Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

ESPACIOS CONEXOS Y NUMERABLES

T e s i s

que para obtener el grado de:

MAESTRO
EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

JOSÉ DEL CARMEN
ALBERTO DOMÍNGUEZ

Directores de tesis:

DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA
DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN

Cunduacán, Tabasco, México. Noviembre de 2017.

Carta Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría: "**ESPACIOS CONEXOS Y NUMERABLES**," de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de ésta tesis, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciada más no limitada para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y/o a cualquier otra red académica con las que la universidad tenga relación institucional.

Por lo antes mencionado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 13 días del mes de Noviembre del año 2017.

Autorizó

José del Carmen Alberto Domínguez

142A21005

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

División Académica de Ciencias Básicas

DIRECCIÓN

7 de noviembre de 2017

Lic. José del Carmen Alberto Domínguez
Pasante de la Maestría en Ciencias Matemáticas
Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"Espacios Conexos y Numerables",** en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

Km. 1, Carretera Cunduacán - Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco.
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6701 E-mail: direccion.dacb@ujat.mx

Índice general

Agradecimientos

Estoy convencido que este trabajo, que ahora culmino, no habría sido posible sin la motivación, el entusiasmo, el apoyo, el cariño, el afecto, esfuerzo, etc., que mis padres, familiares, amigos, compañeros, maestros, asesores y todas aquellas personas, aunque no de forma directa, me brindado de buena fe para poder continuar mi carrera y proseguir a la meta. Me siento muy contento de haber llegado hasta este punto de estudio que veía muy lejos de alcanzar. Por eso, en especial, me gustaría agradecerle:

A DIOS. Pues él me ha otorgado vida, dones y experiencias indispensables para que, a través de la ciencia, comprenda el mundo que nos rodea. También, porque ha sido de su voluntad que terminara este trabajo y, que además, pusiera en mi camino a todas aquellas personas que me dieran incondicionalmente su amistad y apoyo para poder lograrlo.

A MIS PADRES. Los Señores Isidro Alberto Collado y Josefa Domínguez por darme tantos consejos y ser para mí un gran soporte a lo largo de todos estos años. Doy también gracias a todos mis hermanos y hermanas que han procurado ayudarme para alcanzar mis sueños.

A MIS MAESTROS. Por ser parte de mi formación académica y por aprender de ellos no solo lo relacionado con la carrera sino también de sus experiencias de estudio, de trabajo y de sus consejos valiosos para mejorar como persona y profesionista.

A MIS ASESORES. Por ser los principales colaboradores en la realización de este trabajo, por estar dispuestos para disipar mis dudas y transmitir sus conocimientos a mí como alumno y tesista. Les agradezco mucho su esfuerzo, dedicación, disposición y entrega, ya que no solamente me han otorgado su apoyo sino también su amistad.

A mis sinodales. Por cada una de las sugerencias y observaciones dadas para mejorar el proyecto presentado y hacer de éste un trabajo muy bueno.

A las instituciones. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT) por todos sus apoyos valiosos que me otorgaron para ingresar, cursar y permanecer en un posgrado de calidad. Más aún, por darme la facilidad de participar y vincularme, con otras universidades del país, en foros y talleres de investigación. Le agradezco también sinceramente al Instituto de Matemáticas de la UNAM (IMATE) por darme la oportunidad de acceder a sus instalaciones y asistir a uno de sus talleres de investigación, tan interesantes, que ahí se imparten, y además, por darme el privilegio de conocer y trabajar con uno de sus reconocidos investigadores en el área de Topología General, el Dr. Gerardo Acosta García, a quien estimo y admiro mucho por su gran aportación para este trabajo de tesis.

A todos ellos les estoy muy agradecido. Les deseo muchos éxitos.

Prefacio

El trabajo se enmarca en una área de las Matemáticas llamada Topología General. Más concretamente, trata sobre los espacios conexos. Podemos decir que un espacio topológico X es *conexo* si sus únicos subconjuntos que son tanto abiertos como cerrados son $\emptyset$ y X. La noción de conexidad, introducida para los subconjuntos compactos del plano, se debe a C. Jordan y fue dada en 1893. Otros matemáticos, como F. Riesz ([20]), N. J. Lennes ([14]) y F. Hausdorff ([9]) presentaron en 1907, 1911 y 1914, respectivamente, generalizaciones de la noción de conexidad dada por C. Jordan, a espacios abstractos. Un estudio riguroso de la conexidad fue dado en 1914 por F. Hausdorff, en su famoso libro [9] y, posteriormente, por B. Knaster y K. Kuratowski en 1921 ([13]). Conviene indicar que la Topología prácticamente como hoy la conocemos, fue estudiada de manera sistemática por F. Hausdorff en 1914, en [9]. Así que el estudio de la conexidad en espacios topológicos, es tan antiguo como el estudio de la Topología misma.

Un aspecto importante, dentro de la Topología, involucra la cardinalidad de un conjunto conexo. Si, por ejemplo, el espacio topológico X es conexo, no vacío y satisface el axioma de separación T_3, entonces posee únicamente un punto o bien tiene una cantidad no numerable de elementos (ver Teorema 1.5.25). Luego del presente resultado, es natural preguntarse si existen espacios conexos con una cantidad infinita y numerable de puntos que, además, posean una propiedad topológica interesante, como satisfacer el axioma de separación T_2 (como veremos en el Capítulo 1, los espacios T_3 son T_2 pero no al revés).

El primer ejemplo de un espacio conexo infinito numerable y T_2, fue dado en 1925 por P. Urysohn en [27]. Su ejemplo es complicado y, partir de entonces fue importante saber si se podían dar ejemplos más sencillos de tales espacios. Por esto entendemos que buscamos ejemplos cuya construcción sea más sencilla. Como comentaremos más a detalle en el Capítulo 1, el presente problema de la conexidad, está ligado al de determinar espacios topológicos X para los que existan funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ que no sean constantes. El ejemplo dado por P. Urysohn es un espacio topológico X en el que toda función continua de X en $\mathbb{R}$ es constante.

En 1946 W. Gustin presentó en [8], dos ejemplos de espacios conexos infinito numerables y T_2. Sus construcciones son menos complicadas que la de P. Urysohn. También en 1946 E. Hewitt notó en [11], que el ejemplo de P. Urysohn no satisface el axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$ (como veremos en el Capítulo 1, los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ son T_2 pero no al revés). Posteriormente, en el mismo artículo construyó un espacio conexo infinito numerable y $T_{2\frac{1}{2}}$. Dicho ejemplo es también un espacio topológico X en el que toda función continua de X en $\mathbb{R}$ es constante.

Los ejemplos de W. Gustin son aritméticos, mientras que el ejemplo de E. Hewitt es complicado. Por tanto, aún permanecía la pregunta de determinar ejemplos más amigables de espacios conexos infinito numerables y T_2. El primer ejemplo de éstos, geométrico y fácil de explicar en una clase de Topología, fue presentado en 1953 por R. H. Bing (ver [2]). En el Capítulo 3 daremos la construcción del ejemplo de R. H. Bing, el cual es T_2, pero no $T_{2\frac{1}{2}}$. Luego del ejemplo de R. H. Bing, ha sido de interés construir otros ejemplos sencillos y geométricos, de espacios conexos infinito numerables y $T_{2\frac{1}{2}}$. En 1977 G. X. Ritter presentó en [21] uno de ellos, modificando la construcción de R. H. Bing.

En 1953, durante el congreso de la Sociedad Matemática Americana, M. Brown presentó un nuevo espacio conexo infinito numerable y T_2. En forma de artículo su ejemplo apareció en un pequeño reporte de cinco líneas, en donde solo se describe el ejemplo y sus propiedades, pero no se dan las respectivas demostraciones. En 1959 S. W. Golomb redescubrió en [7] el ejemplo de M. Brown, el cual presentó a detalle y probó sus respectivas propiedades. Mientras que M. Brown probó la conexidad utilizando ideas topológicas, S. W. Golomb utilizó ideas aritméticas. En el Capítulo 2 analizaremos a detalle este ejemplo y sus propiedades: una de ellas permite probar, de manera topológica, que el conjunto de los números primos es infinito. En 1969 A. M.

Kirch notó en [12] que el ejemplo de M. Brown no es localmente conexo y, posteriormente, lo modificó para construir un ejemplo de un espacio conexo infinito numerable, T_2 y localmente conexo. En el Capítulo 2 del presente trabajo, mostraremos el ejemplo de A. M. Kirch.

En la literatura han seguido apareciendo ejemplos de espacios conexos infinito numerables y T_2, algunos con propiedades adicionales como la homogeneidad o bien retomando la conexidad local pero ahora en un contexto geométrico. De entre los más recientes se encuentran los artículos [23] y [24], publicados en 2010 y 2013, respectivamente, por P. Szczuka. En tales se retoman los ejemplos de S. W. Golomb y de A. M. Kirch pero en un contexto más general. En el Capítulo 2 hablaremos al respecto.

El presente trabajo es lo más autocontenido posible. Hemos dedicado una buena parte del Capítulo 1, a demostrar resultados propios de la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Números y de la Topología, que se utilizarán más adelante. Para probar las propiedades de los espacios de S. W. Golomb y de A. M. Kirch, necesitamos el lenguaje de divisibilidad y congruencias, además de varias de sus propiedades, las cuales mostraremos en la Sección 1.3. En cuanto a la Topología, será importante entender los Axiomas de Separación, la conexidad y la conexidad local. Dedicamos la Sección 1.5 a esto.

Capítulo 1
Nociones Fundamentales

1.1. Introducción

Con la finalidad de lograr una buena comprensión de este trabajo, introduciremos conceptos y resultados que se utilizarán más adelante, propios de la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Números y la Topología General. Hablaremos, por ejemplo, de la cardinalidad de un conjunto, del Teorema Chino del Residuo y del Teorema de Dirichlet, así como de los Axiomas de Separación (en particular el Axioma $T_{2\frac{1}{2}}$ que no suele presentarse en un curso de Topología a nivel Licenciatura), la conexidad, la conexidad local y la conexidad en pequeño (otro de los temas que tampoco suele verse un curso de Topología a nivel Licenciatura). Todo esto nos dará las herramientas para una comprensión clara de los resultados que se obtendrán en los siguientes capítulos. Como se verá en el Capítulo 2, presentaremos una interesante conexión entre la Topología General y la Teoría de Números.

1.2. Teoría de Conjuntos

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números naturales, de los números enteros no negativos (es decir, los números naturales unión el cero), de los números enteros y de los números racionales, respectivamente.

Si A y B son dos conjuntos, los símbolos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \times B$ denotarán la unión de A y B, la intersección de A y B, la diferencia entre A y B, y el producto cartesiano de A y B, respectivamente. Cuando $A \cap B = \emptyset$, diremos indistintamente que A y B son *ajenos* o bien que son *disjuntos*. El conjunto vacío se denotará por el símbolo $\emptyset$.

Definición 1.2.1. *Sean X y Y dos conjuntos arbitrarios.*

1) *Diremos que X y Y son **equipotentes** o **tienen la misma cardinalidad**, si existe una función biyectiva f de X sobre Y.*

2) *X es **numerable** si es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$. En caso contrario diremos que X es **no numerable**.*

3) *X es **infinito numerable** si es equipotente a $\mathbb{N}$.*

Cuando sucede 1) de la definición anterior, escribimos $|A| = |B|$ y decimos que $|A|$, la *cardinalidad* de A, es igual a la cardinalidad de B. Si existe una función inyectiva f de A en B, entonces escribimos $|A| \leqq |B|$, y diremos que la cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad de B. Notemos que dados dos conjuntos A y B tales que $A \subset B$, sucede que $|A| \leqq |B|$, ya que la función inclusión de A en B es inyectiva. En [4, Corolario 7.7, pág. 47] se prueba el Teorema de Schroeder-Bernstein, el cual dice que si $|A| \leqq |B|$ y $|B| \leqq |A|$, entonces $|A| = |B|$.

La cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$ se denota por $\aleph_0$. Así, un conjunto A es infinito numerable si su cardinalidad es $\aleph_0$, y será numerable si su cardinalidad es menor o igual que $\aleph_0$. Decimos que A es *finito* si A es numerable y $|A| \neq \aleph_0$. Entonces un conjunto es numerable si es finito o tiene la cardinalidad de $\mathbb{N}$.

Observación 1.2.2. *Como la identidad es una función biyectiva, la función inversa de una función biyectiva es también biyectiva y la composición de dos funciones biyectivas es una función biyectiva, los conjuntos equipotentes definen una **relación de equivalencia**, es decir la relación de equipotencia es:*

1) ***Reflexiva:** X es equipotente a X, para todo conjunto X.*

2) ***Simétrica:** Si X es equipotente a Y, entonces Y es equipotente a X.*

3) ***Transitiva:** Si X es equipotente a Y y Y es equipotente a Z, entonces X es equipotente a Z.*

Supongamos ahora que X es infinito numerable y que f es una función biyectiva de $\mathbb{N}$ sobre X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f(n) = x_n$. Entonces X puede ser escrito como $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y diremos que $\{x_1, x_2, \ldots\}$ es una *enumeración* de X. Supongamos que X es finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X es equipotente al subconjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbb{N}$. En tal situación, si f es una función biyectiva de $\{1, 2, \ldots, n\}$ a X y, como antes, definimos $f(i) = x_i$ para toda $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, entonces una enumeración de X es $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

A continuación presentamos algunos resultados conocidos, cuyas pruebas serán omitidas, pero pueden ser consultadas en [17, Teorema 7.1, págs. 45 y 46] y [17, Corolario 7.3, pág. 48], respectivamente.

Teorema 1.2.3. *Sea X un conjunto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es numerable.*

b) *Existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

c) *Existe una función inyectiva $g : X \to \mathbb{N}$.*

Teorema 1.2.4. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

De la definición de conjunto numerable, es fácil ver que un conjunto A es numerable si y sólo si existen un conjunto numerable B y una función biyectiva $g : A \to B$. Es decir, un conjunto es numerable si es equipotente a algún conjunto que ya sepamos que es numerable. Combinando esto con el Teorema 1.2.3, resulta que un conjunto X es numerable si y sólo sí existen un conjunto numerable A y una función sobreyectiva $f : A \to X$, o bien una función inyectiva $g : X \to A$.

Como consecuencia del Teorema 1.2.3 se tienen los dos corolarios siguientes, que muestran que las operaciones de unión y producto cartesiano de conjuntos numerables producen conjuntos numerables. Sus pruebas se pueden consultar en [17, Teorema 7.5, pág. 48] y [17, Teorema 7.6, pág. 49], respectivamente.

Corolario 1.2.5. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Corolario 1.2.6. *El producto cartesiano de una cantidad finita de conjuntos numerables es numerable.*

Como aplicación de estos corolarios tenemos el siguiente ejemplo, cuya prueba puede verse en [10, Corolario 7.21, pág. 158].

Ejemplo 1.2.7. *$\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinito numerables.*

Un resultado muy práctico para saber cómo están relacionados los cardinales de dos conjuntos se da en el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [4, Proposición 7.4, pág. 46].

Teorema 1.2.8. *Sean A y B dos conjuntos. Si existe una función sobreyectiva $f : A \to B$, entonces $|B| \leqq |A|$.*

1.3. Teoría de Números

De entre las herramientas que utilizaremos de la Teoría de Números, mencionamos la divisibilidad y las congruencias. Recordemos pues dichos conceptos.

1.3.1. Divisibilidad

Definición 1.3.1. *Sean $c, d \in \mathbb{Z}$ con $c \neq 0$. Decimos que c **divide a** d, si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d = cm$.*

Si c divide a d escribimos $c \mid d$ y, en caso contrario, $c \nmid d$. Notemos que $1 \mid 0$, mientras que $0 \nmid 1$. Notemos también que $1 \mid a$, para cada $a \in \mathbb{Z}$. Cuando es cierto que $c \mid d$, también es común decir que d es un *múltiplo* de c. La relación de divisibilidad $\mid$ es reflexiva y transitiva en $\mathbb{Z}$, es decir,

1) $a \mid a$, para cualquier $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.

En efecto, dada $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sucede que $a = a \cdot 1$ y, en consecuencia, $a \mid a$. Supongamos ahora que $a \mid b$ y $b \mid c$. Entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $b = am$ y $c = bn$. Esto implica que mn es un entero tal que $c = bn = (am)n = a(mn)$, de donde $a \mid c$. Otras propiedades de la divisibilidad son las siguientes:

3) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \mid b$, entonces $a \mid bc$ para todo $c \in \mathbb{Z}$.

4) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b+c)$.

5) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bn+cm)$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$.

En efecto, para probar 3), tomemos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $a \mid b$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = am$. Como $n = mc$ es un entero tal que $bc = (am)c = a(mc) = an$, tenemos que $a \mid bc$. Esto prueba 3). Para verificar 4), supongamos que $a \mid b$ y $a \mid c$. Entonces existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $b = ax$ y $c = ay$. Como $z = x+y$ es un entero tal que $b+c = ax+ay = a(x+y) = az$, resulta que $a \mid (b+c)$, probando así 4). Para verificar 5), supongamos que $a \mid b$ y $a \mid c$. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Por 3), $a \mid bn$ y $a \mid cm$. Usando ahora 4) con estas dos últimas divisibilidades, obtenemos que $a \mid (bn+cm)$, probando así 5).

La propiedad 3) dice que si a divide a b, entonces a divide a cualquier múltiplo de b. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ son tales que $a \mid b$ y $a \mid c$, decimos que a es un *divisor común* de b y c. Si a es un divisor común de b y c y, además, $a > 0$, decimos que a es un *divisor común positivo* de b y c. En estos términos, la propiedad 4) dice que si a es un divisor común de b y c, entonces a divide a la suma de b y c. Ahora bien, si $b, c \in \mathbb{Z}$, entonces cualquier entero z que se pueda escribir en la forma $z = bn + cm$, donde $n, m \in \mathbb{Z}$, se llama *una combinación lineal* de b y c. Si z es una combinación lineal de b y c y, además, $z \geqq 0$, decimos que z es *una combinación lineal positiva* de b y c. En estos términos, la propiedad 5) dice que si a es un divisor común de b y c, entonces a divide a cualquier combinación lineal de b y c (la suma de b y c es, en particular, una combinación lineal de b y c).

Dos propiedades más de la divisibilidad son las siguientes:

6) Si $a, b \in \mathbb{N}$ y $a \mid b$, entonces $a \leqq b$.

7) Si $a, b \in \mathbb{N}$ y, además, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$.

Para probar 6), tomemos $a, b \in \mathbb{N}$ y supongamos que $a \mid b$. Entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = am$. Como a y b son positivos y am es justo b, necesariamente m es positivo. Si $m = 0$, entonces $b = am = a \cdot 0 = 0$, lo cual es un absurdo, pues $b \in \mathbb{N}$. Esto implica que $m \geqq 1$, de donde $am \geqq a \cdot 1$, es decir, $b \geqq a$ o, lo que es lo mismo, $a \leqq b$. Esto prueba 6). Para ver 7), tomemos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \mid b$ y $b \mid a$. Por 6), $a \leqq b$ y $b \leqq a$, así que $a = b$, probando así 7).

Si $a \in \mathbb{Z}$ denotamos por $|a|$ al valor absoluto de a. Recordemos que $|a| = -a$ si $a < 0$ y $|a| = a$ si $a \geqq 0$. Otra propiedad de la divisibilidad dice que si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \mid b$ si y sólo si $|a| \mid |b|$. Por tanto, si así lo deseamos, podemos restringir la noción de divisibilidad al conjunto $\mathbb{N}$. Al realizar tal restricción, la relación de divisibilidad sigue siendo reflexiva y transitiva, pero ahora también es antisimétrica, en vista de la propiedad 7). Por consiguiente, en $\mathbb{N}$, la relación de divisibilidad es una relación de orden.

A continuación vamos a probar dos resultados más de la divisibilidad, los cuales serán utilizados en el Capítulo 2.

Teorema 1.3.2. *Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ son tales que $a \mid b$ y $c \mid d$, entonces $ac \mid bd$.*

Demostración. Como $a \mid b$ y $c \mid d$, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $b = na$ y $d = mc$. En vista de que $x = nm$ es un entero tal que $bd = (na)(mc) = (nm)(ac) = (ac)x$, resulta que $ac \mid bd$. ■

Teorema 1.3.3. *Sean $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Si $m \neq 0$, entonces $a \mid b$ si y sólo si $am \mid bm$.*

Demostración. Supongamos que $a \mid b$. Como $m \neq 0$, sucede que $m \mid m$. Luego $a \mid b$ y $m \mid m$ y, de acuerdo al Teorema 1.3.2 se sigue que $am \mid bm$. Recíprocamente, si $am \mid bm$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $bm = (am)q$. Como $m \neq 0$ podemos cancelar m en la igualdad anterior, obteniendo que $b = aq$. Luego $a \mid b$. ■

1.3.2. Máximo Común Divisor

Dados dos enteros a y b, un concepto importante ligado a ellos, es el que se describe a continuación.

Definición 1.3.4. *El **máximo común divisor** de dos enteros a y b es el único número natural d con las siguientes propiedades:*

1) $d \mid a$ *y* $d \mid b$.

2) *Si* $e \mid a$ *y* $e \mid b$, *entonces* $e \mid d$.

La definición anterior está justificada en vista que si $a, b \in \mathbb{Z}$, en [1, Teorema 1.3, pág. 15], se prueba que existe un único $d \in \mathbb{N}$ con las propiedades 1) y 2) de la Definición 1.3.4. Notemos que dichas propiedades dicen que d es un divisor común positivo de a y b y que d es múltiplo de cualquier otro divisor común de a y b.

Al máximo común divisor de los enteros a y b lo denotaremos por $\langle a, b\rangle$. En la Teoría de Números es común denotar al máximo común divisor de a y b por el símbolo (a, b). Sin embargo, encontramos más conveniente en el presente texto, denotarlo por $\langle a, b\rangle$ pues con demasiada frecuencia utilizaremos el símbolo (a, b) para representar a un punto en un producto cartesiano, incluso a un punto cuyas dos coordenadas son números enteros cuyo máximo común divisor es 1.

De la definición de máximo común divisor, se sigue que

$$\langle a, 1\rangle = 1, \quad \text{para cada } a \in \mathbb{Z}. \tag{1.3.1}$$

En el siguiente resultado, mencionamos una serie de propiedades fundamentales del máximo común divisor.

Teorema 1.3.5. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\langle ma, mb\rangle = m\langle a, b\rangle$.*

2) *Si d es un divisor común positivo de a y b, entonces*

$$\left\langle \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right\rangle = \frac{\langle a, b\rangle}{d}.$$

En particular, si $d = \langle a, b\rangle$, sucede que

$$\left\langle \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right\rangle = 1.$$

Demostración. Hagamos $g = \langle a, b\rangle$. Para probar 1), sean $m \in \mathbb{N}$ y $h = \langle ma, mb\rangle$. Notemos que $g, h \in \mathbb{N}$ justo por ser el máximo común divisor de enteros. Como $g \mid a$ y $g \mid b$, por el Teorema 1.3.3, $mg \mid ma$ y $mg \mid mb$. Luego mg es un divisor común de ma y mb y, como $h = \langle ma, mb\rangle$, sucede que $mg \mid h$. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h = (mg)k$. Como $g, h, m \in \mathbb{N}$ y

$h = mgk$, necesariamente $k \in \mathbb{N}$. Además, como $\langle ma, mb\rangle = (mg)k = m(gk)$, tenemos que $m(gk) \mid ma$ y $m(gk) \mid mb$. Aplicando el Teorema 1.3.3, tenemos que $gk \mid a$ y $gk \mid b$. Entonces gk es un divisor común de a y b y, como $g = \langle a, b\rangle$, sucede que $gk \mid g$. Aplicando de nueva cuenta el Teorema 1.3.3, deducimos que $k \mid 1$. Luego $k = 1$, pues k es un entero positivo. Esto implica que

$$\langle ma, mb\rangle = h = (mg)k = mg = m\langle a, b\rangle.$$

Esto termina la prueba de 1). Para probar 2), sea d un divisor común positivo de a y b. Entonces $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$ y, como $d \in \mathbb{N}$, por 1)

$$d\left\langle \frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\rangle = \left\langle d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right\rangle = \langle a, b\rangle.$$

Despejando d de la igualdad $d\left\langle \frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\rangle = \langle a, b\rangle$, obtenemos la prueba la primera parte de 2). Si $d = \langle a, b\rangle$, entonces d es un divisor común positivo de a y b, por lo que, por la primera parte de 2),

$$\left\langle \frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\rangle = \frac{\langle a, b\rangle}{d} = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, b\rangle} = 1.$$

■

Corolario 1.3.6. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $g = \langle a, b\rangle$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ son tales que $a = gn$ y $b = gm$, entonces $\langle n, m\rangle = 1$.*

Demostración. Como $a = gn$ y $b = gm$, tenemos que $n = \frac{a}{g}$ y $m = \frac{b}{g}$. Entonces, por la segunda parte del 2) del Teorema 1.3.5,

$$\langle n, m\rangle = \left\langle \frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right\rangle = 1.$$

■

El resultado siguiente es conocido como el *Algoritmo de la División*. Una demostración del mismo, puede ser consultada en [18, Teorema 1.2, págs. 11 y 12].

Teorema 1.3.7. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, entonces existen dos enteros únicos q y r, tales que $a = bq + r$ y $0 \leqq r < |b|$.*

Si $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ son tales que $a = bq + r$ (independientemente de si b es diferente de cero, o de si la condición $0 \leqq r < |b|$ que se indica en el Algoritmo de la División, se cumple) entonces, como se prueba en el siguiente resultado, $\langle a, b \rangle = \langle b, r \rangle$.

Teorema 1.3.8. *Supongamos que $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ son tales que $a = bq + r$. Entonces $\langle a, b \rangle = \langle b, r \rangle$.*

Demostración. Sean $g = \langle a, b \rangle$ y $d = \langle b, r \rangle$. Como $g \mid a$ y $g \mid b$, se tiene que g divide a la combinación lineal $a(1) + b(-q)$ de a y b, es decir, $g \mid r$. Entonces $g \mid b$ y $g \mid r$, y como $d = \langle b, r \rangle$, necesariamente $g \mid d$. Ahora bien, como $d = \langle b, r \rangle$, tenemos que $d \mid b$ y $d \mid r$. Luego d divide a la combinación lineal $bq + r(1)$ de b y r, es decir $d \mid a$. Así $d \mid a$ y $d \mid b$, lo que implica que $d \mid g$. Por tanto $g \mid d$ y $d \mid g$, concluyendo que $g = d$, pues ambos g y d son números naturales. ■

El siguiente resultado dice que el máximo común divisor de dos enteros a y b, es una combinación lineal positiva de a y b. Una demostración de esto se puede consultar en [18, Teorema 1.3, pág. 7].

Teorema 1.3.9. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $g = \langle a, b \rangle$, entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $g = an + bm$.*

Teorema 1.3.10. *Si 1 es una combinación lineal de los enteros a y b, entonces $\langle a, b \rangle = 1$.*

Demostración. Sea $d = \langle a, b \rangle$. Entonces $d \mid a$ y $d \mid b$, por lo que d divide a cualquier combinación lineal de a y b. En vista de que 1 es una combinación lineal de a y b, resulta que $d \mid 1$. Ahora bien, como $d \in \mathbb{N}$, de $d \mid 1$ se sigue que $d \leqq 1$. Por tanto $d = 1$. ■

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Decimos que a y b son *primos relativos* si $\langle a, b \rangle = 1$. Como mostraremos en el siguiente resultado, podemos usar el Teorema 1.3.9 para probar que si dos enteros son primos relativos, entonces cualquier divisor de uno de dichos enteros, es primo relativo con el otro entero. Éste es uno de los resultados de la Teoría de Números que encajará favorablemente en el Capítulo 2 pues, como se verá, habremos de verificar que ciertos subconjuntos de $\mathbb{N}$ cumplen propiedades esenciales para definir lo que llamaremos *base* en el sentido topológico. Los siguientes cinco resultados dan este tipo de enfoque para el Capítulo 2.

Teorema 1.3.11. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Si* $\langle a, b\rangle = 1$ *y* $c \mid a$, *entonces* $\langle c, b\rangle = 1$.

Demostración. Como $\langle a, b\rangle = 1$, por el Teorema 1.3.9, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $an + bm = 1$. Como $c \mid a$, existe $t \in \mathbb{Z}$ de manera que $a = ct$. Entonces

$$c(tn) + bm = (ct)n + bm = an + bm = 1.$$

Esto muestra que 1 es una combinación lineal positiva de c y b y, por el Teorema 1.3.10, $\langle c, b\rangle = 1$. ■

Para la prueba del siguiente resultado utilizaremos el siguiente teorema, conocido como la *Propiedad Arquimediana* de $\mathbb{R}$. Una demostración de dicha propiedad, puede verse en [16, Teorema 1.19, pág. 11].

Teorema 1.3.12. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$, *entonces existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$.

Teorema 1.3.13. *Sean* $a, b \in \mathbb{N}$. *Si* $\langle a, b\rangle = 1$, *entonces existen* $x, y \in \mathbb{N}$ *tales que* $ax - by = 1$.

Demostración. Como $\langle a, b\rangle = 1$, por el Teorema 1.3.9, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $an + bm = 1$. Por la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, existen $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ tales que $z_1 b > -n$ y $z_2 a > m$. Sean $z = \max\{z_1, z_2\}$, $x = zb + n$ y $y = za - m$. Entonces $zb > -n$ y $za > m$, por lo que $zb + n > 0$ y $za - m > 0$. Luego $x, y \in \mathbb{N}$ y, además,

$$1 = an + bm = zab + an - zab + bm = a(zb + n) - b(za - m) = ax - by.$$

■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.14. *Sean* $a, b \in \mathbb{N}$. *Si* $\langle a, b\rangle = 1$, *entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existen* $r, s \in \mathbb{N}$ *tales que* $ar - bs = n$.

Demostración. Como $\langle a, b\rangle = 1$, por el Teorema 1.3.13, existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que

$$ax - by = 1. \tag{1.3.2}$$

Sean $n \in \mathbb{N}$, $r = nx$ y $s = ny$. Entonces $r, s \in \mathbb{N}$ y, al multiplicar por n ambos lados de la igualdad en (1.3.2), se sigue que

$$n = nax - nby = a(nx) - b(ny) = ar - bs.$$

■

Teorema 1.3.15. *Supongamos que $b, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ son tales que $\langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle = 1$. Entonces $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. En particular $\langle b, a_1^2 \rangle = \langle b, a_2^2 \rangle = 1$.*

Demostración. Como $1 = \langle b, a_1 \rangle = \langle b, a_2 \rangle$, por el Teorema 1.3.9, existen $n_0, n_1, m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = bn_0 + a_1 m_0$ y $1 = bn_1 + a_2 m_1$. Entonces

$$(a_1 m_0)(a_2 m_1) = (1 - bn_0)(1 - bn_1) = 1 - b(n_1 + n_0 - bn_0 n_1).$$

Haciendo $n = n_1 + n_0 - bn_0 n_1$ y $m = m_0 m_1$, tenemos que $1 = bn + (a_1 a_2)m$. Luego 1 es una combinación lineal de b y $a_1 a_2$ y, por el Teorema 1.3.10, $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. En particular, cuando $a_1 = a_2$, tenemos que $\langle b, a_1^2 \rangle = \langle b, a_2^2 \rangle = 1$. ■

Corolario 1.3.16. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\langle b, a_1 \rangle = \cdots = \langle b, a_n \rangle = 1$. Entonces $\langle b, a_1 a_2 \cdots a_n \rangle = 1$.*

1.3.3. Números Primos

Ahora definiremos una clase relevante de números, la cual servirá para enunciar un resultado de mucha utilidad para el desarrollo de este trabajo: *El Teorema de Factorización Única.*

Definición 1.3.17. *Sea $p \in \mathbb{N}$ con $p \neq 1$. Diremos que p es un **número primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p, en caso contrario, diremos que p es un **número compuesto**.*

El siguiente resultado, cuya demostración es muy sencilla, se utiliza con frecuencia en el presente trabajo.

Teorema 1.3.18. *Sean p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$, entonces $\langle p, a \rangle = 1$. En particular, para cada $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, tenemos que $\langle p, a \rangle = 1$.*

Demostración. Sea $d = \langle p, a\rangle$. Entonces $d \in \mathbb{N}$ y $d \mid p$, de manera que $d = 1$ o bien $d = p$, ya que p es un número primo. Si $d = p$, sucede que $d \mid a$, contradiciendo que $p \nmid a$. Luego $d = 1$ y $\langle p, a\rangle = 1$. Para probar la segunda parte, tomemos $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Entonces $a < p$. Si $p \mid a$, resulta que $p \leqq a$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $p \nmid a$ y, por la primera parte, $\langle p, a\rangle = 1$. ■

Como consecuencia del siguiente resultado, si un número primo divide al producto de una cantidad finita de enteros, entonces divide a uno de ellos.

Teorema 1.3.19. *Sea p un número primo. Entonces, para cada $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $p \mid uv$ se cumple que $p \mid u$ o bien $p \mid v$.*

Demostración. Supongamos que $p \mid uv$ y que $p \nmid u$. Por el Teorema 1.3.18, $\langle p, u\rangle = 1$. Así, por el Teorema 1.3.9, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ para los cuales $1 = pn + um$. Multiplicando por v, tenemos que

$$v = v(pn) + v(um) = p(vn) + (uv)m. \tag{1.3.3}$$

Como p divide uv, tenemos que $uv = ps$, para algún $s \in \mathbb{Z}$. Haciendo $t = vn + sm$, sucede que t es un entero tal que, por (1.3.3), $v = p(vn) + p(sm) = pt$, por lo que $p \mid v$. De forma similar se prueba que si $p \mid uv$ y $p \nmid v$, entonces $p \mid u$. ■

El resultado anterior es un caso particular del siguiente resultado.

Teorema 1.3.20. *Sean a, u, v números enteros tales que $a \mid uv$. Si $\langle a, u\rangle = 1$, entonces $a \mid v$.*

Demostración. Como $a \mid uv$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $uv = az$. Como $\langle a, u\rangle = 1$, por el Teorema 1.3.9, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $am + un = 1$. Multiplicando por v la igualdad anterior, y usando que $uv = az$, tenemos que

$$v = avm + uvn = avm + azn = a(vm + zn).$$

Entonces $d = vm + zn$ es un entero tal que $ad = v$, de donde $a \mid v$. ■

Para ver al Teorema 1.3.19 como un corolario del Teorema 1.3.20 procedemos como sigue: sea p un número primo tal que $p \mid uv$. Si $p \mid u$ o bien $p \mid v$, naturalmente la prueba termina. Si $p \nmid u$, por el Teorema 1.3.18, $\langle p, u\rangle = 1$ y, por el Teorema 1.3.20, $p \mid v$. De manera similar, si $p \nmid v$, por Teorema 1.3.18, $\langle p, v\rangle = 1$ y, por el Teorema 1.3.20, $p \mid u$.

El resultado siguiente es el *Teorema de Factorización Única.*

Teorema 1.3.21. *Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, entonces n se puede expresar como un producto de números primos y la factorización es única salvo por el orden de los factores. Es decir, n se expresa como:*

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}, \tag{1.3.4}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ son números naturales.

Una demostración del resultado anterior, aparece en [1, Teorema 1.10, pág. 17]. La expresión en (1.3.4) suele llamarse *descomposición canónica* de n. Tal representación es única en el sentido que cualquier otra representación de n, simplemente es una permutación de los factores $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$. Cabe mencionar que si p^α es una factor en la descomposición canónica de n, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tal que $p = p_i$, $\alpha = \alpha_i$, $p^\alpha \mid n$ y $p^{\alpha+1} \nmid n$.

Podemos utilizar la descomposición canónica, para calcular el máximo común divisor de dos enteros n y m. Para esto conviene antes extender la noción de "descomposición canónica" como sigue: si un primo que aparece en la descomposión canónica de n, no aparece en la de m, entonces lo agregamos a la de m con exponente cero. Lo mismo hacemos con cada primo que aparezca en la descomposición canónica de m, pero no en la de n. De esta manera, en las "nuevas" descomposiciones canónicas de n y m, aparecerán los mismos primos (algunos con exponente cero). Por tanto, si admitimos que en la descomposición canónica de un entero $n > 1$, como aparece en (1.3.4), los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ pueden ser mayores o iguales a cero, entonces podemos escribir las descomposiciones canónicas de n y m como sigue:

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \quad \text{y} \quad m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ son primos distintos y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\alpha_i, \beta_i \geqq$

0. Por [1, Teorema 1.12, pág. 18],

$$\langle n, m\rangle = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\gamma_i},$$

donde $\gamma_i = \text{mín}\{\alpha_i, \beta_i\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Notemos que los divisores comúnes de n y m, están dados de la forma $\prod_{i=1}^{s} p_i^{\delta_i}$, con $0 \leqq \delta_i \leqq \gamma_i$, para toda $i \in 1, \ldots, s$.

Usando el Teorema de Factorización Única, podemos probar los siguientes resultados que serán de utilidad en el Capítulo 2.

Teorema 1.3.22. *Todo entero distinto de 1 y de -1 es múltiplo de algún número primo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Si $n = 0$, entonces $n = 0 \cdot p$, para cualquier número primo p, y la prueba termina en este caso. Supongamos, por tanto, que $n \neq 0$. Si $n > 1$, por el Teorema de Factorización Única, n es el producto de números primos, siendo así n un múltiplo de cualquiera de esos números primos. Si $n < -1$, de nuevo por el Teorema de Factorización Única, $-n > 1$ es múltiplo de cualquier número primo que aparezca en su descomposición canónica, es decir $-n = mp$, donde p es un número primo en la descomposición canónica de $-n$, y m el producto de los factores primos restantes de $-n$. Así $n = (-m)p$ es múltiplo de un número primo. Por lo tanto todo entero distinto de 1 y -1 es múltiplo de algún número primo. ■

Observemos que el Teorema 1.3.22 implica que todo entero distinto de 1 y -1 es divisible por algún número primo. Un resultado curioso que se obtiene del Teorema 1.3.22, se describe a continuación.

Teorema 1.3.23. *Si $m \in \mathbb{Z}$ es impar, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$*

$$\langle 2^n, m\rangle = 1.$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $g = \langle 2^n, m\rangle$. Si $g > 1$ entonces, por el Teorema 1.3.22, existe un número primo p tal que $p \mid g$. Como g es un divisor común de 2^n y m, tenemos que $p \mid 2^n$ y $p \mid m$. Como $p \mid 2^n$ y p es primo, por el Teorema 1.3.19, $p \mid 2$, luego $p = 2$. Esto implica que el número par p divide al número impar m, lo cual es absurdo. Por lo tanto $g = 1$, de donde $\langle 2^n, m\rangle = 1$. ■

Teorema 1.3.24. *Supongamos que* $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ *es la descomposición canónica de* n. *Sea* b *un entero tal que* $\langle n, b\rangle = 1$. *Entonces*

$$\langle p_1, b\rangle = \langle p_2, b\rangle = \cdots = \langle p_s, b\rangle = 1.$$

Más aún, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ *y cada* $k_i \in \{1, 2, \ldots, \alpha_i\}$, *tenemos que*

$$\langle p_1^{k_1}, b\rangle = \langle p_2^{k_2}, b\rangle = \cdots = \langle p_s^{k_s}, b\rangle = 1.$$

Demostración. Supongamos que $g = \langle p_i^{k_i}, b\rangle > 1$, para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ y una $k_i \in \{1, 2, \ldots, \alpha_i\}$. Por el Teorema 1.3.22 aplicado a g, existe un número primo q tal que $q \mid g$. Como $g \mid p_i^{k_i}$, $g \mid b$ y la divisibilidad es transitiva, tenemos que $q \mid p_i^{k_i}$ y $q \mid b$. Como $q \mid p_i^{k_i}$, por el Teorema 1.3.19, $q \mid p_i$. Luego $p_i = q$, ya que tanto p_i como q son números primos. Como $q \mid b$ y $q = p_i$, tenemos que $p_i \mid b$. Esto implica que p_i es un divisor común de b y n. En vista de que $\langle n, b\rangle = 1$, se tiene que $p_i \mid 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\langle p_i^{k_i}, b\rangle = 1$. ■

Recordemos que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 1.3.25. *Sea* $b \in \mathbb{Z}$. *Si* p *es un número primo tal que* $\langle p, b\rangle = 1$, *entonces para toda* $n, s \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle pn + b, p^s\rangle = 1. \tag{1.3.5}$$

Demostración. Si $s = 0$, por (1.3.1)

$$\langle pn + b, p^s\rangle = \langle pn + b, p^0\rangle = \langle pn + b, 1\rangle = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Si $s = 1$ entonces, como $\langle p, b\rangle = 1$, por Teorema 1.3.8,

$$\langle pn + b, p^s\rangle = \langle pn + b, p\rangle = \langle p, b\rangle = 1, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3.6}$$

Supongamos ahora que existen $s_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $g = \langle pn_0 + b, p^{s_0}\rangle > 1$. Por el Teorema 1.3.22, existe un número primo q para el cual $q \mid g$. Luego $q \mid (pn_0 + b)$ y $q \mid p^{s_0}$, pero al ser p un número primo, por el Teorema 1.3.19, $q = p$. Así, $q \mid (pn_0 + b)$ y $q \mid p$ y, por (1.3.6), $q \mid 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\langle pn + b, p^s\rangle = 1$, para todo $s, n \in \mathbb{N}_0$. Esto termina la demostración. ■

1.3.4. Mínimo Común Múltiplo

A continuación hablaremos del mínimo común múltiplo de dos enteros positivos. Damos por entendido que un entero c es un *múltiplo común* de los enteros a y b, si $a \mid c$ y $b \mid c$.

Definición 1.3.26. *El* ***mínimo común múltiplo*** *de dos enteros positivos a y b es el único número natural m con las siguientes propiedades:*

1) $a \mid m$ *y* $b \mid m$.

2) *Si* $a \mid e$ *y* $b \mid e$, *entonces* $m \mid e$.

Por tanto, el mínimo común múltiplo de los enteros positivos a y b es el único número natural que es un múltiplo común de a y b y, a la vez, es un divisor de cualquier otro múltiplo común de a y b. La definición anterior está justificada en vista del siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [15, Teorema 2-7, pág. 35].

Teorema 1.3.27. *Sean a y b enteros positivos. Entonces el entero*

$$[a,b] = \frac{ab}{\langle a,b\rangle} \tag{1.3.7}$$

tiene las siguientes propiedades:

1) $[a,b] > 0$.

2) $a \mid [a,b]$ *y* $b \mid [a,b]$.

3) *Si* $a \mid e$ *y* $b \mid e$, *entonces* $[a,b] \mid e$.

Por tanto, $[a,b]$, calculado como en (1.3.7), es el mínimo común múltiplo de los enteros positivos a y b. Cabe mencionar que si a y b son tales que $\langle a,b\rangle = 1$ entonces, por (1.3.7), resulta que $[a,b] = ab$.

La siguiente propiedad del mínimo común múltiplo es la correspondiente a la dada en 1) del Teorema 1.3.5 para el máximo común divisor, la cual se demuestra directamente por la expresión del mínimo común en (1.3.7) del Teorema 1.3.27. Veamos pues dicha propiedad.

Teorema 1.3.28. *Sean $a,b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces*

$$[ma,mb] = m[a,b], \quad \textit{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la expresión dada en (1.3.7) del Teorema 1.3.27, tenemos que

$$[ma, mb] = \frac{(ma)(mb)}{\langle ma, mb\rangle}.$$

Como $m \in \mathbb{N}$, la parte 1) del Teorema 1.3.5 garantiza que $\langle ma, mb\rangle = m\langle a, b\rangle$. En vista de esto, se sigue que

$$\begin{aligned} [ma, mb] &= \frac{(ma)(mb)}{\langle ma, mb\rangle} = \frac{m^2(ab)}{m\langle a, b\rangle} = m\left(\frac{ab}{\langle a, b\rangle}\right) \\ &= m[a, b]. \end{aligned}$$

■

Para dos enteros a y b, podemos definir el mínimo común múltiplo de a y b, como el mínimo común múltiplo de $|a|$ y $|b|$, los valores absolutos de a y b, respectivamente.

1.3.5. Enteros Libres de Cuadrados

En la presente sección veremos la noción de entero libre de cuadrados y, entre otros resultados, probaremos que el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos enteros libres de cuadrados, son enteros libres de cuadrados. También mostraremos una condición necesaria y suficiente para que el producto de dos enteros libres de cuadrados, sea un entero libre de cuadrados. Una buena parte de los resultados presentados en esta sección, se utilizarán en la última sección del Capítulo 2.

Definición 1.3.29. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Decimos que n es* ***libre de cuadrados*** *si n no posee factores primos repetidos, es decir, si para cada número primo p que divide a n, sucede que p^2 no divide a n.*

Naturalmente cualquier número primo es libre de cuadrados. De la Definición 1.3.29 se observa que, si n es libre de cuadrados y

$$n = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

es su descomposición canónica, forzosamente ningún p_i puede tener una potencia mayor que 1, es decir cada α_i es menor que dos. Como además todos los enteros α_i son positivos, resulta que $\alpha_i = 1$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Esto significa que un entero n es libre de cuadrados si y sólo si su descomposición canónica esta dada por

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s,$$

donde, por supuesto, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ son primos distintos. Aunque para determinar si un número natural dado es libre de cuadrados, debemos suponer primero que tal natural es mayor que cero, en el presente texto consideraremos que el número natural 1 es, por vacuidad, libre de cuadrados.

Proposición 1.3.30. *Si a y b son enteros libres de cuadrados, entonces $\langle a, b\rangle$ es libre de cuadrados.*

Demostración. Sea $g = \langle a, b\rangle$. Si $g = 1$, por vacuidad sucede que g es libre de cuadrados. Supongamos, por tanto, que $g > 1$. Por el Teorema de Factorización Única, existen números primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ para los cuales

$$g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

donde α_i es un entero positivo, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Probemos que cada α_i es igual a 1. Supongamos que existe $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\alpha_j > 1$. Como $p_j^{\alpha_j}$ divide a g y g es un común divisor de a y b, tenemos que $p_j^{\alpha_j} \mid a$ y $p_j^{\alpha_j} \mid b$. Esto es una contradicción, pues a y b son enteros libres de cuadrados, y p_j es un número primo que es un divisor común de a y b. Así se tiene que $\alpha_i = 1$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Por tanto g es un entero libre de cuadrados. ■

También se puede probar el resultado anterior como sigue: como a y b son libres de cuadrados, existen números primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ tales que

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{y} \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, son las respectivas descomposiciones canónicas de a y b. Luego

$$\langle a, b\rangle = p_1^{\text{mín}\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\text{mín}\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_s^{\text{mín}\{\alpha_s, \beta_s\}}.$$

Como cada α_i y toda β_i toma el valor 0 o bien 1, la igualdad anterior tiene la forma $\langle a, b\rangle = q_1 q_2 \cdots q_r$, donde $q_1, q_2, \ldots, q_r$ son números primos distintos. Por tanto, $\langle a, b\rangle$ es libre de cuadrados.

En relación a la Proposición 1.3.30, si a y b son libres de cuadrados, entonces cualquier divisor común de a y b también es libre de cuadrados, pues cualquier divisor común de a y b divide al máximo común divisor de estos enteros, el cual es libre de cuadrados, como hemos demostrado. En consecuencia tenemos el resultado siguiente.

Corolario 1.3.31. *Si a y b son enteros libres de cuadrados, entonces cualquier divisor común de a y b es libre de cuadrados.*

De acuerdo a la Proposición 1.3.30 es natural preguntarse si cuando a y b son enteros cuyo máximo común divisor es libre de cuadrados, sucede que a y b son libres de cuadrados. Desafortunadamente esto no es cierto; por ejemplo, para los enteros

$$126 = 2\cdot 3^2\cdot 7 \quad \text{y} \quad 84 = 2^2\cdot 3\cdot 7,$$

su máximo común divisor

$$\langle 126, 84\rangle = 2\cdot 3\cdot 7 = 42$$

es libre de cuadrados, pero obviamente 126 y 84 no son libres de cuadrados.

Es claro que el producto de dos enteros libres de cuadrados, no tiene por que ser libre de cuadrados. Sin embargo, cuando dichos enteros son primos relativos sucede, como probaremos a continuación, que dos enteros son libres de cuadrados si y sólo si su producto es libre de cuadrados.

Teorema 1.3.32. *Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces ab es libre de cuadrados si y sólo si a y b son libres de cuadrados y $\langle a, b\rangle = 1$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Supongamos primero que ab es libre de cuadrados. Para ver que a es libre de cuadrados supongamos, por el contrario, que existe un número primo p tal que $p^2 \mid a$. Como $p^2 \mid a$ y $1 \mid b$, por el Teorema 1.3.2, $p^2 \mid ab$. Tenemos entonces que p es un número primo tal que $p \mid ab$ y $p^2 \mid ab$, lo cual contradice el hecho de que ab es libre de cuadrados. Esto prueba que a es libre de cuadrados. De manera similar probamos que b es libre de cuadrados. Para ver que $\langle a, b\rangle = 1$, supongamos que existe un número primo q tal que

$$q \mid a \quad \text{y} \quad q \mid b.$$

Entonces, por el Teorema 1.3.2, $q^2 \mid ab$. Esto prueba que q es un factor primo de ab que se repite dos veces, contradiciendo el hecho que ab es libre de cuadrados. Así a y b son primos relativos. Por lo tanto a y b son enteros libres de cuadrados y $\langle a, b \rangle = 1$.

Supongamos ahora que a y b son enteros libres de cuadrados y que $\langle a, b \rangle = 1$. Supongamos, también, que existe un número primo q tal que $q^2 \mid ab$. Como $q \mid ab$ y q es primo, por el Teorema 1.3.19, $q \mid a$ o bien $q \mid b$. Si $q \mid a$, necesariamente $q \nmid b$, pues $\langle a, b \rangle = 1$. Entonces $\langle q, b \rangle = 1$ y, por el Teorema 1.3.15, $\langle q^2, b \rangle = 1$. Ahora bien, como $q^2 \mid ab$ y $\langle q^2, b \rangle = 1$, por el Teorema 1.3.20, $q^2 \mid a$. Así que q es un factor primo de a que se repite dos veces, contradiciendo que a es libre de cuadrados. Si $q \mid b$, procediendo de manera similar, tenemos que q es un factor primo de b tal que $q^2 \mid b$, contradiciendo que b es libre de cuadrados. Con esto demostramos que no existe un número primo que divida ab y cuyo cuadrado también lo divida. Por lo tanto ab es libre de cuadrados. ■

Corolario 1.3.33. *Si $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un múltiplo positivo de a es libre de cuadrados, entonces a es libre de cuadrados.*

Demostración. Supongamos que e es un múltiplo positivo de a y que e es libre de cuadrados. Entonces $e = ab$, para algún $b \in \mathbb{N}$. Si $b = 1$, entonces $e = a$, por lo que a es libre de cuadrados. Si $b > 1$, entonces como $e = ab$ es libre de cuadrados, por el Teorema 1.3.32, a es libre de cuadrados. ■

En la misma forma que enunciamos la Proposición 1.3.30, se puede también dar un resultado análogo para el mínimo común múltiplo de dos enteros libres de cuadrados. Veamos pues este resultado.

Teorema 1.3.34. *Si a y b son enteros libres de cuadrados, entonces $[a, b]$ es libre de cuadrados.*

Demostración. Como a y b son libres de cuadrados, tenemos que $a > 1$ y $b > 1$. Luego $[a, b] = \dfrac{ab}{\langle a, b \rangle} > 1$. Sea $g = \langle a, b \rangle$. Si $g = 1$, entonces $[a, b] = \dfrac{ab}{\langle a, b \rangle} = \dfrac{ab}{g} = ab$ y, por el Teorema 1.3.32, $ab = [a, b]$ es libre de cuadrados. Supongamos, por tanto que $g \neq 1$. Como $g \in \mathbb{N}$ tenemos entonces que $g > 1$. Además, $g \mid a$ y $g \mid b$, por lo que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $a = gm$ y $b = gn$. Debido a que a, b y g son números naturales, tenemos que

$m, n \in \mathbb{N}$. Si $m = 1$, entonces $a = gm = g$ y $[a, b] = \dfrac{ab}{g} = \dfrac{ab}{a} = b$ es libre de cuadrados. De manera similar si $n = 1$, entonces $b = g$ y $[a, b] = \dfrac{ab}{g} = \dfrac{ab}{b} = a$ es libre de cuadrados.

Supongamos, por tanto que $m, n > 1$. Como a y b son libres de cuadrados, $a = gm$ y $b = gn$, por el Teorema 1.3.32, m, n y g son libres de cuadrados y, además, $\langle g, m\rangle = \langle g, n\rangle = 1$. Esto implica, por el Teorema 1.3.15, que $\langle g, mn\rangle = 1$. Por otro lado, el Corolario 1.3.6 garantiza que $\langle m, n\rangle = 1$ así que

$$[m, n] = \frac{mn}{\langle m, n\rangle} = mn.$$

Entonces por el Teorema 1.3.28,

$$[a, b] = [gm, gn] = g[m, n] = gmn. \tag{1.3.8}$$

Ahora bien, como m y n son libres de cuadrados y $\langle m, n\rangle = 1$, por el Teorema 1.3.32, mn es libre de cuadrados. Como además $\langle g, nm\rangle = 1$ y g es libre de cuadrados, de nuevo por el Teorema 1.3.32, gmn es libre de cuadrados. Esto y (1.3.8) indican que $[a, b]$ es libre de cuadrados. ■

De las proposiciones anteriores, tenemos que el mínimo común múltiplo de dos enteros libres de cuadrados, es el producto de dos enteros, primos relativos y libres de cuadrados.

Corolario 1.3.35. *Sean a y b enteros libres de cuadrados. Entonces $[a, b]$ es el producto de dos enteros libres de cuadrados con máximo común divisor igual a 1.*

Demostración. Como $[a, b] > 1$ es un múltiplo común de los enteros a y b, mayores que uno, existen enteros n y m, mayores que uno, para los cuales

$$[a, b] = an \quad \text{y} \quad [a, b] = bm.$$

Por el Teorema 1.3.34, $[a, b]$ es libre de cuadrados. Entonces an y bm son libres de cuadrados y, por el Teorema 1.3.32, n y m son libres de cuadrados y, además, $\langle a, n\rangle = \langle b, m\rangle = 1$. Esto prueba que $[a, b]$ es el producto de dos enteros libres de cuadrados con máximo común divisor 1. ■

Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Como mostraremos en el siguiente resultado, basta con que un múltiplo común de a y b sea libre de cuadrados, para concluir que a y b son libres de cuadrados. En particular, si $[a, b]$ es libre de cuadrados, entonces a y b son libres de cuadrados, por lo que el recíproco de la Proposición 1.3.34 también es cierto.

Proposición 1.3.36. *Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si e es un múltiplo positivo común de a y b y e es libre de cuadrados, entonces a y b son libres de cuadrados. En particular, si $[a, b]$ es libre de cuadrados, entonces a y b son libres de cuadrados.*

Demostración. Como e es un múltiplo positivo de a y e es libre de cuadrados, por el Corolario 1.3.33, a es libre de cuadrados. De manera similar, como e es un múltiplo positivo de b y e es libre de cuadrados, nuevamente por el Corolario 1.3.33, b es libre de cuadrados. Como $[a, b]$ es un múltiplo positivo común de a y b, en particular hemos probado que si $[a, b]$ es libre de cuadrados, entonces a y b son libres de cuadrados. ■

En conclusión a las proposiciones anteriores, tenemos el resultado siguiente.

Corolario 1.3.37. *Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces a y b son libres de cuadrados si y sólo si algún múltiplo positivo común de a y b es libre de cuadrados.*

1.3.6. Congruencias

Ahora veamos algunos resultados importantes con respecto a las congruencias numéricas, de entre los cuales enunciamos El Teorema Chino del Residuo, resultado y herramienta importante para comprender las topologías de Golomb y de Furstenberg que más adelante definiremos.

16

Definición 1.3.38. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si m divide a la diferencia $a - b$, se dice que a* ***es congruente con*** *b* ***módulo*** *m.*

1

Si a es congruente con b módulo m, escribimos $a \equiv b \pmod{m}$, de lo contrario simplemente diremos que a y b no son congruentes módulo m, y lo denotaremos por $a \not\equiv b \pmod{m}$. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, la relación de congruencia módulo m, denotada por el símbolo $\equiv_m$, es de equivalencia, tal y como se indica en el siguiente teorema, cuya prueba puede consultarse en [15, Teorema 3-1, pág. 36]. Mientras no entren en un mismo contexto dos congruencias, podemos denotar la relación $\equiv_m$ simplemente por $\equiv$.

Teorema 1.3.39. *Para cada* $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *la relación* $\equiv$ *es de equivalencia en* $\mathbb{Z}$, *es decir, si* $a, b \in \mathbb{Z}$ *entonces*

1) $a \equiv a \pmod{m}$.

2) *Si* $a \equiv b \pmod{m}$, *entonces* $b \equiv a \pmod{m}$.

3) *Si* $a \equiv b \pmod{m}$ *y* $b \equiv c \pmod{m}$, *entonces* $a \equiv c \pmod{m}$.

Es sabido, en vista del Teorema 1.3.39 y lo que conocemos de relaciones de equivalencia, que el conjunto $\mathbb{Z}$ queda partido en clases de equivalencia. Esto es, si $a \in \mathbb{Z}$ y

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} \colon a \equiv b \pmod{m}\}$$

es la *clase de equivalencia de* a, módulo m, entonces

$$\mathbb{Z} = \bigcup \{[a] \colon a \in \mathbb{Z}\}.$$

Se conoce, además, que $a \in [a]$ para todo entero a. Además cada elemento de $[a]$ se llama *representante* de $[a]$. Más aún,

1) $[a] = [b]$ si y sólo si $a \equiv b \pmod{m}$.

2) $[a] \cap [b] = \emptyset$ si y sólo si $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Es conocido, por la forma en que se define $\equiv$, que dado $a \in \mathbb{Z}$

$$[a] = \{a + mk \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

También puede mostrarse que $\mathbb{Z}$ se divide en justo m clases distintas, a saber

$$[0], [1], [2], \ldots, [m-1].$$

Una prueba de este resultado se encuentra en [1, Teorema 5.10 (c), pág. 110]. En relación a este hecho damos la siguiente definición.

Definición 1.3.40. *Sea* $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Un conjunto* A *de* m *números enteros es un* ***sistema completo de residuos*** *módulo* m *si cada elemento de* A *es un representante de una y sólo una de las clases* $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

De la Definición 1.3.40, notamos que si x y y son dos enteros distintos en A, entonces x y y no pueden ser congruentes entre sí módulo m, pues las clases de equivalencia $[0], [1], \ldots, [m-1]$ son todas distintas.

Ejemplo 1.3.41. *Los conjuntos de m números enteros*

1) $A = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

2) $B = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

son ejemplos de sistemas completos de residuos módulo m.

En efecto, solo basta con observar que cada uno de sus elementos es un representante que corresponde a una sola de las clases $[0], [1], [2], \ldots, [m-1], [m]$.

Teorema 1.3.42. *Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Entonces:*

1) *Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces*

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

En particular, $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $a + x \equiv b + x \pmod{m}$, para cualquier entero x.

2) *Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $d \mid m$, con $d > 1$, entonces $a \equiv b \pmod{d}$.*

3) *Si $c \in \mathbb{N}$, entonces*

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \textit{si y sólo si} \quad ac \equiv bc \pmod{mc}.$$

Demostración. Veamos 1). Como $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, se tiene que $m \mid a - b$ y $m \mid b - c$. Luego m divide a la combinación lineal $(a-b) + (c-d)$ de $a - b$ y $c - d$, es decir $m \mid (a+c) - (b+d)$. Esto implica que $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. Así queda probada la primera parte de 1). Para demostrar la segunda parte de 1), tomemos $x \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $a \equiv b \pmod{m}$. Como la relación de congruencia $\equiv$ es reflexiva se sigue que $x \equiv x \pmod{m}$. Entonces, como $a \equiv b \pmod{m}$ y $x \equiv x \pmod{m}$, se tiene que

$$a + x \equiv b + x \pmod{m}$$

por la primera parte del 1). Esto termina la prueba de 1).

Recíprocamente, supongamos que $a + x \equiv b + x \pmod{m}$ para cualquier entero x. Si, en particular, consideramos $x = 0$ entonces

$$a + 0 \equiv b + 0 \pmod{m}, \text{ es decir } a \equiv b \pmod{m}.$$

Por tanto obtenemos el resultado buscado.

Ahora probemos 2). Como $a \equiv b \pmod{m}$, se sigue que $m \mid a - b$. Pero, al tenerse que $d \mid m$, $d \mid a - b$ por la transitividad de la divisibilidad. Al ser $d > 1$, concluimos que $a \equiv b \pmod{d}$. Así queda demostrado 2).

Por último demostremos 3). Para esto observemos lo siguiente: como $c \in \mathbb{N}$, el Teorema 1.3.3 garantiza que

$$m \mid a - b \text{ si y sólo si } mc \mid (a - b)c.$$

Como $mc > 1$ y $(a - b)c = ac - bc$, la equivalencia anterior indica que $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $ac \equiv bc \pmod{mc}$. Esto prueba 3). ∎

Decimos que los enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ son *primos relativos dos a dos* si para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, los enteros m_i y m_j son primos relativos, es decir, $\langle m_i, m_j \rangle = 1$. La prueba del siguiente resultado, llamado *El Teorema Chino del Residuo*, se puede consultar en [1, Teorema 5.26, págs. 117 y 118].

Teorema 1.3.43. *Todo sistema de congruencias lineales del tipo*

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1} \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2} \quad \cdots \quad x \equiv a_n \pmod{m_n},$$

en los cuales los módulos son primos relativos dos a dos, tiene una única solución con módulo igual al producto de los módulos. Es decir, existe un único entero a tal que $x \equiv a \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$.

A continuación presentamos un resultado fuerte que pertenece a la Teoría Analítica de Números, llamado *El Teorema de Dirichlet*. En el Capítulo 2 veremos que este resultado es equivalente a un resultado expresado en términos topológicos.

Teorema 1.3.44. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $b > 1$ y $\langle a, b \rangle = 1$. Entonces existe una cantidad infinita de números primos p para los cuales $p \equiv a \pmod{b}$.*

La prueba del Teorema de Dirichlet utiliza las propiedades de ciertas funciones multiplicativas y varios resultados sobre aritmética de números complejos. En vista de que es suficientemente compleja, no suele incluirse en textos clásicos de Teoría de Números. Una prueba detallada se puede consultar en [1, Sección 7.3, pág. 148].

1.4. Álgebra Moderna

Sea X un conjunto no vacío. Una *operación binaria* en X es una función $\cdot\colon X \times X \to X$. Si $\cdot$ es una operación binaria en X y $x, y \in X$, es común escribir $x \cdot y$ en lugar de $\cdot(x, y)$. Incluso es más habitual escribir xy en lugar de $x \cdot y$, cuando no queremos hacer mención explícita de la operación binaria en cuestión. En este trabajo utilizaremos algunas estructuras algebraicas que se estudian en cursos de Álgebra Moderna, así como de la notación estándar con la que se trabaja en dicha rama de las Matemáticas.

Un *semigrupo* es un conjunto X con una operación binaria $\cdot$ que es asociativa, es decir, tal que para cada $x, y, z \in X$ se cumple que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Si X es un semigrupo y $A, B \subset X$ entonces el símbolo $A \cdot B$ denota el conjunto $\{a \cdot b\colon a \in A \text{ y } b \in B\}$. Si A posee un solo elemento, digamos a, entonces escribimos $a \cdot B$ en lugar de $\{a\} \cdot B$. Incluso podemos escribir aB en lugar de $a \cdot B$, si no queremos hacer referencia explícita de la operación binaria $\cdot$.

Si X es un semigrupo y $A \subset X$, decimos que A es un *sub-semigrupo* de X, si la operación binaria que definimos en X, es cerrada en A, es decir, si $A \cdot A \subset A$.

Si un conjunto X posee dos operaciones binarias, digamos $\cdot$ y $+$, y si $A, B, C \subset X$, entonces podemos decir que el símbolo $A \cdot B + C$ denota al conjunto

$$\{a \cdot b + c\colon a \in A, b \in B \text{ y } c \in C\}.$$

Dicho conjunto se puede denotar simplemente como $AB + C$ si no queremos hacer referencia explícita de la operación binaria $\cdot$ y, si $A = \{a\}$ podemos escribir $aB+C$ en lugar de $\{a\}B+C$. Si $A = \{a\}$ y $C = \{c\}$, podemos escribir $aB + c$, en lugar de $\{a\}B + \{c\}$. Naturalmente $aB + c = \{ab + c\colon b \in B\}$.

1.5. Topología General

Pasemos ahora a la parte de Topología General, enunciando definiciones y resultados específicos que utilizaremos en los siguientes capítulos.

Definición 1.5.1. *Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1) $\emptyset, X \in \tau$.

2) *Si* $A, B \in \tau$, *entonces* $A \cap B \in \tau$.

3) *Si* $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia de elementos de* τ, *entonces* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

*A τ se le llama una **topología** en X, a los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos** de X. A los complementos de los elementos de τ, se les llama **conjuntos cerrados** de X.*

Notemos que $A \subset X$ es cerrado en X si y sólo si $X \setminus A$ es abierto en X. Por las Leyes de De Morgan, la familia de los subconjuntos cerrados de X satisface las siguientes propiedades:

a) $\emptyset$ *y* X *son cerrados en* X.

b) *Si* A *y* B *son cerrados en* X, *entonces* $A \cup B$ *es cerrado en* X.

c) *Si* $\{B_i : i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos cerrados de* X, *entonces* $\bigcap_{i \in I} B_i$ *es cerrado en* X.

Observemos que $\emptyset$ y X son tanto abiertos como cerrados en X. Más adelante veremos que, en general, en un espacio topológico un subconjunto no vacío y propio puede ser abierto y cerrado.

Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces la familia

$$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$$

es una topología en A. Decimos que el espacio topológico (A, τ_A) es un *subespacio* de (X, τ). También diremos que τ_A es la *topología relativa* de X al subconjunto A.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $A \subset X$, entonces el conjunto

$$\mathrm{cl}_{(X,\tau)}(A) = \bigcap\{B \subset X \colon B \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset B\}$$

se llama la *cerradura* de A en X. Para simplificar, si no queremos hacer mención explícita de la topología τ de X, denotamos $\mathrm{cl}_{(X,\tau)}(A)$, simplemente por $\mathrm{cl}_X(A)$. Notemos que $\mathrm{cl}_X(A)$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a A. Es, de hecho, el subconjunto cerrado más pequeño de X que contiene a A. Se puede probar que $p \in \mathrm{cl}_X(A)$ si y sólo si, para cada abierto U en X con $p \in U$, sucede que $U \cap A \neq \emptyset$ (ver [5, Proposición 1.1.1, págs. 13 y 14]). Por otro lado, el conjunto

$$\mathrm{int}_{(X,\tau)}(A) = \bigcup\{V \subset X \colon V \text{ es abierto en } X \text{ y } V \subset A\}$$

se llama el *interior* de A en X. Como antes, para simplificar, cuando no queramos hacer mención explícita de la topología τ de X, denotaremos $\mathrm{int}_{(X,\tau)}(A)$ por $\mathrm{int}_X(A)$. Notemos que $\mathrm{int}_X(A)$ es un subconjunto abierto de X que está contenido en A. Es, de hecho, el subconjunto abierto más grande de X que está contenido en A. No es difícil probar que $p \in \mathrm{int}_X(A)$ si y sólo si existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset A$.

Definición 1.5.2. *Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos y $f \colon X \to Y$ una función. Entonces f es* **continua** *si para cada subconjunto abierto V en Y (es decir, cada $V \in \sigma$), el conjunto*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \colon f(x) \in V\}$$

es abierto en X (es decir, $f^{-1}(V) \in \tau$).

1.5.1. Bases y Bases de Vecindades

Definición 1.5.3. *Una* **base** *de un espacio topológico (X, τ), es una familia $\mathcal{B}$ de elementos de τ tal que cada abierto en X se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Si $\mathcal{B}$ es una base del espacio topológico (X, τ), es común decir que $\mathcal{B}$ es una base de τ y también se suele decir que $\mathcal{B}$ es una base de X. Esto último debido a que, cuando no queremos o no necesitamos especificar la topología τ del espacio topológico (X, τ), podemos simplemente denotar por X a la pareja (X, τ). En el presente texto haremos uso de estas convenciones.

La *topología usual* de la recta real $\mathbb{R}$ es la que tiene por base a la familia de los intervalos abiertos

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. El intervalo cerrado $[0, 1]$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y, a menos que digamos explícitamente lo contrario, consideraremos que $[0, 1]$ posee la topología relativa de $\mathbb{R}$ a $[0, 1]$.

A continuación vamos a mostrar un criterio, bajo el cual, una familia dada de subconjuntos de un espacio topológico X, es una base de X.

Teorema 1.5.4. *Supongamos que X es un conjunto y que $\mathcal{B}$ es una familia no vacía de subconjuntos de X. Si $\mathcal{B}$ es base de una topología τ en X, entonces $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:*

B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

B2) *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Además si $\mathcal{B}$ satisface B1) *y* B2)*, entonces la familia*

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset X \colon U \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}\}$$

es una topología en X que tiene a $\mathcal{B}$ como base.

Demostración. Antes de probar el teorema, notemos que la condición B1) dice que el total, X, es la unión de *todos* los elementos de $\mathcal{B}$. En forma equivalente, B1) dice que para cada $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Esto es, dado un punto de X, existe un elemento de $\mathcal{B}$ que tiene a dicho punto. La condición B2) dice que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Para demostrar el teorema, supongamos primero que $\mathcal{B}$ es base de una topología τ en X. Entonces $X \in \tau$ y, además, X es una unión de elementos de $\mathcal{B}$. Por tanto existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. Como $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, deducimos que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ satisface B1). Para ver que también satisface B2), supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y que $x \in B_1 \cap B_2$. Como $\mathcal{B} \subset \tau$ y τ es una topología, tenemos que $B_1 \cap B_2 \in \tau$. Utilizando el hecho de que $\mathcal{B}$ es una base para τ, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ satisface B2) y termina la primera parte de la demostración.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ satisface B1) y B2). Definimos:

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset X : U \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

Vamos a probar primero que $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología en X. Como $\mathcal{B}$ satisface B1), tenemos que $X \in \tau_{\mathcal{B}}$. Además, como cada elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$, cualquier unión de elementos de $\tau_{\mathcal{B}}$ es, a su vez, una unión de elementos de $\mathcal{B}$. Esto prueba que $\tau_{\mathcal{B}}$ es cerrado bajo uniones arbitrarias. Supongamos ahora que $U, V \in \tau_{\mathcal{B}}$. Entonces existen $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ tales que

$$U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Notemos que para cada $C \in \mathcal{C}$ y toda $D \in \mathcal{D}$, por la propiedad B2), la intersección $C \cap D$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$. Es decir $C \cap D \in \tau_{\mathcal{B}}$. Además

$$U \cap V = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \right) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} (C \cap D).$$

Por tanto $U \cap V$ es una unión de uniones de elementos en $\mathcal{B}$. Luego $U \cap V \in \tau_{\mathcal{B}}$. Esto prueba que $\tau_{\mathcal{B}}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. El hecho de que el vacío está en $\mathcal{B}$ se sigue de que

$$\bigcup_{B \in \emptyset} B = \emptyset.$$

Entonces $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología en X. Como $\mathcal{B} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ y, por definición, cada elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{B}$ es una base de $\tau_{\mathcal{B}}$. ∎

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.5.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que:*

1) *Un subconjunto A de X es **una vecindad de** x en (X, τ) si podemos encontrar un conjunto abierto U en (X, τ) que satisfaga*

$$x \in U \subset A.$$

A la colección de vecindades de x en X la denotaremos por $\mathcal{V}(x)$.

2) *Una colección $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ es* ***una base de vecindades de*** *x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset V$.*

De la definición anterior notemos que, en particular, todo conjunto abierto en (X, τ) que contenga a x es vecindad de x, y a éste tipo de vecindad se le llama *vecindad abierta* de x.

Teorema 1.5.6. *Supongamos que X es un conjunto no vacío y que, para cada $x \in X$, existe una familia no vacía $\mathcal{B}(x)$ de subconjuntos de X, de modo que la colección $\{\mathcal{B}(x) \colon x \in X\}$ cumple las siguientes propiedades:*

V1) *Para toda $V \in \mathcal{B}(x)$, $x \in V$.*

V2) *Para cada $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x)$, existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.*

V3) *Si $V \in \mathcal{B}(y)$ y $x \in V$, entonces existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subset V$.*

Entonces

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \colon \text{ para cada } x \in U, \text{ existe } V \in \mathcal{B}(x) \text{ con } V \subset U\}$$

es una topología en X y cada $\mathcal{B}(x)$ resulta ser una base de vecindades de x para esta topología.

Demostración. Veamos primero que τ es una topología en X. Por definición $\emptyset \in \tau$. Tomemos $x \in X$. Como $\mathcal{B}(x)$ es una familia no vacía de subconjuntos de X, existe $V \subset X$ tal que $V \in \mathcal{B}(x)$. Por V1), $x \in V$. Esto muestra que $X \in \tau$. Ahora bien, sean U_1 y U_2 elementos de τ para los cuales $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Como $U_1, U_2 \in \tau$ y $x \in U_i$, para $i = 1, 2$, existen V_1 y V_2 elementos de $\mathcal{B}(x)$ con $V_1 \subset U_1$ y $V_2 \subset U_2$. Entonces $V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por V2), existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Así $V_3 \subset U_1 \cap U_2$, es decir $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Ahora, supongamos que $\{U_i \colon i \in I\}$ es una familia de elementos de τ. Sin perder generalidad, vamos a suponer que cada U_i es no vacío. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces $x \in U_j$, para algún $j \in I$. Como $U_j \in \tau$ y $x \in U_j$, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ con $V \subset U_j$, pero como $U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, se sigue que $V \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Con esto hemos probado que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. Por tanto τ es una topología en X.

Para probar que cada $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de x, veamos primero que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$, para cada $x \in X$. Para este propósito, mostremos que todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es un conjunto abierto en (X, τ), para cada $x \in X$. En efecto; sean $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}(x)$. Tomemos un punto $y \in V$, entonces como $\mathcal{B}(x)$ satisface la propiedad V3), existe $W \in \mathcal{B}(y)$ para el cual $W \subset V$. Luego $V \in \tau$, mostrando que V es abierto en (X, τ), para toda $V \in \mathcal{B}(x)$, es decir todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es un conjunto abierto en (X, τ), para cada $x \in X$. De esta manera, para toda $x \in X$, si $V \in \mathcal{B}(x)$, por 1) de la Definición 1.5.5, V es una vecindad para cada uno de sus puntos, en particular para x. Así hemos probado que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$, para toda $x \in X$.

Por último, sean $x \in X$ y A una vecindad para el punto x. Por 1) de la Definición 1.5.5, podemos encontrar un abierto U en (X, τ) que satisface $x \in U \subset A$. Luego, como $x \in U$ y U es abierto en (X, τ), existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset U$. Pero $U \subset A$, es decir $V \subset A$. Por lo tanto, del 2) de la Definición 1.5.5 concluimos que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades para x. Con esto terminamos la prueba del teorema. ■

Observemos que, para la topología τ definida en el Teorema 1.5.6, si $U \in \tau$ y $U \neq \emptyset$, entonces para cada $x \in U$, existe $V_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in V_x \subset U$. Luego resulta que

$$U = \bigcup \{V_x \colon x \in U\}.$$

Por lo tanto, si $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$, entonces τ es la colección de todos los subconjuntos de X que son uniones de elementos de alguna subcolección de $\mathcal{B}$. Esto implica que $\mathcal{B}$ forma una base para τ.

Definición 1.5.7. *Un espacio topológico es* ***segundo numerable*** *si admite una base con una cantidad numerable de elementos.*

1.5.2. Espacios de Lindelöf

Definición 1.5.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es* ***de Lindelöf*** *(****compacto****) si para cada familia $\mathcal{U} = \{U_i \colon i \in I\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, existe un subconjunto numerable (finito) J de I tal que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.*

Los espacios segundo numerables son de Lindelöf [28, Teorema 16.8, pág. 111]. Además los subconjuntos cerrados de un espacio de Lindelöf son de Lindelöf [5, Teorema 3.8.4, pág. 192]. De acuerdo a sus respectivas definiciones, es claro que los espacios compactos son de Lindelöf.

1.5.3. Axiomas de Separación

En esta sección definiremos los axiomas de separación, herramientas fundamentales para el desarrollo de nuestro objetivo, en especial los axiomas de separación T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$, los cuales despertaron el intéres por estudiar los espacios topológicos de Furstenberg, Golomb y Bing que en el siguiente capítulo presentaremos.

Diremos que un conjunto es *degenerado* si contiene sólo un elemento, y que un conjunto es *no degenerado* si contiene más de un elemento.

Definición 1.5.9. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es:*

1) T_0 *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto U en X tal que el conjunto $U \cap \{x, y\}$ es degenerado.*

2) T_1 *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V, x \notin V$ y $y \notin U$.*

3) T_2 *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

4) $T_{2\frac{1}{2}}$ *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) = \emptyset$.*

5) T_3 *si X es T_1 y, para cada $x \in X$ y todo subconjunto cerrado C de X tal que $x \notin C$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $C \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

6) $T_{3\frac{1}{2}}$ *si X es T_1 y para cada $x \in X$ y todo subconjunto cerrado no vacío C de X tal que $x \notin C$, existe una función continua $f \colon X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) = \{1\}$.*

7) T_4 *si X es T_1 y, para cada par de subconjuntos no vacíos, ajenos y cerrados C y D de X, existen abiertos U y V en X tales que $C \subset U$, $D \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Se sabe que

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0,$$

y que además las implicaciones no son reversibles. Esto significa que si $i, j \in \{0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$ son tales que $i < j$, entonces existe un espacio topológico X que es T_i pero no T_j. No es nuestra intención mostrar un ejemplo para cada una de las situaciones anteriores. Para esto se pueden consultar [5, págs. 36–49] ó [4, págs. 137–153]. En el presente trabajo utilizaremos formas equivalentes de enunciar algunos de los axiomas de separación. Concretamente, usaremos los indicados en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.10. *Un espacio topológico X es:*

a) *T_1 si y sólo si, para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X.*

b) *T_3 si y sólo si X es T_1 y para cada $x \in X$ y todo abierto V en X con $x \in V$, existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset V$.*

c) *T_4 si y sólo si X es T_1 y para cada subconjunto no vacío y cerrado C de X y todo abierto G de X tales que $C \subset G$, existe un abierto U en X tal que $C \subset U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset G$.*

Demostración. La afirmación a) aparece probada en [28, Teorema 13.4, pág. 86], la b) en [28, Teorema 14.3, pág. 92] y, por último, una prueba de c) puede verse en [4, 3.2, págs. 144–145]. ■

Corolario 1.5.11. *Supongamos que (X, τ) es un espacio T_1 que admite una base $\mathcal{B}$ tal que, para toda $B \in \mathcal{B}$, sucede que B es abierto y cerrado en X. Entonces X es T_3.*

Demostración. Tomemos un punto $x \in X$ y un abierto V en X de modo que $x \in V$. Como $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ), existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset V$. Como B es cerrado en X, sucede que $x \in B \subset \mathrm{cl}_X(B) \subset V$. Entonces, por la parte b) del Teorema 1.5.10, X es T_3. ■

En el siguiente teorema presentamos una prueba que implica el axioma de separación T_4. Como no es un resultado que se suele probar en un curso de Topología a nivel licenciatura, se incluye su demostración. Conviene comparar la afirmación $(\star)$ del siguiente teorema, con la afirmación c) del Teorema 1.5.10.

Teorema 1.5.12. *Supongamos que X es un espacio T_1 con la siguiente propiedad:*

($\star$) *para cada subconjunto cerrado F en X y todo subconjunto abierto W en X tales que $F \subset W$, existe una sucesión $(W_i)_i$ de subconjuntos abiertos en X tales que*

$$F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \quad y \quad \mathrm{cl}_X(W_i) \subset W \text{ para toda } i \in \mathbb{N}.$$

Entonces X es T_4.

Demostración. Para ver que X es T_4, sean A y B dos subconjuntos de X, cerrados y no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$. Como A es cerrado en X y $X \setminus B$ es un abierto en X tal que $A \subset X \setminus B$, por la propiedad ($\star$), existe una sucesión $(W_i)_i$ de abiertos en X tales que

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(W_i) \subset X \setminus B, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}. \tag{1.5.1}$$

Como también B es un cerrado en X y $X \setminus A$ es un abierto en X tal que $B \subset X \setminus A$, aplicando de nuevo la propiedad ($\star$), existe una sucesión $(V_i)_i$ de abiertos en X tales que

$$B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(V_i) \subset X \setminus A, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}. \tag{1.5.2}$$

Dada $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$G_i = W_i \setminus (\mathrm{cl}_X(V_1) \cup \mathrm{cl}_X(V_2) \cup \cdots \cup \mathrm{cl}_X(V_i))$$

y

$$H_i = V_i \setminus (\mathrm{cl}_X(W_1) \cup \mathrm{cl}_X(W_2) \cup \cdots \cup \mathrm{cl}_X(W_i)).$$

Entonces G_i y H_i son abiertos en X, para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos ahora

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i.$$

Luego U y V son abiertos en X. De (1.5.1) y (1.5.2) $A \subset U$ y $B \subset V$. Además, por la forma en que los conjuntos G_i y H_j fueron construidos, tenemos que $G_i \cap V_j = \emptyset$, para cada $j \leqq i$. Luego $G_i \cap H_j = \emptyset$, para toda $j \leqq i$. De manera similar $H_j \cap W_i = \emptyset$, para cada $i \leqq j$ y también $G_i \cap H_j = \emptyset$, para toda $j \leqq i$. Por tanto $G_i \cap H_j = \emptyset$, para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $U \cap V = \emptyset$. De esta manera se sigue que X es T_4. ■

Corolario 1.5.13. *Supongamos que X es un espacio T_1. Entonces X es T_4 si y sólo si X satisface la propiedad $(\star)$ del Teorema 1.5.12.*

Demostración. Si X satisface la propiedad $(\star)$ entonces, por el Teorema 1.5.12, X es T_4. Supongamos ahora que X es T_4. Tomemos un cerrado F en X y un abierto W en X tales que $F \subset W$. Como X es T_4, por la propiedad c) del Teorema 1.5.10, existe un abierto U en X tal que $F \subset U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset W$. Dada $i \in \mathbb{N}$, hagamos $W_i = U$. Entonces $(W_i)_i$ es una sucesión de abiertos en X tales que

$$F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(W_i) \subset W, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Entonces X satisface la propiedad $(\star)$ del Teorema 1.5.12. ■

Como consecuencia del siguiente teorema, en la familia de los espacios de Lindelöf, los axiomas de separación T_3 y T_4 son equivalentes.

Teorema 1.5.14. *Si X es T_3 y de Lindelöf, entonces X es T_4.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado de X y W un abierto en X tales que $F \subset W$. Para cada $x \in F$, como X es T_3, por la propiedad b) del Teorema 1.5.10, existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subset \mathrm{cl}_X(U_x) \subset W$. Hagamos $\mathcal{U} = \{U_x \colon x \in F\}$ y notemos que $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. Recordemos ahora que los subespacios cerrados de espacios de Lindelöf son de Lindelöf. Por tanto, F es de Lindelöf. Esto implica que existe una sucesión $(x_i)_i$ en F tal que

$$F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{x_i}.$$

Como $\mathrm{cl}_X(U_{x_i}) \subset W$, para cada $i \in \mathbb{N}$, resulta que X satisface la propiedad $(\star)$ del Teorema 1.5.12. Luego, por el mismo Teorema 1.5.12, X es T_4. ■

Corolario 1.5.15. *Si X es T_3 y numerable, entonces X es T_4.*

Demostración. Los espacios numerables son de Lindelöf. Por lo tanto los espacios T_3 y numerables, son T_3 y de Lindelöf. Luego, por el Teorema 1.5.14, dichos espacios son T_4. ■

Corolario 1.5.16. *Sea X un espacio numerable y T_1. Si X admite una base $\mathcal{B}$ tal que, para toda $B \in \mathcal{B}$, sucede que B es abierto y cerrado en X, entonces X es T_4.*

Demostración. Como X es T_1 y admite una base de abiertos y cerrados en X, por el Corolario 1.5.11, X es T_3. Entonces X es T_3 y numerable así que, por el Corolario 1.5.15, X es T_4. ■

1.5.4. Metrizabilidad

Una *métrica* en un conjunto no vacío X, es una función $d\colon X\times X \to [0,\infty)$ con las siguientes propiedades:

a) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$, para toda $x, y \in X$.

c) $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$, para cada $x, y, z \in X$.

A la pareja (X,d) se le llama *espacio métrico*. La propiedad c) que define a una métrica, se llama la *desigualdad del triángulo*. La propiedad b) dice que d es simétrica.

Supongamos que (X,d) es un espacio métrico. Si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ entonces el conjunto

$$B_{(X,d)}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

es la *bola abierta en X centrada en x y de radio ε*. Para simplificar, el conjunto $B_{(X,d)}(x,\varepsilon)$ se denota como $B_X(x,\varepsilon)$ cuando no queremos hacer referencia explícita a la métrica, o bien como $B(x,\varepsilon)$ cuando no deseamos hacer referencia ni a la métrica d ni al espacio X.

En el siguiente teorema mostramos que, con ayuda de las bolas abiertas en un conjunto X, una métrica en X induce una topología en X,

Teorema 1.5.17. *Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Entonces la familia*

$$\mathcal{B}_d = \{B_{(X,d)}(x, \varepsilon) \colon x \in X \text{ y } \varepsilon > 0\}$$

es base de una topología τ_d en X.

Demostración. Tomemos $x \in X$. Entonces, por la propiedad a) que define a una métrica, tenemos que $x \in B_{(X,d)}(x, \varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$. Esto implica que la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}_d$ es X. Ahora supongamos que $B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1)$ y $B_{(X,d)}(x_2, \varepsilon_2)$ son dos elementos de $\mathcal{B}_d$. Tomemos un punto $x \in B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1) \cap B_{(X,d)}(x_2, \varepsilon_2)$. Definimos

$$\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1 - d(x_1, x), \varepsilon_2 - d(x_2, x)\}.$$

Como $x \in B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1)$, tenemos que $d(x_1, x) < \varepsilon_1$. Por tanto $\varepsilon_1 - d(x_1, x) > 0$. De manera similar, $\varepsilon_2 - d(x_2, x) > 0$. Entonces ε es el mínimo de números mayores que cero y, por tanto, $\varepsilon > 0$. Notemos que $B_{(X,d)}(x, \varepsilon)$ es un elemento de $\mathcal{B}_d$ que tiene a x. Vamos a probar que

$$B_{(X,d)}(x, \varepsilon) \subset B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1) \cap B_{(X,d)}(x_2, \varepsilon_2).$$

Sea $y \in B_{(X,d)}(x, \varepsilon)$. Entonces $d(x, y) < \varepsilon$. Además, por la desigualdad del triángulo, la simetría de d y la definición de ε, tenemos que

$$d(y, x_1) \leqq d(y, x) + d(x, x_1) < \varepsilon + d(x_1, x) \leqq \varepsilon_1$$

y

$$d(y, x_2) \leqq d(y, x) + d(x, x_2) < \varepsilon + d(x_2, x) \leqq \varepsilon_2.$$

Luego $y \in B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1) \cap B_{(X,d)}(x_2, \varepsilon_2)$. Esto prueba que

$$B_{(X,d)}(x, \varepsilon) \subset B_{(X,d)}(x_1, \varepsilon_1) \cap B_{(X,d)}(x_2, \varepsilon_2).$$

Utilizamos ahora el Teorema 1.5.4, para concluir que $\mathcal{B}_d$ es base de una topología τ_d de X. ■

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Por los Teoremas 1.5.4 y 1.5.17, tenemos que

$$\tau_d = \{G \subset X \colon \text{ para cada } x \in G \text{ existe } B_{(X,d)}(y, \varepsilon) \in \mathcal{B}_d \\ \text{tal que } x \in B_{(X,d)}(y, \varepsilon) \subset G\}.$$

En τ_d se encuentran los subconjuntos de G que son uniones de elementos de $\mathcal{B}_d$. Más concretamente $G \subset X$ es un elemento de τ_d si y sólo si, entre cada punto x de G y G se puede encontrar un elemento de $\mathcal{B}_d$, el cual es una bola abierta cuyo centro no necesariamente es el punto x. Definimos ahora

$$\tau = \{G \subset X\colon \text{ para cada } x \in G \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_{(X,d)}(x, \varepsilon) \subset G\}.$$

Los miembros de τ también son uniones de elementos de $\mathcal{B}_d$. Más concretamente $G \subset X$ es un elemento de τ si y sólo si, entre cada punto x de G y G se puede encontrar un elemento de $\mathcal{B}_d$, el cual es una bola abierta cuyo centro es x. Es claro entonces que $\tau \subset \tau_d$. Para ver que la otra contención también es cierta, supongamos que $G \in \tau_d$. Tomemos un punto $x \in G$ y un elemento $B_{(X,d)}(y, \varepsilon) \in \mathcal{B}_d$ tal que $x \in B_{(X,d)}(y, \varepsilon) \subset G$. Entonces $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que $\delta = \varepsilon - d(x, y)$ es mayor que cero. Además $B_{(X,d)}(x, \delta) \subset B_{(X,d)}(y, \varepsilon)$. Para ver esto, sea $z \in B_{(X,d)}(x, \delta)$. Entonces $d(z, x) < \delta$ y, por la desigualdad del triángulo y la definición de δ, tenemos que

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \delta + d(x, y) = \varepsilon.$$

Luego $z \in B_{(X,d)}(y, \varepsilon)$. Esto prueba que $B_{(X,d)}(x, \delta) \subset B_{(X,d)}(y, \varepsilon)$. Hemos encontrado entonces un número real δ, mayor que cero, tal que $B_{(X,d)}(x, \delta) \subset G$, probando así que $G \in \tau$. Por tanto $\tau_d \subset \tau$. De todo esto, concluimos que $\tau_d = \tau$.

Con respecto a como se define τ_d, la forma que define a τ es más simple. La topología τ_d que hemos obtenido y que es igual a τ, recibe un nombre especial.

Definición 1.5.18. *Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Entonces la familia*

$$\tau_d = \{G \subset X\colon \textit{ para cada } x \in G \textit{ existe } \varepsilon > 0 \textit{ tal que } B_{(X,d)}(x, \varepsilon) \subset G\}$$

*se llama la **topología inducida** en X por la métrica d. La familia*

$$\mathcal{B}_d = \{B_{(X,d)}(x, \varepsilon)\colon x \in X \textit{ y } \varepsilon > 0\}$$

*es la **base inducida** en X por la métrica d.*

Así pues, toda métrica definida en un conjunto X, induce una topología en X. Conviene considerar ahora la siguiente definición, que es una especie de recíproco de lo anteriormente comentado.

Definición 1.5.19. *Un espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe una métrica d en X tal que $\tau = \tau_d$.*

En otras palabras, un espacio topológico es metrizable si su topología resulta ser la topología inducida por alguna métrica d en X. Si (X, d) es un espacio métrico y τ_d es la topología en X inducida por la métrica d, entonces (X, τ_d) es un espacio metrizable. En la práctica, pensando que los conjuntos son espacios topológicos, cuando decimos "sea X un espacio métrico", entendemos que X es un espacio topológico y que su topología es la inducida por la métrica de X.

Si X es un espacio metrizable, entonces X satisface el axioma de separación T_4 ([17, Teorema 32.2, pág. 202]). En particular X satisface los axiomas de separación anteriores a T_4. Como consecuencia de esto, si X no satisface alguno de los axiomas de separación que indicamos en la Definición 1.5.9, entonces X no es metrizable. A continuación enunciamos el *Teorema de Metrización de Urysohn*, el cual es un criterio para determinar si un espacio segundo numerable es metrizable. Una demostración puede verse en [17, Teorema 34.1, pág. 215].

Teorema 1.5.20. *Supongamos que el espacio topológico (X, τ) es segundo numerable. Entonces X es metrizable si y sólo si X es T_3.*

1.5.5. Conexidad

Vamos ahora a presentar la definición más importante en lo que al presente trabajo concierne.

Definición 1.5.21. *Un espacio topológico (X, τ) es **conexo** si no existen dos subconjuntos abiertos y no vacíos A y B en X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Es fácil probar que el conjunto vacío es conexo, que un conjunto degenerado es conexo y que el conjunto $X = \{0, 1\}$, con la topología $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ es conexo. Además si Y es un conjunto no vacío y $p \in Y$, se tiene que $\tau_p = \{A \subset Y : p \in A\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en Y tal que el espacio topológico (Y, τ_p) es conexo. Los espacios conexos $(\{0, 1\}, \tau_S)$ y (Y, τ_p) son T_0 pero no T_1.

Notemos que un espacio topológico (X, τ) es conexo si y sólo si sus únicos subconjuntos que son tanto abiertos como cerrados son $\emptyset$ y X ([5, Teorema 6.1.1 (ii), pág. 352]).

El conjunto $\mathbb{R}$, con la topología usual, es conexo y sus subconjuntos conexos propios y no vacíos son los subintervalos y los rayos [4, Teorema 1.2, págs. 107–108]. En particular los subconjuntos conexos del intervalo $[0, 1]$ son $\emptyset$, $[0, 1]$ y los intervalos de la forma $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ y (a, b) contenidos en $[0, 1]$.

En Topología es común considerar que los espacios topológicos interesantes satisfacen, por lo menos, el axioma de separación T_2. Si nos atenemos a esto, los únicos conjuntos conexos no degenerados e interesantes que hemos presentado, son la recta real, los subintervalos y los rayos en $\mathbb{R}$, con la topología usual.

Un problema que históricamante ha resultado interesante es el de determinar la cardinalidad de un conjunto conexo y T_2. Al respecto, vamos a indicar en la presente sección, algunos resultados. Para su demostración será importante el siguiente resultado.

Teorema 1.5.22. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es conexo, entonces Y también es conexo.*

Demostración. Si Y no es conexo, entonces $Y = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos no vacíos de Y, abiertos y ajenos. Como f es continua y sobreyectiva, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son subconjuntos no vacíos, abiertos y ajenos en X, cuya unión es X. Como esto contradice la conexidad de X, deducimos que Y es conexo. ■

En el siguiente resultado, consideramos un espacio topológico con dos topologías comparables y, posteriormente, vemos condiciones bajo las cuales se preserva la conexidad o bien el axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$.

Teorema 1.5.23. *Sea X un conjunto no vacío con dos topologías τ_1 y τ_2 tales que $\tau_1 \subset \tau_2$. Entonces:*

1) *Si (X, τ_2) es conexo, entonces (X, τ_1) también es conexo.*

2) *Si (X, τ_1) es $T_{2\frac{1}{2}}$, entonces (X, τ_2) también es $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Para probar 1) supongamos que (X, τ_1) no es conexo. Entonces existen abiertos no vacíos U y V en (X, τ_1) tales que

$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset. \tag{1.5.3}$$

Como $\tau_1 \subset \tau_2$, U y V son abiertos en (X, τ_2), que cumplen (1.5.3) por lo que (X, τ_2) no es conexo, contradiciendo así nuestro supuesto. Por tanto (X, τ_1) es conexo.

Para probar 2), sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como (X, τ_1) es $T_{2\frac{1}{2}}$, existen abiertos no vacíos U y V en (X, τ_1) tales que

$$x \in U, \ y \in V \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(U) \cap \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(V) = \emptyset. \tag{1.5.4}$$

Como $\tau_1 \subset \tau_2$ y $U, V \in \tau_1$, se sigue que $U, V \in \tau_2$. Entonces U y V son abiertos en (X, τ_2) tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por otra parte, notemos que si F es un cerrado en (X, τ_1), entonces F es un cerrado en (X, τ_2), pues al tenerse que $\tau_1 \subset \tau_2$ y $W = X \setminus F \in \tau_1$, resulta que $W \in \tau_2$, por lo que $F = X \setminus W$ es un cerrado en (X, τ_2). Ahora bien, como $\mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(U)$ y $\mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(V)$ son cerrados en (X, τ_1), dichos conjuntos también son cerrados en (X, τ_2). Además $U \subset \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(U)$ y $V \subset \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(V)$, por lo que $\mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(U) \subset \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(U)$ y $\mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(V) \subset \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(V)$. Luego, por (1.5.4),

$$\mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(U) \cap \mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(V) \subset \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(U) \cap \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(V) = \emptyset.$$

Esto prueba que (X, τ_2) es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Recordemos que, para un conjunto A, el símbolo $|A|$ representa la cardinalidad de A. El siguiente resultado dice que, en cuanto a cardinalidad, en la clase de los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ solo hay dos tipos de conjuntos conexos: los que poseen un solo elemento, y los que tienen una cantidad no numerable de elementos.

Teorema 1.5.24. *Supongamos que X es un espacio conexo y no vacío. Si X es $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces $|X| = 1$ o bien X es no numerable.*

Demostración. Supongamos que X tiene por lo menos dos elementos p y q. Como X es T_1, por la propiedad a) del Teorema 1.5.10, el conjunto $\{q\}$ es cerrado en X. Además $p \notin \{q\}$ y, como X es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f\colon X \to [0, 1]$ tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Puesto que X es conexo y f es una función continua, por el Teorema 1.5.22, $f(X)$ es un subconjunto conexo de $[0,1]$. Tenemos entonces que $f(X)$ es un subconjunto conexo del intervalo $[0,1]$ que contiene a sus extremos 0 y 1. Luego $f(X) = [0,1]$ y, así, X tiene por lo menos la cantidad de elementos que posee $[0,1]$. Esto prueba que X no es numerable. ■

En vista del teorema anterior, un conjunto degenerado resulta ser el único conjunto conexo no vacío y numerable que cumple el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$. En el siguiente resultado probamos que, en cuanto a cardinalidad se refiere, en la clase de los espacios T_3, solo hay dos tipos de conjuntos conexos: los que poseen un solo elemento, y los que tienen una cantidad no numerable de elementos, justo como pasa en la clase de los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$.

Teorema 1.5.25. *Supongamos que X es un espacio conexo y no vacío. Si X es T_3, entonces $|X| = 1$ o bien X es no numerable.*

Demostración. Supongamos que X es numerable. Como X es T_3 y numerable, por el Corolario 1.5.15, X es T_4. En particular X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Esto implica, por el Teorema 1.5.24, que $|X| = 1$. De esta manera se prueba que $|X| = 1$ o bien X no es numerable. ■

En vista del teorema anterior, un conjunto degenerado resulta ser el único conjunto conexo no vacío y numerable que cumple el axioma de separación T_3. Por tanto, si a los espacios topológicos que vamos a considerar les hemos de imponer un axioma de separación (como ya dijimos, se suele considerar que por lo menos han de satisfacer el axioma de separación T_2), por el trabajo que hemos realizado, se sigue que un espacio topológico conexo e infinito numerable ha de satisfacer, a lo más, el axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$.

Como veremos, en cuanto a cardinalidad se refiere, en la clase de los espacios T_2, existen conjuntos conexos con un solo elemento, con una cantidad numerable de elementos, o bien con una cantidad no numerable de elementos. Sin embargo, bajo ciertas consideraciones, podemos obtener resultados similares a los indicados en los Teoremas 1.5.24 y 1.5.25. Supongamos, por ejemplo, que X es un espacio conexo, no vacío y T_2. En el siguiente resultado mostramos que, si a X le imponemos ser compacto, entonces un conjunto degenerado resulta ser el único espacio numerable con estas propiedades.

Teorema 1.5.26. *Supongamos que X es un espacio compacto, conexo y no vacío. Si X es T_2, entonces $|X| = 1$ o bien X es no numerable.*

Demostración. Como X es compacto y T_2, por [17, Teorema 32.3, pág. 202], X es T_4. En particular X es $T_{3\frac{1}{2}}$, así que por el Teorema 1.5.25, concluimos que $|X| = 1$ o bien X es no numerable. ■

Por tanto, en cuanto a cardinalidad se refiere, en la clase de los espacios T_2 y compactos solo hay dos tipos de conjuntos conexos: los que poseen un solo elemento, y los que tienen una cantidad no numerable de elementos.

Un espacio topológico X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y todo abierto V en X con $x \in V$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset V$ y $\mathrm{cl}_X(U)$ es compacto. Por la parte b) del Teorema 1.5.10, si X es localmente compacto y T_1, entonces X es T_3. Como consecuencia de esto y el Teorema 1.5.25 tenemos el siguiente resultado, el cual indica que si a un espacio conexo, no vacío y T_1 le imponemos ser localmente compacto, entonces un conjunto degenerado resulta ser el único espacio numerable con estas propiedades.

Teorema 1.5.27. *Supongamos que X es un espacio localmente compacto, conexo y no vacío. Si X es T_1, entonces $|X| = 1$ o bien X es no numerable.*

Demostración. Como X es localmente compacto y T_1, tenemos que X es T_3. Entonces, por el Teorema 1.5.25, sucede que $|X| = 1$ o bien X es no numerable. ■

Así pues, en cuanto a cardinalidad se refiere, en la clase de los espacios T_1 y localmente compactos solo hay dos tipos de conjuntos conexos: los que poseen un solo elemento, y los que tienen una cantidad no numerable de elementos.

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que existen espacios infinito numerables que son conexos y satisfacen el axioma de separación T_2, pero no el axioma $T_{2\frac{1}{2}}$. Los capítulos 2 y 3 del presente trabajo estarán dedicados a esto. Suponiendo, de momento, la existencia de dichos espacios, en el siguiente resultado mostramos propiedades que no poseen. Recordemos que si X es un espacio topológico, entonces $p \in X$ es un *punto aislado* de X si el conjunto $\{p\}$ es abierto en X.

Teorema 1.5.28. *Sea X un espacio conexo, no degenerado, numerable y T_2. Entonces X no es compacto ni localmente compacto ni metrizable. Además X es infinito y no posee puntos aislados.*

Demostración. El que X no es compacto se sigue del Teorema 1.5.26. Del Teorema 1.5.27, se deduce que X no es localmente compacto. Supongamos que X es metrizable. Entonces X es T_3 y, como X es numerable, por el Teorema 1.5.25, $|X| = 1$. Esto es una contradicción así que X no es metrizable.

Supongamos que X es finito. Tomemos $a \in X$ y definamos $U = \{a\}$ y $V = X \setminus U$. Entonces $U \neq \emptyset$ y, como X es no degenerado, $V \neq \emptyset$. Además $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. En vista de que X es T_1, cada subconjunto degenerado de X es cerrado en X. En particular, U es cerrado en X, así que V es abierto en X. También V es cerrado en X pues V es una unión finita de subconjuntos degenerados de X y, por tanto, una unión finita de subconjuntos cerrados de X. Luego $U = X \setminus V$ es abierto en X. Esto prueba que U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos en X, tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego X no es conexo. Esta contradicción muestra que X debe ser infinito.

Supongamos que $p \in X$ es un punto aislado de X. Entonces $\{p\}$ es un subconjunto de X, diferente del vacío y de X que es tanto abierto como cerrado en X ($\{p\}$ es abierto en X por ser p un punto aislado de X, y $\{p\}$ es cerrado puesto que X es T_1). Esto contradice el hecho de que, al ser X un espacio conexo, los únicos subconjuntos de X que son tanto abiertos como cerrados en X son $\emptyset$ y X. Por tanto, X no posee puntos aislados. ■

Si X es un espacio topológico y $Y \subset X$, decimos que Y es *perfecto* si Y es cerrado en X y ningún punto p de Y es tal que $\{p\}$ es abierto en Y, es decir, ningún punto de Y es un punto aislado en la topología relativa de Y. Del Teorema 1.5.28 se sigue que los espacios conexos, infinito numerables y T_2 son perfectos.

El tema de la conexidad es más amplio de lo que aquí presentamos. Tan solo hemos enunciado resultados que involucran el tema principal del presente trabajo. El siguiente concepto está, como veremos, muy ligado al de la conexidad.

Definición 1.5.29. *Dos subconjuntos B y C de un espacio topológico X están* ***mutuamente separados*** *en X, si $\mathrm{cl}_X(B) \cap C = \emptyset$ y $B \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset$.*

Teorema 1.5.30. *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$.*

Demostración. Supongamos primero que X es conexo y que existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$. Entonces $\mathrm{cl}_X(B) \cap C = \emptyset$ y $B \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset$. De la segunda igualdad inferimos que $B \subset X \setminus \mathrm{cl}_X(C)$. Tomemos un punto $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X(C)$. Como $X = B \cup C$, tenemos que $x \in B$ o bien $x \in C$. Si $x \in C$, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(C)$, lo que contradice el hecho de que $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X(C)$. Por tanto, $x \in B$. Esto muestra que $X \setminus \mathrm{cl}_X(C) \subset B$ y, como también $B \subset X \setminus \mathrm{cl}_X(C)$, deducimos que $B = X \setminus \mathrm{cl}_X(C)$. De manera similar se prueba que $C = X \setminus \mathrm{cl}_X(B)$. Entonces B y C son subconjuntos abiertos y no vacíos de X.

Vamos a probar que B y C también son dos subconjuntos cerrados de X. Para ver que B es cerrado en X, tomemos un punto $x \in \mathrm{cl}_X(B)$. Como $X = B \cup C$, tenemos que $x \in B$ o bien $x \in C$. Debido a que $\mathrm{cl}_X(B) \cap C = \emptyset$, tenemos que $x \notin C$, así que $x \in B$. Esto muestra que $\mathrm{cl}_X(B) \subset B$ y, como también es cierto que $B \subset \mathrm{cl}_X(B)$, deducimos que $B = \mathrm{cl}_X(B)$. En particular, B es cerrado en X. De manera similar se prueba que C es cerrado en X. Como consecuencia de esto

$$B \cap C = B \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset,$$

así que B y C son ajenos. Tenemos así que B y C son dos subconjuntos de X, abiertos, ajenos y no vacíos en X, cuya unión es X. Por tanto, X no es conexo. Esto es una contradicción, por lo que deducimos que no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$.

Para probar la segunda parte del teorema, supongamos ahora que no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados cuya unión es X. Si X no es conexo, entonces $X = B \cup C$, donde B y C son subconjuntos de X, abiertos en X, ajenos y no vacíos. Probando que B y C están mutuamente separados en X, obtendremos una contradicción con nuestra hipótesis. Supongamos, por tanto, que existe un punto $x \in \mathrm{cl}_X(B) \cap C$. Como C es un abierto en X que posee el punto x, que se encuentra en la cerradura de B, sucede que $C \cap B \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que B y C son ajenos, así que $\mathrm{cl}_X(B) \cap C = \emptyset$. De manera similar se prueba que $B \cap \mathrm{cl}_X(C) \neq \emptyset$.

Luego B y C están mutuamente separados en X y, como ya indicamos, esto nos lleva a la conexidad de X. ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.31. *Supongamos que A es un subconjunto conexo del espacio topológico X tal que $A \subset B \cup C$, donde B y C son dos subconjuntos no vacíos de X que están mutuamente separados en X. Entonces $A \subset B$ o bien $A \subset C$.*

Demostración. Como $A \subset B \cup C$, tenemos que

$$A = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Vamos a probar que los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap C$ están mutuamente separados en X. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_X(A \cap B) \cap (A \cap C) &\subset (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B)) \cap (A \cap C) \\ &= (A \cap \mathrm{cl}_X(A)) \cap (\mathrm{cl}_X(B) \cap C) = A \cap \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{cl}_X(A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$. De manera similar se prueba que $(A \cap B) \cap \mathrm{cl}_X(A \cap C) = \emptyset$. Por tanto, el conjunto conexo A se puede escribir como la unión de los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap C$ que están mutuamente separados en X. Luego, por el Teorema 1.5.30, no puede ser cierto que ambos conjuntos sean no vacíos, es decir, $A \cap B = \emptyset$ o bien $A \cap C = \emptyset$. Esto implica que $A \subset B$ o bien $A \subset C$. ■

Sean X un espacio topológico y $A, Y \subset X$ tales que $A \subset Y$. En la prueba del siguiente resultado utilizaremos el hecho de que $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$.

Teorema 1.5.32. *Supongamos que $\mathcal{C} = \{C_i \colon i \in I\}$ es una colección de subconjuntos conexos de un espacio topológico X. Si para cada $i, j \in I$ sucede que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, entonces el conjunto $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{i \in I} C_i$. Si Y no es conexo entonces, por el Teorema 1.5.30, existen dos subconjuntos no vacíos B y C de X, mutuamente separados en Y y tales que $Y = B \cup C$. Como $C \subset Y$, tenemos que $C \cap Y = C$ por lo que

$$\emptyset = \mathrm{cl}_Y(B) \cap C = (\mathrm{cl}_X(B) \cap Y) \cap C = \mathrm{cl}_X(B) \cap (C \cap Y) = \mathrm{cl}_X(B) \cap C.$$

Por tanto, $\mathrm{cl}_X(B) \cap C = \emptyset$. De manera similar se prueba que $B \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset$. Luego B y C están mutuamente separados en X. Ahora fijemos $b \in B$ y $c \in C$. Como $b, c \in Y$, existen $i, j \in I$ tales que $b \in C_i$ y $c \in C_j$. Entonces $C_i \cap B \neq \emptyset$ y $C_j \cap C \neq \emptyset$. Como ya probamos, B y C son dos subconjuntos no vacíos de X que están mutuamente separados en X y, además, C_i y C_j son subconjuntos conexos de X tales que $C_i \subset B \cup C$ y $C_j \subset B \cup C$. Entonces, por el Teorema 1.5.31, $C_i \subset B$ o bien $C_i \subset C$ y, además, $C_j \subset B$ o bien $C_j \subset C$. Supongamos que $C_i \subset C$. Entonces

$$b \in C_i \cap B \subset C_i \cap \mathrm{cl}_X(B) \subset C \cap \mathrm{cl}_X(B)$$

de donde $C \cap \mathrm{cl}_X(B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción que proviene de suponer que $C_i \subset C$. Entonces $C_i \subset B$. Si suponemos que $C_j \subset B$, entonces

$$c \in C_j \cap C \subset C_j \cap \mathrm{cl}_X(C) \subset B \cap \mathrm{cl}_X(C)$$

por lo que $B \cap \mathrm{cl}_X(C) \neq \emptyset$, una contradicción proveniente de suponer que $C_j \subset B$. Por tanto $C_j \subset C$. De esta manera

$$C_i \cap C_j \subset B \cap C \subset B \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset,$$

así que $C_i \cap C_j = \emptyset$. Esto contradice la hipótesis de que los elementos de la familia $\mathcal{C}$ se intersecan dos a dos. Dicha contradicción proviene de suponer que Y no es conexo, por lo que deducimos que Y es conexo. ∎

Ahora vamos a probar que la cerradura de un conjunto conexo es conexa. Para esto utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.33. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Si $B \subset X$ es tal que $A \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A)$, entonces B es conexo.*

Demostración. Si B no es conexo entonces, por el Teorema 1.5.30, existen dos subconjuntos no vacíos C y D, mutuamente separados en X y tales que $B = C \cup D$. Como A es conexo y $A \subset C \cup D$, por el Teorema 1.5.31, $A \subset C$ o bien $A \subset D$. Supongamos que $A \subset C$. Entonces $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(C)$. Luego $D \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(C)$, por lo que $D \cap \mathrm{cl}_X(C) = D \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $D \cap \mathrm{cl}_X(C) = \emptyset$. Si suponemos ahora que $A \subset D$, entonces

$$C \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(D),$$

por lo que $C \cap \mathrm{cl}_X(D) = C \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $C \cap \mathrm{cl}_X(D) = \emptyset$. Hemos probado con esto que no podemos suponer que $A \subset C$ ni que $A \subset D$. Esta contradicción proviene de suponer que B no es conexo. Por tanto, B es conexo. ■

Corolario 1.5.34. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Entonces $\mathrm{cl}_X(A)$ es conexo.*

Demostración. Hagamos $B = \mathrm{cl}_X(A)$. Entonces B es un subconjunto de X tal que $A \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A)$ y, por el Teorema 1.5.33, B es conexo. ■

Terminamos la presente subsección considerando la siguiente noción.

Definición 1.5.35. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El conjunto*

$$C_p = \bigcup\{C \subset X : C \text{ es conexo y } p \in C\}$$

*es la **componente conexa de p en** X. Decimos que $D \subset C$ es una **componente conexa** de X si existe $p \in X$ tal que $D = C_p$.*

Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Notemos que

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : C \text{ es conexo y } p \in C\}$$

es una familia de subconjuntos conexos de X que se intersectan dos a dos, pues todos los elementos de $\mathcal{C}$ tienen a p. Entonces, por el Teorema 1.5.32,

$$C_p = \bigcup\{C \subset X : C \text{ es conexo y } p \in C\}$$

es conexo. Además $p \in C_p$. Por otra parte si C es un subconjunto conexo de X tal que $p \in C$, entonces $C \in \mathcal{C}$, por lo que $C \subset C_p$. Esto significa que C_p es el subconjunto conexo de X "más grande" que contiene a p. Como la cerradura de un conjunto conexo es conexa (Corolario 1.5.34), sucede que C_p es cerrado en X. Es común decir en ocasiones que C_p es la componente conexa de X que tiene a p.

Sean X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $p \in Y$. Suponiendo que Y posee la topología relativa de X, podemos considerar la componente conexa de p en Y, la cual es el conjunto

$$\bigcup\{C \subset Y : C \text{ es conexo y } p \in C\}.$$

Como hemos indicado, dicha componente conexa es cerrado en Y y, además, es el subconjunto conexo "más grande" que tiene a p y está contenido en Y.

1.5.6. Conexidad Local y Conexidad en Pequeño

En la presente subsección vamos a estudiar las nociones de conexidad local y de conexidad en pequeño. Además, presentaremos algunas relaciones que existen entre estos conceptos. Recordemos primero que si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces una *vecindad de x en X* es un subconjunto V de X tal que existe un abierto U en X de modo que $x \in U \subset V$. En otras palabras, una vecindad de x en X es un superconjunto de algún conjunto abierto en X que posee al punto x. En particular, un abierto en X que tiene al punto x es una vecindad de x.

Definición 1.5.36. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que:*

i) *X es **localmente conexo en** x, si para cada vecindad V de x, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $x \in U \subset V$.*

ii) *X es **conexo en pequeño en** x, si para cada vecindad V de x, existe un subconjunto conexo U de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(U) \subset U \subset V$.*

*Decimos, además, que X es **localmente conexo** si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Por sus siglas en alemán, "connected im kleinen", es común escribir "cik" en lugar de "conexo en pequeño". Sin embargo, en el presente trabajo, no haremos uso de dicha convención.

Notemos que la noción de conexidad local está dada en términos de vecindades. En el siguiente resultado, vemos que podemos darla en términos de abiertos.

Teorema 1.5.37. *Un espacio topológico X es localmente conexo en un punto $x \in X$, si y sólo si, para cada abierto U de X con $x \in U$, existe un subconjunto V de X, abierto y conexo en X, tal que $x \in V \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo en x. Sea U un conjunto abierto en X con $x \in U$. Como U es una vecindad de x, por hipótesis, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$.

Inversamente, sea V una vecindad de x. Entonces existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$. Luego, por hipótesis, existe un abierto y conexo C en X que satisface $x \in C \subset U$. Esto prueba que X es localmente conexo en x.
■

De forma similar, la noción de conexidad en pequeño puede ser expresada en términos de abiertos. Como la prueba del siguiente resultado es muy similar a la del Teorema 1.5.37, la omitimos.

Teorema 1.5.38. *Un espacio topológico X es conexo en pequeño en un punto $x \in X$, si sólo si, para cada abierto U de X con $x \in U$, existe un subconjunto conexo V de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(V) \subset V \subset U$.*

Ahora vamos a estudiar las relaciones entre la conexidad local y la conexidad en pequeño. Notemos que si X es localmente conexo en x, entonces X es conexo en pequeño en x. Como veremos, globalmente hablando, dichos conceptos son idénticos aunque, localmente hablando, son propiedades diferentes. Para probar esto necesitaremos del siguiente resultado.

Teorema 1.5.39. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si, para cada abierto U en X y cada componente conexa C de U, sucede que C es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un abierto en X y C una componente conexa de U. Debemos probar que C es abierto en X. Para ello tomemos un punto $c \in C$. Entonces $c \in U$ y, como X es locamente conexo en c, existe un abierto y conexo V en X tal que $c \in V \subset U$. Observemos que $c \in V \cap C$ y que tanto V como C son conexos. Luego, $V \cup C$ es conexo. Como V y C están contenidos en U, sucede que $V \cup C$ es un subconjunto conexo de U. Ahora bien, como C es una componente conexa de U y $C \subset V \cup C$, necesariamente $C = V \cup C$. Por tanto $V \subset C$. Entonces V es un abierto en X tal que $c \in V \subset C$ y, de esta manera, C es abierto en X.

Supongamos ahora que las componentes conexas de los subconjuntos abiertos de X son abiertas. Para ver que X es localmente conexo, tomemos un punto $x \in X$ y un abierto U en X tales que $x \in U$. Sea V la componente conexa de U que tiene a x. Por hipótesis V es un abierto en X. Luego V es un abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$. Esto muestra, por Teorema 1.5.37, que X es localmente conexo. ■

Teorema 1.5.40. *Un espacio X es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Como X es localmente conexo en x, por Teorema 1.5.37, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Entonces $x \in \text{int}_X(V) \subset U$ y, por tanto, X es conexo en pequeño en x. Esto muestra que X es conexo en pequeño en todos sus puntos.

Recíprocamente, tomemos un abierto U en X y una componente conexa C de U. Sea $x \in C$. Como X es conexo en pequeño en x, por Teorema 1.5.38, existe un conjunto conexo V en X tal que $x \in \text{int}_X(V) \subset V \subset U$. Como C es la componente conexa de U que tiene a x y V es un subconjunto conexo de U que tiene a x, tenemos que $V \subset C$. Así $\text{int}_X(V) \subset C$, por lo que C es un conjunto abierto. Luego, por el Teorema 1.5.39, X es localmente conexo. ■

Ahora vamos a describir un espacio topológico en $\mathbb{R}^2$, con la topología usual, que es conexo en pequeño en un punto pero no localmente conexo en ese mismo punto. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $q_i = \left(\frac{1}{i}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ y $L_{i,0}$ el segmento de recta con extremos q_i y q_{i+1}. Para toda $(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, consideremos el punto

$$p_{i,n} = \frac{1}{i+1}\left(1, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

así como el segmento de recta $L_{i,n}$ con extremos $p_{i,n}$ y q_i. Es decir, para cada $(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$L_{i,n} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{i+1} \leqq x \leqq \frac{1}{i} \quad y \quad y = \frac{1}{n}(1 - ix)\right\},$$

donde $y = \frac{1}{n}(1 - ix)$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p_{i,n}$ y q_i. Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$X_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} L_{i,n}.$$

Entonces

$$X = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i\right)$$

es un espacio topológico compacto, conexo que, además, es conexo en pequeño en el punto $(0,0)$ y no es localmente conexo en $(0,0)$. En [19, Teorema 7.6, págs. 71–75] se da una demostración a detalle de esto. Por consiguiente, la conexidad en pequeño en un punto, no implica la conexidad local en dicho punto. El espacio X así construido es llamado un *continuo* (espacio métrico compacto, conexo y no vacío) que en la Teoría de Continuos se le conoce como la *escoba nula infinita*. En la figura siguiente se aprecia un bosquejo de la forma geométrica del espacio X.

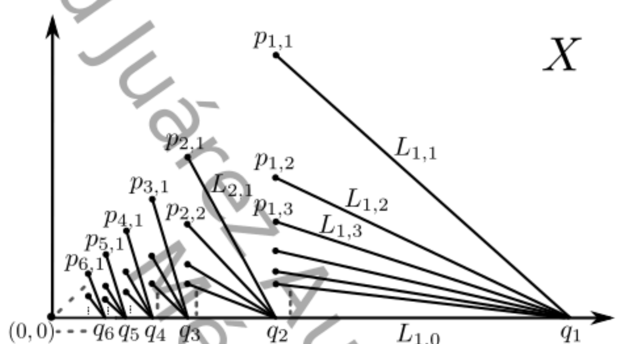

Figura 1.1: El espacio X

Capítulo 2

Espacios con Progresiones Aritméticas

2.1. Introducción e Historia

En el presente capítulo mostraremos algunos ejemplos de espacios conexos, infinito numerables, que satisfacen el axioma de separación T_2 y, además, en su construcción se utilizan las progresiones aritméticas. En el Capítulo 3, daremos otro ejemplo con propiedades similares, pero cuya construcción es geométrica.

En 1955 H. Furstenberg utilizó progresiones aritméticas infinitas de números enteros, para construir una base $\mathcal{B}_F$ para una topología τ_F de $\mathbb{Z}$. Su artículo ([6]) consiste en un párrafo de 12 líneas en el que no se indica, a detalle, que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es en realidad un espacio topológico metrizable. En la Sección 2.2, definimos formalmente la familia $\mathcal{B}_F$ y probaremos, a detalle, que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es un espacio topológico segundo numerable y metrizable. También veremos que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ no es conexo y, como consecuencia de las propiedades topológicas que posee dicho espacio, presentaremos la elegante prueba que H. Furstenberg dió, de que el conjunto de los números primos es infinito.

En 1959 S. W. Golomb presentó en [7] una topología τ_G en $\mathbb{N}$ que tiene como base una familia especial de progresiones aritméticas. También analizaremos su ejemplo. Ya antes, en 1953, M. Brown había presentado el espacio topológico conexo $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Sin embargo, la prueba de la conexidad, presentada por S. W. Golomb utiliza Teoría de Números, mientras que la M. Brown es meramente topológica. Aquí presentaremos una prueba de la conexidad de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, usando Teoría de Números.

2.2. Las Topologías de Furstenberg y de Golomb

Recordemos que si a y b son dos enteros, entonces el símbolo $\langle a, b\rangle$ representa el máximo común divisor de a y b, y que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Consideremos las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P_F(a,b) &= \{az+b : z \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{para } a \in \mathbb{N} \text{ y } b \in \mathbb{Z}, \\ P_G(a,b) &= \{an+b : n \in \mathbb{N}_0\}, \qquad \text{para } a, b \in \mathbb{N} \text{ con } \langle a, b\rangle = 1. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Utilizando la notación clásica del Álgebra Moderna, como la que indicamos en la Sección 1.4, tenemos que

$$P_F(a,b) = a\mathbb{Z} + b \quad \text{y} \quad P_G(a,b) = a\mathbb{N}_0 + b.$$

Además $P_F(a,0) = a\mathbb{Z}$ y $P_F(a,0) \cap \mathbb{N} = a\mathbb{N}$, para cada $a \in \mathbb{N}$. También observemos que si $a \geqq 2$, entonces $x \in P_F(a,b)$ *si y sólo si* $x \equiv b\,(\text{mód } a)$, y lo mismo sucede si $x \in P_G(a,b)$.

Notemos que si $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, entonces

$$P_F(a,b) = \{\ldots, b-2a, b-a, b, b+a, b+2a, \ldots\}$$

es la *progresión aritmética* que inicia en b y cuya constante, salto o diferencia es a. Por otro lado, si $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\langle a, b\rangle = 1$, entonces

$$P_G(a,b) = \{b, b+a, b+2a, \ldots\}$$

es la progresión aritmética que inicia en b y salta a en los enteros positivos. Por ejemplo

$$\begin{aligned} P_F(3,1) &= \{\ldots, 1-3(3), 1-2(3), 1-1(3), \mathbf{1}, 1+1(3), 1+2(3), 1+3(3), \ldots\} \\ &= \{\ldots, -8, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, 10, \ldots\}. \end{aligned}$$

En negritas hemos indicado el punto de inicio de la progresión aritmética $P_F(3,1)$. Observemos que

$$P_G(3,1) = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}.$$

Además $P_G(3,1) \subset P_F(3,1)$. En el siguiente teorema, enlistamos una serie de propiedades de los conjuntos $P_F(a,b)$ y $P_G(a,b)$ que hemos definido.

Teorema 2.2.1. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) *Para cada* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$*, el conjunto* $P_F(a, b)$ *es infinito numerable y* $b \in P_F(a, b)$.

2) *Para cada* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *con* $\langle a, b\rangle = 1$*, el conjunto* $P_G(a, b)$ *es infinito numerable y* $b \in P_G(a, b)$.

3) *Para toda* $a, b \in \mathbb{N}$ *con* $\langle a, b\rangle = 1$*, sucede que* $P_G(a, b) \subset P_F(a, b)$.

4) *Para cada* $b \in \mathbb{Z}$*, tenemos que* $P_F(1, b) = \mathbb{Z}$ *y, además,* $P_G(1, 1) = \mathbb{N}$.

5) *Para toda* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *y cada* $c \in P_F(a, b)$*, sucede que* $P_F(a, c) = P_F(a, b)$.

6) *Para cada* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *con* $\langle a, b\rangle = 1$ *y toda* $c \in P_G(a, b)$*, sucede que* $\langle a, c\rangle = 1$ *y* $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$.

7) *Para toda* $b \in \mathbb{Z}$ *y cada* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$*, tenemos que* $P_F(a_1a_2, b) \subset P_F(a_1, b) \cap P_F(a_2, b)$.

8) *Para toda* $b \in \mathbb{N}$ *y cada* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ *tales que* $\langle b, a_1\rangle = \langle b, a_2\rangle = 1$*, tenemos que* $\langle b, a_1a_2\rangle = 1$ *y* $P_G(a_1a_2, b) \subset P_G(a_1, b) \cap P_G(a_2, b)$.

Demostración. Probemos el inciso 1). Sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Entonces $b = a(0) + b \in P_F(a, b)$, es decir, $b \in P_F(a, b)$. Para ver la infinitud de $P_F(a, b)$, sea $f : \mathbb{Z} \to P_F(a, b)$ la función definida como $f(m) = am + b$, para cada $m \in \mathbb{Z}$. Si $n, m \in \mathbb{Z}$ son tales que $f(n) = f(m)$, entonces $an+b = am+b$, por lo que $an = am$ y, como $a \in \mathbb{N}$, la igualdad $an = am$ implica que $n = m$. Esto prueba que f es inyectiva. Claramente f es sobreyectiva, así que f es biyectiva. Luego $\mathbb{Z}$ y $P_F(a, b)$ tienen la misma cardinalidad. Ahora bien, por el Ejemplo 1.2.7, $\mathbb{Z}$ es infinito numerable, por lo que $P_F(a, b)$ es infinito numerable. Esto prueba 1).

Para probar 2), sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $\langle a, b\rangle = 1$. Entonces $b = a(0) + b \in P_G(a, b)$, es decir $b \in P_G(a, b)$. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{N}_0 \to P_G(a, b)$ definida como $f(m) = am+b$, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Como en el párrafo anterior, se prueba que f es biyectiva. Entonces $\mathbb{N}_0$ y $P_G(a, b)$ tienen la misma cardinalidad. Por tanto, $P_G(a, b)$ es infinito numerable. Esto prueba 2).

Para mostrar el 3), sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b\rangle = 1$ y $c \in P_G(a, b)$. Entonces $c = am + b$, para algún $m \in \mathbb{N}_0$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$, se sigue que b y m

son enteros tales que $c = am + b$. Luego $c \in P_F(a,b)$. Por tanto $P_G(a,b) \subset P_F(a,b)$, y 3) se cumple.

Para ver 4), sea $b \in \mathbb{Z}$. Por definición, $P_F(1,b) \subset \mathbb{Z}$. Para probar la otra contención, sea $c \in \mathbb{Z}$. Como $c = 1(c-b)+b$ y $(c-b) \in \mathbb{Z}$, tenemos que $c \in P_F(1,b)$. Luego $\mathbb{Z} \subset P_F(1,b)$, de donde $P_F(1,b) = \mathbb{Z}$. Ahora bien, por definición, $P_G(a,b) \subset \mathbb{N}$, para cada $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $\langle a,b \rangle = 1$, En particular, $P_G(1,1) \subset \mathbb{N}$. Para probar la otra contención, sea $n \in \mathbb{N}$. Como $n = 1(n-1)+1$ y $(n-1) \in \mathbb{N}_0$, se sigue que $n \in P_G(1,1)$. Así $\mathbb{N} \subset P_G(1,1)$, de donde $P_G(1,1) = \mathbb{N}$. Esto prueba 4).

Para probar 5), sean $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ y $c \in P_F(a,b)$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $c = b + za$. Si $y \in P_F(a,c)$, existe $z_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = c + z_1 a$. Luego

$$y = c + z_1 a = (b + za) + z_1 a = b + (z + z_1)a \in P_F(a,b).$$

Esto prueba que $P_F(a,c) \subset P_F(a,b)$. Para probar la otra contención, supongamos que $y \in P_F(a,b)$. Entonces existe $z_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = b + z_2 a$. Luego $y - z_2 a = b$. Como también $c - za = b$, deducimos que $y - z_2 a = c - za$. Por lo que $y = c + (z_2 - z)a \in P_F(a,c)$. Esto prueba que $P_F(a,b) \subset P_F(a,c)$. Por tanto $P_F(a,b) = P_F(a,c)$, probando así 5).

Para probar 6), sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a,b \rangle = 1$. Tomemos un elemento $c \in P_G(a,b)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $c = b + na$. Por el Teorema 1.3.8, $\langle c,a \rangle = \langle a,b \rangle = 1$. Además, la misma prueba que dimos para hacer ver que $P_F(a,c) \subset P_F(a,b)$, se puede realizar para probar que $P_G(a,c) \subset P_G(a,b)$.

Para probar 7), sean $b \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Tomemos un elemento $x \in P_F(a_1 a_2, b)$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = b + z(a_1 a_2).$$

Por tanto $x = b + (za_2)a_1 \in P_F(a_1,b)$ y $x = b + (za_1)a_2 \in P_F(a_2,b)$. Luego $P_F(a_1,b) \cap P_F(a_2,b)$. Esto termina la prueba de 7).

Para probar 8), sean $b \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\langle b,a_1 \rangle = \langle b,a_2 \rangle = 1$. Por el Teorema 1.3.15, tenemos que $\langle b, a_1 a_2 \rangle = 1$. La misma demostración que hicimos para probar que $P_F(a_1 a_2, b) \subset P_F(a_1,b) \cap P_F(a_2,b)$, se puede realizar para hacer ver que $P_G(a_1 a_2, b) \subset P_G(a_1,b) \cap P_G(a_2,b)$. Esto termina la prueba de 8). ■

Consideremos ahora las familias

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_F &= \{P_F(a,b)\colon (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{B}_G &= \{P_G(a,b)\colon (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ y } \langle a,b\rangle = 1\}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Vamos a definir una topología τ_F en $\mathbb{Z}$ que tiene por base a la familia $\mathcal{B}_F$. También definiremos una topología τ_G en $\mathbb{N}$ cuya base es $\mathcal{B}_G$.

Teorema 2.2.2. *La familia*

$$\tau_F = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{Z}\colon \ \textit{para cada } b \in U \textit{ existe } a \in \mathbb{N} \textit{ tal que } P_F(a,b) \subset U\}$$

es una topología en $\mathbb{Z}$. Además $\mathcal{B}_F \subset \tau_F$ y $\mathcal{B}_F$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$.

Demostración. Vamos a probar primero que τ_F es una topología. Por definición $\emptyset \in \tau_F$. Por la propiedad 4) del Teorema 2.2.1, para cada $b \in \mathbb{Z}$ el número natural 1 es tal que $P_F(1,b) = \mathbb{Z}$. Por tanto $\mathbb{Z} \in \tau_F$. Ahora supongamos que $\{U_i\colon i \in I\}$ es una familia de elementos en τ_F. Para probar que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau_F$ podemos suponer, sin perder generalidad, que cada U_i es no vacío. Dada $b \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $b \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \tau_F$ y $b \in U_{i_0}$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(a,b) \subset U_{i_0}$. En vista de que $U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, deducimos que $P_F(a,b) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Esto prueba que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau_F$.

Ahora supongamos que $U, V \in \tau_F$. Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap V \in \tau_F$. Consideremos, por tanto, que $U \cap V \neq \emptyset$ y tomemos un elemento $b \in U \cap V$. Como $b \in U$, existe $a_1 \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(a_1, b) \subset U$. También $b \in V$, así que existe $a_2 \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(a_2, b) \subset V$. Notemos que $a_1a_2 \in \mathbb{N}$ y, usando la propiedad 7) del Teorema 2.2.1, tenemos que

$$P_F(a_1a_2, b) \subset P_F(a_1, b) \cap P_F(a_2, b) \subset U \cap V.$$

Esto prueba que $U \cap V \in \tau_F$. Por tanto, τ_F es una topología en $\mathbb{Z}$.

Para mostrar que $\mathcal{B}_F \subset \tau_F$, tomemos un elemento $P_F(a,b) \in \mathcal{B}_F$. Sea $c \in P_F(a,b)$. Por la propiedad 5) del Teorema 2.2.1, $P_F(a,c) = P_F(a,b)$. Como consecuencia de esto, $P_F(a,b) \in \tau_F$. Esto muestra que $\mathcal{B}_F \subset \tau_F$.

Para terminar la prueba notemos que la definición de τ_F implica que cada miembro de τ_F es unión de elementos de $\mathcal{B}_F$. En efecto, si $U \in \tau_F$ entonces, para cada $b \in U$, existe $a_b \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(a_b, b) \subset U$. Luego, utilizando que $b \in P_F(a_b, b)$ para toda $b \in U$, resulta que $U = \bigcup_{b \in U} P_F(a_b, b)$. Esto prueba que cada miembro de τ_F es unión de elementos de la familia $\mathcal{B}_F$. Por tanto, $\mathcal{B}_F$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. ■

Definición 2.2.3. *La topología τ_F que definimos en el* Teorema 2.2.2*, se llama la* ***topología de Furstenberg*** *de $\mathbb{Z}$. A la base $\mathcal{B}_F$ la llamaremos la* ***base de Furstenberg*** *de $\mathbb{Z}$.*

Con respecto a la familia $\mathcal{B}_G$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4. *La familia*

$$\tau_G = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \colon \text{ para cada } b \in U \text{ existe } a \in \mathbb{N} \text{ tal que } \langle a, b\rangle = 1 \text{ y } P_G(a, b) \subset U\}$$

es una topología en $\mathbb{N}$. Además $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$ y $\mathcal{B}_G$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Demostración. Vamos a probar primero que τ_G es una topología. Por definición $\emptyset \in \tau_G$. Notemos que para cada $b \in \mathbb{N}$, el natural 1 es tal que $\langle 1, b\rangle = 1$ y $P_G(1, b) \subset \mathbb{N}$. Por tanto $\mathbb{N} \in \tau_G$. Ahora supongamos que $\{U_i \colon i \in I\}$ es una familia de elementos en τ_G. Para probar que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_G$ podemos suponer, sin perder generalidad, que cada U_i es no vacío. Dada $b \in \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $b \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \tau_G$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a, b\rangle = 1$ y $P_G(a, b) \subset U_{i_0}$. En vista de que $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, deducimos que $P_G(a, b) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Esto prueba que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_G$.

Ahora supongamos que $U, V \in \tau_G$. Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap V \in \tau_G$. Consideremos, por tanto, que $U \cap V \neq \emptyset$ y tomemos un elemento $b \in U \cap V$. Como $b \in U$ existe $a_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, a_1\rangle = 1$ y $P_G(a_1, b) \subset U$. También $b \in V$, así que existe $a_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, a_2\rangle = 1$ y $P_G(a_2, b) \subset V$. Notemos que

$a_1a_2 \in \mathbb{N}$. Además, utilizando la propiedad 8) del Teorema 2.2.1, $\langle b, a_1a_2\rangle = 1$ y

$$P_G(a_1a_2, b) \subset P_G(a_1, b) \cap P_G(a_2, b) \subset U \cap V.$$

Esto prueba que $U \cap V \in \tau_G$, por lo que τ_G es una topología en $\mathbb{N}$.

Para mostrar que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$, tomemos un elemento $P_G(a, b) \in \mathcal{B}_G$. Entonces $a, b \in \mathbb{N}$ y $\langle a, b\rangle = 1$. Sea $c \in P_G(a, b)$. Por la propiedad 6) del Teorema 2.2.1, $\langle a, c\rangle = 1$ y $P_G(a, c) \subset P_G(a, b)$. Como consecuencia de esto, $P_G(a, b) \in \tau_G$. Esto prueba que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$.

Para terminar la prueba notemos que la definición de τ_G implica que cada miembro de τ_G es una unión de elementos de $\mathcal{B}_G$. En efecto, si $U \in \tau_G$ entonces, para cada $b \in U$, existe $a_b \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, a_b\rangle = 1$ y $P_G(a_b, b) \subset U$. Luego, utilizando que $b \in P_G(a_b, b)$ para toda $b \in U$, resulta que $U = \bigcup_{b\in U} P_G(a_b, b)$. Esto prueba que cada miembro de τ_G es una unión de elementos de la familia $\mathcal{B}_G$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_G$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$. ■

Definición 2.2.5. *La topología τ_G que definimos en el* Teorema 2.2.4*, se llama la **topología de Golomb** de $\mathbb{N}$. A la base $\mathcal{B}_G$ la llamaremos la **base de Golomb** de $\mathbb{N}$.*

2.3. Propiedades de $(\mathbb{Z}, \tau_F)$

Vamos ahora a mostrar varios resultados en torno a los espacios topológicos $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ y $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En la presente sección probaremos principalmente propiedades de $(\mathbb{Z}, \tau_F)$.

Teorema 2.3.1. *Los espacios topológicos $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ y $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son segundo numerables. Además*

1) *Cada subconjunto abierto y no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es infinito.*

2) *Cada subconjunto abierto y no vacío en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es infinito.*

3) *Para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, el conjunto $P_F(a, b)$ es abierto y cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.2, $\mathcal{B}_F$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Consideremos la función $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{B}_F$ definida, para $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, como $f(a,b) = P_F(a,b)$. Es claro que f es una función sobreyectiva. Como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son conjuntos numerables, por el Teorema 1.2.6, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ es numerable. Luego, utilizando el Teorema 1.2.8, deducimos que $\mathcal{B}_F$ es numerable. Esto prueba que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es segundo numerable.

Consideremos el conjunto $A = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon \langle a,b \rangle = 1\}$. Como $\mathbb{N}$ es numerable, por el Teorema 1.2.6, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Usando el Teorema 1.2.4, deducimos que A es numerable. Ahora consideremos la función $g\colon A \to \mathcal{B}_G$ definida, para $(a,b) \in A$, como $g(a,b) = P_G(a,b)$. Entonces g es una función sobreyectiva y, como A es numerable, por el Teorema 1.2.8, $\mathcal{B}_G$ es numerable. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es segundo numerable.

Para probar 1) sea U un subconjunto abierto y no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Tomemos un punto $b \in U$. Como $\mathcal{B}_F$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(a,b) \subset U$. Por la propiedad 1) del Teorema 2.2.1, $P_F(a,b)$ es infinito. Luego U es infinito. Esto prueba 1). La prueba de 2) es similar.

Para probar 3) tomemos $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Notemos que $P_F(a,b)$ es abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ por ser un elemento de la base $\mathcal{B}_F$ del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Si $a = 1$ entonces, por la propiedad 4) del Teorema 2.2.1, $P_F(a,b) = P_F(1,b) = \mathbb{Z}$ y, por tanto, $P_F(a,b)$ es cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Supongamos que $a \neq 1$. Como $P_F(a,b)$ es la progresión aritmética que inicia en b y salta a, es fácil probar que

$$P_F(a,b) = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{a-1} P_F(a, b+i) \right).$$

Notemos que $\bigcup_{i=1}^{a-1} P_F(a, b+i)$ es una unión de subconjuntos abiertos en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ y, por tanto, es un abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Esto prueba que $P_F(a,b)$ es cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. ■

Teorema 2.3.2. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es metrizable y no es conexo.*

Demostración. Por [5, Teorema 6.1.1 (ii), pág. 352], una forma de probar que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ no es conexo, es hacer ver que algún subconjunto no vacío y propio de $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, es abierto y cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Por la parte 3) del Teorema 2.3.1, $P_F(2, 1)$ satisface dichas propiedades (de hecho, para cada $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times \mathbb{Z}$, $P_F(a, b)$ es un subconjunto abierto y cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, que es no vacío y propio).

Como $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es segundo numerable, para ver que dicho espacio es metrizable, por el Teorema de Metrización de Urysohn (Teorema 1.5.20), basta ver que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es T_3. Ahora bien, por la propiedad 3) del Teorema 2.3.1, $\mathcal{B}_F$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ tal que cada uno de sus elementos es abierto y cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Entonces, para probar que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es T_3, por el Corolario 1.5.11, basta ver que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es T_1. Para probar esto, sean $b, c \in \mathbb{Z}$ con $b \neq c$. Hagamos $a = |b - c| + 1$. Entonces $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $P_F(a, b)$ es un abierto en $\mathbb{Z}$ tal que $b \in P_F(a, b)$, Además $c \notin P_F(a, b)$. Para probar esto último supongamos, por el contrario, que $c \in P_F(a, b)$. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $c = b + az$. Como $b \neq c$ tenemos que $z \neq 0$. Supongamos que $b \geqq c$. Entonces $b - c \geqq 0$ y $a = |b - c| + 1 = b - c + 1$. Luego

$$c = b + az = b + (b - c + 1)z = (1 + z)b - cz + z$$

de donde $(1 + z)c - (1 + z)b = z$ o, equivalentemente, $(1 + z)(c - b) = z$. Si $z = -1$, entonces la igualdad anterior se convierte en decir que $0 = -1$, lo cual es un absurdo. Por tanto $z \neq -1$ y entonces el entero $c - b$ es igual a $\dfrac{z}{1 + z}$. Esto implica que la fracción $\dfrac{z}{z + 1}$ es un entero. Como $\langle z, z + 1 \rangle = 1$, tenemos que $\dfrac{z}{z + 1}$ es un entero si y sólo si $z = 0$, lo cual es una contradicción. Esto termina la prueba del caso $b \geqq c$. Si $b < c$, entonces $b - c < 0$ y $a = |b - c| + 1 = -b + c + 1$. Luego

$$c = b + az = b + (c - b + 1)z = (1 - z)b + cz + z$$

de donde $(1 - z)c = (1 - z)b + z$ o, equivalentemente, $(1 - z)(c - b) = z$. Si $z = 1$, entonces la igualdad anterior se convierte en decir que $0 = 1$, lo cual es un absurdo. Por tanto $z \neq 1$ y entonces el entero $c - b$ es igual a $\dfrac{z}{1 - z}$. Esto implica que la fracción $\dfrac{z}{1 - z}$ es un entero. Como $\langle z, 1 - z \rangle = 1$, tenemos que $\dfrac{z}{1 - z}$ es un entero si y sólo si $z = 0$, lo cual es una contradicción. Notemos que dicha contradicción proviene de suponer que $c \in P_F(a, b)$. Por tanto, $c \notin P_F(a, b)$.

Hemos probado que $P_F(a,b)$ es un abierto en $\mathbb{Z}$ tal que $b \in P_F(a,b)$ y $c \notin P_F(a,b)$. Notemos que $P_F(a,c)$ es un abierto en $\mathbb{Z}$ tal que $c \in P_F(a,c)$ y, por un procedimiento similar al que hemos desarrollado, se demuestra que $b \notin P_F(a,c)$. Esto prueba que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es T_1. ■

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 2.3.3. *Un espacio topológico X es*

a) ***Hereditariamente disconexo*** *si no contiene un subconjunto conexo con más de un elemento.*

b) ***Cero-dimensional*** *si X es T_1 y posee una base $\mathcal{B}$ tal que, para cada $B \in \mathcal{B}$, tenemos que B es abierto y cerrado en X.*

Por el Corolario 1.5.11, los espacios cero-dimensionales satisfacen el axioma de separación T_3.

Teorema 2.3.4. *Todo espacio cero-dimensional es hereditariamente disconexo.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio cero-dimensional. Entonces X es T_1 y existe una base $\mathcal{B}$ en X tal que, para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto B es abierto y cerrado en X. Si X no es hereditariamente disconexo, entonces existe un subconjunto conexo C de X con más de un elemento. Como X es T_1 y dicha propiedad es hereditaria, sucede que C es T_1. Además $\mathcal{B}_C = \{B \cap C \colon B \in \mathcal{B}\}$ es una base para el espacio topológico C (con su topología relativa) tal que cada uno de sus elementos es abierto y cerrado en C.

Ahora bien, como C tiene más de un elemento, existen $a, b \in C$ tales que $a \neq b$. Luego $C \setminus \{b\}$ es un abierto en C tal que $a \in C \setminus \{b\}$. Tomemos un elemento $D \in \mathcal{B}_C$ tal que $a \in D \subset C \setminus \{b\}$. Entonces D es un subconjunto propio y no vacío del conjunto conexo C, que es abierto y cerrado en C. Esto es una contradicción que proviene de haber supuesto que X no es hereditariamente disconexo. Por consiguiente, X es hereditariamente disconexo. ■

Como $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es T_1 y los elementos de la base $\mathcal{B}_F$ son abiertos y cerrados en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.5. *El espacio topologico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es cero-dimensional y, por tanto, hereditariamente disconexo.*

Como consecuencia del teorema anterior, para cada $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, el conjunto $P_F(a, b)$ no es conexo en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. En particular, como $\mathbb{Z} = P_F(1, 1)$, el espacio $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ no es conexo.

Supongamos que $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos. Utilizando las propiedades topológicas que hemos mencionado que posee $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, vamos a mostrar la prueba de H. Furstenberg del hecho de que $\mathbb{P}$ es infinito.

Teorema 2.3.6. *El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.*

Demostración. Si $p \in \mathbb{P}$, entonces

$$P_F(p, 0) = \{pz + 0 \colon z \in \mathbb{Z}\} = \{pz \colon z \in \mathbb{Z}\}$$

es el conjunto de los enteros que son múltiplos de p. Notemos que $P_F(p, 0) \subset \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$, para cada $p \in \mathbb{P}$. Entonces $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} P_F(p, 0) \subset \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Tomemos ahora un elemento $c \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Entonces c es un entero distinto de 1 y de -1. Luego, por el Teorema 1.3.22, c es múltiplo de algún número primo. Entonces existe $p_c \in \mathbb{P}$ tal que $c \in P_F(p_c, 0)$. Esto prueba que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \subset \bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} P_F(p, 0)$. Como la otra contención también se cumple, tenemos que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} P_F(p, 0).$$

Para cada $p \in \mathbb{P}$, por la parte 3) del Teorema 2.3.1, el conjunto $P_F(p, 0)$ es cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Si suponemos que $\mathbb{P}$ es finito tenemos, por tanto que $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} P_F(p, 0)$ es una unión finita de subconjuntos cerrados en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Luego $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} P_F(p, 0)$ es cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. Esto implica que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ es cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ y, como consecuencia de esto, el conjunto finito y no vacío $\{-1, 1\}$ es abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$. En vista de que esto contradice la parte 1) del Teorema 2.3.1, deducimos que $\mathbb{P}$ es infinito. ■

Sea $f \colon X \to Y$ una función entre los espacios topológicos X y Y. Recordemos que f es *abierta* si para cada conjunto abierto U en X, sucede $f(U)$

es abierto en Y. Si $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces es fácil probar que f es abierta si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto $f(B)$ es abierto en Y. Si f es biyectiva, entonces es fácil verificar que f es abierta si y sólo si la función inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ de f es continua. Utilizaremos estos dos resultados para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.3.7. *La función $f\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ definida, para cada $n \in \mathbb{Z}$ como $f(n) = n+1$ es un homeomorfismo y, su inversa, es el homeomorfismo $f^{-1}\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ definido, para cada $m \in \mathbb{Z}$, como $f(m) = m - 1$.*

Demostración. Es claro que f es una función biyectiva. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$(f \circ f^{-1})(n) = f(f^{-1}(n)) = f(n-1) = (n-1) + 1 = n$$

y

$$(f^{-1} \circ f)(n) = f^{-1}(f(n)) = f^{-1}(n+1) = (n+1) - 1 = n.$$

Por tanto f^{-1} es la función inversa de f. Vamos a probar que

1) para cada $(a, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, tenemos que $f(P_F(a, n)) = P_F(a, f(n))$.

Para probar 1), sean $(a, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ y $c \in f(P_F(a, n))$. Entonces $c = f(d)$, para algún elemento $d \in P_F(a, n)$. Tomemos $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d = n + am$. Luego $c = f(d) = d + 1 = n + 1 + am = f(n) + am \in P_F(a, f(n))$. Esto prueba que $f(P_F(a, n)) \subset P_F(a, f(n))$. Para probar la otra contención, supongamos ahora que $c \in P_F(a, f(n))$. Entonces $c = am + f(n)$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Sea $d = n + am$. Notemos que $d \in P_F(a, n)$ y, además, $f(d) = d + 1 = n + 1 + am = f(n) + am = c$. Luego $c \in f(P_F(a, n))$. Esto prueba que $P_F(a, f(n)) \subset f(P_F(a, n))$, por lo que 1) es cierto.

Una prueba similar a la mostrada en 1), hace ver que:

2) para cada $(a, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, tenemos que $f^{-1}(P_F(a, n)) = P_F(a, f^{-1}(n))$.

De 1) y el hecho de que los elementos de la familia $\mathcal{B}_F$

$$\mathcal{B}_F = \{P_F(a, b)\colon (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$

son una base para la topología τ_F de $\mathbb{Z}$, resulta que f es una función abierta. De manera similar, usando 2), tenemos que f^{-1} es una función abierta. Esto implica, usando la biyectividad de f, que f y f^{-1} son funciones continuas. Por tanto f es un homeomorfismo. Naturalmente, también la función inversa f^{-1} de f es un homeomorfismo. ■

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 2.3.8. *Un espacio topológico X es **homogéneo** si para cada $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f\colon X \to X$ tal que $f(x) = y$.*

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 2.3.9. *El espacio $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Si $x = y$ la función identidad $1_{\mathbb{Z}}\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ es un homeomorfismo tal que $1_{\mathbb{Z}}(x) = y$. Supongamos, por tanto, que $x \neq y$. Si $x < y$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = x+k$. Por el Teorema 2.3.7, la función $f\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ definida, para cada $n \in \mathbb{Z}$ como $f(n) = n+1$ es un homeomorfismo. Entonces $f^k\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ es un homeomorfismo tal que $f^k(x) = x + k = y$. Supongamos, por último, que $y < x$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = y + m$. Consideremos la función inversa f^{-1} del homeomorfismo f que definimos en el caso anterior. Entonces f^{-1} es un homeomorfismo. También $f^{-m}\colon (\mathbb{Z}, \tau_F) \to (\mathbb{Z}, \tau_F)$ es un homeomorfismo y $f^{-m}(x) = x - m = y$. Esto prueba que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es homogéneo. ■

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathbb{P}_0 = \{\pm p\colon p \in \mathbb{P}\}.$$

Notemos que $\mathbb{P}_0$ es el conjunto de los números primos junto con sus negativos. Los elementos de $\mathbb{P}_0$ se conocen normalmente como los *enteros primos*. En el Teorema 1.3.44 enunciamos el Teorema de Dirichlet, el cual dice que si $a, b \in \mathbb{N}$ con $b > 1$ y $\langle a, b\rangle = 1$, entonces existe una cantidad infinita de números primos p para los cuales $p \equiv a \pmod{b}$. Notemos que $p \equiv a \pmod{b}$ si y sólo si $p \in P_F(b, a) \cap \mathbb{N}$. Por tanto, en términos de los elementos de la base $\mathcal{B}_F$ de τ_F, el Teorema de Dirichlet dice que si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $b > 1$ y $\langle a, b\rangle = 1$, entonces el conjunto $P_F(b, a) \cap \mathbb{P}$ es infinito. Naturalmente, si $b = 1$, entonces el conjunto $P_F(b, a) \cap \mathbb{P}$ es infinito, pues $P_F(b, a) = P_F(1, a) = \mathbb{Z}$ y, por tanto, $P_F(b, a) \cap \mathbb{P} = \mathbb{P}$ es infinito (Teorema 2.3.6). Tenemos entonces que

($\star$) si $a, b \in \mathbb{N}$ y $\langle a, b\rangle = 1$, entonces el conjunto $P_F(b, a) \cap \mathbb{P}$ es infinito.

Utilizaremos ($\star$) para probar que, en el espacio $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, la cerradura del conjunto $\mathbb{P}_0$ es la unión de $\mathbb{P}_0$ con el conjunto $\{-1, 1\}$.

Teorema 2.3.10. $\text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}$.

Demostración. Sea $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Hagamos $a = 2|b|$, donde $|b|$ es es el valor absoluto de b. Entonces $|b| = b$ si $b \geqq 0$, mientras que $|b| = -b$ si $b < 0$. Por esta razón, podemos decir que $|b| = \pm b$. Ahora bien, $x \in P_F(a, b)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = an + b = 2|b|n + b = \pm 2bn + b = b(1 \pm 2n).$$

Como $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, el producto $b(1 \pm 2n)$ es un entero primo si y sólo si $n = 0$, en cuyo caso dicho número coincide con b. Por tanto

$$P_F(a, b) \cap \mathbb{P}_0 = \begin{cases} \{b\}, & \text{si } b \in \mathbb{P}_0; \\ \emptyset, & \text{si } b \notin \mathbb{P}_0. \end{cases}$$

Esto muestra que si $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ y, además, $b \notin \mathbb{P}_0$, entonces $P_F(2|b|, b)$ es un abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ que tiene a b y no intersecta a $\mathbb{P}_0$. Luego, $b \notin \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Naturalmente $\mathbb{P}_0 \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$, por lo que, para determinar $\text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$, solo debemos verificar si contiene a los enteros $-1, 0$ y 1. Notemos que $P_F(4, 0)$ es un abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ que tiene a 0. Como $P_F(4, 0) = \{4z : z \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de los enteros que son múltiplos de 4, resulta que $P_F(4, 0) \cap \mathbb{P}_0 = \emptyset$. Luego $0 \notin \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Consideremos ahora un abierto U en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ tal que $1 \in U$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(c, 1) \subset U$. Como $\langle c, 1\rangle = 1$, por ($\star$), $P_F(c, 1) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. En particular $U \cap \mathbb{P}_0 \neq \emptyset$. Esto prueba que $1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. De manera similar se prueba que $-1 \in \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. Por consiguiente, $\text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}$. ■

Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico y que $Y \subset X$. Recordemos que $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ es la topología relativa de X a Y. Es conocido que, cuando Y posee la topología τ_Y, si $A \subset Y$, entonces $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$.

Corolario 2.3.11. *$\text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{-1, 1\}$ y $\text{cl}_{(\mathbb{N},(\tau_F)_\mathbb{N})}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{1\}$, donde $(\tau_F)_\mathbb{N}$ es la topología relativa de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.*

Demostración. Como $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_0$, usando el teorema anterior, tenemos que

$$\mathbb{P} \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}) \subset \text{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0) = \mathbb{P}_0 \cup \{-1, 1\}.$$

Por tanto, para determinar $\mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P})$, debemos verificar si contiene a los enteros -1, 1 y a los de la forma $-p$, donde $p \in \mathbb{P}$. Sea U un abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ tal que $1 \in U$. Entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $P_F(c, 1) \subset U$. Como $\langle c, 1\rangle = 1$, por $(\star)$, $P_F(c, 1) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. En particular $U \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Esto prueba que $1 \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}_0)$. De manera similar se prueba que $-1 \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P})$. Supongamos ahora que $p \in \mathbb{P}$. Notemos que $x \in P_F(3p, -p)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = 3pn - p = p(3n - 1).$$

Como $p \in \mathbb{P}$, para ninguna $n \in \mathbb{Z}$ el producto $p(3n-1)$ es un número primo. Por tanto $P_F(3p, -p)$ es un abierto en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ tal que $-p \in P_F(3p, -p)$ y $P_F(3p, -p) \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Luego $-p \notin \mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P})$. Esto prueba que $\mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}) = \mathbb{P} \cup \{-1, 1\}$. Para probar la segunda parte, notemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},(\tau_F)_\mathbb{N})}(\mathbb{P}) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{Z},\tau_F)}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{N} = (\mathbb{P} \cup \{-1, 1\}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{P} \cup \{1\}.$$

■

2.4. Propiedades de $(\mathbb{N}, \tau_G)$

Ahora vamos a considerar propiedades del espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Como primera propiedad tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.1. *Para cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunto $\{np \colon n \in \mathbb{N}\} = P_F(p, 0) \cap \mathbb{N}$, de los múltiplos positivos de p, es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.*

Demostración. Observemos que

$$\mathbb{N} \setminus \{np \colon n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i=1}^{p-1} P_G(p, i).$$

Como p es un número primo, por el Teorema 1.3.18, $\langle p, i\rangle = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Por tanto cada conjunto $P_G(p, i)$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego, la unión $\bigcup_{i=1}^{p-1} P_G(p, i)$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Entonces $\mathbb{N} \setminus \{np \colon n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, de esta manera, $\{np \colon n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.
■

Usando las propiedades topológicas que hemos dado para $(\mathbb{N}, \tau_G)$, mostramos ahora la prueba que W. Golomb presentó, del hecho de que el conjunto $\mathbb{P}$ es infinito.

Teorema 2.4.2. *$\mathbb{P}$ es infinito.*

Demostración. Por el Teorema de Factorización Única, todo número natural distinto de 1 es múltiplo de algún número primo. Por tanto

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{np \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Si el conjunto $\mathbb{P}$ es finito, por el Teorema 2.4.1, $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{np \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una unión finita de subconjuntos cerrados en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{np \colon n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, por tanto, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $\{1\}$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Pero esto contradice que los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son infinitos. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ es infinito. ∎

Teorema 2.4.3. *El espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \neq b$. Como $\mathbb{P}$ es infinito, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\max\{a, b\} < p$. Por el Teorema 1.3.18, $\langle p, a \rangle = \langle p, b \rangle = 1$, así que $P_G(p, a), P_G(p, b)$ son abiertos tales que $a \in P_G(p, a)$ y $b \in P_G(p, b)$. Ahora probemos que

$$P_G(p, a) \cap P_G(p, b) = \emptyset. \tag{2.4.1}$$

Supongamos que existe $z \in P_G(p, a) \cap P_G(p, b)$, y consideremos los números naturales $c = \max\{a, b\}$ y $d = \min\{a, b\}$. Como $z \in P_G(p, a)$ y $z \in P_G(p, b)$, tenemos que $z \equiv a \,(\text{mód } p)$ y $z \equiv b \,(\text{mód } p)$. Debido a que la congruencia es simétrica y transitiva, se sigue que $a \equiv b \,(\text{mód } p)$. Luego $c \equiv d \,(\text{mód } p)$, lo que implica que $p \mid (c - d)$. Ahora bien, al ser p y $c - d$ enteros positivos, se sigue que $p \leqq (c - d)$. Pero $p \leqq (c - d) < c = \max\{a, b\}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Así se tiene la igualdad en (2.4.1) y, por lo tanto, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2. ∎

Un resultado muy importante en este trabajo, es el siguiente teorema, cuya prueba utiliza el Teorema Chino del Residuo. De acuerdo con la Definición 1.5.9, un espacio topológico (X, τ) es $T_{2\frac{1}{2}}$ si para cada $x, y \in X$

con $x \neq y$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) = \emptyset$. Como indicamos, los espacios T_3 son $T_{2\frac{1}{2}}$ y los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ son T_2. Ya mostramos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2. Ahora veremos que dicho espacio no es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Teorema 2.4.4. *Si U y V son abiertos no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, entonces $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(U) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(V) \neq \emptyset$. En particular, el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Tomemos $x \in U$ y $y \in V$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, x\rangle = \langle b, y\rangle = 1$ y $P_G(a, x) \subset U$, $P_G(b, y) \subset V$. Afirmamos que

$$ab \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(a, x)) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P_G(b, y)). \tag{2.4.2}$$

Para probar esto, sea W un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $ab \in W$. Veremos que

$$P_G(a, x) \cap W \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P_G(b, y) \cap W \neq \emptyset. \tag{2.4.3}$$

Como W es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $ab \in W$, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\langle d, ab\rangle = 1$ y $P_G(d, ab) \subset W$. Si probamos que

$$P_G(d, ab) \cap P_G(a, x) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P_G(d, ab) \cap P_G(b, y) \neq \emptyset,$$

obtendremos (2.4.3). Primero veamos que

$$P_G(d, ab) \cap P_G(a, x) \neq \emptyset.$$

Si $d = 1$, entonces

$$P_G(1, ab) = \{n + ab \colon n \in \mathbb{N}_0\} = \{ab, 1 + ab, 2 + ab, 3 + ab, \ldots\}.$$

Por tanto $ab + x \in P_G(a, x)$ y $ab + x = 1 \cdot x + ab \in P_G(1, ab)$. Esto prueba que $P_G(1, ab) \cap P_G(a, x) \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $d \geq 2$. Notemos que un elemento $z \in P_G(d, ab) \cap P_G(a, x)$ satisface

$$z \equiv ab \,(\text{mód } d) \quad \text{y} \quad z \equiv x \,(\text{mód } a). \tag{2.4.4}$$

Por tanto, un elemento de $P_G(d, ab) \cap P_G(a, x)$ es una solución del sistema de congruencias (2.4.4) y, a la inversa, toda solución del sistema de congruencias (2.4.4), es un elemento de $P_G(d, ab) \cap P_G(a, x)$. Mostraremos, por tanto, que el sistema (2.4.4) tiene solución. Para ver esto notemos que $\langle d, a\rangle = 1$. En efecto, si $\langle d, a\rangle \neq 1$, entonces existe un número primo p tal que $p \mid d$ y $p \mid a$, luego $p \mid d$ y $p \mid ab$. Esto implica que $\langle d, ab\rangle \neq 1$, lo cual es una contradicción. Así que $\langle d, a\rangle = 1$. Luego, por el Teorema Chino del Residuo, el sistema (2.4.4) tiene solución . Esto muestra que $P_G(d, ab) \cap P_G(a, x) \neq \emptyset$.

Utilizando las mismas ideas, se prueba que $P_G(d, ab) \cap P_G(b, y) \neq \emptyset$. Entonces (2.4.3) es cierto y, por tanto, (2.4.2) es cierto. Luego $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(U) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(V) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Teorema 2.4.5. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *es conexo.*

Demostración. Supongamos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es conexo. Entonces existen U y V abiertos no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tales que

$$\mathbb{N} = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Notemos que $U = \mathbb{N} \setminus V$ y $V = \mathbb{N} \setminus U$, por lo que U y V también son cerrados en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Así, por el Teorema 2.4.4, tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(U) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(V) = U \cap V \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo. ■

En el Teorema 2.4.1 vimos que para cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunto $\{np\colon n \in \mathbb{N}\} = P_F(p, 0) \cap \mathbb{N}$, de los múltiplos positivos de p, es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Como dicho conjunto es un subconjunto propio y no vacío del espacio conexo $(\mathbb{N}, \tau_G)$, resulta que $\{np\colon n \in \mathbb{N}\}$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Como indicamos antes del Teorema 2.4.4, los espacios T_3 son $T_{2\frac{1}{2}}$. Ahora bien, luego de la Definición 1.5.19, de espacio metrizable, indicamos que los espacios metrizables satisfacen los axiomas de separación desde T_0 hasta T_4, que aparecen en la Definición 1.5.9. Por tanto, si un espacio topológico no satisface alguno de dichos axiomas de separación, entonces no es metrizable. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$, deducimos que tampoco es T_3 ni metrizable. Una prueba alternativa del hecho de que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es T_3, utilizando el Teorema 1.5.25, se presenta a continuación.

Corolario 2.4.6. $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *no es* T_3, *ni compacto ni localmente compacto.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_3. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo, por Teorema 1.5.25, sucede que $\mathbb{N}$ es no numerable o bien tiene solamente un elemento. Ambos casos no se cumplen, así que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es T_3. Supongamos ahora que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es compacto. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo y T_2, por el Teorema 1.5.26, deducimos que $\mathbb{N}$ es no numerable o bien posee un solo elemento. Como ambos casos no se cumplen, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es compacto. Supongamos, por último, que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es localmente compacto. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo y T_1, por el Teorema 1.5.27, volvemos a obtener que $\mathbb{N}$ es no numerable o bien posee solo un elemento. De esta contradicción, deducimos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente compacto. ∎

En el siguiente resultado mostramos que una buena cantidad de elementos de la forma $P_G(p, c)$, donde $p \in \mathbb{P}$, no son conexos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 2.4.7. *Sean $c, p \in \mathbb{N}$ tales que p es un número primo y $c < p$. Tomemos $a, b \in P_G(p, c)$ tales que $a < b$. Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $a = pm + c, b = pn + c$ y $0 \leqq m < n$. Entonces*

$$U = \bigcup_{i=0}^{m} P_G(p^{n+1}, pi + c) \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c) \tag{2.4.5}$$

son subconjuntos abiertos de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tales que $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $P_G(p, c) = U \cup V$. En particular, $P_G(p, c)$ no es conexo.

Demostración. Tomemos c, p, a, b, n y m como se indica en el teorema. Como p es un número primo y $\langle p, c \rangle = 1$, el Teorema 1.3.25, garantiza que

$$\langle p^{n+1}, pi + c \rangle = 1, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces podemos considerar los conjuntos que se indican en (2.4.5) y éstos son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. La propiedad 2) del Teorema 2.2.1 asegura que U y V son conjuntos infinitos. Como $0 \leqq m < n < p^n$, tenemos que $m + 1 \leqq n \leqq p^n - 1$. Por tanto

$$a = pm + c = p^{n+1}(0) + pm + c \in P_G(p^{n+1}, pm + c) \subset \bigcup_{i=0}^{m} P_G(p^{n+1}, pi + c) = U$$

y

$$b = pn + c = p^{n+1}(0) + pn + c \in P_G(p^{n+1}, pn + c) \subset \bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c) = V.$$

Es decir, $a \in U$ y $b \in V$. Para verificar U y V son ajenos supongamos, por el contrario, que existe un elemento $z \in U \cap V$. Entonces existen $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $j \in \{m+1, m+2, \ldots, p^n - 1\}$ tales que

$$z \in P_G(p^{n+1}, pi + c) \quad \text{y} \quad z \in P_G(p^{n+1}, pj + c).$$

Como $p^{n+1} > 1$, pues p es un número primo, tenemos que

$$z \equiv pi + c \,(\text{mód } p^{n+1}) \quad \text{y} \quad z \equiv pj + c \,(\text{mód } p^{n+1}).$$

La transitividad de la congruencia y los incisos 1) y 3) del Teorema 1.3.42 implican que $pi + c \equiv pj + c \,(\text{mód } p^{n+1})$, de donde $pi \equiv pj \,(\text{mód } p^{n+1})$. Esto implica que $i \equiv j \,(\text{mód } p^n)$. Sin embargo, como el conjunto

$$A = \{0, 1, \ldots, m, m+1, \ldots, p^n - 1\}$$

es un sistema completo de residuos módulo p^n, ningún par de elementos distintos de A son congruentes módulo p^n. En particular, como $i \leqq m < m + 1 \leqq j$, resulta que $i \not\equiv j \,(\text{mód } p^n)$. De esta contradicción se infiere que $U \cap V = \emptyset$.

Vamos a probar ahora que $U \cup V = P_G(p, c)$. Si $z \in U$, entonces existe $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $z \in P_G(p^{n+1}, pi + c)$. Tomemos $z_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $z = p^{n+1}z_0 + pi + c$. Entonces $z = p(p^n z_0 + i) + c \in P_G(p, c)$. De manera similar, si $z \in V$, existe $j \in \{m+1, m+2, \ldots, p^n - 1\}$ tal que $z \in P_G(p^{n+1}, pj + c)$. Al tomar $z_1 \in \mathbb{N}_0$ de modo que $z = p^{n+1}z_1 + pj + c$, deducimos que $z = p(p^n z_1 + j) + c \in P_G(p, c)$. Esto prueba que $U \cup V \subset P_G(p, c)$.

Para probar la otra contención, sea $z \in P_G(p, c)$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}_0$ para el cual $z = pk + c$. Por el Algoritmo de la División (Teorema 1.3.7), aplicado a k y p^n, existen $s, t \in \mathbb{N}_0$ de manera que $k = p^n s + t$ y $0 \leqq t < p^n$. Así obtenemos

$$z = pk + c = p(p^n s + t) + c = p^{n+1}s + pt + c. \tag{2.4.6}$$

Como $0 \leqq t < p^n$ y $0 \leqq m < p^n$, se sigue que

$$t \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\} = \{0, 1, \ldots, m\} \cup \{m+1, m+2, \ldots, p^n - 1\}.$$

Luego, de (2.4.6), tenemos que

$$z \in \left(\bigcup_{i=0}^{m} P_G(p^{n+1}, pi + c) \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{p^n - 1} P_G(p^{n+1}, pj + c) \right) = U \cup V.$$

Esto prueba que $P_G(p,c) \subset U \cup V$ y, como la otra contención también es cierta, $U \cup V = P_G(p,c)$. Esto termina la primera parte del teorema. Ahora bien, como el conjunto $P_G(p,c)$ ha sido escrito como la unión de dos conjuntos abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ que además son ajenos y no vacíos, por definición, $P_G(p,c)$ no es conexo. ■

Utilizaremos el resultado anterior para probar que el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es conexo en pequeño en ninguno de sus elementos.

Teorema 2.4.8. *El espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es conexo en pequeño en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $a_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo en pequeño en a_0. Definimos un elemento $P_G(p,c)$ como sigue: si a_0 es impar, tomamos $c = 1$ y $p = 2$. Si a_0 es par, tomamos $c = a_0$ y p un número primo tal que $c < p$. Como el conjunto de los número primos es infinito, tal primo p existe, suponiendo que a_0 es par. Notemos que

$$P_G(2,1) = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1,3,5,7,9,11,\ldots\}$$

es el conjunto de los naturales impares, así que $a_0 \in P_G(2,1) = P_G(p,c)$, en el caso en que a_0 es impar. Si a_0 es par, también tenemos que $a_0 \in P_G(p,c)$. Esto muestra que, en cualquier situación, $P_G(p,c)$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $a_0 \in P_G(p,c)$. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo en pequeño en a_0, por el Teorema 1.5.38, existe un conjunto conexo C en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $a_0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{N}}(C) \subset C \subset P_G(p,c)$. Por la parte 2) del Teorema 2.3.1, $\mathrm{int}_{\mathbb{N}}(C)$ es infinito, por lo cual C es infinito. Tomemos $a, b \in C$ tales que $a < b$. Como $a, b \in P_G(p,c)$, $a = pm + c$ y $b = pn + c$, para algunos $m, n \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leqq m < n$. Por el Teorema 2.4.7, los conjuntos

$$U = \bigcup_{i=0}^{m} P_G(p^{n+1}, pi + c) \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{j=m+1}^{p^n-1} P_G(p^{n+1}, pj + c)$$

son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tales que $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ y $P_G(p,c) = U \cup V$. Como a y b también son elementos de C, resulta que $U \cap C$ y $V \cap C$ son no vacíos. Además, del hecho de que $U \cap V = \emptyset$, se sigue que

$$(U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset.$$

Como $U \cup V = P_G(p, c)$ y $C \subset P_G(p, c)$, tenemos que

$$(U \cap C) \cup (V \cap C) = (U \cup V) \cap C = P_G(p, c) \cap C = C.$$

Con todo, hemos escrito al conjunto C como la unión de dos conjuntos abiertos en C, a saber $U \cap C$ y $V \cap C$, que además son ajenos y no vacíos. Luego C no es conexo. Como esto es una contradicción que viene de suponer que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo en pequeño en a_0, deducimos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es conexo en pequeño en a_0. ■

Corolario 2.4.9. *El espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 1.5.40, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. En particular es conexo en pequeño en el natural impar 1, lo cual contradice al teorema anterior. ■

La prueba que dimos en el Teorema 2.4.8 se puede adaptar para probar que el espacio $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ no es conexo en pequeño en ninguno de sus puntos. En particular, $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ no es localmente conexo.

Con respecto a la homogeneidad del espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$, tenemos la siguiente pregunta.

Pregunta 2.4.10. *¿Es $(\mathbb{N}, \tau_G)$ un espacio homogéneo?*

Dada $a \in \mathbb{N}$, definimos $\Theta(a) = \{p \in \mathbb{P} \colon p \mid a\}$. Notemos que en $\Theta(a)$ se encuentran los divisores de a que son números primos. En [23, Teorema 3.3, pág. 901], P. Szczuka probó el siguiente resultado, del cual se infiere la segunda parte del Teorema 2.4.7.

Teorema 2.4.11. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$P_F(a, b) \cap [b, \infty) = \{an + b \colon n \in \mathbb{N}_0\}$$

es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y sólo si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. En particular, si $\langle a, b \rangle = 1$, entonces $P_G(a, b)$ es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y sólo si $a = 1$.

Así pues, los únicos elementos de la base $\mathcal{B}_G$ de τ_G que son conexos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son los de la forma $P_G(1, b) = \{b, b + 1, b + 2, \ldots\}$, donde $b \in \mathbb{N}$.

En el Corolario 2.3.11 indicamos que la cerradura de $\mathbb{P}$ en el espacio $(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})$ es $\mathbb{P} \cup \{1\}$, por lo que $\mathbb{P}$ no es denso en $(\mathbb{N}, (\tau_F)_{\mathbb{N}})$. Como mostraremos, en la topología de Golomb sucede que $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$, es decir $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Para probar esto necesitamos unos resultados previos.

Lema 2.4.12. *Sea $P_G(a,b) \in \mathcal{B}_G$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos.*

2) *$P_G(a,b)$ contiene al menos un número primo.*

Demostración. Es claro que 1) implica 2). Supongamos ahora que todo elemento en la base $\mathcal{B}_G$ de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, posee al menos un número primo. Sea $P_G(a,b) \in \mathcal{B}_G$. Entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $an_1 + b$ es un número primo. Como $a < an_1 + b$ y $an_1 + b$ es primo, por el Teorema 1.3.18, $\langle a, an_1 + b\rangle = 1$. Entonces el elemento $P_G(a, an_1 + b)$ de $\mathcal{B}_G$ contiene al menos un número primo. Por tanto, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$an_2 + (an_1 + b) = a(n_2 + n_1) + b$$

es un número primo. Entonces $P_G(a,b)$ contiene dos numeros primos, a saber $an_1 + b$ y $a(n_2 + n_1) + b$. Como $a < a(n_2 + n_1) + b$ y $a(n_2 + n_1) + b$ es primo, por el Teorema 1.3.18, $\langle a, a(n_2 + n_1) + b\rangle = 1$. Por tanto, el elemento $P_G(a, a(n_2 + n_1) + b)$ de $\mathcal{B}_G$ contiene al menos un número primo. Entonces existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$an_3 + a(n_2 + n_1) + b = a(n_3 + n_2 + n_1) + b$$

es un número primo. Entonces $P_G(a,b)$ contiene tres números primos, a saber an_1, $a(n_2+n_1)+b$ y $a(n_3+n_2+n_1)+b$. Continuando de esta manera, resulta que el conjunto $P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Esto muestra que 2) implica 1). ■

Notemos que la afirmación del Teorema de Dirichlet (Teorema 1.3.44) se puede enunciar en términos de elementos de la base $\mathcal{B}_G$, es decir dado $P_G(a,b) \in \mathcal{B}_G$, con $a > 1$, entonces $P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Si $a = 1$ y $b \in \mathbb{N}$, entonces $\langle a,b\rangle = 1$ y $P_G(a,b) = \{b, b+1, b+2, \ldots\}$ contiene una cantidad infinita de números primos, en vista de que el conjunto $\{1, 2, \ldots, b-1\}$ es finito mientras que el conjunto $\mathbb{P}$

es infinito. Por tanto, para cada $P_G(a,b) \in \mathcal{B}_G$ se tiene que $P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Con esta observación será más práctico probar la siguiente equivalencia del Teorema de Dirichlet.

Teorema 2.4.13. *El Teorema de Dirichlet es equivalente a afirmar que $\mathbb{P}$ es denso en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Demostración. Supongamos que el Teorema de Dirichlet es cierto. Para ver que $\mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{N}$, sea U un abierto no vacío en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Tomemos $b \in U$ y $a \in \mathbb{N}$ de modo que $\langle a, b\rangle = 1$ y $P_G(a,b) \subset U$. Como estamos suponiendo que el Teorema de Dirichlet es válido, el conjunto $P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. En particular $P_G(a,b) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Luego $U \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Ahora supongamos que $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Tomemos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, b\rangle = 1$. Como $P_G(a,b)$ es un abierto no vacío en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, sucede que $P_G(a,b) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$. Luego $P_G(a,b)$ contiene al menos un número primo, y por el Lema 2.4.12, se sigue que $P_G(a,b)$ contiene una cantidad infinita de números primos. Por tanto, el Teorema de Dirichlet se cumple. ■

Notemos que el teorema anterior indica que una afirmación aritmética (el Teorema de Dirichlet, en este caso) es equivalente a una afirmación topológica (que el conjunto $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$). Como el Teorema de Dirichlet es cierto, por el Teorema 2.4.13, tenemos que:

Teorema 2.4.14. *El conjunto $\mathbb{P}$ es denso en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

El siguiente resultado asegura que $\mathbb{P}$ tiene interior vacío. En particular, $\mathbb{P}$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 2.4.15. *No existe un abierto no vacío U en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $U \subset \mathbb{P}$.*

Demostración. Supongamos que existe un abierto no vacío U en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $U \subset \mathbb{P}$. Tomemos $b \in U$ y $a \in \mathbb{N}$ de manera que $\langle a, b\rangle = 1$ y $P_G(a,b) \subset U$. Entonces cada miembro de $P_G(a,b)$ es un número primo. En particular, el elemento $a(a+b+1)+b$ de $P_G(a,b)$ es primo. Sin embargo, como $a+1 \geqq 2$, $a+b \geqq 3$ y

$$a(a+b+1)+b = a(a+1)+ab+b = a(a+1)+b(a+1) = (a+1)(a+b),$$

el número $a(a+b+1)+b$ es compuesto. De esta contradicción deducimos que no existe un abierto no vacío U en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $U \subset \mathbb{P}$. $\blacksquare$

Notemos que los números que terminan en 7 forman la progresión aritmética $P_G(10,7)$. Como $\langle 10, 7 \rangle = 1$, por el Teorema de Dirichlet, $P_G(10,7)$ contiene una infinidad de números de primos. Entonces existe un número infinito de números primos que terminan en 7. De igual manera, existen un número infinito de números primos que terminan en un impar dado q en el conjunto $\{3, 7, 9\}$.

2.5. La Topología de Kirch

El siguiente ejemplo es una "ligera" modificación de la topología de Golomb τ_G, en relación a los elementos de la base $\mathcal{B}_G$. Vamos a considerar ahora los miembros $P_G(a,b)$ de $\mathcal{B}_G$ tales que a es libre de cuadrados (ver Definición 1.3.29). De esta manera estarán dados los elementos de la base para una topología en $\mathbb{N}$ y, con esta modificación, $\mathbb{N}$ será conexo y, además, localmente conexo, cosa que no se da en el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Los resultados que aparecen en la presente sección, fueron presentados por A. M. Kirch en 1969, en el artículo [12]. Aunque él no lo mencionó como tal, él fue el primero en probar que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo.

Sea $\mathcal{B}_K$ la siguiente subcolección de $\mathcal{B}_G$:

$$\mathcal{B}_K = \{P_G(a,b) \in \mathcal{B}_G \colon a \text{ es libre de cuadrados}\}. \tag{2.5.1}$$

De acuerdo con la Definición 1.3.29, para que $a \in \mathbb{N}$ sea libre de cuadrados, debe suceder que $a > 1$ y, además, que cada vez que tengamos un número primo p tal que $p \mid a$, sucede que $p^2 \nmid a$.

Para probar que $\mathcal{B}_K$ es base para una topología en $\mathbb{N}$, mostraremos primero dos resultados esenciales sobre $\mathcal{B}_K$. De ahora en adelante denotaremos por $P_K(a,b)$ a los elementos de $\mathcal{B}_K$, para distinguirlos de los miembros de la base $\mathcal{B}_G$. Recordemos que, dados dos números naturales a y b, el símbolo $[a,b]$ denota el mínimo común múltiplo de a y b, mientras que $\langle a,b \rangle$ denota al máximo común divisor de a y b.

Teorema 2.5.1. *Sean* $P_K(a,b), P_K(c,d) \in \mathcal{B}_K$. *Si* $P_K(a,b) \cap P_K(c,d) \neq \emptyset$, *entonces para cada* $t \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$, *tenemos que* $P_K([a,c],t) \in \mathcal{B}_K$ *y, además,*

$$P_K([a,c],t) \subset P_K(a,b) \cap P_K(c,d). \tag{2.5.2}$$

Demostración. Sea $t \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$. Vamos a probar primero que $P_K([a,c],t)$ es un elemento de $\mathcal{B}_K$, es decir, que $\langle [a,c],t\rangle = 1$ y $[a,c]$ es un entero libre de cuadrados. Como $P_K(a,b)$ y $P_K(c,d)$ son elementos de $\mathcal{B}_G$ y $t \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$, por la parte 6) del Teorema 2.2.1, $\langle a,t\rangle = \langle c,t\rangle = 1$. Luego, del Teorema 1.3.15, se sigue que $\langle ac,t\rangle = 1$ y, como $[a,c] \mid ac$, por el Teorema 1.3.11, $\langle [a,c],t\rangle = 1$. Por otra parte, como a y c son enteros libres de cuadrados, el Teorema 1.3.34 implica que $[a,c]$ es un entero libre de cuadrados. Así, hemos probado que $P_K([a,c],t) \in \mathcal{B}_K$, para cada $t \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$.

Ahora vamos a probar que se satisface la contención (2.5.2). Como $t \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$, existen enteros $n, m \in \mathbb{N}_0$ para los cuales

$$t = an + b \quad \text{y} \quad t = cm + d. \tag{2.5.3}$$

Sea $z \in P_K([a,c],t)$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$z = [a,c]k_0 + t.$$

Como $[a,c]$ es un múltiplo común de a y c, existen enteros $r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$[a,c] = as \quad \text{y} \quad [a,c] = cr. \tag{2.5.4}$$

Luego, por (2.5.3) y (2.5.4), obtenemos que

$$z = (as)k_0 + t = a(sk_0) + an + b = a(sk_0 + n) + b$$

y

$$z = (cr)k_0 + t = c(rk_0) + cm + d = c(rk_0 + m) + d.$$

Sea $k_1 = sk_0 + n$ y $k_2 = rk_0 + m$. Entonces $z = ak_1 + b = ck_2 + d$, por lo que $z \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$ y, así, se cumple (2.5.2). Esto concluye la prueba del teorema. ■

Teorema 2.5.2. *Sean* $P_K(a,b), P_K(c,d) \in \mathcal{B}_K$. *Entonces*

$$P_K(a,b) \cap P_K(c,d) \neq \emptyset \quad \textit{si y sólo si} \quad b \equiv d \,(\text{mód } \langle a,c\rangle).$$

Demostración. Supongamos que $P_K(a,b) \cap P_K(c,d) \neq \emptyset$ y probemos que $b \equiv d \,(\text{mód } \langle a,c\rangle)$. Para ello, sea $z \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$. Luego

$$z = an_0 + b \qquad \text{y} \qquad z = cn_1 + d,$$

para algunos $n_0, n_1 \in \mathbb{N}_0$. Entonces $an_0 + b = cn_1 + d$, lo cual implica que

$$b - d = cn_1 - an_0. \tag{2.5.5}$$

Como $\langle a,c\rangle \mid c$ y $\langle a,c\rangle \mid a$, resulta que $\langle a,c\rangle$ divide a la combinación lineal $cn_1 - an_0$ de c y a. Luego, por (2.5.5), $\langle a,c\rangle \mid b - d$. Por tanto $b \equiv d \,(\text{mód } \langle a,c\rangle)$.

Ahora supongamos que $b \equiv d \,(\text{mód } \langle a,c\rangle)$ y demostremos que $P_K(a,b) \cap P_K(c,d) \neq \emptyset$. Como $b \equiv d \,(\text{mód } \langle a,c\rangle)$,

$$b - d = k_0\langle a,c\rangle \tag{2.5.6}$$

para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$. Además, por el Teorema 1.3.9, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ para los cuales

$$\langle a,c\rangle = as + ct. \tag{2.5.7}$$

De (2.5.6) y (2.5.7), obtenemos

$$b - d = k_0(as + ct) = a(k_0 s) + c(k_0 t).$$

Por lo que

$$a(-k_0 s) + b = c(k_0 t) + d. \tag{2.5.8}$$

Como $c > 0$ y $k_0 s \in \mathbb{R}$, por la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ (Teorema 1.3.12), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $cn_1 > k_0 s$. De manera similar, como $a > 0$ y $-k_0 t \in \mathbb{R}$, por la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $an_2 > -k_0 t$. Sea $n_0 = [n_1, n_2]$. Entonces $cn_0 \geqq cn_1 > k_0 s$ y $an_0 \geqq an_2 > -k_0 t$ por lo que $cn_0 - k_0 s > 0$ y $an_0 + k_0 t > 0$. Luego $cn_0 - k_0 s, an_0 + k_0 t \in \mathbb{N}$. Notemos ahora que la ecuación (2.5.8) es equivalente a

$$a(-k_0 s) + acn_0 + b = c(k_0 t) + acn_0 + d,$$

de donde

$$a(-k_0 s + cn_0) + b = c(k_0 t + an_0) + d. \tag{2.5.9}$$

Al hacer $n = -k_0 s + cn_0$ y $m = k_0 t + an_0$, notamos claramente de (2.5.9) que

$$x = an + b \in P_K(a,b) \quad \text{y} \quad x = cm + d \in P_K(c,d).$$

Por lo tanto $P_K(a,b) \cap P_K(c,d) \neq \emptyset$. Con esto concluimos la prueba del teorema. ■

Ya estamos en condiciones de probar que $\mathcal{B}_K$ es base para una topología en $\mathbb{N}$.

Teorema 2.5.3. *La colección $\mathcal{B}_K$ forma una base para una topología de $\mathbb{N}$.*

Demostración. Demostremos que $\mathcal{B}_K$ cumple con las propiedades B1) y B2) del Teorema 1.5.4. Observemos que para obtener la propiedad B1), basta con verificar que dado $a \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $B \in \mathcal{B}_K$ de manera que $a \in B$. Sea $a \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.4.2, existe $p \in \mathbb{P}$ para el cual $a < p$. Luego $p > 1$ es libre de cuadrados y $\langle p, a \rangle = 1$, por lo que $B = P_K(p,a)$ es un elemento de $\mathcal{B}_K$ tal que $a \in B$. Esto muestra que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_K} B$$

y, así, $\mathcal{B}_K$ satisface B1). Para verificar B2), sean $P_K(a,b), P_K(c,d) \in \mathcal{B}_K$ y $z \in P_K(a,b) \cap P_K(c,d)$. Por el Teorema 2.5.2, $P_K([a,c], z)$ es un elemento de $\mathcal{B}_K$ tal que

$$z \in P_K([a,c], z) \subset P_K(a,b) \cap P_K(c,d).$$

Así $\mathcal{B}_K$ satisface la propiedad B2). Por lo tanto, del Teorema 1.5.4, se sigue que $\mathcal{B}_K$ es base para una topología en $\mathbb{N}$. ■

Definición 2.5.4. *La topología τ_K de $\mathbb{N}$, generada por la base $\mathcal{B}_K$, y definida como*

$$\tau_K = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \colon \ \textit{para cada } b \in U \textit{ existe } P_K(a,b) \in \mathcal{B}_K \textit{ tal que } P_K(a,b) \subset U\}$$

*se llama la **topología de Kirch** de $\mathbb{N}$. A la base $\mathcal{B}_K$ la llamaremos la **base de Kirch** de $\mathbb{N}$.*

2.5.1. Propiedades de $(\mathbb{N}, \tau_K)$

En la presente sección daremos varias propiedades el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_K)$. La mayoría de ellas, son similares a las que posee del espacio de Golomb $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 2.5.5. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *es segundo numerable.*

Demostración. Notemos que el Teorema 2.5.3 asegura que $\mathcal{B}_K$ es base para una topología en $\mathbb{N}$, a saber la topología generada por $\mathcal{B}_K$, es decir, por la Definición 2.5.4, la topología τ_K. Ahora bien, por la forma en que definimos la base $\mathcal{B}_K$, sucede que $\mathcal{B}_K \subset \mathcal{B}_G$, y como el Teorema 2.3.1 garantiza que $\mathcal{B}_G$ es un conjunto numerable, obtenemos, por el *2)* del Teorema 1.2.6, que $\mathcal{B}_K$ es un conjunto numerable, esto es $\mathcal{B}_K$ es una base numerable para el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Por lo tanto el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es segundo numerable. ■

Teorema 2.5.6. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *es conexo pero no* $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración. Por la definición de la base $\mathcal{B}_K$, cualquier abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $\tau_K \subset \tau_G$ y, por el Teorema 1.5.23, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es conexo, ya que el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ también lo es (Teorema 2.4.5). Ahora bien, como $\tau_K \subset \tau_G$ y, por el Teorema 2.4.4, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$, de nuevo por el Teorema 1.5.23, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Teorema 2.5.7. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *es* T_2.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \neq b$. Como $\mathbb{P}$ es infinito, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\max\{a, b\} < p$. Por el Teorema 1.3.18, $\langle p, a\rangle = \langle p, b\rangle = 1$, así que $P_G(p, a), P_G(p, b)$ son abiertos tales que $a \in P_G(p, a)$ y $b \in P_G(p, b)$. Como $p > 1$ es libre de cuadrados, los conjuntos $P_G(p, a)$ y $P_G(p, b)$ también son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. La prueba de que $P_G(p, a) = P_K(p, a)$ y $P_G(p, b) = P_K(p, b)$ son ajenos, es la misma que dimos en el Teorema 2.4.3. Por lo tanto $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es T_2. ■

Supongamos que $P_K(a, b), P_K(c, d) \in \mathcal{B}_K$ son tales que $P_K(a, b) \cap P_K(c, d) \neq \emptyset$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $ar = [a, c]$. Como ar es libre de cuadrados, por el Corolario 1.3.35, r es libre de cuadrados y $\langle a, r\rangle = 1$. Además, por el Teorema 2.5.1, para cada $t \in P_K(a, b) \cap P_K(c, d)$

$$P_K(ar, t) \subset P_K(a, b) \cap P_K(c, d). \qquad (2.5.10)$$

En la prueba del siguiente teorema haremos uso de todo esto, sin hacer mención al mínimo común múltiplo de los números naturales que se estén manejando para los elementos de la base $\mathcal{B}_K$, pues el Corolario 1.3.35 permite que usemos al mínimo común múltiplo de dos enteros como el producto de dos enteros primos relativos y libres de cuadrados.

TEOREMA 2.5.8. *Cada elemento de $\mathcal{B}_K$ es un subconjunto abierto y conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.*

Demostración. Sea $A = P_K(a,b) \in \mathcal{B}_K$. Es claro que A es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Supongamos que A no es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Entonces existen conjuntos abiertos U y V en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ para los cuales $A \cap U$ y $A \cap V$ son no vacíos, disjuntos y

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V). \tag{2.5.11}$$

Sean $x \in A \cap U$ y $y \in A \cap V$. Entonces $x \in U, y \in V$ y, como U y V son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, existen $P_K(c,x), P_K(d,y) \in \mathcal{B}_K$ tales que

$$x \in P_K(c,x) \subset U \quad \text{y} \quad y \in P_K(d,y) \subset V.$$

Como $x, y \in A$, tenemos además que

$$x \in A \cap P_K(c,x) \subset A \cap U \quad \text{y} \quad y \in A \cap P_K(c,y) \subset A \cap V.$$

De esta manera, al ser $A = P_K(a,b)$ un elemento de $\mathcal{B}_K$, por los comentarios que nos llevaron a la contención (2.5.10)

$$x \in P_K(an,x) \subset A \cap P_K(c,x) \quad \text{y} \quad y \in P_K(am,y) \subset A \cap P_K(d,y),$$

donde $\langle a,n \rangle = \langle a,m \rangle = 1$ y, n y m son libres de cuadrados.

Afirmamos que algún múltiplo e de nm es un elemento de A. En efecto, como $\langle a,n \rangle = \langle a,m \rangle = 1$, por el Teorema 1.3.15, $\langle nm, a \rangle = 1$. Luego, por el Teorema 1.3.14 aplicado a b, existen $s, t \in \mathbb{N}$ tales que

$$(nm)s - at = b.$$

Sea $e = (nm)s$. Entonces e es un múltiplo de nm tal que

$$e = at + b \in P_K(a,b) = A.$$

Por (2.5.11), tenemos que $e \in A \cap U$ o bien $e \in A \cap V$. Supongamos, sin perder generalidad, que $e \in A \cap U$. Entonces $e \in U$ y, como U es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, existe $P_K(r,e) \in \mathcal{B}_K$ tal que

$$e \in P_K(r,e) \subset U.$$

De nueva cuenta, por los comentarios que nos llevaron a la contención (2.5.10), existe $P_K(ak,e) \in \mathcal{B}_K$ para el cual

$$e \in P_K(ak,e) \subset A \cap P_K(r,e),$$

donde k es libre de cuadrados y $\langle a,k\rangle = 1$. Afirmamos que $\langle k, nm\rangle = 1$. Para ver esto supongamos que un número primo p es tal que $p \mid k$ y $p \mid nm$. Entonces p divide a cualquier múltiplo de k y también a cualquier múltiplo de nm. En particular

$$p \mid ak \quad \text{y} \quad p \mid s(nm).$$

Como $e = s(nm)$, tenemos que $p \mid ak$ y $p \mid e$, contradiciendo con ello que $\langle ak, e\rangle = 1$ (no olvidemos que, al ser $P_K(ak,e)$ un elemento de $\mathcal{B}_G$, sucede que $\langle ak, e\rangle = 1$). Esto prueba que $\langle k, nm\rangle = 1$. En particular, $\langle k, m\rangle = 1$. Afirmamos ahora que:

$$P_K(ak,e) \cap P_K(am,y) \neq \emptyset. \tag{2.5.12}$$

Para probar esto notemos que, como $y \in A = P_K(a,b)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $y = an_0 + b$. Más aún, como $\langle k,m\rangle = 1$, usando la propiedad 1) del Teorema 1.3.5, tenemos que $\langle ak, am\rangle = a\langle k,m\rangle = a$. Luego

$$e - y = (at+b) - (an_0 + b) = a(t - n_0) = \langle ak, am\rangle(t - n_0).$$

Esto implica que $\langle ak, am\rangle \mid (e-y)$, de donde $e \equiv y \,(\text{mód } \langle ak, am\rangle)$. Por esto y el Teorema 2.5.2, la afirmación (2.5.12) es cierta. Notemos ahora que

$$P_K(ak,e) \subset A \cap P_K(r,e) \subset A \cap U$$

y

$$P_K(am,y) \subset A \cap P_K(d,y) \subset A \cap V.$$

Entonces, por (2.5.12),

$$\emptyset \neq P_K(ak,e) \cap P_K(am,y) \subset (A \cap U) \cap (A \cap V),$$

es decir $(A \cap U) \cap (A \cap V) \neq \emptyset$. Pero esto contradice la suposición de que $A \cap U$ y $A \cap V$ son disjuntos. Por tanto $A = P_K(a, b)$ es un subconjunto conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. ■

Usando el resultado anterior, podemos probar que el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo, cosa que no sucede con el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 2.5.9. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *es localmente conexo.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{N}$ y U un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ con $z \in U$. Como $z \in U, U$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y $\mathcal{B}_K$ es una base de la topología τ_K, existe $P_K(a, z) \in \mathcal{B}_K$ tal que $z \in P_K(a, z) \subset U$. El Teorema 2.5.8 asegura que $P_K(a, z)$ es un subconjunto abierto y conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Así, por el Teorema 1.5.37, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo en z, para cada $z \in \mathbb{N}$. Por tanto $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo. ■

De acuerdo a lo que hemos visto en relación al espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$, por la definición de la base $\mathcal{B}_K$, cualquier abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, esto es $\tau_K \subset \tau_G$. Entonces los siguientes resultados se cumplen al igual que en el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 2.5.10. *Si* $\mathbb{P}$ *es el conjunto de los números primos. Entonces:*

1) $\mathbb{P}$ *es denso en el espacio* $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

2) *No existe un abierto no vacío* U *en* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *tal que* $U \subset \mathbb{P}$. *En particular* $\operatorname{int}_{(\mathbb{N}, \tau_K)}(\mathbb{P}) = \emptyset$ *y* $\mathbb{P}$ *no es abierto en* $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

Demostración. La prueba del 1) es casi inmediata. En efecto, si U es un abierto no vacío en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, entonces U es una unión de elementos de la base $\mathcal{B}_K$. Ahora bien, por definición de $\mathcal{B}_K$, se cumple que $\mathcal{B}_K \subset \mathcal{B}_G$. En vista de esto U es unión de elementos $\mathcal{B}_G$, es decir U es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego, al ser $\mathbb{P}$ un subconjunto denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ por el Teorema 2.4.14, se tiene que $\mathbb{P} \cap U \neq \emptyset$, pero como U es un abierto no vacío y arbitrario en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ se concluye que $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

Veamos el inciso 2). Por las mismas razones que mencionamos en 1), si U es un abierto arbitrario en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, entonces U es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego, como el Teorema 2.4.15 garantiza que ningún abierto no vacío en

$(\mathbb{N}, \tau_G)$ satisface que $U \subset \mathbb{P}$, concluimos que, en particular, ningún abierto no vacío en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ cumple que $U \subset \mathbb{P}$. Así $\operatorname{int}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(\mathbb{P}) = \emptyset$ y por lo tanto $\mathbb{P}$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. ■

En el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$, es también natural preguntarse lo siguiente.

Pregunta 2.5.11. *¿Es $(\mathbb{N}, \tau_K)$ un espacio homogéneo?*

En los artículos de P. Szczuka, [23] y [24], no se hace mención alguna al tema de espacios homogéneos o de si los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $(\mathbb{N}, \tau_K)$ pudieran ser homogéneos. Sin embargo, en relación a los subconjuntos conexos que posee el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$, P. Szczuka en [23, Teorema 3.5, pág. 901] da una prueba del siguiente hecho.

Teorema 2.5.12. *Para cada $a, b \in \mathbb{N}$, el conjunto*

$$P_F(a,b) \cap [b, \infty) = \{an + b \colon n \in \mathbb{N}_0\} \tag{2.5.13}$$

es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

El resultado que describe el Teorema 2.5.12 es un hecho más general, que no sucede en el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$, pues como asegura el Teorema 2.4.11 los conjuntos de la forma dada en (2.5.13) son conexos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y sólo si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. En base a este resultado, podemos decir que, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$ posee más subconjuntos conexos que el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Otro interesante resultado que también demuestra P. Szczuka en [23, Teorema 5.1, pág. 907] es el siguiente.

Teorema 2.5.13. *El conjunto $\mathbb{P}$ de los números primos es disconexo en los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $(\mathbb{N}, \tau_K)$.*

Hay otros conceptos que aborda P. Szczuka dentro de los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $(\mathbb{N}, \tau_K)$; por ejemplo en [26] y [25], P. Szczuka hace un estudio profundo sobre las características de la cerradura, *regularidad* y *semiregularidad* de progresiones aritméticas y de conjuntos abiertos en los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

2.6. Generalizando la Topología τ_F

Un *sub-semigrupo multiplicativo de* $\mathbb{N}$ *con* 1, es un subconjunto S de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in S$ y el producto de cada dos elementos de S está en S. Por ejemplo

$\mathbb{N}$ es un sub-semigrupo multiplicativo de $\mathbb{N}$ con 1. Si p es un número primo, el conjunto $S_p = \{p^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ también es un sub-semigrupo multiplicativo de $\mathbb{N}$ con 1.

Sea S un sub-semigrupo multiplicativo de $\mathbb{N}$ con 1. Para toda $b \in \mathbb{Z}$ y cada $a \in S$ definamos

$$P_B(a,b) = \{az + b \colon z \in \mathbb{Z}\}.$$

La misma demostración que dimos para probar la parte 7) del Teorema 2.2.1, se puede utilizar para mostrar que si $b \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2 \in S$, entonces

$$P_B(a_1 a_2, b) \subset P_B(a_1, b) \cap P_B(a_2, b).$$

Supongamos ahora que para cada $b \in \mathbb{Z}$, el conjunto S_b es un sub-semigrupo multiplicativo de $\mathbb{N}$ con 1. Sean $\mathcal{S} = \{S_b \colon b \in \mathbb{Z}\}$ y

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{P_B(a,b) \colon b \in \mathbb{Z} \text{ y } a \in S_b\}.$$

Definimos

$$\tau_{\mathcal{S}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{Z} \colon \text{ para cada } b \in U \text{ existe } a \in S_b \text{ tal que } P_B(a,b) \subset U\}.$$

Notemos que en el caso particular en que, para cada $b \in \mathbb{Z}$, sucede que $S_b = \mathbb{N}$, tenemos que $\mathcal{S} = \{\mathbb{N}\}$ y $P_B(a,b) = P_F(a,b)$ para toda $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Por tanto $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \mathcal{B}_F$ y $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_F$.

La misma demostración que dimos en la prueba del Teorema 2.2.2, se puede realizar para mostrar que $\tau_{\mathcal{S}}$ es una topología en $\mathbb{Z}$ que tiene por base a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Dicha topología fue introducida en 2003 por K. A. Broughan en el artículo [3]. Consideremos el caso particular en que para cada $b \in \mathbb{Z}$, el sub-semigrupo multiplicativo S_b con 1 que se considera, es siempre el mismo. Es decir, supongamos que existe un sub-semigrupo multiplicativo S de $\mathbb{N}$ con 1 y que, para cada $b \in \mathbb{N}$, tenemos que $S_b = S$. Entonces escribiremos $\mathcal{B}_S$ y τ_S en lugar de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ y de $\tau_{\mathcal{S}}$, respectivamente. Recordemos que, en el caso en que S es $\mathbb{N}$, la topología τ_S es la de Furstenberg y que, en dicha situación, el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es metrizable (Teorema 2.3.2). En la Sección 3 de [3], K. A. Broughan utiliza la noción de casi-valuación no arquimediana en un anillo, para definir una métrica d_S en $\mathbb{Z}$ cuya topología inducida es justo τ_S. En otras palabras, K. A. Broughan no solo demuestra que, para cada sub-semigrupo multiplicativo S de $\mathbb{N}$ con 1, el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_S)$ es metrizable, sino que da una *métrica explícita* d_S en $\mathbb{Z}$ cuya topología inducida es τ_S.

Capítulo 3
Ejemplos Geométricos

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a presentar una familia interesante de espacios topológicos infinito numerables, los cuales son T_2 pero no $T_{2\frac{1}{2}}$, y que a la vez son conexos. Estos espacios se construyen geométricamente en el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ con entradas racionales. En su construcción se utilizán ciertas rectas del plano que pasan por un punto del espacio y tienen pendiente irracional. Particularmente, si las rectas que mencionamos tienen pendiente $\pm\sqrt{3}$, la topología que se obtiene recibe el nombre de *la Topología de Bing*. En general, si la pendiente de estas rectas es cualquier irracional positivo, la topología que se obtiene se le llama *la topología pendiente irracional* (ver [22, Ejemplo 75, pág. 93]). Veamos pues este ejemplo.

3.2. Construcción

Sea X el conjunto de todos los puntos (q_1, q_2) del plano $\mathbb{R}^2$, tales que q_1 y q_2 son números racionales y $q_2 \geqq 0$, es decir

$$X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \colon q_2 \geqq 0\}. \tag{3.2.1}$$

De esto, tenemos la siguiente observación.

Observación 3.2.1. *El conjunto X es numerable.*

Demostración. Notemos primero que, del Teorema 1.2.6, el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable, ya que por el Ejemplo 1.2.7 el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable. En vista de esto, dado que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, por el Teorema 1.2.4 obtenemos que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ es numerable. Por lo tanto de (3.2.1) concluimos que X es numerable. ■

Los subconjuntos de X que definimos a continuación, serán nuestros elementos básicos para cada base de vecindades en los puntos de X. Además generarán la topología en X que definiremos en la siguiente sección. Consideremos entonces la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *Sean $\bar{x} \in X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$, $\theta > 0$ un número irracional y $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Si $\bar{x} = (q, 0)$, definimos en X el subconjunto*

$$U_n(\bar{x}) = \left\{ (s, 0) \in X : |s - q| < \frac{1}{n} \right\}. \tag{3.2.2}$$

2) *Si $\bar{x} = (q_1, q_2)$ con $q_2 > 0$, definimos en $\mathbb{R}^2$ los puntos*

$$\bar{x}_i = (x_i, 0) \qquad y \qquad \bar{x}_d = (x_d, 0), \tag{3.2.3}$$

donde

$$x_i = q_1 - \frac{q_2}{\theta} \qquad y \qquad x_d = q_1 + \frac{q_2}{\theta}, \tag{3.2.4}$$

y el subconjunto de X

$$U_n(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_i(\bar{x}) \cup V_d(\bar{x}), \tag{3.2.5}$$

donde

$$V_i(\bar{x}) = \left\{ (s, 0) \in X : |s - x_i| < \frac{1}{n} \right\} \tag{3.2.6}$$

y

$$V_d(\bar{x}) = \left\{ (s, 0) \in X : |s - x_d| < \frac{1}{n} \right\}. \tag{3.2.7}$$

Ver las Figuras 3.1 y 3.2.

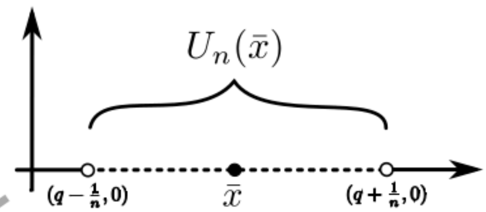

Figura 3.1: El conjunto $U_n(\bar{x})$, si $\bar{x} = (q, 0)$.

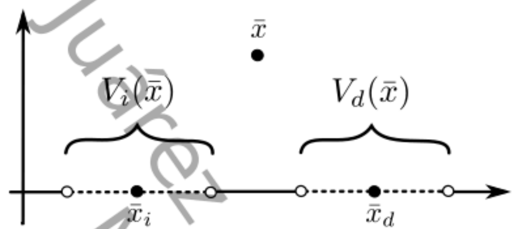

Figura 3.2: El conjunto $U_n(\bar{x})$, si $\bar{x} = (q_1, q_2)$ con $q_2 > 0$.

Si $\bar{x} = (q_1, q_2)$ y $q_2 > 0$, pensaremos que $\bar{x}_i$ y $\bar{x}_d$, definidos como en (3.2.3), son respectivamente el "pie izquierdo" y el "pie derecho" de $\bar{x}$. Antes de construir una topología en X, utilizando las familias $U_n(\bar{x})$ definidas en (3.2.2) y (3.2.5), mencionaremos una serie de propiedades de los pies izquierdos y de los pies derechos de $\bar{x}$, así como la recta que pasa por $\bar{x}$ y $\bar{x}_i$, la recta que pasa por $\bar{x}$ y por $\bar{x}_d$ y de ciertas rectas paralelas a ellas. En su demostración, utilizaremos fuertemente que el conjunto $\mathbb{Q}$, de los números racionales, es un campo algebraico, concretamente, usaremos que la suma, la resta, la multiplicación y la división de elementos de $\mathbb{Q}$ es, de nueva cuenta, un elemento de $\mathbb{Q}$.

Observación 3.2.3. *Sea $\bar{x} = (q_1, q_2) \in X$ con $q_2 > 0$. Entonces $\bar{x}_i, \bar{x}_d \notin X$.*

Demostración. En efecto, al tenerse que q_2 y θ son números positivos,

$$x_i = q_1 - \frac{q_2}{\theta} < q_1.$$

Luego,

$$\theta = \frac{q_2}{q_1 - x_i}.$$

Entonces, si suponemos que $x_i \in \mathbb{Q}$, se sigue que $\theta \in \mathbb{Q}$, pues los números q_1 y q_2 son racionales. Pero esto contradice que θ sea un número irracional, por lo cual $x_i \notin \mathbb{Q}$, es decir $\bar{x}_i \notin X$. Análogamente se prueba que $\bar{x}_d \notin X$. ■

Ahora, en el siguiente resultado, damos una propiedad interesante para las rectas en $\mathbb{R}^2$ que tienen por pendiente un número irracional.

Lema 3.2.4. *Sea $\phi > 0$ un número irracional. Entonces para cualquier recta L en $\mathbb{R}^2$ con pendiente $\pm\phi$, el conjunto $L \cap X$ tiene a lo más un elemento.*

Demostración. Sea L cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ con pendiente ϕ. Supongamos que el conjunto $L \cap X$ tiene dos puntos diferentes $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Luego $\bar{x}, \bar{y} \in X$. Entonces consideremos $\bar{x} = (q_1, q_2)$ y $\bar{y} = (r_1, r_2)$. Como la recta L tiene pendiente ϕ y pasa por $\bar{x} = (q_1, q_2)$, se sigue que su ecuación está dada por

$$y = \phi(x - q_1) + q_2. \tag{3.2.8}$$

Pero $\bar{y} = (r_1, r_2)$ es también un punto de L, es decir, por (3.2.8), cumple que

$$r_2 = \phi(r_1 - q_1) + q_2.$$

De esta igualdad notamos que $r_1 \neq q_1$; pues de lo contrario, tendríamos que $r_2 = q_2$, lo cual implicaría $\bar{x} = \bar{y}$, contradiciendo nuestro supuesto de que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Así, por lo anterior,

$$\phi = \frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}.$$

Con esto resulta que $\phi \in \mathbb{Q}$, una contradicción. Por lo tanto el conjunto $L \cap X$ sólo puede tener a lo más un elemento. La prueba para el caso de las rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendiente irracional $-\phi$ es similar a la dada anteriormente para las rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendiente irracional ϕ. Por lo tanto, para cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ con pendiente irracional $\pm\phi$, el conjunto $L \cap X$ tiene a lo más un elemento. ■

Por el resultado anterior, cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ con pendiente $\pm\theta$ intersecta a X en a lo más un elemento. En particular, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2.5. *Sea $\bar{x} = (q_1, q_2) \in X$ con $q_2 > 0$.*

1) *Si L_i es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $\bar{x}$ y $\bar{x}_i$, entonces*

$$L_i \cap X = \{\bar{x}\}. \tag{3.2.9}$$

2) *Si* L_d *es la recta en* $\mathbb{R}^2$ *que pasa por* $\bar{x}$ *y* $\bar{x}_d$*, entonces*

$$L_d \cap X = \{\bar{x}\}. \qquad (3.2.10)$$

3) *Supongamos que* $L_i^{'}$ *y* $L_d^{'}$ *son las rectas en* $\mathbb{R}^2$ *que, respectivamente, pasan por* $\bar{x}_d$ *y* $\bar{x}_i$ *y son paralelas a* L_i *y* L_d*. Entonces*

$$L_i^{'} \cap X = \emptyset \qquad y \qquad L_d^{'} \cap X = \emptyset. \qquad (3.2.11)$$

Ver las Figuras 3.3 y 3.4.

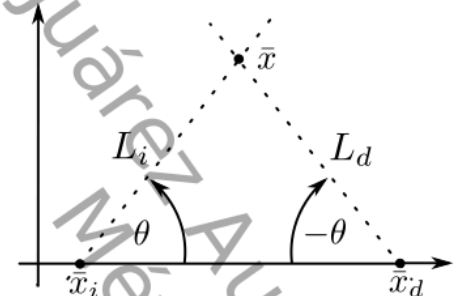

Figura 3.3: Las rectas L_i y L_d.

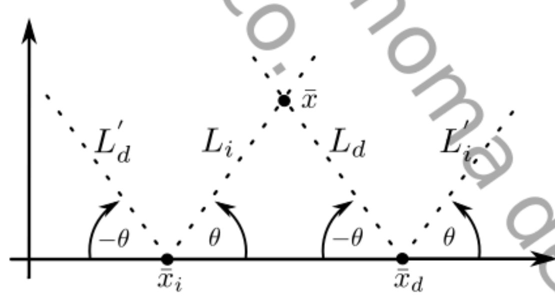

Figura 3.4: Las rectas $L_i^{'}$ y $L_d^{'}$.

Demostración. Probemos el inciso 1). Como la recta L_i pasa por los puntos $\bar{x}$ y $\bar{x}_i$, L_i tiene por pendiente a

$$\frac{q_2 - 0}{q_1 - x_i} = \frac{q_2}{q_1 - \left(q_1 - \frac{q_2}{\theta}\right)} = \frac{q_2}{\frac{q_2}{\theta}} = \frac{\theta q_2}{q_2} = \theta. \qquad (3.2.12)$$

Entonces, L_i es una recta en $\mathbb{R}^2$ que tiene pendiente irracional θ, lo cual implica, por el lema anterior, que el conjunto $L_i \cap X$ tiene a lo más un elemento, pero $\bar{x}$ es punto de X por donde pasa la recta L_i, resultando así que

$$L_i \cap X = \{\bar{x}\}.$$

Por tanto obtenemos (3.2.9).

Para el inciso 2), observemos que la pendiente de la recta L_d está dada por

$$\frac{q_2 - 0}{q_1 - x_d} = \frac{q_2}{q_1 - \left(q_1 + \frac{q_2}{\theta}\right)} = \frac{q_2}{-\frac{q_2}{\theta}} = -\frac{\theta q_2}{q_2} = -\theta. \tag{3.2.13}$$

Así, L_d es una recta en $\mathbb{R}^2$ con pendiente irracional $-\theta$, la cual, por el lema anterior, satisface que el conjunto $L_d \cap X$ tiene a lo más un elemento. Luego, como $\bar{x}$ es un punto de la recta L_d y $\bar{x} \in X$, obtenemos que

$$L_d \cap X = \{\bar{x}\}.$$

De esta manera resulta (3.2.10).

Para probar el 3), supongamos que existe $\bar{y} = (t_1, t_2) \in X$ para el cual $\bar{y} \in L_d^{'}$. Observemos la siguiente figura,

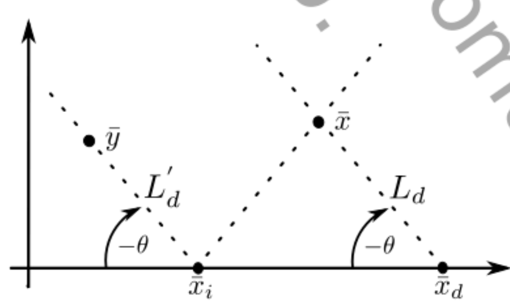

Figura 3.5: La recta $L_d^{'}$ paralela a L_d.

Como la recta $L_d^{'}$ pasa por $\bar{x}_i$ y es paralela a L_d, su ecuación esta dada por

$$y = -\theta(x - x_i).$$

Pero $\bar{y} = (t_1, t_2) \in L_d^{'}$, esto es

$$t_2 = -\theta(t_1 - x_i) = -\theta\left(t_1 - q_1 + \frac{q_2}{\theta}\right) = -\theta(t_1 - q_1) - q_2.$$

En esta igualdad, observemos que si $t_1 = q_1$, entonces $t_2 = -q_2$ y, como $q_2 > 0$, sucede que $t_2 < 0$. Esto implica que $\bar{y} = (t_1, t_2) \notin X$, contradiciendo la suposición de que $\bar{y} = (t_1, t_2) \in X$. Así $t_1 \neq q_1$, del cual se sigue que

$$\theta = -\frac{t_2 + q_2}{t_1 - q_1}.$$

Luego $\theta \in \mathbb{Q}$, una contradicción. Por tanto no existen elementos de X en $L_d^{'}$, es decir $L_d^{'} \cap X = \emptyset$.

Para la segunda parte de (3.2.11), supongamos que existe $\bar{z} = (s_1, s_2) \in X$ tal que $\bar{z} \in L_i^{'}$. Veamos la figura siguiente.

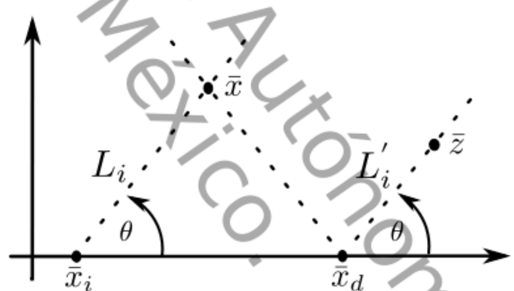

Figura 3.6: La recta $L_i^{'}$ paralela a L_i.

Como la recta $L_i^{'}$ pasa por $\bar{x}_d$ y es paralela a L_i, su ecuación es

$$y = \theta(x - x_d).$$

Al tenerse que $\bar{z} = (s_1, s_2) \in L_i^{'}$, se sigue que

$$s_2 = \theta(s_1 - x_d) = \theta\left(s_1 - q_1 - \frac{q_2}{\theta}\right) = \theta(s_1 - q_1) - q_2.$$

Luego,

$$\theta = \frac{s_2 + q_2}{s_1 - q_1},$$

donde $s_1 \neq q_1$ por la misma observación que dimos anteriormente para ver que $t_1 \neq q_1$. Entonces resulta que $\theta \in \mathbb{Q}$, lo que es contradictorio. Por lo cual no pueden existir puntos de X en la recta $L_i^{'}$. Por lo tanto $L_i^{'} \cap X = \emptyset$. Con esto se termina la prueba del lema. ■

3.3. La Topología $\tau_{\mathcal{B}(\theta)}$

En esta sección construiremos la topología en X, que mencionamos al principio, por medio de los subconjuntos de X que definimos en (3.2.2) y (3.2.5). Consideremos entonces las siguientes familias de subconjuntos de X:

$$\mathcal{U}(\bar{x}) = \{U_i(\bar{x}) \colon i \in \mathbb{N}\}, \quad \text{para cada } \bar{x} \in X. \tag{3.3.1}$$

Estas colecciones son nuestras candidatas para generar una topología en X, y como veremos en el Lema 3.3.1, cada $\mathcal{U}(\bar{x})$ será una base de vecindades en $\bar{x}$ para esta topología.

Para evitar confusiones en la notación, durante la prueba del siguiente resultado, haremos uso de lo siguiente:

Sean $\bar{x} = (s,t) \in X$ con $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como

$$U_n(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_i(\bar{x}) \cup V_d(\bar{x}),$$

denotemos:

$$V_i(\bar{x}) = V_n(\bar{x}_i) \qquad \text{y} \qquad V_d(\bar{x}) = V_n(\bar{x}_d). \tag{3.3.2}$$

Lema 3.3.1. *Para cada $\bar{x} \in X$, la colección $\mathcal{U}(\bar{x})$ satisface las propiedades* V1)*,* V2)*, y* V3) *del* Teorema 1.5.6.

Demostración. Sea $\bar{x} \in X$ y probemos que $\mathcal{U}(\bar{x})$ satisface la propiedad V1). Sea $V \in \mathcal{U}(\bar{x})$. Entonces, por definición de $\mathcal{U}(\bar{x})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$V = U_n(\bar{x}).$$

Luego, si $\bar{x} = (r,0)$, por (3.2.2) se sigue que

$$V = U_n(\bar{x}) = \left\{(s,0) \in X \colon |s-r| < \frac{1}{n}\right\},$$

donde $\bar{x} \in U_n(\bar{x})$, pues

$$0 = |r - r| < \frac{1}{n}.$$

Así que $\bar{x} \in V$. Ahora bien, si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$, por (3.2.5) de la Definición 3.2.2, se tiene que

$$V = U_n(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_n(\bar{x}_i) \cup V_n(\bar{x}_d),$$

de donde vemos que $\bar{x} \in U_n(\bar{x})$. Así que $\bar{x} \in V$. Por tanto, en ambas situaciones $\bar{x} \in V$, es decir $\mathcal{U}(\bar{x})$ satisface la propiedad V1).

Para ver que $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple la propiedad V2), sean $V_1, V_2 \in \mathcal{U}(\bar{x})$. Entonces: Si $\bar{x} = (r, 0)$, por definición de $\mathcal{U}(\bar{x})$ y (3.2.2), existen $n, m \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$V_1 = U_n(\bar{x}) = \left\{(s, 0) \in X \colon |s - r| < \frac{1}{n}\right\}$$

y

$$V_2 = U_m(\bar{x}) = \left\{(s, 0) \in X \colon |s - r| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Observemos la Figura 3.7.

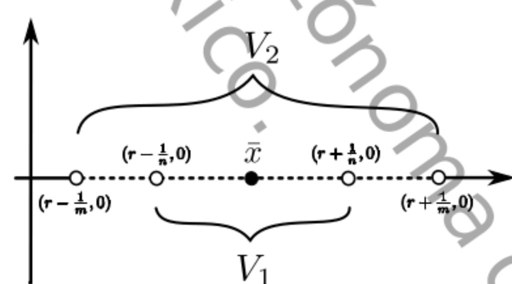

Figura 3.7: Intersección de V_1 con V_2 si $\bar{x} = (r, 0)$.

Definamos $k = \max\{n, m\}$. Sea $V_3 = U_k(\bar{x})$ y demostremos que:

$$V_3 \subset V_1 \cap V_2. \tag{3.3.3}$$

En efecto, si $\bar{p} = (s, 0) \in U_k(\bar{x})$,

$$|s - r| < \frac{1}{k}.$$

Pero, como $k = \text{máx}\{n, m\}$,

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k} \leqq \frac{1}{m},$$

es decir

$$|s-r| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |s-r| < \frac{1}{m},$$

lo cual implica que $\bar{p} \in U_n(\bar{x})$ y $\bar{p} \in U_m(\bar{x})$. Así

$$\bar{p} = (s, 0) \in U_n(\bar{x}) \cap U_m(\bar{x}),$$

y en consecuencia obtenemos (3.3.3). De esta manera V_3 satisface (3.3.3) y por tanto $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple V2) para este caso. Ahora bien, si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$, por definición de $\mathcal{U}(\bar{x})$ y (3.2.5), tenemos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$\begin{aligned} V_1 &= U_n(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_n(\bar{x}_i) \cup V_n(\bar{x}_d), \\ V_2 &= U_m(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_m(\bar{x}_i) \cup V_m(\bar{x}_d). \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos la Figura 3.8

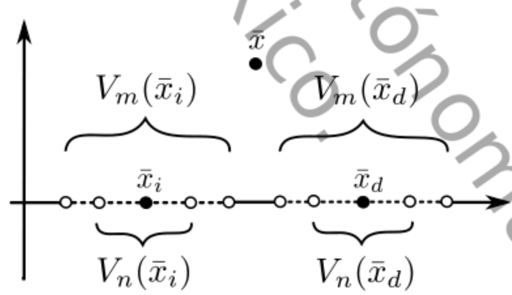

Figura 3.8: Intersección de V_1 con V_2 si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$.

Sean $k = \text{máx}\{n, m\}$ y $V_3 = U_k(\bar{x})$. Veamos que

$$V_3 \subset V_1 \cap V_2. \tag{3.3.5}$$

En efecto, sea $\bar{p} = (u, v) \in V_3$. Entonces, por (3.2.5)

$$\bar{p} = \bar{x} \quad \text{o} \quad \bar{p} \in V_k(\bar{x}_i) \cup V_k(\bar{x}_d).$$

Notemos que, si $\bar{p} = \bar{x}$, por definición de V_1 y V_2, es claro que $\bar{p} \in V_1$ y $\bar{p} \in V_2$, y en consecuencia $\bar{p} \in V_1 \cap V_2$. Y si $\bar{p} \in V_k(\bar{x}_i) \cup V_k(\bar{x}_d)$, se tiene que $\bar{p} \in V_k(\bar{x}_i)$ o $\bar{p} \in V_k(\bar{x}_d)$. Luego $v = 0$, y en consecuencia $\bar{p} = (u, 0)$, es decir

$$|u - x_i| < \frac{1}{k} \quad \text{o} \quad |u - x_d| < \frac{1}{k}.$$

Pero, como $k = \max\{n, m\}$, sucede que $1/k \leqq 1/n$ y $1/k \leqq 1/m$. Esto implica que

$$|u - x_i| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |u - x_i| < \frac{1}{m}$$

o

$$|u - x_d| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |u - x_d| < \frac{1}{m}.$$

Entonces, por (3.2.6) y (3.2.7) de la Definición 3.2.2,

$$\bar{p} = (u, 0) \in V_n(\bar{x}_i) \cap V_m(\bar{x}_i) \quad \text{o} \quad \bar{p} = (u, 0) \in V_n(\bar{x}_d) \cap V_m(\bar{x}_d).$$

Por lo cual, en ambas situaciones, sucede que

$$\bar{p} \in V_n(\bar{x}_i) \cup V_n(\bar{x}_d) \subset U_n(\bar{x}) \quad \text{y} \quad \bar{p} \in V_m(\bar{x}_i) \cup V_m(\bar{x}_d) \subset U_m(\bar{x}).$$

Así, por (3.3.4), se tiene que $\bar{p} = (u, 0) \in V_1 \cap V_2$. Por tanto, obtenemos (3.3.5) y en consecuencia $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple la propiedad V2).

Por último, probemos que $\mathcal{U}(\bar{x})$ satisface la propiedad V3). Sea $V \in \mathcal{U}(\bar{x})$. Entonces

$$V = U_n(\bar{x}),$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $\bar{y} \in V$ y demostremos que existe $W \in \mathcal{U}(\bar{y})$ tal que $W \subset V$. Notemos primero que si $\bar{y} = \bar{x}$, podemos tomar $W = V \in \mathcal{U}(\bar{y})$ y obtener obviamente que $W \subset V$. Supongamos por tanto que $\bar{y} \neq \bar{x}$ y analicemos las siguientes situaciones.

i). Si $\bar{x} = (r, 0)$. Como $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} \in V = U_n(\bar{x})$, por (3.2.2), tenemos que $\bar{y} = (s, 0)$ y cumple que

$$|s - r| < \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad r - \frac{1}{n} < s < r + \frac{1}{n}. \tag{3.3.6}$$

Observemos que $|s - r| \neq 0$, pues por el hecho que $\bar{y} \neq \bar{x}$, implica que $s \neq r$. Veamos la figura siguiente.

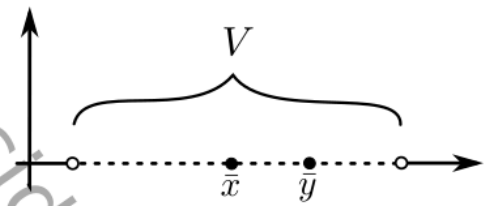

Figura 3.9: $\bar{y} \in V$ si $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} \neq \bar{x}$.

Definamos

$$\varepsilon = \min\{s - (r - 1/n), (r + 1/n) - s\}.$$

Luego, por (3.3.6), $\varepsilon > 0$. Entonces, la Propiedad Arquimediana aplicada a los números 1 y ε, implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$. Sea $W = U_m(\bar{y})$. Afirmamos que

$$W \subset V. \tag{3.3.7}$$

En efecto, sea $\bar{p} = (u, 0) \in W = U_m(\bar{y})$. Entonces

$$|u - s| < \frac{1}{m},$$

pero $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$, esto es

$$|u - s| < \varepsilon \quad \text{si y sólo si} \quad -\varepsilon < u - s < \varepsilon.$$

Por la forma en que definimos ε se sigue que

$$-\left(s - \left(r - \frac{1}{n}\right)\right) \leqq -\varepsilon < u - s < \varepsilon \leqq \left(r + \frac{1}{n}\right) - s$$

si y sólo si

$$r - \frac{1}{n} < u < r + \frac{1}{n}.$$

Esto implica que

$$|u - r| < \frac{1}{n}.$$

Así, por (3.2.2) de la Definición 3.2.2, se tiene que $\bar{p} = (u, 0) \in U_n(\bar{x})$. Con esto probamos (3.3.7). Luego, notando que $W \in \mathcal{U}(\bar{y})$, resulta que $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple la propiedad V3) para este caso.

ii). Si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$. Como $\bar{y} \neq \bar{x}$ y $\bar{y} \in V = U_n(\bar{x})$, por (3.2.5) de la Definición 3.2.2, tenemos que $\bar{y} = (r, 0)$ y

$$\bar{y} \in V_n(\bar{x}_i) \cup V_n(\bar{x}_d),$$

es decir

$$|r - x_i| < \frac{1}{n} \quad \text{o} \quad |r - x_d| < \frac{1}{n}$$

si y sólo si

$$x_i - \frac{1}{n} < r < x_i + \frac{1}{n} \quad \text{o} \quad x_d - \frac{1}{n} < r < x_d + \frac{1}{n}.$$

Supongamos que se cumple

$$x_i - \frac{1}{n} < r < x_i + \frac{1}{n}, \tag{3.3.8}$$

y veamos la Figura 3.10.

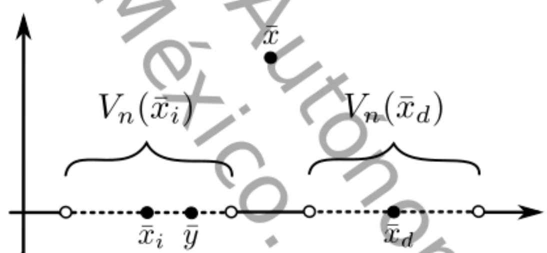

Figura 3.10: $\bar{y} \in V_n(\bar{x}_i)$ si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$.

Definamos

$$\varepsilon = \text{mín}\{r - (x_i - 1/n), (x_i + 1/n) - r\}.$$

Notemos que por (3.3.8), $\varepsilon > 0$. Entonces $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea $W = U_m(\bar{y})$ y probemos que

$$W \subset V. \tag{3.3.9}$$

Si $\bar{p} = (u, 0) \in W = U_m(\bar{y})$, por (3.2.2) y el hecho que $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$, se tiene

$$|u - r| < \varepsilon \quad \text{si y sólo si} \quad -\varepsilon < u - r < \varepsilon.$$

Luego, por la forma en que definimos ε se sigue que

$$-\left(r-\left(x_i-\frac{1}{n}\right)\right) \leqq -\varepsilon < u-r < \varepsilon \leqq \left(x_i+\frac{1}{n}\right)-r,$$

lo cual implica que

$$x_i-\frac{1}{n} < u < x_i+\frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |u-x_i| < \frac{1}{n}.$$

Es decir, por (3.2.6), $\bar{p}=(u,0) \in V_n(\bar{x}_i)$ y en consecuencia por (3.2.5), $\bar{p}=(u,0) \in U_n(\bar{x})$. Así obtenemos (3.3.9), lo cual significa que $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple la propiedad V3), para cuando $\bar{y} \in V_n(\bar{x}_i)$. El mismo razonamiento que usamos para cuando $\bar{y} \in V_n(\bar{x}_i)$, se puede usar cuando $\bar{y} \in V_n(\bar{x}_d)$, para encontrar así un $W \in \mathcal{U}(\bar{y})$ de tal manera que $W \subset V$ (ver la Figura 3.11).

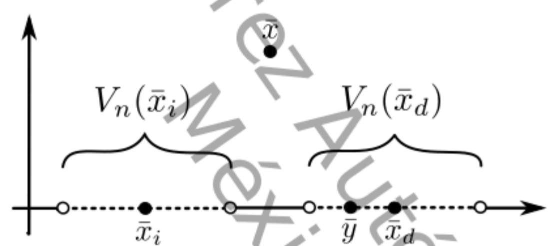

Figura 3.11: $\bar{y} \in V_n(\bar{x}_d)$ si $\bar{x}=(s,t)$ con $t>0$.

Por tanto, en ambas situaciones $\mathcal{U}(\bar{x})$ cumple la propiedad V3), y concluimos con esto la prueba del teorema. ■

En este sentido, por el Teorema 1.5.6, podemos generar una topología en X, en la que cada $\mathcal{U}(\bar{x})$ resulta ser una base de vecindades de $\bar{x}$ en esta topología. Esto significa que la familia de subconjuntos de X

$$\mathcal{B}(\theta)=\bigcup_{\bar{x}\in X}\mathcal{U}(\bar{x})=\{U_n(\bar{x})\colon n\in\mathbb{N} \text{ y } \bar{x}\in X\} \tag{3.3.10}$$

forma una base para esta topología en X.

Definición 3.3.2. *La topología generada por la base $\mathcal{B}(\theta)$, definida como*

$$\tau_{\mathcal{B}(\theta)}=\{\emptyset\}\cup\{V\subset X\colon \text{ para cada } \bar{x}\in V \text{ existe } n\in\mathbb{N} \text{ tal que } U_n(\bar{x})\subset V\}$$

se llama la ***topología pendiente irracional*** *de X.*

Es importante mencionar que cuando $\theta = \sqrt{3}$, el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\sqrt{3})})$ es el *espacio de Bing* y, en esta situación, para cada $\bar{x} = (s,t) \in X$ con $t > 0$, el triángulo en X con vértices $\bar{x}_i$, $\bar{x}_d$ y $\bar{x}$ es equilátero. Además, el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\sqrt{3})})$ es el ejemplo geométrico más clásico de un espacio topológico, infinito numerable que es T_2 y conexo, propiedades que probaremos que son válidas en general, es decir, para cada espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, con $\theta > 0$ irracional.

3.4. Propiedades del Espacio Topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$

Ahora presentaremos algunas propiedades y resultados que son de nuestro interés para el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Para empezar veamos que este espacio topológico es segundo numerable y satisface el axioma de separación T_2.

Teorema 3.4.1. *El espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es segundo numerable.*

Demostración. Como probamos anteriormente $\mathcal{B}(\theta)$ es una base para el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Ahora bien, por definición, $\mathcal{U}(\bar{x})$ es una colección numerable de subconjuntos de X, para cada $\bar{x} \in X$. Entonces del Corolario 1.2.5, se sigue que $\bigcup_{\bar{x}\in X} \mathcal{U}(\bar{x})$ es un conjunto numerable, ya que por la Observación 3.2.1, X es un conjunto numerable. Por lo tanto, de la definición de $\mathcal{B}(\theta)$, obtenemos que $\mathcal{B}(\theta)$ es una base numerable para $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Esto muestra que $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es segundo numerable. ■

Teorema 3.4.2. *El espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es T_2.*

Demostración. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in X$ tales que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos que $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} = (s, 0)$. Como $\bar{x} \neq \bar{y}$, tenemos que $r \neq s$. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r < s$. Observemos la Figura 3.12.

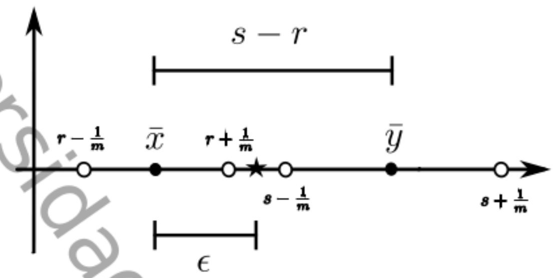

Figura 3.12: Los puntos $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} = (s, 0)$.

Definamos $\epsilon = \dfrac{s-r}{2} > 0$. Luego, por la Propiedad Arquimediana aplicada a los números 1 y ϵ, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m} < \epsilon$. Sean $U = U_m(\bar{x})$ y $V = U_m(\bar{y})$. Afirmamos que

$$U \cap V = \emptyset. \tag{3.4.1}$$

En efecto, como $\dfrac{1}{m} < \epsilon = \dfrac{s-r}{2}$, tenemos que $s - \dfrac{s-r}{2} < s - \dfrac{1}{m}$, lo que implica

$$\frac{s+r}{2} < s - \frac{1}{m}. \tag{3.4.2}$$

También, por ser $\dfrac{1}{m} < \epsilon$,

$$r + \frac{1}{m} < r + \epsilon = r + \frac{s-r}{2} = \frac{s+r}{2}. \tag{3.4.3}$$

Así, de (3.4.2) y (3.4.3) se sigue que

$$r + \frac{1}{m} < s - \frac{1}{m}.$$

Con esto concluimos que no existe $(t, 0) \in X$ tal que

$$r - \frac{1}{m} < t < r + \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad s - \frac{1}{m} < t < s + \frac{1}{m}$$

si y sólo si

$$|t - r| < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad |t - s| < \frac{1}{m},$$

es decir, por (3.2.2) de la Definición 3.2.2, $U_m(\bar{x}) \cap U_m(\bar{y}) = \emptyset$. Por tanto se tiene (3.4.1).

Caso II. Supongamos que $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} = (s_1, s_2)$ con $s_2 > 0$. Observemos la Figura 3.13.

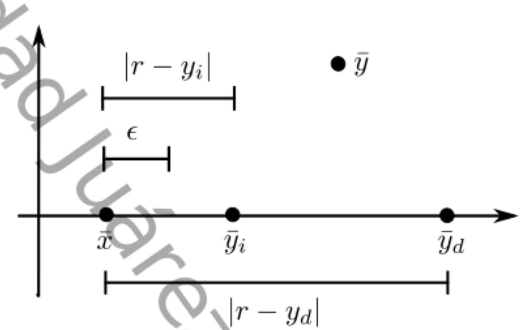

Figura 3.13: Los puntos $\bar{x} = (r, 0)$ y $\bar{y} = (s_1, s_2)$.

Recordemos que, por el Lema 3.2.3, y_i y y_d son irracionales. Definamos $\delta = \text{mín}\{|r - y_i|, |r - y_d|\}$, y consideremos $\epsilon = \dfrac{\delta}{2}$. Como $r \in \mathbb{Q}$ y y_i, y_d son irracionales, los números $|r - y_i|$ y $|r - y_d|$ son positivos. Por lo cual $\epsilon > 0$. Luego, al aplicar la Propiedad Arquimediana a los números 1 y ϵ, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m} < \epsilon$. Sean $U = U_m(\bar{x})$ y $V = U_m(\bar{y})$. Probemos que

$$U \cap V = \emptyset. \tag{3.4.4}$$

Supongamos que existe $\bar{z} = (q, 0) \in U \cap V$. Como $\bar{y} = (s_1, s_2)$ y $s_2 > 0$, por (3.2.5) de la Definición 3.2.2

$$V = U_m(\bar{y}) = \{y\} \cup V_i(\bar{y}) \cap V_d(\bar{y}).$$

Entonces,

$$\bar{z} \in U \cap (V_i(\bar{y}) \cap V_d(\bar{y})) = (U \cap V_i(\bar{y})) \cup (U \cap V_d(\bar{y})),$$

es decir

$$\bar{z} \in U \cap V_i(\bar{y}) \qquad \text{o} \qquad \bar{z} \in U \cap V_d(\bar{y}).$$

Si $\bar{z} = (q, 0) \in U \cap V_i(\bar{y}) = U_m(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})$, se tiene

$$|q - y_i| < \frac{1}{m} \qquad \text{y} \qquad |q - r| < \frac{1}{m}.$$

Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico y satisface la desigualdad del triángulo por medio del valor absoluto, tenemos que

$$|r - y_i| \leqq |r - q| + |q - y_i| < \frac{2}{m} < 2\epsilon = \delta \leqq |r - y_i|,$$

es decir $|r - y_i| < |r - y_i|$, lo que es contradictorio. Por lo cual, no existen puntos de X en $U_m(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})$.

Ahora, si $\bar{z} = (q, 0) \in U \cap V_d(\bar{y}) = U_m(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})$ tenemos

$$|q - y_d| < \frac{1}{m} \qquad \text{y} \qquad |q - r| < \frac{1}{m}.$$

De nuevo, por la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana

$$|r - y_d| \leqq |r - q| + |q - y_d| < \frac{2}{m} < 2\epsilon = \delta \leqq |r - y_d|.$$

Del cual se sigue que $|r - y_d| < |r - y_d|$, teniendo con esto una contradicción. Así que no existen puntos de X en $U_m(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})$. Por tanto, de lo anterior $U \cap V = \emptyset$.

Caso III. Supongamos que $\bar{x} = (r_1, r_2)$ y $\bar{y} = (s_1, s_2)$, con $r_2, s_2 > 0$. Veamos la siguiente figura.

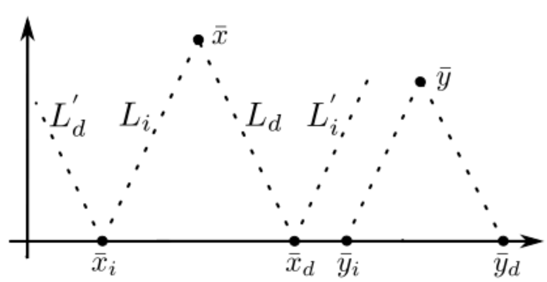

Figura 3.14: Los puntos $\bar{x} = (r_1, r_2)$ y $\bar{y} = (s_1, s_2)$.

Notemos que si L_i y L_d son las rectas en $\mathbb{R}^2$ definidas en el Lema 3.2.5, entonces, por los incisos 1) y 2) del mismo lema, $\bar{y}$ no es un punto de L_i y L_d. Más aún, si $L_i^{'}$ y $L_d^{'}$ son las rectas en $\mathbb{R}^2$ dadas en el Lema 3.2.5, por el inciso 3) del mismo lema, se sigue que $\bar{y}$ no es un punto de $L_i^{'}$ y $L_d^{'}$. Así que

$$\bar{x}_i \neq \bar{y}_i, \;\; \bar{x}_i \neq \bar{y}_d \qquad \text{y} \qquad \bar{x}_d \neq \bar{y}_i, \;\; \bar{x}_d \neq \bar{y}_d. \tag{3.4.5}$$

Sea $\delta = \min\{|x_i - y_i|, |x_i - y_d|, |x_d - y_i|, |x_d - y_d|\}$, y consideremos $\epsilon = \frac{\delta}{2}$. Observemos que, por (3.4.5), los números $|x_i - y_i|, |x_i - y_d|, |x_d - y_i|$ y $|x_d - y_d|$ son positivos. Entonces $\epsilon > 0$. De nueva cuenta, por la Propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Sean $U = U_n(\bar{x})$ y $V = U_n(\bar{y})$. Afirmamos que

$$U \cap V = \emptyset. \tag{3.4.6}$$

En efecto, como $\bar{x} = (r_1, r_2), \bar{y} = (s_1, s_2)$ y $r_2, s_2 > 0$, por el punto (3.2.5) de la Definición 3.2.2, tenemos

$$\begin{aligned} U &= U_n(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \cup V_i(\bar{x}) \cup V_d(\bar{x}), \\ V &= U_n(\bar{y}) = \{\bar{y}\} \cup V_i(\bar{y}) \cup V_d(\bar{y}). \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Supongamos entonces que existe $\bar{z} \in U \cap V$, es decir $\bar{z} \in U$ y $\bar{z} \in V$. Si $\bar{z} = (t_1, t_2)$ con $t_2 > 0$, por (3.4.7), $\bar{z} = \bar{x}$ y $\bar{z} = \bar{y}$, es decir $\bar{x} = \bar{y}$. Pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, supongamos que $\bar{z} = (t, 0)$.

Por otra parte, observemos que

$$\begin{aligned} \big(V_i(\bar{x}) \cup V_d(\bar{x})\big) \cup \big(V_i(\bar{y}) \cup V_d(\bar{y})\big) &= \big(V_i(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})\big) \cup \big(V_i(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})\big) \cup \\ &\quad \big(V_d(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})\big) \cup \big(V_d(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})\big) \\ &= A \cup B \cup C \cup D, \end{aligned}$$

donde $A = V_i(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})$, $B = V_i(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})$, $C = V_d(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})$ y $D = V_d(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})$. Entonces, como $\bar{z} = (t, 0)$, tenemos que $\bar{z} \in A \cup B \cup C \cup D$.

Si $\bar{z} \in A$, se tiene

$$|t - x_i| < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |t - y_i| < \frac{1}{n}.$$

Pero, por la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana,

$$|x_i - y_i| \leqq |x_i - t| + |t - y_i| < \frac{2}{n} < 2\epsilon = \delta \leqq |x_i - y_i|,$$

es decir $|x_i - y_i| < |x_i - y_i|$, lo cual es absurdo. Por lo que $V_i(\bar{x}) \cap V_i(\bar{y})$ no tiene puntos de X, esto es $A = \emptyset$.

Por otra parte, si $\bar{z} \in B$, tenemos que

$$|t - x_i| < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |t - y_d| < \frac{1}{n}.$$

De nuevo, por la desigualdad del triángulo,

$$|x_i - y_d| \leqq |x_i - t| + |t - y_d| < \frac{2}{n} < 2\epsilon = \delta \leqq |x_i - y_d|,$$

implicando que $|x_i - y_d| < |x_i - y_d|$, teniendo así una contradicción. Por tanto, no existen puntos de X en $V_i(\bar{x}) \cap V_d(\bar{y})$, es decir $B = \emptyset$. Así, usando el mismo razonamiento que se uso para demostrar que A y B son vacíos, se prueba también que C y D son vacíos. De esta manera tenemos (3.4.6). Por lo tanto, por los Casos **I**, **II** y **III**, $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es T_2. ■

Antes de ver que el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$, daremos algunos resultados importantes para ciertos subconjuntos de X. Para ello consideremos lo siguiente:

Sean $(u, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos las rectas L y L' en $\mathbb{R}^2$ que pasan, respectivamente, por los puntos $a_\varepsilon = (u - \varepsilon, 0)$ y $b_\varepsilon = (u + \varepsilon, 0)$ y tienen pendiente igual a θ. Entonces la ecuación de L es

$$y = \theta(x - (u - \varepsilon)), \tag{3.4.8}$$

mientras que la ecuación de L' es

$$y = \theta(x - (u + \varepsilon)). \tag{3.4.9}$$

También consideremos las rectas T y T' en $\mathbb{R}^2$ que pasan, respectivamente, por los puntos a_ε y b_ε y tienen pendiente igual a $-\theta$. Entonces la ecuación de T es

$$y = -\theta(x - (u - \varepsilon)) \tag{3.4.10}$$

y la de T' es

$$y = -\theta(x - (u + \varepsilon)). \tag{3.4.11}$$

Definición 3.4.3. *Sean* $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ *y* $\varepsilon > 0$.

a) *Si* $\bar{p} = (u, 0)$, *definimos los siguientes subconjuntos de* X*:*

$$B_{\theta}(\bar{p}) = \{(s,t) \in X\colon s \geqq u-\varepsilon \ \ y \ \ \theta(s-(u+\varepsilon)) \leqq t \leqq \theta(s-(u-\varepsilon))\},$$
$$B_{-\theta}(\bar{p}) = \{(s,t) \in X\colon s \leqq u+\varepsilon \ \ y \ \ -\theta(s-(u-\varepsilon)) \leqq t \leqq -\theta(s-(u+\varepsilon))\}.$$

Entonces $B_{\theta}(\bar{p})$ *es el conjunto formado por los elementos de* X *que están por encima de la recta* $L^{'}$ *y por debajo de la recta* L*, mientras que* $B_{-\theta}(\bar{p})$ *es el conjunto formado por los elementos de* X *que están por encima de la recta* T *y por debajo de la recta* $T^{'}$*.*

b) *Si* $\bar{p} = (u, v)$ *y* $v > 0$*, definimos los siguientes subconjuntos de* X*:*

$$B_i(\bar{p}) = B_{-\theta}(\bar{p}_i) \cup B_{\theta}(\bar{p}_i) \quad \text{y} \quad B_d(\bar{p}) = B_{-\theta}(\bar{p}_d) \cup B_{\theta}(\bar{p}_d), \qquad (3.4.12)$$

donde los puntos $\bar{p}_i$ *y* $\bar{p}_d$ *son, respectivamente, los pie izquierdo y derecho de* $\bar{p}$*, y se definen como indicamos en la* Definición 3.2.2.

Ver las dos figuras siguientes.

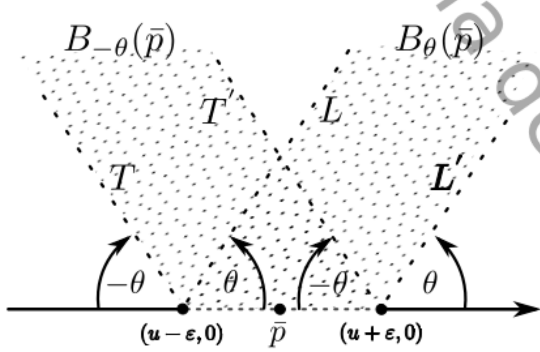

Figura 3.15: El conjunto $B_{\theta}(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})$.

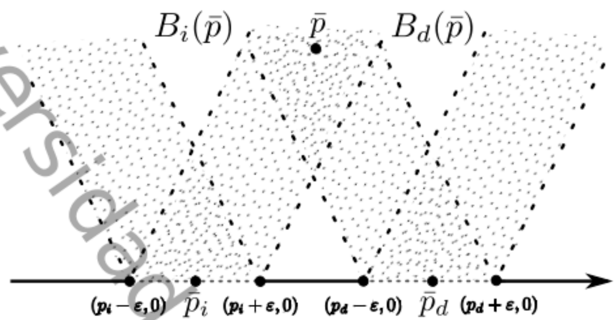

Figura 3.16: Los conjuntos $B_i(\bar{p})$ y $B_d(\bar{p})$.

Los siguientes tres lemas serán de mucha utilidad pues, gracias a ellos, las pruebas de los teoremas que se presentarán después, es más simple.

Lema 3.4.4. *Sean $\bar{p} = (u, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})$$

es cerrado en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. En consecuencia, si $\bar{p} = (u, v)$ con $v > 0$, $B_i(\bar{p})$ y $B_d(\bar{p})$ son cerrados en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$.

Demostración. Sea $\bar{y} \in X$ tal que $\bar{y} \notin B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})$, y probemos que existe $U \in \mathcal{B}(\theta)$ para el cual $\bar{y} \in U$ y

$$U \subset X \setminus \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big).$$

Consideremos los siguientes casos.

Caso I. Si $\bar{y} = (s, 0)$. Como $\bar{y} \notin B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})$ y $\bar{y} = (s, 0)$, se sigue que

$$s < u - \varepsilon \qquad \text{o} \qquad s > u + \varepsilon$$

por definición de los conjuntos $B_\theta(\bar{p})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$. Veamos la figura siguiente.

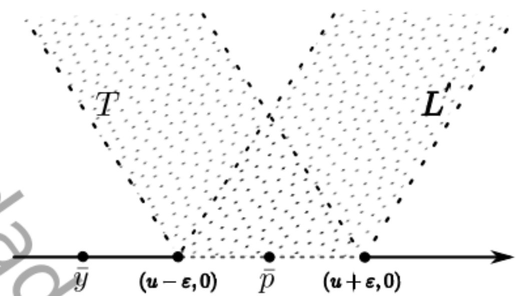

Figura 3.17: El punto $\bar{y}=(s,0)$ con $s<u-\varepsilon$.

Si sucede que $s<u-\varepsilon$, definimos $\delta=\dfrac{(u-\varepsilon)-s}{2}>0$. Como $\delta>0$, existe $m\in\mathbb{N}$ por la Propiedad Arquimediana, de tal manera que $\dfrac{1}{m}<\delta$. Sea $U=U_m(\bar{y})$ y demostremos que

$$U\cap\big(B_\theta(\bar{p})\cup B_{-\theta}(\bar{p})\big)=\emptyset. \tag{3.4.13}$$

Como los puntos de $U_m(\bar{y})$ están dados de la manera $(r,0)\in X$ y $B_\theta(\bar{p})\cap B_{-\theta}(\bar{p})$ contiene todos los puntos de $B_\theta(\bar{p})\cup B_{-\theta}(\bar{p})$ en esta forma, deducimos que (3.4.13) lo obtendremos probando

$$U\cap\big(B_\theta(\bar{p})\cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)=\emptyset. \tag{3.4.14}$$

Supongamos por tanto que existe $\bar{z}=(q,0)\in U\cap\big(B_\theta(\bar{p})\cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$. Entonces $\bar{z}\in U$ y $\bar{z}\in B_\theta(\bar{p})\cap B_{-\theta}(\bar{p})$. Luego, por la definición de los conjuntos $U, B_\theta(\bar{p})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$, se tiene que

$$|q-s|<\frac{1}{m},\qquad u-\varepsilon\leqq q\qquad \text{y}\qquad q\leqq u+\varepsilon$$

si y sólo si

$$s-\frac{1}{m}<q<s+\frac{1}{m}\qquad \text{y}\qquad u-\varepsilon\leqq q\leqq u+\varepsilon.$$

Pero al ser $\dfrac{1}{m}<\delta$,

$$s-\delta<q<s+\delta\qquad \text{y}\qquad u-\varepsilon\leqq q\leqq u+\varepsilon. \tag{3.4.15}$$

Ahora, observemos lo siguiente:

$$s+\delta = s + \frac{(u-\varepsilon)-s}{2} = \frac{s+u-\varepsilon}{2},$$

y además, al ser $\delta > 0$,

$$u-\varepsilon > u-\varepsilon-\delta = u-\varepsilon-\frac{(u-\varepsilon)-s}{2} = \frac{u-\varepsilon+s}{2}.$$

Esto implica $s+\delta < u-\varepsilon$. Luego, por (3.4.15)

$$q < s+\delta < u-\varepsilon \leqq q,$$

es decir $q<q$, lo cual es absurdo. Así, $U \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$ no tiene puntos de X, es decir se tiene (3.4.14). Para la desigualdad $s > u+\varepsilon$ se usa el mismo razonamiento al dado para $s < u-\varepsilon$. Por tanto, en ambas situaciones, existe $U \in \mathcal{B}(\theta)$ con $\bar{y} = (s,0) \in U$ para el cual

$$U \subset X \setminus \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big).$$

Caso II. Si $\bar{y} = (s,t)$ con $t>0$. Supongamos que $\bar{y}$ está por debajo de la recta $L^{'}$. Es decir, por (3.4.9), $t < \theta(s-(u+\varepsilon))$. Observemos la Figura 3.18.

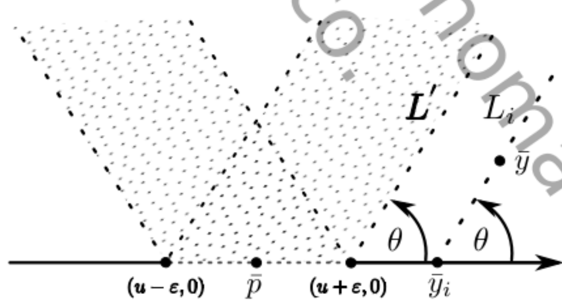

Figura 3.18: El punto $\bar{y} = (s,t)$ por debajo de la recta $L^{'}$.

Sea L_i la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\bar{y}$ y $\bar{y}_i$. Como L_i, por (3.2.12), tiene pendiente θ, L_i es paralela a $L^{'}$ y está por debajo de $L^{'}$. Entonces $(u+\varepsilon,0) \neq \bar{y}_i$, específicamente,

$$u+\varepsilon < y_i,$$

Definamos $\delta = \dfrac{y_i - (u+\varepsilon)}{2} > 0$. Entonces la Propiedad Arquimediana asegura que existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\dfrac{1}{m} < \delta$. Sea $U = U_m(\bar{y})$, y probemos que

$$U \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big). \tag{3.4.16}$$

Por la misma situación del Caso **I**, como

$$\bar{y} = (s,t) \notin B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p}) \qquad \text{y} \qquad u + \varepsilon < y_i,$$

bastará con demostrar

$$V_i(\bar{y}) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big) = \emptyset \tag{3.4.17}$$

para obtener (3.4.16), pues los puntos de $V_i(\bar{y})$ son de la forma $(r,0) \in X$. Para esto, observemos que al ser $\dfrac{1}{m} < \delta$,

$$y_i - \frac{1}{m} > y_i - \delta = y_i + \frac{u+\varepsilon-y_i}{2} = \frac{y_i+u+\varepsilon}{2}.$$

Además, como $\delta > 0$,

$$u+\varepsilon < u+\varepsilon+\delta = u+\varepsilon+\frac{y_i-(u+\varepsilon)}{2} = \frac{u+\varepsilon+y_i}{2}.$$

Luego, por lo anterior

$$u+\varepsilon < y_i - \frac{1}{m}.$$

Por lo cual, no existe $(r,0) \in X$ tal que

$$u-\varepsilon \leqq r \leqq u+\varepsilon \qquad \text{y} \qquad y_i - \frac{1}{m} < r < y_i + \frac{1}{m},$$

es decir

$$u-\varepsilon \leqq r \leqq u+\varepsilon \qquad \text{y} \qquad |r-y_i| < \frac{1}{m}.$$

Así, por la definición de $B_\theta(\bar{p})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$, y por (3.2.6), obtenemos que $(r,0) \notin \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$ y $(r,0) \notin V_i(\bar{y})$, para todo $(r,0) \in X$. Con esto hemos probado (3.4.17), y en consecuencia (3.4.16). Por consiguiente,

$$U \subset X \setminus \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big).$$

Supongamos ahora que $\bar{y} = (s,t)$ está por debajo de la recta T. Entonces, por (3.4.10), $t < -\theta(s-(u-\varepsilon))$. Observemos la Figura 3.19.

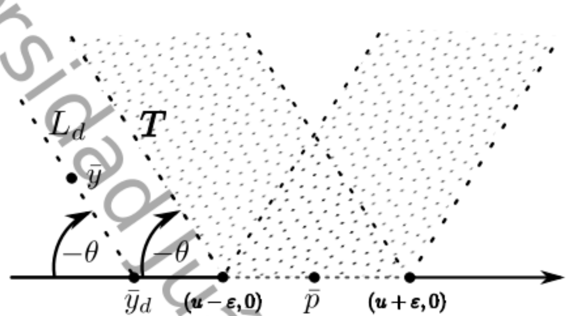

Figura 3.19: El punto $\bar{y} = (s,t)$ por debajo de la recta T.

Sea L_d la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\bar{y}$ y $\bar{y}_d$. Como L_d, por (3.2.13), tiene pendiente $-\theta$, L_d es paralela a T y está por debajo de T. Luego, $\bar{y}_d \neq (u-\varepsilon, 0)$. Específicamente

$$y_d < u - \varepsilon.$$

Definiendo $\delta = \dfrac{(u-\varepsilon)-y_d}{2} > 0$, de la Propiedad Arquimediana, se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\dfrac{1}{m} < \delta$. Sea $V = U_m(\bar{y})$, y demostremos que

$$V \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big) = \emptyset. \tag{3.4.18}$$

La prueba de (3.4.18) es muy similar a la dada para (3.4.16). Por lo cual, damos por demostrado (3.4.18), y con esto

$$V \subset X \setminus \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big).$$

Por último, supongamos que $\bar{y} = (s,t)$ está por arriba de las rectas L y T'. Entonces, por (3.4.8) y (3.4.11),

$$t > \theta(s-(u-\varepsilon)) \quad \text{y} \quad t > -\theta(s-(u+\varepsilon)).$$

Veamos la siguiente figura.

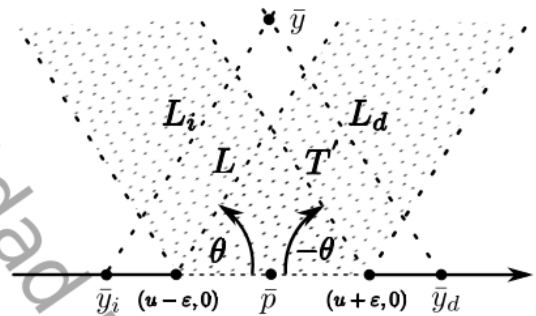

Figura 3.20: El punto $\bar{y} = (s, t)$ por arriba de las rectas L y $T^{'}$.

Como mencionamos anteriormente en el Caso **II**, las rectas L_i y L_d pasan por $\bar{y}$ y tienen pendiente θ y $-\theta$, respectivamente. Entonces, L_i y L_d son respectivamente paralelas a L y $T^{'}$, y además L_i está por arriba de L, al igual que L_d con $T^{'}$. Por lo que

$$\bar{y}_i \neq (u - \varepsilon, 0) \qquad \text{y} \qquad \bar{y}_d \neq (u + \varepsilon, 0),$$

en específico

$$y_i < u - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad u + \varepsilon < y_d.$$

Definamos $\delta = \text{mín}\{(u - \varepsilon) - y_i, y_d - (u + \varepsilon)\} > 0$, y consideremos $\alpha = \dfrac{\delta}{2}$. Como $\alpha > 0$, sucede que $\dfrac{1}{n} < \alpha$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $V = U_n(\bar{y})$, y veamos que

$$V \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big) = \emptyset. \tag{3.4.19}$$

Para ello notemos que

$$V = U_n(\bar{y}) = \{\bar{y}\} \cup V_i(\bar{y}) \cup V_d(\bar{y}),$$

pues $\bar{y} = (s, t)$ y $t > 0$. Entonces, como $\bar{y} \notin \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$, obtendremos (3.4.19) probando que

$$\big(V_i(\bar{y}) \cup V_d(\bar{y})\big) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big) = \emptyset, \tag{3.4.20}$$

es decir

$$\big(V_i(\bar{y}) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)\big) \cup \big(V_d(\bar{y}) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)\big) = \emptyset. \tag{3.4.21}$$

Para probar (3.4.21), demostremos que

$$y_i + \frac{1}{n} < u - \varepsilon \quad \text{y} \quad u + \varepsilon < y_d - \frac{1}{n}. \tag{3.4.22}$$

Veamos primero que $y_i + \frac{1}{n} < u - \varepsilon$. Como $\frac{1}{n} < \alpha = \frac{\delta}{2}$,

$$y_i + \frac{1}{n} < y_i + \alpha = y_i + \frac{\delta}{2} \leqq y_i + \frac{(u-\varepsilon) - y_i}{2} = \frac{y_i + u - \varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, al tenerse que $\alpha = \frac{\delta}{2} > 0$,

$$u - \varepsilon > u - \varepsilon - \alpha = u - \varepsilon - \frac{\delta}{2} \geqq u - \varepsilon - \frac{u - \varepsilon - y_i}{2} = \frac{u - \varepsilon + y_i}{2}.$$

Luego, por lo anterior $y_i + \frac{1}{n} < u - \varepsilon$. Usando este mismo argumento, se prueba también que

$$u + \varepsilon < \frac{y_d + u + \varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{y_d + u + \varepsilon}{2} < y_d - \frac{1}{n}.$$

Con esto tenemos probada la segunda desigualdad de (3.4.22). Así, no puede existir $(r, 0) \in X$ tal que

$$y_i - \frac{1}{n} < r < y_i + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad u - \varepsilon \leqq r \leqq u + \varepsilon$$

o

$$y_d - \frac{1}{n} < r < y_d + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad u - \varepsilon \leqq r \leqq u + \varepsilon,$$

equivalentemente, no existe $(r, 0) \in X$ para el cual

$$|r - y_i| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad u - \varepsilon \leqq r \leqq u + \varepsilon$$

o

$$|r - y_d| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad u - \varepsilon \leqq r \leqq u + \varepsilon.$$

Entonces, por definición de los conjuntos $V_i(\bar{y}), V_d(\bar{y})$ y $B_\theta(\bar{p}), B_{-\theta}(\bar{p})$, tenemos que $(r, 0) \notin V_i(\bar{y}) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$ o $(r, 0) \notin V_d(\bar{y}) \cap \big(B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})\big)$, para todo $(r, 0) \in X$. De esta manera se obtiene (3.4.21) y en consecuencia (3.4.20). Por lo cual hemos probado (3.4.19), lo que implica

$$V \subset X \setminus \big(B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})\big).$$

Por lo tanto, por los Casos **I** y **II**, $B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p})$ es cerrado en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, para todo $\bar{p} = (u, 0) \in \mathbb{R}^2$. Como consecuencia de este hecho, por (3.4.12) de la Definición 3.4.3, se sigue que $B_\theta(\bar{p}_i)$, $B_{-\theta}(\bar{p}_i)$, $B_\theta(\bar{p}_d)$ y $B_{-\theta}(\bar{p}_d)$ son cerrados en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. De manera que los conjuntos $B_i(\bar{p})$ y $B_d(\bar{p})$ son también cerrados en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, pues son la unión de dos cerrados. Con esto termina la prueba del lema. ∎

Lema 3.4.5. *Sean $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$.*

a) *Si $\bar{p} = (u, 0)$, el subconjunto de X*

$$C_\varepsilon(\bar{p}) = \{(s, 0) \in X : |s - u| < \varepsilon\} \tag{3.4.23}$$

cumple que

$$C_\varepsilon(\bar{p}) \subset B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}). \tag{3.4.24}$$

b) *Si $\bar{p} = (s, t) \in X$ y $t > 0$, entonces*

$$\bar{p} \in B_i(\bar{p}) \cup B_d(\bar{p}). \tag{3.4.25}$$

Ver el siguiente par de figuras.

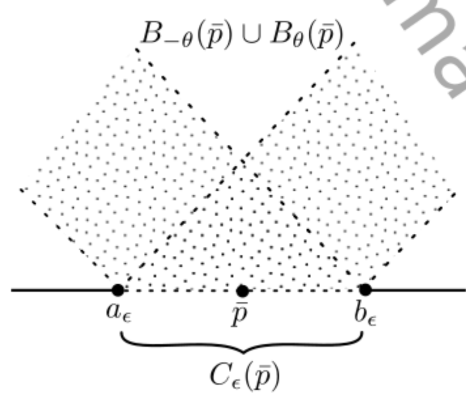

Figura 3.21: El conjunto $C_\varepsilon(\bar{p})$ contenido en $B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})$.

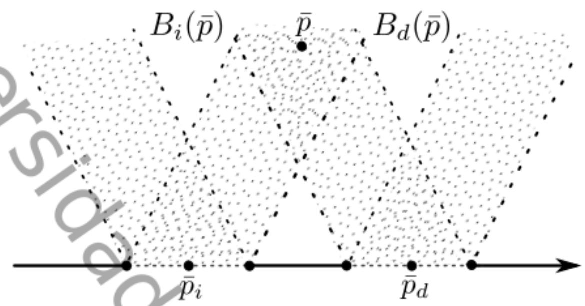

Figura 3.22: El punto $\bar{p}$ en $B_i(\bar{p}) \cup B_d(\bar{p})$.

Demostración. Veamos a). Sea $\bar{y} = (s, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p})$. Entonces

$$|s-u| < \varepsilon \quad \text{si y sólo si} \quad u - \varepsilon < s < u + \varepsilon. \tag{3.4.26}$$

Como $\varepsilon > 0$,

$$(s-u) - \varepsilon < 0 < (s-u) + \varepsilon.$$

Luego, la hipótesis de que $\theta > 0$ implica que

$$\theta(s - (u+\varepsilon)) < 0 < \theta(s - (u - \varepsilon)) \tag{3.4.27}$$

si y sólo si

$$-\theta(s - (u - \varepsilon)) < 0 < -\theta(s - (u + \varepsilon)). \tag{3.4.28}$$

Por lo que, de (3.4.26), (3.4.27), (3.4.28) y la definición de los conjuntos $B_\theta(\bar{p})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$, obtenemos

$$\bar{y} = (s, 0) \in B_\theta(\bar{p}) \quad \text{y} \quad \bar{y} = (s, 0) \in B_{-\theta}(\bar{p}),$$

es decir $\bar{y} \in B_\theta(\bar{p}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})$. En consecuencia

$$\bar{y} \in B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p}).$$

Por tanto tenemos (3.4.23).

Ahora probemos b). Como primer punto notemos que, al ser $\bar{p} = (s, t)$ con $t > 0$,

$$B_i(\bar{p}) = B_{-\theta}(\bar{p}_i) \cup B_\theta(\bar{p}_i)$$

por (3.4.12) de la Definición 3.4.3. Entonces las rectas L y L', con ecuaciones dadas en (3.4.8) y (3.4.9), pasan por los puntos $a_\varepsilon = (p_i - \varepsilon, 0)$ y $b_\varepsilon =$

$(p_i + \varepsilon, 0)$, respectivamente (no olvidemos que $\bar{p}_i$ está definido en la misma manera que el punto $\bar{x}_i$).

Como segundo punto, notemos que la recta L pasa por el punto $(s, t+\theta\varepsilon)$, y la recta $L^{'}$ por el punto $(s, t-\theta\varepsilon)$. En efecto, por (3.4.8) y (3.4.9),

$$\theta(s-(p_i-\varepsilon)) = \theta\left(s - \left(s - \frac{t}{\theta}\right) + \varepsilon\right) = \theta\left(\frac{t}{\theta} + \varepsilon\right) = t + \theta\varepsilon \qquad (3.4.29)$$

y

$$\theta(s-(p_i+\varepsilon)) = \theta\left(s - \left(s - \frac{t}{\theta}\right) - \varepsilon\right) = \theta\left(\frac{t}{\theta} - \varepsilon\right) = t - \theta\varepsilon. \qquad (3.4.30)$$

De esta manera el punto $(s, t+\theta\varepsilon)$ satisface la ecuación de la recta L, y el punto $(s, t-\theta\varepsilon)$ a la ecuación de $L^{'}$. Luego, como ε y θ son números positivos

$$t - \theta\varepsilon < t < t + \theta\varepsilon,$$

pero de (3.4.29) y (3.4.30), se sigue que

$$\theta(s-(p_i+\varepsilon)) < t < \theta(s-(p_i-\varepsilon)).$$

Como también $t > 0$,

$$s > s - \frac{t}{\theta} = p_i > p_i - \varepsilon.$$

Entonces,

$$\theta(s-(p_i+\varepsilon)) < t < \theta(s-(p_i-\varepsilon)) \quad \text{y} \quad s > p_i - \varepsilon.$$

Así, por definición de $B_\theta(\bar{p}_i)$, se sigue que $\bar{p} = (s,t) \in B_\theta(\bar{p}_i)$. En consecuencia $\bar{p} \in B_\theta(\bar{p}_i) \cup B_{-\theta}(\bar{p}_i)$. Por lo tanto, de (3.4.12), $\bar{p} = (s,t) \in B_i(\bar{p})$, y obtenemos de esta manera (3.4.25). Esto termina la prueba del lema. ■

Lema 3.4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Entonces*

$$\mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})) = B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}), \qquad (3.4.31)$$

para cada $\bar{p} = (u,0) \in \mathbb{R}^2$.

Ver la Figura 3.23.

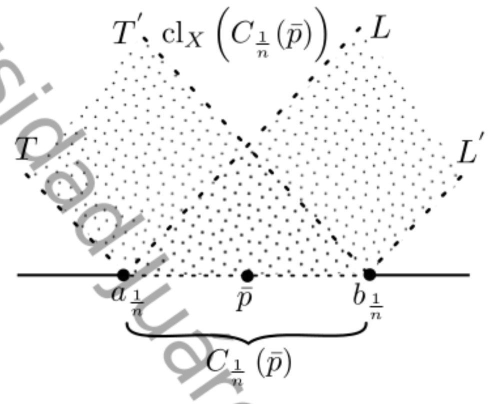

Figura 3.23: La cerradura de $C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$.

Demostración. Sea $\bar{p} = (u, 0) \in \mathbb{R}^2$, y notemos que al ser $\varepsilon = 1/n$ y $B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})$ cerrado en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, por (3.4.24) del Lema 3.4.5, se tiene

$$\mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})) \subset B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}).$$

Entonces, sólo resta probar la contención

$$B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}) \subset \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})). \tag{3.4.32}$$

Sea pues $\bar{y} = (s, t) \in B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})$. Como todo punto de $C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ es un elemento de $\mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$, vamos a considerar que

$$\bar{y} \in \big(B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})\big) \smallsetminus C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}),$$

es decir, $\bar{y} = (s, t) \notin C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. y, por (3.4.23) del Lema 3.4.5,

$$t > 0 \qquad \text{o} \qquad |s - u| \geqq \frac{1}{n}.$$

Ahora, analicemos los siguientes casos.

Caso I. $\bar{y} = (s, t) \in B_{-\theta}(\bar{p}) \smallsetminus C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Como $\varepsilon = 1/n$, tenemos que las rectas T y T' pasan, respectivamente, por los puntos $a_{\frac{1}{n}} = (u - 1/n, 0)$ y

$b_{\frac{1}{n}} = (u + 1/n, 0)$. Entonces, por definición de $B_{-\theta}(\bar{p})$,

$$-\theta\left(s-\left(u-\frac{1}{n}\right)\right) \leqq t \leqq -\theta\left(s-\left(u+\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{y} \quad s \leqq u+\frac{1}{n}. \quad (3.4.33)$$

Veamos la Figura 3.24 y consideremos los siguientes tres incisos.

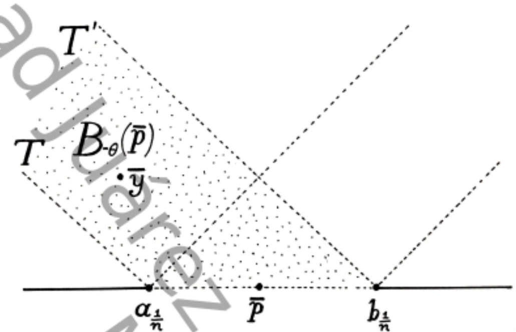

Figura 3.24: El punto $\bar{y} = (s,t)$ en $B_{-\theta}(\bar{p}) \setminus C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$.

1). Supongamos que $\bar{y} = (s,t)$ es un punto de la recta T, esto es

$$t = -\theta\left(s-\left(u-\frac{1}{n}\right)\right).$$

De esta manera

$$u - \frac{1}{n} = s + \frac{t}{\theta}. \quad (3.4.34)$$

Entonces:

a). Si $t = 0$. Por (3.4.34), tenemos

$$u - \frac{1}{n} = s.$$

Notemos que u es un número racional, pues $s, 1/n \in \mathbb{Q}$, y en consecuencia $\bar{p} = (u,0) \in X$. Así que $\bar{y} = (s,0) = (u - 1/n, 0) = a_{\frac{1}{n}}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, y definamos

$$\delta = \text{mín}\{u, (u - 1/n) + 1/m\}.$$

Como
$$\left(u - \frac{1}{n}\right) < u \quad \text{y} \quad \left(u - \frac{1}{n}\right) < \left(u - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m},$$
sucede que
$$u - \frac{1}{n} < \delta.$$
Entonces, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ para el cual
$$u - \frac{1}{n} < q < \delta. \tag{3.4.35}$$
Veamos que el punto $(q, 0) \in U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Observemos que, por (3.4.35) y la desigualdad $(u - 1/n) - 1/m < u - 1/n$,
$$\left(u - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m} < q < \delta \leqq \left(u - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m},$$
es decir
$$\left(u - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m} < q < \left(u - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m} \quad \text{si y sólo si} \quad |q - (u - 1/n)| < \frac{1}{m}.$$
Luego, como $u - 1/n = s$
$$|q - s| < \frac{1}{m}.$$
De esta manera, por (3.2.2) de la Definición 3.2.2, $(q, 0) \in U_m(\bar{y})$. Además, por el hecho de que $\delta \leqq u$ y $u < u + 1/n$ y por (3.4.35), obtenemos
$$u - \frac{1}{n} < q < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |q - u| < \frac{1}{n}.$$
Así, por (3.4.23) del Lema 3.4.5, $(q, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Por tanto $(q, 0) \in U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ y, en consecuencia, al ser $U_m(\bar{y})$ cualquier elemento en la base de vecindades $\mathcal{U}(\bar{y})$, $\bar{y} = (s, 0) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

b). Si $t > 0$. Por (3.4.34) y (3.2.4) de la Definición 3.2.2, se tiene
$$u - \frac{1}{n} = y_d.$$
Entonces, de nuevo por (3.2.4), se sigue que $\bar{y}_d = (u - 1/n, 0)$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideremos
$$\delta = \min\{u, (u - 1/n) + 1/m\}.$$

Como $(u-1/n) < u$ y $(u-1/n) < (u-1/n)+1/m$, se tiene $(u-1/n) < \delta$. Luego, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ para el cual

$$u - \frac{1}{n} < q < \delta. \tag{3.4.36}$$

Demostremos que el punto $(q,0)$ es un elemento de $U_m(\bar{y})$ y $C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Como se cumple (3.4.36) y las desigualdades $(u-1/n)-1/m < u-1/n$ y $\delta \leqq (u-1/n)+1/m$, obtenemos

$$\left(u - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m} < q < \left(u - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m}$$

si y sólo si

$$|q - (u - 1/n)| < \frac{1}{m}.$$

Pero $u - 1/n = y_d$, es decir

$$|q - y_d| < \frac{1}{m}.$$

Así, por (3.2.7), $(q,0) \in V_d(\bar{y})$. Por otra parte, usando de nuevo (3.4.36) y el hecho de que $\delta \leqq u < u + 1/n$, tenemos

$$u - \frac{1}{n} < q < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |q - u| < \frac{1}{n}.$$

Entonces, por (3.4.23), $(q,0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Esto implica que $(q,0) \in V_d(\bar{p}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ y, de esta manera, por (3.2.5) de la Definición 3.2.2, $U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ no es vacío. Por tanto $\bar{y} = (s,t) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

2). Supongamos que $\bar{y} = (s,t)$ se encuentra entre las rectas T y T'. Es decir, por (3.4.33),

$$-\theta\left(s - \left(u - \frac{1}{n}\right)\right) < t < -\theta\left(s - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{y} \quad s < u + \frac{1}{n}.$$

Como $\bar{y} = (s,t) \notin C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ y no es un punto de las rectas T y T', obtenemos que $t > 0$. Luego, la recta L_d en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\bar{y}$ y $\bar{y}_d$ es paralela a T y T', y además, está por arriba de la recta T y por debajo de la recta T'. Esto implica que

$$\bar{y}_d \neq \left(u - \frac{1}{n}, 0\right) \qquad \text{y} \qquad \bar{y}_d \neq \left(u + \frac{1}{n}, 0\right).$$

Específicamante,

$$u - \frac{1}{n} < y_d < u + \frac{1}{n}. \tag{3.4.37}$$

Consideremos la desigualdad $u - 1/n < y_d$. Sea $m \in \mathbb{N}$, y definamos

$$\delta = \max\{y_d - 1/m, u - 1/n\}.$$

Como $\delta < y_d$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\delta < q < y_d. \tag{3.4.38}$$

Ahora, probemos que $(q, 0) \in U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Usando las desigualdades $y_d < y_d + 1/m$ y $y_d - 1/m \leqq \delta$, obtenemos

$$y_d - \frac{1}{m} < q < y_d + \frac{1}{m} \qquad \text{si y sólo si} \qquad |q - y_d| < \frac{1}{m}.$$

Luego, por (3.2.7) de la Definición 3.2.2, $(q, 0) \in V_d(\bar{y})$. Más aún, por cumplirse $u - 1/n \leqq \delta$, (3.4.38) y (3.4.37),

$$u - \frac{1}{n} < q < u + \frac{1}{n} \qquad \text{si y sólo si} \qquad |q - u| < \frac{1}{n}.$$

Entonces $(q, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Por lo que $(q, 0) \in V_d(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Por tanto de (3.2.5) de la Definición 3.2.2 se tiene que $U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ no es vacío, es decir $\bar{y} \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

3). Supongamos que $\bar{y} = (s, t)$ es un punto en la recta T'. Entonces, por (3.4.11)

$$t = -\theta\left(s - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right),$$

es decir

$$u + \frac{1}{n} = s + \frac{t}{\theta}. \tag{3.4.39}$$

Veamos los siguientes puntos.

a). Si $t = 0$. Por (3.4.39), sucede que

$$u + \frac{1}{n} = s.$$

Entonces, por el mismo argumento que dimos en a) del inciso 1), se tiene $u \in \mathbb{Q}$, lo que implica que $\bar{p} = (u, 0) \in X$, y además $\bar{y} = (s, 0) = (u + 1/n, 0) = b_{\frac{1}{n}}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\alpha = \max\{u, (u + 1/n) - 1/k\}.$$

Como $\alpha < u + 1/n$,

$$\alpha < r < u + \frac{1}{n}, \tag{3.4.40}$$

para algún $r \in \mathbb{Q}$. Ahora, demostremos que $(r, 0) \in U_k(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Notemos pues que, por (3.4.40) y la desigualdad $(u + 1/n) + 1/k > (u + 1/n)$, se tiene

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{k} \leqq \alpha < r < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k},$$

esto es,

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{k} < r < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k}$$

si y sólo si

$$|r - (u + 1/n)| = |r - s| < \frac{1}{k}.$$

En consecuencia, por (3.2.2) de la Definición 3.2.2, $(r, 0) \in U_k(\bar{y})$. Además, como $u - 1/n < u \leqq \alpha$, $r < u + 1/n$ y se cumple (3.4.40),

$$u - \frac{1}{n} < r < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |r - u| < \frac{1}{n}.$$

Entonces, de (3.4.23), se tiene $(r, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Por esta razón $(r, 0) \in U_k(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$, y por tanto $\bar{y} = (s, 0) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

b). Si $t > 0$. Observemos que, por (3.4.39) y (3.2.4),

$$u + \frac{1}{n} = y_d.$$

Luego, de nuevo por (3.2.4), $\bar{y}_d = (u + 1/n, 0)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, y definamos

$$\rho = \text{máx}\{u, (u + 1/n) - 1/m\}.$$

Como $\rho < u + 1/n$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\rho < r < u + 1/n.$$

Usando el mismo razonamiento al que dimos en b) de 1) y el hecho de que $u + 1/n = y_d$, se demuestra también que $(r, 0) \in V_d(\bar{y})$ y $(r, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$, y por tanto, de (3.2.5) se sigue también que $U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ no es vacío, es decir $\bar{y} = (s, t) \in \text{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$. Luego, por los incisos **1)**, **2)** y **3)**, hemos obtenido que

$$B_{-\theta}(\bar{p}) \subset \text{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})). \tag{3.4.41}$$

Caso II. $\bar{y} = (s, t) \in B_\theta(\bar{p}) \smallsetminus C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Como $\varepsilon = 1/n$, las rectas L y L' pasan por los puntos $a_{\frac{1}{n}} = (u - 1/n, 0)$ y $b_{\frac{1}{n}} = (u + 1/n, 0)$, respectivamente. Entonces, por definición de $B_\theta(\bar{p})$,

$$\theta\left(s - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right) \leqq t \leqq \theta\left(s - \left(u - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{y} \quad s \geqq u - \frac{1}{n}. \tag{3.4.42}$$

Observemos la Figura 3.25 y analicemos los siguientes tres incisos.

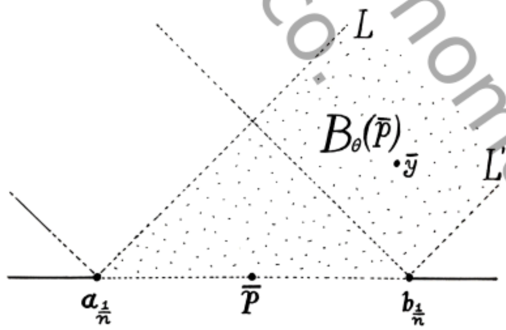

Figura 3.25: El punto $\bar{y} = (s, t)$ en $B_\theta(\bar{p}) \smallsetminus C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$.

1'). El punto $\bar{y} = (s, t)$ pertenece la recta L. Por lo dado en (3.4.8), se sigue que

$$t = \theta\left(s - \left(u - \frac{1}{n}\right)\right),$$

es decir

$$u - \frac{1}{n} = s - \frac{t}{\theta}. \tag{3.4.43}$$

Analicemos los siguientes puntos.

i). Si $t = 0$. Por (3.4.43) se tiene

$$u - \frac{1}{n} = s.$$

Luego $u \in \mathbb{Q}$ y $\bar{p} = (u, 0) \in X$. Además $\bar{y} = (u - 1/n, 0) = a_{\frac{1}{n}}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, y definamos

$$\alpha = \text{mín}\{u, (u - 1/n) + 1/k\}.$$

Como $u - 1/n < \alpha$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$u - \frac{1}{n} < r < \alpha.$$

Haciendo el mismo desarrollo que dimos en a) del inciso 1) cuando $t = 0$, y usando el hecho de $u - 1/n = s$, se obtiene $(r, 0) \in U_k(\bar{y})$ y $(r, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$, es decir $\bar{y} = (s, 0) \in \text{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

ii). Si $t > 0$. Usando (3.4.43) y (3.2.4) de la Definición 3.2.2, tenemos

$$u - \frac{1}{n} = y_i,$$

lo cual implica que $\bar{y}_i = (u - 1/n, 0)$. Más aún, por la Observación 3.2.3, $u - 1/n$ no es racional.

Sea ahora $m \in \mathbb{N}$, y sea

$$\rho = \text{mín}\{u, (u - 1/n) + 1/m\}.$$

Notemos que

$$\left(u - \frac{1}{n}\right) < u \quad \text{y} \quad \left(u - \frac{1}{n}\right) < \left(u - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m}.$$

Entonces

$$u - \frac{1}{n} < \rho.$$

De esta manera

$$u - \frac{1}{n} < r < \rho,$$

para algún $r \in \mathbb{Q}$. Con un razonamiento análogo al que dimos en a) del inciso 1) cuando $t > 0$ y usando que $u - 1/n = y_i$ y (3.2.6) de la Definición 3.2.2, tenemos que $(r, 0) \in V_i(\bar{y})$ y $(r, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Luego, por (3.2.5), $U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ no es vacío. Por tanto $\bar{y} = (s, t) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

2'). $\bar{y} = (s, t)$ se encuentra entre las rectas L y L'. Es decir, por (3.4.42),

$$\theta\left(s - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right) < t < \theta\left(s - \left(u - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{y} \quad s > u - \frac{1}{n}.$$

De esta manera, como $\bar{y} = (s, t) \notin C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ y no es un punto de las rectas L y L', obtenemos que $t > 0$. Luego, la recta L_i en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\bar{y}$ y $\bar{y}_i$, es paralela a L y L', y además, está por arriba de la recta L' y por debajo de la recta L. Por lo cual

$$\bar{y}_i \neq \left(u - \frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{y} \quad \bar{y}_i \neq \left(u + \frac{1}{n}, 0\right),$$

específicamente

$$u - \frac{1}{n} < y_i < u + \frac{1}{n}.$$

Consideremos la desigualdad $u - 1/n < y_i$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\alpha = \max\{y_i - 1/k, u - 1/n\}.$$

Notemos que $\alpha < y_i$. Así que

$$\alpha < r < y_i, \tag{3.4.44}$$

para algún $r \in \mathbb{Q}$. Veamos que el punto $(r, 0) \in X$ esta en $U_k(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Entonces, como $u - 1/n \leqq \alpha$, $y_i < u + 1/n$ y se tiene (3.4.44),

$$u - \frac{1}{n} < r < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |r - u| < \frac{1}{n},$$

es decir, por (3.4.23) del Lema 3.4.5, $(r,0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Más aún, por (3.4.44) y las desigualdades: $y_i - 1/k \leqq \alpha$ y $y_i < y_i + 1/k$, se tiene

$$y_i - \frac{1}{k} < r < y_i + \frac{1}{k} \quad \text{si y sólo si} \quad |r - y_i| < \frac{1}{k}.$$

De esta manera, por (3.2.6), el punto $(r,0) \in V_i(\bar{y})$, y en consecuencia, por (3.2.5) de la Definición 3.2.2, $(r,0) \in U_k(\bar{y})$. Así, $U_k(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$ no es vacío, es decir $\bar{y} = (s,t) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

3'). $\bar{y} = (s,t)$ es un punto en la recta L'. Entonces, por (3.4.9)

$$t = \theta\left(s - \left(u + \frac{1}{n}\right)\right),$$

esto es

$$u + \frac{1}{n} = s - \frac{t}{\theta}. \tag{3.4.45}$$

Veamos las siguientes situaciones.

i). Si $t = 0$. Notemos que, por (3.4.45)

$$u + \frac{1}{n} = s,$$

es decir, $u \in \mathbb{Q}$ y $\bar{p} = (u,0) \in X$. Así que $\bar{y} = (s,0) = (u + 1/n, 0) = b_{\frac{1}{n}}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\rho = \text{máx}\{u, (u + 1/n) - 1/k\}.$$

Observemos que $\rho < u + 1/n$, por lo cual

$$\rho < r < u + \frac{1}{n}, \tag{3.4.46}$$

para algún $r \in \mathbb{Q}$. Como

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{k} \leqq \rho \quad \text{y} \quad u + \frac{1}{n} < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k},$$

por (3.4.46) se tiene

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{k} < r < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k} \quad \text{si y sólo si} \quad |r - (u + 1/n)| = |r - s| < \frac{1}{k}.$$

Luego, de (3.2.2) de la Definición 3.2.2, $(r, 0) \in U_k(\bar{y})$. Además, por las desigualdades $u - 1/n < u$ y $u \leqq \rho$, y por (3.4.46),

$$u - \frac{1}{n} < r < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |r - u| < \frac{1}{n}.$$

De esto y (3.4.23) de la Definición 3.4.5, tenemos que $(r, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Así que $(r, 0) \in U_k(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$, y en consecuencia $\bar{y} = (s, 0) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$.

ii). Si $t > 0$. De (3.4.45) y (3.2.4), se tiene

$$u + \frac{1}{n} = y_i.$$

Entonces $\bar{y}_i = (u + 1/n, 0)$ y, por la Observación 3.2.3, $u + 1/n$ no es racional.

Elijamos $m \in \mathbb{N}$. Sea

$$\rho = \text{máx}\{u, (u + 1/n) - 1/m\}.$$

Como $\rho < u + 1/n$,

$$\rho < q < u + 1/n, \tag{3.4.47}$$

para algún $q \in \mathbb{Q}$. Demostremos que el punto $(q, 0)$ es un elemento de $U_m(\bar{y})$ y $C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Notemos que por las desigualdades

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m} \leqq \rho \quad \text{y} \quad u + \frac{1}{n} < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m},$$

y por (3.4.47),

$$\left(u + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m} < q < \left(u + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m} \quad \text{si y sólo si} \quad |q - (u + 1/n)| = |q - y_i| < \frac{1}{m}.$$

Entonces, de (3.2.6) se sigue que $(q, 0) \in V_i(\bar{y})$. Por otra parte, al ser $u - 1/n < u$ y $u \leqq \rho$, usando de nuevo (3.4.47), obtenemos

$$u - \frac{1}{n} < q < u + \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si} \quad |q - u| < \frac{1}{n}.$$

Esto implica, por (3.4.23) del Lema 3.4.5, que $(q, 0) \in C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. Así, por (3.2.5) tenemos que $(q, 0) \in U_m(\bar{y}) \cap C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$. De esta manera $\bar{y} = (s, t) \in \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}))$. Por lo cual, de los incisos **1')**, **2')** y **3')**, obtenemos

$$B_\theta(\bar{p}) \subset \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p})).$$

Por lo tanto, de los Casos **I** y **II**, hemos obtenido (3.4.32). Con esto terminamos la prueba del lema. ■

Ahora veamos la siguiente situación.
Sean $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ con $b > 0$, y $m > 0$. Consideremos las rectas R_0 y L_0 en $\mathbb{R}^2$ que pasan por (a,b) y tienen pendiente $-m$ y m, respectivamente. Estas rectas tienen por ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} L_0: \quad y &= m(x-a)+b, \\ R_0: \quad y &= -m(x-a)+b. \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Sean también $(g,h) \in R_0$ y $(c,d) \in L_0$ de tal manera que

$$g < a \quad \text{y} \quad a < c.$$

Luego, las rectas R_1 y L_1 en $\mathbb{R}^2$ que pasan por los puntos (c,d) y (g,h), y tienen pendiente $-m$ y m, respectivamente, se intersectan en un punto, digamos $(e,f) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, las ecuaciones para dichas rectas están dadas por

$$\begin{aligned} L_1: \quad y &= m(x-g)+h, \\ R_1: \quad y &= -m(x-c)+d. \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

De esta manera las rectas R_0, L_0, R_1 y L_1 forman un paralelogramo P en $\mathbb{R}^2$, cuyos cuatro vértices son los puntos $(a,b), (c,d), (e,f)$ y (g,h), que definimos anteriormente. En la Figura 3.26 se muestra geométricamente al paralelogramo P.

El siguiente hecho es vital para la prueba del próximo teorema.

Teorema 3.4.7. *Si P es el paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ que definimos anteriormente. Entonces*

$$P \cap X \neq \emptyset.$$

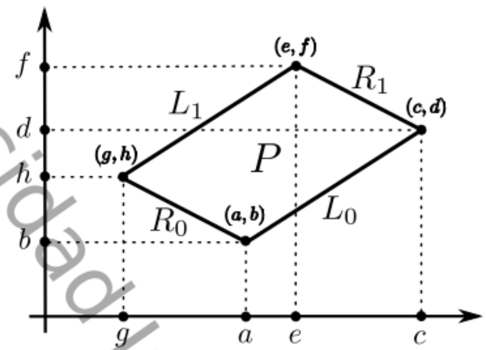

Figura 3.26: El paralelogramo P en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Como $g < a$, por la densidad del conjunto $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos elegir $s \in \mathbb{Q}$ de tal manera que

$$g < s < a.$$

Sean

$$u = -m(s-a) + b \quad \text{y} \quad v = \text{mín}\{y_1, y_2\}, \tag{3.4.50}$$

donde

$$y_1 = -m(s-c) + d \quad \text{y} \quad y_2 = m(s-g) + h.$$

Probemos que

$$u < v. \tag{3.4.51}$$

En efecto, como $s < a < c$,

$$-c < -a < -s \quad \text{si y sólo si} \quad s - c < s - a < 0.$$

Pero, al ser $-m < 0$

$$0 < -m(s-a) < -m(s-c). \tag{3.4.52}$$

Notemos que la ecuación de la recta L_0, dada en (3.4.48), define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es estrictamente creciente, pues su pendiente $m > 0$. Entonces, por el hecho de que $(a, b), (c, d) \in L_0$ y $a < c$, se tiene que

$$b = m(a-a) + b < m(c-a) + b = d, \quad \text{es decir} \quad b < d.$$

Lo que implica, de (3.4.52),

$$-m(s-a)+b<-m(s-c)+d,$$

esto es,

$$u<-m(s-c)+d, \tag{3.4.53}$$

pues $u=-m(s-a)+b$.

Ahora bien, notemos también que la ecuación de la recta R_0, dada en (3.4.48), define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es estrictamente decreciente, pues su pendiente $-m<0$. Entonces, al tenerse $s>g$ y $(g,h)\in R_0$, obtenemos que

$$-m(s-a)+b<-m(g-a)+b=h,$$

es decir, por (3.4.50)

$$u<h. \tag{3.4.54}$$

Al igual que la ecuación de la recta L_0, la ecuación de la recta L_1 define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es estrictamente creciente. Por lo que

$$h=m(g-g)+h<m(s-g)+h$$

si y sólo si

$$h<m(s-g)+h, \tag{3.4.55}$$

ya que $(g,h)\in L_1$ y $g<s$. De esta manera, de (3.4.54) y (3.4.55), se sigue que

$$u<m(s-g)+h. \tag{3.4.56}$$

Luego, por (3.4.53) y (3.4.56),

$$u<v.$$

Así, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $t\in\mathbb{Q}$ tal que

$$u<t<v, \tag{3.4.57}$$

Afirmamos que el punto $\bar{p}=(s,t)$ está entre las rectas R_0, R_1, L_0 y L_1, es decir

$$\begin{gathered}-m(s-a)+b<t<-m(s-c)+d,\\ m(s-a)+b<t<m(s-g)+h.\end{gathered} \tag{3.4.58}$$

En efecto, notemos que la primera desigualdad en (3.4.58) se obtiene inmediatamente de (3.4.57), ya que

$$u = -m(s-a) + b < t < v \leqq -m(s-c) + d.$$

Esto implica que $\bar{p} = (s,t)$ está entre de las rectas R_0 y R_1. Ahora bien, como mencionamos anteriormente, las ecuaciones de las rectas R_0 y L_0 definen funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son estrictamente decreciente y creciente, respectivamente. Por ello, al ser $s < a$ y (a,b) un punto de L_0 y R_0,

$$m(s-a) + b < m(a-a) + b = b$$

y

$$b = -m(a-a) + b < -m(s-a) + b, \tag{3.4.59}$$

es decir, por (3.4.50)

$$m(s-a) + b < u.$$

Pero, de (3.4.57),

$$m(s-a) + b < u < t < v \leqq m(s-g) + h,$$

lo cual implica que

$$m(s-a) + b < t < m(s-g) + h.$$

Por tanto $\bar{p} = (s,t)$ está entre las rectas L_0 y L_1, y entonces se sigue (3.4.58). Por último observemos que $t > 0$, ya que, por (3.4.59), (3.4.50) y (3.4.57),

$$0 < b = -m(a-a) + b < -m(s-a) + b = u < t.$$

Por tanto $\bar{p} = (s,t) \in X$ y es un punto entre las rectas R_0, R_1 y L_0, L_1, es decir $\bar{p}$ está dentro del paralelogramo P. De esta forma termina la prueba del teorema. ■

Por conveniencia y simplicidad en la notación que hemos manejado, haremos uso de lo siguiente:

Como, por definición, los conjuntos $B_\theta(\bar{p})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$, dependen implícitamente del número ε que se esté manejando para definir los puntos a_ε y b_ε que fueron definidos antes de la Definición 3.4.3, usaremos el símbolo $B_\varepsilon(\bar{p})$ para denotar el conjunto $B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})$, es decir

$$B_\varepsilon(\bar{p}) = B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}), \quad \text{para cada } \bar{p} = (u,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \varepsilon > 0. \tag{3.4.60}$$

Además, utilizaremos las letras con subíndice L_ε y T_ε para denotar las rectas que pasan por a_ε y tienen pendiente θ y $-\theta$, respectivamente. También usaremos los símbolos $L_\varepsilon^{'}$ y $T_\varepsilon^{'}$ para las rectas que pasan por b_ε y son paralelas a L_ε y T_ε, respectivamente. Con este convenio en la notación, la prueba del siguiente teorema será más práctica.

Teorema 3.4.8. *Sean δ y ε números positivos. Entonces*

$$B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q}) \neq \emptyset,$$

para cada $\bar{p} = (u, 0), \bar{q} = (v, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Sean $\bar{p} = (u, 0)$ y $\bar{q} = (v, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^2$. Analicemos los siguientes puntos:

I. Si $\bar{q} = \bar{p} = (u, 0)$. Veamos la figura siguiente.

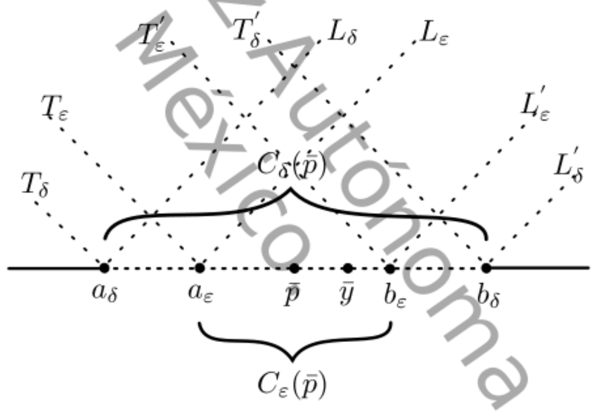

Figura 3.27: Intersección de $C_\varepsilon(\bar{p})$ con $C_\delta(\bar{p})$.

Como δ y ε son números positivos arbitrarios, vamos a considerar

$$\alpha = \text{mín}\{\delta, \varepsilon\} > 0.$$

Luego, tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} u - \varepsilon \leqq u - \alpha, \qquad u + \alpha \leqq u + \varepsilon, \\ u - \delta \leqq u - \alpha, \qquad u + \alpha \leqq u + \delta. \end{aligned} \tag{3.4.61}$$

Entonces, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$u - \alpha < r < u + \alpha,$$

pues $u - \alpha < u + \alpha$. Lo cual implica, del primer renglón de (3.4.61), que

$$u - \varepsilon < r < u + \varepsilon \quad \text{si y sólo si} \quad |r - u| < \varepsilon.$$

Por lo cual, de (3.4.23) y (3.4.24), el punto $(r, 0) \in X$ cumple que

$$(r, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p}) \subset B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}) = B_\varepsilon(\bar{p}). \tag{3.4.62}$$

Más aún, por (3.4.61), se tiene que

$$u - \delta < r < u + \delta \quad \text{si y sólo si} \quad |r - u| < \delta.$$

De nuevo, por (3.4.23) y (3.4.24), el punto $(r, 0) \in X$ satisface que

$$(r, 0) \in C_\delta(\bar{q}) \subset B_{-\theta}(\bar{q}) \cup B_\theta(\bar{q}) = B_\delta(\bar{q}). \tag{3.4.63}$$

Por tanto, de (3.4.62) y (3.4.63), obtenemos

$$(r, 0) \in B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q}),$$

es decir, hemos probado que $B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q})$ es no vacío para este caso.

II. Si $\bar{q} \neq \bar{p}$. Como $\bar{q} = (v, 0) \neq (u, 0) = \bar{p}$, se tiene que $v \neq u$. Entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que $v < u$. Como δ y ε son números positivos arbitrarios, puede ocurrir lo siguiente:

$$u - \varepsilon < v + \delta \qquad \text{o} \qquad v + \delta < u - \varepsilon. \tag{3.4.64}$$

Analicemos estas situaciones.

1.⌋ Si $u - \varepsilon < v + \delta$. Ver la Figura 3.28.

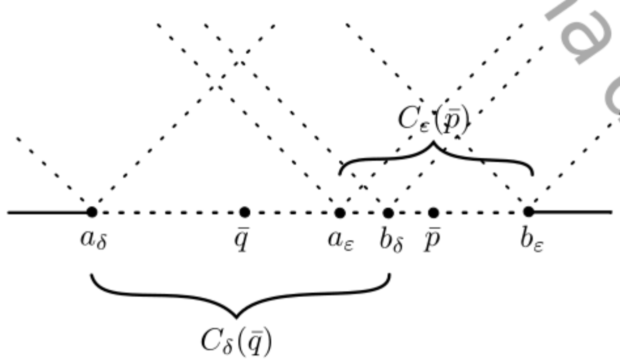

Figura 3.28: Intersección de $C_\varepsilon(\bar{p})$ con $C_\delta(\bar{q})$, si $u - \varepsilon < v + \delta$.

Sean

$$\alpha = \max\{v, u - \varepsilon\} \qquad \text{y} \qquad \beta = \min\{u, v + \delta\}. \tag{3.4.65}$$

Como $v < u$ y $v < v + \delta$,

$$v < \min\{u, v + \delta\} = \beta. \tag{3.4.66}$$

Y al ser $u - \varepsilon < u$ y $u - \varepsilon < v + \delta$, se sigue que

$$u - \varepsilon < \min\{u, v + \delta\} = \beta. \tag{3.4.67}$$

Luego, por (3.4.65), (3.4.66) y (3.4.67),

$$\alpha = \max\{v, u - \varepsilon\} < \beta.$$

Entonces, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\alpha < r < \beta. \tag{3.4.68}$$

Probemos que el punto $(r, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p}) \cap C_\delta(\bar{q})$. Por (3.4.68) y la desigualdad $u < u + \varepsilon$, tenemos que

$$u - \varepsilon \leqq \alpha < r < \beta \leqq u < u + \varepsilon,$$

es decir

$$|r - u| < \varepsilon.$$

Así, de (3.4.23), el punto $(r, 0) \in X$ satisface que $(r, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p})$. De nuevo, por (3.4.68) y la desigualdad $v - \delta < v$ se sigue que

$$v - \delta < v \leqq \alpha < r < \beta \leqq v + \delta,$$

lo que implica

$$|r - v| < \delta.$$

De esta manera, por (3.4.23), el punto $(r, 0) \in X$ cumple $(r, 0) \in C_\delta(\bar{q})$. De esto se sigue que $(r, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p}) \cap C_\delta(\bar{q})$. Ahora bien, por (3.4.24) y el hecho de que $C_\varepsilon(\bar{p}) \cap C_\delta(\bar{q}) \subset C_\varepsilon(\bar{p})$ y $C_\varepsilon(\bar{p}) \cap C_\delta(\bar{q}) \subset C_\delta(\bar{q})$, sucede que

$$(r, 0) \in C_\varepsilon(\bar{p}) \subset B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}) = B_\varepsilon(\bar{p})$$

y

$$(r, 0) \in C_\delta(\bar{q}) \subset B_{-\theta}(\bar{q}) \cup B_\theta(\bar{q}) = B_\delta(\bar{q}),$$

es decir $(r, 0) \in B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q})$. Por tanto, para este caso $B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q})$ es no vacío.

2.⌋ Si $v + \delta < u - \varepsilon$. Como $v - \delta < v + \delta$ y $u - \varepsilon < u + \varepsilon$, por (3.4.23) del Teorema 3.4.5,

$$C_\delta(\bar{q}) \cap C_\varepsilon(\bar{p}) = \emptyset.$$

Probemos por tanto que existe $\bar{x} = (r, t) \in X$, con $t > 0$, de tal manera que $\bar{x} \in B_\theta(\bar{q}) \cap B_{-\theta}(\bar{p})$. Para esto, notemos que la recta $L_\delta^{'}$ que pasa por el punto $b_\delta = (v + \delta, 0)$ y tiene pendiente igual θ, intersecta en dos puntos del plano superior de $\mathbb{R}^2$, a las rectas T_ε y $T_\varepsilon^{'}$, las cuales pasan por los puntos $a_\varepsilon = (u - \varepsilon, 0)$ y $b_\varepsilon = (u + \varepsilon, 0)$, respectivamente, y tienen pendiente igual a $-\theta$. De igual manera, observemos que la recta L_δ que pasa por $a_\delta = (v - \delta, 0)$ y tiene pendiente θ, se intersecta con las rectas T_ε y $T_\varepsilon^{'}$ en dos puntos del plano superior de $\mathbb{R}^2$.

Sean (a, b) y (c, d) los puntos de intersección de la recta $L_\delta^{'}$ con las rectas T_ε y $T_\varepsilon^{'}$, respectivamente, y sean también, (e, f) y (g, h) los puntos de intersección de la recta L_δ con las rectas $T_\varepsilon^{'}$ y T_ε, respectivamente. Veamos que en efecto (a, b) es un punto del plano superior de $\mathbb{R}^2$, es decir $b > 0$. Supongamos lo contrario, esto es $b \leqq 0$.

Como (a, b) es el punto de intersección de las rectas T_ε y $L_\delta^{'}$, satisface que

$$b = -\theta(a - (u - \varepsilon)) \quad \text{y} \quad b = \theta(a - (v + \delta)).$$

Pero al ser $b \leqq 0$,

$$-\theta(a - (u - \varepsilon)) \leqq 0 \quad \text{y} \quad \theta(a - (v + \delta)) \leqq 0$$

si y sólo si

$$u - \varepsilon \leqq a \quad \text{y} \quad a \leqq v + \delta,$$

lo cual implica que $u - \varepsilon \leqq v + \delta$. Pero esto es absurdo, pues estamos suponiendo que $v + \delta < u - \varepsilon$. Por lo que $b > 0$.

Ahora demostremos que los puntos (c, d) y (g, h) cumplen que

$$g < a \quad \text{y} \quad a < c. \tag{3.4.69}$$

Para probar la primera desigualdad en (3.4.69), supongamos que $a \leqq g$. Entonces, al igual como dijimos en la prueba del Teorema 3.4.7, la ecuación de la recta T_ε define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es estrictamente decreciente, ya que su pendiente $-\theta$ es negativa. Luego, como $a \leqq g$ y los puntos (a, b) y (g, h) están en la recta T_ε, se tiene

$$h = -\theta(g - (u - \varepsilon)) \leqq b = -\theta(a - (u - \varepsilon)).$$

Pero (a, b) es un punto de la recta L'_δ y (g, h) un punto de la recta L_δ, es decir

$$h = \theta(g - (v - \delta)) \leqq b = \theta(a - (v + \delta))$$

si y sólo si

$$g - a \leqq (v - \delta) - (v + \delta).$$

Esto implica, por la desigualdad $v - \delta < v + \delta$,

$$g - a < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad g < a.$$

Teniendo con esto una contradicción, pues hemos supuesto que $a \leqq g$. Y entonces $g < a$. Para demostrar la segunda desigualdad en (3.4.69), notemos que también la ecuación de la recta L'_δ define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es estrictamente creciente, ya que su pendiente θ es positiva. Dado que, al suponer que $c \leqq a$ y usar el hecho que (a, b) y (c, d) son puntos de L'_δ, tenemos que

$$d = \theta(c - (v + \delta)) \leqq b = \theta(a - (v + \delta)).$$

Luego, como (a, b) es un punto de la recta T_ε y (c, d) un punto de la recta T'_ε, se sigue que

$$d = -\theta(c - (u + \varepsilon)) \leqq b = -\theta(a - (u - \varepsilon))$$

si y sólo si

$$a - c \leqq (u - \varepsilon) - (u + \varepsilon).$$

Pero, $u - \varepsilon < u + \varepsilon$, es decir

$$a - c < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a < c.$$

Teniendo con esto algo absurdo, pues supusimos que $c \leqq a$. Por lo cual $a < c$. De esta manera los puntos $(a, b), (c, d)$ y (g, h) cumplen con las hipótesis implícitas del Teorema 3.4.7, es decir los puntos $(a, b), (c, d), (e, f)$

y (g,h) son los vértices del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ que está determinado por las rectas $T_\varepsilon, L_\delta^{'}, T_\varepsilon^{'}$ y $L_\delta^{'}$, el cual, por el Teorema 3.4.7, contiene puntos de X. Este paralelogramo se aprecia geométricamente en la Figura 3.29, y está representado por la parte sombreada que corresponde a la intersección $B_\delta(\bar{q}) \cap B_\varepsilon(\bar{p})$.

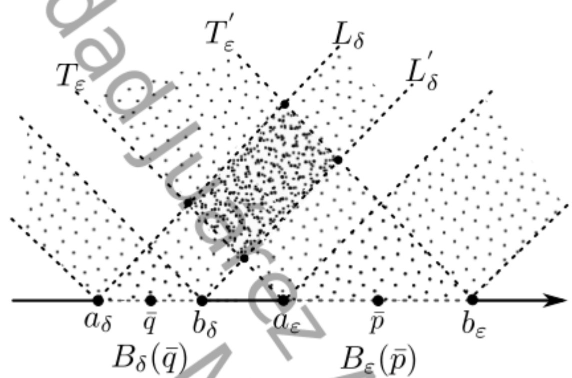

Figura 3.29: Puntos de X en $B_\delta(\bar{q}) \cap B_\varepsilon(\bar{p})$, si $v + \delta < u - \varepsilon$.

De esta manera podemos encontrar $\bar{x} = (s,t) \in X$, con $t > 0$, tal que

$$\theta(s - (v + \delta)) < t < \theta(s - (v - \delta))$$

y

$$-\theta(s - (u - \varepsilon)) < t < -\theta(s - (u + \varepsilon)),$$

donde $g < s < c$. En consecuencia, por la definición de los conjuntos $B_\theta(\bar{q})$ y $B_{-\theta}(\bar{p})$, obtenemos que

$$\bar{x} \in B_\theta(\bar{q}) \subset B_\theta(\bar{q}) \cup B_{-\theta}(\bar{q}) = B_\delta(\bar{q})$$

y

$$\bar{x} \in B_{-\theta}(\bar{p}) \subset B_\theta(\bar{p}) \cup B_{-\theta}(\bar{p}) = B_\varepsilon(\bar{p}).$$

Por tanto

$$B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q}) \neq \emptyset.$$

Entonces, de los puntos **I** y **II**, concluimos que

$$B_\varepsilon(\bar{p}) \cap B_\delta(\bar{q}) \neq \emptyset,$$

para cada $\bar{p} = (u, 0), \bar{q} = (v, 0) \in \mathbb{R}^2$. Esto termina la prueba. ■

Las propiedades topológicas que hemos probado para los subconjuntos de X presentados en el Lema 3.4.6 y el Teorema 3.4.8, harán que la prueba del siguiente teorema sea menos extensa. En éste resultado se describen tres resultados topológicos importantes para los elementos de la base $\mathcal{B}(\theta)$, pues dan pauta para obtener los resultados que son de nuestro interés para este trabajo, a saber que $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$, y que $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es conexo.

Teorema 3.4.9. *Sean $\bar{x} \in X, n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.*

a) *Si $\bar{x} = (r, 0)$, entonces*

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) = B_\theta(\bar{x}) \cup B_{-\theta}(\bar{x}). \tag{3.4.70}$$

b) *Si $\bar{x} = (s, t)$ y $t > 0$, entonces*

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) = B_i(\bar{x}) \cup B_d(\bar{x}). \tag{3.4.71}$$

c) *Para todo $\bar{p}, \bar{q} \in X$ y para toda $n, m \in \mathbb{N}$, sucede que*

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) \neq \emptyset. \tag{3.4.72}$$

Ver las Figuras 3.30 y 3.31.

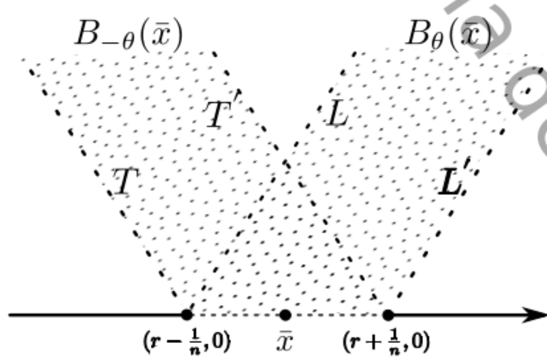

Figura 3.30: $\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x}))$, si $\bar{x} = (r, 0)$.

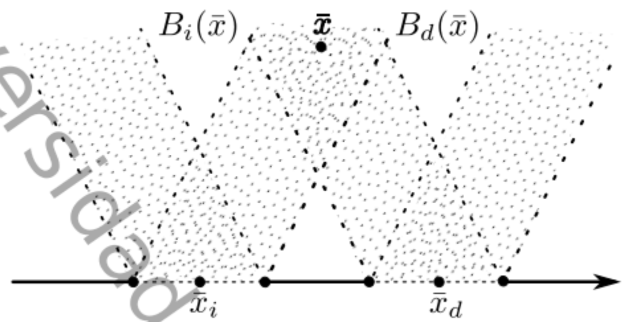

Figura 3.31: $\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x}))$, si $\bar{x} = (s, t)$ con $t > 0$.

Demostración. Veamos a). Como $\bar{x} = (r, 0)$ y $\varepsilon = 1/n > 0$, por (3.4.23) del Lema 3.4.5,

$$C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) = \left\{(s, 0) \in X \colon |s - r| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Entonces, de (3.2.2) de la Definición 3.2.2, vemos que

$$C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) = U_n(\bar{x}).$$

Luego, usando el Lema 3.4.6, se tiene que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) = \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{x})) = B_{-\theta}(\bar{x}) \cup B_\theta(\bar{x}).$$

Por tanto, hemos obtenido a).

Para probar b) observemos lo siguiente:
Como $\bar{x}_i = (x_i, 0)$ y $\varepsilon = 1/n$, por (3.4.23) del Lema 3.4.5, se sigue que

$$C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}_i) = \left\{(s, 0) \in X \colon |s - x_i| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Pero, de (3.2.6) de la Definición 3.2.2, sucede

$$V_i(\bar{x}) = \left\{(s, 0) \in X \colon |s - x_i| < \frac{1}{n}\right\}.$$

En consecuencia

$$C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}_i) = V_i(\bar{x}). \tag{3.4.73}$$

Luego, por (3.4.12) de la Definición 3.4.3 y el Lema 3.4.6, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}_i)) &= B_{-\theta}(\bar{x}_i) \cup B_\theta(\bar{x}_i) \\ &= B_i(\bar{x}). \end{aligned}$$

Es decir, de (3.4.73)

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{x})) = B_i(\bar{x}). \tag{3.4.74}$$

De forma análoga a lo hecho con $V_i(\bar{x})$, obtenemos que

$$C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}_d) = V_d(\bar{x}),$$

y además,

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_X(V_d(\bar{x})) &= \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{x}_d)) \\ &= B_{-\theta}(\bar{x}_i) \cup B_\theta(\bar{x}_d) \\ &= B_d(\bar{x}). \end{aligned} \tag{3.4.75}$$

Por ello, de (3.2.5) de la Definición 3.2.2 y (3.4.74) y (3.4.75), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) &= \mathrm{cl}_X\big(\{\bar{x}\} \cup V_d(\bar{x}) \cup V_i(\bar{x})\big) \\ &= \mathrm{cl}_X(\{\bar{x}\}) \cup \mathrm{cl}_X(V_d(\bar{x})) \cup \mathrm{cl}_X(V_i(\bar{x})) \\ &= \mathrm{cl}_X(\{\bar{x}\}) \cup B_d(\bar{x}) \cup B_i(\bar{x}). \end{aligned} \tag{3.4.76}$$

Ahora bien, como $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es T_2, y en particular T_1, $\{\bar{x}\}$ es cerrado en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Además, (3.4.25) del Lema 3.4.5 garantiza que

$$\bar{x} \in B_d(\bar{x}) \cup B_i(\bar{x}),$$

pues $\bar{x} = (s,t) \in X$ y $t > 0$. Por lo tanto, por (3.4.76) tenemos

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) = \{\bar{x}\} \cup B_d(\bar{x}) \cup B_i(\bar{x}) = B_d(\bar{x}) \cup B_i(\bar{x}).$$

De esta manera hemos probado b).

Por último, probemos el inciso c). Sean $\bar{p}, \bar{q} \in X$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos las siguientes situaciones:

i). Si $\bar{p} = (u,0)$ y $\bar{q} = (v,0)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y definamos los números positivos $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y $\delta = \dfrac{1}{m}$. Entonces, por el resultado dado en a) de este teorema

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) = B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p})$$

y

$$\mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) = B_{-\theta}(q) \cup B_\theta(q).$$

Luego, por (3.4.60),

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{p})$$

y

$$\mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) = B_{\frac{1}{m}}(\bar{q}).$$

Pero, de acuerdo al Teorema 3.4.8, resulta

$$B_{\frac{1}{n}}(\bar{p}) \cap B_{\frac{1}{m}}(\bar{q}) \neq \emptyset.$$

Por tanto

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) \neq \emptyset,$$

para este caso.

ii). Si $\bar{p} = (r, 0)$ y $\bar{q} = (s, t)$ con $t > 0$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y consideremos los números $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y $\delta = \dfrac{1}{m}$. Notemos que, por el Teorema 3.4.6,

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{q}_i)) = B_{-\theta}(\bar{q}_i) \cup B_\theta(\bar{q}_i).$$

Y por (3.4.60), se tiene

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{q}_i).$$

Por otro lado, el inciso a) de este teorema y (3.4.60), implican que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) = B_{-\theta}(\bar{p}) \cup B_\theta(\bar{p}) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{p}).$$

Pero el Teorema 3.4.8 asegura que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{p}) \cap B_{\frac{1}{m}}(\bar{q}_i) \neq \emptyset. \tag{3.4.77}$$

Luego, como

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) \subset \mathrm{cl}_X\big(\{\bar{q}\} \cup V_i(\bar{q}) \cup V_d(\bar{q})\big) = \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})),$$

y se cumple (3.4.77), concluimos que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) \neq \emptyset,$$

para este caso.

iii). Si $\bar{p} = (u, v)$ y $\bar{q} = (s, t)$ con $v, t > 0$. Definamos $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y $\delta = \dfrac{1}{m}$. Usando el hecho de que

$$V_d(\bar{p}) = C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}_d) \qquad \text{y} \qquad V_i(\bar{q}) = C_{\frac{1}{m}}(\bar{q}_i),$$

y el Teorema 3.4.6, obtenemos

$$\mathrm{cl}_X(V_d(\bar{p})) = \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{n}}(\bar{p}_d)) = B_{-\theta}(\bar{p}_d) \cup B_\theta(\bar{p}_d)$$

y

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = \mathrm{cl}_X(C_{\frac{1}{m}}(\bar{q}_i)) = B_{-\theta}(\bar{q}_i) \cup B_\theta(\bar{q}_i).$$

Entonces, como $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y $\delta = \dfrac{1}{m}$, por (3.4.60), se sigue que

$$\mathrm{cl}_X(V_d(\bar{p})) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{p}_d) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = B_{\frac{1}{m}}(\bar{q}_i).$$

Luego, del Teorema 3.4.8 obtenemos

$$\mathrm{cl}_X(V_d(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) = B_{\frac{1}{n}}(\bar{p}_d) \cap B_{\frac{1}{m}}(\bar{q}_i) \neq \emptyset.$$

Pero

$$\mathrm{cl}_X(V_d(\bar{p})) \subset \mathrm{cl}_X\big(\{\bar{p}\} \cup V_i(\bar{p}) \cup V_d(\bar{p})\big) = \mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p}))$$

y

$$\mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) \subset \mathrm{cl}_X\big(\{\bar{q}\} \cup V_i(\bar{q}) \cup V_d(\bar{q})\big) = \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})).$$

Por lo cual

$$\emptyset \neq \mathrm{cl}_X(V_d(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(V_i(\bar{q})) \subset \mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})),$$

es decir

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) \neq \emptyset.$$

Por tanto, por los incisos **i)**, **ii)** y **iii)**, concluimos que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{p})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{q})) \neq \emptyset,$$

para todo $\bar{p}, \bar{q} \in X$ y para toda $n, m \in \mathbb{N}$. Esto concluye la prueba del teorema. ■

Teorema 3.4.10. *El espacio topológico* $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ *no es* $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración. Supongamos que el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es $T_{2\frac{1}{2}}$. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in X$ tales que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Entonces existen abiertos no vacíos V_1 y V_2 en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, para los cuales $\bar{x} \in V_1, \bar{y} \in V_2$ y

$$\mathrm{cl}_X(V_1) \cap \mathrm{cl}_X(V_2) = \emptyset. \tag{3.4.78}$$

Como $\bar{x} \in V_1$ y $\bar{y} \in V_2$, y además V_1 y V_2 son abiertos en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$U_n(\bar{x}) \subset V_1 \qquad \text{y} \qquad U_m(\bar{y}) \subset V_2.$$

Luego, como

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \subset \mathrm{cl}_X(V_1) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) \subset \mathrm{cl}_X(V_2),$$

por (3.4.78), obtenemos que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) \subset \mathrm{cl}_X(V_1) \cap \mathrm{cl}_X(V_2) = \emptyset.$$

Es decir,

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) = \emptyset.$$

Pero esto contradice el c) del Teorema 3.4.9. Por ello, suponer que $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es $T_{2\frac{1}{2}}$ lleva a una contradicción. Por lo tanto $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Teorema 3.4.11. *El espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ no es conexo. Entonces existen V_1 y V_2 abiertos no vacíos y disjuntos en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ para los cuales

$$V_1 \cup V_2 = X.$$

Como V_1 y V_2 son no vacíos, podemos elegir $\bar{x} \in V_1$ y $\bar{y} \in V_2$. Luego, al ser V_1 y V_2 abiertos en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$U_n(\bar{x}) \subset V_1 \quad \text{y} \quad U_m(\bar{y}) \subset V_2. \tag{3.4.79}$$

Notemos ahora que V_1 y V_2 son cerrados en $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, pues $V_1 = X \setminus V_2$ y $V_2 = X \setminus V_1$ por el hecho de que $X = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Lo cual implica

$$\mathrm{cl}_X(V_1) = V_1 \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(V_2) = V_2. \tag{3.4.80}$$

De esta manera, por (3.4.79) y (3.4.80), obtenemos

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \subset V_1 \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) \subset V_2.$$

Pero V_1 y V_2 son disjuntos, es decir

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

De esto se sigue que

$$\mathrm{cl}_X(U_n(\bar{x})) \cap \mathrm{cl}_X(U_m(\bar{y})) = \emptyset,$$

contradiciendo c) del Teorema 3.4.9. Por lo tanto $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es conexo. ■

Los resultados que hemos probado en el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ dependen implicítamente del número irracional $\theta > 0$ que se ha manejado, pues cada uno de los elementos de la base $\mathcal{B}(\theta)$ fueron definidos por medio de este número. Por tanto, para cada número irracional positivo que tomemos, se puede definir un espacio topológico en X que posea las propiedades presentadas en este capítulo. En este sentido, por lo que mostramos aquí, hemos probado que una cantidad no numerable de espacios topológicos en X son segundo numerables, conexos y satisfacen el axioma de separación T_2.

En relación a las propiedades que hemos presentado para el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$, notamos que este espacio tiene posibilidad de ser localmente conexo y que, tal vez, sea conexo en pequeño, pues por la forma en que se construyen los básicos locales $U_n(\bar{x})$ y la representación geométrica que estos tienen en el plano $\mathbb{R}^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bar{x} \in X$, "intuye" que estos básicos locales son conexos en el espacio $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Por tanto, a modo de conjeturas, proponemos las siguientes afirmaciones.

Conjetura 3.4.12. *El espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es localmente conexo.*

Conjetura 3.4.13. *El espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ es conexo en pequeño.*

También, al igual que en el espacio de Golomb $(\mathbb{N}, \tau_G)$, hacemos de manera tentativa la pregunta siguiente.

Pregunta 3.4.14. *¿Es $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ un espacio homogéneo?.*

Conclusión

Los espacios topológicos $(\mathbb{N}, \tau_G)$, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$ que hemos presentado en este trabajo de tesis, se prestan para averiguar si hay una posibilidad de modificarlos de tal manera que cumplan el axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$, pero sin que dejen de cumplir las propiedades topológicas que ya vimos que poseen. En caso de hallar una manera, esto sería una buena aportación como ejemplos de espacios topológicos infinitos numerables que son conexos y cumplen el axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$. Sin embargo, sería también interesante abordar las preguntas, Pregunta 2.4.10, Pregunta 2.5.11 y Pregunta 3.4.14, las cuales mencionamos en los capítulos 2 y 3, y dan pauta para la investigación de la homogeneidad de los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y $(X, \tau_{\mathcal{B}(\theta)})$. Han seguido apareciendo más artículos de investigación en relación a los tipos de espacios que aquí hemos estudiado, de manera que despierta más el interés para seguir estudiando esta clase de espacios e investigar que otras propiedades topológicas poseen.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[2] R. H. Bing. A connected countable Hausdorff space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:474, 1953.

[3] K. A. Broughan. Adic topologies for the rational integers. *Canad. J. Math.*, 55(4):711–723, 2003.

[4] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney, 1978. Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[5] R. Engelking. *General Topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics.* Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[6] H. Furstenberg. On the infinitude of primes. *Amer. Math. Monthly*, 62:353, 1955.

[7] S. W. Golomb. A connected topology for the integers. *Amer. Math. Monthly*, 66:663–665, 1959.

[8] W. Gustin. Countable connected spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:101–106, 1946.

[9] F. Hausdorff. *Set Theory.* Chelsea Publishing Company, New York, 1957. Translated by John R. Aumann, et al.

[10] F. Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos*, volume 13 of *Aportaciones Matemáticas: Textos (Mathematical Contributions: Texts)*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 1998.

[11] E. Hewitt. On two problems of Urysohn. *Ann. of Math. (2)*, 47:503–509, 1946.

[12] A. M. Kirch. A countable, connected, locally connected Hausdorff space. *Amer. Math. Monthly*, 76:169–171, 1969.

[13] B. Knaster and K. Kuratowski. Sur les ensembles connexes. *Fund. Math.*, 2:206–255, 1921.

[14] N. J. Lennes. Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. *Amer. J. Math.*, 33(1-4):287–326, 1911.

[15] W. J. LeVeque. *Elementary Theory of Numbers*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, second edition, 1990.

[16] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley Publishing Company, Inc., second edition, 1974.

[17] J. R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[18] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, Inc., New York, fifth edition, 1991.

[19] Y. Pacheco Juárez. *Propiedades del Producto de Espacios Topológicos*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2009.

[20] F. Riesz. Die genesis des raumbegriffs. *Math. und Naturwiss*, 24:309–353, 1907.

[21] G. X. Ritter. A connected, locally connected, countable Urysohn space. *General Topology and Appl.*, 7(1):65–70, 1977.

[22] L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr. *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second edition, 1978.

[23] P. Szczuka. The connectedness of arithmetic progressions in Furstenberg's, Golomb's, and Kirch's topologies. *Demonstratio Math.*, 43(4):899–909, 2010.

[24] P. Szczuka. Connections between connected topological spaces on the set of positive integers. *Cent. Eur. J. Math.*, 11(5):876–881, 2013.

[25] P. Szczuka. The closures of arithmetic progressions in the common division topology on the set positive integers. *Cent. Eur. J. Math.*, 12(7):1008–1014, 2014.

[26] P. Szczuka. Regular open aritmetic progressions in connected topological spaces on the set of positive integers. *Demonstratio Math.*, 49(6):13–23, 2014.

[27] P. Urysohn. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Math. Ann.*, 94(1):262–295, 1925.

[28] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.

ESPACIOS CONEXOS Y NUMERABLES

ORIGINALITY REPORT

8%
SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	revistas.uis.edu.co Internet	1606 words — 4%
2	doczz.es Internet	723 words — 2%
3	www.scielo.org.co Internet	305 words — 1%
4	lya.fciencias.unam.mx Internet	94 words — < 1%
5	doaj.org Internet	67 words — < 1%
6	repositorioinstitucional.buap.mx Internet	52 words — < 1%
7	ri.ujat.mx Internet	41 words — < 1%
8	fdocuments.es Internet	34 words — < 1%
9	www.utm.mx Internet	28 words — < 1%
10	jupiter.utm.mx Internet	

		17 words — < 1%
11	batllo.informatica.uma.es Internet	16 words — < 1%
12	www.fcfm.buap.mx Internet	16 words — < 1%
13	cursos.itam.mx Internet	15 words — < 1%
14	fdocument.org Internet	15 words — < 1%
15	ri.uaemex.mx Internet	15 words — < 1%
16	www.coursehero.com Internet	15 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES	ON	EXCLUDE SOURCES	OFF
EXCLUDE BIBLIOGRAPHY	ON	EXCLUDE MATCHES	< 15 WORDS