



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

CONFIGURACIONES CENTRALES DE DZIOBEK DE 5 CUERPOS CON MASAS IGUALES

Tesis

que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

José Lino Cornelio Soberano

Director de tesis:

Dra. Martha Álvarez Ramírez

Director interno:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco, Septiembre de 2014.



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dirección



"2014, Conmemoración del 150 Aniversario de
la Gesta Heroica del 27 de Febrero de 1864"

10 de septiembre de 2014

Lic. en Física José Lino Cornelio Soberano
Pasante del Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas
P r e s e n t e.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**CONFIGURACIONES CENTRALES DE DZIOBEK DE 5 CUERPOS CON MASAS IGUALES**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente,

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'GBG/emt

CARTA AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada **Configuraciones Centrales de Dziobek de 5 Cuerpos con Masas Iguales**, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 15 días del mes de Septiembre del año 2014.

AUTORIZO

José Lino Cornelio

José Lino Cornelio Soberano

EL TESISISTA

Índice general

Índice general	1
Introducción	3
1. Preliminares	1
1.1. El problema de los n cuerpos	1
1.2. Integrales primeras del problema de n cuerpos	3
1.2.1. Identidad de Jacobi	5
1.3. El problema de 2 cuerpos	6
2. Configuraciones centrales	11
2.1. Conceptos generales	11
2.2. Soluciones homográficas	16
3. Configuraciones centrales de Dziobek	19
3.1. Teoría de Dziobek	19
3.2. Configuraciones centrales convexas y cóncavas	24
3.3. Configuraciones centrales de 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$	26
3.3.1. Simetría para configuraciones centrales convexas	26
3.3.2. Configuraciones centrales de Dziobek en el problema de 5 cuerpos con masas iguales	32
3.4. Algoritmo Recocido simulado	35
3.4.1. Algoritmo	36
3.5. Configuraciones centrales simétricas de 5 masas iguales	40

ÍNDICE GENERAL	1
----------------	---

A. Configuraciones centrales equiláteras de 3 cuerpos	49
---	----

B. Código del recocido simulado para el Caso 5	53
--	----

C. Código del recocido simulado para el Caso 3	57
--	----

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Agradecimientos

A mis *asesores de tesis*:

A la *Dra. Martha Álvarez Ramírez*

Por su valioso apoyo, conocimiento, tiempo y paciencia
para dirigir mi trabajo de tesis.

Al *Dr. Gamaliel Blé González*

Por brindarme su apoyo en toda la maestría.

A *mi esposa*:

Por su inmenso amor que me ha dado,
su comprensión y flexibilidad durante
todo el tiempo que me he ausentado.

Al *CONACyT*:

Por la beca con la cual he podido
realizar mis estudios de maestría.

Introducción

3

En el transcurso de la historia de la humanidad diversas culturas han interpretado y tratado de dar razones acerca del movimiento de los cuerpos. Por ejemplo, para poder medir el tiempo con los cuerpos celestes, los primeros astrónomos desarrollaron modelos empíricos con base en las regularidades observadas en el paso de los astros por el cielo. Sin embargo, fue hasta el siglo XVII en que se dio la interpretación adecuada de las causas del movimiento. Posteriormente, inspirado en las leyes de la caída de los cuerpos descubiertas por Galileo, así como por las leyes de Kepler, Isaac Newton formuló la ley de gravitación universal.

La Mecánica Celeste es aquella rama de la astronomía y la mecánica que estudia el movimiento de los astros debido a que se encuentran sometidos a fuerzas gravitatorias. Uno de los problemas centrales de la Mecánica Celeste es el problema de los n cuerpos, el cual ha sido y sigue siendo de gran interés por el desarrollo teórico que ha generado. Isaac Newton en 1687 publicó *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, la cual podemos considerar como la formulación matemática del problema de los n cuerpos.

3

El problema de los n cuerpos para $n \geq 3$ presenta una dificultad mayor que el problema de los 2 cuerpos y la comprensión de su dinámica aún está lejos de ser entendida. Un sistema astronómico con tres cuerpos celestes, por ejemplo la Tierra, la Luna y el Sol, constituye un problema de 3 cuerpos. Este sistema puede ser estudiado desde el punto de vista matemático y así obtener soluciones aproximadas, las cuales son muy útiles para describir la dinámica de su movimiento.

El problema de 2 cuerpos reducido al problema de Kepler tiene tres cantidades independientes que se conservan: la energía, la componente del momento angular perpendicular al plano de la órbita, y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz. El problema de 3 cuerpos tiene $6 \times 3 = 18$ grados de libertad, pero la energía, el centro de masa, el momento lineal y el momento angular proporcionan 10 integrales primeras independientes del movimiento, lo cual reduce el problema a 8 grados de libertad. En la década de 1950, Poincaré en el segundo volumen de su obra *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, dio una demostración de que para el problema $n \geq 3$ no existen integrales primeras además de las ya conocidas, las cuales permitirían integrar completamente el problema, (para mayores detalles ver [10]).

En el problema de los n cuerpos las soluciones más simples son aquellas soluciones periódicas tales que la configuración de los cuerpos permanece constante bajo homotecias y rotaciones, de tal forma que cada cuerpo tiene como trayectoria una órbita elíptica. Wintner llamó a éstas *configuraciones centrales*, [4]. De hecho, las configuraciones centrales generan las únicas soluciones explícitas del problema de n cuerpos, llamadas soluciones *homográficas*. Luego, una solución *homográfica* del problema de los n cuerpos es una solución con la propiedad de que la configuración de los n cuerpos permanece similar para todo tiempo. Si una solución periódica homográfica es “rígida” en el sentido de que la configuración permanece congruente a la inicial, entonces se dice que es un *equilibrio relativo*.

Las configuraciones centrales juegan un papel primordial en el estudio de las variedades integrales $\mathcal{I}_{hc}$ del problema de n cuerpos, donde h es la energía y c el momento angular. Smale [24, 25] demostró que las bifurcaciones en las variedades integrales se dan en una configuración central.

En 1941, Wintner [4] conjeturó: ¿para cualquier elección de masas $m_1, \dots, m_n$, el número de configuraciones centrales (módulo homotecias y rotaciones) es finito? Sin embargo el problema permanece abierto, y en 1988 S. Smale [23] incluyó la conjetura de Wintner en la lista de problemas matemáticos por resolver en el siglo XXI.

En 1767 Leonhard Euler publicó un artículo sobre el problema de 3 cuerpos [18]. En ese trabajo, Euler demostró que dados tres cuerpos de masas arbitrarias con condiciones iniciales tales que la configuración inicial es colineal, existe una única forma de seleccionar la razón de distancias para que formen una configuración central colineal para todo tiempo, mientras que cada uno de los cuerpos se mueve en órbitas elípticas.

Posteriormente, en 1772, J. L. Lagrange redescubrió las órbitas de Euler, y además encontró una nueva familia de órbitas periódicas, obtenidas al colocar tres partículas en configuración de triángulo equilátero, ver [15]. Al igual que en el caso colineal, aquí cada partícula se mueve sobre una órbita elíptica, y en todo momento la configuración será de triángulo equilátero, el cual puede variar de tamaño pero nunca de forma.

Podemos concluir que el problema de 3 cuerpos tiene cinco configuraciones centrales, de las cuales tres son colineales y corresponden a las posibles permutaciones de las tres partículas en una recta, módulo rotaciones; y las otras dos corresponden a las posibles orientaciones de un triángulo equilátero en el plano.

Para el problema de 4 cuerpos, recientemente Hampton y Moeckel [11] demostraron la finitud de las configuraciones centrales. En [21] Otto Dziobek formuló el problema de configuraciones centrales para $n = 4$ en el plano en términos de distancias mutuas, y obtuvo como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas que las caracterizan. La generalización de este tipo de configuraciones al tomar cualquier

valor de n en un espacio de dimensión $n - 2$ es lo que se conoce como *configuraciones centrales de Dziobek*.

En [3], Albouy retomó la aproximación de Dziobek y demostró que en el problema de 4 cuerpos con masas iguales, las configuraciones centrales (no colineales) poseen un eje de simetría que contiene a dos de los cuerpos.

Kotsireras y Lazard en [16] dieron el número de configuraciones centrales en el problema de 5 cuerpos con masas iguales en el espacio tridimensional, $\mathbb{R}^3$, es decir, configuraciones centrales tipo Dziobek para $n = 5$.

En [6] Alvarez-Delgado-Llibre estudiaron las bifurcaciones de las configuraciones centrales en el problema espacial de 5 cuerpos que van del problema de cuatro masas iguales al problema de $1 + 4$ cuerpos en el cual una masa es grande y las otras cuatro masas iguales e infinitesimales, ver más detalles en [5]. Este estudio fue hecho con una demostración asistida por computadora.

La caracterización de las configuraciones centrales en el problema de $n + 1$ cuerpos en dimensión $n - 1$, es decir configuraciones centrales tipo Dziobek fue dada por Santos en [26]. Posteriormente en [27], Santos y Vidal caracterizaron las simetrías de las configuraciones centrales no colineales del problema Newtoniano de $4 + 1$ cuerpos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, para el caso en que las cuatro masas positivas son iguales.

Por otro lado, Leandro en [7] demostró que las configuraciones centrales de Dziobek en el espacio $(n - 1)$ -dimensional del problema restringido de $n + 1$ cuerpos con masas iguales son simétricas, concluyendo la finitud, además proporciona las cotas superior e inferior para el número de estas configuraciones centrales.

En 2011, Hampton y Jensen demostraron que existen sólo un número finito de configuraciones centrales del problema espacial ($\mathbb{R}^3$) de 5 cuerpos, para lo cual usaron herramientas de Geometría Tropical, y se auxiliaron de manipuladores algebraicos o simbólicos, ver [12].

Recientemente, Ya-lun Tsai usó bases de Gröebner y el manipulador simbólico *Mathematica* y obtuvo el número exacto de algunas configuraciones centrales de Dziobek. En particular logró obtener el número de configuraciones centrales para $n = 4$ en dimensión 3, (ver los detalles en [30]).

Los trabajos mencionados aquí muestran la gran actividad que existe en la investigación de la determinación de configuraciones centrales del problema de n cuerpos para $n \geq 4$ y masas arbitrarias, en particular para 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. El capítulo 1 está dedicado al planteamiento del problema de n cuerpos, también describimos en detalles las integrales primeras del problema y analizamos el problema de n cuerpos para $n = 2$, es decir, el problema de 2 cuerpos. Continuamos con el capítulo 2 donde aparece el concepto de configuraciones centrales, como soluciones particulares del problema de n .

cuerpos. Por último, presentamos el capítulo 3, el cual trata sobre las configuraciones centrales de n cuerpos en un espacio de dimensión $n - 2$. Continuamos con la aplicación de métodos analíticos y numéricos para obtener las configuraciones centrales de 5 cuerpos con masas iguales en $\mathbb{R}^3$. Utilizamos el algoritmo numérico de recocido simulado el cual simplifica los cálculos realizados por Kotsireas y Lazard en [16].

Continuamos con el Apéndice A donde damos una demostración alternativa de que la única configuración central no colineal del problema de 3 cuerpos es en forma de triángulo equilátero; y por último en los apéndices B y C exponemos los códigos en *Matlab*[®] del algoritmo recocido simulado utilizado en la búsqueda de las configuraciones centrales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos el planteamiento del problema de n cuerpos, describimos las 10 integrales primeras que se conocen de este problema y mostramos la identidad de Jacobi con el cual concluimos que el problema de los n cuerpos no tiene puntos de equilibrios. El problema de n cuerpos es un problema muy difícil de resolver para $n \geq 3$, la única solución explícita que se conoce en el problema de n cuerpos es para $n = 2$ y ésta solución es la que presentamos en la sección final de este capítulo.

1.1. El problema de los n cuerpos

El problema de n cuerpos consiste en estudiar el movimiento de n partículas de masa m_i , sujetas a la ley de gravitación de Newton. En otras palabras, determinar las posiciones y velocidades de n cuerpos para todo tiempo.

El modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, fáciles de plantear pero difíciles de resolver y analizar.

Sean $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ los vectores de posición de n partículas de masas m_i con $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. A partir de la segunda ley de Newton, el movimiento de cada partícula es descrito por el sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la partícula de masa m_i . Considerando la ley de la gravitación universal, y sumando todas las fuerzas sobre

m_i obtenemos

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana, y G denota la constante de gravitación universal. Como consecuencia de la invariancia de las ecuaciones de Newton con respecto al cambio de la unidad de tiempo, podemos suponer, a partir de ahora $G = 1$.

Luego, las ecuaciones de movimiento del problema de n cuerpos están dadas

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3}. \quad (1.1)$$

Sea $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ el vector cuyas componentes son los vectores de posición de las masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento (1.1) las podemos escribir como un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= M^{-1} \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla U(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ es el vector de momentos, tal que $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$,

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^T, \quad \nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_n)^T,$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$$

M es la matriz de masas y $\nabla U(\mathbf{q})$ es el vector gradiente del potencial $U(\mathbf{q})$ dado por

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

Las ecuaciones (1.2) no están definidas en el conjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij},$$

donde $\Delta_{ij} = \{(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ es decir, cuando hay alguna colisión. El dominio de definición para el sistema (1.2) o *espacio de fases* es

$$\mathcal{P} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{6n} : \mathbf{q} \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n}\}.$$

Luego la dimensión de φ es $6n$. El *espacio de configuración* o espacio de posiciones es

$$V = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}.$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema (1.2) se pueden escribir como un sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (1.3)$$

donde el *Hamiltoniano* es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} + U(\mathbf{q}). \quad (1.4)$$

Los vectores $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ se llaman *variables conjugadas*.

1.2. Integrales primeras del problema de n cuerpos

Una *integral primera* de las ecuaciones (1.2) es una función $\mathcal{I}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \varphi$, con la propiedad de que es constante a lo largo de cada órbita del espacio fases φ . En otras palabras, dada una integral primera y una $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de curvas de nivel

$$\{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \varphi : \mathcal{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$$

es invariante con respecto al tiempo t .

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, las constantes de movimiento dan información global acerca de las soluciones del sistema. El problema de n cuerpos tiene 10 constantes de movimiento, o integrales primeras independientes, las cuales nos permiten reducir la dimensión del espacio de fases a $6n - 10$.

En esta sección vamos a obtener estas 10 integrales primeras clásicas del problema de n cuerpos. Iniciemos por observar que la función Hamiltoniana (1.4) es independiente del tiempo t , y que el sistema Hamiltoniano es autónomo. Calculemos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \left(- \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0,$$

de donde obtenemos que $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es constante para toda t , y por lo tanto es una integral primera conocida como *energía* del sistema.

Ahora vamos a calcular la derivada del momento lineal, y para simplificar usaremos las ecuaciones de movimiento (1.2), es decir

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \mathbf{0}.$$

Notemos que en la última suma los términos se anulan por parejas, de tal forma que obtenemos $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{0}$ para toda $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t)$ es constante para toda $t \in \mathbb{R}$. Como consecuencia tenemos tres integrales primeras conocidas como integrales del *momento lineal*

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{a}, \quad \text{con } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Lo siguiente es considerar el centro de masa. Ya que $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$, a partir de la relación (1.5) tenemos

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{a},$$

de tal forma que al integrar con respecto del tiempo obtenemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \text{donde } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ son constantes.}$$

Entonces el centro de masa se mueve en una línea recta a velocidad constante, con aceleración cero. Como consecuencia hemos obtenido que las tres componentes del centro de masa son constantes a lo largo del movimiento.

Por otro lado, el momento angular está definido como

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i(t) \times \dot{\mathbf{q}}_i(t).$$

Vamos a demostrar que $\dot{\omega}(t) = \mathbf{0}$, para lo cual primero llevamos a cabo el siguiente cálculo,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \mathbf{0}$$

donde los términos de la última suma se anulan por parejas. Entonces tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de donde podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \mathbf{0},$$

y como consecuencia obtenemos que las tres componentes del momento angular son constantes para toda $t \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{c}, \quad \text{donde } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ es constante.}$$

Podemos concluir que el problema de n cuerpos tiene las 10 integrales primeras: la energía, tres componentes del centro de masa, tres componentes del momento lineal y tres componentes del momento angular.

Luego el problema de n cuerpos tiene un conjunto invariante cuya dimensión es $6n - 10$ excepto en algunas situaciones particulares donde las integrales no son independientes (por ejemplo, si $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ son paralelos implica que $\mathbf{c} = \mathbf{0}$). Poincaré en [10] demostró que no existen integrales primeras además de las ya conocidas que permitan integrar el problema de n cuerpos.

1.2.1. Identidad de Jacobi

Definimos el *momento de inercia* de un sistema de n partículas como la función $I : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$I(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{q}_i\|^2.$$

Notemos que esta cantidad nos dice qué tan grande es el sistema o qué tan difícil es mover el sistema. Ahora, derivemos I dos veces con respecto al tiempo y usando las ecuaciones (1.2) obtenemos

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{q}_i \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \nabla_i U + \sum_{i=1}^n m_i^{-1} \|\mathbf{p}_i\|^2 = -U + 2T.$$

La relación $\ddot{I} = -U + 2T$ es conocida como la *identidad de Lagrange-Jacobi*.

Usando el momento de inercia, vamos a demostrar la siguiente proposición relativa a los puntos de equilibrio del problema de n cuerpos.

Proposición 1.1. El problema de n cuerpos no tiene puntos de equilibrio.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que las ecuaciones (1.2) tienen puntos de equilibrio. Entonces $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$, de donde se sigue que $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} = 0$. Ahora, usando la identidad de Lagrange-Jacobi obtenemos que $\dot{I} = -U < 0$, lo cual implica que I es una función decreciente, lo cual contradice la igualdad $\dot{I} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$. Luego podemos concluir que el sistema (1.2) no tiene puntos de equilibrio. $\square$

1.3. El problema de 2 cuerpos

El problema de 2 cuerpos es el problema de n cuerpos para $n = 2$, el cual estudia el movimiento de dos cuerpos debido a su mutua atracción gravitacional. Este problema puede ser reducido al problema de Kepler, considerando el origen de coordenadas en una de las partículas, digamos m_1 , de tal forma que la otra partícula m_2 se mueve bajo la atracción gravitatoria de m_1 .

Sean $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^3$ los vectores de posición de los cuerpos con masas m_1 y m_2 , respectivamente. A partir de las ecuaciones generales (1.1) tenemos que las ecuaciones de movimiento del problema de 2 cuerpos son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{m_1 m_2 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 &= -\frac{m_1 m_2 (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Notemos que a partir de la ecuación del centro de masa tenemos

$$\mathbf{q}_1 m_1 = -\mathbf{q}_2 m_2.$$

Ahora, si dividimos la primera ecuación del sistema (1.6) entre m_1 , la segunda entre m_2 , definimos $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ y los restamos, se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= -\frac{m_1 \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} - \frac{m_2 \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \\ &= -\frac{(m_1 + m_2) \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3} \mathbf{q}, \quad (1.7)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, $\mu = m_1 + m_2$.

El problema de fuerza central definido por (1.7) en $\mathbb{R}^3$ se conoce como el *Problema de Kepler* y las soluciones de la ecuación (1.7) se llaman *órbitas keplerianas*.

Notemos que para el movimiento de fuerza central, cuando $\omega = \mathbf{0}$ se tiene que $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ son colineales, es decir, el movimiento de m_1 y m_2 se realiza en una línea recta que pasa por el origen. Por otro lado, si $\omega \neq \mathbf{0}$ sabemos que $\omega \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$, entonces el movimiento tiene lugar exactamente en el plano ortogonal a ω que pasa por el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Por lo que sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a estudiar el movimiento en $\mathbb{R}^2$.

Ahora vamos a demostrar que las soluciones del problema de 2 cuerpos en el plano son secciones cónicas.

El vector unitario $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$, con $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ tiene la dirección del movimiento del cuerpo m_2 y puede ser determinado para todo tiempo. Para determinar cuándo esta dirección cambia con el tiempo, vamos a derivarla con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) &= \frac{\|\mathbf{q}\| \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{q}\|^2} \\ &= \frac{\|\mathbf{q}\| \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|} \right)}{\|\mathbf{q}\|^2} \\ &= \frac{\|\mathbf{q}\|^2 \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} (\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}})}{\|\mathbf{q}\|^3}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ya que $\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$, tenemos que (1.8) se puede simplificar de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}. \quad (1.9)$$

Ahora, usando la identidad vectorial

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{(\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3},$$

donde $\mathbf{c} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}$ es el momento angular. Por último, usando esta ecuación y (1.1), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{q}} \times \mathbf{c}}{\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{c}}{\mu}.$$

Ahora, integrando ambos lados de la ecuación concluimos que

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{c}, \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{e}$ es una constante de integración que se llama *vector de excentricidad* o *vector de Laplace-Runge-Lenz*.

Si multiplicamos escalarmente (1.10) por $\mathbf{q}$, y tomando en cuenta que $c = \|\mathbf{c}\|$, obtenemos

$$\mu(\mathbf{e} \cdot \mathbf{q} + \|\mathbf{q}\|) = c^2. \quad (1.11)$$

Sea θ_0 el ángulo entre el vector de Laplace $\mathbf{e}$ y el eje x . Definimos $f = \theta - \theta_0$ como el ángulo formado por el vector de Laplace $\mathbf{e}$ y el vector de posición $\mathbf{q}$, tal ángulo se llama *anomalía verdadera*, (ver la Figura 1.1). Luego, si $r = \|\mathbf{q}\|$ y $e = \|\mathbf{e}\|$ tenemos que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{q}\| \cos f = er \cos f$, y la ecuación (1.11) la podemos escribir como

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos f}, \quad (1.12)$$

la cual es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. Como consecuencia obtenemos que las órbitas de m_2 relativas a m_1 son cónicas con excentricidad e , y con un foco en el origen de coordenadas. Además la ecuación (1.12) nos permite dar una interpretación geométrica del vector $\mathbf{e}$ (ver la Figura 1.1), ya que su magnitud es la excentricidad de la cónica y su dirección da la orientación del semieje mayor.

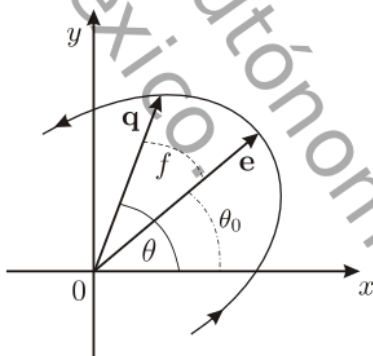


Figura 1.1: El vector de Laplace-Runge-Lenz $\mathbf{e}$ y la anomalía verdadera $f = \theta - \theta_0$.

5

De la teoría de secciones cónicas podemos clasificar las órbitas keplerianas:

- $e = 0$ la órbita es una circunferencia.
- $0 < e < 1$ la órbita es una elipse.
- $e = 1$ la órbita es una parábola.

- $e > 1$ la órbita es una hipérbola.

Por otro lado, si hacemos uso de la llamada *ecuación fundamental*

$$h = \frac{\mu^2}{2c^2}(e^2 - 1),$$

tenemos la relación entre la excentricidad (e) de la órbita y el valor de la energía (h). Mediante un cálculo sencillo tenemos la siguiente tabla:

<i>excentricidad</i>	<i>energía</i>	<i>órbita</i>
$e = 0$	$h = -\mu^2/2c^2$	Circunferencia
$0 < e < 1$	$h < 0$	Elipse
$e = 1$	$h = 0$	Parábola
$e > 1$	$h > 0$	Hipérbola

En la Figura 1.2 mostramos las diferentes cónicas que aparecen cuando movemos los parámetros (h, c) , energía y momento angular. En particular, la curva $2hc^2 = -\mu^2$ y los dos ejes coordenados $\|c\| = 0$ y $h = 0$, separan los diferentes tipos de cónicas. Notemos que cuando $\mathbf{c} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ las cónicas se deforman (degeneran) en líneas rectas, de tal forma que el movimiento de m_1 y m_2 es colineal.

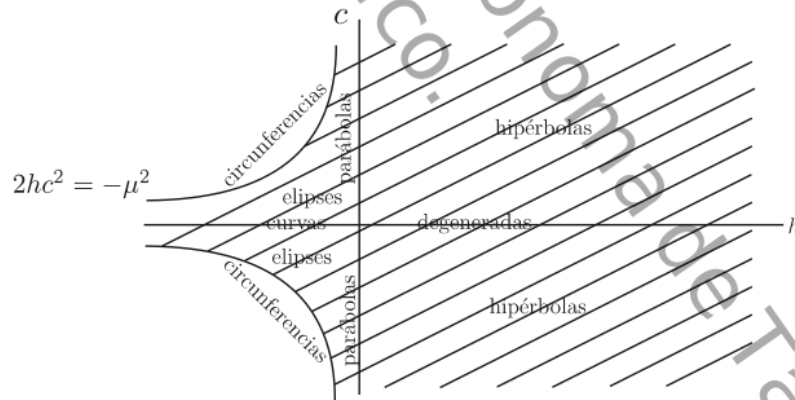


Figura 1.2: Espacio de energía (h) vs momento angular ($c = \|\mathbf{c}\|$).

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 2

Configuraciones centrales

El problema de n cuerpos para $n \geq 3$ es un problema abierto y sólo se conocen algunos resultados particulares dependiendo del valor de n . En este capítulo estudiaremos unas soluciones periódicas particulares del problema, las cuales son llamadas configuraciones centrales.

Las configuraciones centrales son importantes por varias razones, en particular Smale [24, 25] demostró que las bifurcaciones en las variedades integrales en el problema de n cuerpos se dan en una configuración central y por lo tanto son esenciales para entender la dinámica del problema.

Este capítulo está basado en las notas de Richard Moeckel: Celestial Mechanics – especially central configurations [22].

2.1. Conceptos generales

Consideremos n partículas de masa $m_i > 0$ y vector de posición $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^d$, con $i = 1, \dots, n$ respectivamente; moviéndose de acuerdo a la segunda ley de Newton. Como mencionamos antes, las ecuaciones de movimiento son

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{q_{ij}^3} \quad (2.1)$$

donde $q_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$.

Definición 2.1. Una configuración $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{dn} \setminus \Delta$ es llamada *configuración central* si existe un $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_m) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{q_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{q}_m = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{q}_1 + \cdots + m_n\mathbf{q}_n)$, $M = m_1 + \cdots + m_n$ y $\Delta = \{\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, i \neq j\}$.

En pocas palabras, una configuración de n cuerpos es central si el vector de aceleración de cada cuerpo es proporcional al vector de posición. Notemos que $d = 1$ corresponde a una configuración colineal, $d = 2$ a una configuración plana y $d = 3$ a una configuración espacial.

Ahora veamos la versión vectorial de esta definición. Sea $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^{dn} \setminus \Delta$, diremos que $\mathbf{q}_0$ es una *configuración central* si existe una función $\rho(t) > 0$ tal que

$$\mathbf{q}(t) = \rho(t)\mathbf{q}_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es solución del problema de n cuerpos. Entonces $\mathbf{q}_0$ representa la forma (constante) de la configuración y $\rho(t)$ el tamaño. Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento

$$M\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U(\mathbf{q}),$$

y usando el hecho de que $U(\mathbf{q})$ es homogénea de grado -1 lo cual implica que $\nabla U(\mathbf{q})$ es homogénea de grado -2 , obtenemos

$$M\ddot{\rho}(t)\mathbf{q}_0 = -\nabla U(\rho(t)\mathbf{q}_0) = (\rho(t))^{-2}\nabla U(\mathbf{q}_0),$$

haciendo $\lambda = (\rho(t))^2\ddot{\rho}(t)$ tenemos

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{q}_0) + \lambda\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

esta es la ecuación que proporciona la forma de la configuración, la cual es constante, mientras que

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{\lambda}{\rho(t)^2}, \quad \lambda = -\frac{U(\mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_0^T M \mathbf{q}_0} \quad (2.4)$$

es la ecuación para el tamaño de la configuración.

Notemos que la ecuación diferencial (2.4) es reducida al problema de Kepler con momento angular cero, cuyas soluciones son representadas por la cicloide de Newton (ver la Figura 2.1). La ecuación (2.3) es la ecuación de configuración central, la cual, como veremos enseguida, es la misma que la ecuación de puntos críticos del potencial restringido a una esfera. Por otro lado, observemos que calcular las configuraciones centrales se reduce a encontrar los ceros de esta ecuación, lo cual desafortunadamente en general es un problema algebraico muy complicado.

Ahora, consideremos la métrica generada por el producto escalar $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{q}^T M \mathbf{q}$ en el espacio $\mathbb{R}^{3n}$. Sin pérdida de generalidad podemos fijar el tamaño de una configuración central. Para analizar las configuraciones las restringiremos a la esfera unitaria

$$S = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta : \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 1, \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0}\}.$$

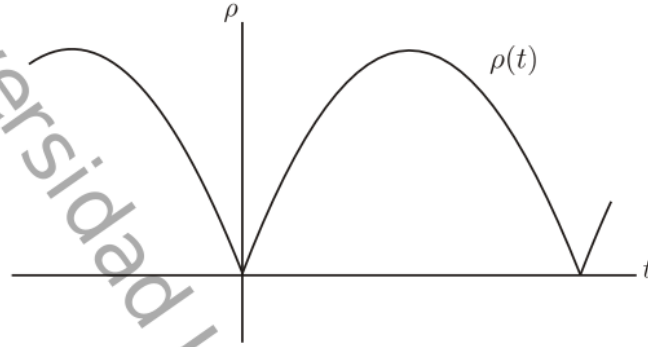


Figura 2.1: Cicloide de Newton.

Teorema 2.2. Las configuraciones centrales son los puntos críticos de $U|_S$, lo cual es equivalente a $U|_{I=cte}$.

Demostración. A partir de la definición de configuraciones centrales tenemos

$$-\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \lambda m_i \mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, n,$$

es decir,

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{i=1}^n \lambda m_i \mathbf{q}_i$$

o equivalentemente

$$-\nabla U(\mathbf{q}) = \lambda \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i.$$

Ahora multiplicamos escalarmente por el vector $\mathbf{q}_i$ y obtenemos

$$-\nabla U(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^n \lambda m_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i.$$

Por otro lado, ya que U es una función homogénea de grado -1 , entonces aplicamos el teorema de Euler y teniendo en cuenta que $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{q}^T M \mathbf{q}$, obtenemos

$$U(\mathbf{q}) = \lambda \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

donde $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \text{constante}$, y obtenemos que $\nabla U|_S = 0$.

De acuerdo a la métrica utilizada, el momento de inercia puede ser expresado como $I = \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$, de tal forma que $\nabla U|_{I=cte} = 0$, entonces las configuraciones centrales son los puntos críticos del potencial con momento de inercia constante. $\square$

Como consecuencia podemos construir soluciones del problema de n cuerpos resolviendo la ecuación (2.3) y multiplicando la solución por cualquier solución del problema Kepler colineal.

Ahora vamos a utilizar la ecuación (2.3) para obtener las tres configuraciones colineales o de Euler.

Sea $x = q_2 - q_1$, $y = q_3 - q_2$ y supongamos que las partículas están ordenadas tales que $q_1 < q_2 < q_3$ donde $q_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ (ver la Figura 2.2).

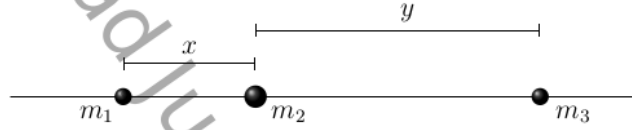


Figura 2.2: Configuración colineal de 3 cuerpos.

La ecuación (2.3) se reduce al sistema

$$\begin{aligned}\lambda x - \frac{m_1 + m_2}{x^2} + \frac{m_3}{y^2} - \frac{m_3}{(x+y)^2} &= 0, \\ \lambda y - \frac{m_2 + m_3}{y^2} + \frac{m_1}{x^2} - \frac{m_1}{(x+y)^2} &= 0.\end{aligned}$$

Eliminando λ obtenemos una única ecuación homogénea en las variables x y y , dada por

$$f(\alpha) = (m_1 + m_2)\alpha^5 + (3m_1 + 2m_2)\alpha^4 + (3m_1 + m_2)\alpha^3 - (3m_3 + m_2)\alpha^2 - (m_2 + m_3)\alpha.$$

donde $\alpha = y/x$. Este polinomio es conocido como la *ecuación cuántica de Euler* y sus raíces positivas determinan las configuraciones colineales de 3 cuerpos. Notemos que los coeficientes de este polinomio tienen un solo cambio de signo, de tal forma que la regla de los signos de Descartes implica que tiene al menos una raíz positiva. Luego, dada una $\alpha > 0$ existe un plano en el espacio de masas, el cual consiste en ternas (m_1, m_2, m_3) para las cuales la configuración central de Euler está determinada por el cociente de las distancias relativas. Este método no sirve en el problema de 4 cuerpos ya que en ese caso obtenemos un polinomio en dos variables.

En 1765, Leonhard Euler [18] descubrió estas configuraciones centrales colineales, las cuales fueron las primeras soluciones explícitas del problema de 3 cuerpos. Euler [18] desarrolló y analizó el polinomio $f(\alpha)$, y encontró que dadas las tres masas, existen sólo tres configuraciones centrales colineales para el problema de 3 cuerpos. Además, demostró que si las velocidades iniciales de los tres cuerpos son elegidas adecuadamente, entonces cada partícula se moverá periódicamente sobre una elipse,

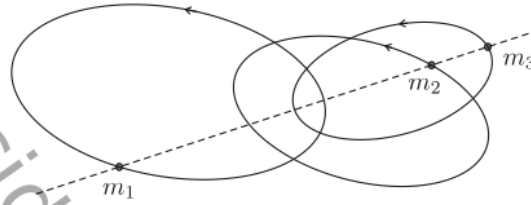


Figura 2.3: Solución colineal de Euler.

pero en todo momento las 3 partículas se mantendrán sobre una línea recta, ver la Figura 2.3.

Unos años más tarde, en 1772, J. L. Lagrange [15] redescubrió las soluciones de Euler y demostró que para cualquier elección de tres masas, al elegir adecuadamente las velocidades iniciales, cada uno de los cuerpos se moverá sobre una órbita elíptica formando una configuración de triángulo equilátero para todo tiempo. Estos triángulos varían el tamaño pero no la forma, (ver la Figura 2.4). Otro resultado importante para 3 cuerpos es que la única posibilidad de que 3 cuerpos formen una configuración central no colineal es que su configuración sea un triángulo equilátero, (ver apéndice A).

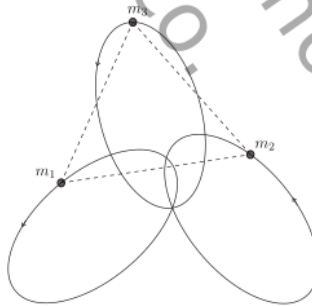


Figura 2.4: Solución equilátera de Lagrange.

Una generalización de las configuraciones centrales de Lagrange para n cuerpos con masas iguales es el n -ágono regular. Posteriormente en 1910, Moulton [8] encontró un resultado general para el número de configuraciones centrales para toda $n \geq 3$, lo cual resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 2.3 (Moulton, [8]). Para $n \geq 3$, existen $n!/2$ configuraciones centrales

colineales. En particular, cada arreglo de las partículas en la línea definen una configuración central.

Ahora, si tomamos en cuenta las soluciones de Euler y Lagrange discutidas anteriormente, observamos que han sido obtenidas a partir de una configuración central, a las cuales les aplicamos una rotación seguida de una homotecia, de tal forma que cada partícula se mueve en una órbita elíptica, conservando siempre su configuración inicial colineal o de triángulo equilátero. Por lo que podemos concluir que las configuraciones centrales también tienen movimientos homográficos, en los cuales cambia por rotaciones y homotecias, y cada cuerpo tiene un movimiento Kepleriano (elíptica, parabólica o hiperbólica en función del signo de la energía), con la misma excentricidad e . En el caso de Euler y Lagrange la órbita kepleriana es elíptica.

2.2. Soluciones homográficas

Las configuraciones centrales generan las únicas soluciones explícitas del problema de n cuerpos, llamadas soluciones *homográficas*, además estas tienen la propiedad de que la configuración de los n cuerpos permanece similar para todo tiempo.

Definición 2.4. Una solución $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t))$ del problema de n cuerpos se llama *homográfica*, si existe una matriz rotación $\Omega(t)$, y una función escalar $\rho(t) > 0$ (dilatación), tal que para toda $i = 1, 2, \dots, n$ y para todo tiempo t , se tiene

$$\mathbf{q}_i(t) = \rho(t)\Omega(t)\mathbf{q}_i^0,$$

donde $\mathbf{q}^0 = (\mathbf{q}_1^0, \dots, \mathbf{q}_n^0)$ es una configuración central.

Luego una solución homográfica se mueve de tal forma que es similar a ella misma cuando el tiempo t varía. Por otro lado, si $\Omega(t)$ es la matriz identidad (no hay rotación) las soluciones homográficas se llaman soluciones *homotéticas*; mientras que si $\rho(t) = 1$ se conocen como *equilibrios relativos*, caracterizadas por

$$\mathbf{q}_i = \Omega(t)\mathbf{q}_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En estas soluciones los cuerpos se mueven alrededor del centro de masa, y las distancias mutuas no cambian cuando t varía, (ver la Figura 2.5). En tal caso, cada partícula seguirá un movimiento kepleriano. En particular, si éste es circular, se habla de un *equilibrio relativo*, porque son soluciones de equilibrio en un sistema de coordenadas rotatorias. Este equilibrio sólo puede obtenerse en movimientos sobre un plano, de tal forma que las soluciones homográficas no existen para problemas en $\mathbb{R}^3$.

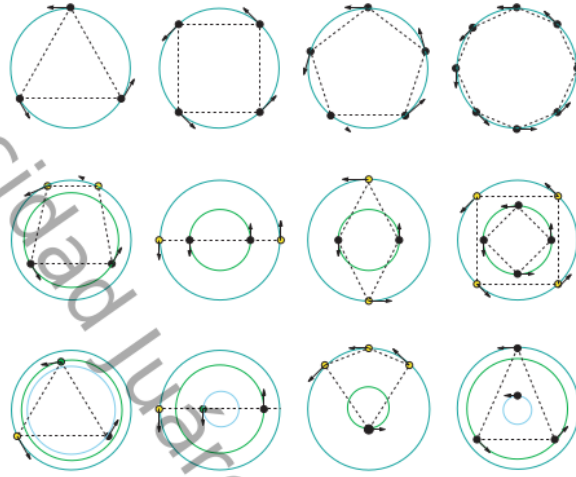


Figura 2.5: Equilibrios relativos (Figura tomada de [17]).

En conclusión, toda solución homográfica del problema plano de n cuerpos es generada por una configuración central de n cuerpos en la cual cada cuerpo se mueve en una órbita kepleriana.

Como consecuencia de lo anteriormente dicho podemos observar que existen diferentes tipos de configuraciones centrales, y para estudiarlas dividiremos el conjunto de configuraciones centrales en clases de equivalencia; para definir éstas aprovecharemos el hecho de que el potencial U sólo depende de las posiciones de las partículas.

Definición 2.5. Dos configuraciones centrales son *equivalentes* si son semejantes en el sentido de la geometría euclidiana, esto es, cuando una rotación o un cambio en la escala hacen coincidir ambas configuraciones. De esta forma cuando hablamos de configuraciones centrales nos estamos refiriendo a un representante de cada clase de equivalencia.

Proposición 2.6. Una configuración $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ al tiempo $t = 0$ es una configuración central, si y sólo si, existe una solución homotética del problema general de n cuerpos, con $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ como configuración fija.

Demostración. $\Leftarrow$) Ya que la función potencial $U(\mathbf{q})$ es homogénea de grado -1 , tenemos que ∇U es homogénea de grado -2 , entonces

$$-(\rho(t))^{-2} \nabla U(\mathbf{q}_0) = M \ddot{\rho}(t) \mathbf{q}(0),$$

de donde

$$-\nabla U(\mathbf{q}_0) = M\rho^2(t)\ddot{\rho}(t)\mathbf{q}(0),$$

y por lo tanto obtenemos que $\lambda = (\rho(t))^2 \ddot{\rho}(t)$, de tal forma que $\mathbf{q}_0$ es una configuración central.

$\Rightarrow$) por hipótesis existe una solución $\mathbf{q}(t)$ a la ecuación $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \lambda\mathbf{q}(t)$, la solución a esta ecuación es de la forma $\mathbf{q}(t) = \rho(t)\mathbf{q}_0$ lo cual define una solución homotética. $\square$

Capítulo 3

Configuraciones centrales de Dziobek

En este capítulo presentamos la teoría general de las configuraciones centrales de n cuerpos en el espacio de dimensión $n - 2$ conocidas como configuraciones tipo Dziobek, caracterizadas a través de un sistema de ecuaciones algebraicas propuestas por Dziobek [21] en donde las distancias mutuas son usadas como variables.

En particular nos interesaremos en el estudio de configuraciones centrales del problema de 5 cuerpos con masas iguales.

3.1. Teoría de Dziobek

En esta sección vamos a desarrollar las herramientas necesarias para estudiar configuraciones centrales en la notación planteada por Dziobek.

Iniciamos considerando n cuerpos con masas $m_i > 0$, y vectores de posición $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$ con $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $M = m_1 + \dots + m_n$ la masa total del sistema y

$$\mathbf{q}_m = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{q}_1 + \dots + m_n\mathbf{q}_n)$$

el centro de masa de los n cuerpos. Sin pérdida de generalidad fijamos el origen de coordenadas en $\mathbf{q}_m$.

En el capítulo anterior vimos que $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ es una configuración central si existe una constante λ tal que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \lambda (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_m), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Si sustituimos la expresión del centro de masa $\mathbf{q}_m$ en la ecuación (3.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} &= \lambda \mathbf{q}_i - \frac{\lambda}{M} (m_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + m_n \mathbf{q}_n) \\ &= -\lambda \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \mathbf{q}_j + \lambda \left(1 - \frac{m_i}{M}\right) \mathbf{q}_i \\ &= -\lambda \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \mathbf{q}_j + \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{M} \mathbf{q}_i. \end{aligned}$$

Luego podemos concluir que se satisface la siguiente relación

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda}{M} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

y al factorizarla obtenemos

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} + \frac{\lambda}{M} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Sea $q_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$ la distancia mutua entre la i -ésima y j -ésima partícula y definimos $s_{ij} = q_{ij}^2$ para $1 \leq i < j \leq n$. Usando esta notación la ecuación (3.2) toma la forma

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) \left(s_{ij}^{-\frac{3}{2}} + \frac{\lambda}{M} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

Ahora vamos a expresar las ecuaciones (3.3) en términos de distancias mutuas, para lo cual requerimos escribir el momento de inercia en términos de éstas.

Proposición 3.1. El momento de inercia en términos de distancias mutuas queda expresado como

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j < k}^n m_j m_k q_{jk}^2,$$

donde $q_{jk} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2M} \sum_{j < k}^n m_j m_k q_{jk}^2 &= \frac{1}{2M(2)} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_j m_k (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k)^2 \\
 &= \frac{1}{4M} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_j m_k (\mathbf{q}_j^2 - 2\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_k + \mathbf{q}_k^2) \\
 &= \frac{1}{4M} \left(2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_j m_k \mathbf{q}_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_j m_k (\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_k) \right) \\
 &= \frac{1}{2M} \left(\sum_{k=1}^n m_k \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j^2 - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j \cdot \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{q}_k \right).
 \end{aligned}$$

Dado que en una configuración central el centro de masa permanece fijo, sin pérdida de generalidad, lo fijamos en el origen, es decir, $\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{q}_j = \mathbf{0}$. Luego obtenemos

$$\frac{1}{2M} \sum_{j < k}^n m_j m_k q_{jk}^2 = \frac{1}{4M} (4MI) = I.$$

□

Ahora vamos a usar las identidades de Dziobek para obtener las ecuaciones de configuración central en términos de distancias mutuas.

Sea $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$ una configuración de n cuerpos con masas $m_1, m_2, \dots, m_n$ no cero, respectivamente. Supongamos que la configuración está en un subespacio afín de dimensión $n - 2$, entonces existe un vector $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 \mathbf{q}_1 + \Delta_2 \mathbf{q}_2 + \dots + \Delta_n \mathbf{q}_n &= \mathbf{0}, \\
 \sum_{i=1}^n \Delta_i &= 0, \quad (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \neq (0, 0, \dots, 0),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ver más detalles en [21], [3].

La segunda relación de (3.4) nos dice que uno puede elegir cualquier origen para los vectores $\mathbf{q}_i$. Además, si los $\mathbf{q}_i$ no están contenidos en un subespacio afín de dimensión $n - 3$, entonces existe un vector no cero $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisface (3.4), el cual es único salvo un múltiplo constante real, ver [3]. Luego la n -ada Δ está bien definida salvo un factor constante.

Por otro lado, siguiendo las ideas de Albouy en [2], podemos dar una interpretación geométrica de las n -adas que forman al vector Δ . Si $\Delta_1 \neq 0$, uno puede normalizarla

usando la restricción $\Delta_1 = -1$. Como consecuencia, Albouy afirma que el punto $\mathbf{q}_1$ es el baricentro de $\mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ y los Δ_i son los *pesos baricéntricos* de la configuración. La otra interpretación de los Δ_i es debida a Möbius, quien afirmó que éstos son los volúmenes orientados de forma conveniente del simplejo definido por todos los puntos $\mathbf{q}_k$, $k \neq i$. Luego el factor corresponde a la libre elección de las unidades de volumen.

Ahora consideremos n puntos con vectores de posición $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$. Luego existen $n(n-1)/2$ distancias mutuas q_{ij} , las cuales usamos para formar la llamada matriz de Cayley–Menger dada por

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{13}^2 & \cdots & q_{1n}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{23}^2 & \cdots & q_{2n}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & 0 & \cdots & q_{3n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{1n}^2 & q_{2n}^2 & q_{3n}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de Cayley–Menger es igual a $((n-1)!)^2$ veces el cuadrado del hipervolumen formado por los n puntos en $\mathbb{R}^{n-1}$, ver [28]. Luego, $|\mathbb{M}|$ proporciona el hipervolumen del simplejo generado por n puntos en $\mathbb{R}^{n-1}$. Por ejemplo, para $n = 2$ equivale al cuadrado de la distancia Euclidiana entre dos puntos; para $n = 3$ equivale a cuatro veces el área al cuadrado del triángulo formado por tres puntos; y por último para $n = 4$ el determinante equivale a 36 veces el volumen al cuadrado del tetraedro formado por cuatro puntos, y así sucesivamente.

Por lo tanto, si $|\mathbb{M}| = 0$, obtenemos las condiciones necesarias y suficientes para que n puntos estén en el subespacio afín propio de $\mathbb{R}^{n-2}$.

Haciendo uso del planteamiento dado por Dziobek en [21], Albouy en [3] dio la siguiente definición.

Definición 3.2. Si existe un vector $\Delta \in \mathbb{R}^n$ no nulo que satisface

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ij} &= \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ik}, \quad 1 \leq j < k \leq n, \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i &= 0, \\ s_{ij}^{-3/2} &= \frac{\lambda}{M} + \sigma \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ y $s_{ij} = q_{ij}^2$, para algún número real σ , entonces a la configuración $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$ se le llama *configuración central de Dziobek*.

Ya que las distancias mutuas aparecen de forma explícita en las ecuaciones (3.5), entonces es natural pensar en una expresión de los Δ_i en función de las distancias mutuas. Sin embargo, tales expresiones contienen raíces cuadradas, lo cual complica mucho los cálculos. Con el fin de hacer más fáciles los cálculos vamos a simplificar la notación, para lo cual definimos

$$t_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \Delta_j s_{ij},$$

y éstos deben ser iguales para $i = 1, \dots, n$.

En [1], Albouy y Chenciner demostraron que las ecuaciones de Dziobek (3.5) se pueden escribir en forma simplificada como

$$\begin{aligned} t_i - t_j &= 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i &= 0, \\ s_{ij}^{-\frac{3}{2}} &= \frac{\lambda}{M} + \sigma \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En el capítulo 2 vimos que las configuraciones centrales son puntos críticos del potencial U bajo la condición de que el momento de inercia sea constante I_0 . Luego, buscar configuraciones centrales de n cuerpos en el espacio afín de dimensión $n - 2$ es equivalente a calcular los puntos críticos del potencial U , bajo la restricción de que el momento de inercia I debe ser constante e igual a I_0 , mientras que el determinante de Caley–Menger $G = |\mathbb{M}| = 0$. Luego debemos encontrar los puntos críticos de la función

$$V(s_{ij}) = U(s_{ij}) + \lambda(I(s_{ij}) - I_0) + \sigma G(s_{ij}),$$

donde λ y σ son multiplicadores de Lagrange.

Lo anterior es equivalente a buscar dos números reales λ y σ tales que para toda i y j se cumpla

$$\frac{\partial U}{\partial s_{ij}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial s_{ij}} + \sigma \frac{\partial G}{\partial s_{ij}} = 0. \tag{3.7}$$

En [21], Dziobek demostró que existe un número real β tal que

$$\frac{\partial G}{\partial s_{ij}} = \beta \Delta_i \Delta_j.$$

Ahora vamos a expresar la función potencial y el momento de inercia en términos de distancias mutuas al cuadrado $s_{ij} = q_{ij}^2$, tomando la forma

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \psi(s_{ij})$$

y

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j s_{ij}.$$

Notemos que $\psi(s_{ij})$ es una función real que define al potencial. Siguiendo las ideas de Albouy en [3], requerimos que la función $\psi'(s_{ij})$ sea estrictamente creciente ($\psi''(s_{ij}) > 0$) y estrictamente cóncava ($\psi'''(s_{ij}) < 0$).

En particular observemos que los potenciales Newtonianos del tipo $\psi(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ satisfacen $\psi'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ y $\psi''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$ de donde $\psi''(x) > 0$.

Observemos que si todas las masas son iguales, entonces (3.7) equivale a la existencia de dos números reales α y β tales que para cualquier elección de i y j se tiene que

$$\psi'(s_{ij}) = \alpha + \beta \Delta_i \Delta_j. \quad (3.8)$$

3.2. Configuraciones centrales convexas y cóncavas

La envolvente convexa de un conjunto de puntos, también denominada cierre convexo o *convex hull* en inglés, es el menor conjunto convexo que contiene a dichos puntos.

La envolvente convexa, denotada por $\text{Conv}(\mathbf{q})$, de una configuración de n cuerpos con vectores de posición $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^d)^n$ es la envolvente convexa en $\mathbb{R}^d$ con vértices $\{\mathbf{q}_k\}$. Decimos que una configuración $\mathbf{q}$ es *convexa* si cada punto $\mathbf{q}_k$ está en la frontera de $\text{Conv}(\mathbf{q})$ como subconjunto de $\mathbb{R}^d$; y es *estrictamente convexa* si no hay $\mathbf{q}_k$ en la envolvente convexa de los otros vértices. Luego, configuraciones *cóncavas* son configuraciones que no son estrictamente convexas, o bien, configuraciones estrictamente cóncavas son configuraciones que no son convexas. Por último la dimensión de una configuración $\mathbf{q}$ es definida como la dimensión de la envolvente convexa, es decir $\dim[\text{Conv}(\mathbf{q})]$.

En pocas palabras, una configuración no colineal de n cuerpos es cóncava si al menos uno de los cuerpos está dentro de la envolvente convexa del resto de los cuerpos, en caso contrario es una configuración convexa, (ver las Figuras 3.1 y 3.2).

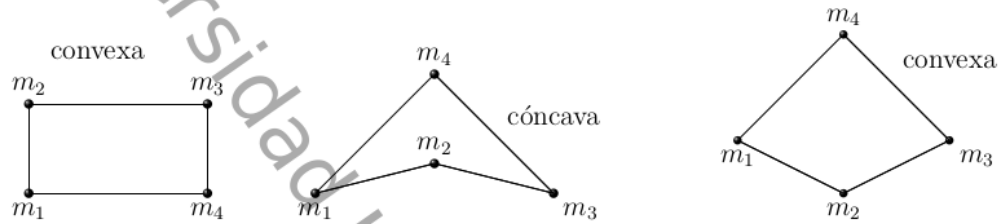


Figura 3.1: Ejemplos de configuraciones cóncavas y convexas de 4 cuerpos en $\mathbb{R}^2$.

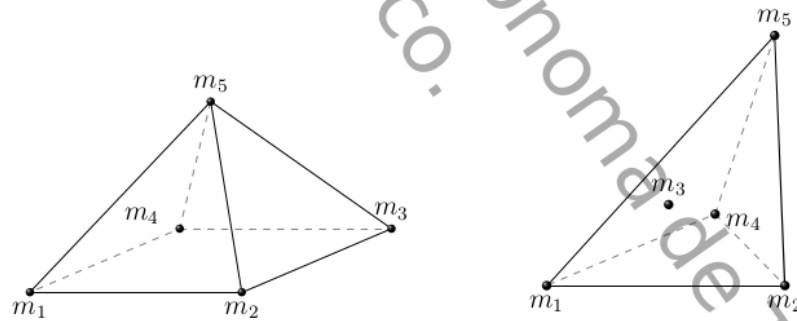


Figura 3.2: Ejemplos de configuraciones convexa y cóncava de 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Una definición alternativa para determinar la concavidad de las configuraciones en términos de Dziobek es la siguiente.

Definición 3.3. Una configuración de n partículas en dimensión $n - 2$ es llamada *cóncava* si todos los Δ_i 's tienen el mismo signo excepto uno. En caso contrario es llamada *convexa*.

En otras palabras, si una configuración $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ tiene dimensión $n - 2$ y cumple con las ecuaciones (3.4) entonces es convexa, si y sólo si, al menos dos de los Δ_i son positivos o cero ó al menos dos de los Δ_i son negativos o cero, ver [2]. Por ejemplo, si $n = 5$ podríamos tener

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq 0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4 \leq \Delta_5. \quad (3.9)$$

Por otro lado, la identidad de Dziobek

$$s_{ij}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\lambda}{M} + \sigma \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j},$$

implica que si una configuración de n cuerpos es invariante bajo la acción de rotaciones, entonces algunos Δ_i deberán ser iguales.

3.3. Configuraciones centrales de 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$

Usando el esquema de Dziobek, en esta sección vamos a estudiar las condiciones que deben cumplir las configuraciones centrales para 5 cuerpos, pero antes vamos a ver un par de teoremas sobre condiciones de simetría para las configuraciones centrales convexas de 5 cuerpos con masas iguales en $\mathbb{R}^3$.

3.3.1. Simetría para configuraciones centrales convexas

En esta sección presentamos los resultados de simetría dados por Faugère y Kotsireas [14], los cuales nos permiten afirmar que todas las configuraciones centrales convexas del problema de 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$ son simétricas.

Observemos que cualquier hipótesis de simetría en la configuración central definida por 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$ puede ser expresada por una desigualdad de algunos Δ_i 's, así como algunas desigualdades entre los q_{ij} 's. Por ejemplo, un plano de simetría implica que al menos dos de los Δ_i 's son iguales, ver [29]. Las configuraciones con un eje de simetría deberán ser invariantes con respecto a ciertas rotaciones. Ya que buscamos estudiar las configuraciones centrales en $\mathbb{R}^3$, entonces sólo debemos considerar rotaciones con ángulos de rotación $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$ y π .

Sea $\Gamma = \{1, \dots, 5\}$ y $i, j, k \in \Gamma$, $l = \min(\Gamma \setminus \{i, j, k\})$ y $m = \max(\Gamma \setminus \{i, j, k\})$. Los índices l y m son determinados únicamente por los índices i, j, k . Sea E_{ijk} la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{ij} & s_{ik} & s_{jk} \\ s_{lk} & s_{lj} & s_{li} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{ij} & s_{ik} & s_{jk} \\ s_{mk} & s_{mj} & s_{mi} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{li} & s_{lj} & s_{lk} \\ s_{li} & s_{lj} & s_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{mi} & s_{mj} & s_{mk} \\ s_{mi} & s_{mj} & s_{mk} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{ij} & s_{ik} & s_{jk} \\ s_{ij} & s_{ik} & s_{jk} \end{vmatrix}$$

Albouy en [3] demostró que en una configuración central se cumplen las ecuaciones E_{ijk} .

Ahora vamos a demostrar el siguiente lema que nos auxiliará en el teorema de simetrías.

Lema 3.4. Sea ϕ una función estrictamente cóncava en $\mathbb{R}$ y $a > b > c$, entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \phi(a) & \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} > 0. \quad (3.10)$$

Demostración. Sea $\gamma = \frac{b-c}{a-c}$. Ya que $a > b > c$ tenemos que $\gamma \in (0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} b &= c + \gamma(a - c) \\ &= \gamma a + (1 - \gamma)c. \end{aligned}$$

Dado que ϕ es una función cóncava ¹, tenemos

$$\begin{aligned} \phi(b) &= \phi(\gamma a + (1 - \gamma)c) \\ &> \gamma \phi(a) + (1 - \gamma)\phi(c) \\ &= \gamma \phi(a) + \phi(c) - \gamma \phi(c) \\ &= \phi(c) + \gamma(\phi(a) - \phi(c)), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\phi(b) - \phi(c) > \gamma(\phi(a) - \phi(c)).$$

Si sustituimos el valor de γ obtenemos

$$\frac{\phi(b) - \phi(c)}{b - c} > \frac{(\phi(a) - \phi(c))}{a - c}. \quad (3.11)$$

¹Una función es estrictamente cóncava si para cualesquiera dos puntos $x, y \in \text{dom}(f)$ con $x \neq y$ y para cada $t \in [0, 1]$ se cumple que: $f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y)$

Ahora, calculamos el determinante dado por el Lema 3.4 y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \phi(a) & \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b & c \\ \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ \phi(a) & \phi(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ \phi(a) & \phi(b) \end{vmatrix} \\
 &= b\phi(c) - c\phi(b) - a\phi(c) + c\phi(a) + a\phi(b) - b\phi(a) \\
 &= (c-b)\phi(a) + (a-c)\phi(b) + (b-a)\phi(c) \\
 &= (c-b)\phi(a) + (a-c)\phi(b) + (b-a+c-c)\phi(c) \\
 &= -(b-c)\phi(a) + (a-c)\phi(b) - (a-c)\phi(c) + (b-c)\phi(c) \\
 &= (b-c)[\phi(c) - \phi(a)] + (a-c)[\phi(b) - \phi(c)],
 \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \phi(a) & \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ \phi(a)-\phi(c) & \phi(b)-\phi(c) \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Usando (3.11) obtenemos que

$$(a-c)[\phi(b) - \phi(c)] + (b-c)[\phi(c) - \phi(a)] > 0$$

y por lo tanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \phi(a) & \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} > 0.$$

□

Teorema 3.5. Toda configuración central espacial convexa de 5 cuerpos con masas iguales es simétrica.

Demostración. Realizaremos la demostración por contradicción, para lo cual suponemos que la configuración no es simétrica. Ya que la configuración central es convexa y no simétrica, entonces tenemos que todas las desigualdades en (3.9) son estrictas, es decir

$$\Delta_1 < \Delta_2 < 0 < \Delta_3 < \Delta_4 < \Delta_5. \quad (3.13)$$

Por otro lado, dado que la configuración es central, existen dos números reales α y β tales que

$$\psi'(s_{ij}) = \alpha + \beta\Delta_i\Delta_j, \quad (3.14)$$

donde ψ es un potencial.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\beta > 0$ (si $\beta < 0$ obtenemos las desigualdades opuestas) y definimos $S_{ij} = \psi'(s_{ij})$.

Usando las desigualdades (3.13) y (3.14) podemos ordenar los S_{ij} , por ejemplo

$$S_{14} - S_{15} = \beta \Delta_1 (\Delta_4 - \Delta_5),$$

de donde $\Delta_4 - \Delta_5 < 0$ y como $\Delta_1 < 0$ entonces $\Delta_1(\Delta_4 - \Delta_5) > 0$, de tal forma que $S_{14} - S_{15} > 0$.

Llevando a cabo un análisis similar para todos los S_{ij} obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} S_{15} &< S_{14} < S_{13} < S_{23} < S_{12} \\ S_{14} &< S_{24} < S_{34} < S_{35} < S_{45} \\ S_{15} &< S_{25} < S_{24} < S_{23} < S_{12} \\ S_{25} &< S_{35}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Notemos que no podemos comparar directamente S_{25} y S_{34} .

En una sección anterior vimos que $\psi'(s_{ij})$ es una función estrictamente creciente, entonces S_{ij} también lo es. Luego tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} s_{15} &< s_{14} < s_{13} < s_{23} < s_{12} \\ s_{14} &< s_{24} < s_{34} < s_{35} < s_{45} \\ s_{15} &< s_{25} < s_{24} < s_{23} < s_{12} \\ s_{25} &< s_{35}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Observemos que no podemos comparar directamente s_{25} y s_{34} .

Usando (3.16), (3.15) y del Lema (3.4) obtenemos los signos de los determinantes que aparecen en las ecuaciones E_{ijk} . En particular veamos que la ecuación E_{123} no se cumple. Iniciemos por calcular el signo del primer determinante en el lado izquierdo de E_{123} , para lo cual hacemos uso de la relación (3.12)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ S_{34} & S_{24} & S_{14} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} s_{12} - s_{23} & s_{13} - s_{23} \\ S_{34} - S_{14} & S_{24} - S_{14} \end{vmatrix} \\ &= (s_{12} - s_{23})(S_{24} - S_{14}) + (s_{23} - s_{13})(S_{34} - S_{14}), \end{aligned}$$

y aplicando las desigualdades (3.15) y (3.16), obtenemos que $s_{12} - s_{23} > 0$, $S_{24} - S_{14} > 0$, $s_{23} - s_{13} > 0$ y $S_{34} - S_{14} > 0$ de donde podemos concluir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ S_{34} & S_{24} & S_{14} \end{vmatrix} > 0.$$

Ahora, realizamos el mismo procedimiento para el otro determinante del lado izquierdo de E_{123} y obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ S_{35} & S_{25} & S_{15} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} s_{12} - s_{23} & s_{13} - s_{23} \\ S_{35} - S_{15} & S_{25} - S_{15} \end{vmatrix} \\ &= (s_{12} - s_{23})(S_{25} - S_{15}) + (s_{23} - s_{13})(S_{35} - S_{15}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

En lo que sigue mostraremos que los tres determinantes del lado derecho de E_{123} son estrictamente negativos. Iniciemos por observar que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{34} & s_{24} & s_{14} \\ S_{34} & S_{24} & S_{14} \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{35} & s_{25} & s_{15} \\ S_{35} & S_{25} & S_{15} \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ S_{12} & S_{13} & S_{23} \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{23} & s_{13} \\ S_{12} & S_{23} & S_{13} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Notemos que $s_{34} > s_{24} > s_{14}$, $s_{35} > s_{25} > s_{15}$ y $s_{12} > s_{23} > s_{13}$. Aplicamos el Lema 3.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{34} & s_{24} & s_{14} \\ S_{34} & S_{24} & S_{14} \end{vmatrix} &> 0, & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{35} & s_{25} & s_{15} \\ S_{35} & S_{25} & S_{15} \end{vmatrix} &> 0, \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{23} & s_{13} \\ S_{12} & S_{23} & S_{13} \end{vmatrix} &> 0. \end{aligned}$$

Usando (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} \end{vmatrix} &< 0, & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} \end{vmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ S_{12} & S_{13} & S_{23} \end{vmatrix} < 0.$$

Como consecuencia tenemos que el lado derecho de la ecuación E_{123} es negativa, de donde obtenemos una contradicción. La hipótesis de que la configuración central convexa no es simétrica es falsa. $\square$

Proposición 3.6. Dados 5 cuerpos de masas iguales, no existe configuración central convexa tal que

$$\Delta_1 < \Delta_2 < 0 < \Delta_3 \leq \Delta_4 \leq \Delta_5.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad en la ecuación (3.14) podemos asumir que $\beta > 0$ (si $\beta < 0$ obtenemos desigualdades en sentido contrario). Usando (3.13) y (3.14) podemos ordenar los S_{ij} , por ejemplo

$$S_{14} - S_{15} = \beta \Delta_1 (\Delta_4 - \Delta_5)$$

y $\Delta_4 - \Delta_5 \leq 0$ implica $\Delta_1 (\Delta_4 - \Delta_5) \geq 0$, de donde obtenemos $S_{14} - S_{15} \geq 0$. Realizando análisis similares para el resto de los S_{ij} obtenemos

$$\begin{aligned} S_{15} &\leq S_{14} \leq S_{13} < S_{23} < S_{12} \\ S_{14} &< S_{24} < S_{34} \leq S_{35} \leq S_{45} \\ S_{15} &< S_{25} \leq S_{24} \leq S_{23} < S_{12} \\ &S_{25} < S_{35} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Usando una vez más el hecho de que ψ' es una función estrictamente creciente, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} s_{15} &\leq s_{14} \leq s_{13} < s_{23} < s_{12} \\ s_{14} &< s_{24} < s_{34} \leq s_{35} \leq s_{45} \\ s_{15} &< s_{25} \leq s_{24} \leq s_{23} < s_{12} \\ &s_{25} < s_{35}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora, observemos que se siguen cumpliendo siguientes desigualdades estrictas:

$$\begin{aligned} s_{12} &> s_{23} > s_{13} \\ s_{34} &> s_{24} > s_{14} \\ s_{35} &> s_{25} > s_{15}. \end{aligned}$$

Usando estas desigualdades, podemos concluir que al igual que en la demostración del teorema 3.5, los dos determinantes del lado izquierdo de la ecuación E_{123} son positivos, mientras que los tres determinantes del lado derecho son negativos, con lo cual tenemos una contradicción. $\square$

3.3.2. Configuraciones centrales de Dziobek en el problema de 5 cuerpos con masas iguales

En esta sección aplicaremos la teoría de Dziobek para calcular las configuraciones centrales de 5 cuerpos con masas iguales.

Considerando que la matriz de Cayley–Menger nos proporciona el hipervolumen del simplejo formado por 5 partículas, salvo un factor constante, entonces si queremos buscar configuraciones centrales de 5 cuerpos en el espacio afín de dimensión $3 = 5 - 2$ entonces el respectivo determinante de Cayley–Menger se debe anular.

Sea G el determinante de la matriz que representa a la matriz de Cayley–Menger para el caso $n = 5$, satisfaciendo la siguiente condición

$$G = \begin{vmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{13}^2 & q_{14}^2 & q_{15}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{23}^2 & q_{24}^2 & q_{25}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & 0 & q_{34}^2 & q_{35}^2 & 1 \\ q_{14}^2 & q_{24}^2 & q_{34}^2 & 0 & q_{45}^2 & 1 \\ q_{15}^2 & q_{25}^2 & q_{35}^2 & q_{45}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Como hemos visto antes, buscar configuraciones centrales de 5 cuerpos en las variables q_{ij} para $1 \leq i < j \leq 5$, es equivalente a encontrar los puntos críticos de la función potencial U restringida a que el momento de inercia sea constante $I = I_0$, y que el determinante $G = 0$. En otras palabras, debemos encontrar los puntos críticos de la función

$$V = U + \lambda(I - I_0) + \sigma G, \quad (3.20)$$

restringida a $I = I_0$ y $G = 0$, con multiplicadores de Lagrange λ y σ .

Notemos que la función V depende de 12 variables: λ , σ y q_{ij} para $1 \leq i < j \leq 5$.

Sea Δ_j el volumen del tetraedro formado por cuatro masas exceptuando a m_j . Si fijamos el orden de las masas, entonces $\Delta_1, \dots, \Delta_5$ son los volúmenes con signo de los cinco tetraedros orientados con vértices (m_2, m_3, m_4, m_5) , (m_3, m_4, m_5, m_1) , (m_4, m_5, m_1, m_2) , (m_5, m_1, m_2, m_3) y (m_1, m_2, m_3, m_4) , respectivamente.

Los volúmenes Δ_i de los respectivos tetraedros están determinados de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
 36\Delta_1^2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_{23}^2 & q_{24}^2 & q_{25}^2 & 1 \\ q_{23}^2 & 0 & q_{34}^2 & q_{35}^2 & 1 \\ q_{24}^2 & q_{34}^2 & 0 & q_{45}^2 & 1 \\ q_{25}^2 & q_{35}^2 & q_{45}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, & 36\Delta_2^2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_{13}^2 & q_{14}^2 & q_{15}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & 0 & q_{34}^2 & q_{35}^2 & 1 \\ q_{14}^2 & q_{34}^2 & 0 & q_{45}^2 & 1 \\ q_{15}^2 & q_{35}^2 & q_{45}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 36\Delta_3^2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{14}^2 & q_{15}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{24}^2 & q_{25}^2 & 1 \\ q_{14}^2 & q_{24}^2 & 0 & q_{45}^2 & 1 \\ q_{15}^2 & q_{25}^2 & q_{45}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, & 36\Delta_4^2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{13}^2 & q_{15}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{23}^2 & q_{25}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & 0 & q_{35}^2 & 1 \\ q_{15}^2 & q_{25}^2 & q_{35}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 36\Delta_5^2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{13}^2 & q_{14}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{23}^2 & q_{24}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & 0 & q_{34}^2 & 1 \\ q_{14}^2 & q_{24}^2 & q_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Definición 3.7. Diremos que $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3)^5$ es una configuración central de 5 cuerpos en $\mathbb{R}^3$ tipo Dziobek, si existen constantes $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$, y un vector no nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_5) \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 &= 0, \\
 \sum_{j=1}^5 \Delta_j \mathbf{q}_j &= \mathbf{0}, \\
 s_{ij}^{-\frac{3}{2}} &= \frac{\lambda}{M} + \sigma \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq 5.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Observemos que el exponente $-\frac{3}{2}$ refleja el hecho de que estamos trabajando con el potencial Newtoniano donde la fuerza de atracción mutua es el inverso de las distancias mutuas. Además, en esta definición se usan como variables los cuadrados de las distancias relativas $s_{ij} = q_{ij}^2$, lo cual nos motiva a definir unas nuevas variables de la siguiente forma:

$$t_i = \sum_{j=1}^5 s_{ij} \Delta_j, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Explicitamente este conjunto de ecuaciones son

$$\begin{aligned} t_1 &= \Delta_2 s_{12} + \Delta_3 s_{13} + \Delta_4 s_{14} + \Delta_5 s_{15}, \\ t_2 &= \Delta_1 s_{12} + \Delta_3 s_{23} + \Delta_4 s_{24} + \Delta_5 s_{25}, \\ t_3 &= \Delta_1 s_{13} + \Delta_2 s_{23} + \Delta_4 s_{34} + \Delta_5 s_{35}, \\ t_4 &= \Delta_1 s_{14} + \Delta_2 s_{24} + \Delta_3 s_{34} + \Delta_5 s_{45}, \\ t_5 &= \Delta_1 s_{15} + \Delta_2 s_{25} + \Delta_3 s_{35} + \Delta_4 s_{45}. \end{aligned}$$

En [1], Albouy y Chenciner demostraron que las ecuaciones de Dziobek se pueden escribir en forma simplificada como

$$t_i - t_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 5, \quad (3.22)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 = 0,$$

$$s_{ij}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\lambda}{M} + \alpha \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq 5.$$

A partir de aquí vamos a considerar en nuestro estudio que todas las masas son iguales, por lo que sin pérdida de generalidad podemos tomar $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$. Luego la energía potencial del sistema es

$$U = \frac{1}{q_{12}} + \frac{1}{q_{13}} + \frac{1}{q_{14}} + \frac{1}{q_{15}} + \frac{1}{q_{23}} + \frac{1}{q_{24}} + \frac{1}{q_{25}} + \frac{1}{q_{34}} + \frac{1}{q_{35}} + \frac{1}{q_{45}}, \quad (3.23)$$

y el momento de inercia

$$I = \frac{1}{10} (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{14}^2 + q_{15}^2 + q_{23}^2 + q_{24}^2 + q_{25}^2 + q_{34}^2 + q_{35}^2 + q_{45}^2). \quad (3.24)$$

Para obtener de los puntos críticos vamos a derivar (3.20) con respecto a las distancias relativas, lo cual se traduce a calcular los ceros del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_{12}}, & e_2 &= \frac{\partial V}{\partial q_{13}}, & e_3 &= \frac{\partial V}{\partial q_{14}}, \\ e_4 &= \frac{\partial V}{\partial q_{15}}, & e_5 &= \frac{\partial V}{\partial q_{23}}, & e_6 &= \frac{\partial V}{\partial q_{24}}, \\ e_7 &= \frac{\partial V}{\partial q_{25}}, & e_8 &= \frac{\partial V}{\partial q_{34}}, & e_9 &= \frac{\partial V}{\partial q_{35}}, \\ e_{10} &= \frac{\partial V}{\partial q_{45}}, & e_{11} &= I - I_0, & e_{12} &= G. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como consecuencia, para determinar las configuraciones centrales, el sistema (3.25) nos dice que hemos de encontrar los ceros de un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas: las distancias q_{ij} , λ y σ .

En la siguiente sección estudiaremos algunas herramientas numéricas necesarias para encontrar ceros de los polinomios obtenidos del proceso de optimización, en particular plantearemos un algoritmo conocido como recocido simulado.

3.4. Algoritmo Recocido simulado

El algoritmo de recocido simulado (RS) está basado en una analogía entre la simulación de recocido de sólidos y la problemática de optimización combinatoria de gran escala.

El recocido simulado es un método probabilístico propuesto por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1983) y Cerny (1985) para encontrar el mínimo global de una función de costos que puede poseer varios mínimos locales. Su acción consiste en emular el proceso físico mediante el cual un sólido se enfría lentamente, de modo que cuando, finalmente su estructura se congela, esto sucede en una configuración de mínima energía.

El método del recocido se utiliza en la industria para obtener materiales más resistentes, o más cristalinos, en general, para mejorar las cualidades de un material. El proceso consiste en “derretir” el material (calentarlo a muy alta temperatura). En esa situación, los átomos adquieren una distribución “azarosa” dentro de la estructura del material y la energía del sistema es máxima. Luego se hace descender la temperatura muy lentamente por etapas, dejando que en cada una de esas etapas los átomos queden en equilibrio (es decir, que los átomos alcancen una configuración óptima para esa temperatura). Al final del proceso, los átomos forman una estructura cristalina altamente regular, el material alcanza así una máxima resistencia y la energía del sistema es mínima.

La rama de la Física llamada Mecánica Estadística se encarga de desarrollar una serie de métodos para estudiar el comportamiento de grandes cantidades de átomos de un sistema. Debido a que en promedio, en un sistema hay 10^{23} átomos por cm^3 , solamente puede estudiarse el comportamiento más probable del sistema en equilibrio a una temperatura dada. La experimentación mostró que los átomos de un sistema en un proceso de recocido se comportan según el factor de probabilidad de Boltzman. En 1953 Metropolis modeló el proceso de recocido: en cada paso del algoritmo al átomo se le da un desplazamiento azaroso y se mide el cambio de energía ΔE . Si $\Delta E \leq 0$ se acepta el desplazamiento. Si $\Delta E > 0$, se acepta el desplazamiento con probabilidad $\exp(-\Delta E/TK)$, donde T es la temperatura del sistema y K es la constante de

Boltzman.

3.4.1. Algoritmo

En esta sección describiremos el algoritmo de recocido simulado (en inglés, simulated annealing algorithm), el cual usaremos para encontrar los ceros de polinomios obtenidos a partir de las ecuaciones de configuraciones centrales. Este algoritmo pertenece a una clase de algoritmos de búsqueda local (local search algorithms) comúnmente llamados algoritmos de Umbral (threshold algorithm).

Sea (S, c) los elementos de un problema de optimización combinatoria, donde:

- S es el conjunto de soluciones factibles.
- c es la función costo (a valores reales positivos).

El problema es encontrar una i en S que minimice c . Para implementar el algoritmo son necesarias además:

- Una función entorno V de i en S .
- Una sucesión $\{t_k\}$ (los llamados threshold) decreciente tal que $t_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

El algoritmo está definido como sigue:

```

1 Condiciones iniciales  $t_0 > 0, i_0 \in S, k = 0$ 

While  $t_k > 0$  do
  Se elige  $j_k \in V_{i_k}$ 
  if  $c(j_k) \leq c(i_k)$  then  $i_{k+1} = j_k$  (se acepta  $j_k$ )
  else
    se elige (aleatoriamente)  $r \in [0, 1]$ 
    if  $r < e^{\frac{c(i_k) - c(j_k)}{t_k}}$  then  $i_{k+1} = j_k$ 
    else  $i_{k+1} = i_k$ 
  se incrementa  $k$ 
Endwhile

 $i_k$ 

```

Note que en la iteración k -ésima se genera un número aleatorio r y se acepta j si $r < \exp[\frac{c(i) - c(j)}{t_k}]$.

En este caso, cada vecino de una solución tiene una probabilidad positiva de reemplazar a la solución actual. Los t_k se eligen de forma tal que a medida que avanzan las iteraciones, aceptar soluciones con grandes incrementos en el costo es menos probable (pero sigue existiendo una probabilidad positiva de aceptarlos). Para ésto se usan dos parámetros:

- k cantidad de iteraciones que estamos dispuestos a hacer en cada etapa.
- A cantidad de aceptaciones que se permiten hacer en cada etapa.

Suponiendo que los estados del sistema tienen la función de distribución de probabilidad de Boltzman, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j es

$$P(j) = \frac{1}{Z_t} \exp\left[-\frac{c(j)}{t}\right]$$

donde t es la temperatura del sistema, $Z_t = \sum_{i \in S} \exp\left[-\frac{c(i)}{t}\right]$ y $c(i)$ es el costo de la solución i .

Sea S^* el subconjunto de S de las soluciones que minimizan c globalmente, es decir, soluciones óptimas del problema. Para t suficientemente pequeño:

$$P(j) = \frac{\exp[-c(j^*)/t]}{S^* \exp[-c(j^*)/t]} = \begin{cases} 0 & j \neq j^* \\ \frac{1}{S^*} & j = j^* \end{cases}$$

lo cual se obtiene al hacer $t \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\sum_{j^* \in S^*} P(j^*) = 1.$$

Notemos que dados los elementos descritos aquí arriba, el algoritmo recocido simulado consiste en una cadena de Markov no estacionaria a tiempo discreto $x(t)$. Si el estado actual $x(t)$ es igual a i , elegimos de forma aleatoria un vecino j de i ; la probabilidad de que cualquier $j \in S(i)$ es elegida igual a q_{ij} . Una vez que j ha sido elegido, el próximo estado $x(t+1)$ está dado probabilísticamente por

$$P[x(t+1) = j \mid x(t) = i] = \begin{cases} q_{ij} \exp\left[-\frac{1}{T(t)} \max\{0, J(j) - J(i)\}\right] & \text{si } j \neq i, j \in S(i) \\ 0, & \text{si } j \neq i, j \notin S(i) \end{cases}$$

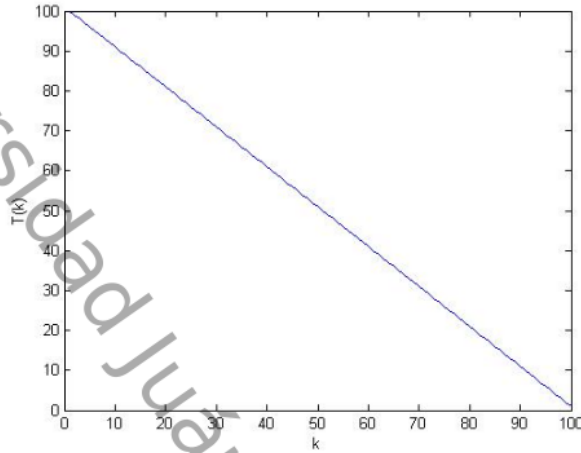


Figura 3.3: Descenso constante de temperatura.

Existen varias propuestas de umbrales para obtener una sucesión lo suficientemente lenta como para permitir un mayor número de iteraciones, algunas de ellas son:

- Enfriamiento con descenso constante de temperatura, es decir $t_{k+1} = t_k - \alpha$, donde α es una constante.
- Descenso exponencial: $t_{k+1} = \alpha t_k$ y $\alpha \in [0.8, 0.99]$.
- Esquema de Cauchy: $t_k = \frac{t_0}{1+k}$.
- Criterio de Boltzmann: $t_k = \frac{t_0}{1+\log(k)}$.

Para apreciar mejor la diferencia que hay entre estos umbrales, véase las figuras (3.3) a la (3.6).

Como se muestran en las gráficas, el criterio de Boltzmann es teóricamente mejor que los demás, ya que alcanza el cero mas lentamente que los demás métodos, pero en este trabajo usaremos el esquema de Cauchy ya que el criterio de Boltzmann exige un mayor costo de cómputo debido a la cantidad de iteraciones.

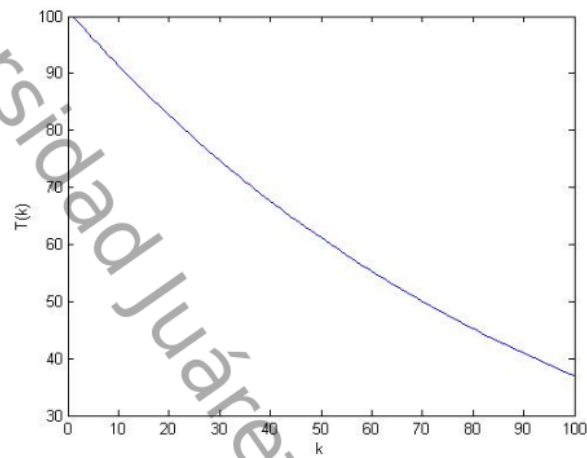


Figura 3.4: Descenso exponencial.

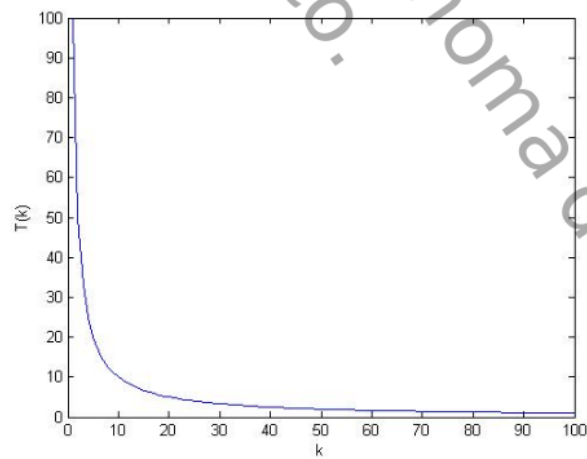


Figura 3.5: Esquema de Cauchy.

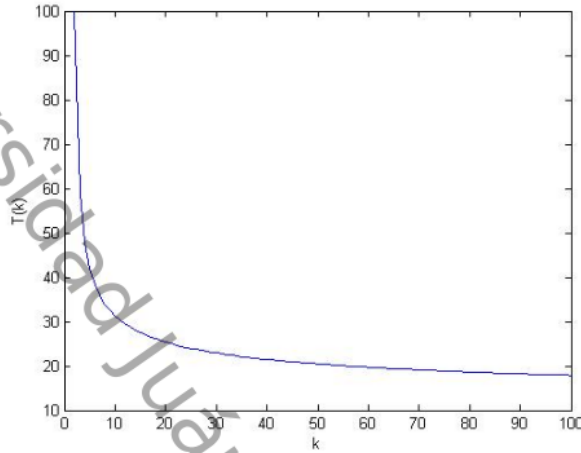


Figura 3.6: Criterio de Boltzmann.

3.5. Configuraciones centrales simétricas de 5 masas iguales

Las ecuaciones que definen a las configuraciones centrales en la definición de Dziobek presentan una cierta simetría entre las distancias mutuas y los volúmenes, entonces es natural buscar soluciones que presenten simetría.

Aplicando los teoremas de simetría de Albouy podemos afirmar que si dos Δ_i son iguales entonces existe un plano de simetría para la configuración central. Por otro lado, a partir del Teorema 3.5 tenemos que toda configuración central espacial convexa de 5 cuerpos con masas iguales es simétrica.

El objetivo de esta sección es encontrar configuraciones centrales de 5 cuerpos con masas iguales que tengan al menos un eje de simetría, por lo que debemos considerar los siguientes casos:

Caso 1: $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$.

Caso 2: $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

1 Caso 3: $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Caso 4: $\Delta_1 \neq \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Caso 5: $\Delta_1, \Delta_2 = \Delta_3$ y $\Delta_4 = \Delta_5$.

Queremos hacer notar que hemos ordenado los casos de menor a mayor dificultad, ahora procedemos a encontrar las configuraciones centrales que cumplan estas condiciones de simetría.

Caso 1. $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$.

Sea $\Delta_1 = 0$, lo cual implica que el volumen del tetraedro formado por las masas (m_2, m_3, m_4, m_5) se anula y por lo tanto las masas m_2, m_3, m_4 y m_5 son coplanares. Sustituimos en la última ecuación del sistema de ecuaciones (3.21) tenemos

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15} .$$

De las condiciones $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$ y la primera ecuación del sistema de ecuaciones (3.21) obtenemos que $\Delta_2 = -\Delta_3$. Ahora sustituimos en la última ecuación del sistema de ecuaciones (3.21) tenemos

$$\begin{aligned} q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} &= \left(\frac{\lambda}{5} - \sigma \Delta_2^2 \right)^{-1/3} , \\ q_{24} = q_{35} &= \left(\frac{\lambda}{5} + \sigma \Delta_2^2 \right)^{-1/3} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Estas relaciones entre las distancias relativas implica que la configuración es una pirámide con una base rectangular, (ver la Figura 3.7).

Si normalizamos las distancias relativas $q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} = 1$, las cuales son las longitudes de los lados del cuadrado con vértices m_2, m_3, m_4 y m_5 , entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} &= 1, \\ q_{24} = q_{35} &= \sqrt{2}, \\ q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15} &= a. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando las condiciones (3.27) en las ecuaciones (3.20), aislamos λ y σ de las ecuaciones e_1 y e_7 y obtenemos

$$\lambda = \frac{5}{a^3}, \quad \sigma = -\frac{a^3 - 1}{16a^3(-1 + 2a^2)}.$$

Ahora sustituimos estos valores en la ecuación e_6 , y obtenemos que la única raíz real para esta ecuación es

$$a = \left(\frac{2(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3 + 1} \right)^{1/3} = 1.138985517 .$$

Por lo tanto, existe una única configuración central que cumple las condiciones del Caso 1 y corresponde a una pirámide con base cuadrada, ver la Figura 3.7.

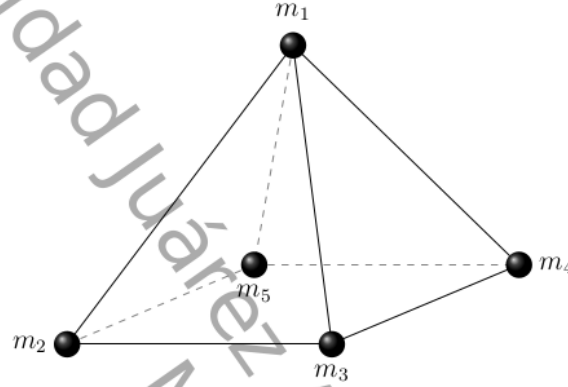


Figura 3.7: Configuración central del caso 1.

Caso 2. $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Bajo estas condiciones de simetría, del sistema de ecuaciones (3.21) obtenemos la siguiente relación entre las distancias mutuas:

$$\begin{aligned} q_{23} &= q_{24} = q_{25} = q_{34} = q_{35} = q_{45}, \\ q_{12} &= q_{13} = q_{14} = q_{15}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las relaciones obtenidas entre las distancias relativas nos permiten deducir la geometría de la configuración central, la cual tiene la forma de un tetraedro regular con una partícula en el baricentro del tetraedro, ver la Figura 3.8.

Con el fin de obtener los valores de las distancias relativas que determinan la configuración central debemos resolver el sistema de ecuaciones (3.25). A partir de

(3.28) las ecuaciones e_1 y e_7 toman la forma

$$\begin{aligned}
 e_1 = & -\frac{1}{q_{12}^2} + \frac{1}{5}\lambda q_{12} + \sigma(-4q_{12}^3 q_{34}^4 + 8q_{12}^3 q_{34}^2 q_{45}^2 + 8q_{12}^3 q_{34}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{35}^4 \\
 & + 8q_{12}^3 q_{35}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{45}^4 + 8q_{12}^3 q_{13}^2 + 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{24}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{24}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{35}^2 q_{45}^2 + 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{45}^4 + 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{23}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{23}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{23}^2 q_{45}^2 + 8q_{12}^3 q_{14}^2 q_{24}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 + 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 + 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{35}^4 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{14}^2 q_{35}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{15}^2 q_{34}^2 + 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{15}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{15}^2 q_{45}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{35}^2 q_{45}^2 + 4q_{12}^3 q_{23}^2 q_{45}^4 - 4q_{12}^3 r_{15}^2 q_{24}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{15}^2 q_{24}^2 q_{35}^2 + 4q_{12}^3 q_{15}^2 q_{24}^2 q_{45}^2 + 8q_{12}^3 q_{15}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{12}^3 q_{15}^2 q_{34}^4 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{15}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{15}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{24}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 + 4q_{12}^3 q_{24}^2 q_{35}^4 \\
 & - 4q_{12}^3 q_{24}^2 q_{35}^2 q_{45}^2 + 4q_{12}^3 q_{25}^2 q_{34}^4 - 4q_{12}^3 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^3 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 \\
 & + 8q_{12}^3 q_{34}^2 q_{35}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^3 q_{13}^2 q_{24}^2 q_{35}^2) \\
 e_7 = & -\frac{1}{q_{25}^2} + \frac{1}{5}\lambda q_{25} + \sigma(-4q_{12}^2 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{12}^2 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 - 4q_{12}^2 q_{13}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 - 4q_{12}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 + 4q_{12}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 + 8q_{12}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{12}^2 q_{25}^2 r_{34}^4 \\
 & - 4q_{12}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 + 4q_{13}^4 q_{24}^2 q_{25}^2 - 4q_{13}^4 q_{25}^3 + 4q_{13}^4 q_{25}^2 q_{45}^2 = 4q_{13}^2 q_{14}^2 q_{23}^2 q_{25}^2 \\
 & - 4q_{13}^2 q_{14}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 + 8q_{13}^2 q_{14}^2 q_{25}^3 + 8q_{13}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 - 4q_{13}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 \\
 & + 4q_{13}^2 q_{23}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 - 4q_{13}^2 q_{23}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 - 4q_{13}^2 q_{15}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 - 4q_{13}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{13}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 - 4q_{13}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 + 8q_{13}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 + 8q_{13}^2 q_{25}^3 q_{34}^2 \\
 & - 4q_{13}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 + 4q_{14}^4 q_{23}^2 q_{25}^2 - 4q_{14}^4 q_{25}^3 + q_{14}^4 q_{25}^2 q_{35}^2 - 4q_{14}^2 q_{23}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 \\
 & - 4q_{14}^2 q_{23}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 8q_{14}^2 q_{23}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 - 4q_{14}^2 q_{23}^2 q_{25}^2 q_{45}^2 + 4q_{14}^2 q_{15}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 \\
 & - 4q_{14}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 - 4q_{14}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 q_{35}^2 + 8q_{14}^2 q_{25}^3 q_{34}^2 - 4q_{14}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 \\
 & - 4q_{23}^2 q_{15}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{23}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{45}^2 - 4q_{25}^2 q_{24}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 + 4q_{25}^2 q_{25}^2 q_{34}^4 \\
 & + 4q_{24}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 - 4q_{25}^3 q_{34}^4 - 4q_{12}^2 q_{25}^2 q_{34}^2 q_{35}^2 - 4q_{13}^2 q_{14}^2 q_{25}^2 q_{45}^2)
 \end{aligned}$$

Tomando e_1 y e_7 del sistema (3.28), las resolvemos para λ y σ y obtenemos

$$\lambda = \frac{5(b^2 + ab - a^2)}{2b(b+a)a^3}, \quad \sigma = -\frac{b^2 + a^2 + ab}{8a^3b^7(b+a)}$$

donde $a = q_{12}$ y $b = q_{25}$. Sustituyendo estos valores en e_{11} y e_{12} del sistema (3.25), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5}a^2 + \frac{3}{5}b^2 - 1 &= 0, \\
 3b^8 - 8a^2b^6 &= 0.
 \end{aligned}$$

Las cuales tienen como solución

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que existe una configuración central que cumple las condiciones del Caso 2, el cual es un tetraedro regular con una masa en el baricentro.

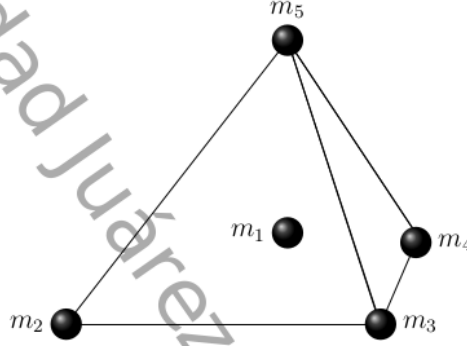


Figura 3.8: Configuración central correspondiente al Caso 2.

Caso 3. $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Usando las condiciones $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$ y $\Delta_1 = \Delta_2$ en el sistema (3.21) obtenemos que las distancias relativas satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} q_{13} = q_{14} = q_{15} = q_{23} = q_{24} = q_{25}, \\ q_{34} = q_{35} = q_{45}, \quad q_{12}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notemos que únicamente hay tres distancias relativas por determinar. Considerando **1** las relaciones (3.29) en el sistema de ecuaciones (3.25), tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4a^3 - 6a + 2ab^2 - b^3a^3 + 6b^3a - 2b^5a - 3b^3 + 4b - a^2b - 4ba^3 + ba^5 &= 0 \\ -12a^2b^4 + 4a^2b^6 + 3a^4b^4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dada que los ceros del sistema (3.30) no es posible obtenerlos de forma analítica o por un método directo, entonces vamos a aplicar el método de recocido simulado. Hemos codificado el algoritmo en *Matlab*[®], y el código está detallado en el Apéndice C. Aplicando el algoritmo, numéricamente hemos encontrado una única solución para (3.30) cuyos valores son

$$q_{13} = 1, \quad q_{12} = 1.428905139629991, \quad q_{34} = 1.211888021417097.$$

Por lo tanto existe una configuración central que cumple las condiciones de simetría del Caso 3. Geométricamente hablando la forma de la configuración central es una doble pirámide formada por dos tetraedros regulares unidos, la cual contiene seis caras y cada cara corresponde a un triángulo equilátero. En la Figura 3.9 ilustramos la configuración central obtenida, y podemos apreciar la existencia de un plano de simetría que pasa por las partículas m_3 , m_4 y m_5 , así como la existencia de un eje de simetría que pasa por las partículas m_1 y m_2 .

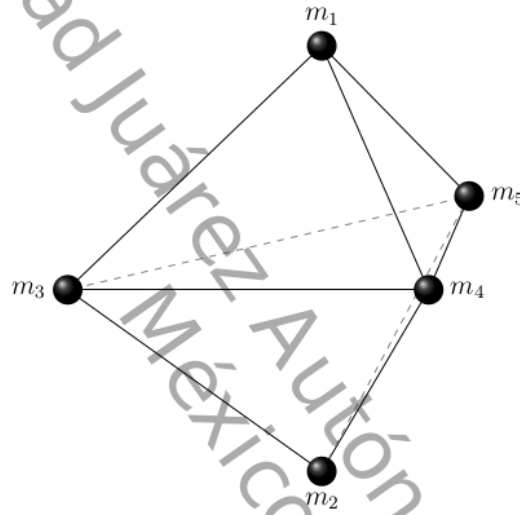


Figura 3.9: Configuración central de 5 cuerpos del caso 3.

Caso 4. $\Delta_1 \neq \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$

Considerando las condiciones de simetría $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$ en el sistema de ecuaciones (3.21) obtenemos que las distancias relativas para este caso están relacionadas de la siguiente forma:

$$q_{12} = 1,$$

$$q_{23} = q_{24} = q_{25},$$

$$q_{13} = q_{14} = q_{15}$$

$$q_{34} = q_{35} = q_{45}.$$

Para simplificar la búsqueda de la solución de (3.21) definimos las siguientes variables auxiliares $a = q_{13}$, $b = q_{23}$ y $c = q_{34}$. Al igual que en los casos anteriores

resolviendo e_1 y e_2 para λ y σ y obtenemos

$$\lambda = \left(\frac{5}{2}\right) \frac{-2c^2 + 3a^2 - 3 + 3b^2 - a^3 - b^2a^3 + a^5}{a^3(-c^2 + 2a^2 - 2 + b^2)},$$

$$\sigma = -\frac{a^3 - 1}{8a^3c^4(b^2 + 2a^2 - c^2 - 2)}.$$

Ahora sustituimos estos valores en las ecuaciones e_5 , e_8 y e_{12} , y nuestro problema se reduce a encontrar los ceros del siguiente sistema de tres ecuaciones de polinomios en las variables a , b y c :

$$\begin{aligned} & -b^2a^3 - 2a^5 + a^3c^2 + 2a^3 + 2b^5 + b^3a^2 - b^3c^2 - 2b^3 - b^5a^3 + b^3a^5 = 0, \\ & 3a^4c^4 + 3c^4b^4 - 6a^2b^2c^4 - 6c^4b^2 - 6c^4a^2 + 4c^6 + 3c^4 = 0, \\ & c^3 + c^3b^2a^3 - 2cb^2a^3 + ca^3b^4 - 2ca^5b^2 - 2a^3c^2 + a^3c + 3c^3a^3 - c^3a^5 - 2ca^5 + ca^7 + \\ & 2cb^2 + 2ca^2 - cb^4 - ca^4 - c + 4a^5 - 4a^3 + 2b^2a^3 - 3c^3b^2 + 2cb^2a^2 - 3c^3a^2 + 2c^5 = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Al igual que en el Caso 3, aquí vamos a usar el método de recocido simulado para encontrar numéricamente los ceros de (3.31). El código en *Matlab*[®] es equivalente al dado en el Apéndice C, pero exceptuando las funciones F , G y H . Al resolver obtenemos cuatro soluciones dadas por

Solución	q_{13}	q_{23}	q_{34}
1	0.699836519769916	0.699836519769916	0.848123495259391
2	1.632993161855453	1	1.632993161855453
3	1.135608671369086	1.872319390886508	1.661288262157793
4	1.872319390886508	1.135608671369086	1.661288262157793

Notemos que la solución 1 corresponde al Caso 3, la solución 2 corresponde al Caso 2, y las soluciones 3 y 4 corresponden al Caso 4 y son equivalentes cambiando el orden de las masas $m_1 \leftrightarrow m_2$, las cuales como sabemos son iguales. En la Figura 3.10 ilustramos la configuración central obtenida, y observamos que corresponde a un tetraedro con una la partícula en el interior localizada fuera del baricentro pero en el eje de simetría que pasa a través de la base del tetraedro y el ápice de éste.

Caso 5. $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$

Al igual que en los casos anteriores aplicamos las condiciones de simetría $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$ en el sistema de ecuaciones (3.21). Como consecuencia las distancias relativas satisfacen las siguientes relaciones

$$q_{12} = q_{14}, \quad q_{13} = q_{15}, \quad q_{24}, \quad q_{35}, \quad q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} = 1.$$

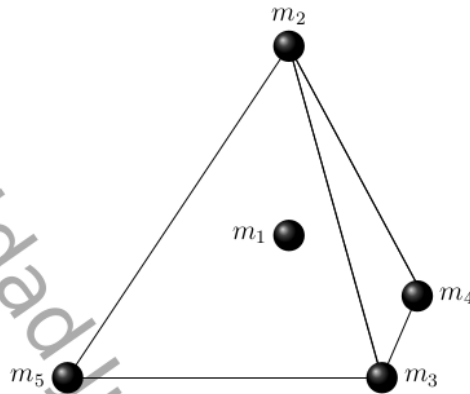


Figura 3.10: Configuración central de 5 cuerpos del caso 4.

Considerando estas igualdades en el sistema de ecuaciones (3.25), obtenemos las funciones polinomiales F , G y H que aparecen en el Apéndice C. Ya que requerimos resolver numéricamente los ceros del sistema polinomial, usaremos el método de recocido simulado y el código en *Matlab*[®], el cual puede ser consultado en el Apéndice B. Aplicando el método recocido simulado obtenemos las siguientes tres soluciones:

Solución	q_{12}	q_{13}	q_{24}	q_{35}
1	1.211888021417097	1	1.211888021417097	1.428905139629991
2	1.138985516397694	1.138985516397694	1.414213562373095	1.414213562373095
3	0.612372435695794	0.612372435695794	1	1

Notemos que al sustituir estos valores en los Δ_i , obtenemos que la solución 1 corresponde a la obtenida en el Caso 3, la solución 2 corresponde a la del Caso 1, y por último la solución 3 corresponde a la obtenida en el Caso 2. Por lo tanto podemos concluir que no hay configuración central que satisfaga la simetría del Caso 5.

Conclusión: Es posible obtener las configuraciones centrales del problema de 5 cuerpos con masas iguales, usando un algoritmo más simple que el propuesto por Kotsireas y Lazard en [16]. Ellos dejaron abierta la opción de la existencia de una configuración central del tipo 5, y nosotros hemos verificado que numéricamente es imposible su existencia.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice A

Configuraciones centrales equiláteras de 3 cuerpos

Lema A.1. La única posibilidad de que 3 partículas formen una configuración central no colineal es que su configuración sea un triángulo equilátero.

Demostración. Consideremos tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 , respectivamente; y consideremos el plano generado por estas tres partículas. Sea x el vector que une m_1 y m_2 , y el vector que une m_1 y m_3 y por último z el vector que une m_2 y m_3 , ver la Figura A.1. Luego las longitudes de los vectores está determinadas por la longitud de los vectores, es decir, $x = \|\mathbf{x}\|$, $y = \|\mathbf{y}\|$, y $z = \|\mathbf{z}\|$.

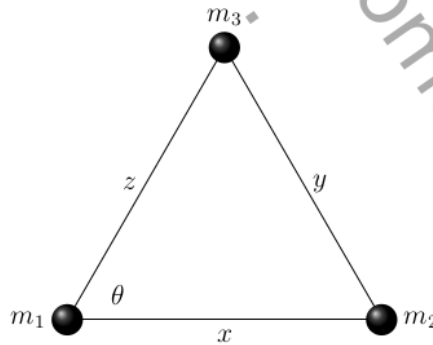


Figura A.1: Plano generado por las partículas m_1 , m_2 y m_3 y sus distancias relativas.

Ya que queremos demostrar que m_1 , m_2 y m_3 forman una configuración central no colineal y que ésta tiene forma de triángulo equilátero, entonces deberemos obtener

que $x = y = z$.

Iniciemos por fijar la longitud de unos de los vectores, por ejemplo x . Ahora vamos a ver que proporción existe entre las distancias y y z con respecto a x .

A partir de la definición de configuración central, si el centro de masa está fijo en el origen de coordenadas, se cumple la fuerza $\mathbf{F}$ que experimenta cualquier partícula debe ser proporcional al vector de posición. Luego, si fijamos el origen de coordenadas en la posición de la partícula m_1 , entonces la fuerza que experimenta la partícula uno $\mathbf{F}_1$ es proporcional al centro de masa del sistema $\mathbf{q}_{cm}$, es decir, existe un escalar ϵ tal que

$$\mathbf{F}_1 = \epsilon \mathbf{q}_{cm}.$$

Esta ecuación implica que los vectores $\mathbf{F}_1$ y el vector $\mathbf{q}_{cm}$ tienen en la misma dirección, y además el ángulo de separación α entre estos vectores es cero para ϵ positivo ó π en el caso de que ϵ sea negativo, en cualquiera de los dos casos tenemos

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = 0 \\ \|\cos(\alpha)\| = 1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Sea θ el ángulo de que se abre entre los vectores x y z , como se muestra Figura A.1 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \left(\frac{m_1 m_2}{x^2} + \frac{m_1 m_3}{y^2 \cos^2 \theta} \right) \hat{i} + \frac{m_1 m_3}{y^2 \sin^2 \theta} \hat{j}, \\ \mathbf{q}_{cm} &= \frac{m_2 x + m_3 y \cos \theta}{(m_1 + m_2 + m_3)} \hat{i} + \frac{m_3 y \sin \theta}{(m_1 + m_2 + m_3)} \hat{j}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ahora, usando las propiedades

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F} \times \mathbf{q}_{cm}\| &= \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{q}_{cm}\| |\sin(\alpha)|, \\ |\mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{cm}| &= \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{q}_{cm}\| |\cos(\alpha)| \end{aligned}$$

de las ecuaciones (A.1) tenemos

$$\begin{cases} \mathbf{F} \times \mathbf{q}_{cm} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_{cm} = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{q}_{cm}\|. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Usando los vectores (A.2) calculamos $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{q}_{cm}$ y obtenemos

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{q}_{cm} = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left[\frac{m_2 y \sin \theta}{x^2} + \frac{m_3 \sin \theta}{y \cos^2 \theta} - \frac{m_2 x}{y^2 \sin^2 \theta} - \frac{m_3 \cos \theta}{y \sin^2 \theta} \right] \hat{k},$$

y al factorizar la expresión entre paréntesis se reduce a

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{q}_{cm} = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left[m_2 \left(\frac{y \sin \theta}{x^2} - \frac{x}{y^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{m_3}{y} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right] \hat{k}. \quad (\text{A.4})$$

Usando el hecho $\mathbf{F} \times \mathbf{q}_{cm} = \mathbf{0}$ y que $\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \neq 0$ podemos concluir que

$$m_2 \left(\frac{y \sin \theta}{x^2} - \frac{x}{y^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{m_3}{y} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) = 0.$$

Sea $M = m_1 + m_2 + m_3$ la masa total del sistema. Usando (A.2) tenemos que

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{q}_{cm} = \frac{m_1}{M} \left[\frac{m_2^2}{x} + m_2 m_3 \left(\frac{y \cos \theta}{x^2} + \frac{x}{y^2 \cos^2 \theta} \right) + \frac{m_3^2}{y \cos \theta} + \frac{m_3^2}{y \sin \theta} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.2) obtenemos las normas de los vectores cuyo producto es

$$\|\mathbf{F}_1\| \|\mathbf{q}_{cm}\| = \frac{m_1}{M} \left[\left(\frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{y^2 \cos^2 \theta} \right)^2 + \left(\frac{m_3}{y^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} [(m_2 x + m_3 y \cos \theta)^2 + (m_3 y \sin \theta)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora igualamos esta última expresión con (A.2), y reduciendo términos obtenemos

$$m_2^2 \left[\frac{y \sin \theta}{x^2} - \frac{x}{y^2 \sin^2 \theta} \right]^2 + 2m_2 m_3 \left[\frac{\sin^2 \theta}{x^2} + \frac{x \cos \theta}{y^3 \sin^4 \theta} - \frac{x}{y^3 \cos^2 \theta \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{x^2 \sin \theta} \right] + \frac{m_3^2}{y^2} \left[\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right]^2 = 0,$$

Notemos que esta expresión es un trinomio y lo podemos factorizar como un binomio al cuadrado perfecto cuyo cuadrado es cero, de donde tenemos

$$m_2 \left(\frac{y \sin \theta}{x^2} - \frac{x}{y^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{m_3}{y} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (A.4) y (A.6) obtenemos que el sistema de ecuaciones (A.3) queda expresada como

$$\begin{cases} \frac{y \sin \theta}{x^2} - \frac{x}{y^2 \sin^2 \theta} = 0, \\ \sin \theta = \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

de tal forma que se simplifica en

$$\begin{cases} x = y \operatorname{sen} \theta, \\ \operatorname{sen} \theta = \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Este último sistema de ecuaciones implica $y = z$, lo cual implica que la configuración es un triángulo isósceles.

Realizando un procedimiento similar al fijar alguna de las distancias mutuas y ó z , obtendremos que $x = z$ ó $x = y$ respectivamente, de tal forma que la configuración tendrá que ser un triángulo equilátero.

Por lo tanto, si tres partículas están en configuración central no colineal, ésta deberá tener la forma de triángulo equilátero. $\square$

Apéndice B

Código del recocido simulado para el Caso 5

```
function [ UXYZ ] = cauchy( x,y,z )
k=1;
n=1;
step = 1/2^10;
ss=0;

function [F] = f( a,b,c )
F=12*b^3*a^7+8*b^5*a^3-4*b^7*a^3-12*b^3*a^2+12*b^5*a^2-3*b^5*c^2
-4*b^3*a^4+8*b^3*a^5-8*b^5*a^5+3*b^3*c^2-8*a^7+3*b^2*a^3*c^2
-6*b^3*a^5*c^2+5*b^3*a^2*c^2+b^3*a^3*c^4-4*b^3*a^3+4*a^5
-3*a^3*c^2-8*b^2*a^3-4*b^2*a^5+3*a^5*c^2+4*a^3*b^4-b^3*c^4;
end
function [G] = g( a,b,c )
G=-8*a^5+2*c^3*a^5+3*a^3*c^2+6*c^3*a^3+4*b^2*a^3-2*c^5*a^3
-6*c^3*b^2*a^3-4*a^3+6*c^3*a^2+2*c^3*b^2-2*c^3-c^5;
end
function [H] = h( a,b,c )
H=64*a^7+56*a^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))+24*b^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))-48*a^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*
(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2+224*sqrt(-(4*a^2
-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^6
+64*a^5*c^2*b^2-28*a^5*c^4*b^2+3*a^3*c^6*b^2+4*a^3*b^4*c^4
-4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^4*a^4+32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*b^8-32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
```

$$\begin{aligned}
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^2+4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(\\
& -2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*c^4-4*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^6*b^2 \\
& +8*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*c^4*a^2-24*b^4*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))-32*a^5*c^2-3*a^3*c^6+64*a^7*b^4 \\
& -64*a^9*b^2+3*a^5*c^6+28*a^5*c^4+112*a^9*c^2-32*a^7*c^4 \\
& -60*a^7*c^2-64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1 \\
& +b^4+b^2*c^2))*a^9-32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2 \\
& -2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^4+160*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^6-64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^9*b^2-16*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^9*c^2 \\
& +4*a^3*c^4-8*a^3*c^4*b^2+80*a^7*c^2*b^2-32*a^5*c^2*b^4+96*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^2 \\
& +192*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*b^2*a^4-128*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2 \\
& -2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^3+192*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*b^4+4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^4-128*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*b^2 \\
& -64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*a^5-96*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2 \\
& +1+b^4+b^2*c^2))*a^8+64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2 \\
& -2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7-128*a^7*b^2-96*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^2+64*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^5 \\
& +16*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*a^5*c^2+32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2 \\
& -2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^11+32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3-4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2 \\
& +a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^4-168*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^2*a^4*b^2-8*sqrt(\\
& -(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*c^2*a^2*b^4+32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^2*b^2-24*sqrt(-(4*a^2 \\
& -c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^4*b^2 \\
& +20*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4 \\
& +b^2*c^2))*a^3*b^4*c^4-24*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4 \\
& -2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^4*b^2-160*sqrt(-(4*a^2 \\
& -c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^4+64*sqrt(
\end{aligned}$$

```

-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*b^4
-8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^5*c^4+4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*c^4-88*a^4*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))+64*a^9-128*a^11
-8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^2-48*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2
+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^2*b^4-112*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^2*b^4+48*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^3*c^2
+4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^3*c^6*b^2+48*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^4*b^2*a^2+80*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^3*c^2
+80*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^7*c^2*b^2+16*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*c^2+64*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^5-64*sqrt(-
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*b^6
+32*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^2+40*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2
+1+b^4+b^2*c^2))*c^2*a^6+8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*c^2-16*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^2-128*sqrt(-
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*b^2*a^3;
end
function [w] = fU1(x,y,z)
    w = max([abs(x),abs(y),abs(z)]);
end
minU = 100000000;
minX = 0;
minY = 0;
minZ = 0;
uu = zeros(1000000,1);
T = 1000;
while T>0.0001
    i=x + (unidrnd(3)-2)*step;
    j=y + (unidrnd(3)-2)*step;
    l=z + (unidrnd(3)-2)*step;
    uj = fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));

```

```
ui = fU1(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z));
if uj < ui
    ss=ss+1;
    uu(ss)=fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));
    x=i;
    y=j;
    z=l;
    if minU > uj
        minU = uj;
        minX = x;
        minY = y;
        minZ = z;
    end
else
    volado = unifrnd(0,1);
    p = exp((ui-uj)/T);
    if volado < p
        ss=ss+1;
        uu(ss)=fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));
        x=i;
        y=j;
        z=l;
    end
end
T=10/(1+k);
n=n+1;
k=k+1;
end
UXYZ=[minU,minX,minY,minZ];
end
```

Apéndice C

Código del recocido simulado para el Caso 3

```
function [ UXYZ ] = cauchy3( x,y )
k=1;
n=1;
step = 1/2^10;
ss=0;
    function [F] = f( a,b )
        F=4*a^3-6*a+2*a*b^2-b^3*a^3+6*b^3*a-2*b^5*a-3*b^3+4*b
        -a^2*b-4*b*a^3+b*a^5;
    end
    function [G] = g( a,b )
        G=-12*a^2*b^4+4*a^2*b^6+3*a^4*b^4;
    end
    function [w] = fU1(x,y);%,z)
        w = max([abs(x),abs(y),abs(z)]);
    end
minU = 100000000;
minX = 0;
minY = 0;
%minZ = 0;
uu = zeros(1000000,1);
T = 1000;
while T>0.0001
    i=x + (unidrnd(3)-2)*step;
    j=y + (unidrnd(3)-2)*step;
    %l=z + (unidrnd(3)-2)*step;
```

```
uj = fU1(f(i,j),g(i,j));%h(i,j,1));
ui = fU1(f(x,y),g(x,y));%h(x,y,z));
if uj < ui
    ss=ss+1;
    uu(ss)=fU1(f(i,j),g(i,j));%h(i,j,1));
    x=i;
    y=j;
    %z=1;
    if minU > uj
        minU = uj;
        minX = x;
        minY = y;
        %minZ = z;
    end
else
    volado = unifrnd(0,1);
    p = exp((ui-uj)/T);
    if volado < p
        ss=ss+1;
        uu(ss)=fU1(f(i,j),g(i,j));%h(i,j,1));
        x=i;
        y=j;
        %z=1;
    end
end
end
T=10/(1+k);
n=n+1;
k=k+1;
end
UXYZ=[minU,minX,minY];%minZ];
end
```

Bibliografía

- [1] A. Albouy y A. Chenciner, Le problème des n corps et les distances mutuelles.
- [2] A. Albouy, On a paper of Moeckel on central configurations, *Reg. and Chaotic Dynamics*, **8** (2003), 133-142.
- [3] A. Albouy, Recherches sur le problème des n corps, Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes, Paris, (1997) 78.
- [4] A. Wintner, The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton University Press, 1941.
- [5] Albouy, A., Llibre, J. Spatial central configurations for the $1 + 4$ body problem. *Celestial mechanics* (Evanston, IL, 1999), 1-16, *Contemp. Math.*, **292**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [6] Alvarez, M., Delgado, J., Llibre, J. On the spatial central configurations of the 5-body problem and their bifurcations, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **1** (2008), no. 4, 505-518.
- [7] Eduardo S. G. Leandro, On the Dziobek configurations of the restricted $(N + 1)$ -body problem with equal masses. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **1** (2008), no. 4, 589-595.
- [8] F. R. Moulton, The straight line solutions of the problem of N bodies, *Annals of Mathematics* **12** (1910) 1-17.
- [9] Gannaway, J. R., Determination of All Central Configurations in the Planar Four-Body Problem with One Inferior Mass, Ph.D. thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, 1981.
- [10] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. I-III. Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [11] Hampton, M. y Moeckel, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones mathematicae* **163** (2006), 289-312.

- [12] Hampton, M., Jensen, A. Finiteness of spatial central configurations in the five-body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **109** (2011), no. 4, 321–332.
- [13] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.
- [14] J. Ch. Faugère y I. Kotsireas, Symmetry theorems for the Newtonian 4- and 5-body problems with equal masses, *Computer Algebra in Scientific Computing CASC'99*, Springer-Verlag, 1999, 81-92.
- [15] J.L. Lagrange. *Essai sur le problème des trois corps*. Œuvres, Tome VI. Gauthier-Villars (Paris), 1867-1892 edition, 1772.
- [16] Kotsireas, I., Lazard, D. Central configurations of the 5-body problem with equal masses in three-dimensional space. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 258 (1999), *Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody.* **4**, 292–317, 360–361; traducido en *J. Math. Sci. (New York)* **108** (2002), no. 6, 1119–1138.
- [17] Kuo-Chang Chen. Variational methods and periodic solutions of the Newtonian N -body problem. University of Minnesota, Minneapolis. Ph.D. in Mathematics, Mayo 2001.
- [18] L. Euler, De motu rectilineo trium corporum se mutuo a trahentium, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 11 (1767) 144-151.
- [19] L. M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, Clarendon Press, Oxford (1953).
- [20] M. Berger, *Geometry*, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [21] O. Dziobek, Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems, *Astron. Nach.* 152 (1900) 33-46.
- [22] R. Moeckel, *Notes Celestial Mechanics – especially central configurations*. <http://www.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/CMNotes.pdf>.
- [23] S. Smale, Mathematical Problems for the Next Century, *Mathematical Intelligencer* 20 (1998) No. 2, 7-15.
- [24] S. Smale, Topology and mechanics. I. *Invent. Math.* 10 (1970), 305-331. *Invent. Math.* 11 (1970), 45-64.
- [25] S. Smale, Topology and mechanics. Topology and mechanics. II. The planar n -body problem.

- [26] Santos, A. A. Dziobek's configurations in restricted problems and bifurcation. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **90** (2004), no. 3–4, 213–238.
- [27] Santos, A. A. y Vidal, C. Symmetry of the restricted $4 + 1$ body problem with equal masses, *Regul. Chaotic Dyn.* **12** (2007), no. 1, 27–38.
- [28] Uspensky, Teoría de Ecuaciones. Limusa.
- [29] Y. HAGIHARA, Celestial Mechanics, vol. 1, chap. 3. The MIT Press, Cambridge, 1970.
- [30] Ya-lun Tsai, Dziobek configurations of the restricted $(N + 1)$ -body problem with equal masses. *J. Math. Phys.* **53**, 072902 (2012).

CONFIGURACIONES CENTRALES DE DZIOBEK DE 5CUERPOS CON MASAS IGUALES

ORIGINALITY REPORT

18%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	revistas.ujat.mx Internet	1493 words — 11%
2	ri.ujat.mx Internet	380 words — 3%
3	fourier.usach.cl Internet	157 words — 1%
4	www.dspace.espol.edu.ec Internet	133 words — 1%
5	mat.izt.uam.mx Internet	81 words — 1%
6	www.clubensayos.com Internet	79 words — 1%
7	sociedadmatematicamexicana.org.mx Internet	56 words — < 1%
8	docplayer.es Internet	53 words — < 1%
9	ceur-ws.org Internet	25 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES ON
EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE SOURCES OFF
EXCLUDE MATCHES < 20 WORDS