_1 = x_0 - C_4 + \left(\frac{\omega_0 C_3 - \lambda_1 (C_4 - x_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \quad \text{Ec.2.36}$$

El valor de C_2 en un sistema sobre amortiguado queda de la siguiente forma:

$$C_2 = \frac{-\omega_0 C_3 + \lambda_1 (C_4 - x_0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad \text{Ec.2.37}$$

Se suman las ecuaciones Ec.2.36 y E.2.37 que corresponden a los valores de C_1 y C_2 más la Ec.2.35 que corresponde a la solución permanente y se obtiene la solución

genérica para un sistema sobreamortiguado, el cual queda expresada de la siguiente forma:

$$x = \left[x_0 - C_4 + \left(\frac{\omega_0 C_3 - \lambda_1 (-x_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \right] e^{\lambda_1 t} + \left[\frac{-\omega_0 C_3 + \lambda_1 (C_4 - x_0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] e^{\lambda_2 t} + \left[\frac{C f_0 (\omega_0^2 - B)}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \sin(\omega_0 t) + \left[\frac{A C f_0 \omega_0}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t) \quad \text{Ec.2.38}$$

Sistema críticamente amortiguado $\left(\frac{A}{2}\right)^2 = (B)$:

El valor de C_1 en un sistema críticamente amortiguado queda de la siguiente forma:

$$C_1 = (x_0 - C_4) e^{\left[\frac{-A}{2}\right]t} \quad \text{Ec.2.39}$$

Se suman las ecuaciones Ec.2.39, que corresponde al valor de C_1 , en un sistema críticamente amortiguado y la Ec.2.35, que corresponde a la ecuación permanente y se obtiene la solución genérica para un sistema críticamente amortiguado, el cual queda expresado de la siguiente forma:

$$x = (x_0 - C_4) e^{\left[\frac{-A}{2}\right]t} + \left[\frac{C f_0 (\omega_0^2 - B)}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \sin(\omega_0 t) + \left[\frac{A C f_0 \omega_0}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t) \quad \text{Ec.2.40}$$

Sistema sub amortiguado $\left(\frac{A}{2}\right)^2 < (B)$:

El valor de C_1 en un sistema sub amortiguado queda de la siguiente forma:

$$C_1 = x_0 - C_4 \quad \text{Ec.2.41}$$

El valor de C_2 en un sistema sub amortiguado queda de la siguiente forma:

$$C_2 = \frac{\left(\frac{A}{2}\right)(x_0 - C_4) - C_3 \omega_0}{\omega_A} \quad \text{Ec.2.42}$$

Se suman las ecuaciones Ec.2.41 y E.2.42 que corresponden a los valores de C_1 y C_2 del sistema subamortiguado más la Ec.2.35 que corresponde a la solución permanente y se obtiene la solución genérica para un sistema subamortiguado, el cual queda expresado de la siguiente forma:

$$x = e^{-\left(\frac{A}{2}\right)t} \left[(x_0 - C_4) \cos(\omega_A t) + \left(\frac{\left(\frac{A}{2}\right)(x_0 - C_4) - C_3 \omega_0}{\omega_A} \right) \sin(\omega_A t) \right] + \left[\frac{Cf_0(\omega_0^2 - B)}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \sin(\omega_0 t) + \left[\frac{ACf_0 \omega_0}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t)$$

Ec.2.43

2.1.3 Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se describen las bases de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como base se describe que la serie de Taylor es de vital importancia en el estudio de métodos numéricos; la serie de Taylor dispone un medio para la predicción del valor de una función en un punto en términos del valor de la función y en otro punto sus derivadas. El teorema de Taylor establece que cualquier función puede ser aproximada por un polinomio. La mejor manera de comprender la serie de Taylor es construirla término por término. El primer término de la serie de Taylor es:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Ec.2.4

4

A la Ec.2.44, se le llama aproximación de orden cero, la cual indica que: el valor de f en el nuevo punto es el mismo que en el valor en el punto anterior.

La estimación de Ec.2.44 es perfecta si la función a aproximar es una constante, pero si la función cambia en el intervalo, se requerirán términos adicionales de la serie de Taylor. La aproximación de primer orden se consigue al sumar otro término a la Ec.2.44 para obtener lo siguiente:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Ec.2.45

Donde $f'(x_i)$ es una pendiente y $(x_{i+1} - x_i)$ son las distancias entre x_i y x_{i+1} , la expresión representa una línea recta y puede predecir un cambio o decremento de la función entre x_i y x_{i+1} , la Ec.2.45 solo es exacta para una línea recta o una tendencia lineal. Entonces se agrega a la Ec.2.45, un término de segundo orden para obtener algo de curvatura, obteniendo la siguiente ecuación:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \quad \text{Ec.2.46}$$

Para desarrollar la expansión completa de Taylor se agregan más términos y se obtiene

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n \quad \text{Ec.2.47}$$

Puesto que Ec.2.47 es una serie infinita, se reemplaza el signo de aproximación de las Ec. 2.44 a la Ec. 2.46 por un signo igual, se añade un término residual para considerar los valores desde el $n+1$ hasta infinito.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \quad \text{Ec.2.48}$$

Donde n es el residuo de aproximación de n -ésimo orden y ξ es un valor de x que se encuentra en un punto entre el rango x_i y x_{i+1} , para simplificar la serie de Taylor se debe definir un tamaño de paso o incremento $h = x_{i+1} - x_i$.

Sustituyendo los valores de x_i por h , nos queda:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \quad \text{Ec.2.49}$$

Sustituyendo el tamaño de paso en la ecuación 2.48 nos queda:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad \text{Ec.2.50}$$

En el método de Euler la primera derivada presenta una estimación directa de la pendiente en x_i :

$$\phi = \underbrace{f(x_i, y_i)}_{\substack{\text{Ecuación diferencial} \\ \text{evaluada } x_i, y_i}}$$

La aproximación se obtiene del método:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Sustituyendo el tamaño de paso en la aproximación del método se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ec.2.51

A continuación, se presenta el Pseudocódigo del método de Euler:

Algoritmo 2.1: Método de Euler

Datos: EDO, x_0 , y_0 , h , x_{final}

Resultados: Vector x , y

```

1  Configuración de variable de interés (y)
2  Configuración de condiciones iniciales
3  while  $x \leq x_{final}$  do
4      Incremento de variable independiente:  $x_{i+1} = x_i + h$ 
5      Renombramiento de variable dependiente:  $y_i = y_{i+1}$ 
6      Aproximación de Euler:  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ 
7      Cálculo de error (opcional):  $\epsilon_{rpa} = \left| \frac{y_{real} - y_{aprox}}{y_{real}} \right| \times 100\%$ 
8  end
9  return Vector de variable dependiente y

```

2.1.3. Métodos de Runge Kutta

Los métodos de Runge Kutta son métodos que emplean un principio similar al de la serie de Taylor pero que alcanzan la exactitud de la serie de Taylor sin ocupar calcular derivadas de orden superior. La siguiente ecuación describe la base del método:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad \text{Ec.2.52}$$

Donde $\phi(x_i, y_i, h)h$, es la función incremento, la cual se puede representar como una pendiente en el intervalo. La función incremento puede escribirse de forma general como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad \text{Ec.2.53}$$

Donde las a son constantes y las k son relaciones de recurrencia, como cada k es una evaluación funcional, la recurrencia vuelve eficiente los métodos de Runge Kutta para cálculos en computadora. Las relaciones de recurrencia se escriben como:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{Ec.2.53(a)}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad \text{Ec.2.53(b)}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad \text{Ec.2.53(c)}$$

⋮

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \quad \text{Ec.2.53(d)}$$

La ecuación de RK de segundo orden de la ecuación general es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \quad \text{Ec.2.54}$$

Donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{Ec.2.54(a)}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad \text{Ec.2.54(b)}$$

Los valores de a_1, a_2, p_1, q_{11} , son evaluados al igualar la ecuación con la serie de Taylor, hasta el término de segundo orden. Al evaluar los valores se desarrollan tres ecuaciones para evaluar las cuatro constantes desconocidas. Las tres ecuaciones son:

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \text{Ec.2.55}$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \quad \text{Ec.2.56}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \quad \text{Ec.2.57}$$

Como se tiene tres ecuaciones con cuatro incógnitas, se debe dar valor a una de estas incógnitas para determinar las ecuaciones anteriores:

$$a_1 = 1 - a_2 \quad \text{Ec.2.58}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \quad \text{Ec.2.59}$$

Existe un número infinito de métodos de Runge Kutta de segundo orden. Cada versión da los mismos resultados si la solución de EDO es cuadrática, lineal o constante. En los métodos de RK de tercer orden, el resultado genera seis ecuaciones con ocho incógnitas, por lo tanto, se deben priorizar los valores de dos de las ocho incógnitas con el fin de establecer los parámetros restantes La ecuación de RK de tercer orden queda como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \quad \text{Ec.2.60}$$

Donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{Ec.2.60(a)}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad \text{Ec.2.60(b)}$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h) \quad \text{Ec.2.60(c)}$$

Si la EDO está solamente en función de x , el método se reduce a la regla de Simpson 1/3. Los métodos de RK de tercer orden cuentan con errores locales y globales de $O(h^4)$ y $O(h^3)$, y dan resultados exactos cuando la solución es cubica.

El método de RK de Cuarto Orden es igual que el de segundo orden ya que cuenta con un número infinito de versiones. A continuación, se presenta la forma comúnmente utilizada, a la cual se le llama método clásico RK de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad \text{Ec.2.61}$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{Ec.2.61(a)}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad \text{Ec.2.61(b)}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad \text{Ec.2.61(c)}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad \text{Ec.2.61(d)}$$

El método de RK de cuarto orden es similar al procedimiento de Heun, debido a que se usan múltiples similitudes de la pendiente para obtener un pendiente promedio mejorada en el intervalo.

Otro de los métodos de mayor orden es el método de RK Fehlberg, el cual divide el tamaño de paso h en dos, para ajustar el tamaño de paso. Para estimar el error este método utiliza el cálculo de dos predicciones de RK de diferente orden. El método de Fehlberg de orden 4 es del tipo de Runge Kutta y utiliza la siguiente formula:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6 \right)h \quad \text{Ec.2.62}$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}k_1h\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{40}k_1h - \frac{9}{40}k_2h\right) \\ k_4 = f\left(x_i + \frac{3}{5}h, y_i + \frac{3}{10}k_1h - \frac{9}{10}k_2h + \frac{6}{5}k_3h\right) \\ k_5 = f\left(x_i + h, y_i + \frac{11}{54}k_1h + \frac{5}{2}k_2h - \frac{70}{27}k_3h + \frac{35}{27}k_4h\right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Ec.2.62(a)} \\ \text{Ec.2.62(b)} \\ \text{Ec.2.62(c)} \\ \text{Ec.2.62(d)} \\ \text{Ec.2.62(e)} \end{array}$$

Ya que el método necesita una evaluación más de la función, en comparación con el método clásico de RK de cuarto orden, por otra parte, con una evaluación adicional de la función tenemos:

$$k_6 = f\left(x_i + \frac{7}{8}h, y_i + \frac{1631}{55296}k_1h + \frac{175}{512}k_2h + \frac{575}{13824}k_3h + \frac{44275}{110592}k_4h + \frac{253}{4096}k_5h\right) \quad \text{Ec.2.62(f)}$$

Así se obtiene el método de Runge Kutta de quinto orden

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{43384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6 \right)h \quad \text{Ec.2.63}$$

Para la estimación del error de truncamiento local en un procedimiento de cuarto orden, se obtiene de la diferencia entre los valores y_{i+1} que se obtuvieron en los procedimientos de cuarto y quinto orden (Cheney W, 2011)

A continuación, se presenta el Pseudocódigo del método de Runge Kutta general.

Algoritmo 2.2: Método de Runge-Kutta general

Datos: EDO, x_0 , y_0 , h , x_{final}
Resultados: Vector x , y

- 1 Configuración de variable de interés (y)
- 2 Configuración de condiciones iniciales
- 3 **while** $x \leq x_{final}$ **do**
- 4 Incremento de variable independiente: $x_{i-1} = x_i + h$
- 5 Renombramiento de variable dependiente: $y_i = y_{i+1}$
- 6 Relaciones de recurrencia:
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$
- 7 Función incremento: $\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$
- 8 Aproximación de R-K: $y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$
- 9 Cálculo de error (opcional): $\epsilon_{rpa} = \left| \frac{y_{real} - y_{aprox}}{y_{real}} \right| \times 100\%$
- 10 **end**
- 11 **return** Vector de variable dependiente y

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO) de cualquier orden, las ecuaciones que lo componen suelen ser extensas, dado esto se opta por reducir a un sistema equivalente de primer grado, por lo cual se añaden más variables y ecuaciones.

2.2 Propuesta de Algoritmo para solución de SEDO

En la siguiente sección se presenta una descripción del algoritmo propuesto para la solución del SEDO en el cual se contemplarán las siguientes características:

- En el algoritmo se declararán los parámetros de entrada y las condiciones iniciales
- Se incluyó un menú para seleccionar los diferentes órdenes del método de RK.
- El algoritmo no tiene límite para la cantidad de ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema.
- El algoritmo busca la mejor aproximación ajustando el paso del tiempo a partir del criterio de error que se esté colocando.

Algoritmo 2.3: Algoritmo propuesto para solución de sistemas de EDO

Datos: *Parámetros de EDOs, $x_0, y_0, h, x_{final}, \varepsilon$, Factor de división de paso del tiempo*

Resultados: Vector x , Matriz y

```
1 Configuración de variable de interés:  $y$ 
2 Configuración de condiciones iniciales:  $x_0, y_0$ 
3 Selección del método de RK a utilizar: Heun, Punto medio, Ralston, 3er orden, 4to orden, Fehlberg 5to orden
4 while  $error_T \leq \varepsilon$  do
5     Reducción del paso de tiempo:  $h = h / factor$ 
6     Reasignación de vector solución anterior:  $y_x = y$ 
7     while  $x \leq x_{final}$  do
8         Incremento de variable independiente:  $x_{i-1} = x_i + h$ 
9         Renombramiento de variable dependiente:  $y_i = y_{i+1}$ 
10        Relaciones de recurrencia:
             $k_1 = f(x_i, y_i)$ 
             $k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$ 
             $k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$ 
             $\vdots$ 
             $k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$ 
11        Función incremento:  $\phi(x_i, y_i, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$ 
12        Aproximación de R-K:  $y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$ 
13    end
14    Cálculo de error:  $error_T = \left| \frac{y - y_x}{y} \right| \times 100\%$ 
15 end
16 return Matriz de variable dependiente  $y$ 
```

En el Pseudocódigo se puede observar el procedimiento que lleva el algoritmo que se está proponiendo, en el cual, en la línea 1, se configuran las variables de interés y , en la línea 2 se configuran las condiciones iniciales X_0 y Y_0 en un tiempo $t=0$.

Posteriormente en la línea 3, se muestra un menú de métodos, se elige uno de los seis métodos incluidos para utilizar (2do orden "Método de Heun", 2do orden "Método de punto medio", 2do orden "Método de Ralston", 3er orden, 4to orden, Fehlberg 5to orden). En la línea 4 se muestra el condicional while para observar si se cumple las condiciones dadas del error, en la línea 5, se lleva a cabo la reducción del tamaño de paso $h=h/factor$. Este *factor* es importante ya que implica la capacidad del método de ajustarse al paso necesario para mejorar la

aproximación numérica con el método de Runge Kutta seleccionado. El decremento es controlado *factor* para reducir con mayor medida el paso de tiempo h . De esta manera es posible iniciar con un valor h elevado para que el algoritmo lo ajuste al valor indicado a partir del error relativo porcentual aproximado que se estima en cada solución. En la línea 6 se reasigna el vector solución anterior $y_x = y$, en la línea 7 se genera otro condicional while para el vector $x \leq x_{final}$ para observar si se cumple las condiciones dadas del vector x , en la línea 8, se muestra el incremento de la variable independiente $x_{i-1} = x_i + h$, luego en la línea 9, se renombran las variables dependientes $y_i = y_{i+1}$, en la línea 10 se muestran las variables de recurrencia utilizadas, posteriormente en la línea 11, se muestra la función incremento : $\phi(x_i, y_i, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$, en la línea 12, se muestra la aproximación de R.K $y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$, en la línea 13 se cierra el primer condicional while, en la línea 14 se declara el cálculo del error $error_T = \left| \frac{y - y_x}{y} \right| \times 100\%$, en la línea 15 se cierra el segundo condicional while, donde el error tiene que ser menor que el valor de ϵ , pero si no se cumple la condición sucede lo de la línea 16, se repite el procedimiento reduciendo el tamaño de paso y si cumple se imprimen los datos en pantalla y se muestra la solución del SEDO.

A continuación, se presentan las ecuaciones de RK del 2do, 3er, 4to orden y Fehlberg 5to orden.

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{43384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6 \right)h$$

El código del algoritmo presentado se desarrolló utilizando el lenguaje de programación Python mediante el entorno de desarrollo integrado (IDE) Spyder, en donde se utilizaron las librerías Numpy y Matplotlib. La versión del intérprete de Python utilizada para el desarrollo del código fue Python 3.9.13. El código se desarrolló en una

computadora portátil con un procesador AMD Ryzen 3 3300U with Radeon Vega Mobile Gfx, de 2.10 GHz de frecuencia y un sistema operativo Windows 11 Home. El código es compatible con cualquier versión de Windows y Python 3.9 en adelante.

2.3 Modelos físicos y matemáticos de casos para verificación de metodología desarrollada

A continuación, se presentan los casos de estudio que se propusieron para la verificación del algoritmo propuesto para la solución de SEDOS.

a) Sistema de un grado de libertad (oscilación forzada)

Planteamiento del problema

En esta sección se plantea un sistema masa-resorte-amortiguador, en la que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento están fijos en sus extremos y la masa se mueve de forma lineal al de los coeficientes y sobre ella actúa una fuerza externa en sentido contrario. Se desea conocer la posición de la masa en el tiempo a partir de las condiciones mostradas en el modelo físico y matemático.

Modelo matemático

Se utilizó la Ec.2.28 para la solución de este problema

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \text{sen} \omega_0 t \quad \text{Ec.2.64}$$

A continuación, se muestra la ecuación general del sistema, las propiedades y parámetros del sistema:

$$x = \left[x_0 - C_4 + \left(\frac{\omega_0 C_3 - \lambda_1 (-x_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \right] e^{\lambda_1 t} + \left[\frac{-\omega_0 C_3 + \lambda_1 (C_4 - x_0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] e^{\lambda_2 t} + \left[\frac{C f_0 (\omega_0^2 - B)}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \sin(\omega_0 t) + \left[\frac{A C f_0 \omega_0}{-(\omega_0^2 - B)^2 - A^2 - \omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t)$$

Propiedades del sistema: $k=15 \text{ N/m}^2$, $m = 5 \text{ kg}$, $C = 5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $x_0=0.2 \text{ m}$, $v_0=0 \text{ m/s}$, $f_0=0.1$ y $\omega_0 = 5.0$.

b) Sistema de dos grados de libertad (oscilación libre)

Planteamiento del problema

En esta sección se plantea un sistema masa-resorte-amortiguador, en la que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento están fijos en sus extremos y la masa se mueve de forma lineal y sobre ella actúa una fuerza externa en sentido contrario. Se desean conocer las posiciones de las masas en el tiempo a partir de la solución del modelo matemático y bajo las condiciones mostradas en el modelo físico.

Modelo matemático.

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \tag{Ec.2.65}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + c_3 \frac{dx_2}{dt} + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0 \tag{Ec.2.66}$$

En la Figura 2.6 se presenta el modelo físico:

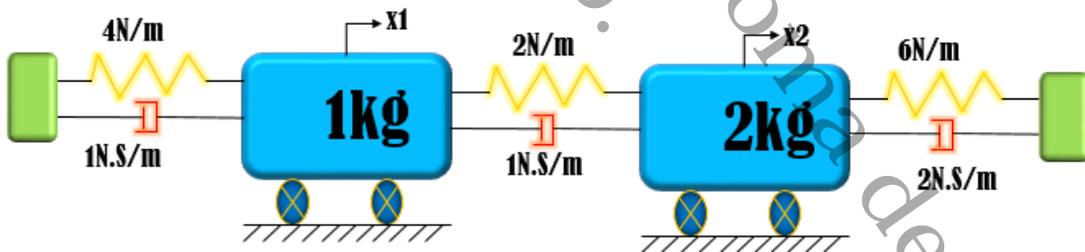


Figura 2.6 Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador de dos grados de libertad con oscilación libre

A continuación, se muestra la ecuación general del sistema, las propiedades y parámetros del sistema.

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1' \\ X_2 \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ -\frac{c_1}{m_1} X_1 - \frac{c_2}{m_1} (X_1 - X_2) - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) \\ X_2 \\ -\frac{c_2}{m_2} (X_2 - X_1) - \frac{c_3}{m_2} X_2 (x_2 - x_1) - \frac{k_3}{m_2} x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec.2.67}$$

Propiedades del sistema: $k_1=4 \text{ N/m}^2$, $k_2=2 \text{ N/m}^2$, $k_3=6 \text{ N/m}^2$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $C_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $C_2 = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $C_3 = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.

2.4 Sistema de tres grados de libertad con oscilación forzada.

Como tercer escenario, se describe el planteamiento de un sistema de tres grados de libertad con oscilación forzada para ser evaluado considerando la metodología propuesta.

El sistema consiste en un sistema de oscilación forzada en el considera el efecto del amortiguamiento por la fricción de contacto entre las diferentes masas. A continuación, se describen el modelo físico y matemático y la adecuación de las expresiones matemáticas para su introducción al algoritmo de solución.

Modelo matemático

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_3 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) = 0 \quad \text{Ec.2.68}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 \frac{dx_2}{dt} + c_4 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) = 0 \quad \text{Ec.2.69}$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + c_3 \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + c_4 \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) = 0 \quad \text{Ec.2.70}$$

Modelo físico

En la Fig. 2.7 se presenta el modelo físico de un sistema de tres grados de libertad.

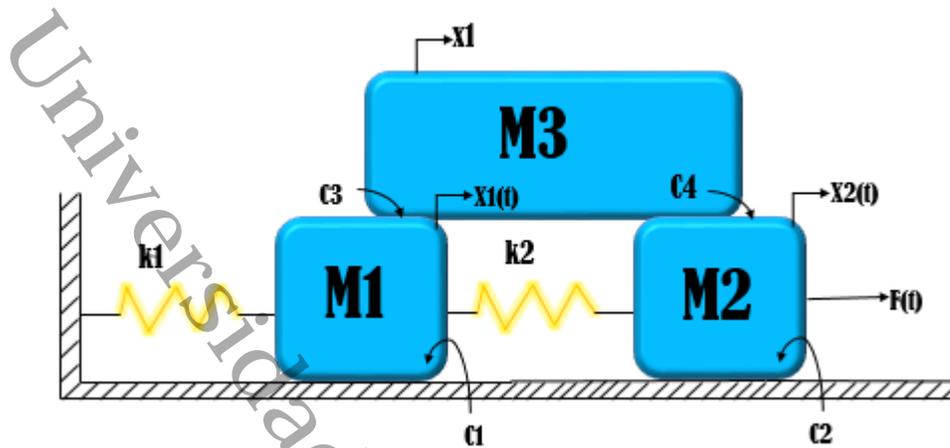


Figura 2.7 Representación de un sistema mecánico traslacional de tres grados de libertad.

Metodología de solución

Se dividen todos los términos de las Ec.2.67,2.68 y 2.69 entre el término de la masa:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{c_1}{m_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{c_3}{m_1} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{Ec.2.71}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{c_2}{m_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{c_4}{m_2} \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) = 0 \quad \text{Ec.2.72}$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{c_3}{m_3} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + \frac{c_4}{m_3} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) = 0 \quad \text{Ec.2.73}$$

Reestructurando las ecuaciones queda expresado de la forma siguiente:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{c_1}{m_1} \frac{dx_1}{dt} - \frac{c_3}{m_1} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) \quad \text{Ec.2.74}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{c_2}{m_2} \frac{dx_2}{dt} - \frac{c_4}{m_2} \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) \quad \text{Ec.2.75}$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{c_3}{m_3} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - \frac{c_4}{m_3} \left(\frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \quad \text{Ec.2.76}$$

Reduciendo el orden de las Ec.2.66, 2.67 y 2.68 por cambio de variable:

$$X_1 = x_1'; X_1' = x_1''$$

$$X_2 = x_2'; X_2' = x_2''$$

$$X_3 = x_3'; X_3' = x_3''$$

$$X_1' = -\frac{c_1}{m_1} X_1 - \frac{c_3}{m_1} (X_1 - X_3) - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) \quad \text{Ec.2.77}$$

$$X_2' = -\frac{c_2}{m_2} X_2 - \frac{c_4}{m_2} (X_2 - X_3) - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) \quad \text{Ec.2.78}$$

$$X_3' = -\frac{c_3}{m_3} (X_3 - X_1) - \frac{c_4}{m_3} (X_3 - X_2) \quad \text{Ec.2.79}$$

Haciendo lo mismo con las condiciones de frontera se obtiene:

$$x_1(0) = x_{1,0}; X_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = x_{2,0}; X_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = x_{3,0}; X_3(0) = 0$$

Formando la matriz con las condiciones de fronteras y las Ec.2.77, 2.78 y 2.79.

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1' \\ X_2 \\ X_2' \\ X_3 \\ X_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ -\frac{c_1}{m_1} X_1 - \frac{c_3}{m_1} (X_1 - X_3) - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) \\ X_2 \\ -\frac{c_2}{m_2} X_2 - \frac{c_4}{m_2} (X_2 - X_3) - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) \\ X_3 \\ -\frac{c_3}{m_3} (X_3 - X_1) - \frac{c_4}{m_3} (X_3 - X_2) \end{bmatrix} \quad \text{Ec.2.80}$$

La Ec. 2.80 es el SEDO que se introduce al algoritmo propuesto para su solución.

Finalmente, las propiedades del sistema consideradas son: $k_1=4 \text{ N/m}^2$, $k_2=2 \text{ N/m}^2$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$, $C_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $C_2 = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $C_3 = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $C_4 = 1.5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.

En el Capítulo 3 se presentan los resultados de la implementación del algoritmo desarrollado para la solución de los problemas de verificación y el último caso de tres grados de libertad, así mismo se discute el comportamiento del programa.

Capítulo 3

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos y la discusión de los ejercicios de verificación de y los resultados de un sistema propuesto de tres grados de libertad. De igual manera se analiza el comportamiento del desempeño computacional del algoritmo propuesto.

3.1 Resultados de los ejercicios de verificación.

En esta sección se mostrarán los resultados de los ejercicios propuestos para verificación de la metodología propuesta.

3.1.1 Sistema de un grado de libertad con oscilación forzada

Como se describió en el Capítulo 2, se establecieron las condiciones de un sistema de un grado de libertad bajo oscilación forzada. Al considerar los valores

de los parámetros y considerando la condición $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \left(\frac{k}{m}\right)$ se observó que

el comportamiento del sistema es el de un sistema sub amortiguado.

En la figura 3.1 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK de 2do orden "Punto medio":

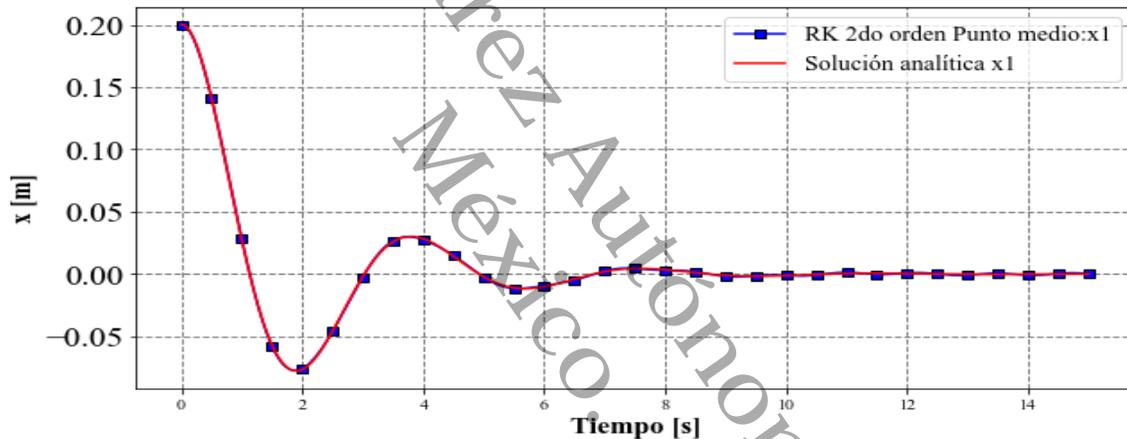


Figura 3.1 Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK 2do orden.

Como se observa en la Fig. 3.2, las soluciones se superponen y no presentan variaciones significativas a simple vista. Cualitativamente se observa que la solución numérica ofrecida por método de RK de 2do orden presenta soluciones satisfactorias para este tipo de escenarios. Sin embargo, para conocer el potencial completo se realizó la comparación con el resto de las aproximaciones de RK incluidas en el algoritmo.

En la figura 3.2 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK de 3er orden:

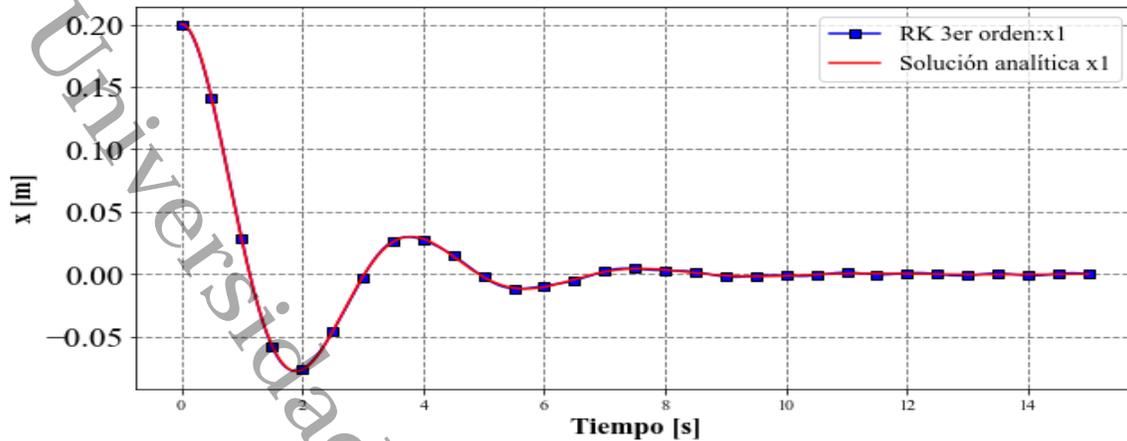


Figura 3.2 Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK 3er orden.

En la figura 3.2 se observa de igual forma soluciones superpuestas entre el método de RK de 3er orden y la solución analítica. A simple vista no se observan diferencias cualitativas. A continuación, en la figura 3.3 se observa la comparación entre la solución de RK de 4to orden y la solución analítica:

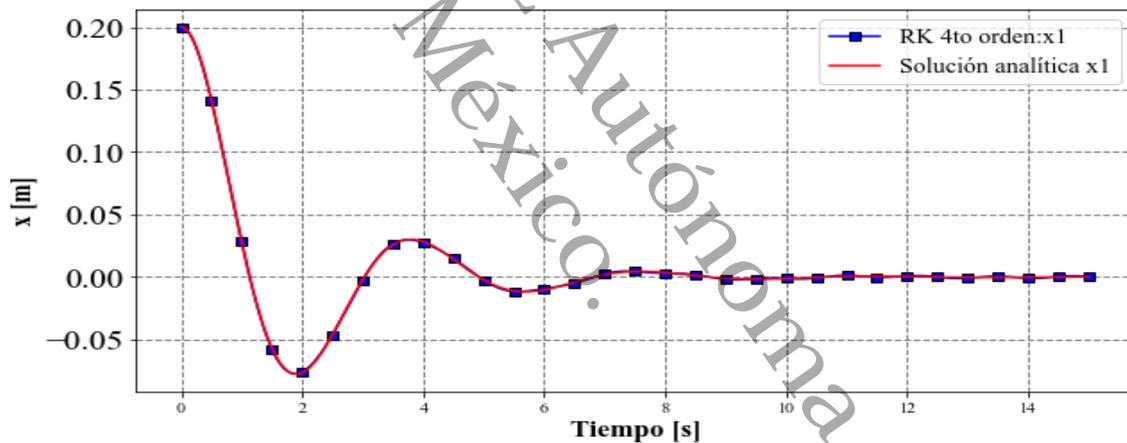


Figura 3.3 Respuesta de Sistema de 1GDL, solución analítica y RK 4to orden.

En la solución con el método de RK de 4to orden se repitió el mismo comportamiento que con los casos anteriores. Sin embargo, esto no quiere decir que entre mayor sea el orden de RK es menor obtenido en la solución numérica. Esto se observó en el siguiente escenario con el método de RK de 5to orden. En la figura 3.5 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK Fehlberg de 5to orden:

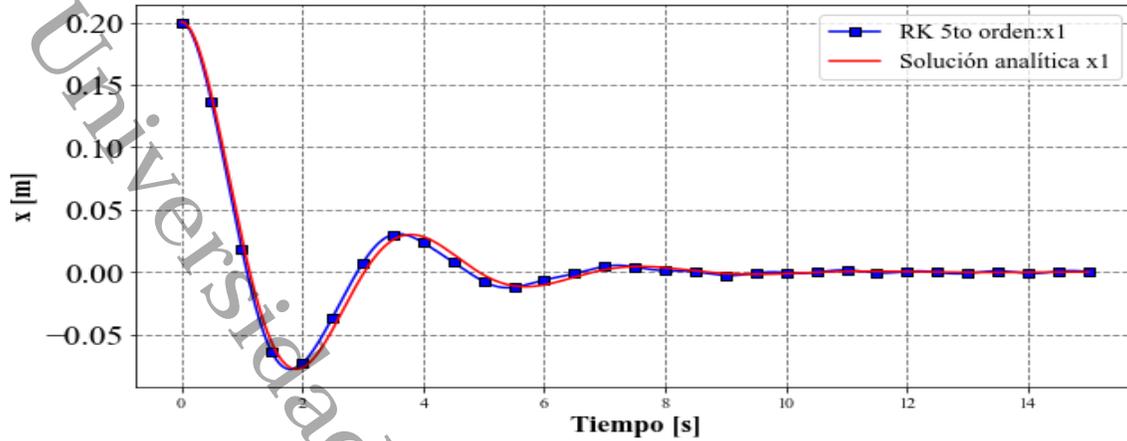


Figura 3.4 Respuesta de Sistema de 1GDL: solución analítica y RK Fehlberg 5to orden.

La figura 3.4 muestra que la respuesta del método RK de 5to orden fue completamente diferente a los escenarios anteriores. Se observaron diferencias entre ambas soluciones, la solución numérica presentó un adelanto o sobreestimación en el comportamiento del sistema de un grado de libertad bajo oscilaciones forzadas. El método de RK Fehlberg es un método que requiere un proceso de corrección en los coeficientes de la función de incremento, ya que no existe una solución óptima general para todos los escenarios, por esta razón es necesario realizar un ajuste a los coeficientes para la mejora en la aproximación numérica.

Con el fin de observar una diferencia más clara entre los comportamientos de las soluciones numéricas respecto a la solución analítica y los tiempos de ejecución en la Tabla 3.1 se observan los valores obtenidos del tiempo de cómputo, el paso de tiempo al que el algoritmo realizó el ajuste para obtener la mejor aproximación y el error de raíz cuadrática media (RMSD, por sus siglas en inglés). En la columna 1 se muestra los métodos de Runge Kutta utilizados en el código. La columna 2 muestra el tamaño de paso (h) que se obtuvo en la ejecución del código. La columna 3 muestra el tiempo de ejecución del código para cada uno de los métodos de RK utilizados. La columna 4 muestra el RMSD de cada ejecución de los métodos de RK utilizados.

Tabla 3.1 Resultados obtenidos de un sistema de 1 GDL.

Orden de RK	Tamaño de Paso (h)	Tiempo de ejecución (seg)	RMSD (%)
2do Orden	0.0078	0.077	0.0027
3er Orden	0.0156	0.074	0.0027
4to Orden	0.0625	0.022	0.0027
Fehlberg 5to orden	0.0004	6.407	0.0182

El tamaño de paso más pequeño se muestra en la columna 2 fila 5 en el método de 5to orden y el más alto en el de RK de 4to orden. Esto refleja el esfuerzo computacional empleado durante el método de RK de 5to orden para mejorar la aproximación a diferencia del método de RK de 4to orden. Debido a la cantidad de cálculos requeridos para obtener el resultado, el tiempo de ejecución de RK Fehlberg fue el más alto obtenido, mientras que el tiempo de ejecución más pequeño se obtuvo en RK 4to orden. Esto contrasta con lo observado para los casos del método RK de 2do y 3er orden en los que se observan tiempos mayores a pesar de que requieren menos cálculos numéricos para obtener la aproximación numérica de la ecuación diferencial; la razón se encuentra en el valor de h obtenido por el algoritmo, ya que con la metodología propuesta se logró obtener la solución con el método RK de 4to orden de mejor aproximación con tamaño de paso más grande para minimizar el esfuerzo computacional. Por lo tanto, esto demuestra que para escenarios como el sistema de un grado de libertad sometido a oscilaciones forzadas el algoritmo permite encontrar el mejor tamaño de paso o intervalo de tiempo para reducir el esfuerzo computacional y minimizar el error de aproximación.

3.1.2 Sistema de dos grados de libertad con oscilación libre

En la figura 3.5 se muestra la solución analítica del SEDO para el modelo de dos grados de libertad:

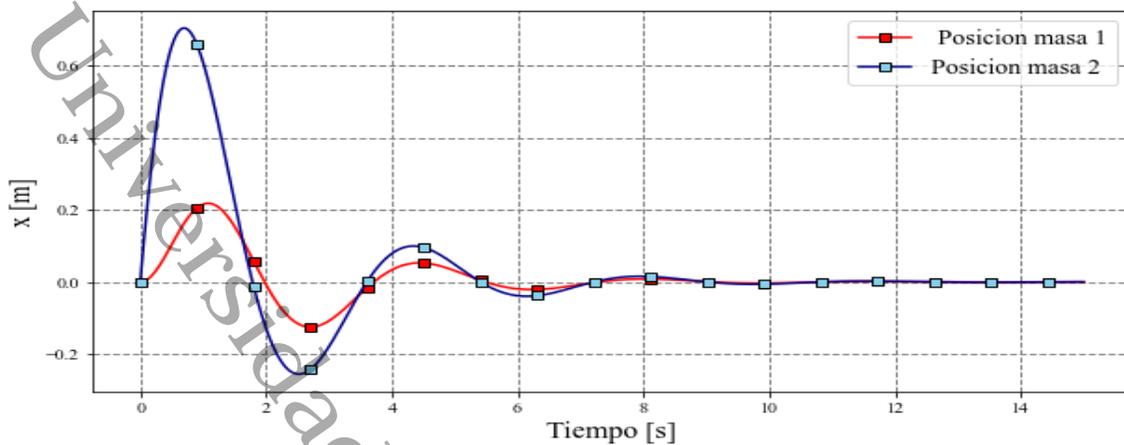


Figura 3.5 Respuesta de sistema de 2 GDL solución analítica.

De igual forma que en el caso analizado anteriormente, la respuesta de ambos cuerpos fue del tipo sub amortiguado. Lo cual fue un resultado esperado ya que se buscaron las condiciones para inducir este escenario el cual es idóneo para la verificación del algoritmo propuesto.

En la figura 3.6 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK de 2do orden "Punto medio". Aunque el método permite encontrar el resultado de la primera derivada que en este caso corresponde a la velocidad de cada cuerpo, solo se realizó la comparación con los cambios de posición ofrecidos por la solución analítica mostrada en el Capítulo 2.

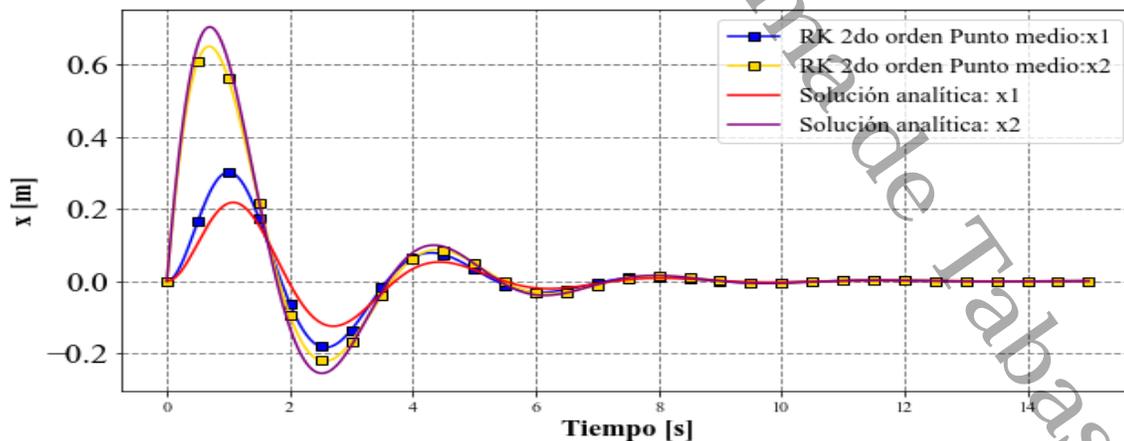


Figura 3.6 Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 2do orden.

En la figura 3.6 se observa que las soluciones ofrecidas por el método de RK de 2do orden presentan diferencias visibles en las zonas de mayor oscilación del

sistema. Aunque la solución aproximada muestre una baja estimación del comportamiento del sistema no se observó un efecto de retraso o adelanto.

En la figura 3.7 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK de 3er orden.

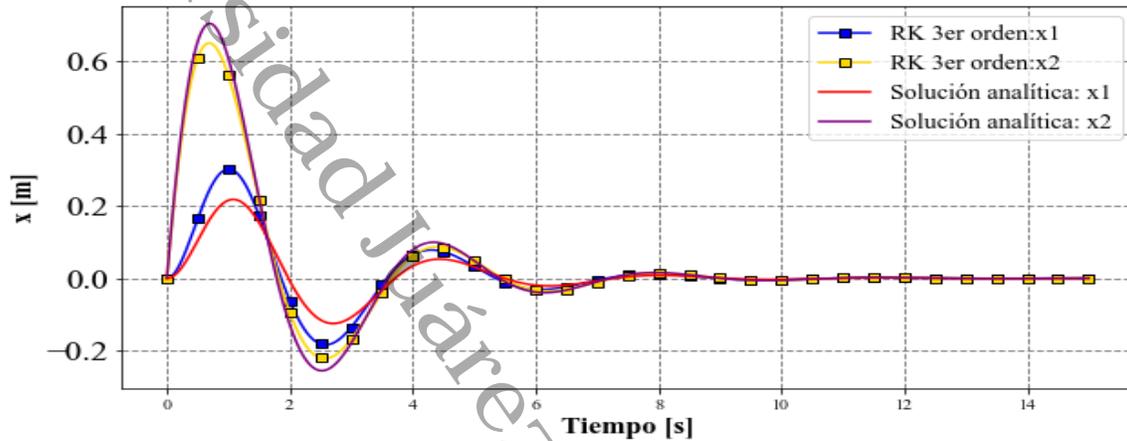


Figura 3.7 Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 3er orden.

En el caso de la solución obtenida por el método de RK de 3er orden se observaron diferencias similares al caso del método de 2do orden. Estos comportamientos son los esperados debido a la naturaleza del SEDO. De igual forma las variaciones principales se observaron en las posiciones máximas y mínimas de las masas del sistema.

En la figura 3.8 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK de 4to orden:

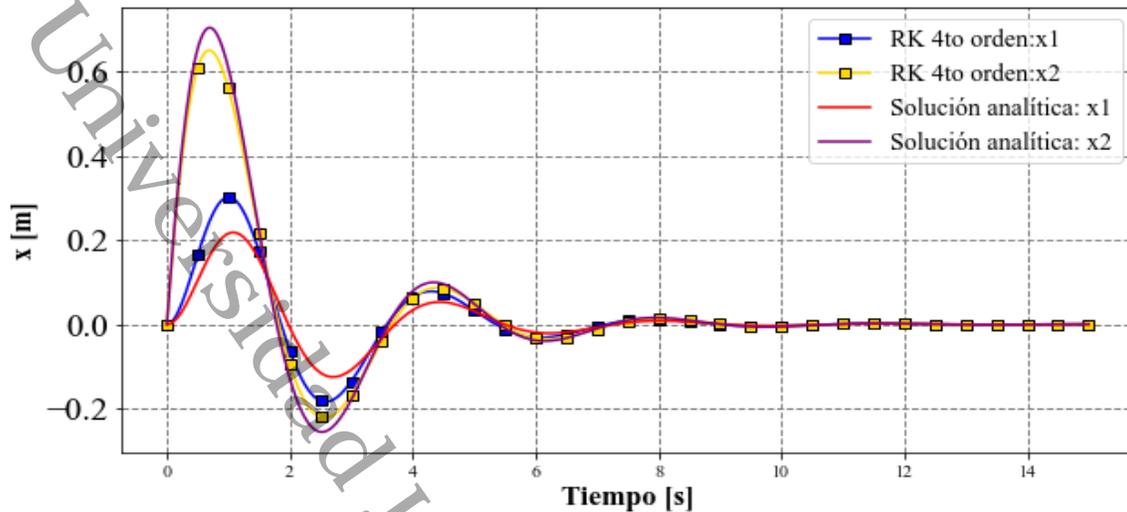


Figura 3.8 Respuesta de sistema de 2GDL solución analítica y RK 4to orden.

En la figura 3.8 se observó nuevamente el mismo comportamiento observado que en los dos casos anteriores. Cualitativamente no es perceptible la diferencia entre las soluciones presentadas, sin embargo, a través de la estimación del RMSD es posible determinar cuál fue la mejor solución numérica. Finalmente, en la figura 3.9 se muestra la respuesta de la solución analítica con respecto a la solución por el método de RK Fehlberg de 5to orden:

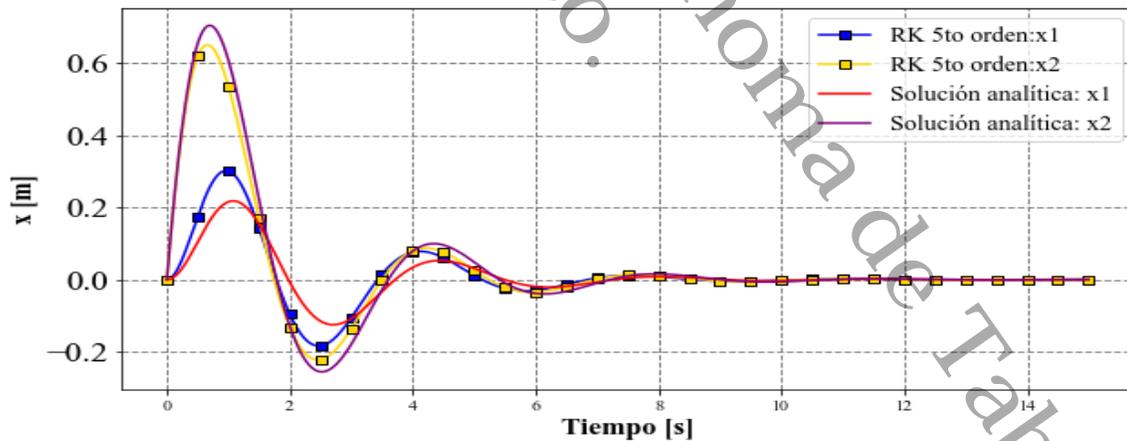


Figura 3.9 Respuesta de sistema de 2GDL: solución analítica y RK Fehlberg 5to orden.

Para el caso de la solución numérica con el método de RK de 5to orden, se observa en la figura 3.9 que la solución no presenta las diferencias similares en los puntos máximos y mínimos de la posición de los cuerpos sino también en un

desfase o adelanto en el comportamiento oscilatorio del sistema sub amortiguado. Este es un comportamiento similar al observado al ejercicio presentado anteriormente de un grado de libertad. Con lo cual se hace evidente la necesidad de un ajuste en los coeficientes de la función de incremento para mejorar la aproximación numérica de la solución de SEDOS.

Con base en la información obtenida, en la Tabla 3.2 se presentan los resultados generales de los RMSD para cada solución, los tiempos de ejecución y el tamaño de paso o intervalo de tiempo que el algoritmo encontró como el idóneo para cada escenario.

Tabla 3.2 Resultados obtenidos de un sistema de 2 GDL

Orden de RK	Tamaño de Paso (h)	Tiempo de ejecución (seg)	RMSD1(%)	RMSD2 (%)
2do Orden	0.0009,	0.672	0.3921	0.7795
3er Orden	0.007	0.154	0.3920	0.7793
4to Orden	0.0312	0.044	0.3917	0.7787
Fehlberg 5to orden	0.0001	26.013	0.3917	0.9604

De la Tabla 3.2 cada fila muestra los resultados de la ejecución del código para los diferentes órdenes del método de RK. En la columna 1 se muestra los métodos de Runge Kutta utilizados en el código. La columna 2 se muestra el tamaño de paso (h) que se obtuvo en la corrida del código. La columna 3 muestra el tiempo de ejecución del código para cada uno de los métodos de RK utilizados. Las columnas 4 y 5 muestran el RMSD en porcentaje para cada uno de los métodos de RK utilizados de la respuesta individual para cada cuerpo del modelo físico.

Los resultados muestran que para el método de RK de 4to orden se encontró el valor h más grande de todos los escenarios evaluados, lo cual repercutió en el mejor tiempo de cómputo obtenido de todas las simulaciones realizadas. De igual manera, para esta configuración de RK de 4to orden se obtuvieron los

errores más bajos de todos los métodos. Por lo tanto, el algoritmo propuesto permite encontrar un balance adecuado del método seleccionado para resolver el SEDO encontrando el valor de h que minimice el error y que permita encontrar la solución en el menor tiempo de cómputo posible.

Los métodos de RK de 2do y 3er orden presentaron valores de RMSD ligeramente superiores al de 4to orden, sin embargo, el peor desempeño fue el obtenido con el método de RK de 5to orden. De tal forma que, en la búsqueda de minimizar el error de la aproximación numérica, el tiempo de cómputo requerido por el método de RK de 5to orden fue 591 veces más grande que el tiempo de cómputo registrado por el método de RK de 4to orden. Solo para el escenario del RMSD del primer objeto el método de RK de 5to orden fue superior al resto de los métodos, sin embargo, esto a costa de incremento considerable del error en la estimación de la posición del segundo objeto acoplado.

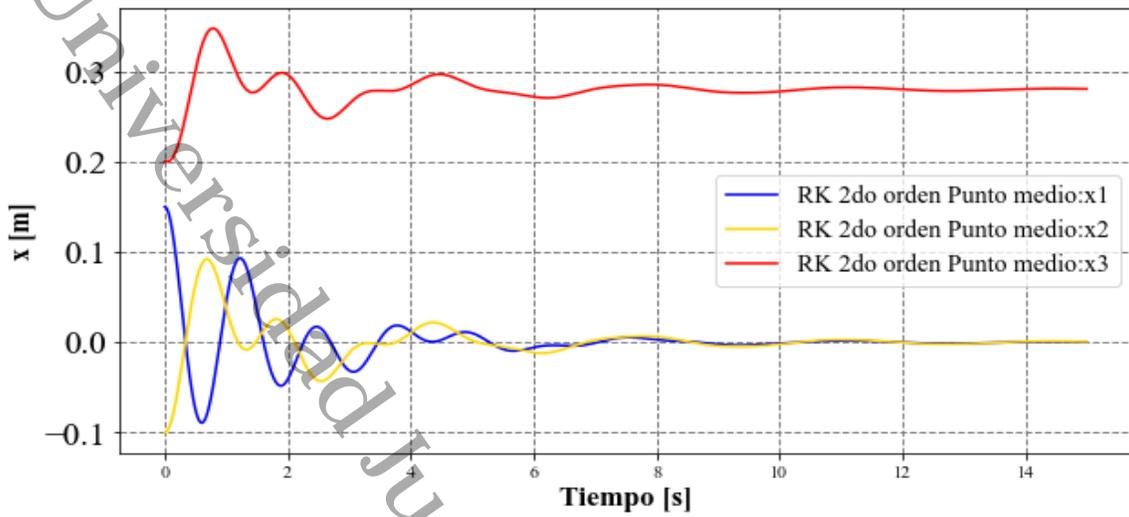
A partir de los resultados obtenidos en los ejercicios de verificación se establece la capacidad y la fiabilidad del algoritmo propuesto para la obtención de la solución numérica de SEDO. Cabe recalcar, que esta metodología no solo es funcional para los análisis dinámicos de cuerpos, también es aplicable para los SEDO estudiados en circuitos de corriente directa, alterna, maquinas síncronas, motores de inducción, entre otros. Por lo tanto, este ejercicio de verificación remarca la aplicabilidad de la metodología planteada para modelos aplicados en la enseñanza y con aplicaciones prácticas inmediatas en el campo de ingeniería.

A continuación, se presentan los resultados del tercer ejercicio propuesto en el Capítulo 2 sobre un sistema de tres grados de libertad.

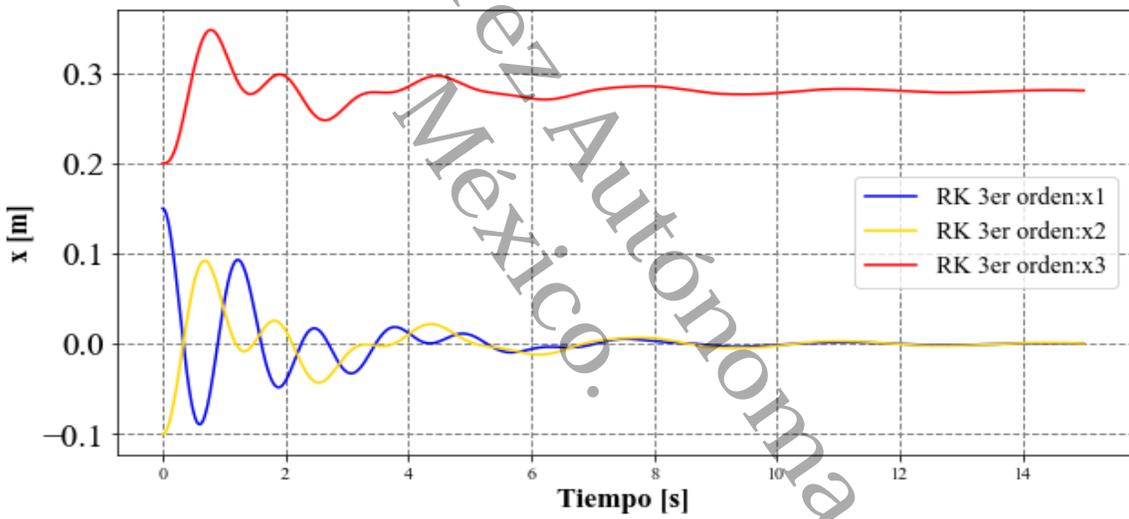
3.1.3 Sistema de tres grados de libertad

Como ejercicio final para evaluar parte de los alcances del algoritmo propuesto se planteó el ejercicio de tres grados de libertad. Sin embargo, este escenario fue contrastado solo entre las soluciones numéricas obtenidas al no contarse con la solución exacta del problema.

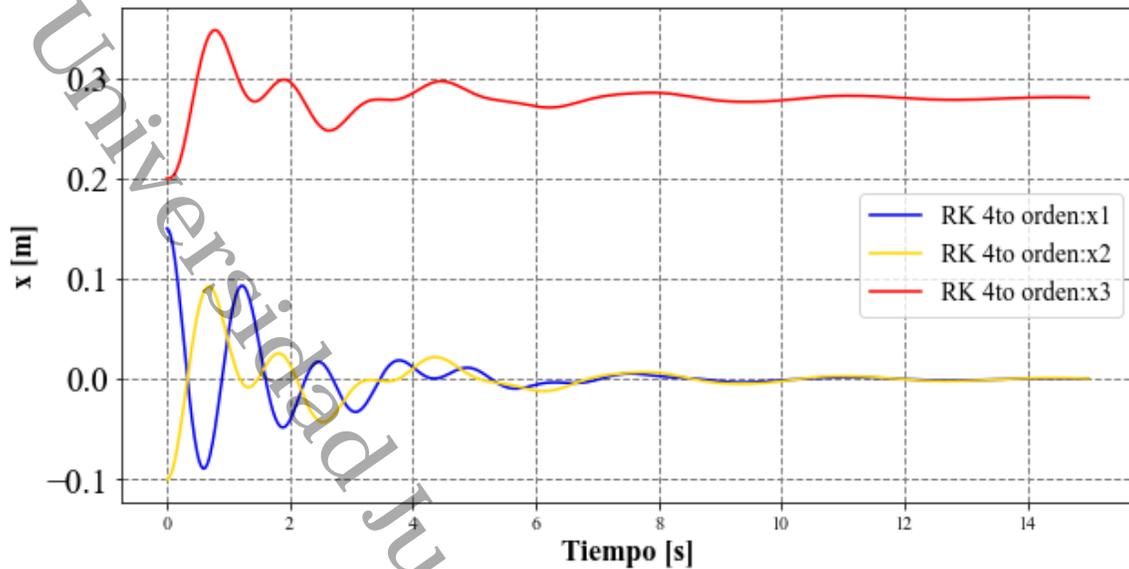
En la figura 3.10 se muestran las posiciones de las masas por todos los métodos de RK.



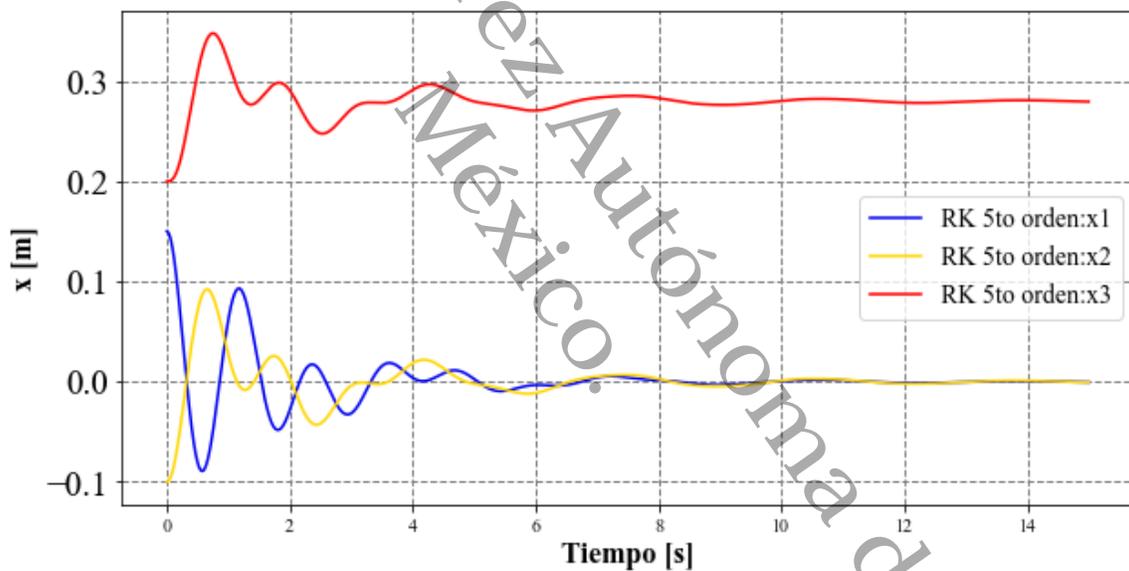
a)



b)



c)



d)

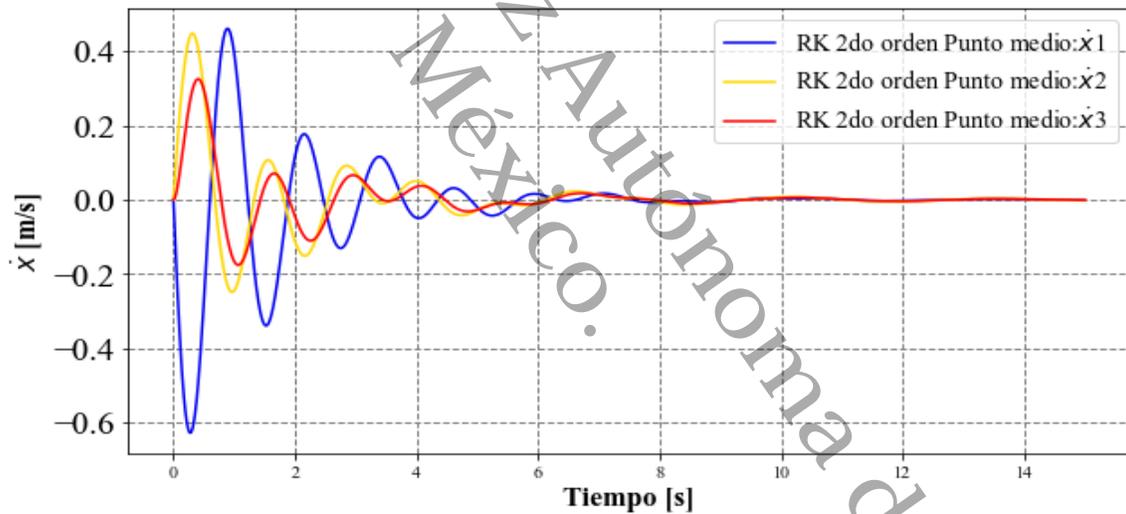
Figura 3.10 Respuesta de un sistema de tres GDL con vibración forzada mediante RK 2do orden- posiciones: a) RK 2do orden, b) RK 3er orden, c) RK 4to orden y d) RK 5to orden

Las condiciones del sistema permitieron que la solución presente un comportamiento sub amortiguado de las posiciones de cada objeto. La masa tres (línea roja) muestra una tendencia en la variación de su posición un tanto diferente al de los dos primeros objetos; esto se debe en principal medida a la

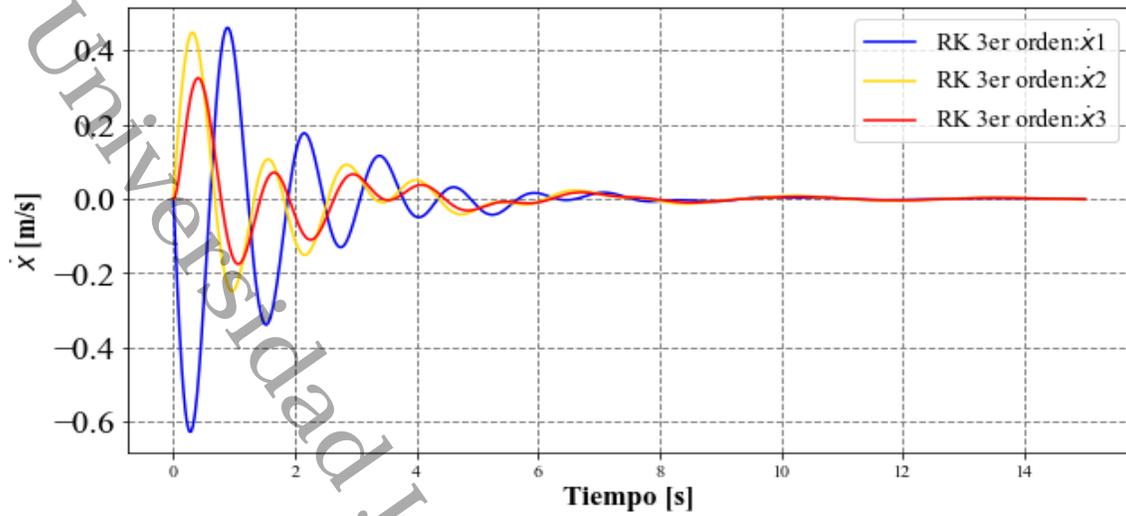
falta de elementos de almacenamiento de energía potencial conectados a la masa tres, solo cuenta con elementos de amortiguamiento debido a la fricción entre las superficies de los tres cuerpos que interactúan. Esta característica del sistema genera una reducción considerable o restricción del movimiento después de los primeros cuatro segundos de simulación.

Como se observa en la figura 3.10, las soluciones de los métodos de RK de 2do, 3er y 4to órdenes fueron similares entre sí y no se observan diferencias notables entre estas soluciones, sin embargo, se registró una variación en el comportamiento de la solución con RK de 5to orden, un desfase en la solución con un ligero adelanto o sobreestimación del comportamiento del sistema.

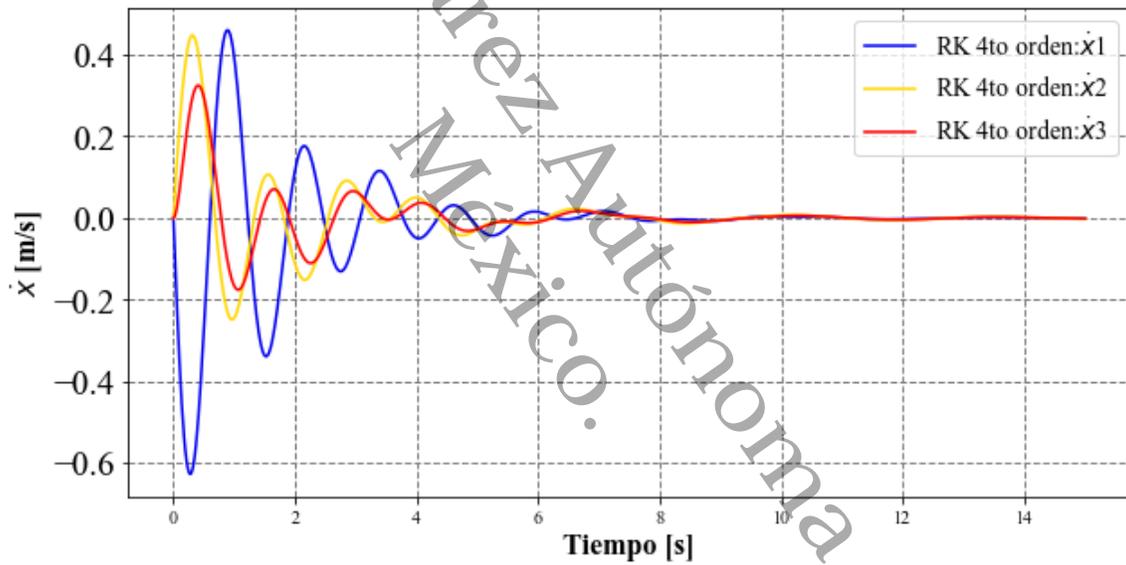
En cuanto al comportamiento de las velocidades, en la figura 3.11 se observan las comparaciones entre las respuestas obtenidas para el modelo analizado.



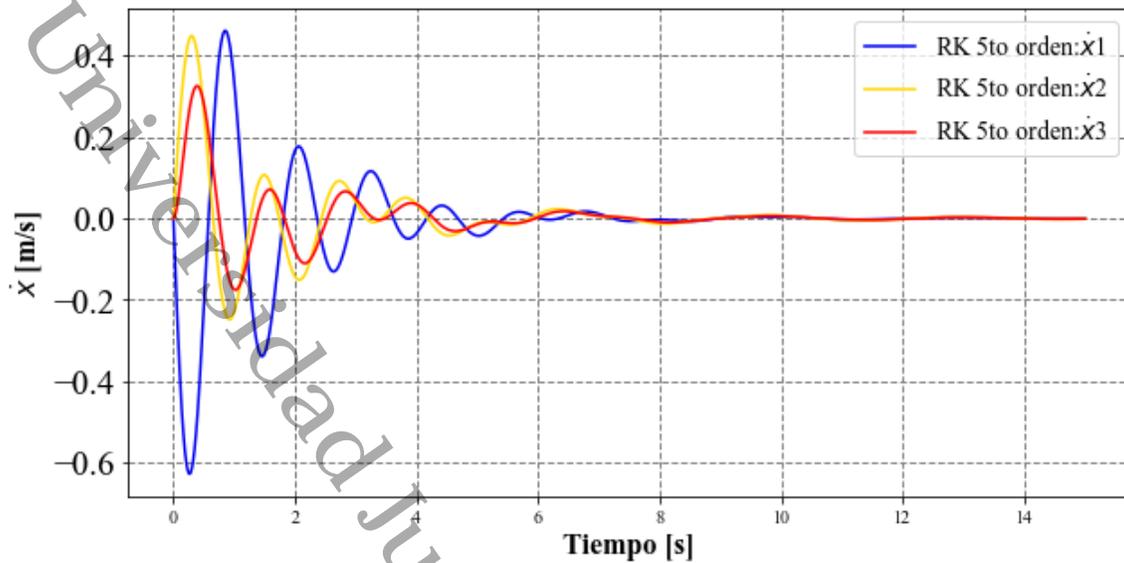
a)



b)



c)



d)

Figura 3.11 Respuesta de un sistema de 3 GDL con vibración forzada mediante RK 2do orden- Velocidades: a) RK 2do orden, b) RK 3er orden, c) RK 4to orden y d) RK 5to orden

En cuanto al comportamiento de la solución numérica para las velocidades del sistema los métodos presentaron el mismo comportamiento como en la determinación de la posición de los objetos: variaciones similares entre los métodos de RK de 2do, 3er y 4to orden mientras que la solución de 5to orden presentó un desfase significativo que se registró como un comportamiento adelantado respecto al resto de las soluciones numéricas. En la Tabla 3.3 se observan los tiempos de ejecución y tamaños de paso h obtenidos a través del algoritmo propuesto para el sistema de tres grados de libertad

Tabla 3.3 Resultados obtenidos de un sistema de tres GDL con vibración forzada

Orden de RK	Tamaño de Paso (h)	Tiempo de ejecución (seg)
2do Orden	0.0012	0.546
3er Orden	0.0097	0.120
4to Orden	0.0195	0.079
Fehlberg 5to orden	7.6293e-05	43.150

El tamaño de paso más pequeño se muestra en la columna 2 fila 5 en el método de 5to orden y el más alto en el de RK de 4to orden, lo cual implica un esfuerzo computacional considerable para reducir el error en el método de 5to orden, lo cual ocasionó que los tiempos de cómputo se incrementaran considerablemente para este escenario. Para todos los casos evaluados, el algoritmo propuesto permitió encontrar el mejor paso de tiempo o tamaño de paso h necesario para obtener la solución numérica del sistema en cada método de RK. Sin embargo, es necesario que se establezca un criterio adicional para evitar sobre esfuerzos computacionales en caso como el del método de RK de 5to orden, ya que en sistemas donde el tiempo de modelación es prolongado, se requiere encontrar la mejor solución en el menor tiempo posible.

Los presentes resultados revelan la capacidad de algoritmo y metodología propuesta como alternativa viable para el análisis de sistemas dinámicos que se presentan en diferentes tópicos de ingeniería como en el caso de vibraciones mecánicas. La herramienta desarrollada permite evaluar diferentes modelos de diferentes enfoques y dimensiones en el menor tiempo y esfuerzo computacional posible.

Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales del algoritmo y de los ejercicios de verificación de y los resultados de un sistema propuesto de tres grados de libertad. De igual manera se plantean las mejoras a futuro del código computacional en el algoritmo propuesto.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis se presentó la propuesta y desarrollo de un algoritmo para el desarrollo de un software que permite resolver las ecuaciones que describen las vibraciones mecánicas de múltiples grados de libertad de un sistema con parámetros discretos. A continuación, se presentan las conclusiones de los hallazgos del presente estudio:

- 1) Se desarrolló un algoritmo para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas y no homogéneas. El algoritmo combina diferentes métodos de la familia de Runge Kutta (2do orden - 5to orden). El algoritmo es capaz de ajustar el tamaño del paso o intervalo de tiempo para reducir el error impuesto como parte de los criterios para obtener la solución aproximada.
- 2) El código computacional se desarrolló empleando el lenguaje de programación Python con la finalidad de facilitar su aplicación a diferentes entornos de desarrollo y distribuciones de sistemas operativos.
- 3) El algoritmo fue verificado a través de la comparación de los resultados numéricos contra los obtenidos por ejercicios planteados y resueltos en la literatura. Entre los ejercicios propuestos se consideraron sistemas bajo oscilación forzada y libre, así como sistemas de múltiples grados de libertad. Los resultados numéricos presentaron diferencias menores al 1%, por lo cual se estableció la fiabilidad para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- 4) A partir de los ejercicios de verificación se encontró que el método de Runge Kutta de 4to orden presentó los mejores tiempos de ejecución y los valores de RMSD menores de entre todos los métodos que se incluyeron en el algoritmo. Aunque los métodos de Runge Kutta de 2do y 3er orden requieren una menor cantidad de operaciones para obtener la solución numérica, el paso del tiempo que se requirió debido al error máximo permitido fue al menos 100 veces más pequeño que el requerido.

por el método de 4to orden. Por lo tanto, el incremento en el número de cálculos para obtener la solución numérica a través de los métodos de 2do y 3er provocó un tiempo de cómputo superior al método de 4to orden. Ocurrió un efecto similar al observar la solución provista por el método de Runge Kutta de 5to orden, sin embargo, a este comportamiento numérico debe sumarse el efecto de los coeficientes de la función de incremento ya que para los casos de verificación resueltos se observó un desfase en la solución numérica respecto de la solución analítica. De acuerdo con lo reportado en la literatura, el efecto puede reducirse a partir de un ajuste de la función de incremento.

- 5) Los resultados obtenidos revelan la capacidad del algoritmo para el análisis de sistemas dinámicos que se presentan en distintas áreas de la ingeniería, como es el caso de las vibraciones mecánicas. Sin embargo, es necesario mejorar realizar mejoras para el ajuste de los coeficientes de la función de incremento.

En general se establece que el algoritmo permite obtener la solución aproximada de sistemas dinámicos en un tiempo de cómputo aceptable. Sin embargo, a futuro debe continuarse con el desarrollo de una interfaz que permita el desarrollo de una aplicación que facilite el uso e implementación del algoritmo en aulas y permita una fácil comprensión de los problemas que se abordan en ingeniería. De igual forma es necesario continuar en la mejora de los métodos de aproximación, adaptar una subrutina para el ajuste de la función de incremento, entre otras cosas, que permitan una mejora significativa de los resultados numéricos ofrecidos por el algoritmo desarrollado.

Referencias bibliográficas

1. Kelly, S. (2012). *Mechanical Vibrations: Theory and applications*. Cengage Learning.
2. Jang, G. H., & Jeong, S. W. (2002). Nonlinear excitation model of ball bearing waviness in a rigid rotor supported by two or more ball bearings considering five degrees of freedom. *J. Trib.*, 124(1), 82-90.
3. Heredia, L. C., Ochoa, J. L. R., Giraldo, C. P. Z., Moreno, E. B., & Muñoz, E. R. (2003). Implementación de un programa para el análisis de vibraciones libres en ejes, por medio de elementos finitos, para el sistema Vibrafin. *Revista Universidad EAFIT*, 39(129), 51-62.
4. Yáñez Rodríguez, Juan Carlos. (2003). "Iluminación e instalaciones electricas industriales. Análisis computacional de vibraciones mecánicas de un sistema resorte-masa de dos grados de libertad". (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM.
5. Gómez, J. L., Rodríguez, G. A., Torres, J. E., & Díaz, S. E. (2007). Enseñanza Teórico-Práctica de Vibraciones Mecánicas Aplicadas: "Medición y Análisis de Vibraciones" y "Rotodinámica de Turbomáquinas". In *Fifth Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology* (pp. 1-10).
6. Briceño Moya, Ricardo. (2010). "Aplicación del modelo matemático de vibraciones mecánicas en la sarta de perforación de un pozo de la región Sur". (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México.
7. Soberanes Morales, Montejó Jiménez. J. (2016). Análisis de vibraciones y detección de fallas mecánicas en ventiladores centrífugos de calderas del ingenio azucarero presidente Benito Juárez mediante el colector de datos DLI DCX 3.40, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
8. Yu, S. D., & Wen, B. C. (2013). Vibration analysis of multiple degrees of freedom mechanical system with dry friction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 227(7), 1505-1514.

9. Leos Santiago, Ivan. (2013). "Manual interactivo de prácticas de vibraciones mecánicas del equipo TM 16 empleando Visual Basic". (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, México.
10. Luna Díaz A.I (2019). Modelo y análisis de vibraciones de una máquina herramienta paralela, Universidad Nacional Autónoma de México
11. Juárez Martínez A.E. (2020). Identificación algebraica en línea del desbalance en un sistema rotor-cojinete. Análisis experimental, Tecnológico Nacional de México, Cenidet.
12. Parra, F. F. P., Cuenca, C., Godoy, L. F. S., & Chipugsi, F. (2022). Modelización de vibraciones mecánicas usando la interfaz gráfica de usuario en Matlab. *Agroindustria, Sociedad y Ambiente*, 2(19), 59-84.
13. Ying, P., Tang, H., Chen, L., Ren, Y., & Kumar, A. (2023). Dynamic modeling and vibration characteristics of multibody system in axial piston pump. *Alexandria Engineering Journal*, 62, 523-540.
14. Torres Molano, H. F. *Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones* (Doctoral dissertation, Bogotá-Ingeniería-Maestría en Ingeniería-Ingeniería Mecánica).
15. Magrab, E. B., & Balachandran, B. (2006). *Vibraciones* (2.ª ed., p. Pág. 419,420), Mexico D.F: CENGAGE Learning. México D.F: CENGAGE Learning.
16. Thomson, W. T. (1982). *Teoría de Vibraciones y aplicaciones* (1.ª ed.). Madrid España: PRENTICE HALL. Madrid España: PRENTICE HALL.
17. Singiresu S, R. (2012). *Vibraciones Mecánicas* (5.ª ed.). Naucalpan de Juárez Edo de México: PEARSON. Naucalpan de Juárez Edo de México: PEARSON.
18. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para ingenieros* (5.ªed.). México D.F: Mc Graw Hill. México D.F: Mc Graw Hill.
19. Nieves, A., & Domínguez, F. C. (2006). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería* (2.ª ed.). México D.F: Cecsca. México D.F: Cecsca
20. Cheney, W. (2010). *Métodos numéricos y computación* (6a. ed.).

ANEXO A

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de Tesis	Desarrollo de software didáctico para analizar vibraciones de sistemas de múltiples grados de libertad con parámetros discretos.
Autor de la Tesis:	Isidro Nares Lopez
ORCID:	0009-0008-9539-2436
Resumen de la Tesis:	<p>En la enseñanza de ingeniería es necesario el estudio y solución de modelos dinámicos como los estudiados en vibraciones mecánicas o circuitos resistivos-conductivos-capacitivos, es por ello la necesidad de emplear herramientas computacionales para el análisis de sistemas de múltiples grados de libertad, sin embargo, gran parte de las herramientas existentes se encuentran limitadas en cuanto a opciones de métodos para solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y carecen de un método de ajuste para minimizar el tamaño del paso en función del error establecido.</p> <p>Los resultados obtenidos revelan la capacidad del algoritmo para obtener la solución aproximada de sistemas dinámicos en un tiempo de cómputo aceptable lo cual es benéfico en distintas áreas de la ingeniería, como es el caso de las vibraciones mecánicas.</p>
Palabras claves de la Tesis:	Vibraciones mecánicas, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales ordinarias, software didáctico
Referencias citadas:	<p>Kelly.S (2012). Mechanical Vibrations: Theory and applications. Cengage Learning.</p> <p>Jang, G. H., & Jeong, S. W. (2002). Nonlinear excitation model of ball bearing waviness in a rigid rotor supported by two or more ball bearings considering five degrees of freedom. <i>J. Trib.</i>, 124(1), 82-90.</p> <p>Heredia, L. C., Ochoa, J. L. R., Giraldo, C. P. Z., Moreno, E. B., & Muñoz, E. R. (2003). Implementación de un programa para el análisis de vibraciones libres en ejes, por medio de elementos finitos, para el sistema Vibrafin. <i>Revista Universidad EAFIT</i>, 39(129), 51-62.</p>

	<p>Yáñez Rodríguez, Juan Carlos. (2003). "Iluminación e instalaciones eléctricas industriales. Análisis computacional de vibraciones mecánicas de un sistema resorte-masa de dos grados de libertad". (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM.</p> <p>Gómez, J. L., Rodríguez, G. A., Torres, J. E., & Díaz, S. E. (2007). Enseñanza Teórico-Práctica de Vibraciones Mecánicas Aplicadas: "Medición y Análisis de Vibraciones" y "Rotodinámica de Turbomáquinas". In <i>Fifth Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology</i> (pp. 1-10).</p> <p>Briceño Moya, Ricardo. (2010). "Aplicación del modelo matemático de vibraciones mecánicas en la sarta de perforación de un pozo de la región Sur". (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México.</p> <p>Soberanes Morales, Montejó Jiménez. J. (2016). Análisis de vibraciones y detección de fallas mecánicas en ventiladores centrífugos de calderas del ingenio azucarero presidente Benito Juárez mediante el colector de datos DLI DCX 3.40, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.</p> <p>Yu, S. D., & Wen, B. C. (2013). Vibration analysis of multiple degrees of freedom mechanical system with dry friction. <i>Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science</i>, 227(7), 1505-1514.</p> <p>Leos Santiago, Ivan. (2013). "Manual interactivo de prácticas de vibraciones mecánicas del equipo TM 16 empleando Visual Basic". (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, México.</p>
--	---

	<p>Luna Díaz A.I (2019). Modelo y análisis de vibraciones de una máquina herramienta paralela, Universidad Nacional Autónoma de México</p> <p>Juárez Martínez A.E. (2020). Identificación algebraica en línea del desbalance en un sistema rotor-cojinete. Análisis experimental, Tecnológico Nacional de México, Cenidet.</p> <p>Parra, F. F. P., Cuenca, C., Godoy, L. F. S., & Chipugsi, F. (2022). Modelización de vibraciones mecánicas usando la interfaz gráfica de usuario en Matlab. <i>Agroindustria, Sociedad y Ambiente</i>, 2(19), 59-84.</p> <p>Ying, P., Tang, H., Chen, L., Ren, Y., & Kumar, A. (2023). Dynamic modeling and vibration characteristics of multibody system in axial piston pump. <i>Alexandria Engineering Journal</i>, 62, 523-540.</p> <p>Torres Molano, H. F. <i>Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones</i> (Doctoral dissertation, Bogotá-Ingeniería-Maestría en Ingeniería-Ingeniería Mecánica).</p> <p>Magrab, E. B., & Balachandran, B. (2006). <i>Vibraciones</i> (2.^a ed., p. Pág. 419,420), Mexico D.F: CENGAGE Learning. México D.F: CENGAGE Learning.</p> <p>Thomson, W. T. (1982). <i>Teoría de Vibraciones y aplicaciones</i> (1.^a ed.). Madrid España: PRENTICE HALL. Madrid España: PRENTICE HALL.</p> <p>Singiresu S, R. (2012). <i>Vibraciones Mecánicas</i> (5.^a ed.). Naucalpan de Juárez Edo de México: PEARSON. Naucalpan de Juárez Edo de México: PEARSON.</p> <p>Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). <i>Métodos Numéricos para ingenieros</i> (5.^aed.). México D.F: Mc Graw Hill. México D.F: Mc Graw Hill.</p>
--	--

	<p>Nieves, A., & Domínguez, F. C. (2006). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería (2.^a ed.). México D.F: Cecs. México D.F: Cecs</p> <p>Cheney, W. (2010). Métodos numéricos y computación (6a. ed.).</p>
--	---

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

DESARROLLO DE SOFTWARE DIDÁCTICO PARA ANALIZAR VIBRACIONES DE SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CON PARÁMETROS DISCRETOS

INFORME DE ORIGINALIDAD

18%

ÍNDICE DE SIMILITUD

HACER COINCIDIR TODAS LAS FUENTES (SOLO SE IMPRIME LA FUENTE SELECCIONADA)

★www.scribd.com

Internet

6%

EXCLUIR CITAS

ACTIVADO

EXCLUIR FUENTES

< 10 PALABRAS

EXCLUIR BIBLIOGRAFÍA

ACTIVADO

EXCLUIR COINCIDENCIAS

< 10 PALABRAS



COORDINACIÓN
DE ESTUDIOS
TERMINALES

Tabasco.