



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



**ESTUDIO DEL FENÓMENO DE DIFRACCIÓN
SIN EL USO DE LENTE**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

MARIAN CRISTINA RICARDEZ TORRES

DIRECTORES

DR. ESTEBAN ANDRÉS ZÁRATE

M.C. QUINTILIANO ANGULO CÓRDOVA

Cunduacán, Tab.

Octubre 2024

LICENCIATURA - ESTUDIO DEL FENÓMENO DE DIFRACCIÓN SIN EL USO DE LENTE

INFORME DE ORIGINALIDAD



8%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	inaoe.repositorioinstitucional.mx Internet	849 palabras — 4%
2	revistas.ujat.mx Internet	186 palabras — 1%
3	qdoc.tips Internet	105 palabras — 1%
4	www.scielo.org.mx Internet	91 palabras — < 1%
5	dgip.unach.mx Internet	60 palabras — < 1%
6	documentop.com Internet	39 palabras — < 1%
7	Montesinos Escobar, Mijail. "Caracterización mecánica de componentes estructurales en construcciones arqueológicas de tierra: el caso de Huaca de La Luna.", Pontificia Universidad Católica del Perú - CENTRUM Católica (Peru), 2021 ProQuest	36 palabras — < 1%
8	docplayer.es Internet	35 palabras — < 1%



Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Cunduacán, el día 20 del mes septiembre del año 2024, el que suscribe Marian Cristina Ricárdez Torres, alumna del Programa de Licenciatura en Física con número de matrícula 192A12017, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autora de la Tesis presentada para la obtención del título Licenciado en Física y titulada **“ESTUDIO DEL FENÓMENO DE DIFRACCIÓN SIN EL USO DE LENTE”** dirigida por el Dr. Esteban Andrés Zárate y el M.C. Quintiliano Angulo Córdoba.

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Cunduacán, Tabasco a 20 de septiembre 2024.

Handwritten signature of Marian Cristina Ricárdez Torres, featuring a stylized star symbol to the right.

Marian Cristina Ricárdez Torres
192A12017



UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 12 de septiembre de 2024.

**C. MARIAN CRISTINA RICÁRDEZ TORRES
PASANTE DE LA LIC. EN FÍSICA
PRESENTE**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“ESTUDIO DEL FENÓMENO DE DIFRACCIÓN SIN EL USO DE LENTE”**, dirigido por el Dr. Esteban Andrés Zárate con la co-dirección del Mtro. Quintiliano Angulo Córdova, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Ibis Ricárdez Vargas, Dr. Cristino Ricárdez Jiménez, Dr. Jaime Manuel Cabrera, Mtro. Ricardo Arias Palacios y el Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA**



C.c.p. Pasante.
C.c.p. Archivo.

DIR'DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

Cunduacán, Tabasco a 20 de septiembre del 2024.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTOR(A) y/o AUTORES(RAS) en la producción, creación y/o realización de la obra denominada "ESTUDIO DEL FENÓMENO DE DIFRACCIÓN SIN EL USO DELENTE".

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES



Marian Cristina Ricárdez Torres
192A12017

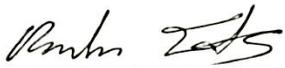


Dr. Esteban Andrés Zárate



M.C. Quintiliano Angulo Córdova

TESTIGOS



Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes



Dr. José Luis Benítez Benítez

*“Y dijo Dios: Sea la luz; y fue la luz.
Y vio Dios que la luz era buena;
y separó Dios la luz de las tinieblas.”
Génesis 1:3-4.*

*“Lo atenazaba el paso del tiempo
y el avance lento y difícil de la ciencia mexicana
a la que ningún sexenio quería apoyar.”
Elena Poniatowska, *La piel del cielo*.*

*“Les demostró, con teorías
que para todos les resultaban incomprensibles,
la posibilidad de regresar al punto de partida navegando siempre
hacia el Oriente. Toda la aldea estaba convencida de que
José Arcadio Buendía había perdido el juicio, cuando llegó Melquiades
a poner las cosas en su punto. Exaltó en público la inteligencia de aquel
hombre.”
Gabriel García Márquez, *Cien años de soledad*.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

*En memoria de
Jorge Alberto Collado Pardo
y dedicado para toda mi familia,
amigos y profesores.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios, principio supremo sobre todas las cosas, creador de la realidad y las leyes que la rigen, y que quienes nos dedicamos a la Ciencia buscamos modestamente descifrar con nuestro entendimiento. Él ha sido la fuente de mi fortaleza y guía a lo largo de este camino de estudio.

A mis padres, David Ricárdez Cerino y Alma Rosa Torres Ricárdez, por darme la vida, su amor incondicional y los sacrificios que han hecho para apoyarme incluso en mis extravagancias. Mis logros siempre serán un reflejo de lo que han dejado en mí.

A mi hermano David Ricárdez Torres, por motivarme a alcanzar mis sueños.

A mis amigos Cassandra, Stalyn, Luis Gerardo, Ander, Emilio, Itsi, Alberto y demás compañeros de la licenciatura, por los desafíos, noches de estudio y momentos de duda que sobrellevamos juntos; pero también por las risas, sus explicaciones de temas complejos, la motivación y consejos. Hicieron esta etapa más agradable que si hubiera estado sola.

A mis directores de tesis, el Dr. Esteban Andrés Zárate y el M. C. Quintiliano Angulo Córdova, quienes con su asesoría, paciencia, conocimientos, observaciones y dedicación me ayudaron a terminar este trabajo y al mismo tiempo me permitieron vislumbrar la forma de realizar Ciencia. Son una inspiración del tipo de persona que quiero ser.

RESUMEN

El objetivo general de este trabajo fue determinar el modelo matemático de difracción sin el uso de lente producido por un par de rendijas de geometría rectangular y un par de aberturas circulares del mismo radio. Mediante el método de propagación del espectro angular se obtuvo como resultado para la región de Fresnel, situada a una distancia z del objeto difractor dentro del intervalo $(0 < z < \infty)$, la convolución entre la transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada a la geometría de la abertura y una función exponencial; mientras que, para la región de Fraunhofer, situada a una distancia $(z \rightarrow \infty)$ se obtuvo la transformada de Fourier exacta de la función de transmitancia. Se comprobaron los resultados experimentalmente mediante la implementación de un arreglo óptico coherente sin el uso de lente transformadora y luz de láser como fuente de iluminación. Los patrones de difracción en distribución de intensidad fueron grabados mediante el método fotográfico, empleando distancias y tiempos de exposición diferentes.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	IV
Índice De Figuras	1
Capítulo 1: Introducción	2
1.1 Introducción al fenómeno de la difracción sin el uso de lente	2
1.2 Definición del problema	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo general	5
1.3.2 Objetivos específicos	5
1.4 Estructura de la tesis	6
Capítulo 2: Difracción de ondas monocromática y su propagación sin el uso de lente	8
2.1 Aspectos teóricos de la difracción sin el uso de lente	8
2.2 Espectro angular no propagado	10
2.3 Espectro angular propagado	12
2.4 Propagación del espectro angular a ángulos pequeños	16
2.5 Difracción en la región de Fresnel	19
2.6 Difracción en la región de Fraunhofer	20
Capítulo 3: Modelos de difracción generados con dos aberturas de transmitancias específicas	24
3.1 Espectro de difracción producido por un par de aberturas rectangulares	24
3.1.1 Región de Fresnel	25
3.1.1.1 Realización de la primera operación de convolución	27
3.1.1.2 Realización de la segunda operación de convolución	32
3.1.1.3 Distribución de amplitud del campo difractado obtenido sumado los resultados de ambas convoluciones	34
3.1.2 Región de Fraunhofer	36
3.2 Espectro de difracción producido por un par de aberturas circulares	38
3.2.1 Región de Fresnel	39
3.2.1.1 Realización de la primera operación de convolución	40
3.2.1.2 Realización de la segunda operación de convolución	43

3.2.1.3 Distribución de amplitud del campo difractado obtenido sumando los resultados de ambas convoluciones	45
3.2.2 Región de Fraunhofer	47
Capítulo 4: Desarrollo experimental	49
4.1 Arreglo experimental	49
4.2 Descripción los objetos difractores	50
4.3 Método de grabado de los patrones de difracción	51
4.4 Patrones de difracción producidos por un par de aberturas rectangulares	52
4.4.1 Fotografías correspondientes a la zona de Fresnel o de convolución	52
4.4.2 Fotografías correspondientes a la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier	54
4.5 Patrones de difracción producidos por un par de aberturas circulares	58
4.5.1 Fotografías correspondientes a la zona de Fresnel o de convolución	58
4.5.2 Fotografías correspondientes a la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier	60
Capítulo 5: Conclusiones	65
Anexo: Definiciones	68
Bibliografía	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Difracción y propagación del espectro angular.	9
Figura 3.1 Primer objeto difractor compuesto por dos aberturas rectangulares desplazadas.	24
Figura 3.2. Segundo objeto difractor compuesto por dos aberturas circulares del mismo radio y desplazadas.	38
Figura 4.1. Arreglo experimental para producir y grabar patrones de difracción en distribución de intensidad.	49
Figura 4.2 Objetos difractores empleados en el arreglo óptico.	51
Figura 4.3 Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fresnel o de convolución.	53
Figura 4.4 Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta.	55
Figura 4.5 Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta capturadas con un teléfono celular Huawei YP6 Med-Lx9.	56
Figura 4.6 Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría circular empleadas como objeto difractor en la región de Fresnel o de convolución.	58
Figura 4.7 Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría circular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de transformada exacta.	61

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una introducción al fenómeno de la difracción sin el uso de lente, así como una revisión de los enfoques de diversos autores sobre el tema y se establece el método propio que se utilizará en este trabajo para abordar la difracción. Después, se realiza un planteamiento de los problemas teóricos y experimentales que se examinarán y seguidamente se enumeran los objetivos que se buscan alcanzar. Finalmente, se incluye la estructura de la tesis, en la cual se realiza una descripción general de cada capítulo.

1.1 Introducción al fenómeno de la difracción sin el uso de lente

La difracción de las ondas de luz es un fenómeno físico en el que un frente de ondas es obstruido durante su trayectoria de propagación por algún objeto transparente u opaco, que altera su amplitud y fase en una región (Ersoy, 2007, p.1). El conjunto de segmentos del frente de onda que se propagan más allá del obstáculo interfiere entre sí generando un patrón de difracción, que es una densidad de energía particular, cuya distribución espacial de intensidad está compuesta por regiones luminosas y oscuras alternadas que corresponden a máximos y mínimos energéticos producto de la interferencia constructiva o destructiva, respectivamente (Hecht, 2000, p. 441). Para que la difracción se produzca de forma notable debe cumplirse la condición de que las dimensiones del objeto difractor sean del mismo orden de magnitud o menor que la longitud de onda de la fuente luminosa (Goodman, 2005, pp.33).

Según (Ersoy, 2007, p.1) la difracción puede modelarse como un sistema lineal usando la Óptica de Fourier, que permite analizar los campos electromagnéticos en el dominio espacial y frecuencial; además de ser útil para representar los cambios de la distribución de la luz al pasar por elementos ópticos como lentes y aberturas, siendo estas últimas en las que se enfocará este trabajo. Adicionalmente, para abordar el problema de la difracción también resulta de gran relevancia el método del espectro angular, el cual trata la propagación de un frente de ondas en cualquier medio homogéneo como una superposición de ondas planas, lo que permite hacer una descripción de la forma en que un haz de luz viaja desde el plano de difracción hasta el plano de frecuencias en el que se distribuye (Zárate, 2011, p. 159).

Matemáticamente existen dos formulaciones para explicar el fenómeno de la difracción: la formulación de Kichhoff y la formulación de Rayleigh-Sommerfeld, siendo esta última la que se tomara como punto de partida en este trabajo ya que proporciona resultados más exactos, descarta la necesidad de imponer valores límite a la perturbación y a su derivada normal, además de que elimina la inconsistencia física de que el campo sea cero detrás de la abertura difractora como lo implica la teoría Kirchhoff (Goodman, 2005, p. 46). Malacara (2015), Hecht y Zajac (1998), Born and Wolf (2005), entre otros autores relevantes en la Óptica, abordaron el fenómeno de la difracción sin el uso de lente desde un enfoque bastante general, sin proporcionar un desarrollo matemático que demuestre el origen de las ecuaciones de difracción y las relaciones con las ecuaciones de Maxwell; no obstante, fue (Goodman, 2005, pp. 55-61) quien empleando el método del espectro angular y considerando la ecuación escalar de Helmholtz desarrolló las expresiones para el campo difractado en las regiones de Fresnel y de Fraunhofer. Por su parte (Ersoy, 2007, pp. 63-76) aborda el tratamiento matemático de la región de Fraunhofer mediante una expansión binomial de serie y a diferencia de Goodman, incluye evidencia experimental para una abertura cuadrada.

Es importante mencionar que muchos de los trabajos experimentales actuales sobre la difracción emplean una lente aunada a las aberturas para obtener los patrones en distribución de intensidad, esta puede ser un doblete cementado acromático, tal como lo expone (Reyes, 2022, p.3) quien realizó un estudio en la región de Fraunhofer empleando aberturas de diversas geometrías que generaron patrones de franjas bien definidos; aunque usualmente se utiliza una lente convergente tal como lo reportan (Anoya, 2000, p.7), quien planteó el concepto de respuesta al impulso de una lente y (Frías, 2008, p. 5) que obtuvo los patrones de difracción de aberturas circulares en la región de la transformada exacta que coincide con el plano focal de la lente. Cabe mencionar el trabajo de (Zárate, 2011, pp. 32-91) que establece el modelo teórico para la propagación del espectro angular al estudiar una distribución de campos de difracción en las regiones de Fresnel y de Fraunhofer, considerando las situaciones con lente convergente y sin usar dicho instrumento óptico, pero solo reportó una etapa experimental para el caso con lente. Por lo anteriormente expuesto, el propósito de este trabajo es proporcionar un estudio matemático y experimental de la difracción sin el uso de lentes.

1.2 Definición del problema

La Óptica de Fourier tiene como propósito emplear técnicas y conceptos del análisis de Fourier para estudiar el comportamiento de la luz cuando interacciona con diferentes sistemas ópticos como lentes, espejos y aberturas, siendo estas últimas las que bajo condiciones específicas dan lugar al fenómeno de la difracción, que junto con sus correspondientes patrones en distribución de intensidad asociados a la geometría de las aberturas representan uno de los problemas más relevantes de la Óptica Física (Goodman, 2005, p. xvii). Este trabajo abordará la difracción de las ondas de luz de láser monocromáticas sin el uso de lente producida por dos aberturas rectangulares o rendijas y dos aberturas circulares del mismo radio practicadas en materiales de espesor despreciable. La distancia z entre estos objetos difractores y el plano de distribución da lugar a la región o zona de Fresnel, situada dentro del intervalo ($0 < z < \infty$) y a la región o zona de Fraunhofer que cumple con la condición ($z \rightarrow \infty$) (Ersoy, 2007, pp. 63-64), para las que resulta necesario desarrollar los modelos matemáticos específicos que describan el campo difractado partiendo en ambos casos del formalismo del método del espectro angular que posteriormente da lugar a operaciones diferentes: en la región de Fresnel se realiza una convolución entre la transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada a la geometría del objeto difractor, con la transformada de Fourier de una función exponencial; mientras que en la región de Fraunhofer se realiza la transformada de Fourier exacta de la función de transmitancia asociada al objeto difractor (Zárate, 2011, pp. 17-21). En la parte experimental, se propone implementar un arreglo óptico coherente con luz laser para obtener los patrones en distribución de intensidad; lo cual representa un desafío pues la falta de lente dificulta el enfoque, elimina la amplificación y da un menor control sobre la luz difractada (Malacara, 2015, p. 285), lo que a su vez puede derivar en problemas para la interpretación y análisis de los patrones de difracción.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Determinar el modelo matemático de difracción sin el uso de lente producido por un par de rendijas de geometría rectangular y circular mediante la propagación del espectro angular.

1.3.2 Objetivos específicos

- Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fresnel o de convolución de la transformada de Fourier, para la cual se debe mantener una distancia ($0 < z < \infty$) entre el objeto y el plano de distribución.
- Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier, que cumple la condición ($z \rightarrow \infty$), es decir que la distancia entre el plano de distribución y el objeto tiende ópticamente hacia infinito.
- Implementar un arreglo experimental óptico coherente.
- Producir y grabar los patrones de difracción en distribución de intensidad generados experimentalmente con objetos de geometrías específicas.

1.4 Estructura de la tesis

Este trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos que abordan de forma sistemática y detallada diversos aspectos del estudio de la difracción sin el uso de lente, empleando para dicho propósito el método propagación del espectro angular y la Óptica de Fourier. La primera parte del contenido presenta los desarrollos teóricos que describen la forma funcional del fenómeno de difracción de ondas electromagnéticas, así como la generación de los modelos matemáticos en distribución de intensidad asociados a las funciones de transmitancia correspondientes a la geometría de los objetos difractores. Posteriormente, se incluye todo lo referente al ámbito experimental, donde se destacan las imágenes fotográficas de los patrones de difracción en distribución de intensidad, que justifican la veracidad de los modelos matemáticos. Se incluye además una Tabla de Figuras para facilitar su localización en el texto, un anexo con definiciones matemáticas no abordadas a detalle a lo largo del contenido y la bibliografía en la que se sustenta este trabajo. A continuación, se proporciona un resumen general de cada uno de los capítulos.

CAPÍTULO 1: En el presente capítulo se inicia con una introducción al fenómeno de la difracción sin el uso de lente, después se incluye una exposición de los problemas que se abordaran en el trabajo y finalmente se establecen los objetivos teóricos y experimentales que se buscan alcanzar.

CAPÍTULO 2: En este capítulo se presenta el concepto de difracción, así como una explicación de la forma en que se produce este fenómeno y la propagación del espectro en el espacio mediante un tratamiento escalar; luego se incluye el concepto de las frecuencias espaciales y al final del capítulo se establece una distinción de la forma funcional del campo en las regiones de Fresnel y de Fraunhofer.

CAPÍTULO 3: En esta sección se realiza el desarrollo matemático para determinar los modelos de amplitud compleja asociados a los objetos difractores partiendo de la función de transmitancia asociada a su geometría; este análisis se realiza para la región de Fresnel y la región de Fraunhofer, mediante una convolución de transformadas de Fourier en el primer caso y una transformada exacta de Fourier en el segundo caso.

CAPÍTULO 4: En este capítulo se muestra la comprobación experimental del fenómeno estudiado. En la primera parte se describe el arreglo óptico implementado, así como las aberturas estudiadas y finalmente se presentan y analizan las imágenes de los patrones de difracción en distribución de intensidad obtenidas mediante el método fotográfico.

CAPÍTULO 5: En esta sección se plantean las conclusiones derivadas de la realización de este trabajo.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

CAPÍTULO 2

DIFRACCIÓN DE ONDAS MONOCROMÁTICAS Y SU PROPAGACIÓN SIN EL USO DE LENTE

En este capítulo, primero se establece el desarrollo matemático para obtener la ecuación correspondiente al campo eléctrico en las regiones de Fresnel y de Fraunhofer, para un caso general sin especificar la geometría de la abertura. Igualmente, después se utiliza el espectro de difracción angular para reemplazar el concepto de espectro de difracción y finalmente se establecen las frecuencias espaciales paraxiales que surgen al aplicar la condición de ángulos pequeños respecto al eje óptico. Es importante recalcar que todo este análisis se realiza bajo la situación de que el sistema óptico carece de lente.

2.1 Aspectos teóricos de la difracción sin el uso de lente

El fenómeno óptico de difracción de un campo de ondas electromagnéticas es el proceso de interacción de dicho campo con uno o más cuerpos transparentes u opacos que lo alteran en amplitud y fase; esto ocurre cuando durante su trayectoria de propagación el frente de onda es obstruido por algún objeto, después del cual se dispersa y sus diferentes segmentos interfieren entre sí produciendo una densidad de energía particular, cuya distribución espacial de intensidad se denomina patrón de difracción (Zárate, 2011, p. 5; Malacara, 2004, p. 276; Hecht y Zajac, 1998, p. 441). La distribución de amplitud compleja de un patrón de difracción se puede propagar a dos zonas: la región de Fresnel o de convolución y la región de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier (Goodman, 2005, p.75).

Empleando la ecuación de difracción de Rayleigh-Sommerfeld, los conceptos de propagación del espectro angular y las frecuencias espaciales u_n y v_n , es posible describir matemáticamente el patrón de difracción generado por la interacción de luz laser de Helio-Neón con una abertura u objeto de espesor despreciable al que se le asocia una función de transmitancia $t(x, y)$ que depende de su geometría. Posteriormente, usando una función de transferencia $T(x, y)$, se puede modelar la propagación del campo electromagnético a través del espacio hasta el plano de distribución (Reyes, 2022, p.2)

Mediante el método escalar de propagación del espectro angular se puede describir como una superposición de ondas planas al traslado que sufre un campo desde el plano xy en el que se difracta hasta otro plano $x_z y_z$ en el que se distribuye (Zárate, 2011, p. 159), lo cual da lugar a dos situaciones: el espectro de difracción angular no propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$, que se produce cuando el plano de difracción y el plano de distribución se encuentran geoméricamente ubicados en la misma posición y el espectro de difracción angular propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$, en el cual los dos planos antes referidos están separados una distancia $z \neq 0$.

En la Figura 2.1 se ilustra el fenómeno de difracción para ambas situaciones anteriormente descritas, suponiendo una fuente de luz monocromática que produce un campo eléctrico de ondas planas de amplitud constante E_{illum} , mismas que posteriormente inciden sobre un plano transversal xy en el que se encuentra una abertura de geometría regular a la que se le asocia una función de transmitancia $t(x, y)$, lo que da lugar a los espectros de difracción angular no propagado y propagado.

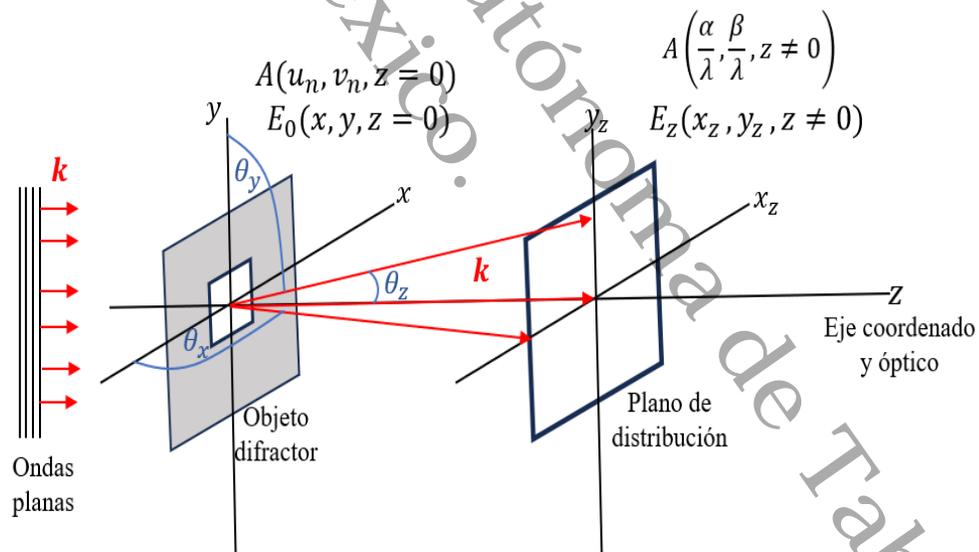


Figura 2.1. Difracción y propagación del espectro angular.

2.2 Espectro angular no propagado

El espectro angular se define como una representación visual que muestra la manera en que se distribuye la intensidad de la luz después de haber sido difractada por una rendija, en función de los ángulos que se forman entre los frentes de onda y los ejes del plano de difracción (Zárate, 2011, p. 5). Experimentalmente, el espectro angular se observa sobre una pantalla colocada después del objeto difractor como un conjunto de franjas luminosas y oscuras alternadas (Hecht, 2000, p. 448) y matemáticamente se determina como la transformada de Fourier bidimensional del campo eléctrico difractado (Goodman, 2005, pp. 56-57).

De acuerdo con (Zárate, 2011, p.7) la forma del campo eléctrico se determina de plano a plano y partiendo del campo de ondas monocromáticas difractadas justo después del objeto $E_0(x, y, z = 0)$, cuya función de amplitud se expresa de la siguiente manera:

$$E_0(x, y, z = 0) = E_{ilum}t(x, y), \quad (2.1)$$

donde E_{ilum} es la amplitud constante de las ondas planas que iluminan al objeto y $t(x, y)$ es la función de transmitancia asociada a la geometría de la abertura. La ecuación (2.1) también puede ser escrita en términos de una transformada inversa de Fourier (Goodman, 2005, p. 56), ver propiedad (A.15), esto es:

$$E_0(x, y, z = 0) = \mathfrak{F}^{-1}\{A(u_n, v_n, 0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(u_n, v_n, 0) e^{i2\pi(u_n x + v_n y)} du_n dv_n, \quad (2.2)$$

donde se encuentra involucrado el espectro de difracción $A(u_n, v_n, 0)$ que es la función que se busca determinar explícitamente. Después, debido al teorema de identidad (Zárate, 2011, p. 7 y Gaskill, 1978, p. 185), ver propiedad (A.16), se aplica la transformada de Fourier a la ecuación (2.2) obteniéndose el espectro de las ondas difractadas en el dominio de las frecuencias espaciales u_n y v_n ,

$$A(u_n, v_n, 0) = \mathfrak{F}\{E_0(x, y, z = 0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y, z = 0) e^{-i2\pi(u_n x + v_n y)} dx dy. \quad (2.3)$$

No obstante, se busca que el espectro de difracción esté en términos de los cosenos directores que forma el vector de propagación \mathbf{k} respecto a los ejes coordenados x, y, z ; para este propósito se puede emplear una onda plana, definida por (Goodman, 2005, p. 56) como:

$$P(x, y) = e^{-i2\pi(u_n x + v_n y + Wz)} = e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{k} y \mathbf{r} , son los vectores de propagación y posición de la onda plana, respectivamente. El vector de propagación $\mathbf{k} = ik_x + jk_y + kk_z$ es aquel que apunta en la dirección en que se propaga la onda y es perpendicular a su frente de onda, además posee una magnitud igual al número de onda $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Malacara, 2015, p. 209).

Es posible relacionar el vector de propagación con los cosenos directores del ángulo que se forma respecto a cada eje coordenado, es decir $\alpha = \cos \theta_x$, $\beta = \cos \theta_y$ y $\gamma = \cos \theta_z$, así por geometría se obtiene la ecuación (2.5),

$$\alpha = \cos \theta_x = \frac{k_x}{|\mathbf{k}|}, \quad \beta = \cos \theta_y = \frac{k_y}{|\mathbf{k}|}, \quad \gamma = \cos \theta_z = \frac{k_z}{|\mathbf{k}|}. \quad (2.5)$$

Empleando dichas razones geométricas se tiene que el vector de propagación es:

$$\mathbf{k} = i|\mathbf{k}|\alpha + j|\mathbf{k}|\beta + k|\mathbf{k}|\gamma = |\mathbf{k}|(i\alpha + j\beta + k\gamma) = \frac{2\pi}{\lambda}(i\alpha + j\beta + k\gamma). \quad (2.6)$$

Por otro lado, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ es el vector de posición que representa cualquier punto del plano del frente de ondas (Hecht, 2000, p.26). Entonces, realizando el producto punto entre los vectores \mathbf{k} y \mathbf{r} , se obtiene:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda}(i\alpha + j\beta + k\gamma) \cdot (ix + jy + kz) = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (2.7)$$

Como en este caso se analiza la condición de que $z = 0$, entonces se anula el último término de la expresión anterior, quedando como resultado del producto punto:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 2\pi \left[\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right]. \quad (2.8)$$

Sustituyendo el resultado de (2.8) en (2.4) se tiene que la onda plana queda definida con la siguiente expresión:

$$P(x, y) = e^{-i2\pi(u_n x + v_n y)} = e^{-i2\pi \left[\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right]}. \quad (2.9)$$

Comparado ambos lados de la igualdad (2.9) es posible definir las frecuencias espaciales como lo indica (2.10),

$$u_n = \frac{\alpha}{\lambda} \quad ; \quad v_n = \frac{\beta}{\lambda} . \quad (2.10)$$

Obteniéndose de esta forma la ecuación del espectro de difracción angular no propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$, que a diferencia del espectro de difracción $A(u_n, v_n, 0)$, este último no se encuentra en término de los cosenos directores. Reescribiendo (2.3) usando (2.10).

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y, z = 0) e^{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} . \quad (2.11)$$

2.3 Espectro angular propagado

En esta sección se busca obtener la expresión matemática del espectro angular propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$ que aparece en el plano $u_n v_n$, el cual es paralelo al plano xy y se encuentran separados entre sí una distancia $z \neq 0$. De manera análoga al caso del espectro no propagado (Zárate, 2011, p. 9) propuso realizar una transformada de Fourier del campo eléctrico difractado $E_z(x_z, y_z, z)$ para determinar $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$,

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \mathfrak{F}\{E_z(x_z, y_z, z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(x_z, y_z, z) e^{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} dx_z dy_z . \quad (2.12)$$

La forma del campo eléctrico $E_z(x_z, y_z, z)$ se determina de acuerdo con el teorema de identidad (Gaskill, 1978, p. 185), ver propiedad (A.16), aplicando la transformada inversa sobre el espectro de difracción angular propagado,

$$E_z(x_z, y_z, z) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} , \quad (2.13)$$

donde el campo eléctrico $E_z(x_z, y_z, z)$ no solo debe satisfacer la ecuación (2.13) sino también ser solución de la ecuación diferencial escalar de Helmholtz (Goodman, 2005, p.57), la cual está dada a continuación por la expresión (2.14):

$$(\nabla^2 + k^2)E_z = 0 , \quad (2.14)$$

en la que el operador Laplaciano al actuar sobre el campo eléctrico únicamente presenta componente en el eje z, ya que son ondas escalares no polarizadas y sus planos son constantes en los ejes x y y. Sustituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} \dots \\ & \dots + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Factorizando $e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}$ para simplificar el análisis se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^2}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \right] \dots \\ & \dots \left[e^{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

por definición, la exponencial no puede ser igual a cero, por lo tanto, para que se cumpla la ecuación (2.16) es necesario que el primer factor entre corchetes sea cero, generándose de esa forma la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d^2}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = 0. \quad (2.17)$$

Para resolver esta ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, se propone una solución de la forma $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = e^{rz}$, que al sustituirla en la expresión (2.17) se obtiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} (e^{rz}) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) (e^{rz}) = 0. \quad (2.18)$$

Realizando la segunda derivada y factorizando e^{rz} se obtiene la expresión (2.19),

$$r^2 e^{rz} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) (e^{rz}) = \left(r^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \right) e^{rz} = 0, \quad (2.19)$$

donde su ecuación característica es la siguiente,

$$r^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) = 0. \quad (2.20)$$

Al despejar r se obtienen dos raíces complejas,

$$r^2 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \Rightarrow r = \pm i \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}. \quad (2.21)$$

Como la densidad de energía del espectro que se propaga hacia $+z$ es mayor que aquella que se propaga en dirección $-z$, es posible ignorar el resultado negativo de la raíz en la ecuación (2.21), además debido a que los cosenos directores satisfacen la identidad $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \equiv 1$, puede simplificarse la raíz a una expresión en términos del ángulo γ ,

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = C e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}. \quad (2.22)$$

Imponiendo la condición inicial de $z = 0$ en el resultado (2.22), se determina el valor de la constante C , tal como lo proponen (Zárate, 2011, p.11; Ersoy, 2007, p. 45),

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) = C e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma(0)} = C. \quad (2.23)$$

Sustituyendo el factor dado en (2.23) en la ecuación (2.22) se obtiene la siguiente expresión:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}, \quad (2.24)$$

donde el factor $T = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}$ se identifica como una función de transferencia que multiplica al espectro no propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$, lo cual genera un espectro angular propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$. (Zárate, 2011, p.12) señaló que es necesario identificar qué condición debe cumplir la suma de los cosenos directores al cuadrado de los ejes x y y , es decir $\alpha^2 + \beta^2$, para generar una interpretación que coincida con el fenómeno estudiado, para lo cual se analizarán los siguientes tres casos.

CASO 1: Si $\alpha^2 + \beta^2 > 1$, entonces se reescribe el coseno director γ ,

$$\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(-1)(-1 + \alpha^2 + \beta^2)} = i\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}. \quad (2.25)$$

Como se aprecia en la ecuación (2.25) el coseno director obtenido es la parte imaginaria de un número complejo, que al sustituirse en la ecuación (2.24) da la expresión (2.26) que corresponde a un espectro de difracción evanescente, en el cual las ondas se atenúan conforme se propagan una distancia z y no transportan energía fuera de la apertura (Goodman, 2005, p.58). Este caso no es el adecuado al que se está estudiando.

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{-\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)}\right]z}. \quad (2.26)$$

CASO 2: Si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, entonces se reescribe el coseno director γ ,

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = 0. \quad (2.27)$$

Si esta igualdad se cumple, entonces la función de transferencia $T = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z} = 1$, lo que genera una incongruencia en la cual el espectro angular no propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$ es igual al propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$.

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right). \quad (2.28)$$

CASO 3: Si $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, entonces el coseno director γ se define como se aprecia a continuación:

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} > 0. \quad (2.29)$$

En este caso el coseno director adquiere valores positivos y además se interpreta como una propagación de las ondas en las direcciones α y β . Así se reescribe la ecuación (2.24) del espectro usando la expresión (2.29), de la siguiente manera:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}\right]z}, \quad (2.30)$$

el cual es el caso que corresponde al fenómeno abordado.

2.4 Propagación del espectro angular a ángulos pequeños

Se puede reescribir la raíz en el exponente de la función de transferencia de la ecuación (2.30) para obtener una expresión más sencilla usando la consideración de que el vector de propagación \mathbf{k} forma un ángulo de θ_z respecto al eje z cuya magnitud es pequeña, de hasta aproximadamente $\frac{\pi}{12}$ rad (Hecht, 2000, p.447), y usando el teorema del binomio de Newton, el cual indica que, para una diferencia de términos elevada a un exponente, se tiene:

$$(x - b)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}b + \binom{n}{2}x^{n-2}b^2 \dots + b^n. \quad (2.31)$$

Considerando $x = 1$, $b = \alpha^2 + \beta^2$, $n = 1/2$ y desarrollando una aproximación con solo los dos primeros términos de la serie dada en (2.31) se obtiene:

$$[1 - (\alpha^2 + \beta^2)]^{1/2} \approx \binom{1/2}{0} 1^{\binom{1/2}{0}} - \binom{1/2}{1} 1^{\binom{1/2}{1}} (\alpha^2 + \beta^2). \quad (2.32)$$

Calculando los números combinatorios $\binom{1/2}{0}$ y $\binom{1/2}{1}$.

$$\binom{1/2}{0} = \frac{1/2!}{0! \binom{1/2-0}{0}!} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 1. \quad (2.33)$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2!}{1! \binom{1/2-1}{1}!} = \frac{1/2!}{1! \left(-\frac{1}{2}\right)!} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo los resultados dados en (2.33) y (2.34) en (2.32) se llega a la aproximación para ángulos pequeños

$$[1 - (\alpha^2 + \beta^2)]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2). \quad (2.35)$$

Reemplazando la ecuación (2.35) en la función del espectro propagado dada en (2.30), este queda definido de la siguiente manera:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} [1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)] = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\frac{\pi}{\lambda}z(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (2.36)$$

Reescribiendo la expresión (2.36) al introducir el número de onda en el primer factor y multiplicar el exponente del segundo factor por $\frac{\lambda}{\lambda} = 1$, para obtener las frecuencias espaciales dadas en (2.10) se genera la ecuación (2.37),

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) e^{ikz} e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) i\frac{\pi}{\lambda} z (\alpha^2 + \beta^2)} = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z \left[\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right]}. \quad (2.37)$$

Como se determinó anteriormente, el cociente de cada coseno director y la longitud de onda λ corresponde con las frecuencias espaciales u_n y v_n . Sin embargo, los cosenos directores α y β al considerarse ángulos pequeños pueden abordarse de acuerdo con la óptica paraxial de la siguiente forma:

$$\alpha = \cos \theta_x = \cos(\pi - \theta_z) = \sin \theta_z \approx \theta_z = \frac{x_z}{z}. \quad (2.38)$$

$$\beta = \cos \theta_y = \cos(\pi - \theta_z) = \sin \theta_z \approx \theta_z = \frac{y_z}{z}. \quad (2.39)$$

Dividiendo ambos lados de las ecuaciones (2.38) y (2.39) entre λ , se obtienen las frecuencias espaciales paraxiales u y v que quedan definidas a continuación:

$$u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x_z}{z\lambda}; \quad v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y_z}{z\lambda}. \quad (2.40)$$

Finalmente se reescribe el espectro angular propagado definido en (2.37) en términos de estas frecuencias paraxiales,

$$A(u, v, z) = A(u, v, 0) e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z [u^2 + v^2]}. \quad (2.41)$$

Obteniendo la transformada de Fourier inversa de la expresión (2.41), ver propiedad (A.14), se determina la forma explícita del campo eléctrico de las ondas difractadas y transferidas una distancia z ,

$$\mathfrak{F}^{-1}\{A(u, v, z)\} = e^{ikz} \mathfrak{F}^{-1}\{A(u, v, 0) e^{-i\pi\lambda z [u^2 + v^2]}\}. \quad (2.42)$$

Considerando que la transformada inversa de Fourier del espectro de difracción es igual al campo eléctrico difractado y de acuerdo con el teorema de la transformada de Fourier inversa de un producto de funciones, ver propiedad (A.22), el resultado de esta operación es igual a la convolución de sus transformadas inversas individuales (Zárate, 2011, p. 15), entonces la ecuación (2.42) quedaría expresada como:

$$E_z(x_z, y_z, z) = e^{ikz} E_0(x, y, z = 0) \otimes \mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z [u^2 + v^2]}\}. \quad (2.43)$$

Para obtener la transformada inversa de Fourier de la función exponencial se hace uso de la definición de la transformada inversa de Fourier para dos variables (Goodman, 2005, p.5), ver propiedad (A.15),

$$\mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(ux_z+vy_z)+[-i\pi\lambda z(u^2+v^2)]} dudv. \quad (2.44)$$

Separando las variables de integración se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\} = \\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ux_z - i\pi\lambda zu^2} du \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi vy_z - i\pi\lambda zv^2} dv \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

(Zarate, 2011, p.15) propuso resolver ambas integrales de la ecuación (2.45) mediante el uso del siguiente resultado integral dado por (Spiegel, 2014, p.113).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (2.46)$$

Para la primera integral en (2.45) se observa que $a = i\pi\lambda z$, $b = -i2\pi x_z$ y siendo u la variable independiente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi\lambda zu^2 + i2\pi x_z u} du = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi\lambda z}} e^{\frac{(-i2\pi x_z)^2}{4(i\pi\lambda z)}} = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{\frac{i\pi x_z^2}{\lambda z}}. \quad (2.47)$$

Análogamente, la segunda integral de (2.45) se realiza de la misma forma y bajo las siguientes consideraciones $a = i\pi\lambda z$, $b = -i2\pi y_z$ y siendo v la variable independiente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi\lambda zv^2 + i2\pi y_z v} dv = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{\frac{i\pi y_z^2}{\lambda z}}. \quad (2.48)$$

Entonces la transformada inversa de la función exponencial se obtiene mediante el producto de los dos resultados anteriormente determinados, por lo que sustituyendo (2.47) y (2.48) en (2.44),

$$\mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\} = \left(\frac{1}{i\lambda z}\right) e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x_z^2+y_z^2)}. \quad (2.49)$$

Sustituyendo (2.49) en la ecuación (2.43) del campo eléctrico difractado y propagado se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} E_0(x, y, z = 0) \otimes e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x_z^2 + y_z^2)} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} E_0(x, y,) \otimes e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}. \quad (2.50)$$

2.5 Difracción en la región de Fresnel

La difracción de Fresnel o de campo cercano se presenta si la fuente luminosa puntual, la pantalla o ambas se ubican cerca del plano xy , que es aquel que contiene la abertura difractora. En este tipo de difracción se obtiene sobre la pantalla de distribución un espectro cuya forma no difiere mucho de la geometría de la abertura utilizada y que está acompañado por unas pequeñas franjas en su periferia; además conforme se aleje esta pantalla del objeto difractor, el espectro presentara una mayor estructura y las franjas se volverán más prominentes, pero debe considerarse que si la pantalla esta muy lejos de la abertura, entonces la fuente debe colocarse cerca de esta ultima o disminuir la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$, de lo contrario ocurriria la difraccion de Fraunhofer (Hecht, 2000, pp.445-447).

Se conoce como región o zona de Fresnel al espacio geométrico, cuya distancia z medida desde el plano difractor xy hasta el plano de distribución $x_z y_z$ se encuentra dentro del intervalo $0 < z < \infty$; es decir, que la pantalla en la que se observa el espectro nunca se posiciona ópticamente en el infinito, ya que esa región corresponde a la zona de Fraunhofer (Ersoy, 2007, p. 63).

Para obtener la integral de difracción de Rayleigh-Sommerfeld dada por (Goodman, 2005, p. 74); (Zarate, 2011, p. 17) propone escribir explícitamente la integral correspondiente a la convolución (2.50), ver propiedad (A.1), realizando un desplazamiento de las variables $x_z y_z$ en un espacio xy , así se obtiene (2.51),

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \dots \dots e^{-i2\pi(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y)} dx dy, \quad (2.51)$$

la cual es equivalente a la transformada de Fourier del campo eléctrico inmediatamente después de la abertura difractora $E_0(x, y)$ multiplicando al factor de Fresnel $e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)}$.

Igualmente, fuera de la integral intervienen un factor $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}$ que se interpreta como un factor cuadrático que indica que la fase es una distribución esférica de las ondas propagadas hasta el plano $x_z y_z$, y el factor de propagación e^{ikz} ; el cual permite una transferencia del campo difractado $E_0(x, y)$ una distancia z . Reescribiendo (2.51) como una transformada de Fourier bidimensional en términos de las frecuencias espaciales paraxiales que están dadas como lo indica la ecuación (2.40), se tiene:

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)} \mathfrak{F} \left\{ E_0(x, y) e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \right\}_{u=\frac{x_z}{z\lambda}, v=\frac{y_z}{z\lambda}}. \quad (2.52)$$

No obstante, la amplitud del campo eléctrico puede reescribirse de acuerdo con la expresión (2.1) en términos de la función de transmitancia $t(x, y)$ y $E_{itum} = cte$; además realizando algunos desarrollos matemáticos y de acuerdo con el teorema de convolución, la transformada de Fourier del producto de funciones, es la convolución de las transformadas de Fourier individuales de cada función (Gaskill, 1978, p. 197), ver propiedad (A.23), así se llega a la expresión siguiente:

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{E_{itum} e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)} \left[\mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\right\} \right]. \quad (2.53)$$

Por otro lado, la transformada de Fourier del factor de Fresnel, es decir, $e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$ da como resultado $\mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\right\} = z\lambda i e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)}$, con lo cual el factor entre paréntesis de la ecuación (2.53) se interpreta como la transformada de Fourier de la función de transmitancia convolucionando con la función $z\lambda i e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)}$, lo que genera (2.54).

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{E_{itum} e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)} \left[\mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes z\lambda i e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \right]. \quad (2.54)$$

2.6 Difracción en la región de Fraunhofer

La difracción de Fraunhofer o de campo lejano ocurre siempre que la fuente y la pantalla en la que se distribuye el espectro están lo suficientemente distantes del objeto difractor (Malacara, 2015, p. 286). En este tipo de difracción el patrón obtenido estará extendido

presentando poco o nada de parecido con la geometría de la abertura, además al mover la pantalla únicamente habrá variación en el tamaño de la distribución y no en su forma. Para obtener mejores resultados en la difracción de Fraunhofer se recomienda aumentar la longitud de onda $\lambda \rightarrow \infty$ para que la fuente luminosa parezca ópticamente en el infinito (Hecht, 2000, p. 446), no obstante, esto puede resultar complicado ya que usualmente no se tiene control sobre ese parámetro, por lo que (Malacara, 2005, p. 85) propone emplear una lente que produzca frentes de onda planos para dicho propósito; no obstante en este trabajo de tesis únicamente se producirá la difracción de Fraunhofer colocando la pantalla de distribución muy alejada respecto al plano que contiene el objeto difractor.

De acuerdo con (Zárate, 2011, p.19) se define la región o zona de Fraunhofer como aquella en la cual se cumple la condición de que la distancia z que separa el plano objeto xy y el plano de distribución $x_z y_z$ sea lo suficientemente grande como para considerar que el patrón de difracción se distribuye ópticamente en el infinito; es decir $z \rightarrow \infty$.

Usando nuevamente la ecuación (2.50) como punto de partida, (Ersoy, 2007, pp. 74-75) propone determinar el campo eléctrico correspondiente a la zona de Fraunhofer, colocando dentro de la integral todas las funciones exponenciales, esto con el propósito de facilitar su análisis,

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \dots \dots e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} e^{-i2\pi(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y)} dx dy. \quad (2.55)$$

Simplificando (2.55) se obtiene lo siguiente,

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}[(x_z^2 + y_z^2) + (x^2 + y^2)]} \dots \dots e^{-i2\pi(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y)} dx dy. \quad (2.56)$$

Por otro lado, para escribir el factor de la transformada, es decir $e^{-i2\pi(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y)}$ como uno de los factores que multiplica a $\frac{ik}{2z}$, es necesario multiplicar su exponente, es decir

$-i2\pi\left(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y\right)$, por el factor $\frac{2z}{ik}$ para que no se vea afectado su valor, tal como se aprecia en (2.57),

$$e^{\frac{ik}{2z}\left[-i2\pi\left(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y\right)\left(\frac{2z}{ik}\right)\right]} = e^{\frac{ik}{2z}\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z}\left(\frac{2z}{ik}\right)(x_zx + y_z y)\right]} = e^{\frac{ik}{2z}\left[-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{2}{k}\right)(x_zx + y_z y)\right]}. \quad (2.57)$$

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Malacara, 2015, p.209), entonces se reescribe el lado derecho de (2.57).

$$e^{\frac{ik}{2z}\left[-i2\pi\left(\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y\right)\left(\frac{2z}{ik}\right)\right]} = e^{\frac{ik}{2z}\left[-2(x_zx + y_z y)\right]}. \quad (2.58)$$

Sustituyendo (2.58) en (2.56) se obtiene la siguiente expresión,

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}[(x_z^2 + y_z^2) + (x^2 + y^2)]} \dots \\ \dots e^{\frac{ik}{2z}[-2(x_zx + y_z y)]} dx dy. \quad (2.59)$$

Simplificando, resulta la ecuación (2.60),

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} \dots \\ \dots e^{\frac{ik}{2z}[(x_z^2 + y_z^2) + (x^2 + y^2) - 2(x_zx + y_z y)]} dx dy. \quad (2.60)$$

Por el trinomio cuadrado perfecto, $(x_z^2 + y_z^2) + (x^2 + y^2) - 2(x_zx + y_z y) = (x - x_z)^2 + (y - y_z)^2$, sin embargo para la condición de Fraunhofer se debe cumplir que $z \rightarrow \infty$, entonces $x_z \gg x$ y $y_z \gg y$, además por ser una función par $(-x_z)^2 = x_z^2$, lo mismo que para $(-y_z)^2 = y_z^2$, así (2.60) se reescribe como:

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} \dots \\ \dots e^{\frac{ik}{2z}[(x_z^2 + y_z^2) - 2(x_zx + y_z y)]} dx dy. \quad (2.61)$$

Escribiendo (2.61) en términos de las frecuencias espaciales paraxiales u y v se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \dots \dots e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (2.62)$$

Colocando fuera de la integral los factores que no dependen de x e y , se aprecia que la expresión (2.62) corresponde a la transformada de Fourier bidimensional en términos de las frecuencias espaciales paraxiales, es decir:

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda z} \mathfrak{F}\{E_0(x, y)\}_{u=\frac{x_z}{z\lambda}, v=\frac{y_z}{z\lambda}}, \quad (2.63)$$

donde $E_0(x, y) = E_{itum} t(x, y)$ como lo indica la ecuación (2.1). Realizando algunos procedimientos matemáticos el campo de difracción en la zona de Fraunhofer finalmente es el siguiente:

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = E_{itum} \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda z} \mathfrak{F}\{t(x, y)\}_{u=\frac{x_z}{z\lambda}, v=\frac{y_z}{z\lambda}}. \quad (2.64)$$

CAPÍTULO 3

MODELOS DE DIFRACCIÓN GENERADOS CON DOS ABERTURAS DE TRANSMITANCIAS ESPECÍFICAS

En este capítulo se presentan los desarrollos teóricos para obtener la función del espectro de difracción en distribución de intensidad para cada objeto difractor de geometría específica, en las regiones de Fresnel y de Fraunhofer, partiendo de la función de transmitancia asociada a la forma de la abertura difractora, por lo cual se hará uso de las funciones matemáticas rectángulo y círculo, a las que posteriormente se les determinara su transformada de Fourier o de Fourier-Bessel, según sea el caso.

3.1 Espectro de difracción producido por un par de aberturas rectangulares

El primer objeto difractor empleado está compuesto por dos aberturas de geometría rectangular o rendijas; ambas idénticas y con las siguientes dimensiones lineales: ancho l_x , altura l_y y espesor pequeño l_z , siendo esta última magnitud despreciable. Estas aberturas rectangulares están separadas entre si una distancia $2d$.

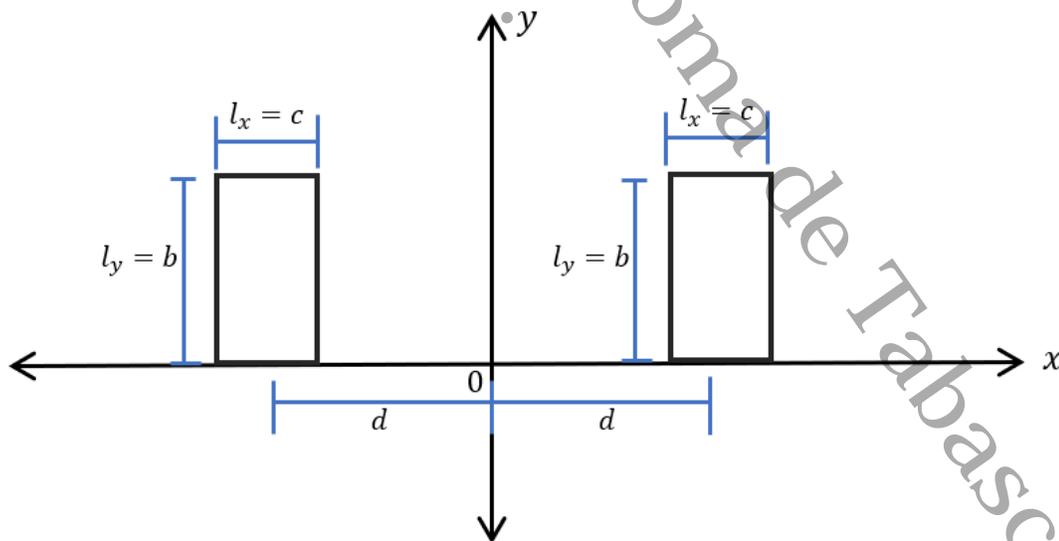


Figura 3.1 Primer objeto difractor compuesto por dos aberturas rectangulares desplazadas.

La función de transmitancia $t(x, y)$ asociada al objeto difractor queda definida de acuerdo con el esquema de la Figura 3.1, como una combinación lineal de dos funciones rectángulo, es decir,

$$t(x, y) = ret_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right) + ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right), \quad (3.1)$$

donde d es la distancia que las aberturas están desplazadas en el eje x respecto al origen, c es su ancho y b es su altura; además, de acuerdo con la definición matemática de la función rectángulo planteada por (Gaskill, 1978, p.42), se tiene:

$$ret_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left|\frac{x-d}{c}\right| < \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \left|\frac{x-d}{c}\right| = \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } \left|\frac{x-d}{c}\right| > \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left|\frac{x+d}{c}\right| < \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \left|\frac{x+d}{c}\right| = \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } \left|\frac{x+d}{c}\right| > \frac{1}{2}, \left|\frac{y}{b}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.3) corresponden a las funciones rectángulo que se encuentran desplazadas hacia $+x$ (derecha) y $-x$ (izquierda), respectivamente.

3.1.1 Región de Fresnel

De acuerdo con la ecuación (2.54) el campo eléctrico $E_z(x_z, y_z, z)$ difractado y propagado en la región de Fresnel, se determina mediante la convolución de las transformadas de Fourier de dos funciones, siendo una de ellas la que corresponde a la función de transmitancia $t(x, y)$ y la otra al factor de Fresnel $e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$, por lo tanto, a continuación, se determinará $\mathfrak{F}\{t(x, y)\}$ donde $t(x, y)$ esta dada en la ecuación (3.1).

Por definición de la transformada de Fourier y el teorema de linealidad, ver propiedad (A.12), se tiene que:

$$\mathfrak{S}\left\{ret_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right) + ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right)\right\} = \mathfrak{S}\left\{rect_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right)\right\} + \mathfrak{S}\left\{ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right)\right\}. \quad (3.4)$$

Debido al teorema de desplazamiento, ver propiedad (A.17) y al teorema de escalamiento, ver propiedad (A.18), la ecuación (3.4) se reescribe como,

$$\mathfrak{S}\left\{ret_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right) + ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right)\right\} = cb e^{-i2\pi du} G(cu, bv) + cb e^{i2\pi du} G(cu, bv). \quad (3.5)$$

De acuerdo con (Goodman, 2005, p. 14), la transformada de Fourier de la función rectángulo es la función seno cociente,

$$G(u, v) = \mathfrak{S}\{ret(x, y)\} = \left(\frac{1}{\pi u}\right) \left(\frac{1}{\pi v}\right) sen(\pi u, \pi v) = sinc(u, v). \quad (3.6)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (3.6) en (3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\left\{ret_1\left(\frac{x-d}{c}, \frac{y}{b}\right) + ret_2\left(\frac{x+d}{c}, \frac{y}{b}\right)\right\} &= cbe^{-i2\pi du} sinc(cu, bv) + \dots \\ &\dots cbe^{i2\pi du} sinc(cu, bv). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Luego, se puede escribir la ecuación del campo difractado y propagado (2.56) de acuerdo con (3.7) como,

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z, z) &= z\lambda i \frac{E_{ilum} e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[\left(cbe^{-i2\pi du} sinc(cu, bv) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots cbe^{i2\pi du} sinc(cu, bv) \right) \otimes e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la convolución, ver propiedad (A.4), en la ecuación (3.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z, z) &= E_{ilum} e^{ikz} cbe^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[e^{-i2\pi du} sinc(cu, bv) \otimes e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots e^{i2\pi du} sinc(cu, bv) \otimes e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la convolución, ver expresión (A.2), en la ecuación (3.9) se determina,

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z, z) &= E_{ilum} cbe^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} \otimes e^{-i2\pi du} sinc(cu, bv) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} \otimes e^{i2\pi du} sinc(cu, bv) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1.1.1 Realización de la primera operación de convolución

Realizando la primera convolución de la ecuación (3.10) usando como variables de desplazamiento β y γ , que corresponden al espacio de frecuencias paraxiales u y v y el concepto de integral de convolución, ver definición (A.1), se obtiene:

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{-i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda(\beta^2+\gamma^2)} e^{-i2\pi d(u-\beta)} \text{sinc}(c(u-\beta), b(v-\gamma)) d\beta d\gamma. \quad (3.11)$$

Luego de distribuir los términos de las exponenciales de manera conveniente, la parte derecha de la ecuación (3.11) se reescribe como,

$$e^{-i2\pi du} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda(\beta^2)+i2\pi d(\beta)} \text{sinc}[c(u-\beta)] d\beta \right] \dots \dots \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda(\gamma^2)} \text{sinc}[b(v-\gamma)] d\gamma \right]. \quad (3.12)$$

Separando integrales se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\beta^2+i2\pi d\beta} \text{sinc}(c(u-\beta)) d\beta, \quad (3.13)$$

y también

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\gamma^2} \text{sinc}(b(v-\gamma)) d\gamma. \quad (3.14)$$

PRIMERA INTEGRAL: A continuación, se presenta el desarrollo para la realización de la primera integral, es decir la que está dada por la ecuación (3.13) con variable de integración β utilizando el método de integración por partes, de acuerdo con el cual,

$$\int g dh = gh - \int h dg. \quad (3.15)$$

Haciendo que la variable g sea:

$$g = \text{sinc}(c(u-\beta)) = \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{\pi c(u-\beta)}, \quad (3.16)$$

donde su diferencial puede expresarse por fines prácticos de la siguiente manera,

$$dg = d[\text{sinc}(c(u-\beta))] = d\left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{\pi c(u-\beta)}\right]. \quad (3.17)$$

Por otro lado,

$$h = \int e^{-i\pi z \lambda \beta^2 + i2\pi d \beta} d\beta. \quad (3.18)$$

Esta expresión puede resolverse usando el siguiente resultado integral (Spiegel, 2014, p.113),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \beta^2 - s\beta} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{s^2}{4\alpha}}, \quad (3.19)$$

donde haciendo el cambio de variable $\alpha = i\pi z \lambda$ y $s = -i2\pi d$, el resultado de la integral (3.18) es el siguiente,

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{(-i2\pi d)^2}{4i\pi z \lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}}. \quad (3.20)$$

Luego, la integral por partes (3.15) se reescribe sustituyendo las expresiones (3.16), (3.17) y (3.20),

$$\int g dh = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}} \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{\pi c(u-\beta)} \right]_{-\infty}^{\infty} - \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} d \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{\pi c(u-\beta)} \right]. \quad (3.21)$$

El primer término del miembro derecho de la ecuación (3.21) es cero, ya que de acuerdo con un análisis de límites siguiendo lo planteado por (Stewart, 2012, pp.136-140)

$\lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{\pi c(u-\beta)} = 0$; quedando únicamente:

$$\int g dh = - \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi c} d \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{(u-\beta)} \right]. \quad (3.22)$$

Derivando la función seno cociente se reescribe (3.22) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \int g dh &= - \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi c} \left[\frac{(u-\beta) \cos(\pi c(u-\beta)) (-\pi c d \beta)}{(u-\beta)^2} \right] \dots \\ &\dots \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi c} \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta)) (d\beta)}{(u-\beta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cambiando los límites de integración y factorizando la raíz (3.23) se reescribe como,

$$\int g dh = -\sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \left\{ \frac{2}{\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(\pi c(u-\beta))(-\pi c d \beta)}{(u-\beta)} \right] + \frac{2}{\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))(d\beta)}{(u-\beta)^2} \right] \right\}. \quad (3.24)$$

Realizando la primera integral de la ecuación (3.24) por partes, usando la representación,

$$\int k dn = kn - \int ndk, \quad (3.25)$$

en donde haciendo que

$$k = \frac{1}{(u-\beta)} \quad dk = \frac{1}{(u-\beta)^2} d\beta, \quad (3.26)$$

mientras que

$$n = \int dn = \int \cos(\pi c(u-\beta))(-\pi c d\beta) = \text{sen}(\pi c(u-\beta)). \quad (3.27)$$

Por lo tanto, la primera integral de la ecuación (3.24) se reescribe de acuerdo con las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27), además se sabe que la función seno cociente evaluada en infinito es cero, de acuerdo con lo planteado por (Stewart, 2012, pp.136-140), así se obtiene el siguiente resultado,

$$\begin{aligned} \int k dn &= \left. \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{(u-\beta)} \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{(u-\beta)^2} d\beta = \\ &= -\frac{\text{sen}(\pi c(u))}{(u)} - \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{(u-\beta)^2} d\beta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sustituyendo la ecuación (3.28) en la ecuación (3.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int g dh &= -\sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \left\{ \frac{-2 \text{sen}(\pi c u)}{(u)} - \frac{2}{\pi c} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta))}{(u-\beta)^2} d\beta + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{2}{\pi c} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi c(u-\beta)) d\beta}{(u-\beta)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Debido a que se cancelan términos la expresión se reduce, quedando únicamente:

$$\int g dh = 2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \frac{\text{sen}(\pi c u)}{\pi c u} = 2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu). \quad (3.30)$$

SEGUNDA INTEGRAL: A continuación, se presenta el desarrollo para la realización de la segunda integral, es decir la que está dada por la ecuación (3.14) con variable de integración γ ; de acuerdo con la definición (A.1), se tiene:

$$e^{-i\pi z\lambda(v^2)} \otimes \text{sinc}(bv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\gamma^2} \text{sinc}(b(v-\gamma)) d\gamma. \quad (3.31)$$

Utilizando nuevamente el método de integración por partes; se propone:

$$\int ndm = nm - \int mdn. \quad (3.32)$$

Haciendo que,

$$n = \text{sinc}(b(v-\gamma)) = \frac{\text{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)}, \quad (3.33)$$

entonces,

$$dn = d[\text{sinc}(b(v-\gamma))] = d\left[\frac{\text{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)}\right]. \quad (3.34)$$

Mientras que para m , se tiene:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\gamma^2} d\gamma = 2 \int_0^{\infty} \cos(\pi z\lambda\gamma^2) d\gamma - 2i \int_0^{\infty} \text{sen}(\pi z\lambda\gamma^2) d\gamma. \quad (3.35)$$

Por conveniencia se realizará un cambio de variable en las integrales de (3.35) haciendo

que $t = \pi z\lambda\gamma^2 \Rightarrow \gamma = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi z\lambda}}$, también $d\gamma = \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi z\lambda}}$, además, en el caso en que $\gamma \rightarrow \infty$, implica que $t \rightarrow \infty$, de manera similar cuando $\gamma \rightarrow 0$, implica que $t \rightarrow 0$, así se obtiene,

$$m = \frac{2}{2\sqrt{\pi z\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt - \frac{2i}{2\sqrt{\pi z\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt. \quad (3.36)$$

Las integrales de (3.36) pueden resolverse de manera independiente utilizando los siguientes resultados propuestos por (Spiegel, 2014, p.111) en donde la expresión $\Gamma(p)$ es la función Gamma de p ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \text{ para } 0 \leq p < 1, \quad (3.37)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\text{sen}\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \text{ para } 0 \leq p < 1. \quad (3.38)$$

Sustituyendo (3.36) en las ecuaciones (3.37) y (3.38) para cada caso, se tienen los siguientes resultados,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi z\lambda}} \left[\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right], \text{ para } 0 \leq \frac{1}{2} < 1, \quad (3.39)$$

$$\frac{i}{\sqrt{\pi z\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{i}{\sqrt{i\pi z\lambda}} \left[\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right], \text{ para } 0 \leq \frac{1}{2} < 1, \quad (3.40)$$

como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (Spiegel, 2014, p.4), además de que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Spiegel, 2014, p.45), las ecuaciones (3.39) y (3.40), se reducen a las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z \lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{z \lambda}} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (3.41)$$

$$\frac{i}{\sqrt{\pi z \lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{i}{\sqrt{\pi} \sqrt{z \lambda}} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{i}{\sqrt{z \lambda}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{i}{\sqrt{z \lambda}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (3.42)$$

Con base en las ecuaciones (3.41) y (3.42) la ecuación (3.36) se escribe en la forma,

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z \lambda \gamma^2} d\gamma = \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{i}{\sqrt{z \lambda}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right). \quad (3.43)$$

Reescribiendo la cantidad compleja entre paréntesis usando su representación exponencial, se obtiene esta simplificación:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}} = \left(e^{\frac{-\pi i}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = (i^i)^{\frac{1}{2}} = (i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{i}}. \quad (3.44)$$

Así, se llega al siguiente resultado para m :

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z \lambda \gamma^2} d\gamma = \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \frac{1}{\sqrt{i}}. \quad (3.45)$$

Uniendo las ecuaciones (3.33) y las ecuaciones (3.34) y (3.45), como indica la integral por partes de la expresión (3.32) se determina,

$$\int ndm = \frac{1}{\sqrt{z \lambda i}} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{z \lambda i}} \int_{-\infty}^{\infty} d \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)} \right]. \quad (3.46)$$

Sin embargo, como se señaló anteriormente $\lim_{\gamma \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)} = 0$, entonces se cancela el primer término de (3.46) quedando en la forma siguiente,

$$\int ndm = -\frac{1}{\sqrt{z \lambda i}} \int_{-\infty}^{\infty} d \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi b(v-\gamma))}{\pi b(v-\gamma)} \right]. \quad (3.47)$$

El proceso para resolver dicha integral es similar al ejecutado a partir de la ecuación (3.22) a la (3.30); resultado:

$$\int ndm = 2 \frac{1}{\sqrt{z \lambda}} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\operatorname{sen}(\pi b v)}{\pi b v} = 2 \frac{1}{\sqrt{z \lambda i}} \operatorname{sinc}(b v). \quad (3.48)$$

Finalmente, el resultado de la segunda integral, dada por (3.31), de acuerdo con la ecuación (3.48) es,

$$e^{-i\pi z\lambda(v^2)} \otimes \text{sinc}(bv) = 2 \frac{1}{\sqrt{z\lambda i}} \text{sinc}(bv). \quad (3.49)$$

Ahora, reuniendo los resultados (3.30) y (3.49) en la ecuación (3.11) se obtiene finalmente el resultado de la primera convolución,

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{-i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = e^{-i2\pi du} \left(2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu) \right) \left(2 \frac{1}{\sqrt{z\lambda i}} \text{sinc}(bv) \right), \quad (3.50)$$

que al simplificarse se tiene:

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{-i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = \frac{4}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} e^{-i2\pi du} (\text{sinc}(cu, bv)). \quad (3.51)$$

3.1.1.2 Realización de la segunda operación de convolución

Un tratamiento similar al de la convolución anterior puede emplearse para resolver este caso originalmente planteado en la ecuación (3.10) y retomado en esta sección como la expresión (3.52), ya que, si se comparan la primera y segunda convolución, es decir la parte derecha de (3.11) con (3.52) la única diferencia se encuentra en el signo del exponente de uno de los factores. Como en el caso anterior, a continuación, se escribe explícitamente la convolución ver la definición (A.1), pero ahora se emplean como variables de desplazamiento δ y ρ , que guardan correspondencia con el espacio de frecuencias paraxiales u y v ,

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda(\delta^2+\rho^2)} e^{i2\pi d(u-\delta)} \text{sinc}(c(u - \dots \delta), b(v - \rho)) d\delta d\rho. \quad (3.52)$$

La doble integral de la ecuación (3.52) se puede escribir en la forma,

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = e^{i2\pi du} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\delta^2 - i2\pi d\delta} \text{sinc}(c(u - \dots \delta)) d\delta \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\rho^2} \text{sinc}(b(v - \rho)) d\rho \right]. \quad (3.53)$$

PRIMERA INTEGRAL: Utilizando el método de integración por partes para resolver la primera integral de la ecuación (3.53), esto es, haciendo uso de la siguiente formulación,

$$\int odp = op - \int pdo. \quad (3.54)$$

Haciendo que

$$o = \text{sinc}(c(u - \delta)) = \frac{\text{sen}(\pi c(u - \delta))}{\pi c(u - \delta)}, \quad (3.55)$$

donde el diferencial do , se escribe por fines prácticos de la siguiente manera,

$$do = d[\text{sinc}(c(u - \delta))] = d\left[\frac{\text{sen}(\pi c(u - \delta))}{\pi c(u - \delta)}\right]. \quad (3.56)$$

Por otro lado, para la variable p ,

$$p = \int e^{-i\pi z\lambda\delta^2 - i2\pi d\delta} d\delta. \quad (3.57)$$

La integral (3.57) se resuelve usando el resultado propuesto por (Spiegel, 2014, p.113) y planteado en la ecuación (3.19), pero a diferencia de la primera convolución, ahora se propone que $\alpha = i\pi z\lambda$ y $s = i2\pi d$, entonces se obtiene:

$$p = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z\lambda}} e^{\frac{(i2\pi d)^2}{4i\pi z\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}}. \quad (3.58)$$

Luego, la integral por partes (3.54) se reescribe usando (3.55), (3.56) y (3.58),

$$\int odp = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \left[\frac{\text{sen}(\pi c(u - \delta))}{\pi c(u - \delta)}\right]_{-\infty}^{\infty} - \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} d\left[\frac{\text{sen}(\pi c(u - \delta))}{\pi c(u - \delta)}\right]. \quad (3.59)$$

Esta integral es idéntica a la planteada (3.21) por lo tanto el resultado puede obviarse y de acuerdo con (3.30) se obtiene:

$$\int odp = 2\sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \frac{\text{sen}(\pi cu)}{\pi cu} = 2\sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu). \quad (3.60)$$

SEGUNDA INTEGRAL: Ahora, para completar la segunda convolución debe resolverse la segunda integral de la ecuación (3.52), misma que se escribe explícitamente a continuación, ver definición (A.1), con variable de integración ρ ,

$$e^{-i\pi z\lambda(v^2)} \otimes \text{sinc}(bv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\rho^2} \text{sinc}(b(v - \rho)) d\rho. \quad (3.61)$$

Por observación resulta evidente que la integral de la ecuación (3.61) es idéntica a la integral (3.31) por lo que de nuevo puede obviarse el resultado y de acuerdo con (3.49) se tiene que:

$$e^{-i\pi z\lambda(v^2)} \otimes \text{sinc}(bv) = \frac{2}{\sqrt{z\lambda i}} \text{sinc}(bv). \quad (3.62)$$

Ahora, reuniendo los resultados (3.60) y (3.62) tal como lo indica la expresión (3.53), se obtiene el resultado final de la segunda convolución, el cual es:

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = e^{i2\pi du} \left[2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu) \right] \left[\frac{2}{\sqrt{z\lambda i}} \text{sinc}(bv) \right], \quad (3.63)$$

que al simplificarse genera la expresión:

$$e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \otimes e^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) = 4e^{i2\pi du} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \frac{1}{iz\lambda} \text{sinc}(cu, bv). \quad (3.64)$$

3.1.1.3 Distribución de amplitud del campo difractado obtenido sumando los resultados de ambas convoluciones

Ahora, la distribución de amplitud de las ondas difractadas y propagadas una distancia $0 < z < \infty$ desde el plano objeto, se determina sustituyendo las ecuaciones (3.51) y (3.64) en (3.10), obteniéndose de esta forma,

$$E_z(x_z, y_z, z) = E_{ilum} c b e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left\{ \frac{4}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} e^{-i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) + \dots \dots \frac{4}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} e^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) \right\}. \quad (3.65)$$

Factorizando

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{4cbE_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu, bv) (e^{-i2\pi du} + e^{i2\pi du}). \quad (3.66)$$

Por identidad trigonométrica se obtiene,

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{8cbE_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu, bv) \cos(2\pi du). \quad (3.67)$$

donde x_z, y_z puede reescribirse en términos de frecuencias espaciales paraxiales u, v en la forma $uz\lambda = x_z$ y $vz\lambda = y_z$, quedando:

$$G_z(u, v, z) = \frac{8cbE_{ilum}e^{ikz}e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)}}{iz\lambda} e^{\frac{i\pi d^2}{z\lambda}} \text{sinc}(cu, bv) \cos(2\pi du). \quad (3.68)$$

La ecuación (3.68) se interpreta de la siguiente forma: en la región o zona de Fresnel, la distribución de la amplitud del campo difractado y distribuido en el espacio de frecuencias paraxiales u, v , sigue siendo un campo eléctrico. De acuerdo con el primer factor exponencial, este campo se ha desplazado una distancia z desde el objeto. Además, su fase se distribuye en una esfera, como se indica en el segundo factor exponencial. Está desfasado en $\frac{\pi}{2}$, lo que se refleja en el factor $\frac{1}{i}$. La forma de esta distribución se describe mediante el producto triple de funciones de la ecuación mencionada. Al obtener la parte real de la ecuación (3.68), se genera la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} [G_z(u, v, z)]_{real} &= \frac{8cbE_{ilum}}{z\lambda} \cos(kz) \cos(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \cos\left(\frac{\pi d^2}{z\lambda}\right) \dots \\ &\dots \text{sinc}(cu, bv) \cos(2\pi du) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde el factor $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, correspondiente al desfase, es el responsable de que la ecuación (3.69) sea igual a cero, lo cual no tiene correspondencia con el fenómeno físico estudiado, pues esto implicaría que no existe una distribución de amplitud del campo eléctrico. Por otra parte, al obtener la parte imaginaria de la ecuación (3.68) se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} [G_z(u, v, z)]_{imag} &= \frac{8cbE_{ilum}}{z\lambda} \text{sen}(kz) \text{sen}(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \text{sen}\left(\frac{\pi d^2}{z\lambda}\right) \dots \\ &\dots \text{sinc}(cu, bv) \cos(2\pi du) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Por otro lado, la distribución de intensidad se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$I(u, v, z) = |G_z(u, v, z)|^2. \quad (3.71)$$

Al aplicar (3.71) en la distribución de amplitud dada por (3.70) se obtiene:

$$\begin{aligned} [I(u, v, z)]_{imag} &= \left(\frac{8cbE_{ilum}}{z\lambda}\right)^2 \text{sen}^2(kz) \text{sen}^2\left(\frac{\pi d^2}{z\lambda}\right) \dots \\ &\dots \text{sen}^2(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \text{sinc}^2(cu, bv) \cos^2(2\pi du). \end{aligned} \quad (3.72)$$

La ecuación (3.72) se interpreta como la intensidad del espectro de difracción en la zona de Fresnel, mediante un análisis se observa que interviene un triple producto de funciones, en el cual se propone que la función $\text{sen}^2(\pi\lambda z(u^2 + v^2))$ sea moduladora generando una zona central oscura con líneas de alta intensidad luminosa a los costados; mientras que la función modulada, seno cociente al cuadrado $\text{sinc}^2(cu, bv)$, es la responsable de resaltar la intensidad lumínica de únicamente ciertas líneas principales, que se visualizaran como dos lóbulos brillantes. Finalmente, se plantea que, debido a la función modulada, coseno cuadrado $\text{cos}^2(2\pi du)$, existirán franjas de interferencia de Young al interior de los dos lóbulos luminosos anteriormente descritos. Por otra parte, es necesario mencionar que $\left(\frac{8cbE_{ilum}}{z\lambda}\right)^2$ influye como un factor de escala en el espectro de difracción en distribución de intensidad.

3.1.2 Región de Fraunhofer

Para el caso de Fraunhofer se parte de la ecuación (2.64), en la cual el campo difractado y propagado $z \rightarrow \infty$, se define como la amplitud E_{ilum} , factor de propagación e^{ikz} y el factor cuadrático de fase $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$ que multiplican a la transformada de Fourier de la función de transmitancia, misma que ya fue especificada anteriormente en la ecuación (3.7); por lo que E_z quedaría definida de la siguiente manera.

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda z} [cbe^{-i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv) + \dots cbe^{i2\pi du} \text{sinc}(cu, bv)] \quad (3.73)$$

Factorizando (3.73) se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} cbe^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i\lambda z} [\text{sinc}(cu, bv)(e^{-i2\pi du} + e^{i2\pi du})] \quad (3.74)$$

Reescribiendo la expresión anterior, por identidad trigonométrica y en términos de frecuencias espaciales paraxiales u, v , usando $uz\lambda = x_z$ y $vz\lambda = y_z$ para una mejor interpretación del factor $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$, queda la siguiente expresión:

$$G_z(u, v, z \rightarrow \infty) = \frac{2cbE_{ilum}e^{ikz}e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)}}{i\lambda z} [\text{sinc}(cu, bv) \cos(2\pi du)]. \quad (3.75)$$

Esta ecuación se interpreta como el espectro de difracción en la zona o región de Fraunhofer, en la que el factor e^{ikz} implica que este se encuentra desplazado una distancia z respecto al origen, por otro lado, el exponente del segundo factor $e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)}$ indica que el espectro se distribuye en una esfera y debido al factor $\frac{1}{i}$ está desfasado $\frac{\pi}{2}$. Mientras que el producto de las dos funciones supone que una modula a la otra y puede realizarse un análisis sencillo de dicha situación. Sustituyendo (3.75) en la ecuación (3.71) para determinar la irradiancia, se obtiene:

$$I(u, v, z \rightarrow \infty) = \left(\frac{2cbE_{ilum}}{z\lambda}\right)^2 \text{sinc}^2(cu, bv) \cos^2(2\pi du). \quad (3.76)$$

Para la ecuación (3.76) se propone la siguiente interpretación, la función moduladora es $\text{sinc}^2(cu, bv)$, lo cual genera un máximo de intensidad luminosa central y lóbulos secundarios a los costados, que en su interior contienen franjas de interferencia de Young correspondientes a la función $\cos^2(2\pi du)$ que es modulada.

3.2 Espectro de difracción producido por un par de aberturas circulares

El segundo objeto difractor empleado está compuesto por dos aberturas de geometría circular de radio c , separadas entre si una distancia $2l$ como se muestra en la Figura 3.2 y de espesor l_z , que al ser tan pequeño puede despreciarse.

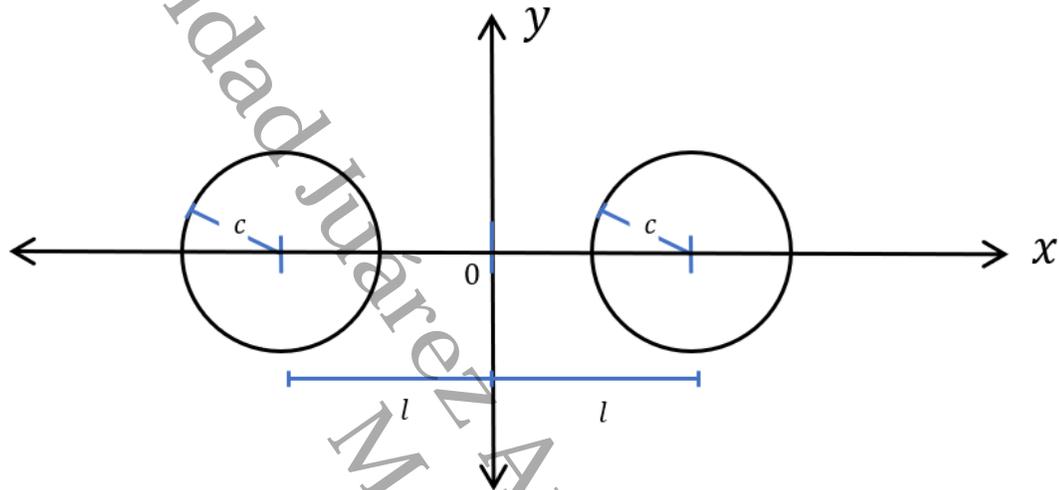


Figura 3.2 Segundo objeto difractor compuesto por dos aberturas circulares del mismo radio y desplazadas.

La función de transmitancia $t(x, y)$, queda definida de acuerdo con el esquema de la Figura 3.2, en la forma indicada a continuación:

$$t(x, y) = circ_1\left(\frac{r-l}{c}\right) + circ_2\left(\frac{r+l}{c}\right), \quad (3.77)$$

donde $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Además, las funciones circulo están desplazadas una distancia l en el eje x respecto al origen. De acuerdo con la definición matemática de la función circulo (Gaskill, 1978, p.71), se obtiene que:

$$circ\left(\frac{r-l}{c}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } r-l \leq c \\ 0, & \text{si } r-l > c \end{cases} \quad (3.78)$$

$$circ\left(\frac{r+l}{c}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } r+l \leq c \\ 0, & \text{si } r+l > c \end{cases} \quad (3.79)$$

3.2.1 Región de Fresnel

En el caso específico del objeto difractor antes referido, el campo eléctrico $E_z(x_z, y_z, z)$ difractado y propagado en la región de Fresnel, se determina mediante la convolución de la transformada de Fourier del factor de Fresnel $e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$ y la transformada de Fourier Bessel de la función de transmitancia, ya que de acuerdo con (Gaskill, 1978, pp. 317-319), para una función $g(r)$ debe realizarse la transformada de Fourier Bessel $\mathcal{B}\{g(r)\}$ que resulta análoga a la transformada de Fourier convencional pero para sistemas de geometría circular. Por lo tanto, a continuación, se determinará $\mathcal{B}\{g(r)\}$ y después de obtener dicho resultado se realizará la convolución de los factores.

Por definición de la transformada de Fourier Bessel y el teorema de linealidad, ver propiedades (A.10) y (A.12), se tiene que:

$$\mathcal{B}\left\{circ_1\left(\frac{r-l}{c}\right) + circ_2\left(\frac{r+l}{c}\right)\right\} = \mathcal{B}\left\{circ_1\left(\frac{r-l}{c}\right)\right\} + \mathcal{B}\left\{circ_2\left(\frac{r+l}{c}\right)\right\}. \quad (3.80)$$

De acuerdo con el teorema de desplazamiento y escalamiento para la transformada de Fourier-Bessel, ver propiedad (A.17) y (A.20), la ecuación (3.80) se reescribe como,

$$\mathcal{B}\left\{circ_1\left(\frac{r-l}{c}\right) + circ_2\left(\frac{r+l}{c}\right)\right\} = c^2 e^{-i2\pi lu} G(c\omega) + c^2 e^{i2\pi lu} G(c\omega). \quad (3.81)$$

Recordando que de acuerdo con (Gaskill, 1978, p.327), se tiene que:

$$G(\omega) = \mathcal{B}\{circ(r)\} = \left(\frac{1}{\omega}\right) J_1[2\pi\omega]. \quad (3.82)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (3.82) en (3.81) se obtiene,

$$\mathcal{B}\left\{circ_1\left(\frac{r-l}{c}\right) + circ_2\left(\frac{r+l}{c}\right)\right\} = c^2 e^{-i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} + c^2 e^{i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega}. \quad (3.83)$$

Luego, se puede escribir la ecuación (2.54) de acuerdo con (3.83) para llevar a cabo la convolución.

$$E_z(x_z, y_z, z) = z\lambda i \frac{E_{itum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i\lambda z} \left[\left(c^2 e^{-i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots c^2 e^{i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \right) \otimes e^{-i\pi z\lambda(u^2+v^2)} \right]. \quad (3.84)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la convolución, ver ecuación (A.4), en la expresión (3.84), se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z, z) = E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[c^2 e^{-i2\pi l u} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \otimes e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} + \dots c^2 e^{i2\pi l u} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \otimes e^{-i\pi z \lambda (u^2 + v^2)} \right]. \quad (3.85)$$

Debido a la conmutatividad de la convolución, ver propiedad (A.2), y considerando que en coordenadas polares $\omega^2 = u^2 + v^2$ y $u = \omega \cos\varphi$, se determina,

$$E_z(x_z, y_z, z) = E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[e^{-i\pi z \lambda \omega^2} \otimes c^2 e^{-i2\pi l \omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} + \dots e^{-i\pi z \lambda \omega^2} \otimes c^2 e^{i2\pi l \omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \right], \quad (3.86)$$

donde se observa que se presenta una suma de dos convoluciones, por lo tanto, a continuación, se resolverá cada una de manera separada.

3.2.1.1 Realización de la primera operación de convolución

Realizando la primera convolución de la ecuación (3.86), ver la propiedad (A.1), usando como variable de desplazamiento β , se obtiene,

$$e^{-i\pi z \lambda \omega^2} \otimes c^2 e^{-i2\pi l \omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z \lambda \beta^2} e^{-i2\pi l (\omega - \beta) \cos\varphi} \dots \dots \frac{J_1[2\pi c (\omega - \beta)]}{\omega - \beta} d\beta. \quad (3.87)$$

Reescribiendo la parte derecha de esta expresión se tiene que,

$$e^{-i\pi z \lambda \omega^2} \otimes c^2 e^{-i2\pi l \omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 e^{-i2\pi l \omega \cos\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z \lambda \beta^2 + i2\pi l \beta \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi c (\omega - \beta)]}{\omega - \beta} d\beta. \quad (3.88)$$

Para resolver la integral especificada en (3.88) se utiliza el método de integración por partes, por lo tanto, se hace uso de la siguiente formulación:

$$\int g dh = gh - \int h dg. \quad (3.89)$$

Haciendo que

$$g = \frac{J_1[2\pi c(\omega - \beta)]}{\omega - \beta}, \quad (3.90)$$

donde el diferencial de (3.90) para fines prácticos se escribe de la siguiente manera

$$dg = d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega - \beta)]}{\omega - \beta} \right]. \quad (3.91)$$

Por otro lado, para la variable h se tiene que,

$$h = \int e^{-i\pi z \lambda \beta^2 + i2\pi l \beta \cos \varphi} d\beta. \quad (3.92)$$

La ecuación (3.92) se integra usando el resultado integral de (Spiegel, 2014, p.113):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \beta^2 - \delta \beta} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\delta^2}{4\alpha}}, \quad (3.93)$$

donde, haciendo que $\alpha = i\pi z \lambda$ y $\delta = -i2\pi l \cos \varphi$, de acuerdo con la ecuación (3.93), la solución de (3.92) está dada por,

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z \lambda}} e^{\frac{(-i2\pi l \cos \varphi)^2}{4i\pi z \lambda}} = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}}. \quad (3.94)$$

Luego, la integral por partes dada en (3.89) se rescribe cambiando los límites de integración y usando los resultados (3.90), (3.91) y (3.94),

$$\int g dh = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega - \beta)]}{\omega - \beta} \right]_{-\infty}^{\infty} - 2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \int_0^{\infty} d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega - \beta)]}{\omega - \beta} \right]. \quad (3.95)$$

De acuerdo con (Spiegel, 2014, p. 161) la función real de Bessel de n-esimo orden se puede determinar a través de la siguiente ecuación.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (3.96)$$

Con base a esta consideración es posible calcular el primer término de (3.95), en el cual está involucrada una función Bessel de primer orden evaluada de menos infinito a más infinito. De acuerdo con la expresión (3.95) si en (3.96) se realiza la sustitución $x = \omega - \beta$, $n = 1$ y se dividen ambos lados entre $\omega - \beta$, así se reescribe la expresión anterior como,

$$\frac{J_1(\omega - \beta)}{\omega - \beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta - [\omega - \beta] \operatorname{sen} \theta)}{\omega - \beta} d\theta. \quad (3.97)$$

Como β es un valor muy grande, puede simplificarse (3.97)

$$\frac{J_1(-\beta)}{-\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(-\beta)}{-\beta} d\theta. \quad (3.98)$$

Realizando el límite de la ecuación cuando $\beta \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{J_1(-\beta)}{-\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(-\beta)}{\beta} d\theta. \quad (3.99)$$

Además, de acuerdo con (Stewart, 2012, p.136) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(\beta)}{\beta} = 0$, empleando dicha consideración en (3.99) debido a que el coseno es una función par $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$, así se obtiene,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{J_1(-\beta)}{-\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(-\beta)}{\beta} d\theta = 0. \quad (3.100)$$

Ahora, de acuerdo con el primer término de la ecuación (3.95) también debe realizarse un proceso de límite cuando $\beta \rightarrow -\infty$, pero considerando nuevamente que el coseno es una función par el resultado anterior sigue siendo cero. Sustituyendo el resultado de (3.100) en (3.95) se obtiene,

$$\int g dh = -2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \int_0^{\infty} d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]. \quad (3.101)$$

La ecuación (3.101) puede simplificarse, ya que,

$$\int_0^{\infty} d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right] = \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]_0^{\infty}. \quad (3.102)$$

Realizando el límite superior tal como en la ecuación (3.100) y el límite inferior de manera convencional se obtiene,

$$\left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}. \quad (3.103)$$

Sustituyendo el resultado (3.103) en (3.95), se obtiene

$$\int g dh = -2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(-\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega} \right). \quad (3.104)$$

Finalmente, el resultado de la convolución se obtiene sustituyendo (3.104) en (3.88), como se observa a continuación:

$$e^{-i\pi z\lambda\omega^2} \otimes c^2 e^{-i2\pi l\omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 e^{-i2\pi l\omega \cos\varphi} \left[2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2\varphi}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega} \right) \right]. \quad (3.105)$$

3.2.1.2 Realización de la segunda operación de convolución

Para la segunda convolución expresada en la ecuación (3.85) y reescrita a continuación en (3.106) el procedimiento es similar al ejecutado en la primera convolución, pues las expresiones son bastante similares y únicamente difieren en el signo del exponente de una de las funciones; por lo tanto, algunos resultados serán retomados.

Para la segunda convolución se usará como variable de desplazamiento β y de acuerdo con la definición integral de convolución, ver propiedad (A.1), se obtiene:

$$e^{-i\pi z\lambda\omega^2} \otimes c^2 e^{i2\pi l\omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\beta^2} \dots \dots e^{i2\pi l(\omega-\beta) \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} d\beta. \quad (3.106)$$

Reescribiendo de manera simplificada, se tiene:

$$e^{-i\pi z\lambda\omega^2} \otimes c^2 e^{i2\pi l\omega \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 e^{i2\pi l\omega \cos\varphi} \dots \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z\lambda\beta^2 - i2\pi l\beta \cos\varphi} \frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} d\beta. \quad (3.107)$$

Para resolver la integral dada en la convolución (3.107) se empleará el método de integración por partes, es decir:

$$\int kdn = kn - \int ndk. \quad (3.108)$$

Haciendo que

$$k = \frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta}, \quad (3.109)$$

donde el diferencial dk de (3.109) se expresará por conveniencia de la siguiente forma:

$$dk = d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]. \quad (3.110)$$

Por otro lado, para la variable n .

$$n = \int e^{-i\pi z\lambda\beta^2 - i2\pi l\beta\cos\varphi} d\beta. \quad (3.111)$$

La integral de (3.111) se soluciona retomando el resultado integral propuesto en la ecuación (3.93), pero en este caso realizando la sustitución siguiente $\alpha = i\pi z\lambda$ y $\delta = i2\pi l\cos\varphi$, así es posible reescribir n de la siguiente forma:

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{i\pi z\lambda}} e^{\frac{(i2\pi l\cos\varphi)^2}{4i\pi z\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}}. \quad (3.112)$$

Luego, la integral por partes expresada en (3.108) se reescribe usando (3.109) y (3.110) y (3.112),

$$\int kdn = \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]_{-\infty}^{\infty} - 2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \int_0^{\infty} d \left[\frac{J_1[2\pi c(\omega-\beta)]}{\omega-\beta} \right]. \quad (3.113)$$

La integral (3.113) es idéntica a la (3.95), por lo tanto, el resultado es el mismo que la expresión matemática (3.104),

$$\int kdn = \left[-2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(-\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega} \right) \right]. \quad (3.114)$$

Sustituyendo (3.114) en (3.107) se obtiene finalmente el resultado de la segunda convolución,

$$e^{-i\pi z\lambda\omega^2} \otimes c^2 e^{i2\pi l\omega\cos\varphi} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} = c^2 e^{i2\pi l\omega\cos\varphi} \left[2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega} \right) \right]. \quad (3.115)$$

3.2.1.3 Distribución de amplitud del campo difractado obtenido sumando los resultados de ambas convoluciones

Ahora, la distribución de amplitud de las ondas difractadas y propagadas una distancia $0 < z < \infty$ desde el plano objeto, se determina sumando los resultados de las dos convoluciones anteriormente realizadas y multiplicándolas por los factores correspondientes; por lo tanto, sustituyendo (3.105) y (3.115) en (3.86).

$$E_z(x_z, y_z, z) = E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[2c^2 e^{-i2\pi l \omega \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c \omega]}{\omega} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots 2c^2 e^{+i2\pi l \omega \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c \omega]}{\omega} \right) \right]. \quad (3.116)$$

Simplificando se obtiene,

$$E_z(x_z, y_z, z) = E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \left[2c^2 \sqrt{\frac{1}{iz\lambda}} e^{\frac{i\pi l^2 \cos^2 \varphi}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c \omega]}{\omega} \right) \dots \right. \\ \left. \dots (e^{-i2\pi l \omega \cos \varphi} + e^{+i2\pi l \omega \cos \varphi}) \right]. \quad (3.117)$$

Posteriormente, realizando algunas consideraciones sobre (3.117) como emplear una identidad trigonométrica, retomar la sustitución $\omega^2 = u^2 + v^2$ y $u = \omega \cos \varphi$, entre otros procedimientos; se obtiene:

$$G_z(u, v, z) = \frac{4c^2 E_{ilum} e^{ikz} e^{i\pi \lambda z (u^2 + v^2)}}{\sqrt{iz\lambda}} \left[e^{\frac{i\pi l^2 (u/\omega)^2}{z\lambda}} \left(\frac{J_1[2\pi c \omega]}{\omega} \right) \cos(2\pi l u) \right]. \quad (3.118)$$

La ecuación (3.118) se interpreta de la siguiente forma: en la región o zona de Fresnel, la distribución de amplitud del campo difractado es un campo eléctrico desplazado una distancia z desde el objeto, esto es debido al primer factor exponencial e^{ikz} . Por otra parte, la función exponencial $e^{i\pi \lambda z (u^2 + v^2)}$ indica que la fase se distribuye en una esfera. Mientras tanto, el factor $\frac{1}{\sqrt{i}}$ implica un desfase de $\frac{\pi}{4}$. Finalmente, la forma de la distribución queda descrita por el producto de las tres funciones que aparecen entre corchetes. Al obtener la parte real de la ecuación (3.118), se genera la siguiente expresión:

$$[G_z(u, v, z)]_{real} = \frac{4c^2 E_{ilum}}{\sqrt{z\lambda}} \cos(kz) \cos(\pi \lambda z (u^2 + v^2)) \dots$$

$$\dots \cos\left(\frac{\pi l^2 \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right) \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right) \cos(2\pi ul) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (3.119)$$

Mientras que la parte imaginaria de la ecuación (3.118) proporciona la siguiente ecuación,

$$[G_z(u, v, z)]_{imag} = \frac{4c^2 E_{ilum}}{\sqrt{z\lambda}} \text{sen}(kz) \text{sen}(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \dots$$

$$\dots \text{sen}\left(\frac{\pi l^2 \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right) \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right) \cos(2\pi ul) \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (3.120)$$

Utilizando nuevamente la ecuación (3.71) para obtener la distribución de intensidad, pero ahora aplicada sobre (3.119) se llega al siguiente resultado,

$$[I(u, v, z)]_{real} = \frac{(2\sqrt{2}c^2 E_{ilum})^2}{z\lambda} \cos^2(kz) \cos^2(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \dots$$

$$\dots \cos^2\left(\frac{\pi l^2 \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right) \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2 \cos^2(2\pi ul). \quad (3.121)$$

De manera análoga, la distribución de intensidad para la parte imaginaria del campo eléctrico difractado se obtiene al aplicar (3.71) sobre (3.120)

$$[I(u, v, z)]_{imag} = \frac{(2\sqrt{2}c^2 E_{ilum})^2}{z\lambda} \text{sen}^2(kz) \text{sen}^2(\pi\lambda z(u^2 + v^2)) \dots$$

$$\dots \text{sen}^2\left(\frac{\pi l^2 \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right) \left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2 \cos^2(2\pi ul). \quad (3.122)$$

Las ecuaciones (3.121) y (3.122) dan referencia de un patrón de difracción en distribución de intensidad para el cual se propone la siguiente interpretación: la función moduladora es la Bessinc cuadrada de primer orden $\left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2$ genera un conjunto de anillos concéntricos que alternan máxima y mínima intensidad lumínica y que presentan un máximo central el cual está asociado a una la función Bessel de orden cero, que surge al desarrollar explícitamente el cuadrado de la función Bessel de orden uno, como dan referencia (Zárate *et al*, 2019, pp. 301-303). Por otro lado, la función modulada $\cos^2(2\pi lu)$ es la causante de

franjas de interferencia de Young. También existe otra función modulada, que puede ser $\cos^2\left(\frac{\pi l^2\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right)$ o $\sin^2\left(\frac{\pi l^2\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right)$, correspondientes a la parte real e imaginaria de la distribución de intensidad, respectivamente; estos factores son las causantes de franjas con distribución cosenoidal al cuadrado, o senoidal al cuadrado. Por lo tanto, estas franjas no serán completamente lineales, sino que podría presentar un comportamiento curvado.

3.2.2 Región de Fraunhofer

Para obtener el campo difractado en el caso de Fraunhofer, es decir $z \rightarrow \infty$, únicamente debe emplearse la transformada de Fourier de la función de transmitancia correspondiente con el objeto difractor multiplicando al factor de propagación e^{ikz} , la función cuadrática de fase $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}$ y la constante E_{ilum} , así retomando la expresión (3.83) aplicada sobre (2.64) se obtiene.

$$E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i\lambda z} \left[c^2 e^{-i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} + \dots \dots c^2 e^{i2\pi lu} \frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \right]. \quad (3.123)$$

Factorizando (3.123), empleando una identidad trigonométrica y usando la consideración $(x_z^2 + y_z^2) = z^2 \lambda^2 (u^2 + v^2)$,

$$G_z(u, v, z \rightarrow \infty) = \frac{2c^2 E_{ilum} e^{ikz} e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)}}{i\lambda z} \left[\frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \cos(2\pi ul) \right]. \quad (3.124)$$

La ecuación anterior corresponde al espectro difractado en el que los factores exponenciales e^{ikz} y $e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)}$ dan referencia de que este se encuentra desplazado una distancia z respecto al objeto y a que se distribuye en una esfera, respectivamente. Además debido al factor $\frac{1}{i}$ existe un desfase de $\frac{\pi}{2}$. Sustituyendo la expresión del espectro de difracción (3.124) en la ecuación (3.71) para determinar la irradiancia, se obtiene

$$I(u, v, z \rightarrow \infty) = \frac{4c^4 E_{ilum}^2}{\lambda^2 z^2} \left(\frac{J_1[2\pi\omega c]}{\omega} \right)^2 \cos^2(2\pi ul). \quad (3.125)$$

La ecuación anterior describe la distribución de intensidad del espectro de difracción en la zona o región de Fraunhofer, la cual da referencia de un campo en el que la función Bessel cuadrada de primer orden $\left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2$ es responsable de un conjunto de anillos concéntricos que alternan máxima y mínima intensidad lumínica y además modula a la función $\cos^2(2\pi ul)$, responsable de las franjas de interferencia de Young.

México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO EXPERIMENTAL

Este capítulo inicia con una descripción del arreglo óptico coherente implementado, después incluye especificaciones sobre los dos tipos distintos de objetos difractoros utilizados: a) un par de rendijas rectangulares, y b) un par de aberturas circulares del mismo radio, que se usaron para producir patrones de difracción en distribución de intensidad, también contemplados en este capítulo, que fueron grabados mediante el método fotográfico con cámara digital y variando la distancia de propagación z que abarca desde el objeto difractor hasta el plano de distribución de intensidad en que esta se posicionaba. Estas variaciones permitieron explorar tanto la región de Fresnel o de convolución en el intervalo de distancia ($0 < z < \infty$) y de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier en que la distancia del objeto al plano de distribución cumple la condición ($z \rightarrow \infty$).

4.1 Arreglo experimental

Los espectros en distribución de intensidad producidos por los objetos difractoros, mostrados en las figuras 4.2a y 4.2b, se obtuvieron mediante la implementación de un arreglo experimental óptico coherente como el que se ilustra en la Figura 4.1.

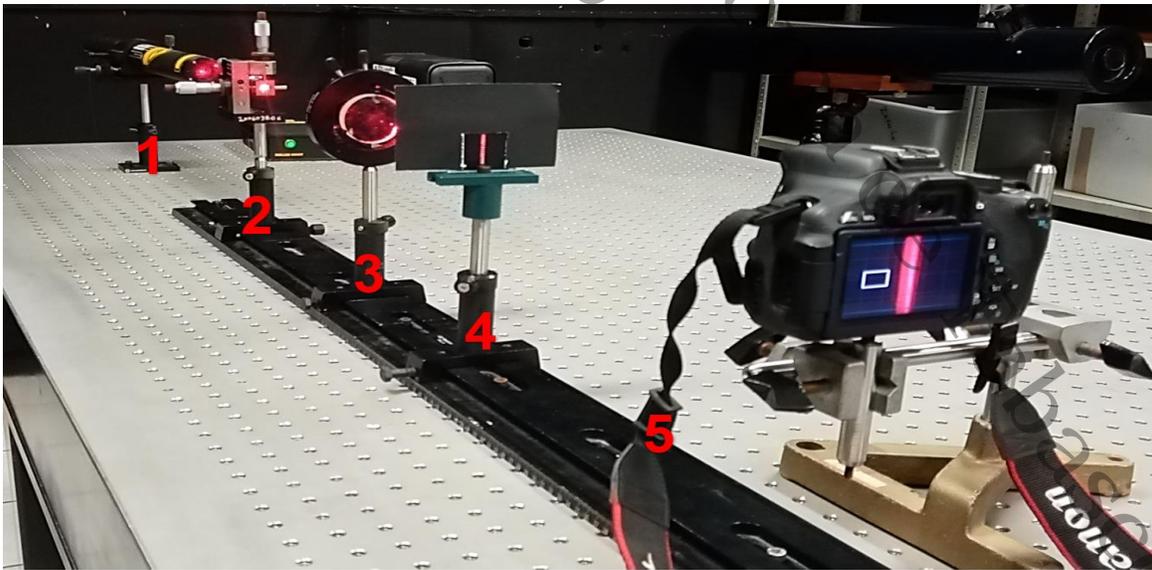


Figura 4.1 Arreglo experimental para producir y grabar patrones de difracción en distribución de intensidad: 1) Láser de Helio- Neón, 2) Filtro (objetivo de microscopio 40X y pinhole $50\mu\text{m}$), 3) Lente colimadora, 4) Objeto difractor, 5) Cámara digital.

DESCRIPCIÓN DEL ARREGLO EXPERIMENTAL: La fuente de luz láser de He-Ne (1), produce un haz con una potencia de $17mW$, con frente de onda Gaussiano y longitud de onda $\lambda = 632nm$. Este haz incide en un filtro (2), donde se amplía mediante un lente objetivo de microscopio de $40X$ y se filtra de ruido óptico usando un pinhole de $50\mu m$ de diámetro; este proceso genera un frente de onda esférico que luego incide en una lente colimadora, la cual es un doblete cementado acromático (3) con una distancia focal de $f_{LC} = 30cm$. Esta lente produce ondas colimadas, es decir frentes de onda planos, las cuales iluminan el objeto difractor (4) de espesor despreciable. El campo de ondas difractado por el objeto se propaga hasta el plano de distribución, en el cual se encuentra ubicada una cámara digital Canon (5), con sensor CMOS y 18.0 megapíxeles para fotografiar el patrón de difracción en distribución de intensidad.

4.2 Descripción los objetos difractores

El primer objeto difractor utilizado, correspondiente a la Figura 4.2a está conformado por dos aberturas rectangulares o rendijas impresas sobre acetato. Ambas rendijas poseen las siguientes dimensiones lineales: largo $l_x = (0.1 \pm 0.05)cm$, altura $l_y = (1 \pm 0.05)cm$ y espesor $l_z \approx 0.01 cm$, además están separadas entre si $(0.2 \pm 0.05)cm$. El segundo objeto difractor utilizado, correspondiente a la Figura 4.2b, está conformado por dos aberturas circulares construidas de forma manual con taladro y broca, en una lámina de baquelita. Ambas aberturas poseen el mismo radio $a = (0.2 \pm 0.05)cm$, espesor $l_z \approx 0.05 cm$ y están separadas entre si $(1.2 \pm 0.05)cm$.

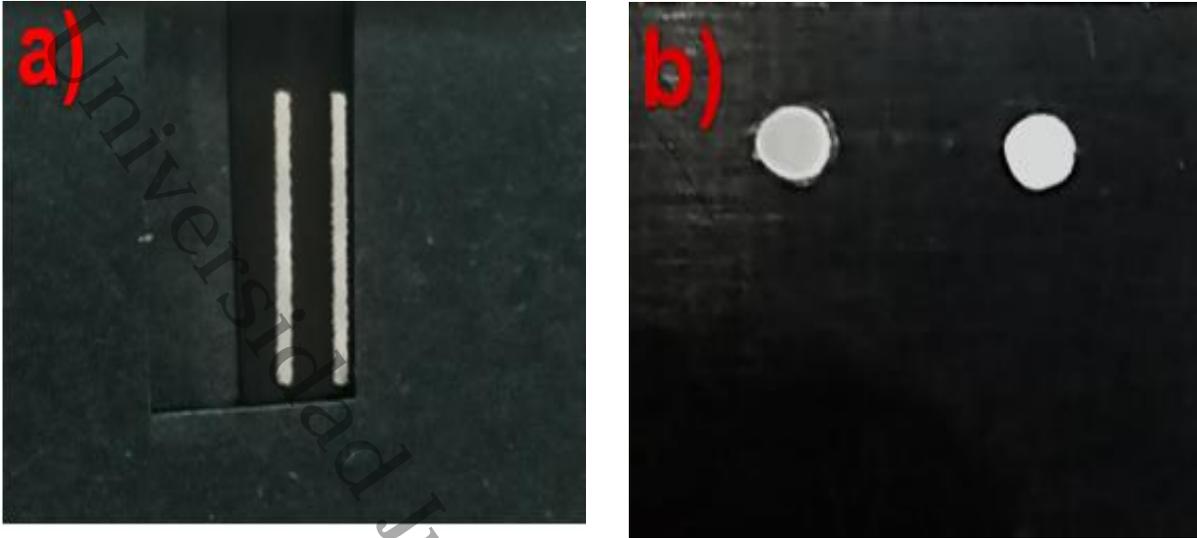


Figura 4.2. Objetos difractoros empleados en el arreglo óptico: a) dobles aberturas rectangulares impresas sobre acetato y b) dobles aberturas circulares elaboradas sobre baquelita.

4.3 Método de grabado de los patrones de difracción

El registro de los patrones de difracción se realizó empleando el método fotográfico con una cámara digital Canon con sensor CMOS y 18.0 megapíxeles, sin lente, ubicada en el plano de distribución $u_n v_n$. La distancia z desde el objeto difractor hasta la cámara se utilizó como una variable, con el propósito de determinar los cambios en el espectro de difracción conforme dicha distancia aumentaba y también establecer de manera experimental la región de Fresnel o de convolución de transformadas de Fourier y el inicio de la región de Fraunhofer o de la transformada de Fourier.

Para grabar las fotografías de los patrones de difracción, se utilizaron tiempos de exposición que variaron entre $t = 1/2000s$ y $t = 1/50s$ en cada distancia z tanto en la región de Fresnel como en la región de Fraunhofer. Además, se realizaron grabados de patrones de difracción con atenuadores de intensidad como sin ellos. Esto resultó en una serie de imágenes, de las cuales se seleccionaron aquellas que mostraron mayor definición en las líneas de interferencia de su espectro de difracción.

4.4 Patrones de difracción producidos por un par de aberturas rectangulares

4.4.1 Fotografías correspondientes a la zona de Fresnel o de convolución

Al utilizar el par de aberturas rectangulares, que se muestran en la Figura 4.2a, como objeto difractor en el punto (4) de la Figura 4.1, se generaron patrones de difracción en distribución de intensidad en la región de Fresnel o convolución para diferentes tiempos de exposición t y distancias z entre el plano que contiene al objeto difractor y el plano de grabado. Los resultados se presentan en la Figura 4.3: la Figura 4.3a muestra el espectro de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/2000s$ y a una distancia $z = (29 \pm 0.05)cm$. En la Figura 4.3b se aprecia el espectro de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/2000s$ y a una distancia $z = (50 \pm 0.05)cm$. En la Figura 4.3c se visualiza el espectro de difracción capturado con un tiempo de exposición de $t = 1/1200s$ y a una distancia $z = (82 \pm 0.05)cm$. Es importante mencionar que, para dichas fotografías, es decir 4.3a, 4.3b y 4.3c se empleó un atenuador ubicado entre el láser y el filtro. Finalmente, la fotografía 4.3d se capturó con un tiempo de exposición de $t = 1/1000s$, a una distancia $z = (113 \pm 0.05)cm$ y sin el uso de un atenuador. La distribución de intensidad de cada Figura 4.3a, 4.3b, 4.3c y 4.3d son justificadas mediante la ecuación (3.72), misma que permite su interpretación.

La distancia z medida desde el par de aberturas rectangulares como objeto difractor hasta el plano de distribución de intensidad dentro de la región de Fresnel, se observó que experimentalmente fue $z \approx (113 \pm 0.05)cm$. Después de este valor comienza la región de Fraunhofer.

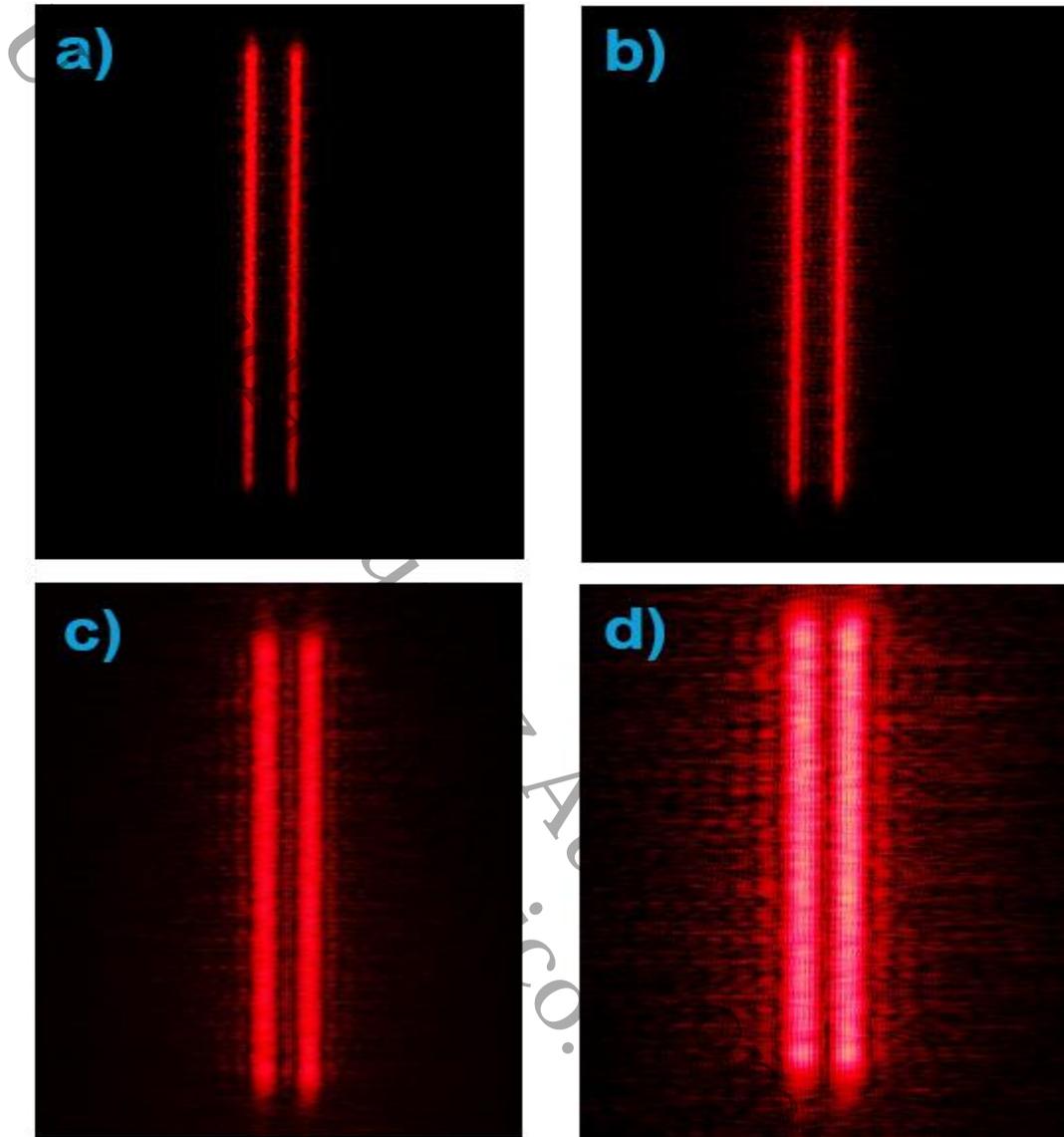


Figura 4.3 a), b), c) y d) Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fresnel o de convolución.

De acuerdo con la Figura 4.3 y la ecuación (3.72) se propone que en la zona de Fresnel $0 < z < \infty$, existe una función del tipo seno al cuadrado $\text{sen}^2(\pi\lambda z(u^2 + v^2))$, que es moduladora y genera una zona central oscura con dos franjas luminosas a los costados, cuya intensidad se ve aumentada por la función modulada seno cociente al cuadrado $\text{sinc}^2(cu, bv)$, que resalta estas dos líneas verticales, dándoles la apariencia de lóbulos principales de máxima luminosidad. Por otro lado, otra función modulada es el coseno cuadrado $\text{cos}^2(2\pi du)$ que causa líneas de interferencia de Young al interior de dichos

lóbulos y por observación se aprecia que estas poseen orientación vertical. Además, comparando la Figura 4.3a y la Figura 4.3d, es posible notar que las dos líneas de máxima intensidad lucen más anchas y cercanas entre sí conforme el plano de grabado se aleja del objeto difractor, es decir cuando la distancia z aumenta, lo que da evidencia de un posible fenómeno de amplificación.

Así mismo, la Figura 4.3d resulta particularmente relevante ya que existen franjas de interferencia que se extienden fuera de los dos lóbulos de intensidad principales, dando indicios de que el patrón de difracción en la zona de Fraunhofer estará más desplegado horizontalmente. En conclusión, experimentalmente se obtuvo que la región de Fresnel está comprendida en el intervalo $0 < z < (113 \pm 0.05)cm$.

4.4.2 Fotografías correspondientes a la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier

Las Figuras 4.4 y 4.5 muestran los resultados experimentales obtenidos en la región de Fraunhofer $z \rightarrow \infty$, también conocida como la región de la transformada exacta, usando nuevamente como objeto difractor el par de aberturas rectangulares, que se muestran en la Figura 4.2a ubicadas en el punto (4) del arreglo óptico presentado en la Figura 4.1. La Figura 4.4 fue capturada con una cámara digital Canon equipada con un sensor CMOS de 18.0 megapíxeles, mientras que la Figura 4.5 fue fotografiada con un teléfono celular Huawei YP6 Med-Lx9 de 13 megapíxeles.

En la Figura 4.4a se aprecia el espectro de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/1000s$, a una distancia $z = (118 \pm 0.05)cm$ y empleando un atenuador. La Figura 4.4b muestra el espectro de difracción capturado con un tiempo de exposición de $t = 1/500s$ y a una distancia $z = (131 \pm 0.05)cm$. En la Figura 4.4c se observa el espectro de difracción registrado usando un tiempo de exposición de $t = 1/250s$, a una distancia $z = (157 \pm 0.05)cm$ y con atenuador. La Figura 4.4d muestra el espectro de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/250s$ y a una distancia $z = (174 \pm 0.05)cm$. Por otro lado, la Figura 4.4e se capturo con un tiempo de exposición de $t = 1/50s$, a una distancia $z = (197 \pm 0.05)cm$ y empleando un atenuador. Finalmente, la Figura 4.4f corresponde a un espectro de difracción en distribución de intensidad fotografiado

con un tiempo de exposición $t = 1/50s$, a una distancia $z = (215 \pm 0.05)cm$ y empleando un atenuador.

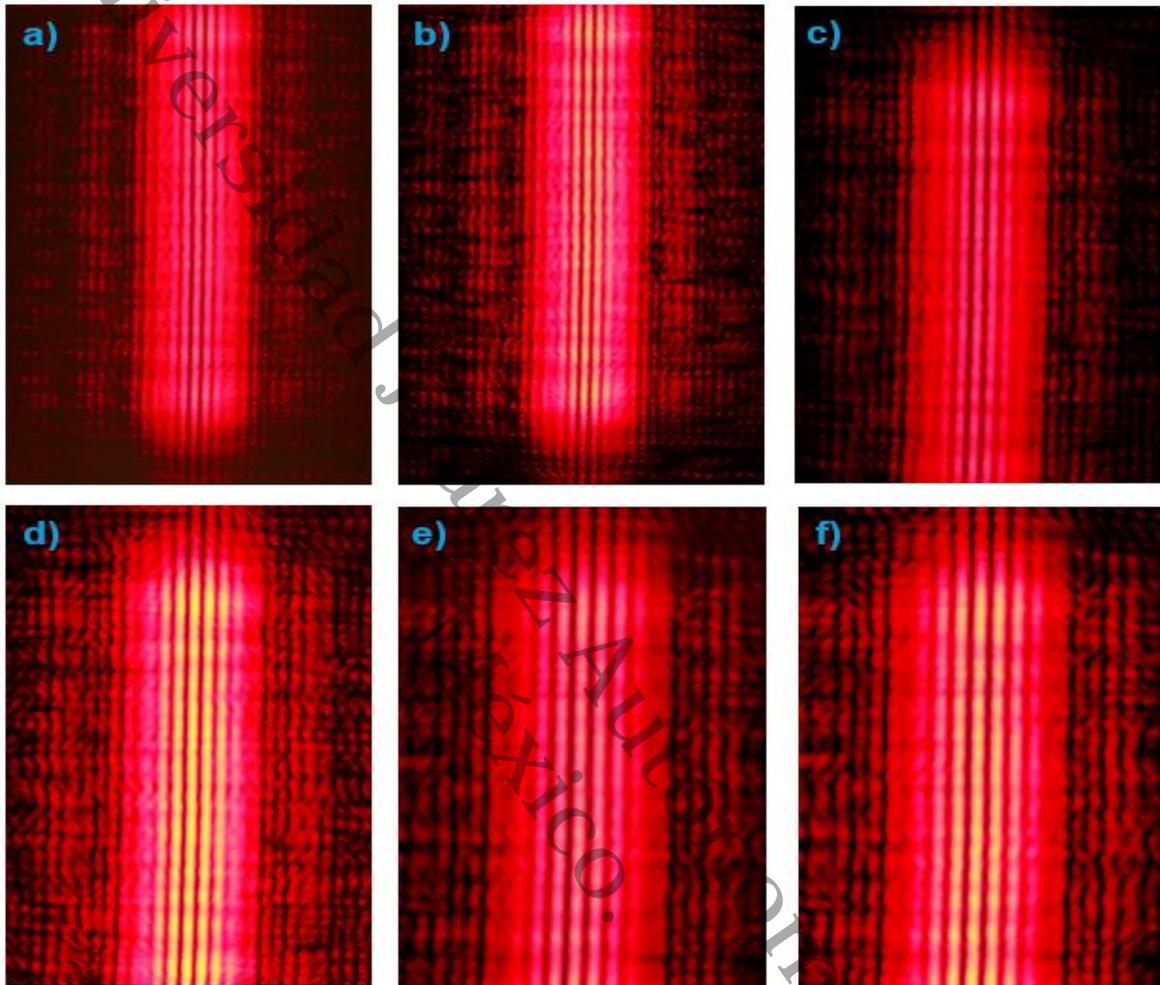


Figura 4.4 a), b), c), d), e) y f) Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta.

De acuerdo con la Figura 4.4 y la ecuación (3.76), se propone que en la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta $z \rightarrow \infty$, existe una función moduladora del tipo seno cociente al cuadrado $\text{sinc}^2(cu, bv)$, que es la responsable de que en la zona central exista un máximo luminoso con máximos secundarios a los costados de menor intensidad. Además, por observación se plantea que la función modulada es un coseno cuadrado $\cos^2(2\pi du)$, responsable de las franjas de interferencia de Young con orientación vertical, que se encuentran contenidas en el interior de la distribución seno cociente al cuadrado.

En este caso, también se observa una amplificación del patrón de difracción a medida que aumenta la distancia z . Esto se hace evidente al comparar la Figura 4.4a, capturada a una distancia $z = (118 \pm 0.05)cm$, con la Figura 4.4f, capturada a una distancia $z = (215 \pm 0.05)cm$. En la primera figura, el patrón de difracción parece ser más pequeño, permitiendo apreciar una gran cantidad de máximos secundarios. En contraste, en la Figura 4.4f, la distribución de intensidad del espectro es mucho más grande, haciendo que el máximo principal ocupe gran parte del campo de observación de la cámara y dejando poco espacio para los máximos secundarios.

En la Figura 4.5 se aprecia el espectro de difracción de un par de rendijas en distribución de intensidad e igualmente en la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta, pero capturado con la cámara de un teléfono celular Huawei YP6 Med-Lx9 de 13 megapíxeles y tiempo de exposición fijo de $t = 1/12s$. La Figura 4.5a se fotografió a una distancia $z = (232 \pm 0.05)cm$ y la Figura 4.5b se registró a una distancia $z = (251 \pm 0.05)cm$.

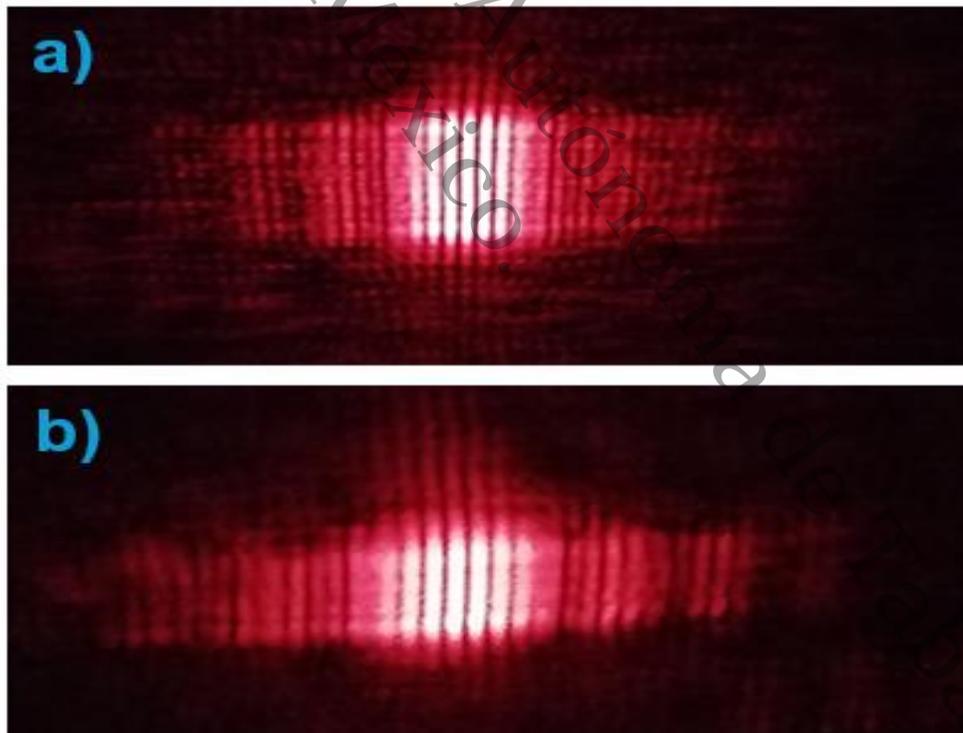


Figura 4.5 a) y b) Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría rectangular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta capturadas con un teléfono celular Huawei YP6 Med-Lx9.

Analizando la Figura 4.5 es posible notar que permanece la distribución anteriormente descrita y dada por la ecuación (3.76), en la que la función $\text{sinc}^2(cu, bv)$ modula a la función $\cos^2(2\pi du)$. Al emplear la cámara posterior del celular Huawei YP6 Med-Lx9 para realizar las fotografías, el campo de observación no resulta tan pequeño, como en el caso de la cámara digital Canon; esto permitió obtener más información del patrón de difracción, en el que se aprecia una mayor cantidad de máximos secundarios que alternan con regiones menos luminosas a los costados de la distribución central de alta intensidad. Es notorio, en la Figura 4.5a y 4.5b que el patrón de difracción no solo pierde intensidad luminosa al alejarse de la zona central, sino que también disminuye la definición de las franjas de interferencia de Young, lo que da predominancia a la función seno cociente al cuadrado.

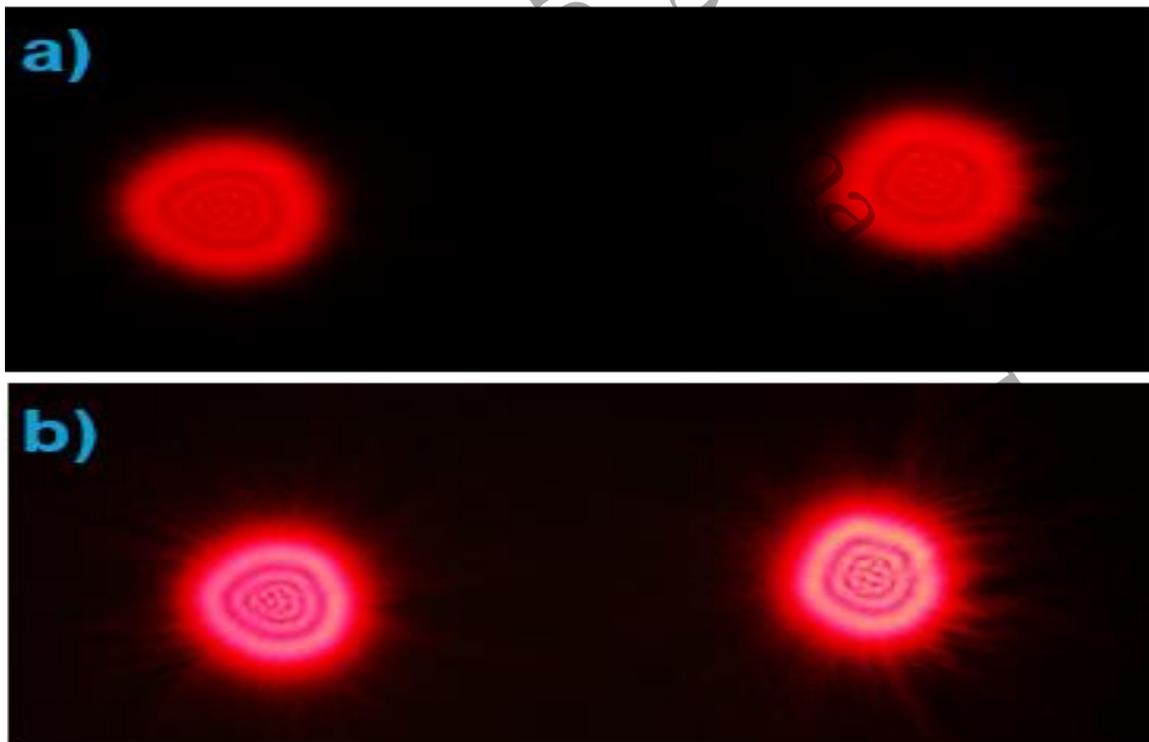
En este caso también es visible la amplificación que sufre el espectro de difracción en distribución de intensidad, al aumentar la distancia z . De hecho, el motivo por el que la Figura 4.5 fue capturada con la cámara de un teléfono celular Huawei YP6 Med-Lx9 y no utilizando la cámara digital Canon, es que la amplificación que sufrió el patrón debido a la distancia z causó que ya no entrara completamente en el campo de visión de la cámara, que solo recolectaba información de la parte central y hacía que se perdieran los máximos secundarios. No obstante, debido a que la cámara del celular cuenta con una lente, se presenta una aberración del tipo distorsión de corsé, pues en las fotografías capturadas las líneas no lucen completamente rectas sino comprimidas en la parte central.

Debido a la serie de fotografías capturadas se observa que, para el caso específico de difracción abordado, la región de Fraunhofer inicia a una distancia a una distancia $z \approx (113 \pm 0.05)cm$. No puede señalarse una distancia específica en la que concluya la zona de Fraunhofer.

4.5 Patrones de difracción producidos por un par de aberturas circulares

4.5.1 Fotografías correspondientes a la zona de Fresnel o de convolución

Para segundo caso de estudio se emplearon como objeto difractor un par de aberturas circulares, mostradas en la Figura 4.2b, implementadas en el punto (4) del arreglo experimental expuesto en la Figura 4.1, así se obtuvieron los patrones de difracción en distribución de intensidad para la región de Fresnel o de convolución usando distintas distancias z , entre el objeto difractor y el plano de distribución y tiempos de exposición t variables. La Figura 4.6a muestra el espectro de difracción grabado empleando un atenuador, con un tiempo de exposición de $t = 1/2000s$ y a una distancia $z = (31 \pm 0.05)cm$. En la Figura 4.6b se aprecia el espectro de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/1000s$ y a una distancia $z = (54 \pm 0.05)cm$. En la Figura 4.6c se muestra el patrón de difracción grabado con un tiempo de exposición de $t = 1/1200s$ y a una distancia $z = (79 \pm 0.05)cm$. Finalmente, la Figura 4.6d fue capturada con un tiempo de exposición de $t = 1/800s$ y a una distancia $z = (98 \pm 0.05)cm$. Las últimas tres imágenes, es decir la Figura 4.6b, Figura 4.6c y 4.6d se realizaron sin el uso de atenuadores.



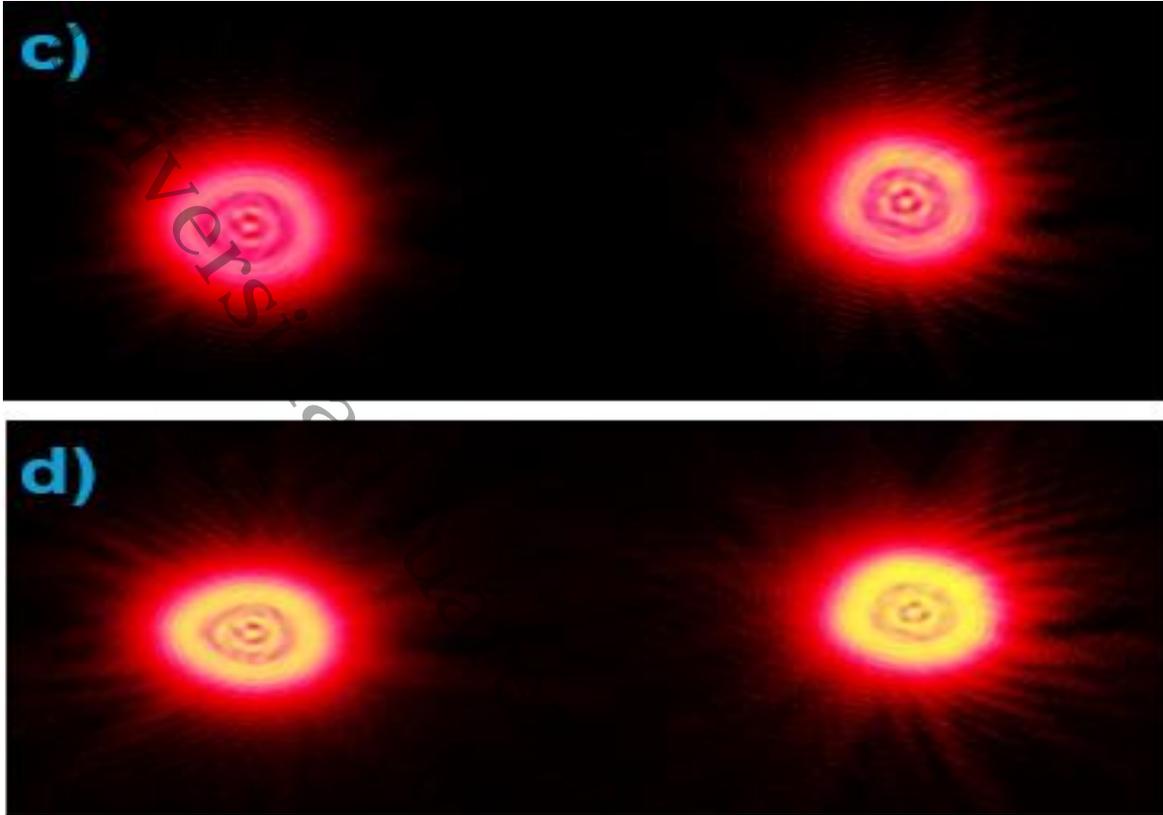


Figura 4.6 a), b), c) y d) Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría circular empleadas como objeto difractor en la región de Fresnel o de convolución.

Los patrones de difracción de la Figura 4.6 correspondiente a la zona de Fresnel $0 < z < \infty$ se componen de dos distribuciones de intensidad de forma circular que son bastante parecidas y están alineadas horizontalmente. Se propone, de acuerdo con la ecuación (3.121) y (3.122), que la función moduladora es la Bessinc cuadrada de primer orden $\left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2$, la cual genera la distribución cuya apariencia son anillos concéntricos que alternan máxima y mínima intensidad. Además, en todas las fotografías se observa un máximo luminoso central, el cual es evidencia de la predominancia una función Bessel de orden cero, que surge al desarrollar explícitamente el cuadrado de la función Bessel de orden uno.

La función modulada que visualmente parece estar contenida dentro de los anillos concéntricos es coseno cuadrado $\cos^2(2\pi lu)$, responsable de las franjas de interferencia tipo Young. No obstante, existe otra función modulada que puede ser del tipo $\cos^2\left(\frac{\pi l^2\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right)$ o

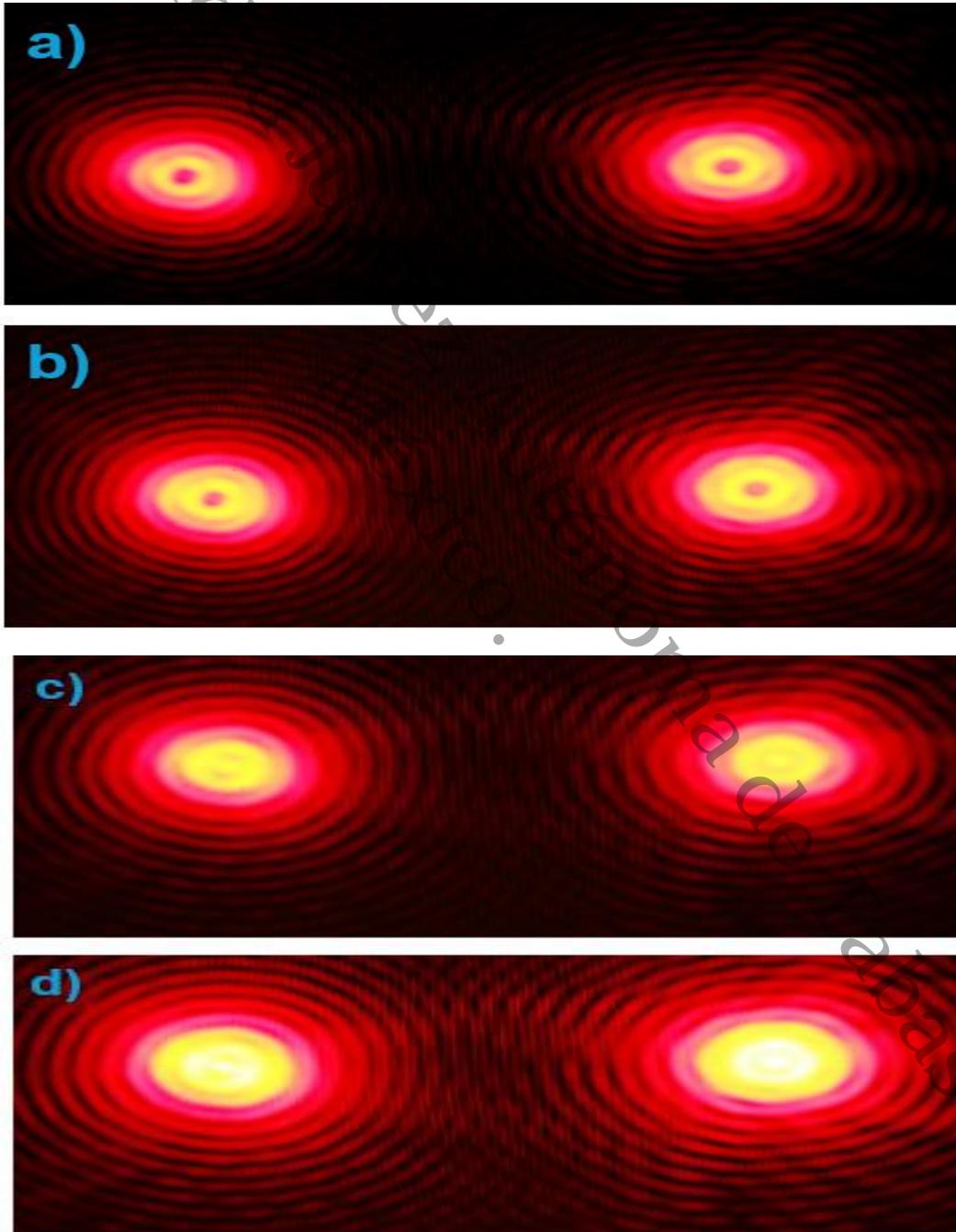
$\text{sen}^2\left(\frac{\pi l^2 \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{z\lambda}\right)$, la primera relacionada con la expresión (3.121) y la otra correspondiente a la ecuación (3.122), es decir la forma real e imaginara de la distribución de intensidad, respectivamente; cualquiera de ellas generaría que las franjas de interferencia de Young anteriormente descritas presenten un comportamiento difícil de interpretar y no completamente lineal, lo cual explicaría las líneas con distintas direcciones que se presentan en la Figura 4.6.

Al comparar la Figura 4.6a capturada a $z = (31 \pm 0.05)cm$ y la Figura 4.6d capturada a $z = (98 \pm 0.05)cm$, se observa que el patrón de difracción de esta última presenta mayor intensidad luminosa en el borde, es decir en los anillos externos, lo que hace resaltar las líneas de interferencia y sugiere una mayor predominancia de la función modulada conforme la distancia z aumenta. Además, al contrastar las fotografías antes mencionadas resulta evidente que existe fenómeno de amplificación, por ello se observa que las dimensiones del patrón de difracción correspondiente a la Figura 4.6d son en apariencia más grandes que las de la Figura 4.6a. Experimentalmente se encontró que la región de Fresnel comprende una distancia $0 < z < (98 \pm 0.05)cm$. En otras palabras, se observó que la zona Fresnel termina en $z \approx (98 \pm 0.05)cm$. Después de este valor comienza la región de Fraunhofer.

4.5.2 Fotografías correspondientes a la zona de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier

Empleando nuevamente el par de aberturas circulares, mostradas en la Figura 4.2b, como objeto difractor, el cual se ubicó en el punto (4) del arreglo experimental expuesto en la Figura 4.1, se generaron una serie de patrones de difracción en distribución de intensidad grabados bajo la condición de una distancia z grande, es decir que ópticamente tiende al infinito $z \rightarrow \infty$. Esto se realizó con el propósito de determinar el punto de inicio de la región de Fraunhofer o de la transformada exacta. Los resultados se aprecian en la Figura 4.7: la Figura 4.7a fue capturada empleando un atenuador, un tiempo de exposición de $t = 1/500s$ y a una distancia $z = (102 \pm 0.05)cm$. La Figura 4.7b muestra el espectro de difracción registrado con un tiempo de exposición de $t = 1/250s$ y a una distancia $z =$

$(118 \pm 0.05)cm$. La Figura 4.7c, Figura 4.7d y Figura 4.7e fueron todas fotografiadas usando un tiempo de exposición de $t = 1/200s$, pero para la Figura 4.7c se usó una distancia $z = (126 \pm 0.05)cm$ y un atenuador posicionado entre el láser y el filtro. En la Figura 4.7d se utilizó una distancia $z = (147 \pm 0.05)cm$ y sin atenuador. En la Figura 4.7e se utilizó una distancia $z = (182 \pm 0.05)cm$ y un atenuador. Finalmente, la Figura 4.7f se registró con un tiempo de exposición de $t = 1/50s$ y a una distancia $z = (203 \pm 0.05)cm$.



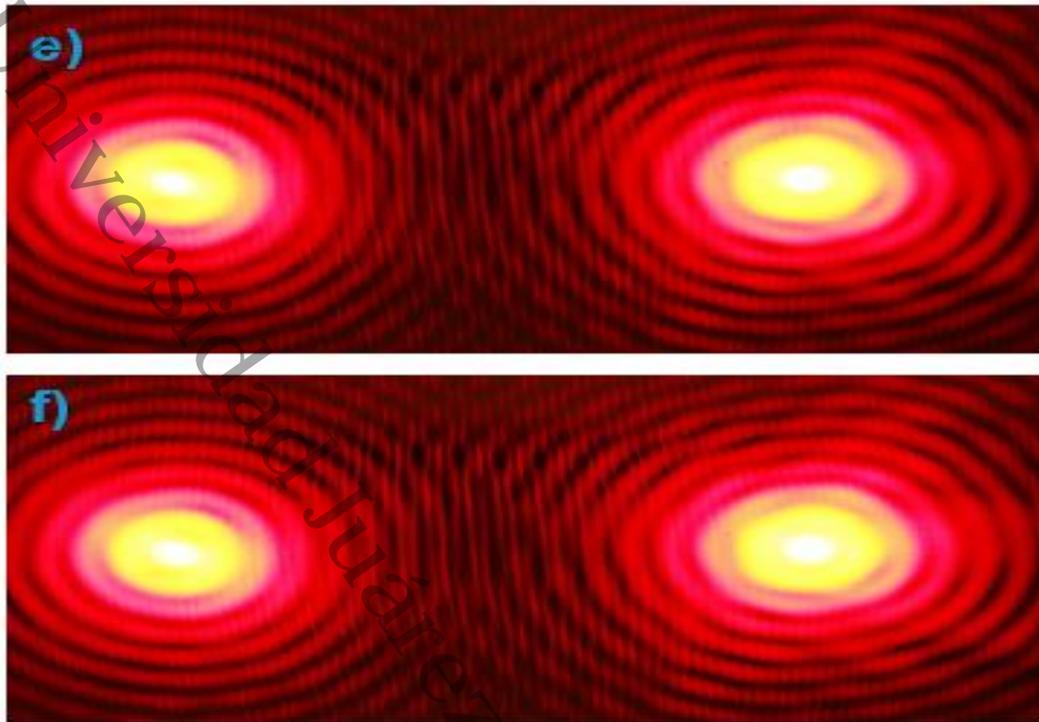


Figura 4.7 a), b), c), d), e) y f) Patrones de difracción de un par de aberturas de geometría circular empleadas como objeto difractor en la región de Fraunhofer o de transformada exacta.

Se observa que los patrones de difracción de la Figura 4.7 correspondiente a la zona de Fraunhofer $z \rightarrow \infty$, se componen de dos distribuciones de amplitud orientadas sobre la misma línea horizontal y compuestas por una serie de anillos concéntricos alternando en máxima y mínima intensidad; al asociarse estas imágenes con la ecuación (3.125) se propone que la función moduladora es una Bessinc cuadrada de primer orden $\left(\frac{J_1[2\pi c\omega]}{\omega}\right)^2$ y la moduladora es coseno cuadrado $\cos^2(2\pi ul)$, responsable de las franjas de interferencia de Young, que se aprecian de manera vertical.

En las Figuras 4.7a y 4.7b, se observa un mínimo de intensidad central, es decir, una zona oscura en el interior de ambas distribuciones de anillos. Esto se debe a que la función de Bessel de primer orden, en la ecuación (3.125), adquiere relevancia en comparación con otras funciones que surgen al desarrollar explícitamente el cuadrado del numerador de la función moduladora. Por otro lado, en las Figuras 4.7c, 4.7d, 4.7e y 4.7f, se visualiza un máximo de intensidad central, es decir, una zona brillante en el interior de ambas distribuciones de anillos, lo cual da referencia de que al desarrollar explícitamente el cuadrado de la función

Bessel de orden uno que aparece en la expresión (3.125) e interviene en la modulación, predomina una función Bessel de orden cero. En resumen, se observa un fenómeno de alternancia de mínimos y máximos de intensidad en la zona central de los patrones de difracción, que depende de la distancia z ; evidenciando que la función moduladora se compone de otras funciones que alternan su relevancia según la distancia que existe entre el plano que contiene al objeto difractor y el plano de distribución.

Por otro lado, se aprecia que la función modulada es del tipo coseno cuadrado $\cos^2(2\pi ul)$, lo que visualmente se aprecia como líneas de interferencia de Young con orientación vertical que se encuentran contenidas adentro de los anillos concéntricos y son aún más notorias en las zonas de bajo brillo, es decir en los anillos más exteriores.

Además, al comparar los espectros de difracción es distribución de intensidad capturados a distintas distancias z , el grosor de los anillos y el diámetro del círculo central contenido en su interior aumentan conforme el plano de grabado se aleja del objeto difractor; esto resulta evidente al examinar la Figura 4.7a, capturada a la distancia $z = (102 \pm 0.05)cm$ y la Figura 4.7f, que fue fotografiada a la distancia $z = (203 \pm 0.05)cm$. Esto da evidencia de un posible fenómeno de amplificación, en el que aumentan las dimensiones del patrón de difracción conforme crece la distancia z de separación entre el plano que contiene el objeto difractor y el plano de distribución.

Otro aspecto que puede destacarse es que conforme el plano de distribución se aleja del objeto difractor, es decir $z \rightarrow \infty$, los espectros de intensidad dan la apariencia de juntarse, de hecho, los anillos más exteriores llegan a superponerse como se aprecia en las Figuras 4.7d, 4.7e y 4.7f. Esto contrasta mucho con los resultados obtenidos para la región de Fresnel correspondientes a la Figura 4.6, en donde ambas distribuciones de anillos se encontraban completamente separadas y por lo tanto el espacio entre ellas era completamente oscuro; no obstante, en la región de Fraunhofer, a partir de $z = (118 \pm 0.05)cm$, se observa que los patrones de difracción circulares en sus partes más externas se interceptan lo que causa que el espacio de separación entre ambos presente zonas brillantes. Es relevante mencionar que esta conjunción de los patrones en distribución de intensidad es más evidente cuanto mayor es la distancia z , pero nunca llegan a superponerse completamente al límite de presentarse

una única distribución de anillos concéntricos, pues el sistema óptico carece de una lente que los haga converger.

Experimentalmente se encontró que la región de Fraunhofer inicia a una distancia entre $z \approx (98 \pm 0.05) \text{ cm}$. No puede señalarse una distancia específica en la que concluya la zona de Fraunhofer.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones alcanzadas, de acuerdo con un análisis de los resultados teóricos y experimentales obtenidos. Dichas conclusiones son las siguientes:

- a) Empleando el método de propagación del espectro angular, se determinó un modelo matemático de difracción general al que da referencia la ecuación (2.30), que permite explicar el traslado que sufre un campo difractado desde el plano que contiene al objeto difractor hasta el plano en el que se distribuye al propagarse una distancia z ; es decir, se obtuvo el espectro angular propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$ como una función en términos del espectro angular no propagado $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$ multiplicado por una función de transferencia $T = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}$.
- b) Se logró el objetivo específico que consiste en generar el modelo matemático de difracción en la región de Fresnel o de convolución de la transformada de Fourier, situada en el intervalo $(0 < z < \infty)$, esto se justifica mediante la ecuación (2.54).
- c) Se alcanzó el objetivo específico que consiste en generar el modelo matemático de difracción en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier, situada en el intervalo $(z \rightarrow \infty)$; para esto se obtuvo el campo difractado y propagado $E_z(x_z, y_z, z)$ correspondiente a la ecuación (2.55) y a partir de esta se realizó el desarrollo de un factor cuadrático, como lo propusieron (Goodman, 2005, pp. 73-77) y (Ersoy, 2007, pp. 74-75), con lo cual resultó que el campo difractado en la zona de Fraunhofer es igual a la transformada exacta de Fourier de la función de transmitancia asociada a la geometría del objeto $t(x, y)$, como se aprecia en la expresión (2.64).
- d) Se cumplió el objetivo general que consiste en determinar el modelo matemático de difracción sin el uso de lente producido por rendijas de geometría rectangular y circular; así se obtuvo, para el caso del par de rendijas rectangulares, el modelo de

difracción justificado por la ecuación (3.70) en la región de Fresnel y (3.75) en la región de Fraunhofer. Por otro lado, la distribución de intensidad del campo difractado y propagado está dada por la expresión (3.72) en la región de Fresnel y (3.76) en la región de Fraunhofer.

- e) Nuevamente respecto al objetivo general, pero para el caso de las dos aberturas circulares, se establece este que también fue logrado. La ecuación (3.118) da referencia de la distribución de amplitud del campo difractado y propagado a la región de Fresnel, mientras que la ecuación (3.124) corresponde a la región de Fraunhofer. Además, la distribución de intensidad está dada por las expresiones (3.121) y (3.122) en la región de Fresnel y (3.125) en la región de Fraunhofer.
- f) Respecto al objetivo particular de implementar un arreglo experimental óptico coherente, este también fue logrado como se expone en la Figura 4.1, donde se muestra el experimento para producir distribuciones de intensidad del campo difractado.
- g) El objetivo particular de producir y grabar los patrones de difracción en distribución de intensidad generados experimentalmente también fue logrado, y la evidencia son las imágenes fotográficas de los patrones de difracción seleccionados con sus correspondientes tiempos de exposición, que se encuentran en el Capítulo 4. Algunos aspectos que se pueden destacar son los siguientes: a) la región de Fresnel no tiene la misma distancia z para el par de rendijas rectangulares que, para el par de aberturas circulares, ambas usadas como objetos difractores; b) se observó que para objetos difractores de geometría rectangular y circular, la región de Fresnel y la región de Fraunhofer no está muy alejada del objeto difractor.
- h) Se observó que los patrones de difracción en la región de Fraunhofer se amplificaban, es decir que se hacían más grandes, conforme la distancia z desde el objeto difractor hasta el plano de grabado aumentaba, a pesar de que el objeto difractor se iluminó con frentes de onda planos.

- Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.
- i) Se propone como trabajo futuro la realización de una etapa de simulación para comprobar los planteamientos teóricos y los resultados experimentales y tener una solución más completa del problema de difracción sin lente.
 - j) El tema queda abierto para ser retomado con otro tipo de objetos difractores e iluminación con luz de láser, de frentes esféricos, gaussianos o cilíndricos, entre otras opciones.

ANEXO DEFINICIONES

1.- Definición de convolución: Es una operación matemática en la que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el mismo espacio se transforman en una tercera función en el espacio del desplazamiento que sufre una de ellas. La convolución representa la magnitud de superposición de $f(x)$ y una versión invertida y trasladada de $g(x)$. No obstante, la convolución puede realizarse entre más de dos funciones. Formalmente está dada por la siguiente integral:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)g(x - \beta) d\beta. \quad (\text{A.1})$$

Algunas propiedades de la operación de convolución son:

a) Conmutatividad: El orden de las funciones en la convolución no afecta el resultado, es decir que no importa si se realiza un desplazamiento $f(x - \beta)$ o $g(x - \beta)$, el resultado obtenido en ambos casos es el mismo.

$$f(x) \otimes g(x) = g(x) \otimes f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)g(x - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta)f(x - \beta) d\beta. \quad (\text{A.2})$$

b) Asociatividad: El resultado de la convolución de tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ será el mismo, sin importar como se agrupen los elementos al realizarse la operación.

$$[f(x) \otimes g(x)] \otimes h(x) = f(x)[g(x) \otimes h(x)]. \quad (\text{A.3})$$

c) Distributiva: La convolución de una función $f(x)$ con la suma de otras dos funciones $g(x) + h(x)$, es igual a la suma de las convoluciones de la función $f(x)$ con cada una de las otras dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, individualmente.

$$f(x) \otimes [g(x) + h(x)] = [f(x) \otimes g(x)] + [f(x) \otimes h(x)]. \quad (\text{A.4})$$

d) Elemento neutro: La convolución de una función $f(x)$ con una función delta de Dirac $\delta(x)$ no cambia la función original.

$$f(x) \otimes \delta(x) = f(x). \quad (\text{A.5})$$

e) Propiedad de multiplicación por un escalar: Cuando alguna de las funciones $f(x)$ o $g(x)$ que intervienen en la convolución esta multiplicado por algún escalar a , entonces el escalar puede colocarse “afuera” de la convolución o bien asociarse a la otra función.

$$af(x) \otimes g(x) = a[f(x) \otimes g(x)] = f(x) \otimes ag(x). \quad (\text{A.6})$$

2.- Definición de transformada de Fourier: Es una herramienta matemática que convierte una función $g(x)$ en el dominio del espacio o el tiempo a una función $G(u)$ en el dominio de la frecuencia. En su representación unidimensional está dada por la siguiente integral:

$$\mathfrak{F}\{g(x)\} = G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i2\pi ux} dx. \quad (\text{A.7})$$

Por otra parte, en su representación bidimensional,

$$\mathfrak{F}\{g(x, y)\} = G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy, \quad (\text{A.8})$$

donde u y v son las frecuencias espaciales paraxiales. Para que exista $G(u)$ y $G(u, v)$ hay un conjunto de condiciones suficientes también llamadas condiciones de Dirichlet:

a) g debe ser absolutamente integrable en el plano x, y , es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y)| dx dy < \infty. \quad (\text{A.9})$$

b) g debe tener un numero finito de discontinuidades y un numero finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.

c) g no debe tener discontinuidades infinitas.

3.- Definición de transformada de Fourier-Bessel: También llamada transformada de Hankel, es una transformada integral que opera sobre una función $g(r)$ y permite expresarla como una suma ponderada de funciones de Bessel de primer tipo $J_k(2\pi r\omega)$ con orden k ; esta transformada resulta de utilidad en problemas con coordenadas cilíndricas y polares, además cumple con los teoremas de la Transformada de Fourier. Matemáticamente, se encuentra descrita mediante la siguiente integral:

$$\mathcal{B}\{g(r)\} = G(\omega) = \int_0^{\infty} g(r)J_k(2\pi r\omega)r dr. \quad (\text{A.10})$$

Mientras que la transformada de inversa de Fourier Bessel, queda descrita de la siguiente forma:

$$\mathcal{B}^{-1}\{G(\omega)\} = g(r) = \int_0^{\infty} G(\omega) J_k(2\pi r \omega) \omega d\omega. \quad (\text{A.11})$$

La transformada de Fourier y la transformada de Fourier Bessel cumplen algunos teoremas que se enuncian a continuación, sin demostración:

4.-Teorema de linealidad: La transformada de Fourier de una suma de las funciones $g(x)$ y $h(x)$, puede verse como la suma de sus transformadas individuales, es decir $G(u)$ y $H(u)$, respectivamente; donde a_1 y a_2 corresponden a constantes.

$$\mathfrak{F}\{a_1 g(x) + a_2 h(x)\} = a_1 \mathfrak{F}\{g(x)\} + a_2 \mathfrak{F}\{h(x)\} = a_1 G(u) + a_2 H(u). \quad (\text{A.12})$$

5.-Teorema de variables separables: La transformada de Fourier $G(u, v)$ correspondiente a una función $g(x, y)$ de dos variables independientes x e y y que puede separarse como el producto $g(x)g(y)$, es igual a realizar el producto de las transformadas de Fourier individuales $G(u)$ y $G(v)$ de cada función.

$$\mathfrak{F}\{g(x, y)\} = \mathfrak{F}\{g(x)g(y)\} = \mathfrak{F}\{g(x)\}\mathfrak{F}\{g(y)\} = G(u)G(v) = G(u, v). \quad (\text{A.13})$$

6.- Teorema de la transformada inversa de Fourier: La transformada inversa de Fourier permite reconstruir una función en el dominio del espacio o el tiempo $g(x)$, a partir de su representación en el dominio de la frecuencia $G(u)$; matemáticamente está dada por una integral, pero con signo positivo en el exponente del factor de Fourier.

$$g(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{G(u)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{i2\pi ux} du. \quad (\text{A.14})$$

Por otra parte, en su representación bidimensional,

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{G(u, v)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv. \quad (\text{A.15})$$

7.-Teorema de identidad: Para una función $g(x)$, al realizar su transformada de Fourier y sucesivamente su transformada inversa, se produce nuevamente la función $g(x)$, excepto en los puntos de discontinuidad. Lo mismo ocurre al realizar primero la transformada inversa y sucesivamente la transformada de Fourier.

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{g(x)\} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\{g(x)\} = g(x). \quad (\text{A.16})$$

8.-Teorema de desplazamiento o traslación: Si se tiene una función $g(x)$ con transformada de Fourier $G(u)$; entonces la función desplazada $g(x - b)$ tendrá una transformada de Fourier igual a la transformada de Fourier de la función sin desplazar multiplicada por un factor exponencial con un cambio de fase en el dominio de la frecuencia.

$$\mathfrak{F}\{g(x - b)\} = G(u)e^{-i2\pi ub}. \quad (\text{A.17})$$

9.-Teorema de escalamiento o de similitud para la transformada de Fourier: La transformada de Fourier de una función $g(ax)$, escalada una cantidad a constante y que no es cero, da como resultado:

$$\mathfrak{F}\{g(ax)\} = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{u}{a}\right) \quad (\text{A.18})$$

Dicha expresión es análoga a la siguiente

$$\mathfrak{F}\left\{g\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = |a|G(au). \quad (\text{A.19})$$

Es decir que si a causa que el ancho de la función aumente, su transformada de Fourier sufre una contracción al multiplicarse por $\frac{1}{|a|}$. De manera análoga si $\frac{1}{|a|}$ genera que el ancho de la función disminuya, la transformada de Fourier será más amplia al multiplicarse por el factor $|a|$.

10.- Teorema de escalamiento de la transformada de Fourier-Bessel: La transformada de Fourier-Bessel de una función $g(r)$ escalada en un factor a , es decir $g(ar)$,

resulta en la transformada de Fourier Bessel de la función original, pero con la frecuencia dividida por a y con la amplitud multiplicándose por un factor $\frac{1}{a^2}$.

$$\mathcal{B}\{g(ar)\} = \frac{1}{a^2} G\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (\text{A.20})$$

11.-Transformada de un producto: Si se tiene dos funciones $g(x)$ y $f(x)$ cuyas transformadas de Fourier individuales son $G(u)$ y $F(u)$, entonces la transformada de Fourier del producto $g(x)f(x)$ esta dada por la convolución de $G(u)$ y $F(u)$.

$$\mathfrak{F}\{g(x)f(x)\} = G(u) \otimes F(u). \quad (\text{A.21})$$

12.-Transformada inversa de un producto: Si se tiene dos funciones $G(u)$ y $F(u)$, cuyas transformadas de Fourier inversas individuales son $g(x)$ y $f(x)$, entonces la transformada de Fourier inversa del producto de $G(u)$ y $F(u)$ esta dada por la convolución de sus transformadas inversas individuales.

$$\mathfrak{F}^{-1}\{G(u)F(u)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{G(u)\} \otimes \mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\} = g(x) \otimes f(x). \quad (\text{A.22})$$

13.-Transformada de una convolución: La transformada de Fourier de una convolución en el dominio espacial entre las funciones $g(x)$ e $f(x)$, cuyas transformadas de Fourier son $G(u)$ y $F(u)$, respectivamente, es igual al producto de sus transformadas individuales.

$$\mathfrak{F}\{g(x) \otimes f(x)\} = G(u)F(u). \quad (\text{A.23})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ersoy, O. (2007). *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. Hoboken, Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc. A.
- [2] Hecht, E. (2000). *Óptica* (3° ed.). Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.
- [3] Goodman, J. (2005). *Introduction to Fourier Optics* (2nd ed.). Estados Unidos: McGraw-Hill Series.
- [4] Zárate, E. (2011). *Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas*. Tonantzintla, Puebla: INAOE.
- [5] Malacara, D. (2015). *Óptica básica* (3° ed.). México: Fondo de Cultura Económica.
- [6] Hecht, E., & Zajac, A. (1998). *Óptica* (3° ed.). Addison-Wesley.
- [7] Born, M., & Wolf, E. (2005). *Principles of Optics* (7th ed.). Reino Unido: Cambridge University Press.
- [8] Reyes-Alejo, V. (2022). *Difracción en el plano de Fraunhofer de una lente doblete cementado*. Cunduacán, Tabasco: UJAT.
- [9] Anoya, G. (2000). *Formacion de imágenes a través de una lente convergente y su interpretación mediante la Óptica Física*. Cunduacán, Tabasco: UJAT.
- [10] Frías, B. (2008). *Un modelo matemático de la transformada exacta de Fourier para interpretar patrones de difracción*. Cunduacán, Tabasco: UJAT.
- [11] Gaskill, J. (1978). *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*. Estados Unidos: Wiley.
- [12] Martínez-Niconoff, G., Muñoz-López, J., & Méndez-Martínez, E. (2001). Description of phase singularities and their application to focusing design. *J. Opt. Am. A*(10), 2089-2094.
- [13] Spiegel, M. (2014). *Formulas y tablas de matemática aplicada* (4° ed.). Estados Unidos.: McGraw-Hill.

- [14] Steward, J. (2012). *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7° ed.). Estados Unidos.: CENGAGE Learning.
- [15] Papoulis, A. (1968). *Systems and Transforms with Applications in Optics* (1st ed.). Estados Unidos: McGraw-Hill.
- [16] Sheppard, C., & Hrynevych, M. (1992). Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory. *J. Opt. Am. A*, 9(2), 274-281.
- [17] Zárate, E., Gutiérrez, G., Córdova, Q., & Hernández-Nolasco, J. (2019). Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. *Revista Mexicana de Física*(65), 299-306.
- [18] Zárate, E., Córdova, Q., Hernández-Nolasco, J., Tepach, G., & Treviño-Palacios, C. (2013). Elliptical Bessel-like diffraction pattern produced by circular apertures with different radius. *SPIE*(8785), 1-6.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de la Tesis	Estudio del fenómeno de difracción sin el uso de lente.
Autor de la Tesis	Marian Cristina Ricárdez Torres.
ORCID	0009-0000-5904-572X
Resumen de la Tesis	<p>El objetivo general de este trabajo fue determinar el modelo matemático de difracción sin el uso de lente producido por un par de rendijas de geometría rectangular y un par de aberturas circulares del mismo radio. Mediante el método de propagación del espectro angular se obtuvo como resultado para la región de Fresnel, situada a una distancia z del objeto difractor dentro del intervalo ($0 < z < \infty$), la convolución entre la transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada a la geometría de la abertura y una función exponencial; mientras que, para la región de Fraunhofer, situada a una distancia ($z \rightarrow \infty$) se obtuvo la transformada de Fourier exacta de la función de transmitancia. Se comprobaron los resultados experimentalmente mediante la implementación de un arreglo óptico coherente sin el uso de lente transformadora y luz de láser como fuente de iluminación. Los patrones de difracción en distribución de intensidad fueron grabados mediante el método fotográfico, empleando distancias y tiempos de exposición diferentes.</p>
Palabras claves de la Tesis	Difracción, distribución de intensidad, espectro angular, función de transmitancia, luz de laser, ondas planas, patrones de difracción, transformada de Fourier, zona de Fraunhofer, zona de Fresnel.
Referencias citadas	<p>[1] Ersoy, O. (2007). <i>Diffraction, Fourier Optics and Imaging</i>. Hoboken, Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc. A.</p> <p>[2] Hecht, E. (2000). <i>Óptica</i> (3° ed.). Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.</p> <p>[3] Goodman, J. (2005). <i>Introduction to Fourier Optics</i> (2nd ed.). Estados Unidos: McGraw-Hill Series.</p> <p>[4] Zárate, E. (2011). <i>Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas</i>. Tonantzintla, Puebla: INAOE.</p> <p>[5] Malacara, D. (2015). <i>Óptica básica</i> (3° ed.). México: Fondo de Cultura Económica.</p> <p>[6] Hecht, E., & Zajac, A. (1998). <i>Óptica</i> (3° ed.). Addison-Wesley.</p> <p>[7] Born, M., & Wolf, E. (2005). <i>Principles of Optics</i> (7th ed.). Reino Unido: Cambridge University Press.</p>

	<p>[8] Reyes-Alejo, V. (2022). <i>Difracción en el plano de Fraunhofer de una lente doblete cementado</i>. Cunduacán, Tabasco: UJAT.</p> <p>[9] Anoya, G. (2000). <i>Formación de imágenes a través de una lente convergente y su interpretación mediante la Óptica Física</i>. Cunduacán, Tabasco: UJAT.</p> <p>[10] Frías, B. (2008). <i>Un modelo matemático de la transformada exacta de Fourier para interpretar patrones de difracción</i>. Cunduacán, Tabasco: UJAT.</p> <p>[11] Gaskill, J. (1978). <i>Linear Systems, Fourier Transforms and Optics</i>. Estados Unidos: Wiley.</p> <p>[12] Martínez-Niconoff, G., Muñoz-López, J., & Méndez-Martínez, E. (2001). Description of phase singularities and their application to focusing design. <i>J. Opt. Am. A</i>(10), 2089-2094.</p> <p>[13] Spiegel, M. (2014). <i>Formulas y tablas de matemática aplicada</i> (4^o ed.). Estados Unidos.: McGraw-Hill.</p> <p>[14] Steward, J. (2012). <i>Calculo de una variable. Trascendentes tempranas</i> (7^o ed.). Estados Unidos.: CENGAGE Learning.</p> <p>[15] Papoulis, A. (1968). <i>Systems and Transforms with Applications in Optics</i> (1st ed.). Estados Unidos: McGraw-Hill.</p> <p>[16] Sheppard, C., & Hrynevych, M. (1992). Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory. <i>J. Opt. Am. A</i>, 9(2), 274-281.</p> <p>[17] Zárate, E., Gutiérrez, G., Córdova, Q., & Hernández-Nolasco, J. (2019). Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. <i>Revista Mexicana de Física</i>(65), 299-306.</p> <p>[18] Zárate, E., Córdova, Q., Hernández-Nolasco, J., Tepach, G., & Treviño-Palacios, C. (2013). Elliptical Bessel-like diffraction pattern produced by circular apertures with different radius. <i>SPIE</i>(8785), 1-6.</p>
--	---