



**Universidad Juárez Autónoma
De Tabasco**

División Académica de Ciencias Básicas

**DIMENSIÓN FRACTAL DE
CONJUNTOS LÍMITES**

Tesis

Para obtener el grado de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

Presenta:

LUIS MANUEL MARTÍNEZ GONZÁLEZ

Director de tesis:

DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

Cunduacán, Tabasco, 12 de septiembre de 2014.



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dirección



"2014, Conmemoración del 150 Aniversario de la Gesta Heroica del 27 de Febrero de 1864"

10 de septiembre de 2014

Lic. en Mat. Luis Manuel Martínez González
Pasante del Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas
Presente.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**DIMENSIÓN FRACTAL DE CONJUNTOS LÍMITES**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente,


Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director

DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'GBG/emt

Miembro CUMEX desde 2008
Consortio de
Universidades
Mexicanas
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km. 1, Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6702

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada Calculo de dimensión fractal de conjuntos límites, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para la difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa Tabasco a los 19 días del mes de septiembre del año 2014.

Autorizo



Luis Manuel Martínez González

Sinodales

Integrado por los profesores

1. Dr. Gamaliel Blé González
2. Dr. Justino Álvarez Ramírez
3. Dr. Victor Castellanos Vargas
4. M.C Jorge López López
5. Dr. Carlos Alfonso Cabera Ocañas

Agradecimientos

A DIOS

Gracias Señor por permitirme terminar otra de mis metas más anheladas, gracias por siempre estar en los momentos más difíciles de mi vida académica y de mi vida personal. Cuando me sentí derrotado tu me ayudaste a levantarme alentándome a seguir siempre firme.

A MI MADRE

Sra. Argelia González García. Por su dedicación en todos los momentos de mi vida, por enseñarme los valores para siempre mirar hacia adelante, por ser un ejemplo en mi vida, por todos los sacrificios que hizo para que yo jamás dejara de estudiar. De manera especial también quisiera agradecer al esposo de mi madre el Sr. José Víctor Ortíz Heredia, por ser un pilar fundamental en el desarrollo académico y personal. Por apoyarme en todo momento y a cualquier hora.

A MI ESPOSA

Sra. Kristhell Cordova García. Por estar siempre a mi lado apoyándome, motivándome y siendo paciente en los momentos cruciales de la carrera, demostrándome su ayuda incondicional, su dedicación y su comprensión.

A MIS FAMILIARES Y AMIGOS

Por sus buenos consejos que me ayudaron a seguir firme en este largo caminar.

A MI ASESOR

Dr. Gamaliel Blé González. Por su dedicación, su esmero, sus observaciones y sobre todo por su paciencia para con este servidor en la elaboración de este trabajo.

A CONACyT

Por la beca para realizar estudios de maestría.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Cálculo de la Dimensión Fractal de Conjuntos Límites

Luis Manuel Martínez González
19 de septiembre de 2014

Índice general

Introducción	iv
1. Preliminares	1
1.1. Iteración de funciones y puntos periódicos	1
1.2. Conjugación y puntos periódicos	5
1.3. Medidas invariantes	8
2. Dimensión Fractal	11
2.1. Dimensión Hausdorff	11
2.1.1. Medida de Hausdorff	11
2.1.2. Dimensión Hausdorff	17
2.2. Dimensión por conteo de cajas	21
2.2.1. Dimensión por cajas	22
2.2.2. Propiedades y problemas de la dimensión por cajas	28
3. Dimensión Fractal de Conjuntos Autosemejantes	30
3.1. Conjunto autosemejante	30
3.2. Aplicación Contractiva	31
3.3. Conjuntos límites de aplicaciones contractivas	33
3.4. Dimensión fractal de conjuntos autosemejantes	39
4. Dimensión Fractal de Conjuntos de Julia	48
4.1. Conjuntos de Julia y de Fatou.	48
4.2. Hiperbolicidad	49
4.3. Aplicaciones Polinomiales	50
4.4. Particiones de Markov y el algoritmo del valor propio	54
4.4.1. Partición de Markov	55
4.4.2. Algoritmo del valor propio	56
4.4.3. Particiones de Markov para polinomios	58
4.5. Resultados	66
Conclusión	70
Bibliografía	71
A. Método de la potencia	74

B. Funciones en Matlab

77

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Introducción

En el estudio de la dinámica de las aplicaciones racionales, el plano complejo compactificado se puede dividir en dos conjuntos disjuntos, el estable (conjunto de Fatou), y el conjunto inestable o conjunto de Julia. En el caso polinomial, el infinito es un punto fijo super-atractor, en consecuencia tiene un dominio de atracción el cual es un abierto en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y pertenece al conjunto de Fatou del polinomio. El conjunto de Julia resulta ser la frontera de este dominio y además coincide con la frontera del conjunto de condiciones iniciales con órbitas acotadas, al cual se le llama Julia lleno. En general, los conjuntos de Julia son conjuntos fractales y una herramienta importante que se ha desarrollado para clasificarlos es la dimensión fractal. De igual manera cuando se iteran más de dos funciones contractivas en el plano se obtiene que los conjuntos límites son conjuntos fractales. En este trabajo analizaremos la dimensión Hausdorff de conjuntos compactos y la calcularemos en conjuntos límites obtenidos al iterar funciones contractivas o funciones polinomiales.

Con la finalidad de hacer este documento autocontenido en el capítulo uno introducimos algunos conceptos fundamentales en sistemas dinámicos discreto, así como algunos conceptos de teoría de la medida.

En el capítulo dos presentamos la definición de dimensión Hausdorff, algunas de sus propiedades y ejemplos. También se muestra la definición de dimensión por conteo de cajas, algunos de los problemas que presenta y algunos ejemplos. Además, se analiza la relación de la dimensión Hausdorff y la dimensión por conteo de cajas.

En el capítulo tres estudiamos a los conjuntos autosemejantes. Daremos la definición de estos conjuntos y mostraremos que dichos conjuntos se pueden obtener mediante una aplicación contractiva (obtenida de una colección finita de aplicaciones contractivas) como el límite de una sucesión de conjuntos. Esto nos permite obtener una fórmula que calcula la dimensión fractal de estos conjuntos.

En el capítulo cuatro estudiamos en primera instancia a los conjuntos de Julia, luego se dan algunos resultados de las aplicaciones polinomiales. De igual manera se muestra el algoritmo del valor propio el cual nos permite calcular la dimensión fractal de conjuntos de Julia de aplicaciones expansivas. Mostramos resultados de conjuntos de Julia de la familia real, es decir, calculamos la dimensión fractal de conjuntos de Julia de polinomios $P(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados de dinámica discreta que son válidos para funciones continuas, aún cuando en el trabajo se analizarán particularmente funciones analíticas en los reales, en \mathbb{R}^2 y en el plano complejo. Además de algunos conceptos básicos de teoría de la medida.

1.1. Iteración de funciones y puntos periódicos

Existen diversos problemas en matemáticas y en la ciencia en general que involucran o se pueden representar a través de iteración de funciones, donde iterar una función significa que se compone ella consigo misma una y otra vez. En dinámica, uno de los problemas interesantes es la determinación de la convergencia del proceso que resulta al aplicar sucesivamente una función.

Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ continua, iterar la función f es componerla con ella misma de manera recursiva. Denotaremos por $f^2(x)$ a la segunda iteración o iterada de f ,

$$\begin{aligned}f^2(x) &= f(f(x)) = (f \circ f)(x), \\f^3(x) &= f(f(f(x))) = (f \circ f \circ f)(x),\end{aligned}$$

es la tercera iterada de f . En general $f^n(x)$ es la n -ésima composición de f consigo misma aplicada a x . Un problema interesante es determinar cuando existe el límite en X de la sucesión de $\{f^n(x)\}$.

Ejemplo 1.1.1. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces

$$f^2(x) = (x^2 + 1)^2 + 1$$

y

$$f^3(x) = ((x^2 + 1)^2 + 1)^2 + 1$$

son la segunda y tercera iterada de f , respectivamente.

Definición 1.1.2. (Órbita de un punto)

Si $f : X \rightarrow X$ es una función, la órbita $O_f(x_0)$ de un punto $x_0 \in X$ se define como el conjunto de

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0) \dots\}.$$

Existen órbitas que juegan un papel muy importante en el estudio de un sistema dinámico, tal es el caso de las órbitas finitas. El caso más sencillo es cuando la órbita tiene un solo punto x_0 , en ese caso $f(x_0) = x_0$ y decimos que x_0 es un punto fijo.

Observación 1.1.3. Si x_0 es un punto del dominio de una función continua f tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \alpha$, entonces $f(\alpha) = \alpha$. Esto porque,

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = \alpha.$$

Esto muestra que el límite de una órbita es un punto fijo.

Los puntos fijos de f se pueden encontrar geoméricamente ya que corresponden a la intersección de la gráfica de f con la línea diagonal $y = x$.

Definición 1.1.4. (Puntos periódicos y eventualmente periódicos) Sea x_0 un punto en el dominio de una función f .

i) Se dice que x_0 es un punto periódico de f con periodo k , cuando $f^k(x_0) = x_0$ para algún entero positivo k y $f^r(x_0) \neq x_0$ para $0 < r < k$.

ii) Se dice que x_0 es un punto eventualmente periódico o preperiódico de f si para algún $m \in \mathbb{N}$, $f^m(x_0)$ es un punto periódico de f . Es decir, x_0 es eventualmente periódico si $f^{k+m}(x_0) = f^m(x_0)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

De las definiciones anteriores se deduce que la órbita de un punto k -periódico es el conjunto:

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}.$$

Dicha órbita se llama a menudo un k -ciclo. Gráficamente, podemos encontrar un punto periódico intersectando la gráfica de f^k con la diagonal $y = x$, es decir, es la coordenada x del punto donde la gráfica de la función f^k corta a la diagonal $y = x$.

Muchos fenómenos físicos tienen ciertos patrones que se repiten a sí mismos, estos patrones producen ciclos u órbitas periódicas, de ahí que la noción de periodicidad sea importante en el campo de los sistemas dinámicos.

Ejemplo 1.1.5. Si $f(x) = x^2 - 1$, entonces 0 está en un ciclo de periodo 2, ya que $f(0) = -1$ y $f(-1) = 0$. Por lo tanto, la órbita de cero es simplemente

$$O_f(0) = \{0, -1\}.$$

Decimos que 0 y 1 forman un 2-ciclo.

Así también 1 es eventualmente periódico, ya que $f(1) = 0$, el cual está en un ciclo de periodo 2 y el punto $\sqrt{2}$ es eventualmente periódico ya que la órbita es

$$O_f(\sqrt{2}) = \{\sqrt{2}, 1, 0, -1\}.$$

Observemos que los puntos de periodo 2 de f son solución de la ecuación $f^2(x) = x$, es decir, $x^4 - 2x^2 = x$. Esta ecuación tiene cuatro soluciones, pero 2 de ellas corresponden a los puntos fijos de f . En general, para determinar los puntos k -periódicos, se deben descartar los puntos periódicos de la solución de la ecuación $f^k(x) = x$ tales que, dichos periodos sean divisores de k , ya que estos puntos también aparecen como solución de esta ecuación.

Los puntos fijos y los ciclos están entre los más importantes tipos de órbitas de un sistema dinámico, así que es importante clasificarlos.

Hay dos tipos notables de puntos fijos: puntos atractores y puntos repulsores. La idea de estos conceptos se puede ilustrar con la función cuadrática $f(x) = x^2$. Esta aplicación tiene dos puntos fijos, en 0 y 1. Pero nótese lo que sucede con las órbitas de puntos cercanos. Si elegimos cualquier x_0 con $|x_0| < 1$, entonces la órbita de x_0 se aproxima rápidamente a 0. Por ejemplo la órbita de 0.1 es:

$$O_f(0.1) = \{0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \dots\}.$$

En efecto, para cualquier x_0 con $0 \leq x_0 < 1$, no importa que tan cercano este a 1, resulta que esa órbita se aleja de 1 y se acerca a 0. Por ejemplo, la órbita de 0.9 es:

$$O_f(0.09) = \{0.9, 0.81, 0.6561, 0.43046721, 0.1853020 \dots, 0.034336838 \dots, 0.001179018 \dots, \dots\}.$$

Más precisamente, si x_0 con $0 \leq x_0 < 1$, entonces $f^n(x_0)$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞ . Por otra parte, si $x_0 > 1$, entonces nuevamente la órbita de x_0 se mueve lejos de 1. Por ejemplo, la órbita de 1.1 es

$$O_f(1.1) = \{1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436 \dots, 4.5950 \dots, \dots, 21.114 \dots, \dots\}.$$

Así, si $x_0 > 1$ tenemos que $f^n(x_0)$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞ y por lo tanto la órbita se aleja de 1. Por otro lado, los puntos que están cerca de 0 tienen órbitas que son atraídas a 0 como lo podemos ver en la figura 1.1.

Esta propiedad de los puntos fijos las podemos leer en su derivada, por lo que tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.6. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función analítica en x_0 y $f(x_0) = x_0$.

1. El punto x_0 es un punto fijo atractor si $|f'(x_0)| < 1$, si $f'(x_0) = 0$ diremos que x_0 es super-atractor.
2. El punto x_0 es un punto fijo repulsor si $|f'(x_0)| > 1$.
3. El punto x_0 es un punto fijo indiferente si $|f'(x_0)| = 1$, es decir, $f'(x_0) = e^{2\pi i\theta}$.

En términos de θ los puntos fijos indiferentes se pueden clasificar en parabólicos (θ racional) y Siegel o Cremer (θ irracional) y los analizaremos más adelante.

Como en el caso de los puntos fijos, los puntos periódicos pueden ser también clasificados como atractores, repulsores o neutrales.

Un punto periódico de periodo n es atractor (repulsor) si es un punto fijo atractor (repulsor) para $f^n(x)$. De igual manera se definen los puntos periódicos indiferentes.

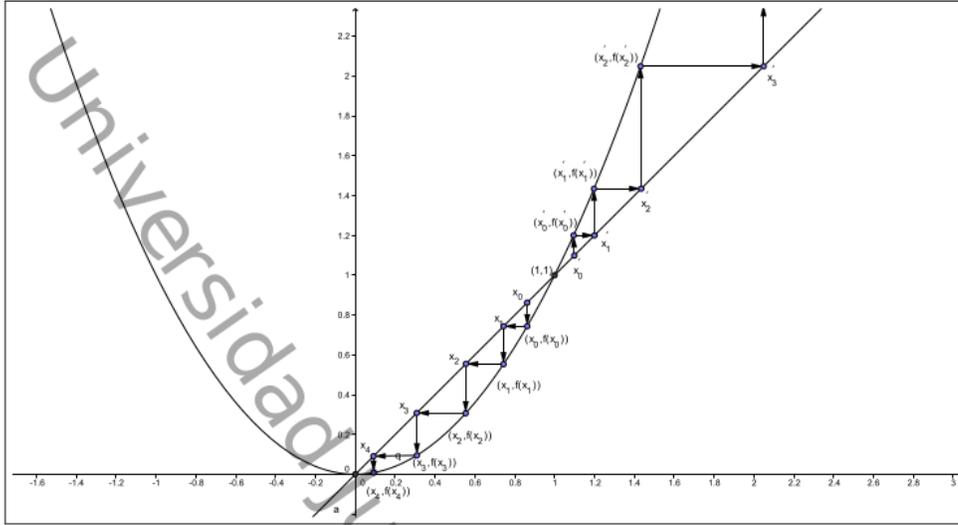


Figura 1.1: Iteración de un punto en la función cuadrática.

Ejemplo 1.1.7. Los puntos fijos de $f(x) = 2x(1 - x)$ son 0 y $\frac{1}{2}$, los cuales son repulsor y atractor, respectivamente.

Solución.

Los puntos fijos se encuentran al resolver la ecuación $2x(1 - x) = x$ los cuales son $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Dado que $f'(x) = 2 - 4x$ tenemos que $|f'(x_1)| = 2 > 1$, por lo que x_1 es repulsor. Por otro lado, $|f'(x_2)| = 0 < 1$; por lo que el punto fijo x_2 es atractor.

Observemos que si x_0 es un punto periódico de periodo n para f , con $x_i = f^i(x_0)$, se tiene que

$$(f^2)'(x_0) = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0)$$

y

$$(f^2)'(x_1) = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_0)f'(x_1),$$

$$(f^3)'(x_0) = f'(f^2(x_0))(f^2)'(x_0) = f'(x_2)f'(x_1)f'(x_0),$$

y

$$(f^3)'(x_1) = f'(f^2(x_1))(f^2)'(x_1) = f'(x_0)f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_0)f'(x_2)f'(x_1),$$

utilizando la regla de la cadena $n - 1$ veces:

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})f'(x_{n-3}) \cdots f'(x_0)$$

y

$$(f^n)'(x_k) = f'(f^{n-1}(x_k))(f^{n-1})'(x_k) = f'(f^{n-1}(x_k))f'(f^{n-2}(x_k))(f^{n-2})'(x_k)$$

$$\begin{aligned}
 &= f'(f^{n-1}(x_k))f'(f^{n-2}(x_k))f'(f^{n-3}(x_k))\cdots f'(x_k) \\
 &= f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})\cdots f'(x_{k-(k-1)})f'(x_0)f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_k)
 \end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

$$(f^n)'(x_0) = (f^n)'(x_1) = \cdots = (f^n)'(x_{n-1}).$$

Esto nos muestra que la derivada no depende del punto de la órbita, por lo que se dice que la órbita es atractora (repulsora) si $|(f^n)'(x_i)|$ es menor (mayor) que 1 para algún $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1.2. Conjugación y puntos periódicos

Dados f y g funciones analíticas, se dice que son topológicamente (analíticamente) conjugadas en el abierto $U \subset \mathbb{C}$, si existe un homeomorfismo (bi-holomorfismo) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\varphi \circ f(z) = g \circ \varphi(z)$ para toda $z \in U$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & U \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \varphi(U) & \xrightarrow{g} & \varphi(U)
 \end{array}$$

Observemos que si f y g son dos funciones topológicamente conjugadas por medio de φ y z es un punto fijo de f , entonces $\varphi(z)$ es un punto fijo de g , ya que $g(\varphi(z)) = \varphi(f(z)) = \varphi(z)$. De hecho, aplicando inducción sobre n se puede mostrar que esto también es cierto para los puntos periódicos de f en U .

Proposición 1.2.1. Para todo polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, existe c , tal que P y $f_c(z) = z^2 + c$ son analíticamente conjugados. De hecho, la conjugación φ es un bi-holomorfismo del plano complejo, una función afín de la forma $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Hemos clasificado los puntos periódicos antes en atractor, repulsor, indiferente. Para mostrar la importancia de esta clasificación enunciaremos algunos teoremas, los cuales pueden ser consultados en [B, CG].

Teorema 1.2.2. (G. Koenigs-1884). Sea f una función analítica con un punto fijo en z_0 y cuyo multiplicador es $\lambda = Df(z_0)$. Si $0 < |\lambda| < 1$ ó $|\lambda| > 1$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y de 0, respectivamente, y un bi-holomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue analíticamente f con $g(z) = \lambda z$. Además, esta conjugación es única, módulo multiplicación por un escalar real.

Este teorema nos dice que cerca de los puntos fijos atractores o repulsores las funciones se comportan como multiplicación por λ . En particular, si z_0 es atractor, las órbitas de los puntos en una vecindad de z_0 convergen a z_0 . Este teorema también es válido para órbitas periódicas atractoras o repulsoras de periodo k , sustituyendo f por f^k .

Definición 1.2.3. (Cuenca de atracción). Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una aplicación racional y z^* un punto fijo atractor de f . La cuenca de atracción de z^* es el conjunto

$$A_f(z^*) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z^*\}.$$

La cuenca inmediata de atracción de z^* denotada por $A_f^*(z^*)$, es la componente conexa de $A_f(z^*)$ que contiene a z^* .

Las cuencas de atracción para puntos k -periódicos atractores se definen usando a f^k en vez de f . Por definición, los puntos k -periódicos atractores siempre tienen dominios inmediato de atracción abiertos y diferentes del vacío.

Ejemplo 1.2.4. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida como $f(z) = z^2$. La función f tiene dos puntos fijos, 0 e ∞ . $A_f(0)$ es el disco unitario y $A_f(\infty)$ es el complemento de la cerradura del disco unitario.

Teorema 1.2.5. (P. Fatou-1919). Sea f una aplicación racional. Si z_0 es un punto periódico atractor de f , entonces la cuenca inmediata de atracción de z_0 , $A_f^*(z_0)$ contiene al menos un punto crítico de f .

Teorema 1.2.6. (L.E. Böttcher-1904). Sean f una aplicación analítica y z_0 un punto fijo super-atractor. Si $f(z) = z_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$, con $a_k \neq 0$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y 0 , respectivamente, y un bi-holomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue $f(z)$ y $g(z) = z^k$. Esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz $(k - 1)$ -ésima de la unidad.

De igual manera que en el Teorema de Koenigs, este teorema es válido para órbitas periódicas super-atractoras.

4 Si una función analítica f en z_0 , tiene un punto fijo en z_0 con multiplicador λ de módulo uno, entonces pueden ocurrir dos cosas: que exista una vecindad U de z_0 donde f sea conjugada a la rotación λz o, que no exista tal vecindad; si ocurre el primer caso, decimos que f es linealizable en z_0 .

2 Cuando λ es una raíz de la unidad, es decir, existe n tal que $\lambda^n = 1$, se puede mostrar que f no es linealizable [CG]. Sin embargo, cuando $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ y θ es irracional, el problema de 2 linealización resulta complicado y antes de dar los resultados asociados a este caso, será necesario dar algunas definiciones de teoría de números que pueden ser consultadas en [HW].

Notemos que si $t \in [0, 1)$, entonces lo podemos desarrollar en fracción continua y obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} := [a_1, \dots, a_n]$$

2 que converge a t . A $\frac{p_n}{q_n}$ se le llama n -ésima reducida o n -ésima aproximación a t . De hecho, la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ está formada por números enteros no negativos y se obtienen usando el algoritmo de la división. En general se puede obtener la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y, salvo a_0 todos son enteros no negativos. Además, la sucesión es finita cuando t es racional e infinita cuando t es irracional.

Definición 1.2.7. Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. Decimos que t es de tipo acotado si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

Definición 1.2.8. Decimos que t es diofantino de exponente $k \geq 2$, si existe $C > 0$, tal que

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^k} \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad (p, q) = 1.$$

Definición 1.2.9. Un número $t \in \mathbb{R}$ $\text{mathbb{Q}}$ es diofantino si es diofantino para algún exponente $k \geq 2$.

4 **Proposición 1.2.10.** Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. Entonces, t es de tipo acotado si y sólo si t es diofantino de exponente 2.

Teorema 1.2.11. (Siegel-1942). Sea f una función analítica en z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ y $\lambda = f'(z_0) = \exp^{2\pi i \theta}$. Si θ es diofantino, entonces f es linealizable en z_0 .

Al dominio máximo de linealización Δ de f se le llama **disco de Siegel** y a θ se le llama número de rotación de f en Δ .

A partir de este teorema, se tiene la siguiente clasificación de los puntos indiferentes en términos de θ .

Definición 1.2.12. Sea f una función analítica en z_0 , tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \theta}$. Decimos que el punto fijo z_0 es:

1. Parabólico, si θ es racional.
2. Siegel, si θ es irracional y f es linealizable en una vecindad de z_0 .
3. Cremer, si θ es irracional y f no es linealizable en z_0 .

Teorema 1.2.13. (Brjuno-1965). Sea f una función analítica en z_0 tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \theta}$. Si $\frac{p_n}{q_n}$ denota la n -ésima aproximación a θ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

entonces f es linealizable en z_0 .

J.C. Yoccoz demostró en 1998 que para la familia de polinomios cuadráticos, la condición de Brjuno es necesaria para tener linealización, pero en general no se tiene una condición necesaria, [Y, Br].

1.3. Medidas invariantes

Como el tema principal de este trabajo es la dimensión Hausdorff, daremos algunos conceptos básicos de teoría de la medida los cuales serán importantes para desarrollar el concepto y las propiedades de la dimensión. Los resultados aquí presentados pueden ser consultados en [McHIII, CK].

Definición 1.3.1. Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ -álgebra en X o un campo de Borel, si M tiene las siguientes propiedades:

i) $X \in M$.

ii) Si $A \in M$, entonces $A^c \in M$, donde A^c es el complemento de A relativo a X .

iii) Si $\{A_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en M y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $A \in M$

Observemos que por las leyes de De Morgan, la intersección de cualquier colección de conjuntos de X en M , está de nuevo en M . Notemos que todo conjunto $X \neq \emptyset$ tiene al menos una σ -álgebra, esta σ -álgebra es la del conjunto potencia de X .

Proposición 1.3.2. Sea C cualquier colección de subconjuntos de X , existe una σ -álgebra más pequeña que contiene a C , i.e., existe una σ -álgebra A , tal que si B es cualquier σ -álgebra conteniendo a C entonces $A \subset B$.

Demostración. Sea F la familia de todas σ -álgebras (de subconjuntos de X) que contienen a C . Sea

$$A = \bigcap \{B : B \in F\}.$$

Notemos que $C \subset A$, porque cada $B \in F$ contiene a C .

Ahora, probaremos que A es también una σ -álgebra.

Si $\{A_1, A_2, \dots\}$ es una sucesión de conjuntos en A , entonces para toda $B \in F$ tenemos que $A_i \in B$, $i = 1, 2, \dots$

Como B es una σ -álgebra,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B,$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A.$$

Por otro lado, si $E \in A$, entonces $E^c \in A$. \square

Definición 1.3.3. Sea X un espacio topológico. A la σ -álgebra más pequeña B que contiene a todos los subconjuntos abiertos en X , se le llama σ -álgebra de Borel y a los subconjuntos en B , se les llama Borelianos.

En el caso que $X = \mathbb{R}$, como ejemplos de Borelianos tenemos a los intervalos abiertos, los intervalos cerrados, los conjuntos numerables, los números irracionales, entre otros.

Definición 1.3.4. Una medida μ sobre una σ -álgebra M , es una aplicación que asigna a cada conjunto en M , un número real no negativo o posiblemente ∞ , tal que:

Si A_1, A_2, A_3, \dots es una sucesión numerable (o finita) de conjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Con la igualdad si los A_i son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos.

Definición 1.3.5. Una medida μ sobre \mathbb{R}^n es una distribución de masa si

$$0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Definición 1.3.6. Si X es un conjunto y M es una σ -álgebra en X , a la pareja (X, M) se le llama espacio medible. En este caso, a los elementos de M se les llama conjuntos medibles.

Definición 1.3.7. Una medida $\mu : B \rightarrow [0, \infty)$, se dice que es invariante por $f : X \rightarrow X$ si $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para cualquier $A \in B$.

Ejemplo 1.3.8. Sea $I = [0, 1]$ y $T : I \rightarrow I$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sea m_L la medida de Lebesgue. Notemos que si $A = [a, b] \subset [0, 1]$, entonces $T^{-1}(A)$ es la unión de dos intervalos A_0 y A_1 cada uno de longitud $\frac{1}{2}m_L(A)$. Tenemos que

$$m_L(T^{-1}(A)) = m_L(A_0 \cup A_1) = m_L(A_0) + m_L(A_1) = \frac{1}{2}m_L(A) + \frac{1}{2}m_L(A) = m_L(A).$$

Por lo tanto m_L es invariante por T .

Definición 1.3.9. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto, una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada conforme en z_0 si existe $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r > 0$ tal que para cualquier curva $\gamma(t)$ que es diferenciable en $t = 0$, para la cual $\gamma(t) \in A$ y $\gamma(0) = z_0$, que satisface $\gamma'(0) \neq 0$, la curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ es diferenciable en $t = 0$ y, haciendo $u = \sigma'(0)$ y $v = \gamma'(0)$, tenemos que $|u| = r|v|$ y $\arg u = \arg v + \theta \pmod{2\pi}$.

Geoméricamente esta definición dice que una función conforme preserva los ángulos y diremos que una función es **conforme** en A , cuando es conforme en todo punto de A . En particular, si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 con $\theta = \arg f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$, [MH].

Definición 1.3.10. Un sistema dinámico conforme \mathcal{F} en $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ es una colección de aplicaciones conformes $f : U(f) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, donde el dominio $U(f)$ es un conjunto abierto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 1.3.11. (Densidad \mathcal{F} -invariante) Dado un sistema dinámico conforme \mathcal{F} , una densidad \mathcal{F} -invariante de dimensión δ es una medida μ finita y positiva en S^2 tal que

$$\mu(f(E)) = \int_E |f'(x)|^\delta d\mu$$

siempre que $f|_E$ es inyectiva, $E \subset U(f)$ es un conjunto de Borel y $f \in \mathcal{F}$. Aquí la derivada se mide en la métrica esférica, dada por $\rho(x) = \frac{2|dx|}{1+|x|^2}$ en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.12. Tomemos m_L la medida de Lebesgue y T como en el ejemplo anterior. Entonces

$$m_L(T(E)) = 2m_L(E) = \int_E |T'(x)|^\delta dm_L = \int_E 2^\delta dm_L = 2^\delta m_L(E) \Rightarrow \delta = 1$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 2

Dimensión Fractal

Aunque el concepto de dimensión Hausdorff es esencial en la geometría fractal, su cálculo a partir de la definición es relativamente complicado, por lo que en la práctica se utilizan otras definiciones de dimensión que resultan de gran valor a la hora de determinar empíricamente la dimensión de series de datos obtenidas del mundo real y que suelen coincidir con la dimensión Hausdorff en muchos casos interesantes. En este capítulo daremos la definición de dimensión Hausdorff y algunas de sus propiedades. Así mismo, introduciremos la definición de dimensión por conteo de cajas, algunas complicaciones que presenta y la relación que existe entre dimensión Hausdorff y dimensión por conteo de cajas en el caso de conjuntos compactos. Los conceptos y resultados aquí presentados pueden ser consultados en [F].

2.1. Dimensión Hausdorff

2.1.1. Medida de Hausdorff

En esta sección definiremos la medida s -dimensional de Hausdorff que nos permitirá definir la dimensión Hausdorff de un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$.

Si U es un subconjunto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n , el diámetro de U está definido como:

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\},$$

esto es, en el caso cuando U es compacto, la más grande distancia entre los pares de puntos de U .

Llamaremos una δ -cubierta de $F \subset \mathbb{R}^n$ a una colección numerable o finita $\{U_i\}$ de conjuntos de diámetro a lo más δ que cubren a F , i.e.,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Supóngase que $F \subset \mathbb{R}^n$ y s es un número no negativo, para algún $\delta > 0$ definimos,

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\}.$$

Esto es, el ínfimo se toma sobre las sumas de las s -ésimas potencias de los diámetros de todas las δ -cubiertas de F . Cuando δ decrece, la clase de cubiertas admisibles de F en la ecuación anterior se reduce, por consiguiente, el ínfimo de la definición H_δ^s se incrementa y así se aproxima a un límite cuando δ tiende a 0 y escribimos:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F).$$

Notemos que este ínfimo es mayor o igual a cero ya que sumamos potencias de números mayores o iguales a cero. Este límite existe para todo subconjunto F de \mathbb{R}^n , sin embargo, el valor límite puede ser 0 o ∞ .

Proposición 2.1.1. H_δ^s es una medida sobre los conjuntos de Borel en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea A_1, A_2, \dots una colección de conjuntos de Borel en \mathbb{R}^n . Dada $\{U_i\}$, una δ -cubierta de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, los ordenamos de la siguiente manera: Primero los que intersecan con A_1 , luego los restantes que intersecan a A_2 y así sucesivamente. Utilizamos la siguiente notación de acuerdo con esta ordenación: Ω_i es el conjunto de los índices de los conjuntos que intersecan con A_i y no intersecan con A_j , para todo $j < i$, e $i \in \mathbb{N}$, Ω_i^* es el conjunto de índices de los conjuntos que intersecan con A_i . Notemos que $\Omega_i \subset \Omega_i^*$. Ahora destaquemos que

$$H_\delta^s(A_i) = \inf \left\{ \sum_{j \in \Omega_i^*} |U_j|^s \right\}$$

ya que los conjuntos que no intersecan con A_i pueden suprimirse para calcular el ínfimo. Ahora,

$$\begin{aligned} H_\delta^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \delta\text{-cubierta de } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in \Omega_i} |U_j|^s \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \inf \left\{ \sum_{j \in \Omega_i} |U_j|^s \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \inf \left\{ \sum_{j \in \Omega_i^*} |U_j|^s \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i) \end{aligned}$$

ya que al calcular la suma sobre los conjuntos U_j con $j \in \Omega_i$, siempre es menor que la suma sobre los conjuntos U_j con $j \in \Omega_i^*$.

□

Observación 2.1.2. Sea $E \subset F$. Tomamos a $\{U_i\}$ una δ -cubierta de F , entonces $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de E , por lo que

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \delta\text{-cubierta de } F \right\} \subset \\ & \subset \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \delta\text{-cubierta de } E \right\} \end{aligned}$$

en consecuencia tomando ínfimos tenemos que $H_\delta^s(E) \leq H_\delta^s(F)$.

Teniendo ya definida la medida de Hausdorff, vamos a comprobar más adelante que existe un valor de s para el cual la medida de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ no es trivial. Además, vamos a ver que ese valor es único.

Como ya sabemos

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

siempre existe y este puede ser 0, ∞ o un número. Así, si tenemos el conjunto de las δ -cubiertas admisibles para A podemos tomar cualquier subcolección de las δ -cubiertas. Si tomamos el límite del ínfimo de las sumas de las s -ésimas potencias de los diámetros de esa subcolección de δ -cubiertas de A y ese límite existe, entonces es el mismo que $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(A)$.

Ejemplo 2.1.3. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces $H^1(A) = \text{long}(A)$.

Solución. Sea $A = (a, b)$. Ahora tomemos la δ -cubierta $U_i = [a + (i-1)\delta, a + i\delta]$, con $\delta = \frac{b-a}{n}$; $n \in \mathbb{N}$ e $i = 1, 2, \dots, n_\delta$, donde $n_\delta = \frac{b-a}{\delta}$.

De aquí,

$$H_\delta^1(A) = \inf \sum_i |U_i| \leq \sum_{i=1}^{n_\delta} \delta = n_\delta \delta = \frac{b-a}{\delta} \delta = b-a = \text{long}(A)$$

Tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ se obtiene la igualdad y por lo tanto

$$H^1(A) = \text{long}(A).$$

Ejemplo 2.1.4. Sea $A = \{(x, y) : a_1 < x < b_1, a_1 < y < b_1\} \subset \mathbb{R}^2$ un cuadrado abierto, entonces

$$H^2(A) = 2\text{Área}(A).$$

Solución

Sea $n_\delta = \frac{b_1-a_1}{\delta}$ con $\delta = \frac{b_1-a_1}{n}$. Tomemos la δ -cubierta

$$U_{ij} = [a_1 + (i-1)\delta, a_1 + i\delta] \times [a_1 + (j-1)\delta, a_1 + j\delta] \quad i, j = 1, 2, \dots, n_\delta.$$

Esto nos genera una $\sqrt{2}\delta$ -cubierta. De aquí

$$H_\delta^2(A) = \inf \sum_i |U_i| \leq \sum_{i,j=1}^{n_\delta} (\sqrt{2}\delta)^2 \leq n_\delta^2 2\delta^2 = 2(b_1 - a_1)^2 = 2\text{Área}(A).$$

Tomando el límite cuando δ tiende a cero, se obtiene la igualdad y por lo tanto

$$H^2(A) = 2\text{Área}(A).$$

Ejemplo 2.1.5. Denotemos por $D_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < r\}$, entonces

$$H^2(D_r(a)) = \frac{4}{\pi}\text{Área}(D_r(a)).$$

Solución.

El área de $D_r(a)$ es πr^2 , por otro lado, si $D_{\frac{\delta}{2}}(y)$ es cualquier disco con $y \in D_r(a)$, entonces el $\text{Área}(D_{\frac{\delta}{2}}(y)) = \pi(\frac{\delta}{2})^2$.

Por lo tanto, si queremos cubrir $D_r(a)$ con discos de diámetros δ necesitamos al menos n_δ discos donde

$$n_\delta = \frac{\pi r^2}{\pi(\frac{\delta}{2})^2} = \frac{4r^2}{\delta^2}, \text{ donde } \delta = \frac{r}{n}.$$

Así,

$$H_\delta^2(D_r(a)) = \inf \sum_i |U_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n_\delta} \delta^2 = \delta^2 \frac{4r^2}{\delta^2} = 4r^2 = \frac{4\pi r^2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\text{Área}(D_r(a)).$$

Tomando el límite cuando δ tiende a cero, se obtiene la igualdad y por lo tanto

$$H^2(D_r(a)) = \frac{4}{\pi}\text{Área}(D_r(a)).$$

Ejemplo 2.1.6. Si $E_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - a\| < r\}$, entonces

$$H^3(E_r(a)) = \frac{2^3}{\frac{4}{3}\pi}\text{Vol}(E_r(a)).$$

Solución.

Tomemos una esfera $E_{\frac{\delta}{2}}(y)$ contenida en $E_r(a)$ de diámetro δ y centro $y \in E_r(a)$.

Como $E_r(a)$ tiene volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$, para cubrir $E_r(a)$ necesitamos al menos n_δ esferas de diámetro $\delta = \frac{r}{n}$, donde

$$n_\delta = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi(\frac{\delta}{2})^3}.$$

Así

$$H_\delta^3(E_r(a)) = \inf \sum_i |U_i|^3 \leq \sum_{i=1}^{n_\delta} \delta^3 = 2^3 r^3 = 2^3 r^3 \frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{2^3}{\frac{4}{3}\pi}\text{Vol}(E_r(a)).$$

Tomando el límite cuando δ tiende a cero, se obtiene la igualdad y por lo tanto

$$H^3(E_r(a)) = \frac{2^3}{\frac{4}{3}\pi}\text{Vol}(E_r(a)).$$

En general se puede demostrar usando los mismos argumentos, la relación entre el volumen n -dimensional y H^n .

Ejemplo 2.1.7. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es una bola de radio r , entonces

$$H^n(A) = \frac{2^n}{C_n} \text{Vol}_n(A).$$

Donde C_n es el volumen de la bola n -dimensional de radio 1.

Estos ejemplos muestran que la medida de Hausdorff generaliza la idea de longitud y área. Las propiedades de área y volumen son bien conocidas en un aumento de un factor de λ . Por ejemplo la longitud de una curva esta multiplicada por λ , el área de una región del plano esta multiplicada por λ^2 y el volumen tridimensional está multiplicado por λ^3 . Tal propiedad escalar es fundamental en la teoría de fractales.

Proposición 2.1.8. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ entonces

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$$

donde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$, es decir, el conjunto F es multiplicado por un factor λ .

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F entonces $\{\lambda U_i\}$ es una $\lambda\delta$ -cubierta de λF . De lo que se tiene que

$$H_{\lambda\delta}^s \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s.$$

En particular, tenemos que

$$H_{\lambda\delta}^s \leq \lambda^s H_{\delta}^s(F).$$

Puesto que esto es válido para toda δ -cubierta $\{U_i\}$, haciendo δ tender a 0 se obtiene que $H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$.

Si $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de λF entonces $\{\frac{1}{\lambda}U_i\}$ es una $\frac{1}{\lambda}\delta$ -cubierta de F . De lo que se tiene que

$$H_{\frac{1}{\lambda}\delta}^s \leq \sum |\frac{1}{\lambda}U_i|^s = \frac{1}{\lambda^s} \sum |U_i|^s \Leftrightarrow \lambda^s H_{\frac{1}{\lambda}\delta}^s \leq \sum |U_i|^s.$$

En particular

$$\lambda^s H_{\frac{1}{\lambda}\delta}^s \leq H_{\delta}^s.$$

Definición 2.1.9. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. Una aplicación $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Hölder continua con exponente $\alpha > 0$ si existe $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in F$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Proposición 2.1.10. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación Hölder continua con exponente $\alpha > 0$, entonces, para cada $s \geq 0$

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F).$$

Demostración. Si $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es una δ -cubierta de F , entonces

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha.$$

De donde se deduce que $\{f(F \cap U_i)\}_{i \geq 1}$ es un ϵ -cubrimiento de $f(F)$, considerando $\epsilon = c\delta^\alpha$.

De este modo, sumando sobre los elementos de la cubierta, tendremos

$$\sum |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum |U_i|^s.$$

Por lo tanto, tomando el ínfimo sobre todas las δ -cubiertas de F , se tiene

$$H_\epsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H_\delta^s(F).$$

Así, cuando $\delta \rightarrow 0$ también $\epsilon \rightarrow 0$, por lo tanto

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F).$$

□

Un caso de gran importancia es cuando el exponente α de la condición de Hölder es 1, esto es,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad x, y \in F.$$

A una aplicación que satisface esta condición se le llama aplicación de Lipschitz, y

$$H^s(f(F)) \leq c^s H^s(F).$$

Observemos que cualquier función diferenciable con derivada acotada en F es necesariamente Lipschitz, como consecuencia del teorema del valor medio. Por otro lado, si f es una isometría, es decir,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad x, y \in F,$$

entonces $H^s(f(F)) = H^s(F)$. En particular, las medidas de Hausdorff son invariantes bajo traslaciones, es decir, $H^s(F + z) = H^s(F)$, donde

$$F + z = \{x + z : x \in F\},$$

e invariante bajo rotaciones.

2.1.2. Dimensión Hausdorff

De la definición de $H_\delta^s(F)$ tenemos que para un conjunto dado F y $0 < \delta < 1$ $H_\delta^s(F)$ es no decreciente con s . Así por la definición de $H^s(F)$ es también no decreciente. Incluso podemos tener la siguiente proposición.

Proposición 2.1.11. Si $t > s$, $0 < \delta < 1$ y $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F , entonces

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F).$$

Demostración. Como

$$|U_i| \leq \delta \Rightarrow |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \Rightarrow \delta^{s-t} \leq |U_i|^{s-t},$$

entonces

$$|U_i|^s = |U_i|^{s-t} |U_i|^t \geq \delta^{s-t} |U_i|^t.$$

Por lo tanto,

$$\sum_i \delta^{s-t} |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^s \Rightarrow \delta^{s-t} \sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^s \Rightarrow H_\delta^s(F) \geq \delta^{s-t} H_\delta^t(F).$$

Por lo tanto,

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F).$$

□

Nótese que si $t < s$ y $H^s(F) > 0$, esto es, si $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) > 0$ se tiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-t} \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(F)$$

y así, $H^t(F) = \infty$.

análogamente tenemos que si $t > s$ y $H^s(F) < \infty$, entonces $H^t(F) = 0$. Esto nos muestra que existe un valor crítico s en el cual $H^s(F)$ salta de ∞ a 0. Este valor crítico recibe el nombre de la **dimensión Hausdorff de F** .

Definición 2.1.12. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. La **dimensión Hausdorff de F** es el número $\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$.

De la definición anterior y adoptando que $\sup\{\emptyset\} = 0$, tenemos que

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F). \end{cases}$$

Si $s = \dim_H(F)$, entonces $H^s(F)$ puede ser igual a 0, ∞ o $0 < H^s(F) < \infty$.

Gráficamente esto lo podemos ver en la figura 2.1.

A un conjunto de Borel que satisface la última condición se le llama s -conjunto; matemáticamente los s -conjuntos son los conjuntos más convenientes a estudiar y afortunadamente aparecen muy a menudo.

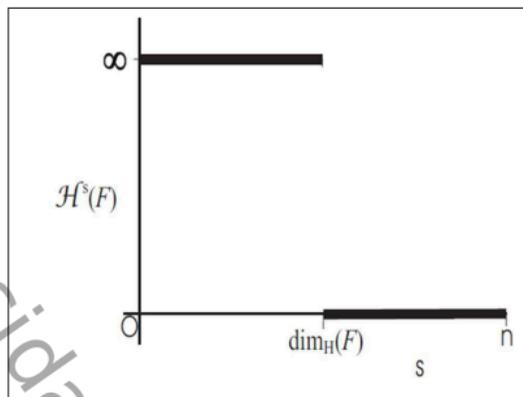


Figura 2.1: Dimensión Hausdorff.

Ejemplo 2.1.13. Sea F un disco plano de radio unitario contenido en \mathbb{R}^3 . De las propiedades de longitud, área y volumen que mencionamos en los ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} H^1(F) &= \text{longitud}(F) = \infty \\ 0 < H^2(F) &= \frac{4}{\pi} \text{Área}(F) < \infty \text{ y} \\ H^3(F) &= \frac{2^3}{3\pi} \text{Vol}(F) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la $\dim_H(F) = 2$, con $H^s(F) = \infty$ si $s < 2$ y $H^s(F) = 0$ si $s > 2$.

Ahora daremos algunas propiedades que cumple la dimensión Hausdorff.

Monotonía. Si $E \subseteq F$ entonces $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Demostración. ⁵ Por propiedades de medidas, si $E \subset F$, entonces

$$H^s(E) \leq H^s(F), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Por lo tanto, si $H^s(F) = 0$ tendremos que $H^s(E) = 0$. Así, se concluye que

$$\dim_H(E) \leq \dim_H(F). \quad \square$$

Estabilidad Contable. Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n , entonces

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H F_i \}.$$

Demostración. De la propiedad de monotonía, para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\dim_H(F_j) \leq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

Por otra parte, si $s > \dim_H(F_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $H^s(F_i) = 0$. Así, por propiedad de medida

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i) = 0.$$

Por lo tanto $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$, de donde se concluye que

$$s \geq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right),$$

y en consecuencia,

$$\sup_{1 \leq j < \infty} \{\dim_H(F_j)\} = \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

□

Dimensión de conjuntos contables. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es contable, entonces $\dim_H F = 0$.

Demostración. Si $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, donde cada F_i contiene un único punto, entonces $H^0(F_i) = 1$. Por lo tanto $\dim_H(F_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, de la estabilidad contable se concluye que

$$\dim_H(F) = 0.$$

□

Dimensión de conjuntos abiertos. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H F = n$.

Demostración. Primero observemos que una bola B en \mathbb{R}^n de radio $r > 0$ tiene dimensión igual a n . Como F es abierto podemos construir una bola B' que esté totalmente contenida en F . Ahora por la propiedad de monotonía tenemos que

$$\dim_H(B') \leq \dim_H(F) \leq \dim_H(\mathbb{R}^n),$$

es decir,

$$n \leq \dim_H(F) \leq n.$$

Por lo tanto, $\dim_H(F) = n$.

□

Conjunto de Cantor ternario. Para construir este conjunto, comenzamos con el intervalo cerrado $E_0 = [0, 1]$; a este intervalo le quitamos el conjunto abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, quedando el conjunto $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Repetimos el proceso anterior, removiendo el intervalo central de longitud $\frac{1}{9}$ de cada intervalo de E_1 . El resultado es el conjunto

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Repetimos el proceso una y otra vez generando la sucesión E_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ donde E_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, cada uno de longitud $L_n = \frac{1}{3^n}$. El conjunto de Cantor ternario F , consiste en los números reales que están en E_k para toda $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$F = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Ejemplo 2.1.14. Sea F el conjunto de Cantor ternario. Si $s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$, entonces $\dim_H F = s$ y $\frac{1}{2} \leq H^s \leq 1$.

Solución.

Cálculo heurístico.

El conjunto de Cantor F se divide en una parte izquierda $F_I = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ y en una parte derecha $F_D = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Ambas partes son similares a F pero a escala en una proporción de $\frac{1}{3}$, y $F = F_I \cup F_D$.

Así para algún s ,

$$H^s(F) = H^s(F_I) + H^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F)$$

por la propiedad escalar de las medidas de Hausdorff. Suponiendo que en el valor crítico $s = \dim_H(F)$ tenemos que $0 < H^s(F) < \infty$ y dividiendo entre $H^s(F)$ obtenemos que

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$$

o bien

$$\log 1 = \log 2\left(\frac{1}{3^s}\right) = \log 2 + \log 1 - s \log 3$$

y así despejando s tenemos que

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Cálculo riguroso. Sean U_i los intervalos de longitud 3^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) los cuales son los conjuntos E_k en la construcción de intervalos básicos de F . La cubierta $\{U_i\}$ de F cubre con 2^k intervalos E_k (de longitud 3^{-k}) de la cual se obtiene que

$$H_{3^{-k}}^s \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-sk} = 1 \quad \text{si } s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Haciendo tender k a ∞ se tiene que $H^s(F) \leq 1$.

Para terminar solo falta probar que $H^s(F) > 0$, de hecho probaremos que $H^s(F) \geq \frac{1}{2}$. Para ello debemos mostrar que

$$\sum |U|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (2.1)$$

para alguna cubierta $\{U_i\}$ de F . Como $F \subset \mathbb{R}$ es suficiente suponer que $\{U_i\}$ son intervalos. Ampliándolos ligeramente y usando la compacidad de F necesitamos solamente verificar (2.1) cuando $\{U_i\}$ es una colección finita de subintervalos cerrados de $[0, 1]$.

Para cada U_i sea k un entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}, \quad (2.2)$$

entonces U_i puede intersectar a lo más en un intervalo básico de E_k , ya que la separación de los intervalos básicos es al menos de 3^{-k} . Si $j \geq k$ entonces por construcción U_i intersecta a lo más $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk}$ intervalos básicos de E_j . Además por (2.2), $2^{j-k} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$. Si elegimos j lo suficientemente grande para que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para toda U_i , entonces como $\{U_i\}$ intersecta todos los 2^j intervalos básicos de longitud 3^{-j} , contando los intervalos tenemos que

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s,$$

la cual se reduce a (2.1).

2.2. Dimensión por conteo de cajas

Existen otras definiciones de dimensión de un conjunto fractal. Aunque la dimensión de Hausdorff es la principal definición en este trabajo examinaremos una definición alternativa de dimensión, así como la relación que hay entre ellas.

Lo fundamental para la mayoría de las definiciones es la idea de medida a escala δ . Para cada δ medimos un conjunto en el sentido que ignoramos irregularidades de tamaño menores que δ y vemos cómo tales medidas se comportan cuando $\delta \rightarrow 0$.

Notemos que cuando el lado de un cuadrado se duplica se obtiene una figura equivalente a cuatro (no a dos) de los cuadrados iniciales. Si en lugar de un cuadrado se tratara de un cubo, el factor de multiplicación sería de ocho y no de cuatro.

Precisándolo más, supongamos que una figura de dimensión entera d puede ser descompuesta en n copias a escala r de sí misma (pensemos en el ejemplo del cuadrado donde $d = 2$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 4$), entonces podemos notar que $n = (\frac{1}{r})^d$ o tomando logaritmos tenemos que

$$d = \frac{\log n}{\log(\frac{1}{r})} = \frac{\log n}{-\log r}. \quad (2.3)$$

Una definición de dimensión de un conjunto está entonces determinada por las leyes de potencia (si hay alguna) obedecida por n cuando la razón tiende a cero. La ley de potencias puede no ser exacta para n y entonces podemos estimar (2.3) tomando los límites superiores e inferiores, obteniendo un intervalo que aproxima la dimensión. En particular, la dimensión por cajas que analizaremos en la siguiente sección, veremos que cumple con esta propiedad y es una de las definiciones más usadas. Su popularidad se debe en gran parte a su relativa facilidad para el cálculo matemático y estimación empírica. La definición se remonta a principios de la década de 1930 y ha sido llamada en varias ocasiones entropía de Kolmogorov, dimensión de entropía, dimensión de capacidad, dimensión métrica, densidad logarítmica y dimensión de información. Aquí sólo la llamaremos dimensión por cajas.

2.2.1. Dimensión por cajas

Sea F un subconjunto acotado y no vacío de \mathbb{R}^n y sea N_δ el ínfimo de las cardinalidades de las cubiertas de F cuyos conjuntos tienen diámetros menor que δ . Las dimensiones por conteo de cajas inferior y superior de F están definidas como

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

y

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

respectivamente.

Si son iguales, entonces el valor común se le llama dimensión por cajas de F ,

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Hay varias definiciones equivalentes de dimensión de cajas las cuales resultan ser, algunas veces, más conveniente usar.

Consideremos la colección de cubos en la malla δ -coordenada de \mathbb{R}^n , es decir, cubos de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

donde m_1, \dots, m_n son enteros.

Sea $N'_\delta(F)$ el número de cubos de una δ -malla que intersecta a F . Notemos que este conjunto de cubos proveen una colección de $N'_\delta(F)$ conjuntos de diámetro $\delta\sqrt{n}$ que cubren a F , por lo que

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Si $\delta\sqrt{n} < 1$ entonces

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}$$

y así tomando límites cuando $\delta \rightarrow 0$

$$\underline{dim}_B F \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

y

$$\overline{dim}_B F \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Por otro lado, cualquier conjunto de diámetro a lo más δ está contenido en 3^n cubos de la malla de lado δ (escogiendo un cubo que contenga algún punto del conjunto y sus cubos cercanos). Así

$$N'_{\delta(F)} \leq 3^n N_\delta(F).$$

Tomando los logaritmos y los límites como anteriormente, se obtienen las desigualdades opuestas. Entonces para determinar la dimensión por cajas podemos tomar equitativamente $N_\delta(F)$ como el número de cubos de una malla de lado δ que cubre a F . Esta versión de la definición es usada empíricamente en forma extensiva. Para determinar la dimensión por cajas de un conjunto plano F se dibuja una malla de cuadrados o cajas de lado δ y se cuenta el número $N_\delta(F)$ de cajas que tengan puntos en común al conjunto, para varios δ pequeños (de aquí el nombre de conteo de cajas). La dimensión es la razón logarítmica en la cual $N_\delta(F)$ aumenta cuando $\delta \rightarrow 0$ y puede ser estimado como la pendiente de la gráfica de $\log N_\delta(F)$ contra $-\log \delta$; véase la figura 2.2. Esta definición da una interpretación del significado de la dimensión de cajas. El número de cubos en mallas de lado δ que intersectan al conjunto, es un indicador de cuán extendido o irregular es el conjunto cuando se examina a escala δ . La dimensión por cajas refleja cuán rápidamente cambian las irregularidades al hacer tender δ a cero.

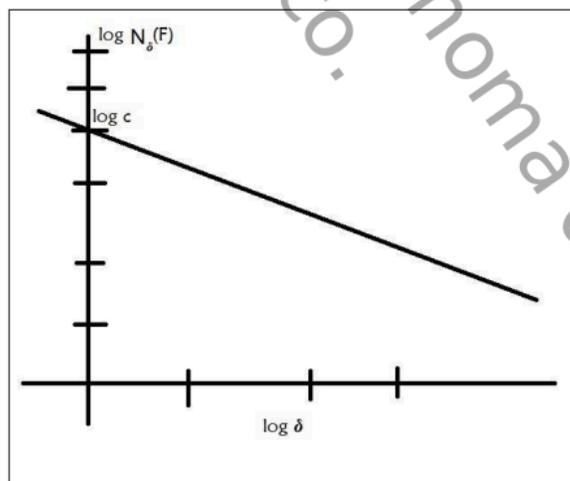


Figura 2.2: Estimación empírica de la dimensión de un conjunto F .

Otra definición de la dimensión por cajas usada frecuentemente es la obtenida tomando $N_\delta(F)$ como el más pequeño número de cubos arbitrarios de lado δ necesarios

para cubrir al conjunto F . La equivalencia de esta definición se sigue como en el caso de las δ -mallas. Notemos que cualquier cubo de lado δ tiene diámetro $\delta\sqrt{n}$ y que cualquier conjunto de diámetro a lo más δ está contenido en un cubo de lado δ .

De manera análoga, la dimensión por cajas se obtiene tomando $N_\delta(F)$ como el más pequeño número de bolas cerradas de radio δ que cubren a F .

Otra definición de dimensión por cajas y cuya equivalencia es menos obvia, involucra al más grande número de bolas disjuntas de radios δ con centros en F . Sea este número $N'_\delta(F)$ y sean $B_1, \dots, B_{N'_\delta(F)}$ bolas disjuntas centradas en F y de radio δ . Si $x \in F$ entonces la distancia de x a algún B_i es menor que δ , de otra manera la bola de centro en x y radio δ puede ser añadida para formar una colección más grande de bolas disjuntas. Así las $N'_\delta(F)$ bolas concéntricas, con las B_i de radios 2δ (diámetro 4δ) cubren a F , obteniéndose.

$$N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Por otro lado, supongamos que $B_1, \dots, B_{N'_\delta(F)}$ son bolas disjuntas de radios δ con centros en F . Sea U_1, \dots, U_k , una colección de conjuntos con diámetros a lo más δ los cuales cubren a F . Como los U_j deben cubrir los centros de los B_i , cada B_i debe contener al menos uno de los U_j . Como los B_j son disjuntos, hay al menos tantos U_j como B_i . Por lo tanto

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F).$$

Tomando logaritmos se demuestra que los valores de la definición de dimensión superior, inferior y dimensión por cajas permanecen inalterados, si $N_\delta(F)$ es reemplazado por $N'_\delta(F)$. Todo esto se resume en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Las dimensiones por conteo de cajas inferior y superior de un subconjunto F de \mathbb{R}^n están dadas por*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

La dimensión por cajas de F está dada por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

(si este límite existe), donde $N_\delta(F)$ es alguno de los siguientes:

- i) El más pequeño número de bolas cerradas de radios δ que cubren a F .
- ii) El más pequeño número de cubos de lado δ que cubren a F .
- iii) El número de cubos en δ -mallas que intersectan a F .

iv) El más pequeño número de conjuntos de diámetros a lo más δ que cubren a F .

v) El más grande número de bolas disjuntas de radios δ con centros en F .

Esta lista podría extenderse aún más; en la práctica uno toma la definición más adecuada para una aplicación particular. Es importante notar que es suficiente considerar los límites cuando $\delta \rightarrow 0$ a través de alguna sucesión decreciente δ_k tal que $\delta_k \geq c\delta_{k+1}$ para alguna constante $0 < c < 1$; en particular para $\delta_k = c^k$. Para ver esto nótese que si $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$, entonces

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

y así

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

La desigualdad opuesta es fácil de calcular y el caso del límite inferior se obtiene de manera similar.

Hay una definición equivalente a la dimensión de cajas, de una forma algo diferente que es importante mencionar.

Una δ -vecindad F_δ de F es

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta \text{ para algún } y \in F\},$$

es decir, el conjunto de puntos a menor o igual distancia δ de F .

Consideremos el caso para el cual el volumen n -dimensional de F_δ disminuye cuando $\delta \rightarrow 0$. En \mathbb{R}^3 , si F es un solo punto entonces F_δ es una bola con $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$, si F es un segmento de longitud l entonces F_δ es una salchicha con $\text{vol}(F_\delta) \sim \frac{\pi}{\delta^2}$ y si F es un conjunto plano de área a entonces F_δ es esencialmente un engorde de F con $\text{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$. En cada caso, $\text{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$ donde el entero s es la dimensión de F , por lo que el exponente de δ es indicativo de la dimensión. El coeficiente c de δ^{3-s} es conocido como el índice de Minkowski de F y es una medida de longitud, área o volumen del conjunto apropiado.

Estas ideas se extendieron a dimensiones fraccionarias. Si F es un subconjunto de \mathbb{R}^n y para algún s , $\frac{\text{vol}(F_\delta)}{\delta^{n-s}}$ tiende a un límite positivo y finito cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces tiene sentido considerar a F como s -dimensional.

Al valor límite se le llama índice s -dimensional de F . Este concepto es de uso ligeramente restringido ya que no es necesariamente aditivo en subconjuntos disjuntos, es decir, no es una medida. Incluso si este límite no existe, podemos extraer el exponente crítico de δ y éste resulta estar relacionado con la dimensión de cajas.

Proposición 2.2.2. Si F es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces

$$\underline{\dim}_B(F) = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

donde F_δ es la δ -vecindad de F .

Demostración. Observemos que F puede ser cubierto por $N_\delta(F)$ bolas de radio δ , entonces F_δ puede ser cubierto por bolas concéntricas de radio 2δ . Por lo tanto,

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

donde c_n es el volumen de la bola unitaria en \mathbb{R}^n . Tomando logaritmos,

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

por tanto tenemos que

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B(F).$$

De igual manera se tiene una desigualdad similar para los límites superiores. Por otro lado, si hay N_δ bolas disjuntas de radios δ con centros en F , entonces

$$N_\delta(F) c_n (\delta)^n \leq \text{vol}^n(F_\delta).$$

Tomando logaritmos se obtiene la desigualdad opuesta de lo cual se obtiene lo deseado. □

Una de las relaciones que es importante entender es la relación entre la dimensión por cajas y la dimensión Hausdorff. Notemos que si F puede ser cubierto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diámetros δ , entonces tenemos que

$$H_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

De lo cual, si $1 < H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$, entonces $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$, cuando δ es suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \text{ De aquí, } \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F, \text{ para los}$$

conjuntos acotados $F \in \mathbb{R}^n$. En general no conseguimos la igualdad aquí. Aunque la dimensión por cajas y dimensión Hausdorff son equivalentes para algunos conjuntos razonablemente regulares, hay algunos ejemplos donde esta desigualdad es estricta.

Hablando con poco rigor lo que nos esta diciendo la definición de dimensión por

cajas es que $N_\delta \simeq \delta^{-s}$ para δ pequeño, donde $s = \dim_B F$. Más precisamente, dice que

$$\begin{cases} N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty & \text{si } s < \dim_B F \\ N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 & \text{si } s > \dim_B F \end{cases}$$

Pero

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\},$$

la cual podría compararse con

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\},$$

que aparece en la definición de la medida de Hausdorff. Nótese que en el cálculo de la dimensión de Hausdorff, asignamos distintos pesos $|U_i|^s$ a los conjuntos de la cubierta U_i , mientras que para la dimensión de cajas usamos el mismo peso δ^s para cada conjunto de la cubierta. La dimensión de cajas puede ser un indicador de la eficiencia con la cual un conjunto puede ser cubierto por conjuntos pequeños de igual tamaño, mientras que la dimensión de Hausdorff involucra conjuntos pequeños pero quizás en general, variando de peso.

Existe la tentación de introducir la cantidad $v(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s$, pero esto no da una medida sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n . Como veremos, una consecuencia de esto es que la dimensión por cajas tiene un número de propiedades desafortunadas y pueden ser complicadas manejarlas matemáticamente. Por otro lado, como la dimensión por cajas tiene determinadas cubiertas de conjuntos de igual tamaño, en general, resulta ser más fácil, para calcular, que la dimensión de Hausdorff.

Ejemplo 2.2.3. Sea F el conjunto de Cantor ternario, entonces

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Solución.

Tomando la cubierta abierta constituida por los 2^k intervalos de E_k de longitud 3^{-k} , se tiene que $N_\delta(F) \leq 2^k$, si $3^{-k} < \delta < 3^{-k+1}$. Por tanto tenemos que

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por otra parte, cualquier intervalo de longitud δ con $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ intersecta a lo más uno de los intervalos básicos de longitud 3^{-k} usado en la construcción de F y como hay 2^k intervalos, necesitamos al menos 2^k intervalos de longitud δ para cubrir a F . Por lo tanto, $N_\delta(F) \geq 2^k$, obteniéndose que $\underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

Así al menos para el conjunto de Cantor, $\dim_H F = \dim_B F$.

2.2.2. Propiedades y problemas de la dimensión por cajas

Las siguientes propiedades elementales de la dimensión por cajas reflejan aquellas de la dimensión de Hausdorff y se verifican del mismo modo.

Proposición 2.2.4. *i) Una sub-variedad F suave m -dimensional de \mathbb{R}^n tiene $\dim_B F = m$.*

ii) $\underline{\dim}_B$ y $\overline{\dim}_B$ son monótonas.

iii) \dim_B es finitamente estable, es decir,

$$\dim_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$$

aunque $\underline{\dim}_B$ no lo sea.

iv) $\underline{\dim}_B$ y $\overline{\dim}_B$ son Lipschitz invariantes. Esto es así, porque si

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

y F puede ser cubierto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diámetro de a lo más δ , entonces las $N_\delta(F)$ imágenes de esos conjuntos bajo f forman una cubierta de conjuntos de diámetros a lo más $c\delta$, así $\dim_B f(F) \leq \dim_B F$. Análogamente las dimensiones por cajas se comportan justamente como las dimensiones de Hausdorff bajo transformaciones bi-Lipschitz y de Hölder. Mostraremos algunas de las desventajas de la dimensión por cajas.

Proposición 2.2.5. *Sea \overline{F} la cerradura de F , entonces*

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

y

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Sean B_1, \dots, B_k una colección finita de bolas cerradas de radios δ . Si el conjunto cerrado $\bigcup_{i=1}^k B_i$ contiene a F , también contiene a \overline{F} . Por lo tanto el más pequeño número de bolas cerradas de radio δ que cubre a F es suficiente para cubrir el conjunto más grande \overline{F} . Por lo que el resultado se sigue. \square

Una consecuencia inmediata de esto es que si F es un subconjunto denso en una región abierta de \mathbb{R}^n entonces

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n.$$

Por ejemplo, sea F el conjunto (numerable) de números racionales entre 0 y 1. Entonces \overline{F} es el intervalo entero $[0, 1]$, así que $\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F = 1$. Por lo tanto, los conjuntos numerables pueden tener dimensión por cajas no cero. Además, la

dimensión por conteo de cajas de cada número racional viéndolo como un conjunto de un solo punto es cero, pero la unión numerable de ese conjunto tiene dimensión 1. Consecuentemente, no es generalmente cierto que

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_B F_i.$$

Esto limita severamente la utilidad de la dimensión por cajas ya que introduciendo un conjunto pequeño, es decir, un conjunto numerable de puntos puede realizarse estragos con la dimensión. Podríamos esperar salvar algo restringiendo la atención a conjuntos cerrados, pero las dificultades todavía quedan.

Ejemplo 2.2.6. $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ es un conjunto compacto con $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Solución.

Si $|U| = \delta < \frac{1}{2}$ y k es el entero que satisface

$$\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$$

entonces U puede cubrir a lo más uno de los puntos $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}\}$. Por lo tanto, al menos k conjuntos de diámetro δ son necesarios para cubrir F .

Así

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Haciendo que $\delta \rightarrow 0$ se tiene que $\overline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$. Por otro lado, si $\frac{1}{2} > \delta > 0$, tomando k tal que

$$\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)},$$

entonces $(k+1)$ intervalos de longitud δ cubren a $[0, \frac{1}{k}]$ dejando fuera $k-1$ puntos de F , los cuales se pueden cubrir por otros $k-1$ intervalos. Por lo tanto,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}.$$

De aquí, $\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}$.

Nadie consideraría este conjunto, con todo menos uno de sus puntos aislados, como un fractal. Sin embargo, tiene dimensión por cajas fraccional.

La dimensión por cajas en general es muy usada y su importancia radica en que para muchos conjuntos esta dimensión coincide con la dimensión de Hausdorff.

3 [Redacted]

3 [Redacted] 3 [Redacted]

[Redacted]

3 La condición a) indica que el conjunto se obtiene como unión de partes semejantes al total (cada $\Psi_i(E)$ es una de tales partes).

La condición b) precisa la forma en que los trozos $\Psi_i(E)$ pueden solaparse entre sí (solapamiento de las piezas que componen a E), exigiendo que este solapamiento sea despreciable en relación a la medida total de E cuando medimos en cierta dimensión s . La condición b) de la definición anterior se verifica automáticamente cuando no existe solapamiento (por ejemplo, en el conjunto de Cantor en $s=2$), pero muchas curvas autosemejantes presentan un cierto contacto entre sus piezas (por ejemplo en la curva de Koch los solapamientos consisten en un único punto) por lo que no podemos relajar la condición b) por la de no solapamiento.

3 Más adelante veremos que la condición b) puede ser sustituida por la **condición de abierto**, de utilización más simple que b), pero menos drástica que la exigencia de solapamiento vacío.

Ejemplo 3.1.4. El conjunto de Cantor es autosemejante.

Consideremos un sistema $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ de dos contracciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} dadas por $\Psi_1(x) = \frac{x}{3}$ y $\Psi_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Para este sistema de semejanzas y tomando $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ del ejemplo 2.1.14, se tiene que el conjunto de Cantor satisface los incisos a) y b) de la definición 3.1.3.

3.2. Aplicación Contractiva

Presentamos nuestro primer resultado de este capítulo que tiene que ver con funciones contractivas.

Proposición 3.2.1. Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva de módulo r , entonces se cumple que:

a) f es continua.

b) Si $g : X \rightarrow X$ es contractiva de módulo r' , entonces $g \circ f$ es contractiva de módulo rr' .

c) f^n es contractiva de módulo r^n .

Demostración. a) Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces

$$d(f(x), f(y)) < rd(x, y) < \epsilon$$

siempre que $d(x, y) < \delta$, donde $\delta = \frac{\epsilon}{r}$.

b) Sea $x, y \in X$.

$$d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d(g(f(x)), g(f(y))) < r' d(f(x), f(y)) < r' rd(x, y)$$

c) La demostración de c) se sigue del inciso b) e inducción matemática. \square

Teorema 3.2.2. Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva de módulo r , entonces existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = x$ denominado punto fijo de la contracción.

Demostración. Probaremos la unicidad. Supongamos que x, y son puntos fijos de f , es decir, $f(x) = x$ y $f(y) = y$, entonces

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

lo cual es una contradicción puesto que f es contractiva.

Ahora probaremos la existencia. Esto lo haremos dando $y \in X$ arbitrario y viendo que la sucesión $\{y_n\}$, cuyo término general es $y_n = f^n(y)$, es de Cauchy.

Para $p \geq 1$ arbitrario

$$d(y_p, y_{p+1}) = d(f(y_{p-1}), f(y_p)) \leq rd(y_{p-1}, y_p)$$

Aplicando esto p -veces se tiene

$$d(y_p, y_{p+1}) \leq r^p d(y_0, y_1).$$

Para $p < q$ arbitrarios, aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} d(y_p, y_q) &\leq d(y_p, y_{p+1}) + d(y_{p+1}, y_{p+2}) + \cdots + d(y_{q-1}, y_q) \leq \sum_{i=p}^{\infty} d(y_i, y_{i+1}) \\ &\leq d(y_0, y_1) \sum_{i=p}^{\infty} r^i = d(y_0, y_1) \frac{r^p}{1-r} \end{aligned}$$

y como la serie geométrica converge, esta última expresión se hace más pequeña que cualquier ϵ dado y tomando p suficientemente grande.

Como $\{y_n\}$ es de Cauchy en el espacio completo (X, d) , debe ser convergente. Ahora si x es su límite, por la continuidad de f tenemos que

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = x.$$

Con lo cual queda demostrado la existencia. \square

Teorema 3.2.3. Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva de módulo r con x como el punto fijo, entonces para cualquier $y \in X$ se tiene:

$$d(x, y) \leq \frac{d(y, f(y))}{1-r}.$$

Demostración. Tomando $p = 0$ en el teorema anterior obtenemos

$$d(y_0, y_q) \leq d(y_0, y_1) \frac{1}{1-r}.$$

Tomando el límite cuando q tiende a infinito tenemos

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d(y_0, y_q) = d(y_0, \lim_{q \rightarrow \infty} y_q) = d(y_0, x) \leq \frac{1}{1-r} d(y_0, f(y_0))$$

donde $y_0 \in X$ es arbitrario. □

3.3. Conjuntos límites de aplicaciones contractivas

Existe el espacio conveniente para estudiar la geometría fractal; este es el espacio $H(X)$ definido como el conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de X . En esta sección construiremos una sucesión de conjuntos tales que converjan a un conjunto que llamamos invariante bajo una aplicación semejante, la cual es construida también con una colección finita de aplicaciones semejantes. Para la convergencia no podemos usar la distancia usada normalmente en geometría como la distancia entre los puntos más próximos de los conjuntos para $H(X)$, ya que si los conjuntos tienen algún punto en común su distancia es cero, aunque sean muy diferentes y lo que queremos es que estos conjuntos se parezcan cada vez más. La distancia que nosotros precisamos debe ser tal que dos conjuntos próximos respecto a ella sean parecidos entre sí. Tal requisito lo cumple la llamada distancia de Hausdorff. Los conceptos y resultados que presentamos en esta sección, así como las demostraciones pueden ser consultadas en [Ba].

Definición 3.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo, $x \in X$ y $B \in H(X)$. Definimos

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\},$$

la cual llamaremos la distancia del punto x al conjunto B .

Definición 3.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sean $A, B \in H(X)$. Definimos

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

$d(A, B)$ es llamada la distancia de un conjunto $A \in H(X)$ al conjunto $B \in H(X)$.

Definición 3.3.3. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Definimos la distancia de Hausdorff entre dos puntos de $H(X)$ como

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Proposición 3.3.4. h es una métrica en el espacio $H(X)$.

Demostración. Sean $A, B, C \in H(X)$. Claramente tenemos de la definición que $h(A, B) = h(B, A)$. Además,

$$h(A, A) = \max\{d(A, A), d(A, A)\} = d(A, A) = \max\{d(x, A) : x \in A\} = 0.$$

$h(A, B) = d(a, b)$ para algún $a \in A$ y $b \in B$, puesto que A y B son compactos. Por lo tanto $0 < h(A, B) < \infty$ está bien definida.

Sea $A \neq B$ y supongamos que existe a tal que $a \in A$ y $a \notin B$. Lo que resulta es que $h(A, B) \geq d(A, B) > 0$.

Para demostrar que $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ probaremos primero que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Tenemos que para cualquier $a \in A$

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B, \forall c \in C\} \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B, \forall c \in C\} \text{ así} \\ d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

Análogamente

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A).$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta ambas desigualdades tenemos que,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \max\{d(B, C), d(C, B)\} + \\ &\quad + \max\{d(A, B), d(C, A)\} = h(B, C) + h(A, C) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, entonces el espacio métrico $(H(X), h)$ es completo.*

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [Ba].

Teorema 3.3.6. *Si $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua, entonces f mapea $H(X)$ en sí mismo.*

Demostración. Si C un subconjunto compacto no vacío de X , entonces $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$ es no vacío. Vamos a demostrar que $f(C)$ es compacto. Si $\{y_n = f(x_n)\}$ es una sucesión infinita de puntos de $f(C)$, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión infinita de puntos en C . Como C es compacto existe una subsucesión $\{x_{N_n}\}$ que converge a un punto $\hat{x} \in C$. Pero por la continuidad de f tenemos que $\{y_{N_n} = f(x_{N_n})\}$ es una sucesión de $\{y_n\}$ que converge a $\hat{y} = f(\hat{x}) \in f(C)$. Por tanto $f(C)$ es compacto. □

Proposición 3.3.7. *Si $f : X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva de módulo k , entonces $f : H(X) \rightarrow H(X)$ es contractiva de módulo k en $(H(X), h)$.*

Demostración. Sabemos que f es continua y que f mapea a $H(X)$ en el mismo. Ahora, si $A, B \in H(X)$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(B), f(C)) &= \max\{\min\{d(f(x), f(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{kd(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = kd(B, C). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$d(f(C), f(B)) \leq kd(C, B).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} h(f(C), f(B)) &= \max\{d(f(B), f(C)), d(f(C), f(B))\} \\ &\leq k \max\{d(B, C), d(C, B)\} \leq kd(B, C). \end{aligned}$$

□

De las definiciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 tenemos las siguientes observaciones.

Observación 3.3.8. Si $B, C \in H(X)$ y $B \subset C$, entonces $d(x, C) \leq d(x, B)$.

Observación 3.3.9. Si $A, B, C \in H(X)$ y $B \subset C$, entonces $B \subset C \Rightarrow d(A, C) \leq d(A, B)$.

Observación 3.3.10. Si B, C, D y E son elementos de $H(X)$, entonces

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}.$$

Teorema 3.3.11. Dado un sistema $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ de semejanzas contractivas, la transformación $S\Psi : H(X) \rightarrow H(X)$ definida por

$$S\Psi(F) = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(F)$$

es contractiva en $H(X)$ con módulo $r = \max\{r_i : i = 1, \dots, m\}$ de los módulos de contracción de las Ψ_i con $i = 1, \dots, m$.

Demostración. La demostración se hará para $m = 2$. Usando inducción matemática se completa la demostración.

$$\begin{aligned} h(S\Psi(B), S\Psi(D)) &= h(\Psi_1(B) \cup \Psi_2(B), \Psi_1(D) \cup \Psi_2(D)) \\ &\leq \max\{h(\Psi_1(B) \cup \Psi_1(D)), h(\Psi_2(B) \cup \Psi_2(D))\} \\ &\leq \max\{r_1 h(B, D), r_2 h(B, D)\} \leq rh(B, D). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.12. Dado un sistema $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ de semejanzas contractivas de X existe un único compacto y no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$S\Psi(E) = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(E) = E,$$

denominado punto fijo de la contracción.

Demostración. En el teorema 3.2.2 se probó que toda semejanza contractiva tiene un punto fijo y en el teorema 3.3.11 se probó que $S\Psi$ es una semejanza contractiva con lo cual queda demostrado el corolario. \square

Definición 3.3.13. A es invariante (respecto a $S\Psi$) si $A = S\Psi(A)$.

Definición 3.3.14. Un sistema de funciones iteradas es un espacio métrico completo (X, d) junto con un conjunto finito de aplicaciones contractivas $\Psi_i : X \rightarrow X$, con su respectivo factor de contractividad r_i para $i = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 3.3.15. Dada una colección $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ de semejanzas contractivas, el conjunto E tal que $S\Psi(E) = \cup_{i=1}^m \Psi_i(E) = E$ verifica que $E = \lim_{n \rightarrow \infty} S\Psi^n(F)$ siendo F cualquier compacto no vacío de X .

Demostración. Vamos a probar que $h(S\Psi^k(F), E) \rightarrow 0$ cuando k tiende a infinito y así $S\Psi^k(F) \rightarrow E$ cuando k tiende a infinito. Notemos que

$$h(S\Psi(F), E) = h(S\Psi(F), S\Psi(E)) \leq rh(F, E),$$

por lo que $h(S\Psi^k(F), E) \leq r^k d(F, E)$. Como $r < 1$, entonces $r^k \rightarrow 0$ cuando k tiende a infinito. Por lo tanto $S\Psi^k(F)$ está cada vez más cerca de E . \square

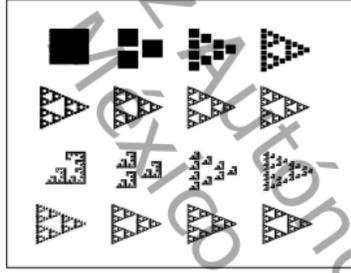


Figura 3.1: Independencia del conjunto de inicio.

Este resultado es fundamental para la construcción de conjuntos autosemejantes ya que nos proporciona un medio constructivo para la obtención del conjunto invariante para $S\Psi$, siendo F cualquier conjunto compacto no vacío como se muestra en la figura 3.1.

Una de las ventajas de usar un sistema de funciones iteradas es que la dimensión del conjunto invariante es relativamente fácil de calcular o estimar en términos de los factores de contracción.

Si $S = \{\Psi_1, \dots, \Psi_m\}$ es una familia de aplicaciones $\Psi_i : X \rightarrow X$, denotemos por Ψ_{i_1, \dots, i_p} a $\Psi_{i_1} \circ \dots \circ \Psi_{i_p}$ y por ψ_{i_1, \dots, i_p} a el punto fijo de Ψ_{i_1, \dots, i_p} .

Si $A \subset X$, entonces $S\Psi(A) = \cup_{i=1}^m \Psi_i(A)$. $S\Psi^0(A) = A$, $S\Psi^1(A) = S\Psi(A)$, $S\Psi^p(A) = S\Psi(S\Psi^{p-1}(A))$ y usaremos la siguiente notación $A_{i_1 \dots i_p} = \Psi_{i_1 \dots i_p}(A)$.

Notemos que

$$S\Psi^p(A) = \bigcup_{i_1 \dots i_p} A_{i_1 \dots i_p}.$$

También notemos que $|A_{i_1 \dots i_p}| \leq r_{i_1} \cdots r_{i_p} |A| \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$. Veamos como se hace la iteración $S\Psi^n(F)$ para $n = 2$.

$$S\Psi^2(F) = S\Psi\left(\bigcup_{i=1}^m \Psi_i(F)\right) = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j\left(\bigcup_{i=1}^m \Psi_i(F)\right) = \bigcup_{1 \leq i, j \leq m} (\Psi_j \circ \Psi_i)(F).$$

Ahora probaremos la existencia y unicidad del conjunto invariante o punto fijo del sistema de semejanzas contractivas haciendo una caracterización completa de dicho conjunto.

Teorema 3.3.16. 1. *Existe un único conjunto K cerrado y acotado que es invariante respecto de $S\Psi$, es decir, $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$. Más aún, K es compacto.*

2. $K_{i_1 \dots i_p} = \bigcup_{i_{p+1}=1}^m K_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}$.

3. $K \supset K_{i_1} \supset K_{i_1 i_2} \cdots \supset K_{i_1 \dots i_p} \supset \dots$, y $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1 \dots i_p}$ tiene un único miembro el cual denotaremos como $k_{i_1 \dots i_p \dots}$. K es la unión de estos puntos.

4. $k_{\widehat{i_1} \dots \widehat{i_p}} = \psi_{i_1 \dots i_p}$ y en particular $\psi_{i_1 \dots i_p} \in K$
 $k_{i_1 \dots i_p \dots} = \lim_{p \rightarrow \infty} \psi_{i_1 \dots i_p}$.

5. K es la clausura de los puntos fijos de las $S\Psi_{i_1 \dots i_p}$.

6. $\Psi_{j_1 \dots j_q}(K_{i_1 \dots i_p}) = K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}$
 $\Psi_{j_1 \dots j_q}(K_{i_1 \dots i_p} \cdots) = K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p \dots}$

7. El mapeo de coordenadas $\Pi : C(N) \rightarrow K$ dado por $\Pi(\alpha) = k_\alpha$ es continuo sobre K .

8. Si A es un conjunto acotado y no vacío, entonces $d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p}) \rightarrow 0$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. En particular $S\Psi^p(A) \rightarrow K$ en la métrica de Hausdorff.

Demostración. Supongamos que K es un conjunto cerrado y acotado que es invariante respecto a $S\Psi$, tenemos las siguientes consecuencias.

$$K = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(K) = \bigcup_{i,j} \Psi_i(\Psi_j(K)) = \bigcup_{i,j} \Psi_{ij}(K) = \bigcup_{i,j} K_{ij} = \cdots = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} K_{i_1 \dots i_p}.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} K_{i_1 \dots i_p} &= \Psi_{i_1 \dots i_p}(K) = \Psi_{i_1 \dots i_p}\left(\bigcup_{i_{p+1}=1}^m \Psi_{i_{p+1}}(K)\right) = \bigcup_{i_{p+1}=1}^m \Psi_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}(K) \\ &= \bigcup_{i_1, \dots, i_{p+1}} K_{i_1 \dots i_{p+1}}. \end{aligned}$$

Así $K \supset K_{i_1} \supset K_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset K_{i_1 \dots i_p} \supset \cdots$, ahora como $|K_{i_1 \dots i_p}| \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$ por lo tanto la $\bigcap_p K_{i_1 \dots i_p}$ es un punto (por la completitud de X) y lo denotaremos como $k_{i_1 \dots i_p} \cdots$. Por lo tanto hemos establecido 2 y 3 bajo las hipótesis de K .

Problemos ahora (iv) y (v).

$$\Psi_{j_1 \dots j_q}(K_{i_1 \dots i_p}) = \Psi_{j_1 \dots j_q}(\Psi_{i_1 \dots i_p}(K)) = \Psi_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}(K) = K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}.$$

Ahora notemos lo siguiente:

$$\Psi_{j_1 \dots j_q}(k_{i_1 \dots i_p \dots}) \in \Psi_{j_1 \dots j_q} \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1 \dots i_p} = \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}.$$

Dado que $\Psi_{i_1 \dots i_p}(k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}) = k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}$ se deduce que $k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}$ es el único punto fijo $\psi_{i_1 \dots i_p}$ de $\Psi_{i_1 \dots i_p}$. De ello se desprende que $\psi_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots} \in K_{i_1 \dots i_p}$ y por lo tanto, ya que $\lim_{p \rightarrow \infty} |K_{i_1 \dots i_p}| = 0$ tenemos que $\lim \psi_{i_1 \dots i_p} = k_{i_1 \dots i_p \dots}$. Esto establece 4 y 5. Hasta aquí hemos demostrado la unicidad de K (ya que K es la unión de puntos únicos, cada uno de ellos es el límite de una determinada sucesión de puntos fijos de la contracción $\Psi_{i_1 \dots i_p}$).

Para establecer 7 y por lo tanto que K es compacto (pues sería la imagen continua de un conjunto compacto), sea π como en 7. Supongamos $\alpha = \langle \alpha_1 \dots \alpha_p \dots \rangle \in C(N)$ y $\epsilon > 0$, entonces $\pi(\alpha) = k_{\alpha_1 \dots \alpha_p \dots}$ y así existe un q tal que $K_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \subset \{x \in K : d(x, \pi(\alpha)) < \epsilon\}$. Como $K_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ es la imagen del conjunto abierto $\{\beta : \beta_t = \alpha_t \text{ si } t \leq q\}$ π , es continua.

Para probar 8 supongamos que A es no vacío y acotado, entonces

$$\begin{aligned} d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots}) &= d(\Psi_{i_1 \dots i_p}(A), \Psi_{i_1 \dots i_p}(k_{i_{p+1} \dots})) \leq (r_{i_1} \dots r_{i_p})d(A, k_{i_{p+1} \dots}) \\ &\leq r_{i_1} \dots r_{i_p} \sup\{d(a, b) : a \in A, b \in K\} \leq C(\max_{1 \leq i \leq m} r_i)^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando p tiende a ∞ .

Ahora nos queda probar la existencia de conjunto cerrado, acotado e invariante. Pero notemos que la parte 5 nos dice como debe ser este conjunto.

Para probar la existencia necesitamos establecer el siguiente lema.

Lema 3.3.17. Si $\{\Psi_1, \dots, \Psi_m\}$ es un conjunto de aplicaciones contractivas en un espacio métrico (X, d) y $\psi_{i_1 \dots i_p}$ es el punto fijo de $\Psi_{i_1 \dots i_p} = \Psi_{i_1} \circ \dots \circ \Psi_{i_p}$, entonces para cada sucesión $i_1 \dots i_p \dots$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \psi_{i_1 \dots i_p}$ existe.

Demostración. Sea $\lambda = \max_{1 \leq i, j \leq m} d(\psi_i, \psi_j)$ y sea $R = \lambda(1 - r)^{-1}$ donde

$$r = \max\{r_i : r_i \text{ es módulo de contracción de } \Psi_i \text{ con } 1 \leq i \leq m\}.$$

Si $B(\psi_i, \epsilon) = \{x \in K : d(x, \psi_i) \leq \epsilon\}$, entonces tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^m B(\psi_i, rR) \subset \bigcap_{i=1}^m B(\psi_i, R) = C,$$

es decir, si $x \in \bigcup_{i=1}^m B(\psi_i, rR)$, entonces $d(\psi_i, x) \leq rR$ y así

$$d(\psi_j, x) \leq \lambda + rR = \lambda + r\lambda(1-r)^{-1} = \lambda(1-r)^{-1} = R.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Psi_i(C) &= \Psi_i \bigcap_{i=1}^m B(\psi_i, R) \subset \bigcap_{i=1}^m \Psi_i B(\psi_i, R) = \bigcap_{i=1}^m B(\psi_i, r_i R) \subset \\ &\subset \bigcap_{i=1}^m B(\psi_i, rR) \subset \bigcap_{i=1}^m B(\psi_i, R) = C. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Psi_i(C) \subset C$ para toda $i = 1, \dots, m$ y tomando imágenes por ambos lados obtenemos que

$$C \supset \Psi_i(C) \supset \Psi_{i_1 i_2}(C) \supset \dots \supset \Psi_{i_1 \dots i_p}(C) \supset \dots,$$

es decir,

$$C \supset C_{i_1} \supset C_{i_1 i_2} \supset \dots \supset C_{i_1 \dots i_p} \supset \dots$$

Como el único punto fijo $\psi_{i_1 \dots i_p}$ debe estar en $\Psi_{i_1 \dots i_p}(C)$,

$$|\Psi_{i_1 \dots i_p}(C)|_{p \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

y los $\Psi_{i_1 \dots i_p}(C)$ son conjuntos cerrados, tenemos que $\lim_{p \rightarrow \infty} \psi_{i_1 \dots i_p}$ existe y es el único miembro de $\bigcap_{p=1}^{\infty} \Psi_{i_1 \dots i_p}(C)$. \square

Para $\alpha \in C(N)$ sea $\psi_\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ y sea $K = \{\psi_\alpha : \alpha \in C(N)\}$, entonces $\Psi_i(\psi_\alpha) = \psi_{i\alpha}$, ya que

$$\Psi_i(\psi_\alpha) \in \Psi_i \bigcap_{p=1}^{\infty} (C_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) = \bigcap_{p=1}^{\infty} (C_{i\alpha_1 \dots \alpha_p}) \ni \psi_{i\alpha}.$$

Notemos que normalmente no es verdad que $\Psi_i(\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) = \psi_{i\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Así

$$K = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(K) = S\Psi(K),$$

es decir, K es invariante respecto a $S\Psi$.

El que K es compacto se probó en la parte 7 ya que $C(N)$ es compacto y la función $\pi : C(N) \rightarrow K$ es continua. \square

3.4. Dimensión fractal de conjuntos autosemejantes

Definición 3.4.1. Sea r_i con $i = 1 : m$ la razón de contractividad correspondiente a las semejanzas contractivas Ψ_i . Si $\sum_{i=1}^m r_i^D = 1$, D es llamado dimensión de similitud de $S\Psi$.

Notemos que $\sum_{i_1, \dots, i_p} r_{i_1}^D \cdots r_{i_p}^D = \left(\sum_{i=1}^m r_i^D \right)^p = 1$. Esto lo estaremos usando con mucha frecuencia en lo que sigue. Tomemos a $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m$, de tal manera que $r_1 = \min\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, $r_m = \max\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$.

Proposición 3.4.2. *Sea K el conjunto invariante de $S\Psi$. Si $\dim K = s$, entonces*

i) $H^D(K) < \infty$ y además $s \leq D$ (esto es verdad para cualesquiera $\{\Psi_i\}$ de contracciones).

ii) $0 < H^s(K) < \infty$ implica que K es autosimilar si y sólo si $s = D$.

Demostración. i) $K = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} K_{i_1, \dots, i_p}$ y

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} |K_{i_1, \dots, i_p}|^D = \sum_{i_1, \dots, i_p} r_{i_1}^D \cdots r_{i_p}^D |K|^D = |K|^D.$$

Como $|K_{i_1, \dots, i_p}| \leq r_m^p |K|$ a medida que p crece $|K_{i_1, \dots, i_p}|$ tiende a cero, por lo que H^D es finito y así $s \leq D$.

ii) Supongamos que $0 < H^s(K) < \infty$ y K es autosemejante, es decir, que

$$H^s(K_i \cap K_j) = 0$$

si $i \neq j$, entonces

$$H^s(K) = \sum_{i=1}^m H^s(K_i) = \sum_{i=1}^m r_i^s H^s(K),$$

por tanto tenemos que $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$ y así $D = s$.

Supongamos que $0 < H^D(K) < \infty$, entonces

$$H^D(K) \leq \sum_{i=1}^m H^D(K_i) = \sum_{i=1}^m r_i^D H^D(K).$$

Como

$$\sum_{i=1}^m r_i^D = 1, \quad H^D(K) = \sum_{i=1}^m H^D(K_i)$$

esto da como resultado que $H^D(K_i \cap K_j) = 0$ si $i \neq j$. \square

Daremos ahora una forma más sencilla de asegurar el cumplimiento de la definición de autosemejanza basada en la condición de abierto.

Definición 3.4.3. *Se dice que el sistema de semejanzas $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ de X cumple la condición de abierto si existe un conjunto acotado y abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S\Psi(V) \subset V$ y $\Psi_i(V) \cap \Psi_j(V) = \emptyset$ si $i \neq j$.*

Veamos cómo puede ser utilizada esta condición para la construcción del conjunto invariante E en un proceso de selección. Utilizamos el compacto $F = \overline{V}$ para obtener el conjunto invariante E como límite de $S\Psi^n(F)$.

Proposición 3.4.4. *Dada el sistema de semejanzas $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ de X que cumple la condición de abierto respecto al conjunto V y dado $F = \overline{V}$ se cumple que*

$$F \supset S\Psi(F).$$

Demostración. Sabemos por definición que $S\Psi(F) = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(F)$. Ahora bien, como cada Ψ_i es una semejanza y por tanto continua, tenemos que $\Psi_i(F) = \Psi_i(\overline{V}) \subseteq \overline{\Psi_i(V)}$, de donde

$$S\Psi(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \overline{\Psi_i(V)} = \overline{\bigcup_{i=1}^m \Psi_i(V)} \subseteq \overline{V} = F.$$

Observemos que $S\Psi(F)$ es un conjunto formado por m piezas de la forma $\Psi_i(F)$ semejantes a F y todas ellas incluidas en F . \square

Tomando en la relación $S\Psi(F) \subset F$ imágenes por $S\Psi$ sucesivas veces en ambos miembros, se obtiene $F \supset S\Psi(F) \supset S\Psi^2(F) \supset \dots \supset S\Psi^k(F) \supset \dots$. Consideramos el conjunto

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} S\Psi^i(F).$$

Tomando imágenes por $S\Psi$ se obtiene

$$S\Psi(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S\Psi^{i+1}(F) = S\Psi(F) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} S\Psi^i(F) = S\Psi(F) \cap E = E.$$

De lo que se deduce que E es precisamente el conjunto invariante para el sistema de semejanzas S .

Proposición 3.4.5. (*Principio de distribución de masa*) *Sea μ una distribución de masa sobre F y suponga que para algún s hay números $c > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$\mu(U) \leq c|U|^s \quad (3.1)$$

para todos los conjuntos U con $|U| \leq \delta$, entonces

$$H^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c} \quad \text{y} \quad s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una cubierta de F , entonces

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s. \quad (3.2)$$

Tomando el ínfimo, si δ es lo suficientemente pequeña $H_\delta^s(F) = \frac{\mu(F)}{c}$, como μ es una distribución de masa sobre \mathbb{R}^n y F es cualquier subconjunto tenemos que

$$H^s(F) = \frac{\mu(F)}{c}.$$

□

Para demostrar el resultado principal de esta sección requerimos el siguiente resultado.

Lema 3.4.6. Si $\{V_i\}$ es una colección de subconjuntos abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n tal que cada V_i contiene una bola de radio a y está contenido en una bola de radio ar , entonces cualquier bola B de radio r intersecta a lo más $(1 + 2a)^n a^{-n}$ bolas cerradas \overline{V}_i .

Demostración. Si \overline{V}_i cubre a B , entonces \overline{V}_i está contenido en la bola concéntrica con B de radio $(1 + 2a)r$. Supongamos que q de los conjuntos \overline{V}_i intersectan a B , entonces sumando los volúmenes de las correspondientes bolas interiores de radio a , se tiene que $q(a)^n \leq (1 + 2a)^n r^n$, dándose el salto para q . □

El siguiente teorema nos da la manera de calcular la dimensión fractal y la dimensión Hausdorff de los conjuntos generados por un sistema de semejanzas contractivas.

Teorema 3.4.7. Si un sistema de semejanzas $S = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ contractivas de \mathbb{R}^n con razones r_i , $1 \leq i \leq m$, verifica la condición de abierto, entonces el compacto E invariante para S

$$E = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(E) \quad (3.3)$$

es autosemejante y su dimensión Hausdorff y su dimensión por conteo de cajas viene dada por el único número real no negativo s , tal que

$$1 = \sum_{i=1}^m (r_i)^s \quad (3.4)$$

verificando que $0 < H^s(E) < \infty$.

Demostración. Sea s que satisface (3.4). Para algún conjunto A escribimos

$$A_{i_1, \dots, i_k} = \Psi_{i_1} \circ \dots \circ \Psi_{i_k}(A).$$

Denotamos por J_k el conjunto de todas las sucesiones (i_1, \dots, i_k) de k -términos con $1 \leq i_j \leq m$. Usando (3.3) repetidamente, se sigue que

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Verificamos que esas cubiertas nos dan una estimación superior para la medida de Hausdorff.

Como la aplicación $\Psi_{i_1} \circ \dots \circ \Psi_{i_k}$ es una similaridad de razón $r_{i_1} \cdots r_{i_k}$, entonces

$$\sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s |F|^s = |F|^s \quad (3.5)$$

por (3.4).

Para toda $\delta > 0$, podemos escoger k tal que

$$|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i r_i)^k \leq \delta.$$

Esto porque el máximo de las contracciones es menor estricto que 1.

Así que $H_\delta^s \leq |F|^s$ y por lo tanto $H^s \leq |F|^s$. Ahora calculemos una cota inferior.

Sea I el conjunto de todas las sucesiones infinitas

$$I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\},$$

y sea

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$$

el cilindro formado por todas las sucesiones en I cuyos términos iniciales son (i_1, \dots, i_k) .

Definamos en I una distribución de masa μ , tal que

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^s.$$

Ya que $(r_{i_1}, \dots, r_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (r_{i_1}, \dots, r_{i_k} r_i)^s$, tenemos que

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$$

y así $\mu(I) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i) = \sum_{i=1}^m r_i^s = 1$, se sigue que μ es una distribución de masa sobre los subconjuntos de I con $\mu(I) = 1$. Vamos a transferir μ a una distribución de masa $\bar{\mu}$ sobre F de modo natural definiendo $\bar{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ para subconjuntos A de F donde $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k}$. De la definición se tiene que $\bar{\mu}(F) = 1$.

Probaremos que $\bar{\mu}$ satisface las condiciones del principio de distribución de masa. Para eso, sea V el conjunto abierto que satisface la condición de abierto. Ya que $\bar{V} \supset S\Psi(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m \Psi_i(\bar{V})$, la sucesión decreciente de iteraciones $\Psi^k(\bar{V})$ converge a F pues \bar{V} es compacto. En particular $\bar{V} \supset F$ y $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$ para cada sucesión finita (i_1, \dots, i_k) . Sea B cualquier bola de radio $r < 1$. Estimamos $\bar{\mu}(B)$ considerando los conjuntos V_{i_1, \dots, i_k} con diámetros comparables al de B y con la cerradura intersectando a $F \cap B$. Limitamos cada sucesión infinita $(i_1, \dots, i_k) \in I$ después del primer término i_k para el cual

$$\left(\min_i c_i \right)^k r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r. \quad (3.6)$$

Denotemos por Q el conjunto finito de todas las sucesiones (finitas) obtenidas de este modo, entonces para cada sucesión infinita $((i_1, \dots, i_k) \in I)$ hay exactamente un valor de k con $((i_1, \dots, i_k) \in Q)$. Como cada V_i, \dots, V_m son disjuntos, también los conjuntos $V_{i_1, \dots, i_{k+1}}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$ son disjuntos para cada (i_1, \dots, i_k) . Ya que se tienen familias anidadas de conjuntos, se sigue que la colección de conjuntos abiertos

$$\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$$

es disjunta. Análogamente

$$F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}.$$

Elijamos a_1 y a_2 tal que V contiene una bola de radio a_1 y está contenido en una bola de radio a_2 , entonces para $((i_1, \dots, i_k) \in Q)$, el conjunto V_{i_1, \dots, i_k} contiene una bola de radio $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} a_1$ y también una de radio $\left(\min_i c_i\right)^k a_1 r$ y está contenido en una bola de radio $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} a_2$. Por lo tanto, en una bola de radio $a_2 r$. Sea Q_1 el conjunto de las sucesiones $((i_1, \dots, i_k) \in Q)$ tales que B interseca con $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Por el Lema 3.4.6 hay a lo más $q = (1 + 2a_2)^n (a_1 (\min_i c_i)^k)^{-n}$ sucesiones en Q_1 , entonces

$$\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(F \cap B) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\}.$$

Ya que si

$$x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k},$$

entonces hay un entero k tal que $i_1, \dots, i_k \in Q_1$. Así

$$\bar{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q$$

usando (3.6). Ya que cualquier conjunto U está contenido en una bola de radio $|U|$, tenemos que $\bar{\mu}(U) \leq |U|^s q$. Así por el principio de distribución de masa tenemos que $H^s(F) \geq q^{-1} > 0$ y $\dim_H F = s$.

Si Q es cualquier conjunto de sucesiones infinitas tal que para cada $(i_1, i_2, \dots) \in I$ hay exactamente un entero k con $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, se sigue por inducción de (3.4) que

$$\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = 1.$$

Por lo tanto, si Q es como en (3.6), entonces contiene a lo más $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ sucesiones. Para cada sucesión $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ tenemos que

$$|\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\bar{V}| \leq r |\bar{V}|,$$

por lo que F podría ser cubierto por $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ conjuntos de diámetro $r|\bar{V}|$ para cada $r < 1$. Se sigue de la definición equivalente dada por el Teorema 2.2.1(iv) que $\bar{\dim}_B F \leq s$; ya que la dimensión de Hausdorff también es s y esto completa la prueba. \square

Ejemplo 3.4.8. Tomando las funciones $f_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{3}(x + 0.5, y + 1)$, $f_3(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1.5, y + 0.5)$, $f_4(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1, y + 1)$, $f_5(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1, y + 0.5)$ y $f_6(x, y) = \frac{1}{3}(x + 0.5, y + 1.5)$, se obtiene un sistema de semejanzas contractivas en el plano con el mismo factor de contracción $r = \frac{1}{3}$. El conjunto invariante del sistema se muestra en la figura 3.2. Aplicando el teorema 3.4.7 a este sistema de seis funciones tenemos que la dimensión Hausdorff s del conjunto invariante está dada por la relación,

$$1 = \sum_1^6 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 6\left(\frac{1}{3}\right)^s.$$

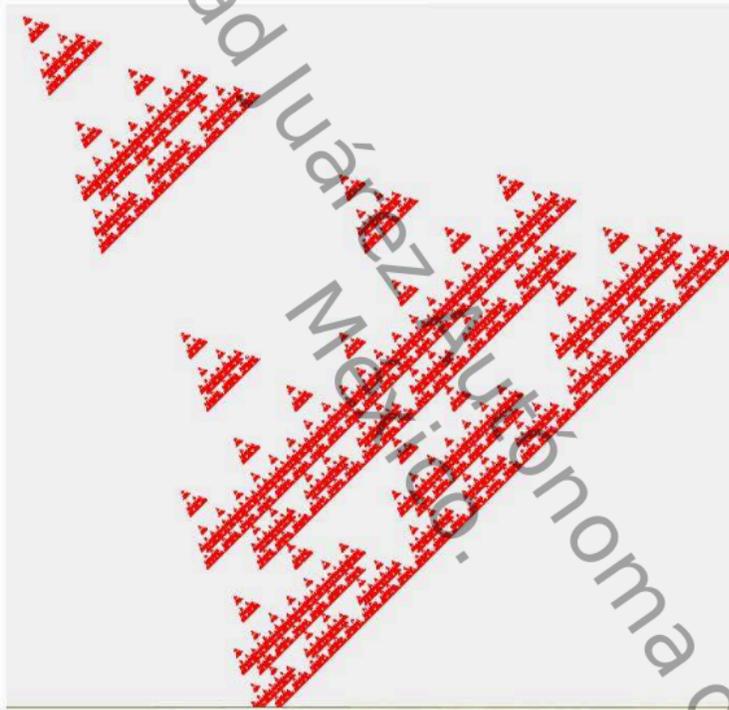


Figura 3.2: Torre inclinada.

Despejando obtenemos que $s = \frac{\log \frac{1}{6}}{\log \frac{1}{3}} = \frac{-\log 6}{-\log 3} = \frac{\log 6}{\log 3}$.

Ejemplo 3.4.9. Tomando las funciones $f_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1, y)$, $f_3(x, y) = \frac{1}{3}(x, y + 1)$, $f_4(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1, y + 1)$, $f_5(x, y) = \frac{1}{3}(x + 0.5, y + 0.5)$, $f_6(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1, y + 0.5)$ y $f_7(x, y) = \frac{1}{3}(x + 0.5, y + 1)$ se obtiene un sistema de semejanzas contractivas en el plano con el mismo factor de contracción $r = \frac{1}{3}$. El conjunto invariante del sistema se muestra en la figura 3.3. Aplicando el teorema 3.4.7 a este sistema de siete funciones tenemos que la dimensión Hausdorff s del

conjunto invariante está dada por la relación,

$$1 = \sum_1^7 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 7\left(\frac{1}{3}\right)^s.$$

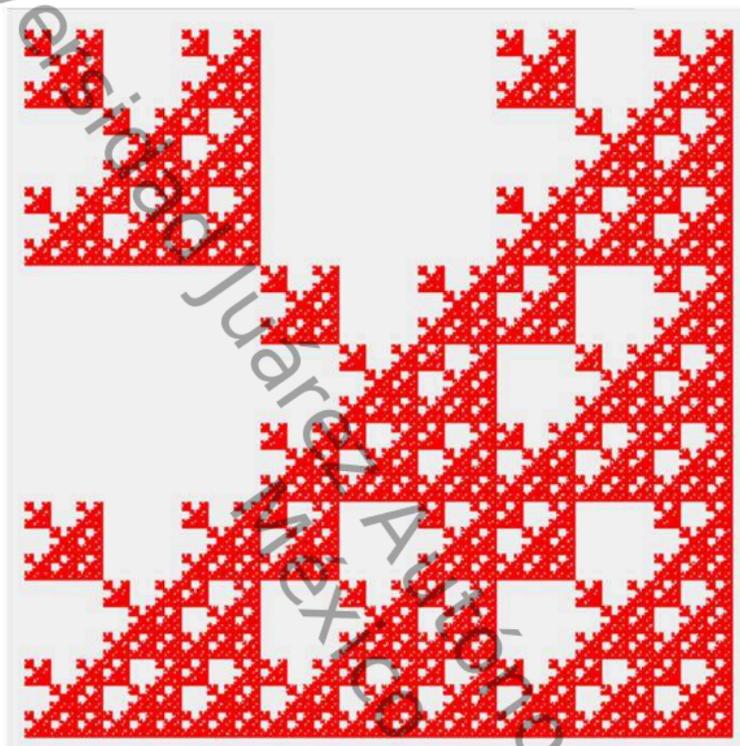


Figura 3.3: Papagayo.

Despejando obtenemos que $s = \frac{\log \frac{1}{7}}{\log \frac{1}{3}} = \frac{-\log 7}{-\log 3} = \frac{\log 7}{\log 3}$.

Ejemplo 3.4.10. Tomando las funciones $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(x + 1, y)$ y $f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x, y + 1)$ se obtiene un sistema de semejanzas contractivas en el plano con el mismo factor de contracción $r = \frac{1}{2}$. El conjunto invariante del sistema se muestra en la figura 3.4. Aplicando el teorema 3.4.7 a este sistema de tres funciones tenemos que la dimensión Hausdorff s del conjunto invariante está dada por la relación,

$$1 = \sum_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 3\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

Despejando obtenemos que $s = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{-\log 3}{-\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$.

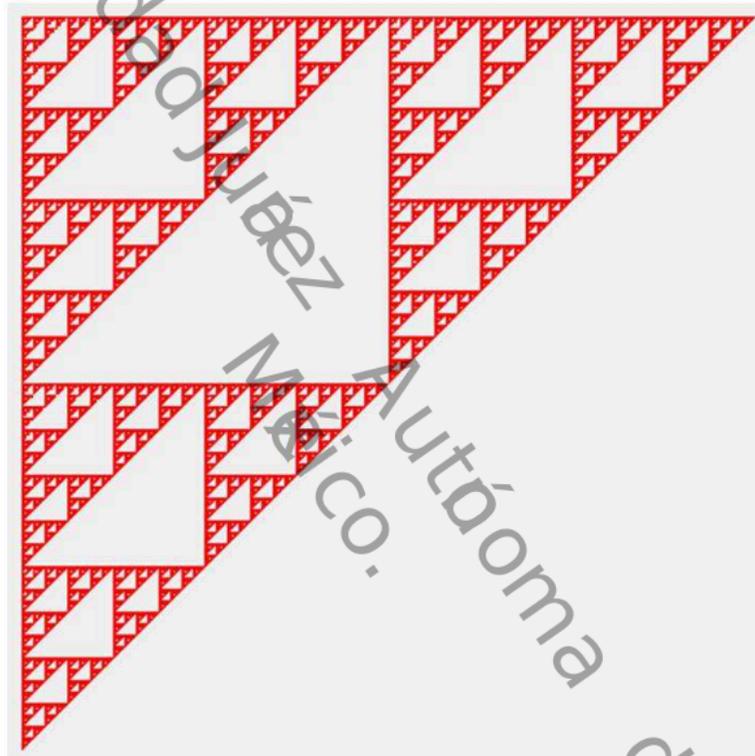


Figura 3.4: Triángulo de Sierpinski.

Capítulo 4

Dimensión Fractal de Conjuntos de Julia

En este capítulo definimos el conjunto de Julia y de Fatou de una aplicación racional R e introducimos un algoritmo que permite aproximar la dimensión Hausdorff de conjuntos de Julia de funciones polinomiales expansivas. En particular trabajaremos con polinomios cuadráticos reales.

4.1. Conjuntos de Julia y de Fatou.

Daremos algunas definiciones y resultados que son válidos en un contexto más general pero nos restringiremos a las funciones de variable compleja, en particular a las funciones racionales:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde P y Q son polinomios primos entre sí, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y el grado de f es el máximo de los grados de P y Q . En este trabajo suponemos que el grado de f es mayor o igual que 2. Los conceptos y resultados mostrados en esta sección pueden ser ampliados en [B, CG, McMI].

Para definir los conjuntos de Julia y de Fatou de una aplicación racional veamos la definición de familia normal.

Definición 4.1.1. Sea $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $\mathfrak{F} = \{f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en U . La familia \mathfrak{F} es normal en $z_0 \in U$ si para toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$, tal que converge uniformemente en subconjuntos compactos de U , en una vecindad de z_0 , a una función f_0 .

Definición 4.1.2. Sea R una aplicación racional. Decimos que $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pertenece al conjunto de Fatou de R , F_R , si la familia $\{R^n\}$ es normal en una vecindad de z_0 . El conjunto de Julia J_R se define como el complemento de F_R .

Si R es una aplicación racional, se tienen las siguientes propiedades de los conjuntos J_R y F_R que pueden ser consultadas en [B, CG]:

- 1.- El conjunto J_R es compacto, perfecto y diferente del vacío.
- 2.- Los conjuntos J_R y F_R son completamente invariantes, es decir, $R^{-1}(J_R) = R(J_R) = J_R$ y de igual manera para F_R .
- 3.- Si f denota la k -ésima iterada de R para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir, $f = R^k$, entonces $J_R = J_f = J_{R^k}$ y $F_R = F_f = F_{R^k}$.
- 4.- Si $z \in J_R$, entonces el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z)$ es denso en J_R .
- 5.- Sea z un punto periódico de periodo k de R .
 - a).- Si z es atractor, entonces $z \in F_R$
 - b).- Si z es repulsor, entonces $z \in J_R$
- 6.- Los puntos periódicos repulsores de R son un conjunto denso en J_R , es decir, $J_R = \{\text{puntos periódicos repulsores de } R\}$.

El conjunto postcrítico definido por

$$P_R = \overline{\{R^n(z_0) : z_0 \text{ es punto crítico de } R \text{ y } n \in \mathbb{N}\}},$$

es decir, P_R es la cerradura de la unión de las órbitas de todos los puntos críticos de una aplicación racional R . El conjunto P_R está estrechamente ligado a la dinámica de R , como podemos ver en el siguiente resultado, consecuencia de los trabajos de Fatou, [CG].

Proposición 4.1.3. *El conjunto postcrítico P_R contiene, los ciclos atractores de R , los ciclos indiferentes que pertenecen al conjunto de Julia y la frontera de cada disco de Siegel y anillo de Herman.*

4.2. Hiperbolicidad

Una idea central en dinámica, que fue desarrollada en los años 60's y 70's (por Smale, Anosov, Sinai, Lyubich y otros), es la idea de hiperbolicidad. En esta sección daremos la definición de aplicaciones racionales hiperbólicas y mostraremos las propiedades que hacen a este tipo de aplicaciones bien comportadas.

Definición 4.2.1. *Una aplicación racional, $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, es hiperbólica si las órbitas de todos los puntos críticos convergen a los ciclos periódicos atractores de R .*

De entre todas las funciones racionales, las hiperbólicas son las que tienen un comportamiento más sencillo, ya que cuando R es hiperbólica, existe un conjunto finito $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que atrae a un subconjunto abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$ de medida total. El siguiente resultado caracteriza la propiedad de ser hiperbólico y puede ser consultado en [McMI].

Teorema 4.2.2. (Caracterización de Hiperbolicidad). Sea R una aplicación racional. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El conjunto postcrítico P_R es ajeno al conjunto de Julia J_R .
2. No hay puntos críticos o ciclos parabólicos en el conjunto de Julia.
3. Cada punto crítico de R converge a un ciclo atractor bajo iteración positiva.
4. Existe una métrica conforme suave ρ definida en una vecindad del conjunto de Julia tal que $\|R'(z)\|_\rho > C > 1$ para toda $z \in J_R$.
5. Existe un entero $n > 0$ tal que R^n expande estrictamente la métrica esférica en el conjunto de Julia.

4 A las aplicaciones racionales hiperbólicas algunas veces se les llama expansivas o que satisfacen el axioma A de Smale. De la propiedad 5 de hiperbolicidad se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3. El conjunto de Julia de una aplicación racional hiperbólica tiene medida de Lebesgue cero.

De hecho, la dimensión Hausdorff del conjunto de Julia de una aplicación racional hiperbólica es estrictamente menor que 2, [S2].

4.3. Aplicaciones Polinomiales

4 Observe que si P es un polinomio de grado $d > 1$, entonces el infinito es un punto fijo super-atractor y por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde P es analíticamente conjugada a la función z^d . En consecuencia la órbita de cualquier punto $z \in U$ converge al infinito y por lo tanto, $z \in F_P$.

Definimos el dominio de atracción del infinito

$$A_P(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty\} \subset F_P$$

y el conjunto de Julia lleno de P por

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} : \text{la órbita } O_P(z) \text{ es acotada}\}.$$

Como el interior de K_P está contenido en F_P , se tiene que J_P es igual a la frontera de K_P que a su vez es igual a la frontera de $A_P(\infty)$.

Por definición tenemos las siguientes propiedades de K_P :

1. Es compacto, perfecto y diferente del vacío.

2. Es un conjunto lleno, es decir, su complemento en $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo.

3. Su frontera es igual al conjunto de Julia de P .

Teorema 4.3.1. (Fatou-1919). Sea P un polinomio. El conjunto K_P es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico es acotada.

Teorema 4.3.2. (Fatou-1919). Si f es un polinomio y tiene una órbita atractora ξ , entonces existe un punto crítico en el dominio inmediato de atracción de ξ .

En este trabajo, tiene mucha importancia la familia $f_c(z) = z^2 + c$ para $c \in \mathbb{C}$ y denotaremos por $K_c = K_{f_c}$ y $J_c = J_{f_c}$. Del teorema 4.3.1 tenemos:

Corolario 4.3.3. El conjunto J_c es conexo si y sólo si la órbita de cero es acotada.

Corolario 4.3.4. El conjunto J_c es un conjunto de Cantor si y sólo si la órbita del cero converge a infinito, es decir, $0 \in A_c(\infty)$.

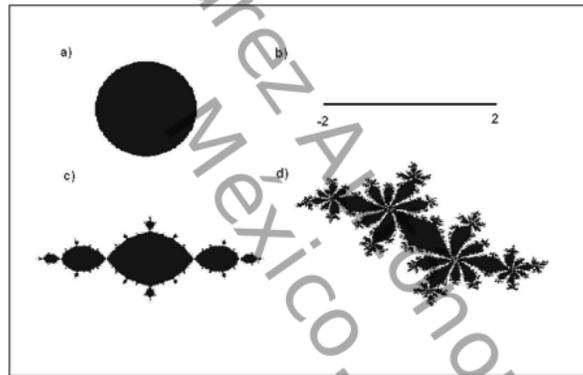


Figura 4.1: Conjunto de Julia lleno K_c para: a) $c=0$, b) $c=-2$, c) $c=-1$ y d) $c=-0.36+0.62i$

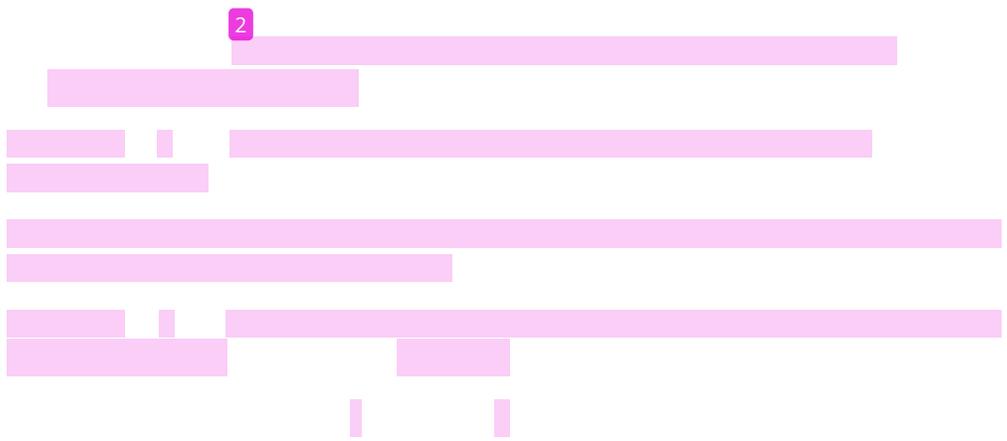
Definimos el conjunto de Mandelbrot M como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la órbita } O_c(0) \text{ es acotada}\}.$$

Notemos que si $c = 0$, entonces K_c es el disco unitario cerrado centrado en cero y por lo tanto es conexo, véase la figura 4.1. De aquí tenemos que M es no vacío. En la figura 4.2 se muestran algunos conjuntos de Julia para ciertos parámetros c del conjunto de Mandelbrot.

Proposición 4.3.5. Sea $S = \max\{2, |c|\}$. Si $|z| > S$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = \infty.$$



De la definición de hiperbolicidad tenemos directamente el siguiente resultado.

Teorema 4.3.11. *Para c en el conjunto de Mandelbrot, $f_c(z) = z^2 + c$ es hiperbólico si y sólo si f_c tiene un ciclo atractor en \mathbb{C} .*

Definición 4.3.12. *Una componente U del interior del conjunto de Mandelbrot M es hiperbólica si f_c es hiperbólico para alguna c en U .*

Note que si U es una componente del interior de M y $c_0 \in U$ es un parámetro hiperbólico, se puede mostrar que f_c es hiperbólico para toda $c \in U$, [D1]. Además, f_c es hiperbólico cuando c no pertenece a M , porque el punto crítico converge al punto fijo super-atractor en infinito. Una conjetura muy importante, la cual fue propuesta por Fatou para la familia de aplicaciones racionales, es la conjetura de la densidad de las aplicaciones racionales hiperbólicas. Esta conjetura restringida a la familia de polinomios cuadráticos se traduce en demostrar que las componentes del interior de M está formado por componentes hiperbólicas. Así mismo, Douady-Hubbard mostraron que la conexidad local de la frontera del conjunto de Mandelbrot implica que las componentes hiperbólicas son densas en M y por lo tanto, la conjetura de Fatou se tendría para la familia cuadrática, [DH]. Con la finalidad de demostrar la conexidad local de la frontera de M , ha sido muy útil una herramienta conocida como rayos externos y para definirlos en este trabajo será necesario dar algunos resultados preliminares.

Teorema 4.3.13. (Riemann-1898) *Si Ω es un subconjunto propio de \mathbb{C} , abierto y simplemente conexo, entonces es isomorfo al disco unitario; i.e. existe un biholomorfismo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Además esta aplicación es única si suponemos que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$ para un $z_0 \in \Omega$ fijo.*

Teorema 4.3.14. (Carathéodory-1913) *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$ un biholomorfismo, φ se extiende continuamente a la frontera de U si y sólo si ésta es localmente conexa.*

Dado que el complemento del conjunto de Mandelbrot es simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$, por el teorema de Riemann, existe un biholomorfismo ϕ entre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ y \mathbb{D} . Además por el teorema de Carathéodory, ϕ se extiende continuamente a la frontera de \mathbb{D} si y sólo si la frontera de M es localmente conexa [DH, D1].

Como el polinomio f_c tiene un punto fijo super-atractor en el infinito, por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde el polinomio f_c es analíticamente conjugado a la función z^2 . Denotemos por ϕ_c al biholomorfismo que realiza la conjugación, deja fijo al infinito y es tangente a la identidad en el infinito. Si U es el conjunto máximo donde ϕ_c conjugua a f_c a z^2 , entonces se tienen dos casos [DH]:

1. Si $c \in M$, $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus K_c$.
2. Si $c \notin M$, entonces U es una vecindad del infinito que contiene al valor crítico \bar{c} .

A partir del biholomorfismo ϕ_c , Douady-Hubbard definieron la función

$$\Phi_M : \widehat{\mathbb{C}} \setminus M \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

$$c \longrightarrow \phi_c(c),$$

y demostraron que esta función es un biholomorfismo y relaciona al espacio dinámico con el espacio de parámetros. Para entender el comportamiento de Φ_M en la frontera vamos a definir los rayos externos a M y a J_c . Si $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces el *rayo externo* a M de ángulo θ es el conjunto

$$R_M(\theta) = \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = r \exp^{2\pi i \theta}, 1 < r < \infty\}).$$

Si el $\lim_{r \rightarrow 1} R_M(\theta) = c$, se dice que el rayo de ángulo θ aterriza en c y que c tiene a θ como *argumento externo*.

Se define el *equipotencial* $E_M(r)$ de M , de radio $r > 1$, como

$$E_M(r) = \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = r \exp^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{T}\}).$$

Ambas definiciones son válidas para los conjuntos de Julia llenos conexos, si sustituimos a Φ_M por ϕ_c .

Teorema 4.3.15. (Douady-Hubbard-1982). *Sea c un parámetro en la frontera de una componente hiperbólica W de M y con ángulo interno $t \in \mathbb{T}$.*

1. Si t es racional y $c \neq \frac{1}{4}$, entonces c tiene dos argumentos externos, es decir, hay dos ángulos θ_1, θ_2 tales que los rayos externos $R_M(\theta_i)$ aterrizan en c , para $i = 1, 2$. Además, los rayos $R_c(\theta_i)$ aterrizan en un punto de la frontera de la componente del interior de K_c que contiene a c y son adyacentes a ésta.

2. Si t es irracional, entonces existe un único ángulo θ tal que $R_M(\theta)$ aterriza en c .

Además de este resultado, Douady y Hubbard demostraron que todos los rayos externos de ángulo racional θ aterrizan en la frontera de M y de hecho mostraron que si θ es periódico bajo la función 2θ , entonces $R_M(\theta)$ aterriza en un parámetro c parabólico (f_c tiene una órbita parabólica) y en caso contrario, $R_M(\theta)$ aterriza en un parámetro de Misiurewicz c , (cero es pre-periódico). Por otro lado, Yoccoz demostró que se tiene conexidad local en todos los parámetros que se encuentran en la frontera de una componente hiperbólica de M , [H]. En esta dirección se han tenido importantes avances los cuales pueden ser consultados en [KL] y en las bibliografías allí citadas.

4.4. Particiones de Markov y el algoritmo del valor propio

En esta sección se definen las particiones de Markov para los sistemas dinámicos conformes equipado con densidades invariantes. A continuación, describimos un algoritmo para el cálculo de la dimensión de la densidad invariante en el caso expansivo. Este cálculo nos permite calcular la dimensión Hausdorff de los conjuntos de Julia de polinomios hiperbólicos.

4.4.1. Partición de Markov

Definición 4.4.1. Una partición de Markov para un sistema dinámico conforme \mathcal{F} con densidad \mathcal{F} -invariante μ , es una colección no vacía $P = \langle (P_i, f_i) \rangle$ de bloques compactos y arcoconexos $P_i \subset S^2$ y aplicaciones $f_i \in \mathcal{F}$ definida en P_i , tal que:

1. $f_i(P_i) \supset \bigcup_{i \rightarrow j} P_j$, donde la relación $i \mapsto j$ significa que $\mu(f_i(P_i) \cap P_j) > 0$;
2. f_i es un homeomorfismo en una vecindad de $P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$, cuando $i \mapsto j$;
3. $\mu(P_i) > 0$;
4. $\mu(P_i \cap P_j) = 0$ si $i \neq j$; y
5. $\mu(f_i(P_i)) = \mu(\bigcup_{i \rightarrow j} P_j) = \sum_{i \rightarrow j} \mu(P_j)$.

Nuestras particiones siempre serán finitas.

Definición 4.4.2. Una partición de Markov es expansiva si existe una métrica suave conforme en S^2 y una constante ξ tal que

$$|f'_i(x)|_\rho > \xi > 1,$$

donde $x \in P_i$ y $f_i(x) \in P_j$ para algún j .

El refinamiento de una partición P

$$\mathbf{R}(P) = \langle (\mathbf{R}_{ij}, f_i) : i \mapsto j \rangle$$

es una nueva partición de Markov definida por

$$\mathbf{R}_{ij} = f_i^{-1}(P_j) \cap P_i.$$

En otras palabras cada bloque de la partición P es subdividido y las aplicaciones son las mismas en cada bloque subdividido.

Proposición 4.4.3. Si P es una partición de Markov expansiva, entonces los bloques de $R^n(P)$ tienen diámetro de $O(\xi^{-n})$, $\xi > 1$.

Demostración. Ya que cada bloque P_j de P es arcoconexo, cualesquiera dos puntos en P_j pueden conectarse por un camino de manera suave uniformemente acotado de longitud L , contenido en la imagen de f_i cuando $i \rightarrow j$. Dado que la partición es expansiva, es decir, existe ξ tal que $|f'(x)| > \xi > 1 \quad \forall x \in P_i$ y $f_i(x) \in P_j$ para alguna j , entonces por el teorema del valor medio tenemos que

$$L = |f_i(x) - f_i(y)| = f'(c)|x - y| > \xi|x - y|.$$

Y así

$$|x - y| < \xi^{-1}|f_i(x) - f_i(y)| \Rightarrow |f_i^{-1}(f_i(x)) - f_i^{-1}(f_i(y))| < \xi^{-1}|f_i(x) - f_i(y)| = \xi^{-1}L$$

Por tanto bajo f_i^{-1} , este camino se contrae por ξ^{-1} en la ρ -métrica, así los puntos de R_{ij} están a lo más a una distancia $\xi^{-1}L$. Iterando, tendremos que los ρ -diámetros de los bloques de $R^n(P)$ es a lo más $\xi^{-n}L$ y ya que la ρ -métrica es equivalente con la métrica esférica se termina la prueba. \square

4.4.2. Algoritmo del valor propio

A continuación presentamos el algoritmo que permite aproximar la dimensión δ de una densidad μ . Los resultados que presentamos esta sección fueron tomados de [McHIII]. Supongamos que se tiene una partición de Markov $P = \langle (P_i, f_i) \rangle$ y una muestra de puntos $x_i \in P_i$. El algoritmo calcula una sucesión de aproximaciones $\alpha(\mathbf{R}^n(P))$ a δ procediendo de la siguiente manera:

1. Para cada $i \mapsto j$, se calcula $y_{ij} \in P_i$ tal que $f_i(y_{ij}) = x_j$.
2. Calcule la matriz de transición

$$(MT)_{ij} = \begin{cases} |f'_i(y_{ij})|^{-1} & \text{si } i \mapsto j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Encuentre $\alpha(P) \geq 0$ tal que el radio espectral satisfice

$$\lambda(T^\alpha) = 1.$$

Donde $((MT)^\alpha)_{ij} = T_{ij}^\alpha$.

4. La salida $\alpha(P)$ es una aproximación a δ .
5. Reemplace P por un refinamiento $\mathbf{R}(P)$, defina nuevamente una muestra de puntos $x_{ij} = y_{ij} \in \mathbf{R}_{ij}$ y regrese al paso 1.

Ejemplo 4.4.4. Sea $I = [0, 1]$, $I \subset \mathbb{R}$, $T : I \rightarrow I$ con la siguiente regla de correspondencia

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

y sea $P_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $P_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, véase la figura 4.3.

Notemos que $T(P_1) \supseteq P_1 \cup P_2$ y $T(P_2) \supseteq P_1 \cup P_2$. Sea $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ entonces existen $y_{11}, y_{12}, y_{22}, y_{21}$ tal que $T(y_{ij}) = x_j$. Calculando la matriz de transición tenemos que

$$MT = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 2^{-1} \\ 2^{-1} & 2^{-1} \end{pmatrix}$$

y

$$(MT)^\alpha = \begin{pmatrix} (2^{-1})^\alpha & (2^{-1})^\alpha \\ (2^{-1})^\alpha & (2^{-1})^\alpha \end{pmatrix}$$

cuyo valor propio está dado por

$$\lambda = \frac{2^{1-\alpha} \pm \sqrt{(2^{1-\alpha})^2}}{2} = \frac{2^{1-\alpha} \pm 2^{1-\alpha}}{2} = \begin{cases} 2^{1-\alpha}, \\ 0. \end{cases}$$

Como $\lambda(MT^\alpha) = 1$, entonces $2^{1-\alpha} = 1$ resolviendo tenemos que $(1 - \alpha) \log 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Por lo tanto, la aproximación a δ es 1.

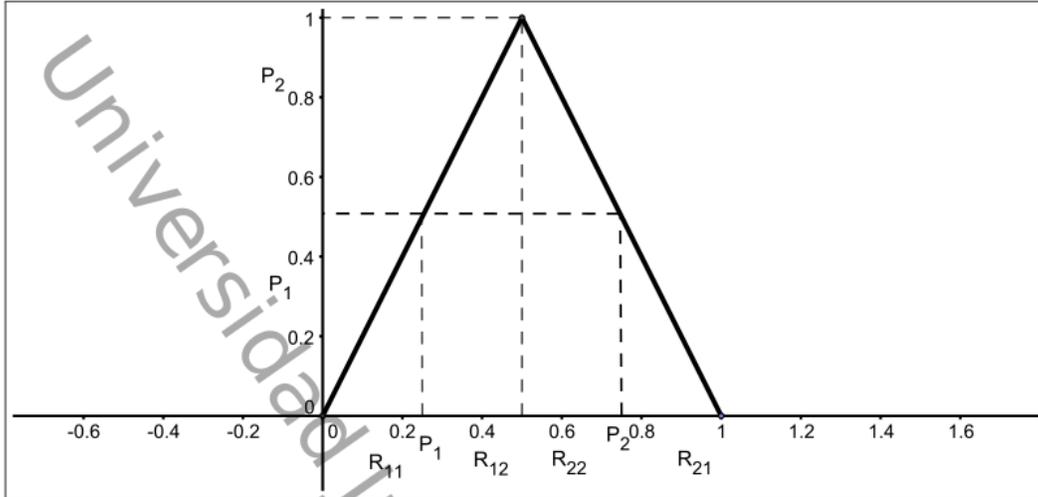


Figura 4.3: Gráfica de la función Tienda

Esperamos tener $\alpha(P) \approx \delta$. En efecto la ley de transición, $\mu(f(E)) = \int_E |f'(x)|^\delta d\mu$, implica que $m_i = \mu(P_i)$ es un eigenvector aproximado para el vector $(MT)_{ij}^\delta$ con eigenvalor $\lambda = 1$, es decir,

$$m_i = \mu(P_i) = \sum_{j \rightarrow i} \mu(f_i^{-1}(P_j)) = \sum_{j \rightarrow i} \int_{P_j} |(f_i^{-1})'(x)|^\delta d\mu \approx \sum |f'_i(y_{ij})|^{-\delta} \mu(P_j) = \sum_j (MT)_{ij}^\delta m_j.$$

Este argumento se usa para probar la convergencia del algoritmo en el caso expansivo.

Teorema 4.4.5. ¹ Sea P una partición de Markov expansiva para un sistema dinámico conforme \mathcal{F} con una densidad invariante μ de dimensión δ , entonces

$$\alpha(R^n(P)) \rightarrow \delta$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Primero supongamos que la partición P es expansiva en la métrica esférica. Sea $P = \langle (P_i, f_i) \rangle$ y $P_{ij} = P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$. Definimos S_{ij} y U_{ij} como el mínimo y el máximo, respectivamente, de $|f'_i(x)|^{-1}$ sobre P_{ij} cuando $i \rightarrow j$ y establezcamos $S_{ij} = U_{ij} = 0$ en otro caso, entonces por la expansión tenemos que

$$S_{ij} \leq (MT)_{ij} \leq U_{ij} < \xi^{-1} < 1$$

para alguna constante ξ . En particular $\lambda((MT)^\alpha)$ es una función estrictamente decreciente con respecto a α , así existe una única solución para $\lambda((MT)^\alpha) = 1$.

Se afirma que

$$(S^\delta m)_i \leq m_i (U^\delta m)_i$$

donde $m_i = \mu(P_i)$. En efecto

$$m_i = \mu(P_i) = \sum_{i \rightarrow j} \int_{P_j} |(f_i^{-1})'(x)|^\delta d\mu \geq \sum_{i \rightarrow j} S_{ij}^\delta \mu(P_j) = (S^\delta m)_i$$

y de manera similar para U . Por tanto

$$\lambda(S_{ij}^\delta) \leq 1 \leq \lambda(U_{ij}^\delta)$$

por la teoría de matrices no negativas [G].

Ya que f es de clase C^2 , tenemos que

$$U_{ij}/S_{ij} = 1 + O(\max \text{diam } P_i).$$

Escogemos una $\beta = O(\max \text{diam } P_i)$ tal que $\xi^\beta S^\delta \geq U^\delta$. Entonces

$$(MT)^{\delta-\beta} = (MT)^\delta (MT)^{-\beta} \geq S^\delta \xi^\beta \geq U^\delta \Rightarrow \lambda((MT)^{\delta-\beta}) \geq \lambda(U^\delta) \geq 1.$$

De igual manera $(MT)^\delta (MT)^\beta \leq U^\delta \xi^{-\beta} \leq S^\delta \leq 1$ por tanto

$$\lambda((MT)^{\delta+\beta}) \leq \lambda(S^\delta) \leq 1 \text{ y } \lambda((MT)^{\delta-\beta}) \leq 1 \leq \lambda((MT)^{\delta-\beta})1.$$

Por continuidad, la solución de $\lambda((MT)^\alpha) = 1$ se encuentra entre estos dos exponentes, así

$$|\alpha(P) - \delta| \leq 2\beta = O(\max \text{diam } P_i).$$

Ya sabemos que los bloques de $R^n(P)$ tienen diámetro $O(\xi^{-n})$, lo cual nos dice que

$$|\alpha(R^n(P)) - \delta| = O(\xi^{-n}).$$

Para el caso general, en el que tenemos una métrica expansiva $\rho \neq \sigma$, note que el argumento anterior funciona si reemplazamos MT por

$$\overline{(MT)}_{ij} = |f'_i(y_{ij})|_\rho^{-1} = \frac{\rho(y_{ij})\sigma(x_j)}{\sigma(y_{ij})\rho(x_j)} (MT)_{ij}.$$

Pero para una partición suficientemente fina, $y_{ij} \approx x_i$ y por lo tanto $\overline{MT} \approx N(MT)N^{-1}$ por la matriz diagonal N con $N_{ii} = \frac{\rho(x_i)}{\sigma(x_i)}$. Ya que $\lambda(\overline{T}) = \lambda(N(MT)N^{-1})$, obtenemos una rápida convergencia exponencial a δ en el caso general. \square

4.4.3. Particiones de Markov para polinomios

En esta parte construiremos, vía ángulos externos, una partición de Markov para polinomios expansivos.

Recordemos que un polinomio hiperbólico es expansivo si su conjunto de Julia no contiene puntos críticos o puntos parabólicos.

Definición 4.4.6. Una aplicación racional f es geoméricamente finita si todo punto crítico que pertenece a J_f es pre-periódico.

Teorema 4.4.7. El conjunto de Julia de una aplicación f geoméricamente finita lleva una única densidad invariante μ de dimensión $\delta = \dim_H(J_f)$ y de medida total uno. Además, μ tiene soporte en el conjunto de Julia radial.

Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$, por el Teorema de Böttcher existe Φ_f definida en una vecindad del infinito U_f tal que

$$\Phi_f(z^d) = f(\Phi_f(z)). \tag{4.1}$$

Además, si K_f es conexo, la conjugación se extiende a $C \setminus K_f$, es decir,

$$\Phi_f : (\mathbb{C} - \bar{\Delta}) \rightarrow (\widehat{\mathbb{C}} - K(f)), \text{ véase 4.4.}$$

Además, si f es geoméricamente finita, J_f es localmente conexo y por el Teorema de Carathéodory, Φ_f se extiende continuamente a la frontera y se obtiene una aplicación

$$\phi_f : S^1 \rightarrow J_f$$

que semiconjuga la dinámica de f en J_f a la multiplicación por d . Al punto $\phi_f(e^{2\pi i\theta}) \in J_f$ se dice que tiene ángulo externo θ , [CG].

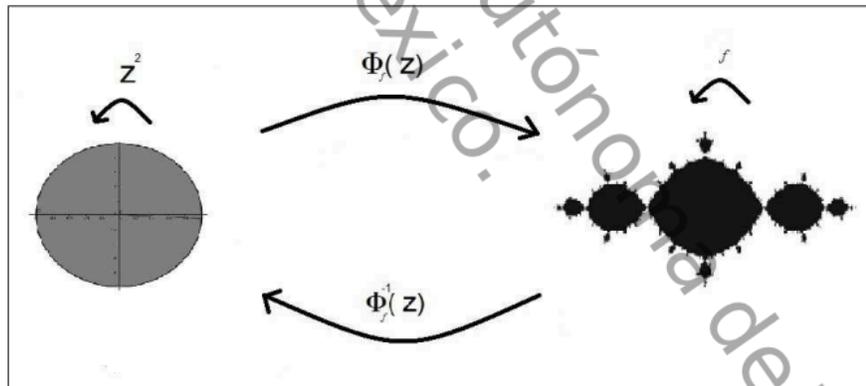


Figura 4.4: Conjugación

Los polinomios de Chebyshev $T_d(z)$ son definidos por $T_d(\cos\theta) = \cos(d\theta)$; por ejemplo $T_2(z) = 2z^2 - 1$.

El mapeo $T_d(z)$ es semiconjugado con la función $z \rightarrow z^d$ bajo $\pi(z) = (z + z^{-1})/2$; esto es,

$$T_d(\pi(z)) = \pi(z^d).$$

Así el conjunto de Julia de T_d es $\pi(S^1) = [-1, 1]$.

Notación: $A \asymp B$ significa que $\frac{A}{C} < B < CB$ para alguna constante C .

Teorema 4.4.8. Sea $f(z)$ un polinomio geoméricamente finito con conjunto de Julia conexo y densidad canónica μ , entonces o bien:

(a) $\mu(\phi(I) \cap \phi(J)) = 0$ para todos los intervalos disjuntos $I, J \subset S^1$; o

(b) $f(z)$ es conformemente conjugado a los polinomios $T_d(z)$ de Chebyshev.

Demostración. Para cualquier intervalo abierto $I \subset S^1$ sea

$$D(I) = \frac{\mu(\phi(I) \cap \phi(S^1 - I))}{\mu(\phi(I))}$$

la cual denotará la densidad de los puntos en $\phi(I)$ con ángulos externos fuera de I . Notemos que

$$0 \leq D(I) \leq 1.$$

Si $D(I) = 0$ para toda I , entonces $\mu(\phi(I) \cap \phi(J)) = 0$ para todo par de intervalos disjuntos, con lo que estaríamos resolviendo el caso (a) del Teorema.

Supongamos que $D(I) > 0$ para algún I . Vamos a producir a partir de I un intervalo con $D(I_\infty) = 1$.

Definamos $E \subset F$ por

$$E = \phi(I) \cap \phi(S^1 - I), \quad F = \phi(I);$$

entonces $\mu(E) > 0$. Ahora por un resultado en [P, Cor. 2.14], tenemos que casi todo $x \in E \subset F$ es un punto de densidad, es decir,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E \cap B(x, r))}{\mu(F \cap B(x, r))} = 1. \quad (4.2)$$

Ya que f es geoméricamente finito, casi todo $x \in E$ pertenece al conjunto de Julia Radial. Esto significa que hay una cantidad infinita de $n > 0$ y radios $r_n \rightarrow 0$ tales que

$$f^n : B(x, r_n) \rightarrow U_n$$

es equivalente a una distorsión acotada y $B(f^n(x, r_0)) \subset U_n$ [McHII, Teo. 1.2]. En otras palabras $B(x, r_n)$ puede ser expandido por la dinámica de una región de tamaño definido. Se escoge x de tal manera que cumple (4.2) y la propiedad de expansión radial anterior y se define $E_n \subset F_n \subset U_n$ por

$$E_n = f^n(E \cap B(x, r_n)) \quad \text{y} \quad F_n = f^n(F \cap B(x, r_n)).$$

Ya que μ se transforma por $|(f^n)'(z)|^\delta$, donde $\delta = \dim_H(J_f)$, el teorema de distorsión de Koebe y (4.2) implican que

$$\frac{\mu(E_n)}{\mu(F_n)} \rightarrow 1.$$

Considere la trayectoria máxima $\phi(J_n) \subset \phi(I) \cap B(x, r_n)$ que pasa a través de x , es decir, sea J_n una componente de $I \cap \phi^{-1}(B(x, r_n))$ con $x \in \phi(J_n)$, entonces

para una n suficientemente grande, esta trayectoria inicia y termina en $\partial B(x, r_n)$, así $\text{diam}(\phi(J_n)) \asymp r$. Sea $I_n = p^n(J_n)$ donde $p(z) = z^d$, entonces

$$\text{diam } \phi(I_n) \asymp r_0 \quad (4.3)$$

ya que $\phi(I_n) = f^n(\phi(J_n))$ inicia y termina en ∂U_n . Se afirma que $D(I_n) \rightarrow 1$. Veamos esto, notemos que la inyectividad de $f^n|_{B(x, r_n)}$ implica la inyectividad de $f^n|_{\phi^{-1}(B(x, r_n))}$. Así que todo punto en $\phi(I_n) \cap E_n$ tiene un ángulo externo fuera de I_n y se puede concluir que

$$D(I_n) \geq \frac{\mu(\phi(I_n) \cap E_n)}{\mu(\phi(I_n))}.$$

Pero $\phi(I_n) \subset F_n$ y de (4.3) tenemos que $\mu(\phi(I_n)) > \epsilon > 0$ para toda n . Ya que $\frac{\mu(E_n)}{\mu(F_n)} \rightarrow 1$ encontramos que $D(I_n) \rightarrow 1$ como se quería.

Ya que μ es no atómica, $D(I_n)$ es una función continua en los puntos límites de I_n . Tomando una subsucesión, podemos asumir que I_n converge hacia un intervalo I_∞ , no vacío por (4.3), entonces $D(I_\infty) = 1$.

La siguiente afirmación es que $\phi|_{I_\infty}$ es inyectiva, en efecto, si los puntos límites de $[a, b] \subset I_\infty$ son identificados por ϕ , entonces $U = \phi((a, b))$ es disconexo del resto de $J(f)$ por $\phi(a)$, y luego todos los ángulos externos de U se encuentran en (a, b) . Ya que $D(I_\infty) = 1$ se concluye que $\mu(U) = 0$ lo que solo es posible si $a = b$.

Ahora mostraremos que $f(z)$ es conjugada con $T_d(z)$. Ya que $\phi|_{I_\infty}$ es inyectiva y $f^n(I_\infty) = S^1$ para alguna n , vemos que $\phi = f^n \circ \phi \circ p^{-n}$ es localmente inyectiva fuera de un subconjunto finito de S^1 (correspondiente a los valores críticos de f^n). Por lo tanto, J_f es un homeomorfismo a una curva finita. Cualquier vértice de J_f de grado 3 o más podría dar a lugar a vértices de grado por lo menos 3 a lo largo de una completa órbita inversa, así que no hay tales vértices y J_f es homeomorfo a un círculo o un intervalo. En el caso del círculo ϕ es un homeomorfismo, pero contradice la suposición de que $D(I) > 0$.

Por lo tanto J_f es un intervalo con el par de puntos finales $E \subset \mathbb{C}$. Después de una conjugación afín podemos asumir que $E = \{-1, 1\}$. Sea $\pi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ una cubierta de grado dos, ramificado sobre E , dado por $\pi(z) = (z + z^{-1})/2$. Puesto que J_f es totalmente invariante, $f^{-1}(E) - E$ consiste totalmente de los puntos críticos de orden 2. Por lo tanto, f es levantado por una función racional $g: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ satisfaciendo $f(\pi(z)) = \pi(g(z))$. Cualquier función racional de grado d que manda a $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo tiene la forma $g(z) = \alpha z^{\pm d}$ y se deduce que f es conjugado a los polinomios de Chebyshev $T_d(z)$. □

Teorema 4.4.9. Sea $f(z)$ un polinomio expansivo con conjunto de Julia conexo, entonces $P = (\phi(I_i), f)$ es una partición de Markov expansiva para (f, μ) donde

$$I_i = \left[\frac{i-1}{d}, \frac{i}{d} \right]$$

bajo la identificación de $S^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ y μ es una densidad para f .

Demostración. Verificaremos que se cumplen los axiomas de una partición de Markov.

(1). Sea $P_i = \phi(I_i)$, la semiconjugación $\phi(z^d) = f(\phi(z))$ implica que $f(P_i) = \bigcup P_i = J_f$.

(2). Por la expansión, f es un homeomorfismo local cerca de J_f . Tenemos así que

$$P_{ij} = P_i \cap f^{-1}(P_j) = \phi(I_{ij})$$

por un arco $I_{ij} \subset S^1$ de longitud $\frac{2\pi}{d^2}$; ya que z^d es inyectiva en I_{ij} , f es un homeomorfismo en una vecindad de P_{ij} .

(3),(4) y (5). Ya que I_i es un intervalo y ϕ es continua tenemos que $\mu(P_i) > 0$ y $\mu(P_i \cap P_j) = 0$ para $i \neq j$ por el teorema 4.4.8; por lo tanto, $\mu(f(P_i)) = \mu(J(f)) = \sum_j \mu(f(P_j))$.

Finalmente la expansión de f implica que hay una métrica conforme tal que $|f'|_\rho > 1$ en J_f [McMI, Teo 3.13]. Así P es una partición de Markov expansiva. \square

Corolario 4.4.10. *El algoritmo del valor propio aplicado a P calcula la dimensión Hausdorff de los conjuntos de Julia.*

Demostración. Se sigue del teorema 4.4.5 \square

Sea $f_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Este polinomio tiene un único punto crítico que es $z = 0$ y dependiendo de su órbita tenemos la conexidad de J_c . Para no introducir más notación, denotaremos por $J_{f_c} = J_c$ y $\phi_c = \phi_{f_c}$. Del Teorema 4.3.2 tenemos que si f_c tiene una órbita atractora, entonces la órbita de cero bajo f converge al ciclo atractor y por lo tanto f_c es expansivo. Por otro lado, si la órbita de cero tiende a infinito f_c es expansivo, pero J_c es disconexo, por el Teorema 4.3.1.

En ambos casos, el Teorema 4.4.9 garantiza la existencia de una partición de Markov expansiva $P = \langle (P_i, f_c) \rangle$ con $P_1 = \phi_c([0, \frac{1}{2}])$ y $P_2 = \phi_c([\frac{1}{2}, 1])$, donde

$$\phi_c : S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J_c.$$

Por lo tanto, en este caso la dimensión de los conjuntos de Julia puede ser calculada con el algoritmo del valor propio.

Para la muestra de puntos, tomamos $\{x_1, x_2\} = \{\phi_c(\frac{1}{4}), \phi_c(\frac{3}{4})\} = f_c^{-1}(-\beta_c)$ donde $\beta_c = \phi_c(0)$ es el punto fijo de f_c con ángulo externo cero y $-\beta_c \in f^{-1}(\beta_c)$. Así, $f^2(x_i) = \beta_c$ y los puntos de la muestra para todos los refinamientos de P se encuentran en la órbita inversa de β_c .

Para construir la matriz de transición de esta partición nos apoyaremos de la semiconjugación ϕ_c , la cual conjuga la dinámica de f_c a la multiplicación por dos en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

En la figura 4.5 mostramos la partición inicial y la matriz $(PT)_1$ que llamaremos matriz de transición preliminar. Para construir la matriz transición $(MT)_1$ simplemente evaluamos el módulo de f'_c en cada uno de los puntos y_{ij} y le sacamos el inverso, véase $(MT)_1$. Resolviendo la ecuación $\lambda((MT)_1^n) = 1$, obtenemos la primera aproximación a la dimensión Hausdorff de J_c . Para obtener una mejor aproximación, realizamos un refinamiento a la partición y tomamos $x_{ij} = y_{ij}$, los cuales se ordenan en cuanto al ángulo que forman con respecto al eje x , de menor a mayor en sentido contrario a las manecillas del reloj. La matriz de transición preliminar en el segundo paso es $(PT)_2$ y la matriz de transición es MT_2 y se muestran en la figura 4.6. En general la matriz de transición preliminar $(PT)_n = [y_{ij}]$ se construye como sigue:

Los y_{ij} están colocados de tal manera que el índice i indica que está en la partición I_i y el índice j indica que es preimagen de x_j , esto para toda $i, j = 1, \dots, n$, véase $(PT)_n$.

La matriz de transición $(MT)_n$ se obtiene simplemente evaluando el módulo de f'_c en cada uno de los puntos y_{ij} y le sacando el inverso, véase $(MT)_n$.

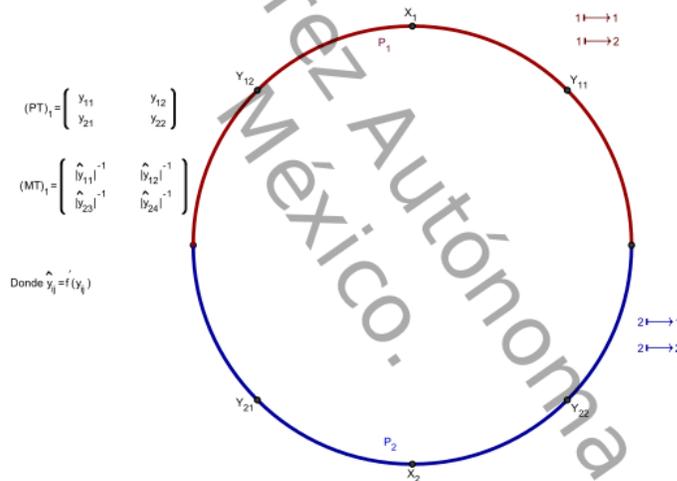


Figura 4.5: Partición inicial

$$(PT)_n = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{23} & y_{24} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{(\frac{n}{2})(n-1)} & y_{(\frac{n}{2})(n)} \\ y_{(\frac{n}{2}+1)1} & y_{(\frac{n}{2}+1)2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{(\frac{n}{2}+2)3} & y_{(\frac{n}{2}+2)4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{(n)(n-1)} & y_{nn} \end{pmatrix}$$

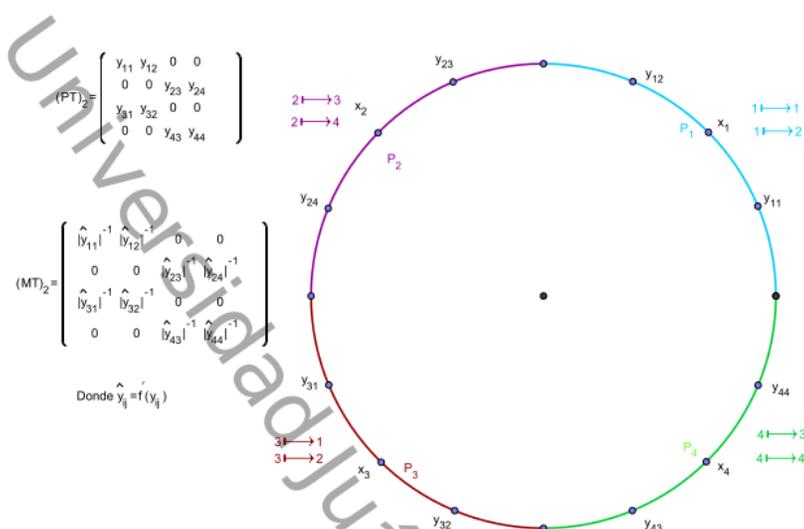


Figura 4.6: Primer refinamiento

$$(MT)_n = \begin{pmatrix} |\hat{y}_{11}|^{-\delta} & |\hat{y}_{12}|^{-\delta} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\hat{y}_{23}|^{-\delta} & |\hat{y}_{24}|^{-\delta} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n-1)}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n)}|^{-\delta} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)1}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)2}|^{-\delta} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)3}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)4}|^{-\delta} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & |\hat{y}_{(n)(n-1)}|^{-\delta} & |\hat{y}_{nn}|^{-\delta} \end{pmatrix}$$

Donde $\hat{y}_{ij} = f'(y_{ij})$.

Es importante mencionar que en la construcción de la matriz $(MT)_n$ se ha usado fuertemente la simetría que tienen los conjuntos J_c para $c \in \mathbb{R}$.

Notemos que para obtener una aproximación a la dimensión Hausdorff de J_c , necesitamos calcular la potencia a la cual debemos elevar cada entrada de la matriz de tal manera que el radio espectral de la matriz obtenida sea 1.

Dado que la matriz crece desmesuradamente resulta imposible hacer los cálculos numéricos usando la función $\max(\text{abs}(\text{eig}(MT)))$ de Matlab en una computadora convencional para obtener el radio espectral en el refinamiento número 13. Este

1 problema nos llevó a hacer los cálculos del radio espectral usando el método de la potencia normalizado.

Se utilizó el método de la potencia normalizado para poder hacer el cálculo del radio espectral junto con una variante del método de bisección para encontrar esa potencia, además, dado que los cálculos de un parámetro c no depende de otro usamos parfor (una función de Matlab que permite trabajar en paralelo) para trabajar en paralelo y poder hacer cálculos de dimensión de más de un conjunto de Julia.

Para usar el método de la potencia se hizo un reacomodo de la matriz de transición quedando una matriz de $2^n \times 2$, que denotaremos por MT'_n , véase MT'_n :

$$MT'_n = \begin{pmatrix} |\hat{y}_{11}|^{-1} & |\hat{y}_{12}|^{-1} \\ |\hat{y}_{23}|^{-1} & |\hat{y}_{24}|^{-1} \\ |\hat{y}_{35}|^{-1} & |\hat{y}_{36}|^{-1} \\ |\hat{y}_{47}|^{-1} & |\hat{y}_{48}|^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n-1)}|^{-1} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n)}|^{-1} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)1}|^{-1} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)2}|^{-1} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)3}|^{-1} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)4}|^{-1} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+3)5}|^{-1} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+3)6}|^{-1} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+4)7}|^{-1} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+4)8}|^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ |\hat{y}_{(n)(n-1)}|^{-\delta} & |\hat{y}_{nn}|^{-\delta} \end{pmatrix}$$

El método de las potencias es un método iterativo de aproximaciones sucesiva, por lo cual, además de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deberá conocerse una tolerancia establecida 1 también un cierto número de iteraciones.

Este método requiere de la siguiente fórmula recurrente: dado x^0 , se calcula $x^{k+1} = Ax^k$, con $k \in \mathbb{N}$, donde x^0 y x^k son vectores normalizados para toda k . Se usa este método ya que al momento de realizar la operación $MT'_n x^k$, las entradas de la matriz que tienen ceros no contribuyen en la multiplicación.

En el Cuadro 4.1 podemos ver como se va obteniendo la sucesión de vectores y la sucesión de c_j .

j	$y^{(j-1)}$	$x^{(j)}$	$\lambda^{(j)}$
1	$y^{(0)} = \frac{1}{c_0} x^{(0)}$	$x^{(1)} = Ay^{(0)}$	c_1
2	$y^{(1)} = \frac{1}{c_1} x^{(1)}$	$x^{(2)} = Ay^{(1)}$	c_2
3	$y^{(2)} = \frac{1}{c_2} x^{(2)}$	$x^{(3)} = Ay^{(2)}$	c_3
4	$y^{(3)} = \frac{1}{c_3} x^{(3)}$	$x^{(4)} = Ay^{(3)}$	c_4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$y^{(j-1)} = \frac{1}{c_{j-1}} x^{(j-1)}$	$x^{(j)} = Ay^{(j-1)}$	c_j

Cuadro 4.1: Sucesión de vectores y de c_j .

Se cumple que:

1. La sucesión de escalares c_j tiende al radio espectral.

2. La sucesión de vectores

$$\{x^j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow x,$$

donde x es un vector propio normalizado asociado al radio espectral.

El siguiente Teorema garantiza la convergencia de este método cuya demostración puede ser consultada en [YS].

Teorema 4.4.11. Supongamos que existe un único valor propio λ_1 dominante de una matriz A , entonces la sucesión de vectores x^j generados por el método de la potencia converge a un vector propio asociado a λ_1 y c_j converge a λ_1 .

4.5. Resultados

La implementación en Matlab del método de la potencia y una variante del método de bisección en el algoritmo del valor propio fueron aplicados a la familia de polinomios cuadráticos reales y los resultados obtenidos correspondientes al refinamiento número 15 se muestran en la tabla de la figura 4.7. En la figura 4.8 se muestra la tabla de los datos reportados en [McHIII]. En la figura 4.9 se comparan los datos obtenidos con los datos reportados en [McHIII]. La implementación de los algoritmos utilizados para obtener estos resultados se encuentran en el apéndice de esta tesis.

C	Dimensión	C	Dimensión	C	Dimensión
-1	1.238230261570372	-0.49	1.069174605080386	0.01	1.000036520086807
-0.99	1.237503116447702	-0.48	1.066180432600220	0.02	1.000147485485110
-0.98	1.236738259279410	-0.47	1.063329814735704	0.03	1.000332648341485
-0.97	1.236624393537107	-0.46	1.060519851321605	0.04	1.000591214371774
-0.96	1.236110481404346	-0.45	1.057830194029373	0.05	1.000927225856155
-0.95	1.235714613159132	-0.44	1.055150724392707	0.06	1.001327265440687
-0.94	1.234918995099595	-0.43	1.052618326239044	0.07	1.001774065399689
-0.93	1.235868799805229	-0.42	1.050139339307166	0.08	1.002295162883558
-0.92	1.235229710494063	-0.41	1.047759935213936	0.09	1.002920625170306
-0.91	1.235982941971945	-0.40	1.045439753483014	0.10	1.003580588312506
-0.90	1.236173755827735	-0.39	1.043177090452683	0.11	1.004375397845424
-0.89	1.236236086400171	-0.38	1.040996823132633	0.12	1.005186318860651
-0.88	1.236198250724078	-0.37	1.038876440124611	0.13	1.005595765503397
-0.87	1.236669151305255	-0.36	1.036827390492677	0.14	1.006363166968242
-0.86	1.236754408442349	-0.35	1.034842042617591	0.15	1.006981558208376
-0.85	1.239348307967562	-0.34	1.032907919686972	0.16	1.008035806012729
-0.84	1.239458228725746	-0.33	1.031041845625748	0.17	1.008971717279800
-0.83	1.237936645286500	-0.32	1.029232289774987	0.18	1.010324436552111
-0.82	1.236452912832750	-0.31	1.027488087390097	0.19	1.010976917597795
-0.81	1.233938350957957	-0.30	1.025799779421059	0.20	1.012124892724910
-0.80	1.231510298289047	-0.29	1.024166192584293	0.21	1.012022428445073
-0.79	1.228509407368284	-0.28	1.022588886311539	0.22	1.013442143279990
-0.78	1.222865909037167	-0.27	1.021065990718448	0.23	1.015793149740554
-0.77	1.216133892576907	-0.26	1.019598647939895	0.24	1.017891249743886
-0.76	1.208257377788834	-0.25	1.018185319818470	0.25	1.018712755684201
-0.75	1.199665133275158	-0.24	1.016825867405088	0.26	1.021572668833654
-0.74	1.192579724910072	-0.23	1.015518965192826	0.27	1.024229508142071
-0.73	1.184750387588984	-0.22	1.014263177280671	0.28	1.025753391926040
-0.72	1.177108335311563	-0.21	1.013059719354071	0.29	1.028605796668323
-0.71	1.169776703141098	-0.20	1.011907655461748	0.30	1.029606929476524
-0.70	1.162878583590309	-0.19	1.010806590614697	0.31	1.029661815540167
-0.69	1.156445780729831	-0.18	1.009756499738739	0.32	1.029946371639856
-0.68	1.151494451275344	-0.17	1.008757188808201	0.33	1.028371572382480
-0.67	1.144861739109748	-0.16	1.007808835811351	0.34	1.027728998895472
-0.66	1.139049734005525	-0.15	1.006911490848764	0.35	1.024019333772121
-0.65	1.133544995828333	-0.14	1.006065383824099	0.36	1.022280109215879
-0.64	1.128375625657019	-0.13	1.005270792135627	0.37	1.016579220253434
-0.63	1.123068514584886	-0.12	1.004528144898976	0.38	1.013277705198617
-0.62	1.118417331302997	-0.11	1.003837904340094	0.39	1.010694840784445
-0.61	1.113575609713527	-0.10	1.003200751731702	0.40	1.006582989629795
-0.60	1.109256270655140	-0.09	1.002617456179517	0.41	1.003077770585606
-0.59	1.104763880941846	-0.08	1.002088921690511	0.42	1.001351817826262
-0.58	1.100664897157140	-0.07	1.001616214895419	0.43	0.999343773864736
-0.57	1.096689450407363	-0.06	1.001200577123539	0.44	0.995435959975065
-0.56	1.092787197311546	-0.05	1.000843421128412	0.45	0.992048015825639
-0.55	1.088944250062198	-0.04	1.000546366597485	0.46	0.988668465534664
-0.54	1.085322550568237	-0.03	1.000311258299256	0.47	0.983066619246687
-0.53	1.081885987375350	-0.02	1.000140190926475	0.48	0.977223427029974
-0.52	1.078515150899487	-0.01	1.000035540441686	0.49	0.972774756926819
-0.51	1.075238041779572	-0.00	0.999999999999996	0.50	0.970436605582346
-0.50	1.072155097487715				

Figura 4.7: Datos obtenidos de la dimensión de conjuntos de Julia de $z^2 + c$

C	Dimensión	C	Dimensión	C	Dimensión
-1	1.2683	-0.49	1.0702	0.01	1.0000
-0.99	1.2671	-0.48	1.0671	0.02	1.0001
-0.98	1.2661	-0.47	1.0641	0.03	1.0003
-0.97	1.2652	-0.46	1.0612	0.04	1.0006
-0.96	1.2643	-0.45	1.0584	0.05	1.0009
-0.95	1.2635	-0.44	1.0557	0.06	1.0014
-0.94	1.2628	-0.43	1.0530	0.07	1.0020
-0.93	1.2621	-0.42	1.0505	0.08	1.0026
-0.92	1.2614	-0.41	1.0481	0.09	1.0034
-0.91	1.2608	-0.40	1.0457	0.10	1.0043
-0.90	1.2603	-0.39	1.0434	0.11	1.0054
-0.89	1.2597	-0.38	1.0412	0.12	1.0066
-0.88	1.2592	-0.37	1.0390	0.13	1.0080
-0.87	1.2586	-0.36	1.0369	0.14	1.0096
-0.86	1.2581	-0.35	1.0349	0.15	1.0114
-0.85	1.2575	-0.34	1.0330	0.16	1.0135
-0.84	1.2568	-0.33	1.0311	0.17	1.0159
-0.83	1.2560	-0.32	1.0293	0.18	1.0187
-0.82	1.2552	-0.31	1.0275	0.19	1.0219
-0.81	1.2541	-0.30	1.0258	0.20	1.0257
-0.80	1.2529	-0.29	1.0242	0.21	1.0302
-0.79	1.2513	-0.28	1.0226	0.22	1.0358
-0.78	1.2494	-0.27	1.0210	0.23	1.0431
-0.77	1.2468	-0.26	1.0196	0.24	1.0537
-0.76	1.2430	-0.25	1.0182	0.25	1.0812
-0.75	1.2342	-0.24	1.0168	0.26	1.3355
-0.74	1.2170	-0.23	1.0155	0.27	1.3093
-0.73	1.2046	-0.22	1.0142	0.28	1.2879
-0.72	1.1939	-0.21	1.0130	0.29	1.2690
-0.71	1.1844	-0.20	1.0119	0.30	1.2518
-0.70	1.1757	-0.19	1.0108	0.31	1.2357
-0.69	1.1677	-0.18	1.0097	0.32	1.2206
-0.68	1.1602	-0.17	1.0087	0.33	1.2063
-0.67	1.1531	-0.16	1.0078	0.34	1.1927
-0.66	1.1465	-0.15	1.0069	0.35	1.1796
-0.65	1.1402	-0.14	1.0060	0.36	1.1671
-0.64	1.1343	-0.13	1.0052	0.37	1.1551
-0.63	1.1286	-0.12	1.0045	0.38	1.1435
-0.62	1.1232	-0.11	1.0038	0.39	1.1324
-0.61	1.1180	-0.10	1.0032	0.40	1.1216
-0.60	1.1131	-0.09	1.0026	0.41	1.1111
-0.59	1.1084	-0.08	1.0020	0.42	1.1010
-0.58	1.1039	-0.07	1.0016	0.43	1.0912
-0.57	1.0995	-0.06	1.0012	0.44	1.0817
-0.56	1.0954	-0.05	1.0008	0.45	1.0724
-0.55	1.0914	-0.04	1.0005	0.46	1.0635
-0.54	1.0875	-0.03	1.0003	0.47	1.0547
-0.53	1.0838	-0.02	1.0001	0.48	1.0462
-0.52	1.0802	-0.01	1.0000	0.49	1.0380
-0.51	1.0767	-0.00	1.0000	0.50	1.0299
-0.50	1.0734				

Figura 4.8: Datos del artículo de la dimensión de conjuntos de Julia de $z^2 + c$

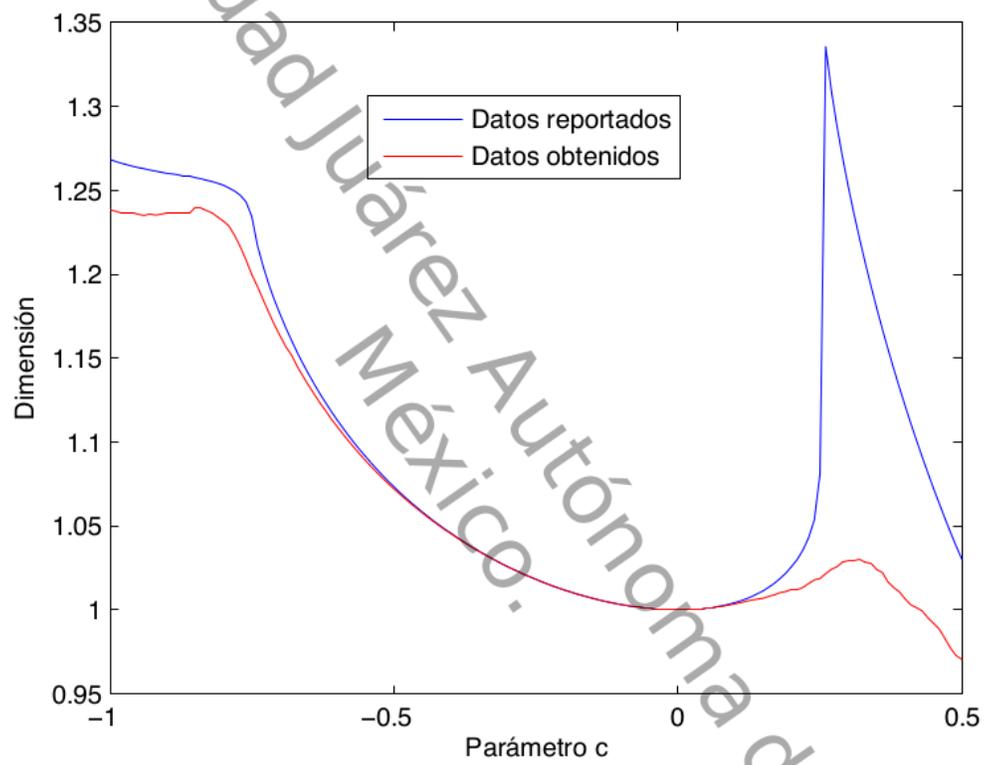


Figura 4.9: Comparación de resultados

Conclusión

Los conjuntos límites obtenidos de aplicaciones contractivas, son conjuntos auto-semejantes para los cuales se tiene una fórmula específica que permite calcular su dimensión fractal dependiendo de la razón de contractividad de cada aplicación. Si las razones de contractividad son iguales para todas las aplicaciones el cálculo de la dimensión fractal es muy sencillo. Sin embargo, cuando la razón de contractividad es distinta en cada una de las aplicaciones, entonces el cálculo analítico se dificulta y es necesario usar herramientas computacionales para obtener una aproximación numérica a la dimensión.

El cálculo de la dimensión para conjuntos de Julia de polinomios cuadráticos es un problema que presenta diferentes complicaciones. En este trabajo, se analizó particularmente el caso de polinomios expansivos, para los cuales el algoritmo del valor propio resulta ser convergente. Dentro de los polinomios expansivos, se eligieron los polinomios de la familia cuadrática real, porque la geometría de sus conjuntos de Julia permite implementar adecuadamente el algoritmo y los resultados que se obtienen son buenos. Sin embargo, es importante mencionar que el algoritmo también funciona en los polinomios cuadráticos hiperbólicos con parámetro complejo.

El algoritmo no se puede aplicar cuando el polinomio no es hiperbólico, tal es el caso de $c = \frac{-3}{4}$ y $c = \frac{1}{4}$, los cuales son polinomios con punto fijo parabólico y la aproximación que se obtiene a la dimensión de sus conjuntos de Julia, usando los parámetros cercanos a ellos y un refinamiento de orden 15, queda lejos de los resultados reportados en [McHIII], como puede observarse en la figura 4.9.

Trabajos Futuros

1. Mejorar la implementación del algoritmo cerca de los puntos parabólicos.
2. Implementar el algoritmo para polinomios cuadráticos con parámetros complejos.
3. Implementar el algoritmo para familia de polinomios de grado superior.
4. Construir las particiones de Markov en polinomios que no sean expansivos.

Bibliografía

- [Ba] M. F. Barnsley. Fractals Everywhere. Morgan Kaufmann, (1993).
- [B] A. Beardon. Iteration of Rational Functions. Springer Verlag, New York, (1991).
- [BD] B. Branner y A. Douady. Surgery on complex polynomials. Proc. of the Symposium on Dynamical Systems, Mexico 1986. Lecture Notes in Math. **1345**, (1986), 11-72.
- [BC] X. Buff y A. Cheritat. Quadratic Julia sets with positive area. Proceeding of the International Congress of Mathematicians. Hyderabad, India (2010).
- [Br] A.D. Brjuno. Convergence of transformations of differential equations to normal forms. Dokl. Akad. Nauk USSR, 165, (1965), 987-989.
- [CG] L. Carleson y T. Gamelin. Complex Dynamics. Springer Verlag, New York, (1993).
- [CK] M. Capinski y P. E. Kopp. Measure, Integral and Probability. Springer Verlag, London, 1999.
- [D1] A. Douady. Systèmes Dynamiques Holomorphes. Séminaire Bourbaki, 35^e année. **599**, Astérisque 105-106 (1982), 39-63.
- ¹[DH] A. Douady y J. Hubbard. Étude dynamique des polynômes complexes. Publication Mathématiques d'Orsay. **84-02**, (1984); **85-04**, (1985).
- [DH1] A. Douady y J. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **18**, (1985), 287-344.
- [F] K.J. Falconer. Fractal Geometry , John Wiley & Sons, (2003).
- [G] F. R. Gantmacher. The Theory of Matrices, volume II. Chelsea, (1959).
- [H] J.H. Hubbard. Local connectivity of julia sets and bifurcation loci: Three theorems of J.-C. Yoccoz. Topological Methods in Modern Mathematics. (1993). pp 467-511.
- [HU] J. E. Hutchinson. Fractals and Self Similarity, The Australian National University, (Octubre 16, 1980).

- [HW] G.H. Hardy y E.M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, New York, (1979).
- [KL] J. Kahn y M. Lyubich. A priori bounds for some infinitely renormalizable quadratics: III. Molecules. In "Complex Dynamics: Families and Friends". Proceeding of the conference dedicated to Hubbard's 60th birthday (ed: D. Schleicher). Peters, AK (2009).
- [L2] M. Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials, I-II. Acta Mathematica. **178**, (1997), 185-297.
- [M] P. Mattila. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Space. Cambridge University Press, (1995).
- [M1] J. Milnor. Dynamics in one complex variable. Third edition. Annals of Math. Studies. **160**, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2006).
- [MH] J. E. Marsden y M. J. Hoffman Análisis Básico de Variable Compleja. Ed. Trillas (2008).
- [McHII] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps. (2000).
- [McHIII] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of dimension , (3 October, 1997).
- [McMI] C. McMullen. Complex Dynamics and Renormalization. Annals of Math. Studies. 135, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1994).
- [MT] R. S. MacKay and C. Tresser. Boundary of topological chaos for bimodal maps of the interval, J. London Math. Soc., **2**(37),(1987), 164-189.
- [MiT] J. Milnor and C. Tresser. On entropy and monotonicity for real cubic maps, Commun. Math Phys., **209**, (2000), 123-178.
- [dMvS] W. de Melo and S. van Strien. One-dimensional dynamics, Springer, Berlin. (1993).
- [R] A. Radulescu. The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials. Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (1),(2007), 139-175.
- [Sh1] M. Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. Annals of Mathematics. **147** , (1998), 225-267.
- [S2] D. Sullivan. Conformal dynamical systems. Geometric dynamics. Springer-Verlag Lecture Notes 1007, (1983), 725-752.
- [Y] J.-C. Yoccoz. Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de $(C,0)$. C.R. Acad. Sci. Paris. 306, (1988), 55-58.

- [YS] Yousef Saad. Numerical Methods For Large Eigenvalue Problems. Second Edition (2011). Copyright c (2011) by the Society for Industrial and Applied Mathematics.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice A

Método de la potencia

La resolución de sistemas por métodos iterativos, el estudio de la dinámica de una población y en general los problemas donde se obtiene la solución mediante una formulación recurrente del tipo

$$\text{dado } x^0, x^{k+1} = A * x^k \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \text{ y } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

requieren conocer cual es el valor propio de mayor valor absoluto, lo que se denomina valor propio dominante.

Aunque la manera ortodoxa de obtener los valores característicos de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es obtener raíces de su polinomio característico, el método de las potencias ofrece una opción para obtener el mayor y el menor valor característico de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sin la necesidad de disponer de la ecuación característica.

El método de las potencias es un método iterativo de aproximaciones sucesiva, por lo cual, además de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deberá conocerse una tolerancia establecida y también un cierto número de iteraciones. Los resultados de esta sección se pueden consultar en [YS].

Definición A.0.1. *El valor propio dominante es el valor propio de mayor módulo, es decir, si*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|,$$

entonces λ_1 es el valor propio dominante.

Dado un vector

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

diremos que la componente v_j es una componente dominante si

$$|v_j| = \|v\|_\infty = \max_j |v_j|$$

Observa que un vector puede tener más de una componente dominante, pero todas las componentes dominantes deben tener el mismo módulo. Un vector está normalizado si sus componentes dominantes valen ± 1 . Si v_{dom} es una componente

dominante de v podemos obtener un vector normalizado \hat{v} en la dirección de v donde

$$\hat{v} = \frac{1}{v_{\text{dom}}} \cdot v.$$

Dada una matriz A de dimensiones $n \times n$, el objetivo es calcular el valor propio dominante y un vector propio asociado.

Supondremos que la matriz A tiene valores propios distintos

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|,$$

con vectores propios asociados

$$|v_1| > |v_2| > \cdots > |v_n|.$$

También suponemos que tenemos un vector inicial x^0 que se puede escribir como combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

Método

$$\begin{cases} y^{(j-1)} = \frac{1}{c_{j-1}} x^{(j-1)} \text{ (Normalizado de)} & x^{(j-1)}, \\ c_j = \text{componente dominante de} & x^{(j)}, \\ x^{(j)} = Ay^{(j-1)}. \end{cases}$$

Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente teorema

Teorema A.0.2. Supongamos que existe un único valor propio λ_1 dominante de una matriz A , entonces la sucesión de vectores x^j generados por el método de la potencia converge a un vector propio asociado a λ_1 y c_j converge a λ_1 .

En el Cuadro A.1 podemos ver como se va obteniendo la sucesión de vectores y la sucesión de c_j .

j	$y^{(j-1)}$	$x^{(j)}$	$\lambda^{(j)}$
1	$y^{(0)} = \frac{1}{c_0} x^{(0)}$	$x^{(1)} = Ay^{(0)}$	c_1
2	$y^{(1)} = \frac{1}{c_1} x^{(1)}$	$x^{(2)} = Ay^{(1)}$	c_2
3	$y^{(2)} = \frac{1}{c_2} x^{(2)}$	$x^{(3)} = Ay^{(2)}$	c_3
4	$y^{(3)} = \frac{1}{c_3} x^{(3)}$	$x^{(4)} = Ay^{(3)}$	c_4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$y^{(j-1)} = \frac{1}{c_{j-1}} x^{(j-1)}$	$x^{(j)} = Ay^{(j-1)}$	c_j

Cuadro A.1: Sucesión de vectores y de c_j .

Se cumple que:

Si las hipótesis citadas son ciertas, entonces se cumple:

- 1.- La sucesión de escalares c_j tiende al valor propio dominante, es decir,

$$\{c_j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow \lambda_1.$$

- 2.- La sucesión de vectores

$$\{x^j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow x,$$

donde x es un vector propio normalizado asociado a λ_1 .

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice B

Funciones en Matlab

Para el cálculo de la matriz de transición se utilizó la siguiente función

```
function [MaT] = MatrixTrancision (c,n,x)

%*****
% Número de iteraciones de la partición.
% Tendremos n-1 refinamientos.
%*****

format long e

%*****
%          Valor de nuestro parámetro c
%*****

if  c>=-1 && c<=1/2;

%*****
% Tomamos las raíces del polinomio  $z^2-z+c$  para encontrar
% los puntos fijos del polinomio  $z^2+c$ 
%*****
poli=[1,-1,c];
[v]=roots(poli);

%*****
% Tomamos el más grande de las raíces puesto que nos
% servirá para los primero puntos de la partición.
%*****

if abs(v(1))>abs(v(2))
    b=v(1);
else
    b=v(2);
```

```

end

%*****
% Son vectores donde guardaré la información que obtendré
%*****

pol=[1,0,c+b];
[u]=roots(pol);
puntosiniciales=zeros(2^(n-1),1);
xx=zeros(2^(n-1),1);
ordenimag=zeros(2^(n-1),1);
G1=zeros(2^(n-1)/2,1);
ordenG1=zeros(2^(n-1)/2,1);
G2=zeros(2^(n-1)/2,1);
ordenG2=zeros(2^(n-1)/2,1);
evalprei=zeros(2^n,1);
preimágenes=zeros(2^n,1);
raiz=zeros(2^(n-1),1);

%*****
%% Son los valores para n = 2 que corresponden a
% mi partición inicial
%*****

puntosiniciales(1)=u(1); %% Este es phi(1/4)
puntosiniciales(2)=u(2); %% Este es phi(3/4)

%*****
%Encontramos nuestras yij para los puntos de cada
%refinamiento que a su vez se convierten en los xi
%*****

for k=3:n
    for i=1:2^(k-2)
        po=[1,0,c-puntosiniciales(i)];
        p2=roots(po);
        xx(2*i-1) = p2(1);
        xx(2*i) = p2(2);

    end

    puntosiniciales=xx;

end

```

```

%*****
% Ordenamos los puntos  $x_{\{i\}}$  en el vector puntosparticion puesto
% que existe un desorden al obtenerlos solo sacando preimagenes
%*****

[t,index] = sort(imag(puntosiniciales), 'descend');

for i=1:length(puntosiniciales)
    ordenimag(i) = puntosiniciales(index(i));
end

for i=1:length(ordenimag)/2
    G1(i)= ordenimag (i);
end

[t,index] = sort(real(G1), 'descend');
for i=1:length(G1)
    ordenG1(i)= G1 (index(i));
end

w=1;
for i=length(ordenimag)/2+1:length(ordenimag)
    G2(w)=ordenimag(i);
    w=w+1;
end

[t,index] = sort(real(G2), 'ascend');
for i=1: length(G2)
    ordenG2(i)=G2(index(i));
end

[puntosparticion]=[ordenG1,ordenG2];

%*****
% Sacamos preimagenes a los puntos ya ordenados en el ultimo
% refinamiento
%*****

for i=1:2^(n-1)
    q=[1,0,c-puntosparticion(i)];
    q2=roots(q);
    raiz(2*i-1) = q2(1);
    raiz(2*i) = q2(2);
    preimagenes=raiz;
end

```

```

%*****
% Se acomodan los puntos en la matriz de trancisión y se calculan sus
%*****

R=[2,0];

MaT=zeros(2^(n-2),2);
evalprei=polyval(R,preimagenes);
mod=abs(evalprei);

for i=1:2^(n-2)/2

    MaT(i,1)=mod(((i-1)*4+1)).^-x;
    MaT(i,2)=mod(3+4*(i-1)).^-x;

end

for i=2^(n-2)/2+1:2^(n-2)

    MaT(i,1)=mod(2*(2*i-1)).^-x;
    MaT(i,2)=mod(4*i).^-x;

end

else disp('El número c no está en el rango de cálculo')
end

```

Para realizar la operación $(MT)_n x^k$ se utilizó la siguiente función:

```

function [y] = mult(A,x)

    [r ~] = size(A);
    y = zeros(2*r,1);
    for i=1:r,
        y(i) = A(i,1)*x(2*i-1) + A(i,2)*x(2*i);
    end

    y((r+1):(2*r)) = y(1:r);

end

```

La función que a continuación se observa se utilizó para encontrar el radio espectral.

```

function [m] = maxAVOpt(A,k,delta)

```

```

format long e

[r ~] = size(A);

x = rand(r,1);
xOld = [x,x];
xOld = mult(A,xOld);
xNew = mult(A,xOld);
count = 0;

while sum(abs(xNew-xOld)) > delta && count < k
    xOld = xNew;
    xNew = mult(A,xNew);
    [lamda,i] = max(abs(xNew));
    xNew = xNew/xNew(i);
    count = count+1;
end
d=sum(xNew.^2);
m = sum(mult(A,xNew).*(xNew))/d;

end

```

Para encontrar la dimensión del conjunto de Julia para un cierto parámetro se utilizó la siguiente función:

```

function [x3] = dimensionhausdorffjulias (c,n)
format long e

    x1=0.9;
    x2=1.4;

k=1000;
delta=eps;

[M] = MatrixTrancision (c,n,x1);
[r1] = maxAVOpt(M,k,delta);

[M] = MatrixTrancision (c,n,x2);
[r2] = maxAVOpt(M,k,delta);

if r1>=1 && r2<=1
    e=eps;

    while abs(x2-x1)>e
        x3=(x1+x2)/2;

```

```
x=x3;
[M] = MatrixTrancision (c,n,x);
[r3] = maxAVOpt(M,k,delta);

if r3<=1
x2=x3;
r2=r3;
else
x1=x3;
r1=r3;
end

end

else
fprintf('Tu radio espectral no está en el rango permitido')

end

end
```

Y por último se utilizó parfor para trabajar en paralelo y calcular 148 dimensiones a la vez. La función se describe a continuación.

```
format long e
C=-1:0.01:0.5;
n = 17;

D17=zeros(length(C),1);
matlabpool('open',2);

parfor i=1:length(C);
D17(i)=dimensionhausdorffjulias(C(i),n);
i
end

matlabpool('close');
save('dimensionD17.mat','D17')
```

DIMENSIÓN FRACTAL DE CON JUNTOS LÍMITES

ORIGINALITY REPORT

14%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	revistas.ujat.mx Internet	1012 words — 5%
2	sociedadmatematicamexicana.org.mx Internet	712 words — 3%
3	github.com Internet	441 words — 2%
4	www.matcuer.unam.mx Internet	386 words — 2%
5	riull.ull.es Internet	220 words — 1%
6	1library.org Internet	73 words — < 1%
7	bibliotecadigital.exactas.uba.ar Internet	26 words — < 1%
8	mafiadoc.com Internet	20 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES

ON

EXCLUDE SOURCES

OFF

EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE MATCHES

< 20 WORDS