



# Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

## CONFIGURACIONES CENTRALES DE 5 CUERPOS EN EL PLANO

Tesis

que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

José Lino Cornelio Soberano

Directores de tesis:

Dra. Martha Álvarez Ramírez

Dr. Josep Maria Cors Iglesias

Director interno:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco, Julio de 2018.

---

CARTA AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada **Configuraciones centrales de 5 cuerpos en el plano**, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a 2 días del mes de julio del año 2018.

AUTORIZO

  
José Lino Cornelio Soberano  
EL TESISTA



**UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



PATRIMONIO DE TABASCO

DIRECCIÓN

29 de junio de 2018

**M.C. JOSÉ LINO CORNELIO SOBERANO**

Doctorado en Ciencias en Matemáticas

Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**Configuraciones centrales de 5 cuerpos en el plano**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón  
Director

C.c.p.- Archivo  
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

Miembro CUMEX desde 2008  
**Consortio de  
Universidades  
Mexicanas**  
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Configuraciones centrales</b>	<b>7</b>
1.1. El problema de los $n$ cuerpos	7
1.2. Integrales primeras del problema de $n$ cuerpos	9
1.3. Configuraciones centrales	11
1.4. Configuraciones centrales en el problema de 3 cuerpos	14
1.5. Configuraciones centrales para $n \geq 4$	17
1.6. Configuraciones centrales apiladas	18
<b>2. Configuraciones centrales de 5 cuerpos con un eje de simetría</b>	<b>21</b>
2.1. Simetría 1: tres cuerpos en el eje de simetría	23
2.1.1. Aplicación del teorema del bisector perpendicular	26
2.1.2. Existencia de configuraciones centrales con masas positivas	29
2.2. Simetría 2: un cuerpo en el eje de simetría	44
2.2.1. El teorema del bisector perpendicular y la simetría 2	48
2.2.2. Existencia de configuraciones centrales para masas positivas	48
<b>3. Configuración central de 5 cuerpos: rombo más uno</b>	<b>53</b>
3.1. Configuración central de rombo más uno	53
3.2. Configuración de 5 cuerpos: cuadrado más uno	59
3.2.1. La quinta masa dentro del cuadrado	60
3.2.2. La quinta masa fuera del cuadrado	66

ÍNDICE GENERAL	1
3.3. Unicidad del rombo y el cuadrado . . . . .	67
<b>4. Configuraciones centrales apiladas de 5 cuerpos</b>	<b>71</b>
4.1. Número de configuraciones centrales apiladas . . . . .	71
4.2. Configuración central apilada (5, 2): Euler más dos . . . . .	74
4.2.1. Unicidad de configuraciones Euler más dos . . . . .	76
4.3. Configuración central apilada: Lagrange más Euler en uno . . . . .	79
<b>Conclusión</b>	<b>87</b>
<b>A. Regiones del teorema del bisector perpendicular</b>	<b>89</b>
<b>B. Gráficas de las regiones definidas por el teorema del bisector perpendicular</b>	<b>97</b>
<b>C. Complemento de la tabla 4.1</b>	<b>105</b>

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## ***Agradecimientos***

A mis *asesores de tesis*:

A la *Dra. Martha Álvarez Ramírez*

Por su valioso apoyo, tiempo y paciencia  
para dirigir mi trabajo de tesis.

Al *Dr. Josep Maria Cors Iglesias*

Por brindarme su conocimiento, tiempo y amistad.

*A Mis revisores:*

Miguel Ángel de la Rosa Castillo, Justino Alavez ramírez,

Jorge López López, Gamaliel Blé González,

Víctor Castellanos Vargas, Jesús Manuel Falconi Magaña.

Al *CONACyT*:

Por la beca con la cual he podido realizar mis estudios de doctorado  
con número de becario 278126.

# Introducción

La Mecánica Celeste es una rama de la astronomía y la mecánica que estudia los movimientos de los cuerpos celestes, los cuales se mueven bajo los efectos gravitatorios que ejercen unos cuerpos sobre otros. Uno de los problemas de la Mecánica Celeste es el problema de  $n$  cuerpos, el cual considera  $n$  partículas puntuales, de masa no nula, sometidas a la ley de gravitación universal. Isaac Newton [30] planteó este problema como un modelo del comportamiento del sistema solar, y lo describió por un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden, las cuales son difíciles de resolver y analizar.

El problema para  $n \geq 3$  aún permanece abierto, pero se conocen algunas soluciones particulares. Una de éstas son las llamadas *configuraciones centrales*, donde el vector de aceleración para cada cuerpo es un múltiplo escalar común de su vector de posición, considerando el centro de masas ubicado en el origen.

El estudio de las configuraciones centrales es importante por varias razones. Si se toma una configuración central como condición inicial de las ecuaciones de movimiento, ésta da origen a las únicas soluciones explícitas conocidas del problema de  $n$  cuerpos, las llamadas soluciones *homográficas*, donde la configuración de los cuerpos permanece invariante bajo homotecias y rotaciones. En particular, si una solución periódica homográfica es “rígida”, en el sentido de que la configuración permanece similar a la inicial, entonces se dice que es un *equilibrio relativo*. Smale [35, 36] demostró que las bifurcaciones en las variedades integrales ocurren en configuraciones centrales. Además, Saari [34] mostró que la colisión total o el escape parabólico total al infinito en el problema de  $n$  cuerpos es asintótico a una configuración central.

En 1941, Wintner [42] conjeturó que para cualquier elección de masas  $m_1, \dots, m_n$ , el número de configuraciones centrales, módulo homotecias y rotaciones, es finito. Más recientemente, este problema fue retomado por Smale [37] como uno de los problemas matemáticos para resolverse en el siglo XXI. Hoy día, este problema permanece abierto.

En el caso de que la configuración de  $n$  cuerpos es colineal y de masas arbitrarias, Moulton [29] demostró que existen  $n!/2$  diferentes configuraciones centrales. Por

otro lado, para  $n = 3$ , Euler [9] demostró que hay exactamente tres configuraciones centrales colineales, y Lagrange [17] demostró que hay dos configuraciones centrales obtenidas al colocar los tres cuerpos en configuración de triángulo equilátero. Es decir, el problema de 3 cuerpos tiene cinco configuraciones centrales, tres colineales, las cuales corresponden a las tres posibles permutaciones de tres partículas en una recta, módulo rotaciones; y las otras dos corresponden a las posibles orientaciones de un triángulo equilátero en el plano.

Es ampliamente conocido que muchos problemas matemáticos se pueden resolver de acuerdo a las características de su planteamiento, como problema directo o inverso. En el caso del estudio de las configuraciones centrales, en el problema directo se conocen las masas de los  $n$  cuerpos y el problema consiste en determinar cuántas configuraciones centrales pueden formar. Por otro lado, en el problema inverso se conoce la geometría de la configuración de  $n$  cuerpos, y el problema consiste en encontrar los valores de las masas para las cuales la configuración es central. En [15], Hampton y Moeckel abordaron el problema directo de configuraciones centrales del problema plano de 4 cuerpos, y demostraron que existe un número finito de configuraciones centrales. Para el caso del problema espacial de 4 cuerpos, la única configuración central que existe es cuando los cuerpos están en los vértices de un tetraedro regular, ver [19]. Posteriormente, Albouy y Kaloshin [3] abordaron el problema directo de configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos, y lograron demostrar que existe un número finito de clases de equivalencia.

Un camino alternativo para obtener configuraciones centrales, es buscar aquellas conocidas como *apiladas* (en inglés *stacked central configuration*), las cuales tienen un subconjunto de partículas que forman por sí mismas una configuración central. Este concepto fue introducido por Hampton en [14], donde mostró la existencia de una familia de configuraciones centrales de 5 cuerpos con la característica de que dos cuerpos al ser removidos, los tres restantes están en los vértices de un triángulo equilátero. En el mismo artículo, Hampton formuló la siguiente pregunta: Además de las configuraciones colineal simétrica y del cuadrado con una masa en su centro, ¿hay alguna otra configuración central de 5 cuerpos donde un subconjunto de 4 cuerpos formen una configuración central? La respuesta a esta pregunta fue dada por Fernandes y et al. [11], quienes demostraron que no hay más configuraciones que las ya citadas por Hampton.

Es el artículo de Hampton ha dado origen a varios artículos donde se ha demostrado la existencia de otras configuraciones centrales apiladas planas en el problema de 5 cuerpos, ver por ejemplo [12, 21, 22].

4 El objetivo de esta tesis es estudiar configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos con masas positivas, con un eje de simetría. Para dicho estudio distinguimos dos casos:

- Simetría 1: Tres cuerpos localizados sobre el eje de simetría.
- Simetría 2: Un sólo cuerpo localizado sobre el eje de simetría.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. En el Capítulo 1 planteamos el problema de  $n$  cuerpos, y a la obtención de las diez integrales primeras clásicas. Además se definen las configuraciones centrales e introducen las ecuaciones de Dziobek–Laura–Andoyer, las cuales facilitan el estudio de las configuraciones centrales en el plano.

En el Capítulo 2 se plantea el problema de las configuraciones centrales de 5 cuerpos en el plano, con las simetrías 1 y 2, además mostramos evidencia numérica de la existencia de estas configuraciones centrales. En la Sección 2.1.1 se utiliza el teorema del Bisector el cual genera condiciones necesarias para tener configuraciones centrales, obteniendo como resultado restricciones en los valores de las variables que describen las configuraciones. Tomando en cuenta esta información, en la Sección 2.1.2 se da evidencia numérica de la existencia de configuraciones centrales que cumplen con la simetría 1, dentro de las cuales hay nuevas configuraciones centrales no conocidas hasta ahora. En la Sección 2.2.2 se muestra evidencia numérica para las configuraciones centrales que cumplen con la simetría 2.

En el Capítulo 3 se da una prueba analítica de la existencia de unas configuraciones centrales especiales, que fueron encontradas en el Capítulo 2, las cuales consisten en configuraciones centrales de 5 cuerpos donde cuatro partículas forman un rombo y la quinta está sobre un eje de simetría del rombo que pasa por dos partículas. Además se muestra la existencia de configuración central para el caso donde el rombo es un cuadrado. Por último, se prueba que dada la configuración central de 5 cuerpos, existe un único valor en las masas, es decir damos la unicidad para el problema inverso.

Parte de los resultados originales de este trabajo están en el Capítulo 4, donde demostramos analíticamente la existencia de dos nuevas familias de configuraciones centrales apiladas. Dichos resultados han sido publicados recientemente, por un servidor, en coautoría con Martha Álvarez Ramírez y Josep Maria Cors Iglesias, en [7] y [8], lo que se describe a continuación.

En [12], Gidea y Llibre estudiaron configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos donde tres partículas de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , ordenadas de izquierda a derecha, con  $m_1 = m_3$ , forman una configuración central de Euler; mientras que las otras dos partículas de masas  $m_4$  y  $m_5$  están colocadas simétricamente con respecto a la línea que contiene a las otras tres partículas, y por lo tanto  $m_4 = m_5$ . Ellos obtuvieron dos familias de configuraciones centrales, el rombo con una masa en el centro y un trapecio con una masa en el punto medio de uno de sus lados paralelos. Sin embargo, Gidea y Llibre no detectaron la familia de configuraciones centrales para el caso donde la línea que une a  $m_4$  y  $m_5$  no cruza a la línea que contiene a  $m_1$ ,

$m_2$ ,  $m_3$  sobre  $m_2$ . En la Sección 4.2 demostramos analíticamente la existencia de esta familia. Estos resultados los hemos publicado en [7].

Debido al gran interés que ha estado creciendo con respecto a las configuraciones centrales apiladas, un tema muy interesante es el conteo de las configuraciones centrales apiladas. Por ejemplo las configuraciones centrales anidadas las podemos ver como configuraciones centrales doblemente apiladas debido a que tienen dos subconjuntos de masas que pueden ser removidos y así obtener una configuración central, ver [5, 23, 28]. Sin embargo, éstas configuraciones centrales que se obtienen de remover los subconjuntos de masas son equivalentes. En el Capítulo 4 definimos el número de configuraciones centrales apiladas las cuales representa al número de subconjuntos de masas que pueden ser removidos tal que las configuraciones resultantes sean configuraciones centrales, esto considerando que los subconjuntos no sean removidos al mismo tiempo y que las configuraciones resultantes no sean similares.

Llibre y Mello [21] demostraron la existencia de tres familias de configuraciones centrales apiladas de 5 cuerpos, donde tres de los cuerpos forman un triángulo equilátero y los otros dos están en un segmento del bisector perpendicular al triángulo. En la Sección 4.3 demostramos analíticamente que en una de esas familias existe una familia muy especial de configuraciones centrales donde tres masas están en configuración central colineal, de tal forma que su número de configuración central apilada es dos. Este resultado lo hemos publicado en [8].

# Capítulo 1

## Configuraciones centrales

### 1.1. El problema de los $n$ cuerpos

El problema de  $n$  cuerpos consiste en estudiar el movimiento de  $n$  masas puntuales moviéndose bajo la influencia de la fuerza gravitatoria. Sea  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$  el vector de posición de la  $i$ -ésima partícula de masa  $m_i$ . A partir de la segunda ley de Newton, el movimiento de las partículas es descrito por el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza gravitatoria resultante que actúa sobre la partícula de masa  $m_i$ . Considerando la ley de gravitación universal, y sumando todas las fuerzas ejercidas sobre  $m_i$  obtenemos

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3},$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana, y  $G$  denota la constante de gravitación universal. Como consecuencia de la invariancia de las ecuaciones de Newton con respecto al cambio de la unidad de tiempo, a partir de ahora podemos suponer que  $G = 1$ . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del problema de  $n$  cuerpos toman la siguiente forma

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Sea  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ . Luego las ecuaciones de movimiento (1.1) las podemos escribir como un sistema de  $6n$  ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla U(\mathbf{q}),\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $\cdot = d/dt$ ,  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  es el vector de momentos, tal que  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ ,

$$\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^T, \quad \nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_n)^T,$$

$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$  es la matriz de masas y  $\nabla U(\mathbf{q})$  es el vector gradiente del potencial

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

Las ecuaciones (1.2) no están definidas en el conjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij},$$

donde  $\Delta_{ij} = \{(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ , es decir, cuando hay alguna colisión. El dominio de definición para el sistema (1.2) o *espacio de fases* es

$$\varphi = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{6n} : \mathbf{q} \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n}\}.$$

El *espacio de configuración* o espacio de posiciones es

$$V = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}.$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema (1.2) se pueden escribir como el sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i},\tag{1.3}$$

donde la función hamiltoniana es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} + U(\mathbf{q}).\tag{1.4}$$

Los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  se conocen como *variables conjugadas*.

## 1.2. Integrales primeras del problema de $n$ cuerpos

Una *integral primera* de las ecuaciones (1.2) es una función  $\mathcal{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  de clase  $C^1$  en un abierto  $\Omega \subset \varphi$ , con la propiedad de que es constante a lo largo de cada órbita del espacio fases  $\varphi$ , ver [1]. En otras palabras, dada una integral primera y  $c \in \mathbb{R}$ , el conjunto de curvas de nivel

$$\{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \varphi : \mathcal{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$$

es invariante con respecto al tiempo  $t$ .

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, las constantes de movimiento dan información global acerca de las soluciones del sistema. Existen 10 integrales primeras clásicas del problema de  $n$  cuerpos y en esta sección vamos a obtener a estas integrales, las cuales permiten reducir la dimensión del espacio de fases a  $6n - 10$ .

Iniciemos por observar que la función hamiltoniana (1.4) es independiente del tiempo  $t$ , es decir

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \left( -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0,$$

y por lo tanto  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  es constante con respecto del tiempo  $t$ , la cual es una integral primera conocida como *energía* del sistema.

Ahora usamos las ecuaciones de movimiento (1.2) para calcular la derivada del momento lineal, es decir,

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \mathbf{0}.$$

Notemos que en la última suma los términos se anulan por parejas, de tal forma que obtenemos  $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ , para toda  $t \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que  $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$  es constante para toda  $t \in \mathbb{R}$ . Como consecuencia tenemos tres integrales primeras conocidas como integrales del *momento lineal*

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{a}, \quad \text{con } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Lo siguiente es considerar el centro de masa. Ya que  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ , a partir de la relación (1.5) tenemos

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{a},$$

de tal forma que al integrar con respecto del tiempo obtenemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \text{donde } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ son constantes.}$$

Entonces el centro de masa se mueve en una línea recta a velocidad constante. Luego las tres componentes del centro de masa son constantes a lo largo del movimiento.

Por otro lado, el momento angular está definido como

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i.$$

Vamos a demostrar que  $\dot{\omega}(t) = \mathbf{0}$ , para lo cual primero llevamos a cabo el siguiente cálculo,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \mathbf{0},$$

donde los términos de la última suma se anulan por parejas. Entonces tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de donde podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \mathbf{0},$$

de tal forma que las tres componentes del momento angular son constantes para toda  $t \in \mathbb{R}$ , es decir,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{c}, \quad \text{donde } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ es constante.}$$

En resumen hemos obtenido que el problema de  $n$  cuerpos tiene las 10 integrales primeras: la energía, tres componentes del centro de masa, tres componentes del momento lineal y tres componentes del momento angular. Luego el problema de  $n$  cuerpos tiene un conjunto invariante cuya dimensión es  $6n - 10$ .

Ahora, una pregunta natural es si existe alguna otra integral primera del problema de  $n$  cuerpos. En [32], Poincaré demostró que para  $n > 2$  no existe ninguna otra integral primera que sea algebraicamente independiente de las 10 integrales clásicas.

En 1687 Isaac Newton publicó en [30] la solución al problema de 2 cuerpos, y demostró que las órbitas solución corresponden a cónicas. Sin embargo, la complejidad del problema para  $n \geq 3$  es mayor, y continúa siendo problema abierto. Tan sólo para  $n = 3$  la dimensión del espacio de fases es  $6n = 18$  y con la ayuda de las integrales primeras aún quedan 8 grados de libertad.

### 1.3. Configuraciones centrales

En esta sección introducimos las configuraciones centrales, las cuales son un arreglo de posiciones iniciales de  $n$  partículas que dan origen a familias de soluciones especiales y explícitas del problema de  $n$  cuerpos donde la forma inicial de la configuración permanece igual, módulo rotaciones y rescalamientos. En [35, 36], Smale demostró que las configuraciones centrales son importantes porque controlan el comportamiento de las soluciones cercanas a las colisiones e influyen en la topología de las variedades integrales de  $n$  cuerpos, y por lo tanto, son esenciales para entender la dinámica global del problema de  $n$  cuerpos.

**Definición 1.1.** Una configuración  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{dn} \setminus \Delta$  del problema de  $n$  cuerpos se llama *configuración central* si existe un  $\lambda > 0$  tal que

$$\lambda(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_m) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{q}_m = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{q}_1 + \dots + m_n\mathbf{q}_n)$ ,  $r_{ij} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|$ ,  $M = m_1 + \dots + m_n$  y  $\Delta = \{\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, i \neq j\}$ .

Cuando  $d = 1$  decimos que es una configuración colineal,  $d = 2$  es una configuración plana y  $d = 3$  es una configuración espacial. Ya que el lado derecho de (1.6) es igual a  $-\ddot{\mathbf{q}}_i$ , podemos decir que el vector de aceleración de cada partícula apunta hacia el centro de masa, y es proporcional a la distancia al centro de masa. A partir de ahora, sin pérdida de generalidad, supondremos que el centro de masa  $\mathbf{q}_m$  está fijo en el origen.

Al considerar el centro de masa en el origen, la configuración de  $n$  cuerpos es central si el vector de aceleración de cada cuerpo es proporcional al vector de posición.

Ahora vamos a dar una definición equivalente a la Definición 1.1.

**Definición 1.2.** Sea  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^{dn} \setminus \Delta$ . Decimos que  $\mathbf{q}_0$  es una *configuración central*, si existe una función  $\rho(t) > 0$  tal que

$$\mathbf{q}(t) = \rho(t)\mathbf{q}_0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

es solución del problema de  $n$  cuerpos.

A partir de esta definición obtenemos que  $\mathbf{q}_0$  representa la forma inicial de la configuración, la cual permanece constante para todo tiempo, mientras que  $\rho(t)$  es el tamaño de la configuración.

Ya que las ecuaciones de movimiento (1.2) son equivalentes a la ecuación

$$M\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U(\mathbf{q}),$$

sustituimos (1.7) en ésta, usamos el hecho de que  $U(\mathbf{q})$  es homogénea de grado  $-1$  y aplicamos el teorema de Euler para funciones homogéneas que nos dice que  $\nabla U(\mathbf{q})$  es homogéneo de grado  $-2$  [33], y obtenemos

$$\ddot{\rho}(t)M\mathbf{q}_0 = -\nabla U(\rho(t)\mathbf{q}_0) = (\rho(t))^{-2}\nabla U(\mathbf{q}_0).$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por  $\mathbf{q}_0^T$  y usando una vez más la homogeneidad de  $U$ , obtenemos

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{\lambda}{\rho(t)^2}, \quad (1.8)$$

y

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{q}_0) + \lambda\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

con  $\lambda = -\frac{U(\mathbf{q}_0)}{2I(\mathbf{q}_0)}$ , donde  $I(\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0^T M \mathbf{q}_0$  es el *momento de inercia* con respecto al centro de masa.

La ecuación (1.9) nos dice cuál es la forma de la configuración central, mientras que la (1.8) nos da el tamaño de la configuración, pues es la ecuación de movimiento de un problema de Kepler uno dimensional, la cual describe el movimiento de una partícula en la línea recta atraída por otra de masa  $\lambda$  localizada en el origen. Luego, cada cuerpo tiene un movimiento kepleriano (elipse, parábola o hipérbola dependiendo del signo de la energía), con la misma excentricidad  $e$ .

Una forma de caracterizar a una configuración central es usando la excentricidad. Decimos que el movimiento es *homotético* si durante el movimiento solo cambia el tamaño de la configuración,  $e = 1$ . Si la configuración tiene rotaciones, decimos que el movimiento es *homográfico*,  $0 < e < 1$ . Por último, si hay rotaciones, pero no cambios de tamaño, decimos que el movimiento es un *equilibrio relativo*,  $e = 0$ .

En otras palabras, si  $\mathbf{q}_0$  es la configuración central inicial en (1.7), y  $\rho(t) = r(t)\Omega(t)$ , donde  $r(t)$  es una función escalar y  $\Omega(t)$  es una matriz de rotación en  $SO(3)$ , entonces

$$\mathbf{q}(t) = r(t)\Omega(t)\mathbf{q}_0,$$

es un movimiento homográfico. Luego, existen dos casos límite:

- Si  $\Omega(t)$  es la matriz identidad, entonces  $\mathbf{q}(t) = r(t)\mathbf{q}_0$  es un movimiento homotético.

- Si  $r(t) = 1$ , entonces  $\mathbf{q}(t) = \Omega(t)\mathbf{q}_0$  es un equilibrio relativo.

En resumen, en una solución homográfica los  $n$  cuerpos se mueven sincronizadamente en órbitas keplerianas en un plano fijo, tal que la configuración permanece similar a ella misma para todo tiempo. Ver la figura 1.1.

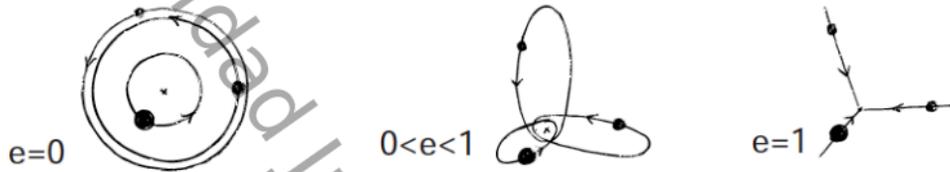


Figura 1.1: Equilibrio relativo, movimiento homográfico y movimiento homotético del problema de 3 cuerpos.

Notemos que en el problema plano de  $n$  cuerpos si existen movimientos homotéticos y equilibrios relativos, así como otros tipos de movimientos homográficos, de tal forma que la configuración debe ser central. Sin embargo, movimientos homográficos que no sean homotéticos no están permitidos en dimensión tres.

**Observación 1.3.** El cálculo de configuraciones centrales se reduce a encontrar los ceros de la ecuación (1.9), lo cual desafortunadamente en general es un problema algebraico muy complicado. Por otro lado, usualmente la forma de contar el número de configuraciones centrales es módulo dilataciones y rotaciones.

**Definición 1.4.** Dos configuraciones centrales son *equivalentes* si son semejantes en el sentido de la geometría euclidiana, esto es, si al aplicar una rotación o una homotecia, ambas configuraciones son similares.

A partir de ahora, cuando hablemos de configuraciones centrales, nos referiremos a un representante de cada clase de equivalencia. Ya que las configuraciones centrales permanecen invariantes por dilataciones, podemos usar la llamada *masa métrica*  $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{q}^T M \mathbf{q} = 2I(\mathbf{q})$  para normalizar el tamaño de las configuraciones a momento de inercia constante  $I = 1$ , es decir, en la esfera unitaria

$$S = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta : \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 1, \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0}\}.$$

**Teorema 1.5.** Las configuraciones centrales son los puntos críticos de  $U|_S$ , lo cual es equivalente a  $U|_{I=cte}$ .

*Demostración.* A partir de la definición de configuraciones centrales tenemos

$$-\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \lambda m_i \mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, n,$$

es decir,

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{i=1}^n \lambda m_i \mathbf{q}_i$$

o equivalentemente

$$-\nabla U(\mathbf{q}) = \lambda \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i.$$

Ahora multiplicamos escalarmente por el vector  $\mathbf{q}_i$  y obtenemos

$$-\nabla U(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^n \lambda m_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i.$$

Por otro lado, ya que  $U$  es una función homogénea de grado  $-1$ , entonces aplicamos el teorema de Euler y teniendo en cuenta que  $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{q}^T M \mathbf{q}$ , obtenemos

$$U(\mathbf{q}) = \lambda \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

donde  $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \text{constante}$ , y concluimos que  $\nabla U|_S = 0$ .

Ya que el momento de inercia  $I = \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$ , obtenemos que  $\nabla U|_{I=\text{cte}} = 0$ . Entonces las configuraciones centrales son los puntos críticos del potencial con momento de inercia constante.  $\square$

**Observación 1.6.** La constante  $\lambda$  puede ser considerada como un multiplicador de Lagrange, y entonces una configuración central es un punto crítico del potencial  $U(\mathbf{q})$  restringido a momento de inercia constante  $I = I_0$ . Luego, fijar  $I_0$  equivale a fijar la escala de la configuración.

## 1.4. Configuraciones centrales en el problema de 3 cuerpos

Las primeras configuraciones centrales fueron descubiertas por Euler en 1767 [9] y Lagrange en 1772 [17]. Euler estudió el problema colineal de 3 cuerpos donde encontró configuraciones centrales colineales y sus movimientos homográficos correspondientes. Posteriormente, Lagrange demostró que el triángulo equilátero es una configuración central para cualquier valor positivo de las tres masas  $m_1, m_2, m_3$ . Además, concluyó que es la única configuración central no colineal para el problema de 3 cuerpos.

**Teorema 1.7** (Euler). Consideremos cuerpos de masas  $m_1, m_2$  y  $m_3$  localizados en una línea recta, ordenadas de izquierda a derecha, tal que los vectores de posición satisfacen  $q_1 < q_2 < q_3$ . Para cualquier elección de las masas, existen exactamente tres configuraciones centrales colineales. Una para cada orden de permutación de las masas.

*Demostración.* Sea  $x = q_2 - q_1, y = q_3 - q_2$  y supongamos que las partículas están ordenadas de tal forma que  $q_1 < q_2 < q_3$  donde  $q_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, 3$ . Ver la figura 1.2.

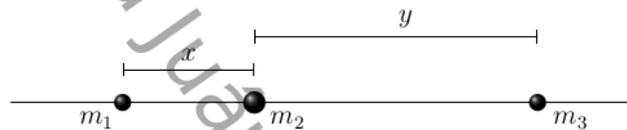


Figura 1.2: Configuración colineal de 3 cuerpos.

La ecuación (1.9) se reduce al sistema

$$\begin{aligned} \lambda x - \frac{m_1 + m_2}{x^2} + \frac{m_3}{y^2} - \frac{m_3}{(x+y)^2} &= 0, \\ \lambda y - \frac{m_2 + m_3}{y^2} + \frac{m_1}{x^2} - \frac{m_1}{(x+y)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Aislando  $\lambda$  de cada una de estas ecuaciones e igualando las dos expresiones, obtenemos una única ecuación en las variables  $x$  y  $y$  dada por

$$-(m_2 + m_3) - (2m_2 + 3m_3)\alpha - (m_2 + 3m_3)\alpha^2 + (3m_1 + m_2)\alpha^3 + (2m_2 + 3m_1)\alpha^4 + (m_1 + m_2)\alpha^5 = 0, \quad (1.10)$$

donde  $\alpha = y/x$ .

Ya que los coeficientes de este polinomio tienen un sólo cambio de signo, la regla de los signos de Descartes garantiza la existencia de una única raíz positiva para la ecuación quintica de Euler. Luego, fijando la posición de dos de las partículas, existe una única forma posible para la posición de la tercer partícula para tener una configuración central colineal.  $\square$

El polinomio en (1.10) es conocido como la *ecuación quintica de Euler* y sus raíces positivas determinan las configuraciones colineales del problema de 3 cuerpos.

**Teorema 1.8** (Lagrange). En el problema plano de 3 cuerpos, para cualquier elección de masas, existen exactamente dos configuraciones centrales no colineales, correspondientes a que las tres partículas se localizan en los vértices de un triángulo equilátero. Las dos soluciones corresponden a las dos posibles orientaciones de los triángulos.

*Demostración.* Sea  $r_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$  la distancia mutua entre la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima partícula,  $i, j = 1, 2, 3$ . Ahora fijamos el centro de masa en el origen, e identificamos dos configuraciones, módulo una rotación. Ahora tomamos las tres distancias  $r_{12}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{31}$  como coordenadas locales de la configuración no colineal. La función potencial escrita en términos de estas variables toma la forma

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}. \quad (1.11)$$

Sea  $M = \sum_{i=1}^3 m_i$  la masa total del sistema. Luego

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 &= \sum_i \sum_j m_i m_j \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^2 \\ &= \sum_i \sum_j m_i m_j \|\mathbf{q}_i\|^2 - 2 \sum_i \sum_j m_i m_j \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle \\ &\quad + \sum_i \sum_j m_i m_j \|\mathbf{q}_j\|^2 \\ &= 2MI - 2 \sum_i m_i \langle \mathbf{q}_i, \sum_j m_j \mathbf{q}_j \rangle + 2MI \\ &= 4MI. \end{aligned}$$

Ya que el centro de masa está fijo en el origen, obtenemos que el momento de inercia en términos de las distancias relativas toma la forma

$$I = \frac{1}{4M} \sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2.$$

Fijamos el momento de inercia en  $\tilde{I} = \frac{1}{2}(m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2)$ . Entonces la condición para que el potencial  $U$  tenga puntos críticos en el conjunto  $\tilde{I} = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , es que se satisfaga la ecuación de configuración central (1.6), es decir,

$$-\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} + \lambda m_i m_j r_{ij} = 0, \quad \text{para } (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1),$$

la cual sólo tiene las soluciones  $r_{12} = r_{23} = r_{31} = \lambda^{-1/3}$ . Esta solución corresponde a un triángulo equilátero donde  $\lambda$  es un factor escalar.  $\square$

**Observación 1.9.** Aplicando homotecias y rotaciones obtenemos las soluciones homográficas de Euler y Lagrange, las cuales fueron las primeras soluciones explícitas del problema de 3 cuerpos, ver figura 1.3.

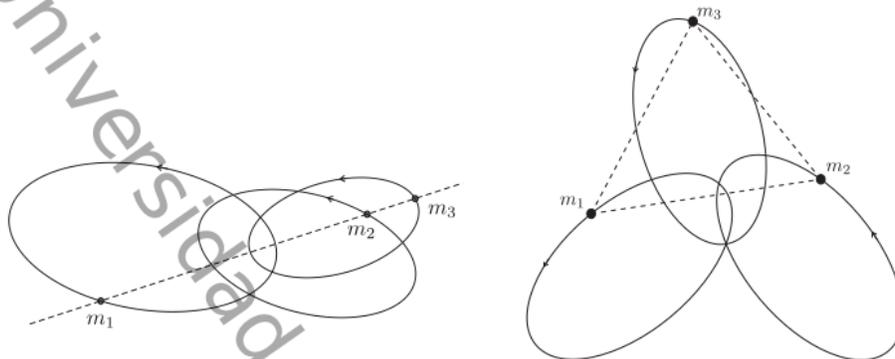


Figura 1.3: Soluciones homográficas de Euler y Lagrange.

## 1.5. Configuraciones centrales para $n \geq 4$

Wintner [42] y Smale [35] conjeturaron que el número de configuraciones centrales en el problema de  $n$  cuerpos es finito. Sin embargo, hasta ahora solo se conocen resultados parciales acerca del número de clases de configuraciones centrales, módulo dilataciones y rotaciones, para el problema de  $n$  cuerpos con masas positivas.

En 1910, Moulton demostró que hay  $n!/2$  configuraciones centrales en el problema colineal de  $n$  cuerpos, ver [29]. En la sección anterior vimos que en el problema de 3 cuerpos hay cinco configuraciones centrales: tres en configuración colineal y dos en configuración de triángulo equilátero. En el problema espacial de 4 cuerpos, Lehmann-Filhés [19] demostró que la única configuración central en el problema espacial de 4 cuerpos es el tetraedro regular. En 2006, Hampton y Moeckel [15] demostraron que en el problema plano de 4 cuerpos el número de configuraciones centrales es finito. Posteriormente en 2012, Albouy y Kaloshin [3] dieron una demostración analítica de que el número de configuraciones del problema plano de 4 cuerpos es finito. Además, demostraron que para casi todas las elecciones de masas, existe un número finito de clases de equivalencia de configuración central en el problema plano de 5 cuerpos. La finitud de configuraciones centrales para  $n > 5$  es un problema abierto.

En [20], Llibre describió todas las configuraciones centrales para el problema plano de 2 cuerpos con masas iguales teniendo un eje de simetría. Posteriormente, Albouy [2] demostró que en el problema de 4 cuerpos con masas iguales, las configuraciones centrales (no colineales) poseen un eje de simetría que contiene a dos de los cuerpos.

En 1985, Perko [31] demostró que para  $n \geq 4$ , el eneágono regular con  $n$  masas en sus vértices, rotando con respecto a su centro con una velocidad angular constante, describe una solución periódica del problema de  $n$  cuerpos si y sólo si las masas son iguales. Luego, se tiene que todos los polígonos regulares con masas iguales forman una

configuración central. Un resultado inmediato consecuencia del teorema de Perko es que un polígono regular con  $n - 1$  masas iguales en sus vértices, y una masa arbitraria colocada en el centro de masa, también forman una configuración central.

Para el estudio de las configuraciones centrales se ha hecho un gran número de simplificaciones, dentro de las cuales, la más usada es imponer ciertas condiciones de simetría a la configuración.

Cuando se estudian configuraciones centrales del problema plano de  $n$  cuerpos con simetría, es común trabajar con las ecuaciones Dziobek–Laura–Andoyer (ver [13], p. 241), las cuales son equivalentes con las ecuaciones de configuración central (1.6), pero tienen como variables a las  $r_{ij}$  que representan las distancias relativas o mutuas entre partículas. Estas ecuaciones son

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (1.12)$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ , donde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  y  $\Delta_{ijk} = (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \wedge (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_k)$  es dos veces el área orientada del triángulo definido por  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$  y  $\mathbf{q}_k$ .

Para  $n$  cuerpos hay  $n(n - 1)/2$  ecuaciones de Dziobek–Laura–Andoyer. Por ejemplo, en el problema plano de 5 cuerpos las ecuaciones (1.12) forman un sistema de 10 ecuaciones.

## 1.6. Configuraciones centrales apiladas

Usando las ecuaciones (1.12), Hampton [14] estudió las configuraciones centrales para un problema plano de 5 cuerpos, donde consideró tres masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  en los vértices de un triángulo equilátero y las otras dos,  $m_4$  y  $m_5$ , localizadas en el interior del triángulo sobre un eje de simetría. En ese trabajo, él demostró la existencia de una nueva familia de configuraciones centrales en el problema plano de 5 cuerpos, con la propiedad de que al remover dos cuerpos, el conjunto de los tres cuerpos restantes forman también una configuración central. Estas configuraciones las llamó *configuraciones centrales apiladas*.

Inspirados en el trabajo de Hampton, adoptamos la siguiente nomenclatura.

**Definición 1.10.** Una configuración central de  $n$  cuerpos se llama *apilada*  $(n, k)$ , cuando  $n$  cuerpos forman una configuración central, y al remover  $k > 0$  cuerpos, los  $n - k$  cuerpos restantes forman otra configuración central con  $n - k \geq 3$ .

Después del trabajo de Hampton, muchos artículos han sido dedicados al estudio de la existencia de otras configuraciones centrales apiladas en el problema de 5 cuer-

pos. Por ejemplo, en [10], Fernandes y Mello estudiaron las configuraciones centrales apiladas (5, 1) obteniendo el siguiente teorema.

**Teorema 1.11** (Fernandes–Mello). Consideremos el problema plano no colineal de 5 cuerpos. La única configuración central apilada (5, 1) es aquella donde cuatro cuerpos de masas iguales están en los vértices de un cuadrado, mientras que un quinto cuerpo de masa arbitraria se localiza en la intersección de las diagonales.

En [21], Llibre y Mello consideraron la configuración plana de 5 cuerpos donde tres cuerpos están en configuración de triángulo equilátero y los otros dos sobre el eje de simetría del triángulo, ver figura 1.4. Ellos demostraron que si  $m_4 \in AB$ , entonces existen tres familias de configuraciones centrales apiladas (5, 2), las cuales ocurren cuando la masa  $m_5$  está en los segmentos  $CD$ ,  $AE$  y  $BF$ , respectivamente.

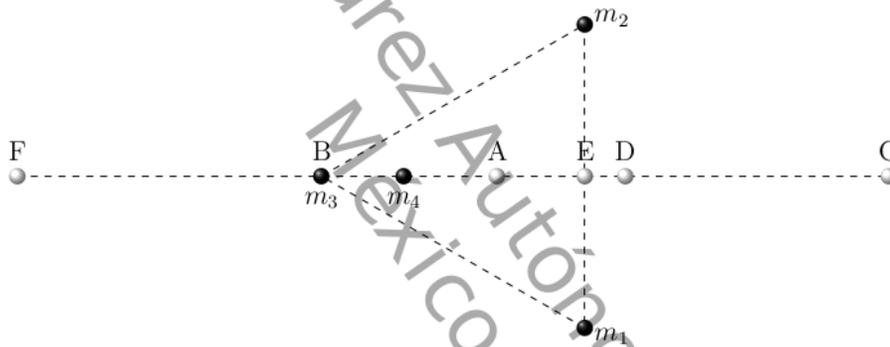


Figura 1.4: Configuración central de 5 cuerpos estudiada por Llibre y Mello, donde  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  forman un triángulo equilátero,  $m_4$  colocada dentro del triángulo y  $m_5$  puede estar en cualquiera de los segmentos  $CD$ ,  $AE$  y  $BF$ .

En [12], Gidea y Llibre estudiaron configuraciones centrales apiladas (5,2) del problema plano de 5 cuerpos, donde tres cuerpos forman una configuración central de Euler, y las otras dos masas están colocadas simétricamente con respecto a la configuración colineal, a este tipo de configuraciones centrales las llamaron *Euler más dos*. El resultado principal de su artículo es el siguiente:

**Teorema 1.12** (Gidea–Llibre). Consideremos una configuración de 5 cuerpos de masas  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  de la forma siguiente: Tres de las masas están en configuración central colineal, con  $m_1 = m_3$  y  $m_2$  en el punto medio del segmento de línea que une a  $m_1$  y  $m_3$ . Las otras dos masas  $m_4$  y  $m_5$  están colocadas con respecto a la configuración central colineal de tres cuerpos de acuerdo a los siguientes casos, concluyendo en cada uno qué tipo de configuración central existe.

- (a) Si  $m_4$  y  $m_5$  están localizados simétricamente respecto a la línea que contiene a  $m_1, m_2, m_3$ , y que  $m_4 = m_5$ , entonces existe una familia continua de configuraciones centrales donde el segmento de línea  $m_4m_5$  pasa a través de  $m_2$ , *i.e.*,  $m_1, m_3, m_4, m_5$  están localizadas en los vértices de un rombo con  $m_2$  en el centro. Cuando el rombo es un cuadrado entonces  $m_1 = m_3 = m_4 = m_5$  y la masa  $m_2$  es indeterminada, de otra forma las masas  $m_1, m_3, m_4, m_5$  están únicamente determinadas por cada posible configuración central.
- (b) Si  $m_4$  y  $m_5$  están localizadas simétricamente con respecto a  $m_2$  sin simetrías adicionales ( $m_4$  y  $m_5$  están simétricamente localizadas con respecto al segmento de línea  $m_1m_3$  o a su bisector perpendicular), sin suponer que  $m_4 = m_5$ , entonces no hay configuraciones centrales de este tipo.
- (c) Si  $m_4$  y  $m_5$  están localizadas simétricamente con respecto al bisector perpendicular del segmento de línea  $m_1m_3$  y colocadas en los dos lados de esta línea, con  $m_4 = m_5$ , entonces existe una familia continua de configuraciones centrales de este tipo, la cual consiste de trapecios con segmentos de línea  $m_1m_3$  y  $m_4m_5$  paralelos y  $m_2$  en el punto medio del lado  $m_1m_3$ . Las masas  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  están únicamente determinadas por cada posible configuración central.
- (d) Si  $m_4$  y  $m_5$  están en el bisector perpendicular del segmento de línea  $m_1m_3$ . No suponemos que  $m_4 = m_5$ , entonces no existe configuración central de este tipo (excepto para la única encontrada en (a)).

En la demostración del inciso (a) de este teorema, Gidea y Llibre distinguieron los siguientes casos:

- (i)  $m_1, m_3, m_4, m_5$  están en los vértices de un rombo.
- (ii)  $m_1, m_3, m_4, m_5$  están localizados en un círculo de radio 1 centrado en  $m_2$ .
- (iii) sin simetrías adicionales, es decir, el caso complementario de (i) y (ii).

Sin embargo, Gidea y Llibre desecharon la existencia de configuraciones del tipo (iii), pues en la demostración de este caso, página 97 de [12], ellos erróneamente supusieron que  $(1-s)t((s-1)^2+t^2)^{-3/2} - (1+s)t((1+s)^2+t^2)^{-3/2} + 2st(2t)^{-3}$  es igual a la expresión de  $g(t, s)$ , definida en la página 94 de [12].

Inspirados en estos trabajos previos, nosotros en esta tesis estudiaremos la existencia de configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos con un eje de simetría, para lo cual distinguiremos los siguientes casos:

- Caso 1: El eje de simetría contiene tres cuerpos.
- Caso 2: El eje de simetría contiene un sólo cuerpo.

## Capítulo 2

# Configuraciones centrales de 5 cuerpos con un eje de simetría

En este capítulo analizamos, numéricamente, la existencia de configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos no colineales que contengan un eje de simetría. Vamos a distinguir dos tipos de simetrías, ver la figura 2.1.

- Simetría 1: Tres cuerpos localizados sobre el eje de simetría.
- Simetría 2: Un sólo cuerpo localizado sobre el eje de simetría.

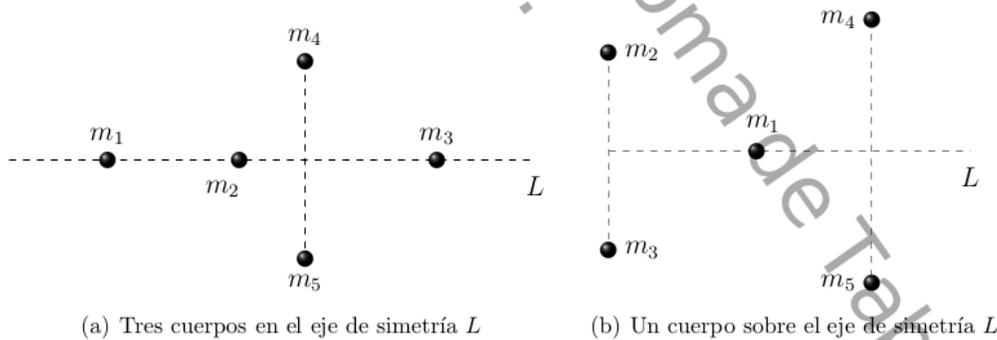


Figura 2.1: Configuraciones de 5 cuerpos con un eje de simetría.

**Definición 2.1.** Una configuración central de  $n$  cuerpos se dice que es *convexa* si ningún cuerpo se encuentra dentro o sobre la envolvente convexa de los otros  $n - 1$  cuerpos, de lo contrario, se dice que es *cóncava*.

Para el problema de 4 cuerpos, las configuraciones de tipo rombo y trapecio son centrales convexas. En el problema de 5 cuerpos con la simetría 1, podemos apreciar de la figura 2.1 (a) que estas configuraciones centrales siempre son cóncavas. Mientras que con la simetría 2 es posible generar configuraciones tanto cóncavas como convexas. La figura 2.1 (b) muestra una configuración cóncava, pero al colocar a  $m_1$  del lado derecho del segmento que contiene a  $m_4$  y  $m_5$  se forma una configuración convexa.

En este trabajo utilizaremos las ecuaciones (1.12), que para  $n = 5$  adquiere la forma

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^5 m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (2.1)$$

para  $1 \leq i < j \leq 5$ , donde  $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$  y  $\Delta_{ijk}$  es dos veces el área orientada del triángulo definido por  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$  y  $\mathbf{q}_k$ . En este caso hay diez distancias mutuas  $r_{12}$ ,  $r_{13}$ ,  $\dots$ ,  $r_{45}$ , entonces el sistema (2.1) consta de diez ecuaciones.

A partir del sistema (2.1) consideramos el espacio vectorial  $\mathbf{V}$  formado por las diez distancias mutuas. Asimismo,  $\mathcal{M}_i$  denota el conjunto de puntos en  $\mathbf{V}$  tales que  $m_i > 0$  para  $i = 1, \dots, 5$ . También definimos  $\mathcal{M}$  como la intersección de los conjuntos  $\mathcal{M}_i$  para  $i = 1, \dots, 5$ ; y por último definimos la *aplicación de masas*  $\mu : \mathcal{M} \subseteq (\mathbf{V})^+ \rightarrow (\mathbb{R}^5)^+ \setminus \mathbf{0}$ ,

$$\mu(\mathbf{r}) = (m_1(\mathbf{r}), m_2(\mathbf{r}), m_3(\mathbf{r}), m_4(\mathbf{r}), m_5(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{M} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{r} \in \mathcal{M}$ .

Observemos en la figura 2.1, que de las 10 distancias mutuas existentes en nuestras configuraciones, sólo 4 son necesarias para definir completamente la configuración y en consecuencia  $\dim(\mathbf{V}) = 4$ . El problema nos permite normalizar una de estas distancias mutuas o equivalentemente una variable correspondiente a la configuración del sistema. De esto se deriva que las configuraciones centrales están caracterizadas completamente por tres variables tomando la variable restante igual a 1.

Las configuraciones centrales definidas aquí pueden ser caracterizadas en  $\mathbf{V}$  con dimensión tres. En este trabajo vamos a estudiar configuraciones centrales donde además de la simetría impuesta, se considerarán dos distancias mutuas iguales, lo cual es equivalente a reducir un grado de libertad, y por lo tanto, una dimensión a  $\mathbf{V}$ . Luego, podemos representar las configuraciones en un espacio bidimensional en función de dos de las variables que representan la configuración del problema plano de 5 cuerpos.

Aún bajo la restricción de dos distancias mutuas iguales, el problema sigue siendo muy difícil de estudiar analíticamente, por ello haremos un estudio numérico para los casos donde tal restricción es posible. Nuestro análisis numérico consiste en representar funciones implícitas de dos variables en el plano para cada uno de los casos de interés.

## 2.1. Simetría 1: tres cuerpos en el eje de simetría

En esta sección planteamos el problema de las configuraciones centrales de 5 cuerpos en el plano donde tres partículas están sobre una línea recta  $L$ , mientras que las otras dos están localizadas simétricamente con respecto a  $L$ , ver la figura 2.1 (a). Ya que estamos interesados en configuraciones centrales sin colisiones, se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} r_{14} = r_{15}, \quad r_{24} = r_{25}, \quad r_{34} = r_{35}, \\ \Delta_{123} = 0, \quad \Delta_{125} = -\Delta_{124}, \quad \Delta_{135} = -\Delta_{134}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dada la simetría de la configuración, un resultado inmediato es el siguiente:

**Teorema 2.2.** Consideremos la configuración de 5 cuerpos donde tres masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  están en configuración colineal, mientras que las otras dos  $m_4$  y  $m_5$  están localizadas simétricamente con respecto a la línea recta que contiene a las primeras tres. Si los 5 cuerpos forman una configuración central sin colisión, entonces las masas  $m_4$  y  $m_5$  son iguales.

*Demostración.* Llevaremos a cabo la demostración por contradicción. Supongamos que  $m_4 \neq m_5$ . Iniciemos por aplicar las condiciones de simetría (2.3) a la ecuación  $f_{12}$  de (2.1). Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} f_{12} &= m_4 (R_{14} - R_{24}) \Delta_{124} - m_5 (R_{14} - R_{24}) \Delta_{124} = 0 \\ &= (m_4 - m_5) (R_{14} - R_{24}) \Delta_{124} = 0, \end{aligned}$$

de donde concluimos que  $f_{12} = 0$  si  $R_{14} = R_{24}$ , lo cual implica  $r_{14} = r_{24}$ .

Realizando un procedimiento similar para la ecuación  $f_{13}$  de (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} f_{13} &= m_4 (R_{14} - R_{34}) \Delta_{134} - m_5 (R_{14} - R_{34}) \Delta_{134} = 0 \\ &= (m_4 - m_5) (R_{14} - R_{34}) \Delta_{134} = 0. \end{aligned}$$

Luego,  $f_{13} = 0$  si  $R_{14} = R_{34}$ , de donde  $r_{14} = r_{34}$ .

Por lo tanto, concluimos que  $r_{14} = r_{24} = r_{34}$ , lo cual no es posible porque esto implicaría colisión total. Entonces se debe cumplir  $m_4 = m_5$ .  $\square$

Sin pérdida de generalidad, a partir de aquí consideraremos que  $m_4 = m_5 = 1$ . Las simetrías del problema, expresadas en (2.3), nos permiten afirmar que  $f_{12} = f_{13} =$

$f_{23} = f_{45} = 0$ ,  $f_{14} = -f_{15}$ ,  $f_{24} = -f_{25}$  y  $f_{34} = -f_{35}$ . Luego, el sistema (2.1) se reduce al siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{14} &= m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \\ f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} + (R_{24} - R_{45})\Delta_{245} = 0, \\ f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} + (R_{34} - R_{45})\Delta_{345} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Con el fin de simplificar la notación, definimos  $a$  como la distancia entre  $m_1$  y  $m_2$ ,  $b$  la distancia entre  $m_2$  y  $m_3$ ,  $c$  la distancia entre  $m_2$  y la línea recta que conecta  $m_4$  y  $m_5$ , y  $d$  es la mitad de la distancia entre  $m_4$  y  $m_5$ , ver la figura 2.2. Luego, la configuración depende de cuatro variables  $(a, b, c, d)$ , los cuales son cantidades positivas.

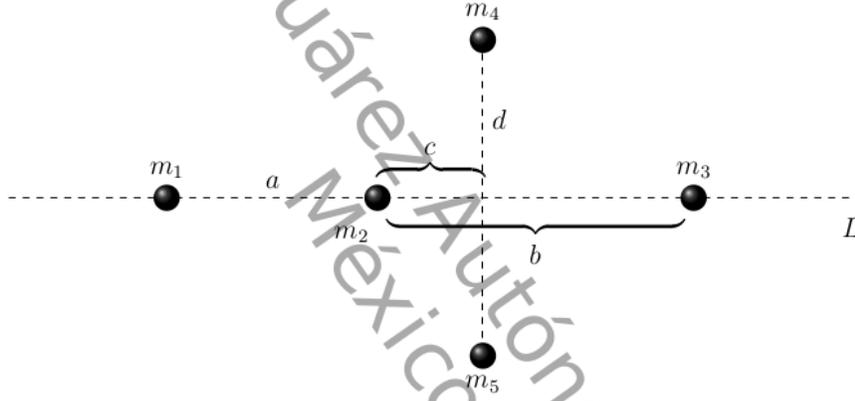


Figura 2.2: Tres cuerpos de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  sobre una línea recta  $L$ , y dos cuerpos de masas  $m_4$  y  $m_5$  localizadas simétricamente con respecto a  $L$ .

Como tenemos principal interés en configuraciones centrales sin colisión que satisfagan la geometría dada en la figura 2.2, entonces se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} r_{12} &= a, & r_{13} &= a + b, & r_{14} &= \sqrt{(a + c)^2 + d^2}, \\ r_{23} &= b, & r_{24} &= \sqrt{c^2 + d^2}, & r_{45} &= 2d, \\ r_{34} &= \sqrt{(b - c)^2 + d^2} \text{ para } b \geq c, & r_{34} &= \sqrt{(c - b)^2 + d^2} \text{ para } b < c, \\ \Delta_{142} &= -ad, & \Delta_{143} &= -(a + b)d, & \Delta_{145} &= -2d(a + c), \\ \Delta_{243} &= -bd, & \Delta_{245} &= -2cd, & \Delta_{341} &= (a + b)d, \\ \Delta_{342} &= bd, & \Delta_{345} &= 2d(b - c), & \Delta_{241} &= ad. \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde distinguimos dos casos:  $b \geq c$  y  $b < c$ . Notemos que  $\Delta_{345}$  es no negativa cuando  $b \geq c$ , negativa cuando  $b < c$ . Por otro lado,  $r_{34}$  es la única distancia relativa que cambia de expresión cuando  $b \geq c$  ó  $b < c$ , ver la figura 2.3.

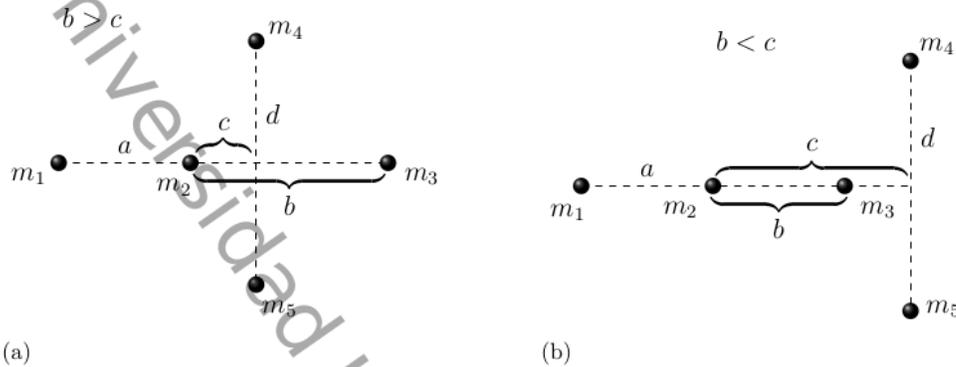


Figura 2.3: Tres cuerpos de masas  $m_1, m_2, m_3$  sobre una línea recta y dos cuerpos de masas  $m_4$  y  $m_5$  localizados simétricamente con respecto a esta línea: (a)  $b \geq c$ , (b)  $b < c$ .

Estas nuevas variables de configuración serán útiles para demostrar la existencia de configuraciones centrales, sin embargo, para facilitar las cuentas, siempre que sea posible usaremos sólo distancias mutuas.

En el sistema (2.4) tenemos a las masas de manera implícita en función de las distancias mutuas y las áreas orientadas y estas a su vez están en función de las variables  $a, b, c$  y  $d$ , si normalizamos una de estas distancias, entonces el sistema (2.4) nos proporciona a las masas en función de tres variables. Nuestro objetivo es estudiar los casos frontera, esto es, aquellos donde las distancias mutuas son iguales. Al considerar las configuraciones en estos casos, reducimos un grado de libertad al problema en la configuración. Tener dos distancias mutuas iguales implica una restricción más entre las variables  $a, b, c$  y  $d$ , por lo cual podemos obtener las masas en función de sólo dos variables.

Para poder llevar a cabo nuestro estudio, debemos considerar todas las 21 posibles igualdades entre las distancias mutuas:

$$\begin{array}{llllll}
 r_{12} = r_{13} & r_{13} = r_{14} & r_{14} = r_{23} & r_{23} = r_{24} & r_{24} = r_{34} & r_{34} = r_{45} \\
 r_{12} = r_{14} & r_{13} = r_{23} & r_{14} = r_{24} & r_{23} = r_{34} & r_{24} = r_{45} & \\
 r_{12} = r_{23} & r_{13} = r_{24} & r_{14} = r_{34} & r_{23} = r_{45} & & \\
 r_{12} = r_{24} & r_{13} = r_{34} & r_{14} = r_{45} & & & \\
 r_{12} = r_{34} & r_{13} = r_{45} & & & & \\
 r_{12} = r_{45} & & & & & 
 \end{array} \tag{2.6}$$

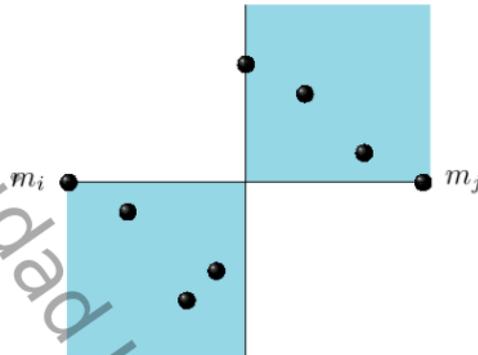


Figura 2.4: Cono formado por la línea que une a  $m_i$  y  $m_j$  y su bisector perpendicular. Esta configuración del problema de 8 cuerpos no puede ser central.

### 2.1.1. Aplicación del teorema del bisector perpendicular

En esta sección aplicaremos el teorema del bisector perpendicular de Conley [27] a la simetría 1. Este teorema es útil para restringir la posible geometría de las configuraciones centrales. Además nos dará condiciones necesarias en las distancias relativas para la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos.

**Teorema 2.3** (teorema del bisector perpendicular). Si  $q_i$  y  $q_j$  son dos puntos de una configuración central plana, entonces el par de doble conos determinados por la mediatriz de  $q_i$  y  $q_j$ , y la recta que pasa a través de  $q_i$  y  $q_j$ , debe contener puntos de la configuración central en cada cono doble, o no tener puntos en cualquiera de los dos conos.

La figura 2.4 muestra un ejemplo de aplicación de este teorema. Para demostrar el teorema principal de esta sección, también usaremos el siguiente lema el cual nos será útil en los cálculos.

**Lema 2.4** ([26]). El segmento del bisector perpendicular que pasa por el punto medio de algún lado de un triángulo, atraviesa el lado mayor de los lados restantes del triángulo (o pasa por la intersección si estos lados son iguales).

Iniciemos por observar que las soluciones del sistema de ecuaciones (2.4) genera todas las configuraciones centrales que existen para este problema, además notemos que tenemos tres ecuaciones y tres masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , entonces al resolver el sistema

para las masas, se tiene  $m_1(\mathbf{r})$ ,  $m_2(\mathbf{r})$  y  $m_3(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$ , por lo cual cada  $\mathbf{r} \in \mathcal{M}$  garantiza la existencia de una configuración central con masas positivas. Por lo tanto, es suficiente con mostrar que  $\mathcal{M}$  es no vacío para garantizar la existencia de configuraciones centrales. Ya que este sistema de ecuaciones es muy difícil de resolver analíticamente, en la siguiente sección haremos un estudio numérico que consiste en graficar las curvas de nivel cero para las regiones  $\mathcal{M}_i$  en un espacio bidimensional dadas por dos de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ó  $d$ . Las intersecciones de las respectivas regiones de masas positivas generan las configuraciones centrales de masas positivas. El papel que juega el teorema del bisector es delimitar el espacio de la configuración  $\mathbf{V}$ .

Aplicando el teorema del bisector a la simetría 1, ver figura 2.3, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.** Consideremos la configuración de 5 cuerpos donde tres cuerpos de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  están en configuración colineal, mientras que los otros dos de masas  $m_4$  y  $m_5$  están localizados simétricamente con respecto a la línea recta que contiene a los tres. Si los 5 cuerpos forman una configuración central sin colisión, entonces las distancias relativas entre los cuerpos deben satisfacer las desigualdades dadas en la tabla 2.1.

	$b > c$	$b < c$
Masas	Restricción	Restricción
$m_1$ y $m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34}$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34} \vee r_{15} > r_{45}$
$m_2$ y $m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$r_{34} > r_{23} \vee r_{45} > r_{25}$
$m_3$ y $m_4$	$r_{45} > r_{35}$ $r_{13} > r_{14}$	$r_{45} > r_{35}$

Tabla 2.1: Restricciones de las distancias relativas dadas por el teorema del bisector perpendicular.

*Demostración.* Aplicando el teorema 2.3 a las masas  $m_4$  y  $m_3$ , para el caso  $b = c$  obtenemos que las masas  $m_1$  y  $m_2$  están en un mismo cono, ver la figura 2.5. Luego, esta configuración no es central, y en el resto de nuestro estudio excluirémos este caso de la simetría 1. Por lo tanto, sólo analizaremos los casos  $b > c$  y  $b < c$ .

Iniciemos por considerar el caso  $b > c$ . Al aplicar el teorema 2.3 a las masas  $m_1$  y  $m_4$ , obtenemos algunas restricciones geométricas para que exista configuración central. Un caso particular es el que mostramos en la figura 2.6 (a), donde no puede existir configuración central, pues  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_5$  están en el mismo cono. Ahora, aplicando el lema 2.4 obtenemos que se debe cumplir  $r_{12} > r_{24}$  y  $r_{15} > r_{45}$ , mientras

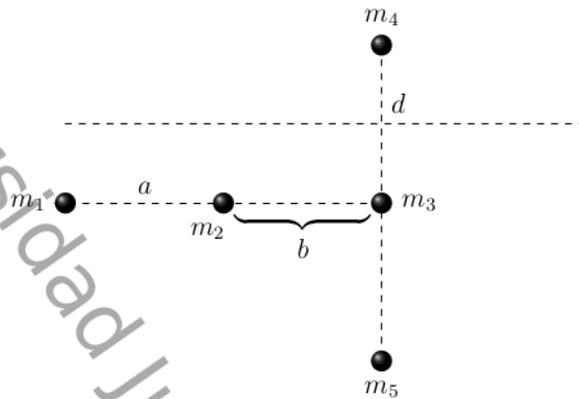


Figura 2.5: Teorema del bisector perpendicular aplicado a las masas  $m_3$  y  $m_4$ , para el caso  $b = c$  donde no hay configuraciones centrales.

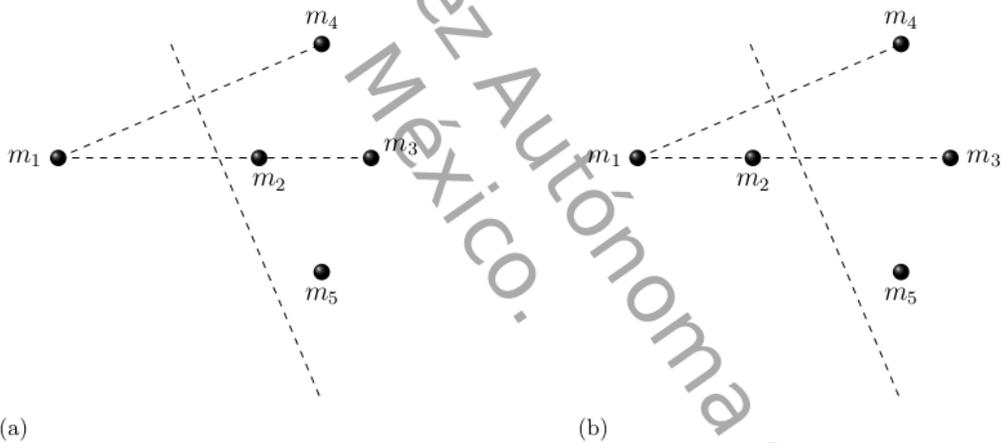


Figura 2.6: Teorema del bisector perpendicular aplicado a las masas  $m_1$  y  $m_4$  con  $b > c$ . (a) No es configuración central porque  $m_2, m_3$  y  $m_5$  están en el mismo cono. (b) Caso particular de configuración central con  $r_{24} > r_{12}$ .

que el teorema 2.3 nos dice que se debe cumplir  $r_{24} > r_{12}$  ó  $r_{45} > r_{15}$ . En la figura 2.6 (b) mostramos un caso particular donde  $r_{24} > r_{12}$ .

Utilizando un estudio similar podemos analizar el resto de las desigualdades de la tabla 2.1 y obtener el resultado del teorema. □

El teorema 4.3 nos da las condiciones necesarias, sobre las distancias relativas,

que garantizan la existencia de configuraciones centrales.

### 2.1.2. Existencia de configuraciones centrales con masas positivas

En esta sección mostramos evidencia numérica de la existencia de configuraciones centrales que cumplen la simetría 1 para masas positivas. En la sección 2.1 mostramos que las ecuaciones de Dziobek–Laura–Andoyer son reducidas al siguiente sistema

$$\begin{aligned} f_{14} &= m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{34})\Delta_{143} + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \\ f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{34})\Delta_{243} + (R_{24} - R_{45})\Delta_{245} = 0, \\ f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} + (R_{34} - R_{45})\Delta_{345} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estamos interesados en estudiar las masas en un espacio bidimensional, es decir, dejar a las masas en función de dos variables, para lo cual realizaremos igualdades entre las distancias mutuas, reduciendo así un grado de libertad. Este estudio implica considerar todas las posibles igualdades entre las distancias relativas excepto aquellas igualdades que llevan a colisión:  $r_{12} = r_{13}$  y  $r_{13} = r_{23}$ . También debemos excluir  $r_{34} = r_{45}$ , la cual queda descartada por el teorema 4.3, por lo cual sólo estudiaremos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_{14}, & r_{13} &= r_{14}, & r_{14} &= r_{23}, & r_{23} &= r_{24}, & r_{24} &= r_{34}, \\ r_{12} &= r_{23}, & r_{13} &= r_{24}, & r_{14} &= r_{24}, & r_{23} &= r_{34}, & r_{24} &= r_{45}, \\ r_{12} &= r_{24}, & r_{13} &= r_{34}, & r_{14} &= r_{34}, & r_{23} &= r_{45}, & & \\ r_{12} &= r_{34}, & r_{13} &= r_{45}, & r_{14} &= r_{45}, & & & & \\ r_{12} &= r_{45}. & & & & & & & & \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para llevar a cabo el estudio completo de las simetrías definidas en (2.8), vamos a realizar el siguiente proceso a cada una de ellas: Usaremos las distancias relativas y áreas orientadas, en términos de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  dadas en (2.5). Luego, normalizaremos el valor de alguna de estas variables a 1, y expresaremos una de las otras tres variables en términos de las dos restantes. Como resultado obtendremos al sistema (2.7) en términos de dos de estas variables, así como de las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . Por último, resolveremos el sistema (2.7) para valores positivos de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , y con esto garantiremos la existencia de configuraciones centrales. Al resolver el sistema (2.7), obtendremos  $m_i = m_i(x, y)$  para  $i = 1, 2, 3$  donde  $x$  y  $y$  son dos de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$ .

Las expresiones de las masas en función de dos variables en general son complicadas para cualquier caso del sistema (2.8), y cualquier par de variables. Usaremos el

paquete computacional *Maple V* para obtener numéricamente la gráfica de las curvas de nivel cero de las superficies definidas por  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . De esta forma se pueden determinar las regiones en el plano de las variables donde las masas tienen valores positivos. A tales regiones las hemos definido anteriormente como  $\mathcal{M}_i$ , en este caso es el conjunto de puntos del espacio vectorial formado por dos de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o  $d$  tales que  $m_i > 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Por último, la región donde las tres masas son positivas,  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$ , debe estar dentro de las regiones definidas por el teorema del bisector perpendicular, llamadas  $\Omega$ , pues este teorema sólo da condiciones necesarias para la existencia de configuraciones centrales, mientras que el hecho de que las masas sean positivas, es una condición suficiente para garantizar la existencia. Para mostrar esto, distinguiremos los casos  $b > c$  y  $b < c$ , descartando los casos con colisión.

Sea  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$  para  $b > c$  y  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$  para  $b < c$ . Notemos que al no existir configuraciones centrales con  $b = c$ , tenemos que  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  son conjuntos disjuntos. Denotamos por  $F_i$  al numerador de  $m_i(x, y)$ , luego la frontera de  $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$  está completamente determinada por las siguientes tres ecuaciones:

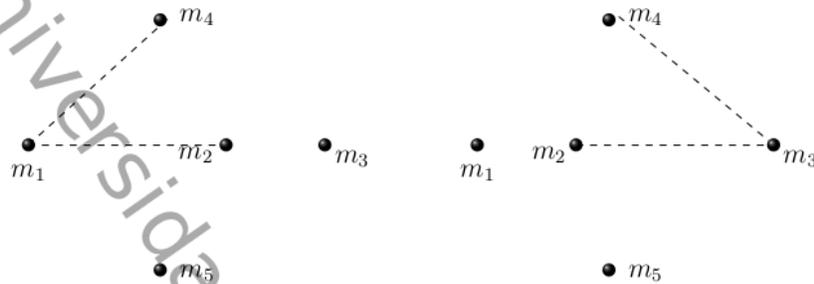
$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x, y) = 0, \\ F_2 &= F_2(x, y) = 0, \\ F_3 &= F_3(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En este caso, la aplicación de masas  $\mu: \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \subseteq (\mathbb{R}^2)^+ \rightarrow (\mathbb{R}^3)^+ \setminus (0, 0, 0)$  es

$$\mu(x, y) = (m_1(x, y), m_2(x, y), m_3(x, y)). \tag{2.10}$$

En la descripción y análisis de cada uno de los casos, seguiremos el siguiente convenio. El Apéndice A contiene las tablas que describen las regiones definidas por el teorema 2.3, y el Apéndice B contiene gráficas donde las zonas sombreadas corresponden a dichas regiones en el plano cartesiano. En cada caso mostaremos la gráfica que ilustra la intersección de las regiones donde las masas son positivas (azul oscuro), es decir  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  con las determinadas por el teorema 2.3 (azul claro); las curvas verde, roja y amarilla corresponden a las curvas de nivel cero para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , respectivamente.

- Caso  $r_{12} = r_{14}$ :  
Por simetría, este caso es equivalente a  $r_{23} = r_{34}$ , el cual estudiaremos más adelante; ver la figura 2.7.
- Caso  $r_{12} = r_{23}$ :  
Sin pérdida de generalidad, tomamos  $r_{12} = r_{23} = 1$ , y obtenemos que  $a = b = 1$ .



(a) Configuración con la simetría  $r_{12} = r_{14}$       (b) Configuración con la simetría  $r_{23} = r_{34}$

Figura 2.7: Por simetría el caso  $r_{12} = r_{14}$  es equivalente a  $r_{23} = r_{34}$ .

Luego, la región definida por el teorema 2.3 queda en términos de las variables  $c$  y  $d$ , ver las tablas A.1 y A.2, y la figura B.1.

La figura 2.8 corresponde a la región donde hay configuraciones centrales con masas positivas, la cual existe para  $b > c$  y  $b < c$ .

▪ Caso  $r_{12} = r_{24}$ :

Si normalizamos  $r_{12} = a = 1$ , entonces  $r_{12} = r_{24}$  implica que  $d = \sqrt{1 - c^2}$ . Luego, las regiones definidas por el teorema 2.3 pueden ser descritas en términos de las variables  $b$  y  $c$ , ver las tablas A.3 y A.4, y la figura B.2.

En la figura 2.9 mostramos la existencia de configuraciones centrales para este caso. Notamos que éstas existen para  $b > c$  y  $b < c$ .

▪ Caso  $r_{12} = r_{34}$ :

Si normalizamos  $r_{12} = r_{34} = 1$ , obtenemos que  $a = 1$  y  $d = \sqrt{1 - (b - c)^2}$ . La configuración para este caso puede expresarse en términos de las variables  $b$  y  $c$ , ver las tablas A.5 y A.6, y sus gráficas en B.3.

Las regiones donde existen las configuraciones centrales con masas positivas para este caso están dadas en la figura 2.10. En este caso existen configuraciones centrales para  $b > c$  y  $b < c$ .

▪ Caso  $r_{12} = r_{45}$ :

Normalizando  $r_{12} = r_{45} = a = 1$ , entonces  $d = \frac{1}{2}$ , donde podemos expresar las regiones definidas por el teorema 2.3 en términos de las variables  $b$  y  $c$ .

Antes de continuar, debemos hacer notar que el teorema 2.3 nos garantiza que para  $b > c$  no existen configuraciones centrales. Por otro lado,  $b < c$  cumple con el teorema 2.3 y la región definida por este teorema está dada en la tabla A.7,

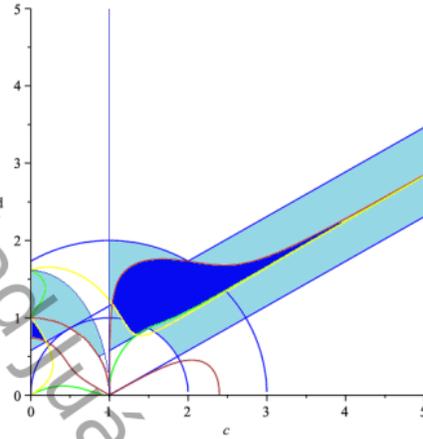


Figura 2.8: Las curvas verde, roja y amarilla corresponden a las curvas de nivel cero para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , respectivamente, en el plano  $(c, d)$ . La región azul claro es la definida por el teorema 2.3 y la región azul oscuro corresponde a masas positivas, es decir,  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$ , por lo que estas regiones corresponden a configuraciones centrales para  $r_{12} = r_{23}$ .

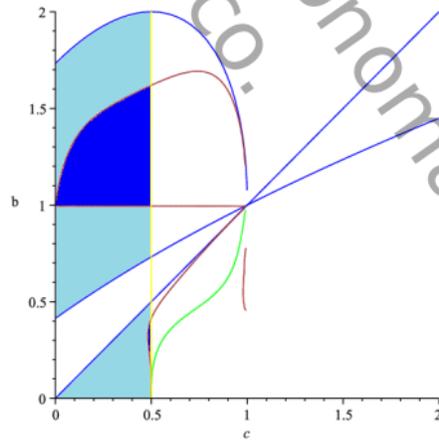


Figura 2.9: La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{12} = r_{24}$  en el plano  $(c, b)$ . Las curvas verde, roja y amarilla representan las curvas de nivel cero para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , respectivamente.

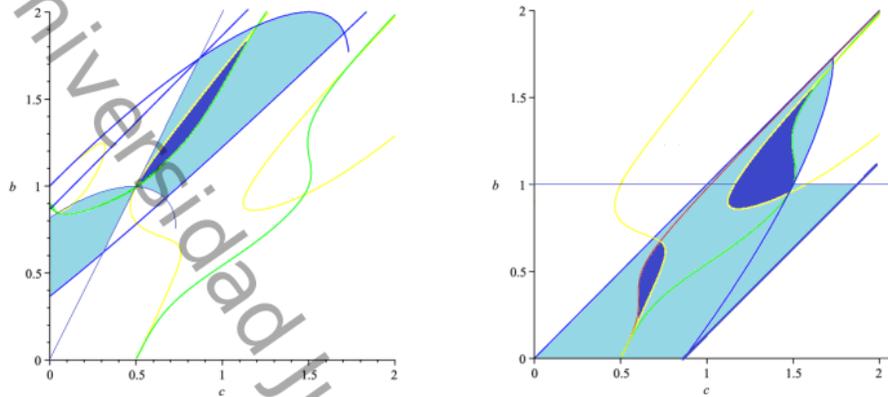


Figura 2.10: La región sombreada de azul oscuro  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{12} = r_{34}$  en el plano  $(c, b)$ .

con la representación gráfica mostrada en la figura B.4, pero no existen valores positivos para  $m_1$  y  $m_3$  en esta región, por lo tanto no existen configuraciones centrales para este caso.

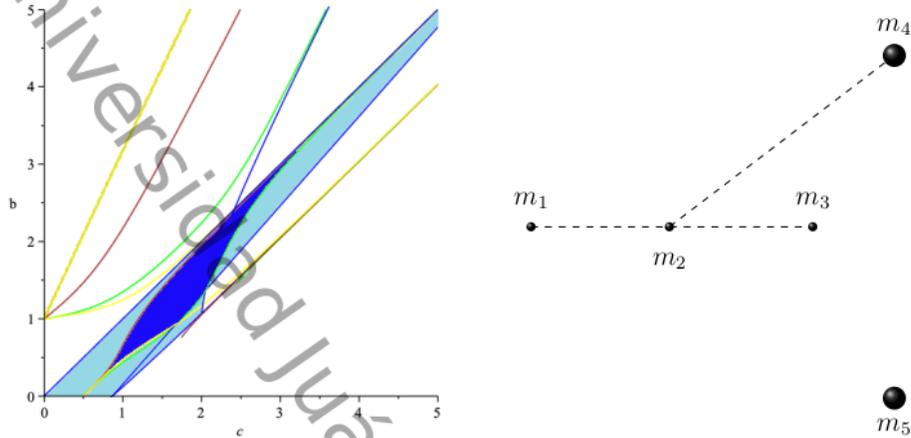
- Caso  $r_{13} = r_{14}$ :

Usando la tabla 2.1 tenemos que se debe cumplir  $r_{13} > r_{14}$  para el caso  $b > c$ . Por lo tanto, no existen configuraciones centrales para  $r_{13} = r_{14}$  con  $b > c$ . Además, no es posible formar geoméricamente una configuración que cumpla  $r_{13} = r_{14}$  para  $b < c$  como se muestra en la figura 2.3, porque las masas  $m_4$  y  $m_5$  tendrán que estar del lado izquierdo de  $m_1$  y esta configuración es equivalente a  $r_{13} = r_{34}$  con  $b < c$  que veremos más adelante.

- Caso  $r_{13} = r_{24}$ :

En este caso normalizamos  $a = 1$ , entonces  $d = \sqrt{(1+b)^2 - c^2}$ . Para el caso  $b > c$  tenemos que la región definida por el bisector es un conjunto vacío, por lo tanto no existen configuraciones centrales para este caso. Para el caso  $b < c$  mostramos la región del bisector en la tabla A.8 y su gráfica en la figura B.5.

Las regiones donde existen las configuraciones centrales con masas positivas para el caso  $b < c$  están dadas en la figura 2.11 (a), en este caso existen configuraciones centrales de 5 cuerpos sólo para el caso  $b < c$ . La figura 2.11 (b) muestra una configuración de este tipo con valores específicos donde las líneas discontinuas representan las dos distancias que son iguales.



(a) La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_2$ , lo cual garantiza configuraciones centrales cuando  $b < c$

(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 1$ ,  $b = 1.037716929$ ,  $c = 1.617268788$ ,  $d = 6.601508911$  con masas  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.3907585608$  y  $m_4 = m_5 = 1$

Figura 2.11: Configuraciones para  $r_{13} = r_{24}$ .

▪ Caso  $r_{13} = r_{34}$ :

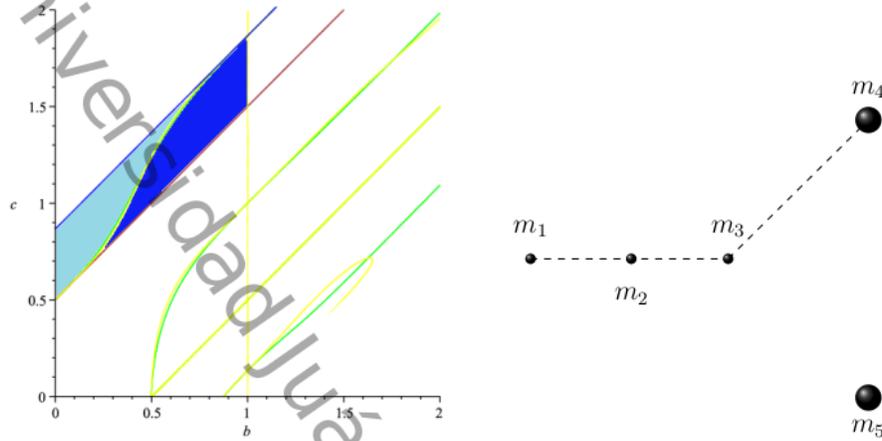
Sea  $r_{13} = r_{34} = 1$ , entonces  $a = 1 - b$ ,  $0 < b < 1$  y  $d = \sqrt{1 - (c - b)^2}$ , por lo que podemos expresar las regiones definidas por el bisector en términos de  $b$  y  $c$ . El caso  $b > c$  no cumple la condición  $r_{13} > r_{34}$  dada en la tabla 2.1 del teorema 2.2, por lo tanto no existen configuraciones centrales para este caso. Para el caso  $b < c$  la región del bisector se muestra en la tabla A.9 y la gráfica se muestra en la figura B.6.

Las regiones donde existen las configuraciones centrales con masas positivas para el caso  $r_{13} = r_{34}$  están dadas en la figura 2.12 (a), la curva de nivel cero para  $m_2$  es la recta  $c = b + \frac{1}{2}$ . En este caso existen configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos, en las condiciones planteadas, sólo para el caso  $b < c$ .

▪ Caso  $r_{13} = r_{45}$ :

Sea  $r_{13} = r_{45} = 1$ , entonces tenemos  $a = 1 - b$  y  $d = \frac{1}{2}$ , nuevamente podemos expresar la configuración en términos de las variables  $b$  y  $c$ . La región del bisector para este caso está representada por las tablas A.10 y A.11 donde las gráficas se muestran en la figura B.7.

Las regiones donde existen las configuraciones centrales con masas positivas



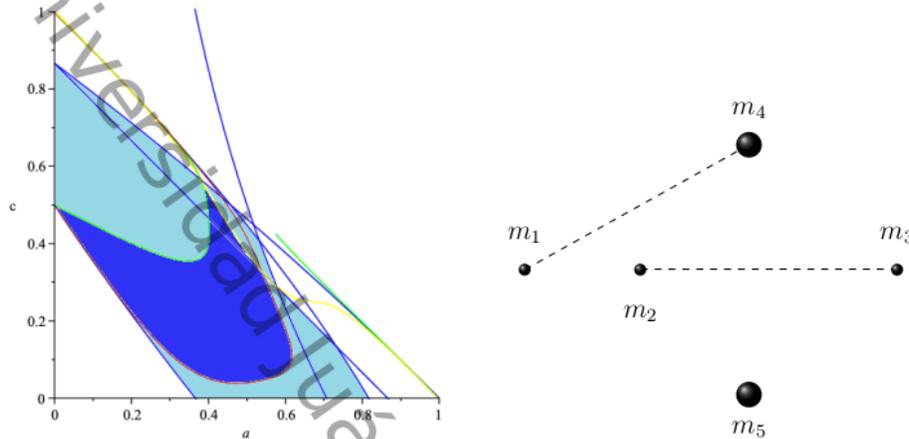
(a) La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_2$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $b < c$  en el plano  $(b, c)$ .

(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 1 - b$ ,  $b = 0.4909182856$ ,  $c = 1.202698037$ ,  $d = 0.702402723$  con masas  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.1892127188$  y  $m_4 = m_5 = 1$ .

Figura 2.12: Configuraciones para  $r_{13} = r_{34}$ .

para el caso  $r_{13} = r_{45}$  están dadas en la figura 2.13, En este caso existen configuraciones centrales de 5 cuerpos para  $b > c$  y  $b < c$ .





(a) La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $b > c$  en el plano  $(a, c)$

(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 0.4506675735$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.4224897218$ ,  $d = 0.487438547$  con masas  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.3862178420$  y  $m_4 = m_5 = 1$

Figura 2.14: Configuraciones para  $r_{14} = r_{23}$ .

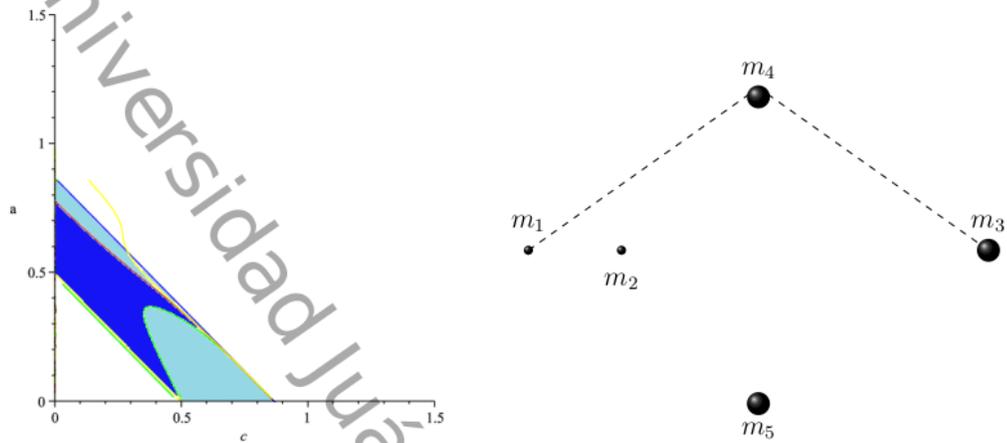
■ Caso  $r_{14} = r_{24}$ :

Todas las configuraciones con  $r_{14} = r_{24}$  son equivalentes, módulo una rotación de  $180^\circ$ , a las configuraciones donde  $r_{24} = r_{34}$ , las cuales estudiaremos más adelante.

■ Rombo más uno en el interior, caso  $r_{14} = r_{34}$ :

Sea  $r_{14} = r_{34} = 1$ , entonces  $b = a + 2c$  y  $d = \sqrt{1 - (a + c)^2}$ . La forma de la configuración es un rombo con una masa en su interior, y a partir de ahora la llamaremos *rombo más uno en el interior*. En este caso podemos expresar las configuraciones en términos de las variables  $a$  y  $c$ . La región definida por el teorema 2.3 para  $b > c$  se muestra en la tabla A.13 y su gráfica está representada en la figura B.9. En este caso no hay configuraciones para  $b < c$ .

La región donde existen configuraciones centrales para este caso está dada en la figura 2.15.



(a) La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$  lo cual garantiza configuraciones centrales para  $b > c$  en el plano  $(c, a)$ . (b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 0.3372424862$ ,  $b = 1.32901479$ ,  $c = 0.4958861519$ ,  $d = 0.408498913$  con masas  $m_1 = m_2 = 0.1092765960$  y  $m_3 = m_4 = m_5 = 1$

Figura 2.15: Configuraciones para  $r_{14} = r_{34}$ .

- Caso  $r_{14} = r_{45}$ :  
 Sea  $r_{14} = r_{45} = 1$ , entonces  $d = 1/2$  y  $c = \frac{\sqrt{3}}{2} - a$ , en este caso las configuraciones quedan en términos de las variables  $a$  y  $b$ . Las regiones definidas por el teorema 2.3 están representadas en las tablas A.14 y A.15, las gráficas se muestran en la figura B.10.

La región donde existen configuraciones centrales está representada en la figura 2.16.

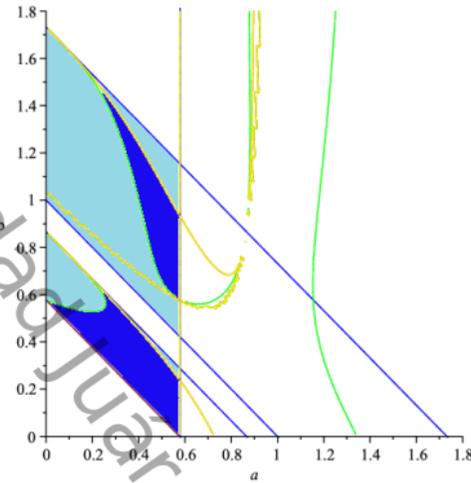
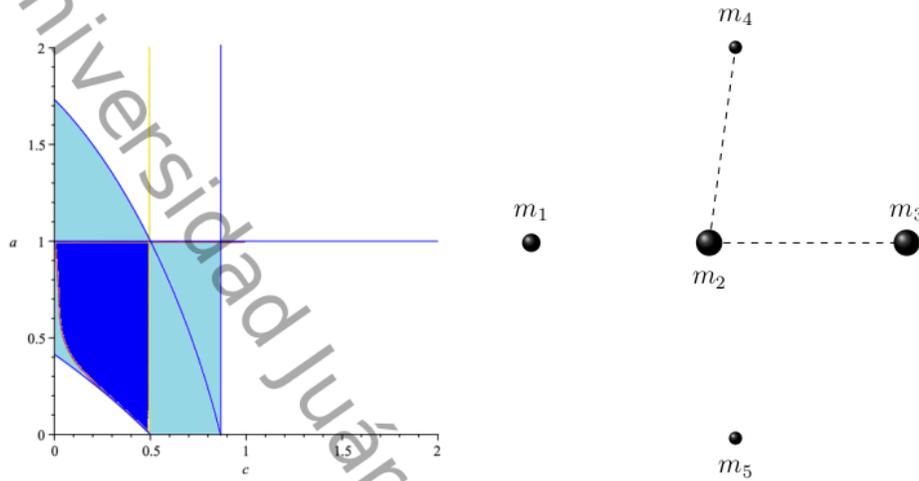


Figura 2.16: La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{14} = r_{45}$  en el plano  $(a, b)$ .

- Caso  $r_{23} = r_{24}$ :

Sea  $r_{23} = r_{24} = 1$ , entonces  $b = 1$  y  $d = \sqrt{1 - c^2}$ , en este caso las configuraciones pueden expresarse en función de  $a$  y  $c$ . La región definida por el bisector para el caso  $b > c$  está representada en la tabla A.16 y la gráfica se muestra en la figura B.11. En este caso es imposible tener geoméricamente una configuración que satisfaga que  $b < c$ . Las regiones donde existen configuraciones centrales para  $r_{23} = r_{24}$  están representadas en la figura 2.17.



(a) La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $b > c$  en el plano  $(c, a)$ .

(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 0.9$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.1334841552$ ,  $d = 0.991050947$  con masas  $m_1 = 1.450800719$ ,  $m_2 = m_3 = 1.982725324$  y  $m_4 = m_5 = 1$ .

Figura 2.17: Configuraciones para  $r_{23} = r_{24}$ .

▪ Caso  $r_{23} = r_{34}$ :

Sea  $r_{23} = r_{34} = 1$ , entonces  $b = 1$  y  $d = \sqrt{2c - c^2}$ , en este caso las configuraciones pueden expresarse en términos de  $a$  y  $c$ . La región del bisector para este caso está representada en las tablas A.17 y A.18 mientras que las gráficas correspondientes se muestran en la figura B.12. La región donde existen configuraciones centrales está dada en la figura 2.18.

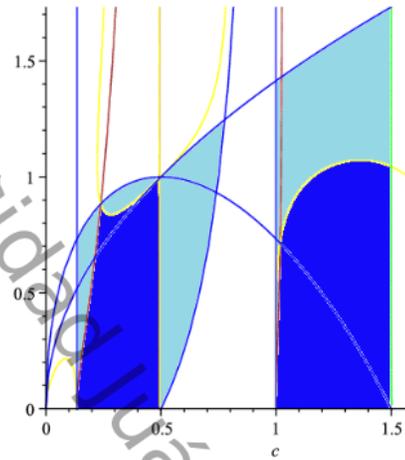
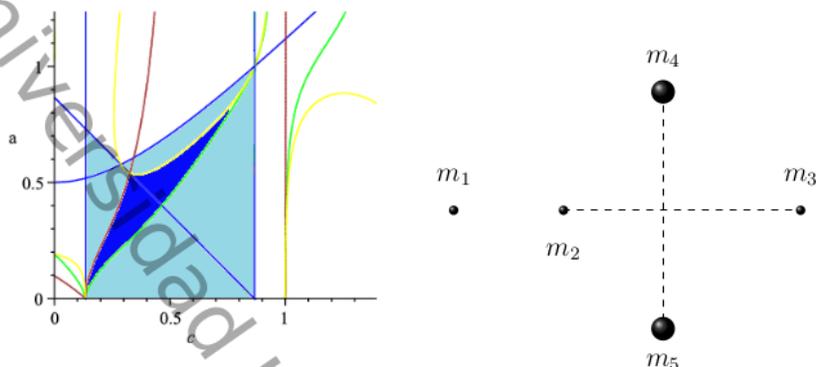


Figura 2.18: La región sombreada de azul oscuro corresponde a  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{23} = r_{34}$  en el plano  $(c, a)$ .

- Caso  $r_{23} = r_{45}$ :

Sea  $r_{23} = r_{45} = 1$ , entonces  $b = 1$  y  $d = \frac{1}{2}$ , las configuraciones para este caso pueden expresarse en términos de  $a$  y  $c$ , la región del bisector para el caso  $b > c$  está representada en la tabla A.19 y su gráfica correspondiente se muestra en la figura B.13. La región del bisector para el caso  $b < c$  es el conjunto vacío, por lo tanto no existen configuraciones centrales de 5 cuerpos para  $b < c$ . La región donde existen configuraciones centrales de 5 cuerpos con masas positivas está dada en la figura 2.19.



(a) La región sombreada de azul oscuro representa a  $\mathcal{N}_1$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $b > c$  en el plano  $(c, a)$ .

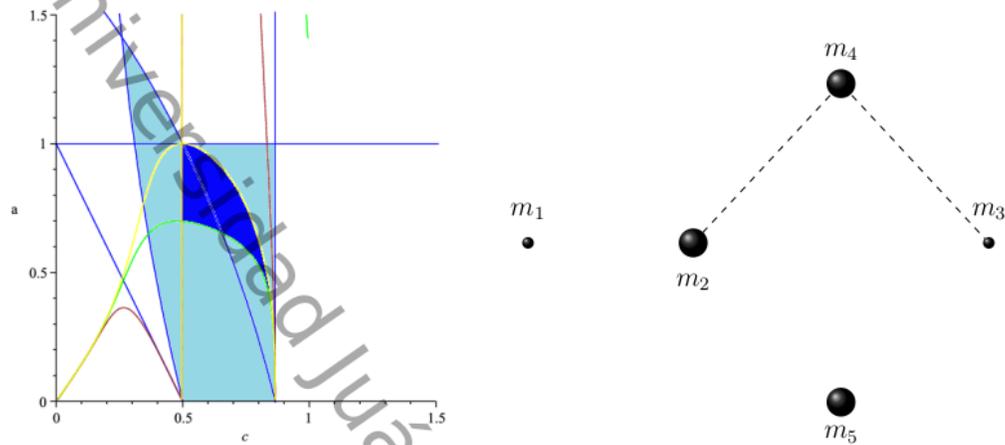
(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 0.4639041278$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.4192691759$ ,  $d = 0.5$  con masas  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.4017626957$ , y  $m_4 = m_5 = 1$ .

Figura 2.19: Configuraciones para  $r_{23} = r_{45}$ .

- Rombo más uno en el exterior, caso  $r_{24} = r_{34}$ :

Si normalizamos  $r_{24} = r_{34} = 1$ , obtenemos que  $b = 2c$  y  $d = \sqrt{1 - c^2}$ . En este caso la configuración corresponde a un rombo con una masa en el exterior, y llamaremos a esta configuración *rombo más uno en el exterior*. La región de existencia de configuraciones centrales quedan en términos de las variables  $a$  y  $c$ , con la restricción de que  $b > c$ , el caso  $b < c$  implica colisión de  $m_2$  con  $m_3$ , ver la tabla A.20 y su gráfica en la figura B.14.

La región sombreada con azul oscuro en la figura 2.20 corresponde a los valores de las variables donde existen configuraciones centrales con masas positivas.



(a) La región sombreada de azul oscuro representa a  $\mathcal{N}_1$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{24} = r_{34}$  en el plano  $(c, a)$  para  $b > c$ .

(b) Configuración central correspondiente a los valores  $a = 0.7597048847$ ,  $b = 1.35985552$ ,  $c = 0.6799277599$ ,  $d = 0.733279101$  con masas  $m_1 = m_3 = 0.3916110697$  y  $m_2 = m_4 = m_5 = 1$ .

Figura 2.20: Configuraciones para  $r_{24} = r_{34}$ .

■ Caso  $r_{24} = r_{45}$

Sea  $r_{24} = r_{45} = 1$ , entonces  $d = \frac{1}{2}$  y  $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . En este caso las configuraciones pueden expresarse en función de las variables  $a$  y  $b$ . La región definida por el bisector para el caso  $b < c$  está representada en la tabla A.21 y su gráfica se muestra en la figura B.15. La región del bisector para el caso para  $b > c$  es vacío, esto se puede apreciar fácilmente de la tabla 2.1 donde se debe cumplir  $r_{45} > r_{24}$  para  $b > c$ . La región donde existen configuraciones centrales de 5 cuerpos con masas positivas está dada en la figura 2.21.

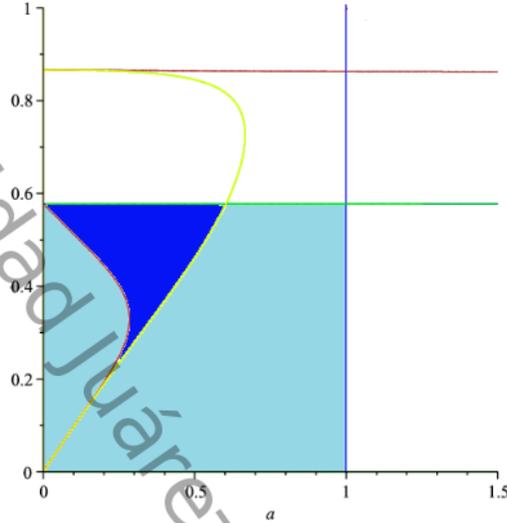


Figura 2.21: La región sombreada de azul oscuro representa a  $\mathcal{N}_2$ , lo cual garantiza configuraciones centrales para  $r_{24} = r_{45}$  en el plano  $(a, b)$  con  $b < c$ .

## 2.2. Simetría 2: un cuerpo en el eje de simetría

En esta sección planteamos el problema de las configuraciones centrales del problema plano de 5 cuerpos donde las partículas  $m_2 - m_3$  y  $m_4 - m_5$  están localizadas simétricamente con respecto a la línea recta que contiene a la partícula  $m_1$ .

Para llevar a cabo el estudio distinguimos los siguientes dos casos.

Caso I:  $m_1$  localizada en el interior de la envolvente convexa de las partículas  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$ , ver la figura 2.22 (a).

Caso II:  $m_1$  localizada en el exterior de la envolvente convexa de  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$ , ver la figura 2.22 (b).

A partir de la figura 2.22 tenemos que en ambos casos se cumplen las siguientes relaciones entre las distancias relativas, así como entre las áreas orientadas:

$$\begin{aligned} r_{12} = r_{13}, \quad r_{14} = r_{15}, \quad r_{24} = r_{35}, \quad r_{25} = r_{34} \\ \Delta_{234} = \Delta_{235}, \quad \Delta_{452} = \Delta_{453}, \quad \Delta_{243} = \Delta_{253}, \quad \Delta_{254} = -\Delta_{245}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

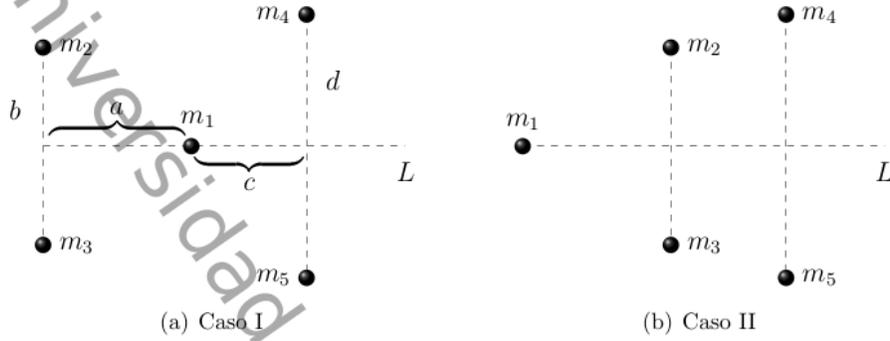


Figura 2.22: Configuración de 5 cuerpos con una masa en un eje de simetría.

Notemos que en el caso I se cumple que  $\Delta_{123} > 0$ , pero  $\Delta_{125}$  puede ser positiva o negativa, además esta configuración siempre es cóncava. Para el caso II tenemos que siempre se cumple  $\Delta_{123} < 0$ , mientras que  $\Delta_{124}$  puede ser positiva o negativa. Si  $\Delta_{124} > 0$ , la configuración es cóncava y si  $\Delta_{124} < 0$  la configuración es convexa. Además se satisfacen las siguientes relaciones entre las áreas orientadas:

$$\Delta_{125} = \Delta_{251} = \Delta_{143}, \quad \Delta_{142} = -\Delta_{124}, \quad \Delta_{241} = \Delta_{124}. \quad (2.12)$$

Por último, como consecuencia de las simetrías tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.** En el problema plano de 5 cuerpos, si las configuraciones que cumplen la simetría 2, son configuraciones centrales, entonces  $m_2 = m_3$  y  $m_4 = m_5$ .

*Demostración.* Iniciemos por considerar las ecuaciones  $f_{23}$  y  $f_{45}$  del sistema de Dziobek-Laura-Andoyer (2.1), las cuales al aplicarles las condiciones de simetría dadas en (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned} f_{23} &= (m_4 - m_5)(R_{24} - R_{25})\Delta_{234} = 0, \\ f_{45} &= (m_2 - m_3)(R_{24} - R_{25})\Delta_{452} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora debemos analizar cuándo se pueden anular estas ecuaciones. En el caso de que  $\Delta_{234} = 0$  ó  $\Delta_{452} = 0$  tendríamos que las partículas  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$  están en configuración colineal, la cual está excluida de la configuración que estamos considerando. Por otro lado,  $r_{24} = r_{45}$  implica colisión binaria de la partícula  $m_2$  con  $m_3$  ó  $m_4$  con  $m_5$ , luego  $r_{24} \neq r_{45}$ . Luego, la única posibilidad para que se satisfagan las ecuaciones (2.13) es que  $m_2 = m_3$  y  $m_4 = m_5$ .  $\square$

A partir de ahora supondremos que  $m_4 = m_5$  y  $m_2 = m_3$ . Considerando  $\Delta_{234} = 0$ , es decir, que las masas  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$  están en configuración colineal, el teorema

del bisector, aplicado a las masas  $m_2$  y  $m_4$  nos dice que esta configuración no puede ser central al menos que  $m_1$  también esté sobre la línea que contiene a los otros cuatro cuerpos, por lo tanto también supondremos que  $\Delta_{234} \neq 0$ .

Luego, la configuración de las partículas  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$  es un cuadrado o un trapecio con la partícula  $m_1$  en el eje de simetría ortogonal a los lados paralelos del paralelogramo.

Ahora vamos a ver cuándo la configuración es central, es decir, vamos a encontrar la solución a las ecuaciones (2.1), las cuales con las condiciones de simetría quedan reducidas a las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_2 &= m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{123} + m_4[(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + (R_{14} - R_{25})\Delta_{125}] = 0, \\ f_{14} &= m_2[(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{12} - R_{25})\Delta_{143}] + m_4(R_{14} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \\ f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_2(R_{23} - R_{25})\Delta_{243} + m_4(R_{45} - R_{25})\Delta_{254} = 0, \\ f_{25} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{251} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{243} + m_4(R_{24} - R_{45})\Delta_{254} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

La siguiente etapa es expresar las distancias relativas entre las partículas, así como las áreas orientadas en términos de las variables  $a, b, c$  y  $d$ . Para llevar a cabo esto, primero notemos que el área del paralelogramo determinado por los vectores  $\mathbf{q}_j$  y  $\mathbf{q}_k$  con  $m_i$  en el origen de coordenadas es dada por la norma del producto vectorial  $\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k$ , luego  $\Delta_{ijk} = \pm |\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k|$ .

Por otro lado, tenemos que en el caso I,  $\Delta_{125}$  puede ser positiva o negativa, luego debemos considerar ambos signos, y en el caso II,  $\Delta_{124}$  indistintamente puede tener ambos signos.

Sea  $a$  la distancia entre  $m_1$  y la línea que une a  $m_2$  y  $m_3$ ,  $c$  la distancia entre  $m_1$  y la línea que conecta a  $m_4$  y  $m_5$ ,  $b$  la distancia que hay entre la masa  $m_2$  y la recta  $L$ , y por último  $d$  denota la distancia entre  $m_4$  y recta  $L$ . Además notemos que sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $b < d$ .

▪ Caso I

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{a^2 + b^2}, & r_{14} &= \sqrt{c^2 + d^2}, & r_{23} &= 2b, & r_{45} &= 2d, \\ r_{24} &= \sqrt{(a+c)^2 + (d-b)^2}, & r_{25} &= \sqrt{(a+c)^2 + (d+b)^2}, \\ \Delta_{123} &= 2ab, & \Delta_{124} &= -(bc+ad), & \Delta_{145} &= -2cd, \\ \Delta_{243} &= -2b(a+c), & \Delta_{254} &= 2d(a+c), & \Delta_{125} &= \pm |ad-bc|. \end{aligned}$$

▪ Caso II

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{a^2 + b^2}, & r_{14} &= \sqrt{c^2 + d^2}, & r_{23} &= 2b, & r_{45} &= 2d, \\ r_{24} &= \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}, & r_{25} &= \sqrt{(c-a)^2 + (d+b)^2}, \\ \Delta_{123} &= -2ab, & \Delta_{124} &= \pm |ad-bc|, & \Delta_{145} &= -2cd, \\ \Delta_{243} &= -2b(c-a), & \Delta_{254} &= 2d(c-a), & \Delta_{125} &= -(ad+bc). \end{aligned}$$

Para simplificar la notación y hacer más fácil el estudio de las soluciones de (2.14), definimos

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= (R_{12} - R_{23})\Delta_{123}, \\
 \xi_2 &= (R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + (R_{14} - R_{25})\Delta_{125}, \\
 \xi_3 &= (R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{12} - R_{25})\Delta_{143}, \\
 \xi_4 &= (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}, \\
 \xi_5 &= (R_{12} - R_{14})\Delta_{241}, \\
 \xi_6 &= (R_{23} - R_{25})\Delta_{243}, \\
 \xi_7 &= (R_{45} - R_{25})\Delta_{254}, \\
 \xi_8 &= (R_{12} - R_{14})\Delta_{251}, \\
 \xi_9 &= (R_{23} - R_{24})\Delta_{243}, \\
 \xi_{10} &= (R_{24} - R_{45})\Delta_{254}.
 \end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones (2.14) las podemos escribir como

$$\begin{aligned}
 \xi_1 m_2 + \xi_2 m_4 &= 0, \\
 \xi_3 m_2 + \xi_4 m_4 &= 0, \\
 \xi_5 m_1 + \xi_6 m_2 + \xi_7 m_4 &= 0, \\
 \xi_8 m_1 + \xi_9 m_2 + \xi_{10} m_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Este sistema consiste de cuatro ecuaciones con sólo tres incógnitas dadas por las variables de masas.

En el sistema (2.15) tenemos a las masas de manera implícita en función de las distancias mutuas y las áreas orientadas que a su vez están en función de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , si normalizamos una de estas distancias, entonces el sistema (2.15) nos proporciona a las masas en función de tres variables. Nuestro objetivo es estudiar los casos frontera, nos referimos a los casos donde las distancias mutuas son iguales. Al considerar configuraciones planteadas al momento y además le pedimos que un par de distancias mutuas sean iguales, reducimos un grado de libertad al problema en la configuración. Al ser dos distancias mutuas iguales tendremos una restricción entre las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , por lo cual podemos obtener a las masas en función de sólo dos variables.

Al resolver el sistema (2.15), tendremos tres masas más una restricción en las variables. Para realizar el análisis, al igual que en la sección 2.1, debemos considerar todas las 21 posibles igualdades entre las distancias relativas, excepto aquellas equivalentes por simetrías. Además eliminaremos los casos que ya han sido estudiados por trabajos previos, ver [12, 14, 22]. Luego, sólo consideraremos los determinados por:

$$\begin{aligned}
 r_{12} = r_{25}, & & r_{12} = r_{45}, & & r_{14} = r_{23}, \\
 r_{23} = r_{24}, & & r_{23} = r_{25}, & & r_{23} = r_{45}.
 \end{aligned}$$

### 2.2.1. El teorema del bisector perpendicular y la simetría 2

En la sección 2.2 vimos que el sistema de ecuaciones de Dziobek–Laura–Andoyer toma la forma

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= m_2(R_{12} - R_{23})\Delta_{123} + m_4[(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + (R_{14} - R_{25})\Delta_{125}] = 0, \\
 f_{14} &= m_2[(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{12} - R_{25})\Delta_{143}] + m_4(R_{14} - R_{45})\Delta_{145} = 0, \\
 f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_2(R_{23} - R_{25})\Delta_{243} + m_4(R_{45} - R_{25})\Delta_{254} = 0, \\
 f_{25} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{251} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{243} + m_4(R_{24} - R_{45})\Delta_{254} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

En el sistema (2.16) hay más ecuaciones que variables de masas, y por lo tanto las tres masas las expresaremos en función de dos de las variables de configuración  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ó  $d$  y una restricción adicional. Por lo que las masas positivas no garantizan configuraciones centrales debido a que tienen que cumplir esta restricción.

Por otro lado, las regiones en el plano de variables de la configuración, donde existen configuraciones centrales, las determinaremos al aplicar el teorema del bisector perpendicular para poder buscar regiones de masas positivas dentro del espacio delimitado por el teorema del bisector. Pero en este caso, la región de masas definidas por el sistema (2.16) puede tener secciones fuera de la región definida por el bisector, esto debido a que las masas positivas además tienen que cumplir una restricción adicional que ya hemos mencionado. Por lo cual no aplicaremos el teorema del bisector perpendicular a este caso.

### 2.2.2. Existencia de configuraciones centrales para masas positivas

En esta sección mostramos numéricamente la existencia de configuraciones centrales, donde hemos usado una simetría adicional en las distancias relativas, además hemos normalizado una de sus distancias relativas (de acuerdo a la simetría) y la masa  $m_4 = 1$ . Con estas condiciones, el sistema (2.14) es reducido a cuatro variables, las cuales serán dos de las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  además de las masas  $m_1$ ,  $m_2$ . Podemos resolver este sistema para las masas, del cual tomaremos tres ecuaciones quedando una restricción que queda en función de las variables de distancia. Para ver cuándo la ecuación restante del sistema (2.14) intersecta la región de masas positivas, garantizando así la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos para masas positivas, graficaremos la región de masas positivas y luego la intersectamos con la restricción restante; si la intersección es no vacía, tenemos existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos.

- Caso  $r_{12} = r_{25}$ :

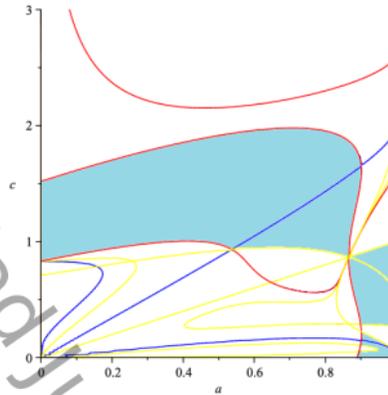


Figura 2.23: Curva en el plano  $(a, c)$ , donde hay configuraciones centrales para  $r_{12} = r_{25}$  para el caso II.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar  $r_{12} = r_{25} = 1$ , entonces para el caso II,  $b = \sqrt{1 - a^2}$ ,  $d = -c^2 + 2ac - a^2 - \sqrt{1 - a^2} + 1$ , resolviendo el sistema (2.14) tenemos que  $m_1 = m_1(a, c)$ ,  $m_2 = m_2(a, c)$ . Las regiones de masas positivas están dadas en la figura 2.23, donde las curvas amarillas y rojas, representan las curvas de nivel cero y singularidades para las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, la región sombreada de azul claro representa las regiones de masas positivas y la curva azul oscura representa la ecuación restante que queda de resolver el sistema (2.14) para las masas, la cual nos garantiza la existencia de configuraciones centrales cuando esta curva azul oscura está dentro de la región azul clara.

Nota: a partir de aquí los colores de las curvas representan lo mismo en todas las figuras.

- Caso  $r_{12} = r_{45}$ :

Para el caso I tomamos  $d = \frac{1}{2}$ ,  $b = \sqrt{1 - a^2}$  y para el caso II,  $d = 1$ ,  $b = \sqrt{4 - a^2}$ , en ambos casos tenemos  $m_1$  y  $m_2$  en función de  $a$  y  $c$ . Mostramos la región de masas positivas en la figura 2.24, para esta simetría tenemos configuraciones centrales de 5 cuerpos para ambos casos I y II.

- Caso  $r_{14} = r_{23}$ :

En ambos casos podemos hacer,  $b = \frac{1}{2}$  y  $d = \sqrt{1 - c^2}$ , la figura 2.25, representa todas las configuraciones centrales para esta simetría, observemos que para

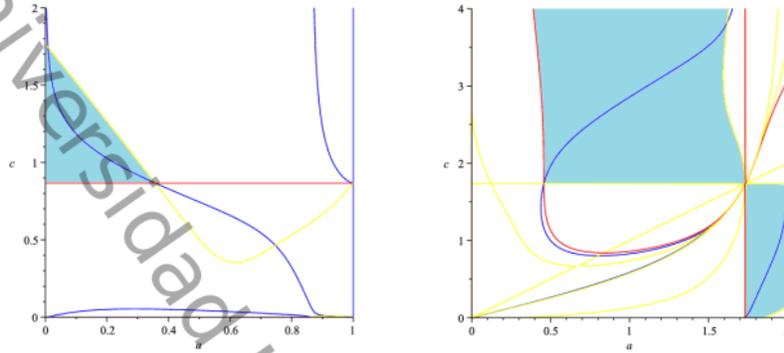


Figura 2.24: Curva en el plano  $(a, c)$  donde hay configuraciones centrales para  $r_{12} = r_{45}$ , caso I y II, respectivamente.

el caso II obtenemos las mismas configuraciones centrales obtenidas para la simetría  $r_{12} = r_{45}$  en el caso II.

- Caso  $r_{23} = r_{24}$ :

Con esta simetría, para el caso I sólo existe el cuadrado con una en el centro, para el caso II existen dos familias de configuraciones centrales, en este caso podemos tomar  $b = \frac{1}{2}$  y  $d = \sqrt{1 - (c - a)^2} + \frac{1}{2}$ . Las configuraciones centrales para el caso II están representadas en la figura 2.26

- Caso  $r_{23} = r_{25}$ :

Para el caso I podemos tomar  $d = \sqrt{1 - (a + c)^2} - \frac{1}{2}$  y para el caso II,  $d = \sqrt{1 - (c - a)^2} - \frac{1}{2}$ , en ambos casos tomamos  $b = \frac{1}{2}$ , la figura 2.27 muestra las configuraciones centrales para esta simetría.

- Caso  $r_{23} = r_{45}$ :

En ambos casos podemos tomar  $b = d = 1$ , las configuraciones centrales con esta simetría están representados en la figura 2.28.

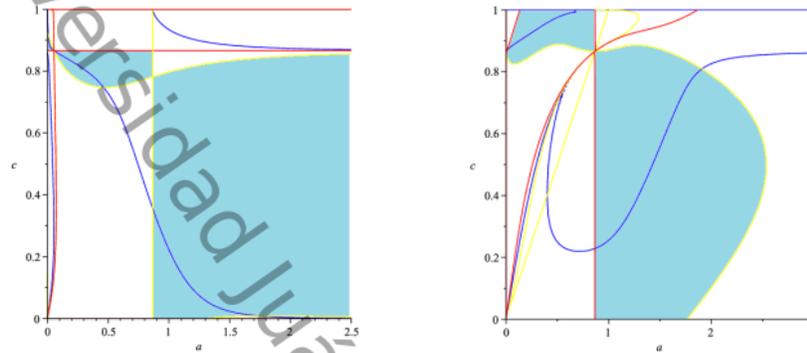


Figura 2.25: Configuraciones centrales para  $r_{14} = r_{23}$  en el plano  $(a, c)$ , caso I y II, respectivamente.

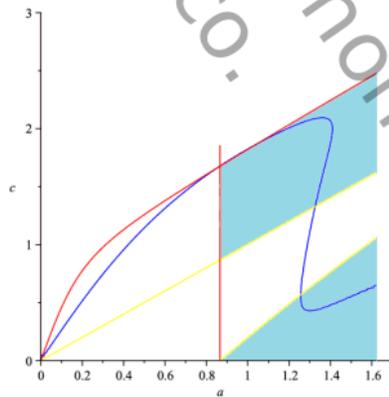


Figura 2.26: Configuraciones centrales para  $r_{23} = r_{24}$  en el plano  $(a, c)$  para el caso II.

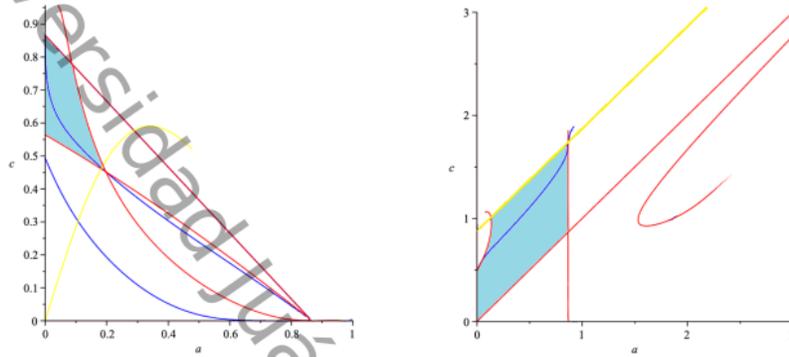


Figura 2.27: Configuraciones centrales para  $r_{23} = r_{25}$  en el plano  $(a, c)$ , caso I y II, respectivamente.

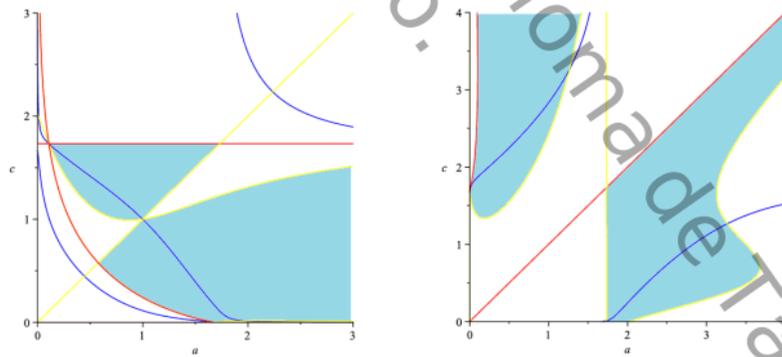


Figura 2.28: Configuraciones centrales para  $r_{23} = r_{45}$  en el plano  $(a, c)$ , caso I y II, respectivamente.

## Capítulo 3

# Configuración central de 5 cuerpos: rombo más uno

En este capítulo demostraremos analíticamente la existencia de configuraciones centrales, las cuales consideramos son las más interesantes, geoméricamente hablando, de todas aquellas que encontramos en el Capítulo 2, las cuales consisten en cuatro masas formando un rombo y una quinta colocada sobre un eje de simetría del rombo. Estas configuraciones centrales corresponden a la simetría 1. En la Sección 3.2 mostramos la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos donde cuatro masas forman un cuadrado. Por último, en la Sección 3.3 mostramos que la aplicación de masas  $\mu$  para estas configuraciones centrales es una función, es decir, que para cada configuración existe un único vector de masas de las partículas que forman una configuración central.

### 3.1. Configuración central de rombo más uno

Consideremos una configuración de 5 cuerpos en el plano, donde cuatro masas están en configuración de rombo y la quinta está localizada sobre un eje de simetría del rombo que pasa por dos masas, ver la figura 3.1.

Utilizando las coordenadas establecidas anteriormente, demostraremos el siguiente resultado

**Teorema 3.1.** Consideremos una configuración central de 5 cuerpos con cuatro partículas en configuración de rombo y la quinta sobre uno de los ejes de simetría del rombo, entonces existen configuraciones centrales del problema de 5 cuerpos donde la masa sobre el eje de simetría puede estar:

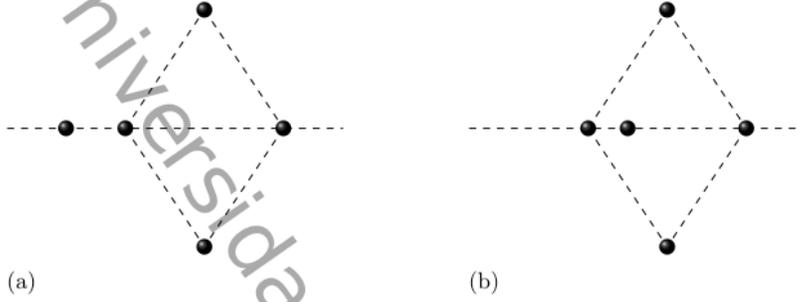


Figura 3.1: Configuración de 5 cuerpos con cuatro masas en configuración de rombo y la quinta masa fuera o dentro del rombo, respectivamente.

- (I) Fuera del rombo.
- (II) Dentro del rombo.

*Demostración.* Iniciemos por demostrar (I). Sin pérdida de generalidad supongamos que la masa  $m_1$  está localizada en el exterior del rombo sobre el eje de simetría que pasa por  $m_2$  y  $m_3$ . Entonces, se satisface  $r_{24} = r_{34} = 1$ . Sustituyendo estos valores en las expresiones de las masas (2.4), obtenemos que las expresiones para las masas  $m_i = N_{m_i}/D_{m_i}$ , donde  $N_{m_i}$  y  $D_{m_i}$  son el numerador y denominador, respectivamente de las expresiones  $m_i$ :

$$\begin{aligned}
 N_{m_1} &= -(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} - (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} \\
 &\quad + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
 D_{m_1} &= (R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} - (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}, \\
 N_{m_2} &= (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} \\
 &\quad + (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} \\
 &\quad - (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
 D_{m_2} &= (R_{23} - R_{24})\Delta_{342}D_{m_1}, \\
 N_{m_3} &= -(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} \\
 &\quad - (R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} \\
 &\quad + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
 D_{m_3} &= D_{m_2}.
 \end{aligned}$$

Estas expresiones satisfacen las ecuaciones de configuración central (2.4), y así, para demostrar que existe este tipo de configuración central, es suficiente verificar la existencia de valores para las variables  $(a, c)$  donde las tres masas sean positivas. Con el fin de garantizar ésto, vamos a buscar la región, en el espacio de variables de la

configuración, limitada por las curvas donde alguna de las masas sea cero y las otras dos sean positivas; o bien, los valores de dos de las masas tiendan a infinito y la otra sea positiva.

A partir de las expresiones de  $D_{m_2}$  y  $D_{m_3}$  obtenemos que éstas se anulan cuando  $R_{23} - R_{24}$ , de tal forma que  $m_2$  y  $m_3$  no están definidas cuando  $r_{23} = r_{24}$ .

Ahora veamos que  $m_1$  es positiva cuando  $r_{23} = r_{24}$ , y tenemos

$$m_1(r_{23} = r_{24}) = -\frac{(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345} + (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{24} - R_{45})\Delta_{345}}{(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} - (R_{13} - R_{24})\Delta_{143}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}}.$$

Un cálculo inmediato nos permite concluir que si  $r_{24} = r_{34}$  entonces  $b = 2c$  y  $d = \sqrt{1 - c^2}$ , y además que  $r_{23} = r_{24}$  implica  $c = \frac{1}{2}$ . Luego, las masas  $m_2$  y  $m_3$  no están definidas cuando  $c = \frac{1}{2}$ , mientras que para  $m_1$  tenemos

$$N_{m_1}(a, c = 1/2) = -\frac{3}{16}a^4(a+1)^4(a^2+a+1)^3P_{m_1}(a), \quad (3.1)$$

donde

$$P_{m_1}(a) = (6\sqrt{3} - 2)a^5 + (15\sqrt{3} - 5)a^4 + (12\sqrt{3} - 4)a^3 + (1 - 3\sqrt{3})a^2 + (2 - 6\sqrt{3})a + 1 - 3\sqrt{3}.$$

Aplicando la regla de los signos de Descartes a este polinomio [40], obtenemos que existe una única raíz positiva  $x$  de  $P_{m_1}$ , la cual es la única raíz positiva y diferente de cero para  $N_{m_1}$ . Notemos que  $P_{m_1}(0) < 0$  y  $P_{m_1} \rightarrow +\infty$  cuando  $a \rightarrow \infty$ , luego la raíz tiene multiplicidad simple, de tal forma que la intersección de la recta  $c = \frac{1}{2}$  con la curva  $N_{m_1}$  es no tangencial. Luego,  $N_{m_1}(a, c = 1/2)$  toma valores positivos y negativos. Más aún,  $N_{m_1}(a = 1, c = \frac{1}{2})$  es negativo y se cumple que  $r_{23} = r_{24}$ ,  $r_{12} = r_{24}$  y  $r_{14} = r_{45}$ , de tal forma que  $m_1 = 1$ . Así,  $m_1$  es positiva en el segmento de recta  $c = \frac{1}{2}$  con  $x < a \leq 1$ , siempre y cuando  $D_{m_1}$  no se anule en esos valores.

Ahora vamos a ver que  $D_{m_1}(x) \neq 0$  con  $x < a \leq 1$ . Notemos que

$$D_{m_1}(a, c = 1/2) = -\frac{3P_D(a)}{4a^2(a+1)^2(a^2+a+1)^{\frac{3}{2}}},$$

donde

$$P_D(a) = 3pa^4 + 6pa^3 + (7p - 3)a^2 + (4p - 3)a + p - 1, \text{ con } p = \sqrt{a^2 + a + 1}.$$

Al elevar al cuadrado a  $P_D(a)$ , obtenemos el polinomio

$$a(9a^9 + 45a^8 + 123a^7 + 222a^6 + 289a^5 + 279a^4 + 192a^3 + 88a^2 + 24a + 3),$$

el cual es un polinomio que no tiene cambio de signo en los coeficientes, y por lo tanto no tiene raíces positivas. Luego  $P_D(a)$  no tiene raíces positivas, y además  $P_D(1) > 0$ , de tal forma que por continuidad obtenemos que  $P_D$  toma sólo valores positivos para toda  $a > 0$ . Finalmente concluimos que  $D_{m_1} < 0$  para toda  $a \in (0, 1)$ , y con esto obtenemos que  $m_1 > 0$  en el segmento de recta  $c = \frac{1}{2}$  con  $x < a \leq 1$ .

Los numeradores de  $m_2$  y  $m_3$  evaluados en la recta  $c = \frac{1}{2}$  toman la forma

$$N_{m_2}(a, c = 1/2) = -\frac{\sqrt{12}(a+1)}{24} (3\sqrt{3}-1) \left( \frac{1}{(a+1)^3} - 1 \right) P_{m_2}(a),$$

$$N_{m_3}(a, c = 1/2) = -\frac{(a^3-1)(9-\sqrt{3})}{12} P_{m_2}(a),$$

donde

$$P_{m_2}(a) = \frac{\sqrt{3}(-2a^5 + (2p-5)a^4 + 4(p-1)a^3 + (5p-1)a^2 + 3pa + p)}{2a^2(a+1)^2(a^2+a+1)^{\frac{3}{2}}},$$

con  $p = \sqrt{a^2 + a + 1}$ .

Ahora vamos a buscar los valores de  $a$  donde  $P_{m_2}(a) = 0$ . Con el fin de eliminar las raíces cuadradas de  $P_{m_2}(a)$  elevamos al cuadrado y obtenemos

$$15a^8 + 60a^7 + 115a^6 + 135a^5 + 109a^4 + 63a^3 + 26a^2 + 7a + 1.$$

Este polinomio no tiene cambios de signos en los coeficientes, luego  $P_{m_2}$  no tiene raíces positivas, y por lo tanto  $N_{m_2}$  no tiene raíces positivas, y como consecuencia tampoco  $N_{m_3}$ . Además  $P_{m_2}(a=1) > 0$ , de donde podemos concluir que  $N_{m_2} > 0$  para toda  $a > 0$ , así como  $N_{m_3} > 0$  para  $a < 1$ .

El denominador para  $m_2$ ,  $D_{m_2} = (R_{23} - R_{24})\Delta_{342}D_{m_1}$  es positivo en el segmento de recta  $c = \frac{1}{2}$  cuando  $R_{23} - R_{24} < 0$ , es decir,  $8c^3 - 1 > 0$  ó equivalentemente cuando  $c > \frac{1}{2}$ . Luego,  $m_2, m_3 \rightarrow +\infty$  cuando  $c \rightarrow \frac{1}{2}^+$ .

En resumen,  $m_1 > 0$  en la recta  $c = \frac{1}{2}$  y sobre esta recta las masas  $m_2$  y  $m_3 \rightarrow +\infty$ , entonces por continuidad existen valores en las variables  $(a, c)$  donde las tres masas  $m_1, m_2$  y  $m_3$  son positivas, y con esto queda demostrada la primera parte del teorema.

Ahora vamos a demostrar (II).

En este caso una masa está sobre el eje de simetría dentro del rombo, es decir,  $r_{14} = r_{34} = 1$ . Sustituyendo estos valores en las expresiones de las masas (2.4),

obtenemos que las expresiones para las masas  $m_i = N_{m_i}/D_{m_i}$ :

$$\begin{aligned}
N_{m_1} &= -(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{23} - R_{14})\Delta_{243} \\
&\quad + (R_{13} - R_{14})\Delta_{143}(R_{24} - R_{45})\Delta_{245}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} \\
&\quad - (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{23} - R_{14})\Delta_{243}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
D_{m_1} &= (R_{13} - R_{14})\Delta_{143}D_{m_2}, \\
N_{m_2} &= (R_{13} - R_{14})\Delta_{143}(R_{24} - R_{45})\Delta_{245} + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}, \\
&\quad + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{23} - R_{14})\Delta_{243}, \\
D_{m_2} &= (R_{13} - R_{24})\Delta_{142}(R_{23} - R_{14})\Delta_{243} - (R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
N_{m_3} &= -(R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{13} - R_{14})\Delta_{143}(R_{24} - R_{45})\Delta_{245} \\
&\quad + (R_{12} - R_{24})\Delta_{142}(R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} \\
&\quad + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}, \\
D_{m_3} &= (R_{13} - R_{14})\Delta_{143}D_{m_2}.
\end{aligned}$$

En términos de las variables tenemos que  $r_{14} = r_{34} = 1$  equivale a  $b = a + 2c$  y  $d = \sqrt{1 - (a + c)^2}$ . Notemos que los denominadores  $D_{m_1}$  y  $D_{m_3}$  se anulan cuando  $r_{13} = r_{14}$ , y por lo tanto, las masas  $m_1$  y  $m_3$  no están definidas en la recta  $c = -a + \frac{1}{2}$ .

En lo que sigue vamos a explorar si existen valores de las variables de configuración donde las masas son positivas. Siguiendo un procedimiento similar al del caso (I), vemos que  $m_2 > 0$  en la recta  $c = -a + \frac{1}{2}$ , mientras que  $m_1, m_3 \rightarrow +\infty$  cuando  $c \rightarrow -a + \frac{1}{2}^-$ , además  $m_1$  y  $m_3$  son positivas para  $a > c - \frac{1}{2}$ .

Al evaluar el numerador de la expresión de  $m_2$  en la recta  $c = -a + \frac{1}{2}$  obtenemos

$$N_{m_2}(a, c = -a + 1/2) = \frac{(-9 + \sqrt{3})(a - \frac{1}{2})(2a^4 - 4a^3 + 2a^2 + 2)}{(a - 1)^2 a^2}.$$

Notemos que  $\frac{d}{da}(2a^4 - 4a^3 + 2a^2 + 2) > 0$  para  $0 < a < \frac{1}{2}$ , de donde podemos concluir que  $N_{m_2} > 0$  para  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Por otro lado, si  $q = \sqrt{a^2 - a + 1}$  y  $0 < a < \frac{1}{2}$ , el denominador

$$D_{m_2}(a, c = -a + 1/2) = \frac{3(2a^3q - 3a^2q + (3q - 2)a - q + 1)}{4q(a - 1)^2 a^2} \neq 0.$$

Además el denominador  $D_{m_2}$  se anulará en los valores de  $a$  que sean raíces del polinomio  $p(a) = 2a^3q - 3a^2q + (3q - 2)a - q + 1$ . Ya que las raíces de  $p(a)$  también son raíces de  $(p(a))^2$ , calculamos

$$\begin{aligned}
(p(a))^2 &= 4a^7 - 16a^6 + 37a^5 - 55a^4 + 58a^3 - 43a^2 + 18a - 3 \\
&= 4(a - 1) \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 3a + 3).
\end{aligned}$$

El último factor es el polinomio de grado 4,  $r(a) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 3a + 3$ . La derivada de éste es el polinomio  $\frac{dr(a)}{da} = 4a^3 - 6a^2 + 8a - 3$ , el cual tiene una única raíz real, de tal forma que  $r(a)$  tiene un único punto crítico en  $a = \frac{1}{2}$ . Esta infomación, unida con el hecho de que  $(p(\frac{1}{2}))^2 = \frac{37}{16} > 0$  y  $r(a)$  es una función creciente, implica que  $(p(a))^2$  no tiene raíces para  $a > 1/2$ , y por lo tanto,  $D_{m_2}$  no tiene raíces en el intervalo  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Por otro lado, tenemos  $D_{m_2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -\frac{26}{3} + \frac{32\sqrt{13(16)}}{39} > 0$ , entonces  $D_{m_2} > 0$  para toda  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Además, en la recta  $c = -a + \frac{1}{2}$ , los numeradores de las expresiones de  $m_1$  y  $m_3$  son

$$N_{m_1}(a, c = -a + \frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}(-9 + \sqrt{3})(a^2 - 3a + 3) P_1(a)}{24a(a^2 - a + 1)^{3/2}(a - 1)^4},$$

$$N_{m_3}(a, c = -a + \frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}(a^2 + a + 1)(-9 + \sqrt{3}) P_1(a)}{24a^4(1 - a)(a^2 - a + 1)^{3/2}},$$

donde  $P_1(a) = 2a^5 - 5a^4 + (2q + 4)a^3 - (3q + 1)a^2 + 3qa - q$  y  $q = \sqrt{a^2 - a + 1}$ .

Ahora vamos a mostrar que  $N_{m_1}$  no se anula cuando  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Igual que antes, elevamos al cuadrado a  $P_1(a)$  y obtenemos

$$(P_1(a))^2 = 4 \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 (-a^8 + 4a^7 - 5a^6 + a^5 + 5a^4 - 7a^3 + 6a^2 - 3a + 1).$$

El siguiente paso es mostrar que el polinomio  $P_2(a) = -a^8 + 4a^7 - 5a^6 + a^5 + 5a^4 - 7a^3 + 6a^2 - 3a + 1$  no tiene raíces para  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Aplicando el teorema de Sturm [40], generamos la sucesión  $R_k(a)$  de residuos obtenidos al dividir  $T_{k-2}(a)$  entre  $T_{k-1}(a)$  donde  $T_k(a) = -R_k(a)$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . En la tabla 3.1 mostramos los valores obtenidos al evaluar los  $T_k(a)$  en  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{2}$ .

A partir de la sucesión de Sturm podemos concluir que para  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{2}$  hay cuatro cambios de signos para  $P_2(a)$ , ver la tabla 3.1, luego  $P_2(a)$  no tiene raíces en el intervalo  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Por lo tanto,  $N_{m_1}$  y  $N_{m_3}$  no se anulan cuando  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Ya que

$$N_{m_1} \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = -\frac{37}{41067} \sqrt{3}(9 - \sqrt{3})(9 + 52\sqrt{13})\sqrt{13} < 0,$$

$$N_{m_3} \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = -\frac{7}{507} \sqrt{3}(9 - \sqrt{3})(9 + 52\sqrt{13})\sqrt{13} < 0,$$

por continuidad tenemos que  $N_{m_1}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  y  $N_{m_3}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  sólo toman valores negativos cuando  $0 < a < \frac{1}{2}$ .

$a$	0	$\frac{1}{2}$
$P_2(a)$	1	$\frac{107}{256}$
$P_2'(a)$	-3	0
$T_1$	$-\frac{13}{16}$	$-\frac{107}{256}$
$T_2$	$\frac{19}{2}$	0
$T_3$	$\frac{313}{432}$	$\frac{107}{256}$
$T_4$	$\frac{848}{59}$	0
$T_5$	$-\frac{10643}{16128}$	$-\frac{107}{256}$
$T_6$	$\frac{2264}{1951}$	0
$T_7$	$\frac{107}{256}$	$\frac{107}{256}$

Tabla 3.1: Valores de  $P_2(a)$ ,  $P_2'(a)$  y la sucesión de  $T_k(a)$  en  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{2}$ ,  $k = 1, \dots, 7$ .

Por otro lado, se cumple que

$$D_{m_1} = D_{m_3} = (R_{13} - R_{14})\Delta_{341}D_{m_2}.$$

Ahora requerimos analizar cuándo  $D_{m_1}$  es negativo, para lo cual debemos tomar en cuenta que  $D_{m_2} > 0$  y que en la configuración de rombo  $\Delta_{341} > 0$ . Por lo tanto, todo se reduce a analizar cuándo  $R_{13} - R_{14} < 0$ , es decir,  $r_{13} > r_{14}$  ó equivalentemente  $c > -a + \frac{1}{2}$ .

A partir de los cálculos anteriores, tenemos que sobre la recta  $c = -a + \frac{1}{2}$  los valores de  $m_1$  y  $m_3$  tienden a infinito, mientras que en la región  $c + \epsilon = -a + \frac{1}{2}$ , para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $m_1$  y  $m_3$  son positivas. En esta región es donde  $m_2 > 0$ , lo que demuestra el caso (II).  $\square$

### 3.2. Configuración de 5 cuerpos: cuadrado más uno

**5** En esta sección estudiaremos la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos donde cuatro partículas están en configuración de cuadrado, mientras que la quinta partícula está sobre un eje de simetría. En la sección anterior demostramos analíticamente la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos donde cuatro masas forman un rombo. Sin embargo, no pudimos decir nada para el caso particular en el que la configuración de cuatro masas es un cuadrado. Esto es debido a que las configuraciones de rombo para las cuales demostramos la existencia de configuraciones centrales de 5 cuerpos, están lejos de aquellas configuraciones en las que los respectivos rombos pueden transformarse en cuadrados.

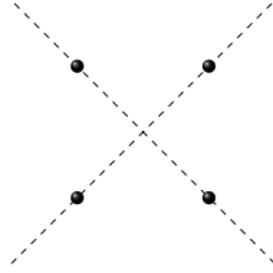


Figura 3.2: El teorema del bisector perpendicular, aplicado sobre la línea que une dos masas diagonalmente opuestas, nos dice que la quinta partícula debe estar sobre alguna de las diagonales del cuadrado.

**Teorema 3.2.** Consideremos una configuración de 5 cuerpos donde cuatro partículas forman un cuadrado. Entonces existen configuraciones centrales de 5 cuerpos sólo cuando la quinta partícula está sobre una de las diagonales, dentro o fuera del cuadrado.

Observemos que cuando cuatro partículas forman un cuadrado, el teorema del bisector perpendicular, aplicado sobre la línea que une dos masas diagonalmente opuestas, nos permite concluir que la quinta masa debe estar sobre alguna de las diagonales del cuadrado, ver la figura 3.2.

En el caso de que  $m_2, m_3, m_4$  y  $m_5$  formen un cuadrado, y la quinta partícula está fuera de éste, pero sobre una diagonal, se cumple que  $r_{24} = r_{34}$  y  $r_{23} = r_{45}$ . Por otro lado, cuando la quinta partícula está dentro del cuadrado, sobre una de las diagonales, se cumple que  $r_{14} = r_{34}$  y  $r_{45} = r_{13}$ . En ambos casos el teorema 2.2 implica que  $m_4 = m_5$ .

En las subsecciones 3.2.1 y 3.2.2 demostraremos el teorema 3.2 para el caso en que la quinta partícula está dentro y fuera del cuadrado, respectivamente.

### 3.2.1. La quinta masa dentro del cuadrado

Iniciemos por suponer que  $m_1, m_3, m_4$  y  $m_5$  forman un cuadrado, entonces  $r_{14} = r_{34}$  y  $r_{45} = r_{13}$ ; además que la masa  $m_2$  está localizada dentro del cuadrado y sobre una diagonal. Luego, aplicando el teorema 2.2 tenemos que  $m_4 = m_5$ . Por lo tanto, las ecuaciones (1.12) se reducen al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} f_{14} &= m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} - m_3(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + (R_{13} - R_{14})\Delta_{341} = 0, \\ f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + m_3(R_{23} - R_{14})\Delta_{243} + (R_{24} - R_{13})\Delta_{245} = 0, \\ f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} - (R_{13} - R_{14})\Delta_{341} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Resolviendo este sistema, para las masas, obtenemos que

$$m_1 = \frac{x_1x_5 + x_5x_8 + x_6x_8}{D}, \quad (3.3)$$

$$m_2 = -\frac{x_2(x_4 + x_5 + x_6)}{D}, \quad (3.4)$$

$$m_3 = -\frac{x_1x_4 + x_1x_6 + x_4x_8}{D}, \quad (3.5)$$

$$D = x_1x_5 - x_4x_8, \quad (3.6)$$

donde

$$x_1 = (R_{12} - R_{24})\Delta_{142}, \quad x_2 = (R_{13} - R_{14})\Delta_{341},$$

$$x_4 = (R_{12} - R_{14})\Delta_{241}, \quad x_5 = (R_{23} - R_{14})\Delta_{243},$$

$$x_6 = (R_{24} - R_{13})\Delta_{245}, \quad x_8 = (R_{23} - R_{24})\Delta_{342}.$$

Ahora, normalizamos a 1 la longitud de los lados del cuadrado. Considerando que  $r_{14} = r_{34}$ , se obtiene que  $b = a + 2c$  y  $d = \sqrt{1 - (a + c)^2}$ . Por otro lado, como  $r_{13} = r_{45}$ , se sigue que

$$c = -a + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{y} \quad b = -a + \sqrt{2}. \quad (3.7)$$

Ahora se demostrará que para  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , los valores de las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  son finitos, es decir,  $D \neq 0$ . Efectivamente, sustituimos las expresiones de (3.7) en  $x_1x_5 - x_4x_8 = 0$ , y obtenemos  $D$  en términos de la variable  $a$ :

$$D = -\frac{P_D(a)}{2a^2(\sqrt{2} - a)^2(a^2 - \sqrt{2}a + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.8)$$

donde

$$P_D(a) = 5\sqrt{2}a^4p - 2a^5p + 11p\sqrt{2}a^2 - 14a^3p - 3\sqrt{2}a^2 + 2a^3 + 2p\sqrt{2} - 10pa - 2\sqrt{2} + 6a$$

$$\text{y } p = \sqrt{a^2 - a\sqrt{2} + 1}.$$

La expresión (3.8) se anula en  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Luego, esta configuración corresponde al caso donde cuatro masas forman un cuadrado y una quinta masa,  $m_2$ , está en el centro del cuadrado. Ya que la quinta partícula está en el centro de masas, su masa puede tomar cualquier valor y continuar siendo una configuración central. Sin pérdida de generalidad, podemos excluir este caso de nuestro estudio.

Para llevar a cabo el análisis de las raíces de  $D$ , agrupamos los términos de forma conveniente, posteriormente elevamos al cuadrado para eliminar las raíces cuadradas

$p$ . Después de algunas manipulaciones algebraicas obtenemos el siguiente polinomio de grado 12:

$$4a(a - \sqrt{2}) \left( a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) P_3(a), \quad (3.9)$$

donde

$$P_3(a) = \left( a^8 - 4\sqrt{2}a^7 + 19a^6 - 29\sqrt{2}a^5 + 65a^4 - 52\sqrt{2}a^3 + 62a^2 - 24\sqrt{2}a + 12 \right).$$

Los valores  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  son soluciones de  $P_D(a) = 0$ , como  $D$  no está definida en estos valores, los descartamos.

Para demostrar que  $P_D(a)$  no tiene raíces en el intervalo  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , aplicaremos el teorema de Sturm al polinomio  $P_3(a)$ . La tabla 3.2 contiene la sucesión de Sturm generada al calcular los límites cuando  $a \rightarrow \pm\infty$ , respectivamente. A partir de los

$a$	$-\infty$	$\infty$
$P_3(a)$	+	+
$P_3'(a)$	-	+
$T_1$	-	-
$T_2$	-	+
$T_3$	+	+
$T_4$	-	+
$T_5$	-	-
$T_6$	0	0

Tabla 3.2: Valores de  $P_3(a)$ ,  $P_3'(a)$  y la sucesión de Sturm,  $T_k(a)$ , cuando  $a \rightarrow \pm\infty$ .

resultados obtenidos, podemos concluir que hay tres cambios de signos en cada uno de los casos, y por lo tanto, no hay raíces reales de  $P_3(a)$ . Entonces,  $D$  no se anula cuando  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ya que  $P_D(a = \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \frac{65}{256}\sqrt{5} - \frac{13}{16}\sqrt{2} < 0$  tenemos que  $D > 0$  para  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La siguiente etapa de la demostración consiste en analizar el numerador de  $m_2$ ,  $N_{m_2} = x_2(x_4 + x_5 + x_6)$ , que en términos de la variable  $a$  toma la forma

$$N_{m_2} = -\frac{(\sqrt{2} - 4)P_{N_{m_2}}}{16a^2(\sqrt{2} - a^2)^2(a^2 - \sqrt{2}a + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

donde

$$\begin{aligned} P_{N_{m_2}} = & (\sqrt{2} + 4)pa^7 - (14\sqrt{2} + 7)pa^6 + (10\sqrt{2}p + 40p - 4)a^5 \\ & + (10\sqrt{2} - 30\sqrt{2}p - 15p)a^4 + (10\sqrt{2}p + 24p - 16)a^3 \\ & + (-4\sqrt{2}p + 4\sqrt{2} - 14p)a^2 + 8\sqrt{2}pa - 4p. \end{aligned}$$

Para simplificar éste, agrupamos y ordenamos los factores hasta obtener:

$$P_{N_{m_2}} = \sqrt{a^2 - \sqrt{2}a + 1} (P_4(a) + P_5(a)),$$

donde

$$P_4(a) = \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left( (\sqrt{2} + 4)a^6 - (6 + 12\sqrt{2})a^5 + (28 + 7\sqrt{2})a^4 \right. \\ \left. - (8 + 16\sqrt{2})a^3 + (8 + 6\sqrt{2})a^2 - 8a + 4\sqrt{2} \right),$$

y

$$P_5(a) = 10\sqrt{2}a^4 - 4a^5 + 4\sqrt{2}a^2 - 16a^3 \\ = a^2 \left( a - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (a - \sqrt{2})^2.$$

Notemos que  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  es raíz de los polinomios  $P_4(a)$  y  $P_5(a)$ .

Ahora demostraremos que  $P_{N_{m_2}} < 0$  para  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . A partir de una inspección directa, tenemos que para  $a > 0$ ,  $\frac{P_5(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$  y  $\sqrt{a^2 - \sqrt{2}a + 1} > 0$ . Luego, sólo hace falta mostrar que  $\frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$  para  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Observemos que  $\frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}}$  es un polinomio de grado 6 que puede tener 2 de raíces reales positivas, pues tiene 6 cambios de signos en los coeficientes. Para mostrar que este polinomio siempre es positivo, observemos que

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} \frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} = +\infty.$$

Por otro lado, su derivada es

$$\frac{d}{da} \left( \frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = (6(\sqrt{2} + 4))a^5 + (5(-6 - 12\sqrt{2}))a^4 + (4(28 + 7\sqrt{2}))a^3 \\ + (3(-8 - 16\sqrt{2}))a^2 + (2(8 + 6\sqrt{2}))a - 8.$$

Usando que  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  es raíz de este polinomio de grado 5, mostraremos que este sólo tiene una raíz real y es positiva, posteriormente veremos que el valor del polinomio  $\frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}}$  en su único punto crítico es positivo. Esto nos permite garantizar que  $\frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

no puede tener raíces reales y que siempre toma valores positivos. Iniciemos por considerar el siguiente cociente

$$\begin{aligned} P_6(a) &= \frac{1}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d}{da} \left( \frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= (6\sqrt{2} + 24)a^4 - (24 + 48\sqrt{2})a^3 + (64 + 16\sqrt{2})a^2 - (8 + 16\sqrt{2})a + 8\sqrt{2}, \end{aligned}$$

el cual es un polinomio de grado 4. Ahora aplicamos el teorema de Sturm para encontrar los ceros de  $P_6(a)$ . En la tabla 3.3 mostramos la sucesión obtenida del algoritmo de Sturm, y observamos que en ambas columnas sólo hay dos cambios de signos, de tal forma concluimos que  $P_6(a)$  no tiene raíces reales. Luego, el único punto crítico del polinomio  $P_4(a)$  es  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Además  $\frac{P_4(\frac{1}{\sqrt{2}})}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{17}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2} > 0$ , por lo tanto,  $\frac{P_4(a)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}}}$  tampoco tiene raíces reales. En conclusión,  $P_{N_{m_2}}$  no tiene raíces en  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , y  $P_{N_{m_2}}(\frac{1}{4\sqrt{2}}) = -\frac{1479111\sqrt{2}}{1048576} - \frac{18375}{262144} < 0$ . En otras palabras,  $m_2 = -\frac{N_{m_2}}{D} > 0$  para toda  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$a$	$-\infty$	$\infty$
$P_6(a)$	+	+
$P'_6(a)$	+	-
$T_1$	+	+
$T_2$	-	+
$T_3$	+	+

Tabla 3.3: Valores de  $P_6(a)$ ,  $P'_6(a)$  y la sucesión  $T_k(a)$  cuando  $a \rightarrow \pm\infty$ .

A continuación mostramos que  $m_3 > 0$  para toda  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . De (3.5) tomamos  $m_3 = -\frac{N_{m_3}}{D}$  con  $N_{m_3} = x_1x_4 + x_1x_6 + x_4x_8$ , y de las ecuaciones (3.7) tenemos

$$N_{m_3} = -\frac{P_{N_{m_3}}}{4a^4(\sqrt{2} - a)^2(a^2 - a\sqrt{2} + 1)^3},$$

donde

$$\begin{aligned} P_{N_{m_3}} &= 4 + 62a^2 - 4a^3 - 28a^9 + 83a^8 + 147a^4 + 145a^6 - 100a^7 - 60a^5 + 11a^{10} \\ &\quad - 14\sqrt{2}pa^9 + 6\sqrt{2}pa^6 - 4\sqrt{2}pa^5 + 10\sqrt{2}a^8p - 30\sqrt{2}pa^7 + \sqrt{2}pa^{10} \\ &\quad - 16a\sqrt{2} - 78\sqrt{2}a^3 - \sqrt{2}a^{11} + 24pa^6 + 16\sqrt{2}a^4 - 2pa^5 - 7pa^9 \\ &\quad + 4pa^{10} + 40pa^8 - 15pa^7 + 4\sqrt{2}a^{10} - 112\sqrt{2}a^5 - 85\sqrt{2}a^7 \\ &\quad - 28\sqrt{2}a^9 + 68\sqrt{2}a^6 + 48\sqrt{2}a^8. \end{aligned}$$

Agrupando términos y elevando al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada de  $p$ , obtenemos un polinomio de grado 22, el cual tiene a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  como raíz de multiplicidad 2. Usamos la división sintética para encontrar el otro factor, el cual es un polinomio de grado 20, y obtenemos

$$P_7(a) = \frac{P_{N_{m_3}}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} P_7(a) = & (8\sqrt{2} + 16)a^{20} - (96 + 106\sqrt{2})a^{19} + (586 + 232\sqrt{2})a^{18} - (416 + 812\sqrt{2})a^{17} \\ & + (564 - 568\sqrt{2})a^{16} + (4992 + 2338\sqrt{2})a^{15} - (11622 + 9016\sqrt{2})a^{14} \\ & + (22496 + 16176\sqrt{2})a^{13} - (33534 + 22112\sqrt{2})a^{12} + (36464 + 28596\sqrt{2})a^{11} \\ & - (42600 + 25920\sqrt{2})a^{10} + (31776 + 28844\sqrt{2})a^9 - (36138 + 16480\sqrt{2})a^8 \\ & + (14032 + 20872\sqrt{2})a^7 - (21816 + 4704\sqrt{2})a^6 + (2336 + 10016\sqrt{2})a^5 \\ & - (7800 + 384\sqrt{2})a^4 + (64 + 2464\sqrt{2})a^3 - 1184a^2 + 192a\sqrt{2} - 32. \end{aligned}$$

Una vez más, usando el teorema de Sturm se muestra que no existen raíces reales para este polinomio en el intervalo  $0 < a < 1$ . En la tabla 3.4 mostramos las sucesiones obtenidas, y observamos que hay 11 cambios de signo para  $a = 0$  y  $a = 1$ . Luego podemos concluir que  $N_{m_3}$  no cambia de signo en el intervalo  $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Por otro lado, tenemos que  $P_{N_{m_3}}(\frac{1}{4\sqrt{2}}) = \frac{48588441}{33554432} - \frac{393375\sqrt{2}}{67108864}$ , lo cual nos permite afirmar que  $P_{N_{m_3}} > 0$ , y por lo tanto  $N_{m_3} < 0$ . En conclusión,  $m_3 > 0$  para toda  $a \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

$a = 0$		$a = 1$	
$P_7(0) < 0$	$T_{10}(0) > 0$	$P_7(1) < 0$	$T_{10}(1) > 0$
$P_7'(0) > 0$	$T_{11}(0) < 0$	$P_7'(1) > 0$	$T_{11}(1) < 0$
$T_1(0) > 0$	$T_{12}(0) > 0$	$T_1(1) > 0$	$T_{12}(1) > 0$
$T_2(0) > 0$	$T_{13}(0) > 0$	$T_2(1) > 0$	$T_{13}(1) > 0$
$T_3(0) < 0$	$T_{14}(0) < 0$	$T_3(1) < 0$	$T_{14}(1) < 0$
$T_4(0) > 0$	$T_{15}(0) > 0$	$T_4(1) > 0$	$T_{15}(1) < 0$
$T_5(0) > 0$	$T_{16}(0) > 0$	$T_5(1) > 0$	$T_{16}(1) > 0$
$T_6(0) < 0$	$T_{17}(0) < 0$	$T_6(1) < 0$	$T_{17}(1) < 0$
$T_7(0) < 0$	$T_{18}(0) < 0$	$T_7(1) < 0$	$T_{18}(1) > 0$
$T_8(0) < 0$	$T_{19} > 0$	$T_8(1) < 0$	$T_{19} > 0$
$T_9(0) > 0$		$T_9(1) > 0$	

Tabla 3.4: Valores de  $P_7(a)$ ,  $P_7'(a)$  y las sucesiones de  $T_k(a)$  en  $a = 0$  y  $a = 1$ .

Para garantizar la existencia de configuraciones centrales con la configuración que estamos considerando, sólo falta mostrar que  $m_1 > 0$  para alguna  $a \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Elegimos  $a = \frac{3\sqrt{2}}{7}$  y evaluamos

$$m_1 \left( \frac{3\sqrt{2}}{7} \right) = -\frac{127980658\sqrt{2} - 121054329}{32264000(\sqrt{2} - 4)} \approx 0.1174105851.$$

Luego, por continuidad  $m_1 > 0$  en  $a \in (\frac{3\sqrt{2}}{7} - \epsilon, \frac{3\sqrt{2}}{7} + \epsilon)$  para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño. Numéricamente se observa que  $m_1 > 0$  para  $0.3529487331 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Con esto queda demostrada la primera parte del teorema.

### 3.2.2. La quinta masa fuera del cuadrado

Consideremos cuatro masas formando un cuadrado y una masa sobre la diagonal del cuadrado y fuera del mismo. El caso que corresponde al problema planteado es para  $r_{24} = r_{34}$  y  $r_{23} = r_{45}$ , y las ecuaciones de Dziobek–Laura–Andoyer son reducidas a las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{14} &= m_2(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + m_3(R_{13} - R_{24})\Delta_{143} + (R_{14} - R_{23})\Delta_{145} = 0, \\ f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} - m_3(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} + (R_{23} - R_{24})\Delta_{342} = 0, \\ f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + m_2(R_{23} - R_{24})\Delta_{342} - (R_{23} - R_{24})\Delta_{342} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mostraremos que  $m_1 = 0$  es una frontera del conjunto de masas positivas  $\mathcal{M}$  y que este conjunto es no vacío. Hacer esto es equivalente a mostrar que existe un  $a > 0$  en el espacio de las variables de configuración donde  $m_1 = 0$  y las cuatro masas  $m_2, m_3, m_4 = m_5$  forman una configuración central. Por continuidad existe una vecindad del punto  $a$  donde existen configuraciones centrales de 5 cuerpos con esta simetría.

Si  $m_1 = 0$ , de las ecuaciones  $f_{24}$  y  $f_{34}$  obtenemos, respectivamente, las siguientes expresiones de las masas:

$$m_2 = m_3 = \frac{(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}}{(R_{23} - R_{24})\Delta_{342}},$$

y por lo tanto,  $m_2 = m_3 = 1$ , lo cual es consistente con el resultado de que una configuración de cuadrado es central sólo cuando las cuatro masas son iguales, ver Albouy [2].

Ahora mostraremos que  $f_{14}(m_2 = m_3 = 1) = 0$  para algún  $a > 0$ . La expresión obtenida al evaluar  $f_{14}$  en  $m_2 = m_3 = 1$  es equivalente a la que obtuvimos para  $m_1 = 0$  en el sistema (3.10), para las tres masas positivas y diferentes. Luego, tienen los mismos ceros o raíces y podemos estudiar ambos casos a la vez.

Para cualesquiera de los dos casos, el teorema quedará demostrado al encontrar una raíz positiva de la siguiente ecuación:

$$3(R_{12} - R_{24})\Delta_{142} + (R_{13} - R_{24})\Delta_{143} + (R_{14} - R_{23})\Delta_{145} = 0. \quad (3.11)$$

Considerando que  $r_{24} = r_{34} = 1$  y  $r_{23} = r_{45}$ , obtenemos  $b = 2c$  donde  $d = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Luego, (3.11) toma la forma

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-4)P(a)}{16(\sqrt{2}+a)^2a^2(a\sqrt{2}+a^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} P(a) = & (\sqrt{2}p + 4p)a^7 + (14\sqrt{2}p + 7p)a^6 + (10\sqrt{2}p + 40p - 4)a^5 \\ & + ((30p - 10)\sqrt{2} + 11p)a^4 + (-2\sqrt{2}p + 24p - 16)a^3 \\ & + (4\sqrt{2}p - 4\sqrt{2} - 14p)a^2 - 8\sqrt{2}pa - 4p \end{aligned}$$

$$\text{y } p = \sqrt{+a^2 + a\sqrt{2} + 1}.$$

Luego, para tener el resultado deseado es suficiente con mostrar que  $P(a) = 0$  para alguna  $a > 0$ . Evaluando directamente tenemos  $P(0) = -4$  y  $P(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{55}{8}\sqrt{2}\sqrt{5} + \frac{45}{2}\sqrt{5} - 9\sqrt{2}$ . Como  $\frac{55}{8}\sqrt{2}\sqrt{5} < 25$ ,  $9\sqrt{2} < 15$  y  $\frac{45}{2}\sqrt{5} > 50$ , entonces  $P(\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ , de tal forma que (3.11) tiene al menos una solución. Numéricamente, se puede comprobar que la raíz es única.

### 3.3. Unicidad del rombo y el cuadrado

**Teorema 3.3.** Cada configuración del problema plano de 5 cuerpos donde cuatro masas forman un rombo y la masa restante está sobre un eje de simetría del rombo, tiene vector de masas  $(m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, m_5 = 1)$  único, excepto para el caso en el cual una masa está en el centro del rombo.

*Demostración.* Las ecuaciones (2.7) pueden ser reducidas de un sistema homogéneo  $Am = 0$  a un sistema no homogéneo  $Bm = b$  donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (R_{12} - R_{24})\Delta_{142} & (R_{13} - R_{34})\Delta_{143} \\ (R_{12} - R_{14})\Delta_{241} & 0 & (R_{23} - R_{34})\Delta_{243} \\ (R_{13} - R_{14})\Delta_{341} & (R_{23} - R_{24})\Delta_{342} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} (-R_{14} + R_{45})\Delta_{145} \\ (-R_{24} + R_{45})\Delta_{245} \\ (-R_{34} + R_{45})\Delta_{345} \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

Observemos que la existencia y unicidad (positiva o no) del vector  $(m_1, m_2, m_3)$  del sistema lineal  $Bm = b$  depende de que  $\det(B) \neq 0$ . De las simetrías de la configuración

tenemos que  $\Delta_{142} = -\Delta_{241}$ ,  $\Delta_{341} = -\Delta_{143}$  y  $\Delta_{243} = -\Delta_{342}$ , entonces obtenemos

$$\det(B) = \left[ (R_{13} - R_{14})(R_{12} - R_{24})(R_{23} - R_{34}) - (R_{12} - R_{14})(R_{23} - R_{24})(R_{13} - R_{34}) \right] \Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243}. \quad (3.12)$$

Considerando la configuración planteada en el teorema 3.3 y la simetría 1 considerada en este trabajo, podemos dividir el estudio en dos casos.

Caso 1. La quinta masa está sobre el eje de simetría y dentro del rombo: es para  $r_{14} = r_{34}$ .

Caso 2. La quinta masa está sobre el eje de simetría y fuera del rombo:  $r_{24} = r_{34}$ .

Si  $r_{14} = r_{34}$ , (3.12) toma la forma

$$\det(B) = \left[ (R_{12} - R_{24})(R_{23} - R_{14}) - (R_{12} - R_{14})(R_{23} - R_{24}) \right] (R_{13} - R_{14}) \Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243}.$$

Desarrollando el primer factor de esta última expresión y factorizando obtenemos

$$\det(B) = (R_{12} - R_{23})(R_{24} - R_{14})(R_{13} - R_{14}) \Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243}.$$

Las áreas orientadas satisfacen  $\Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243} \neq 0$ , pues en caso contrario implica colisión y hemos supuesto que  $r_{14} > r_{24}$ . Por otro lado, tenemos que las configuraciones centrales de este tipo satisfacen  $r_{13} > r_{14}$ , la cual es una condición obtenida del teorema del bisector perpendicular. El vector normalizado de masas positivas es único siempre y cuando  $r_{12} \neq r_{23}$ , es decir, el vector de masas es único excepto para un rombo con  $m_2$  en el centro. Este caso fue estudiado por Gidea y Llibre en [12], y corresponde al caso (i) de la demostración del inciso (a) de su teorema 1.

Ahora consideremos el Caso 2 donde  $r_{24} = r_{34}$ . Luego, a partir de la ecuación (3.12) obtenemos

$$\det(B) = \left[ (R_{13} - R_{14})(R_{12} - R_{24}) - (R_{12} - R_{14})(R_{13} - R_{24}) \right] (R_{23} - R_{24}) \Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243}.$$

Desarrollando, simplificando y factorizando al primer factor de esta expresión, obtenemos

$$\det(B) = (R_{12} - R_{13})(R_{24} - R_{14})(R_{23} - R_{24}) \Delta_{341} \Delta_{142} \Delta_{243}.$$

De la geometría de la configuración que estamos considerando, obtenemos que  $r_{13} = r_{12} + r_{23}$ ,  $r_{14} > r_{24}$ , de tal forma que el vector de masas positivas normalizado es único siempre y cuando  $r_{23} \neq r_{24}$ . El caso  $r_{23} = r_{24}$  corresponde a un rombo formado por dos triángulos equiláteros. Para completar la demostración del teorema, mostraremos que no existen configuraciones centrales de este tipo.

Sea  $r_{24} = r_{34} = r_{23}$ . Entonces las ecuaciones (2.4) se transforman en

$$\begin{aligned} f_{24} &= m_1(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + (R_{23} - R_{45})\Delta_{245}, \\ f_{34} &= m_1(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + (R_{23} - R_{45})\Delta_{345}. \end{aligned}$$

Ahora veamos cuándo se cumple  $f_{24} = f_{34} = 0$ . Sumando  $f_{24} + f_{34}$ , tenemos

$$(R_{12} - R_{14})\Delta_{241} + (R_{13} - R_{14})\Delta_{341} = 0. \quad (3.13)$$

Normalizando  $r_{24} = r_{34} = r_{23} = 1$ , obtenemos que  $b = 1$ ,  $c = \frac{1}{2}$  y  $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Usando estos valores y simplificando (3.13) tenemos

$$\frac{\sqrt{3}(-2a^5 + 2a^4p - 5a^4 + 4a^3p - 4a^3 + 5pa^2 - a^2 + 3pa + p)}{a^2(1+a)^2(a^2+a+1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

donde  $p = \sqrt{a^2 + a + 1}$ . Para mostrar que la última ecuación no tiene raíces positivas, elevamos al cuadrado para eliminar las raíces cuadradas y obtenemos

$$15a^8 + 60a^7 + 115a^6 + 135a^5 + 109a^4 + 63a^3 + 26a^2 + 7a + 1.$$

Como este polinomio no tiene cambios de signo entre sus coeficientes, entonces  $f_{24}$  y  $f_{34}$  no se anulan simultáneamente, quedando demostrado el teorema.  $\square$

**Corolario 3.4.** Cada configuración del problema plano de 5 cuerpos, donde cuatro masas forman un cuadrado y la quinta masa está sobre una diagonal del cuadrado, tiene vector de masas  $(m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, m_5 = 1)$  único, excepto para el caso en donde la masa que está sobre la diagonal está en el centro del cuadrado.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Capítulo 4

# Configuraciones centrales apiladas de 5 cuerpos

En este capítulo mostramos los resultados más importantes de esta tesis, lo cual consiste en mostrar de manera analítica la existencia de dos nuevas configuraciones centrales apiladas de 5 cuerpos en el plano que cumplen con la simetría 1. Una de estas familias de configuraciones centrales apiladas es dada por  $r_{12} = r_{23}$  donde obtenemos configuraciones centrales apiladas del tipo Euler más dos que veremos en la sección 4.2 y la otra familia de configuraciones centrales apiladas que mostramos son dadas por  $r_{24} = r_{45}$  la cual veremos en la sección 4.3.

Antes de mostrar la existencia de estas configuraciones centrales apiladas hablamos sobre el conteo de las configuraciones centrales apiladas.

### 4.1. Número de configuraciones centrales apiladas

Recientemente, ha estado creciendo el interés en configuraciones centrales apiladas. Además de las configuraciones apiladas para 5 cuerpos en el plano mencionadas en la sección 1.6, las configuraciones centrales apiladas también han sido encontradas en el caso espacial, ver [16, 24, 25, 38] o en general en el problema de  $n$  cuerpos, ver [11, 39, 43].

En este punto, surge una pregunta natural. Dada una configuración central del problema de  $n$  cuerpos, ¿Cuántos subconjuntos diferentes de masas,  $A$ , existen con cardinalidad  $|A| = k$ , con  $k = 1, 2, \dots, n - 3$  tales que los  $n - k$  cuerpos forman una configuración central del problema de  $n - k$  cuerpos?

Usando la notación de configuración central apilada  $(n, k)$  dada en la sección 1.6,

donde  $n$  es el número de cuerpos de la configuración original y  $k = 1, 2, \dots, n - 3$  es el número de cuerpos removidos, la pregunta anterior puede ser enunciada como: ¿Cuál es el número de configuraciones centrales apiladas para todo  $k = 1, 2, \dots, n - 3$ ?

En el problema no colineal de  $n$  cuerpos, la respuesta para el caso  $(n, 1)$  fue dada por Fernandes y Mello en [11], donde mostraron que existe sólo una, la cual consiste de un polígono regular formado por las  $n - 1$  masas y un cuerpo de masa arbitraria, que puede ser removido, colocado en el centro del polígono.

Las configuraciones centrales que consisten de dos polígonos regulares anidados son ejemplos de configuraciones centrales apiladas  $(2n, n)$  dobles, las cuales contienen dos diferentes subconjuntos de  $n$  cuerpos que pueden ser removidos, ver [5, 23, 28]. Aunque en estas configuraciones centrales apiladas tenemos dos subconjuntos diferentes de  $n$  cuerpos para elegir, las configuraciones centrales obtenidas una vez que los cuerpos son removidos son similares. A causa de esto estamos interesados en contar el número de configuraciones centrales apiladas que no sean similares después de que los  $k$  cuerpos son removidos. Así, contaremos el número de configuraciones centrales apiladas  $(n, k)$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n - 3$  salvo similitudes.

En el problema plano no colineal de 5 cuerpos, una configuración que después de remover dos masas en tres diferentes maneras, tal que en cada una, las tres masas restantes estén en una configuración colineal, no es geoméricamente realizable, al menos que la configuración de 5 cuerpos en el plano tenga cuatro masas colineales. En ese caso el teorema del bisector perpendicular nos dice que tal configuración no puede ser central del problema de 5 cuerpos, para verlo, basta con aplicar el teorema a cualquier par de masas que forman la configuración colineal de 4 cuerpos cuyo bisector no coincide con la masa que no pertenece a la configuración colineal, de ser así, se elige cualquier otro par de masas. Por tanto, es imposible obtener, en el problema plano no colineal de 5 cuerpos, que el número de configuraciones centrales apiladas  $(5, 2)$  sea tres, donde las tres masas restantes formen una configuración central de Euler en el problema de 3 cuerpos.

Por otro lado, una configuración central plana de 5 cuerpos que incluye un triángulo equilátero también puede incluir, en tres diferentes maneras, dos configuraciones colineales después de remover dos masas. Esto sucede cuando las dos masas no triangulares están en los lados del triángulo, ver la figura 4.1(a), cuando sólo una masa no triangular está en un lado, ver la figura 4.1(b), y finalmente cuando las dos masas no triangulares no están en ningún lado del triángulo, ver la figura 4.1(c). El teorema del bisector perpendicular implica que ninguna de estas configuraciones puede ser central del problema de 5 cuerpos. Entonces en el problema plano no colineal de 5 cuerpos, el número de configuraciones centrales apiladas  $(5, 2)$ , salvo similitudes es a lo más dos.

La configuración central de 5 cuerpos dada por un cuadrado con cuatro masas

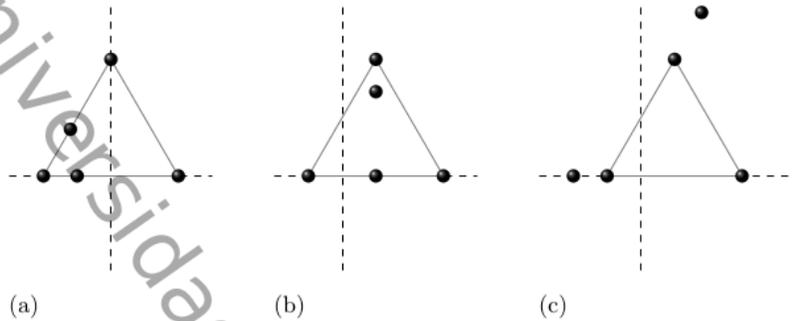


Figura 4.1: Tres configuraciones diferentes en el problema de 5 cuerpos, donde después de remover dos cuerpos, una configuración de triángulo equilátero y dos configuraciones colineales son obtenidos. Las tres configuraciones son descartados por el teorema del bisector perpendicular para ser una configuración central del problema de 5 cuerpos.

iguales en sus vértices y un cuerpo localizado en su centro con masa arbitraria, admite una configuración central apilada  $(5, 1)$ , a la cual podemos llamar *configuración central apilada cuadrado más uno* debido a que el cuerpo removido es el del centro, quedando la configuración del cuadrado. Esta configuración central formada por el cuadrado y una masa en su centro también admite una configuración central apilada  $(5, 2)$  la cual es del tipo Euler más dos, observemos que realmente hay dos subconjuntos de masas que pueden ser retirados (las que están diagonalmente opuestas) pero las configuraciones resultantes de 3 cuerpos son similares, por lo cual decimos que esta configuración admite sólo una apilada  $(5, 2)$ . En la configuración del cuadrado con una masa en su centro es imposible remover dos masas y obtener un triángulo equilátero, el cual es la configuración central de Lagrange del problema de 3 cuerpos. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.** En el problema plano no colineal de 5 cuerpos, el número de configuraciones centrales apiladas  $(5, k)$ , para  $k = 1, 2$  salvo similitudes es a lo más dos.

En efecto, en la sección 4.3 mostraremos la existencia de una familia donde el número de configuraciones centrales apiladas  $(5, 2)$  es dos.

## 4.2. Configuración central apilada (5, 2): Euler más dos

En esta sección demostraremos la existencia de una nueva familia de configuraciones centrales apiladas (5, 2) en el problema plano de 5 cuerpos. En esta configuración central de 5 cuerpos, tres partículas están en configuración central colineal o de Euler, mientras que las otras dos partículas están colocadas simétricamente con respecto a la configuración colineal.

**Observación 4.2.** Este tipo de configuración cae dentro de la familia de configuraciones centrales estudiadas por Gidea y Llibre [12], donde ellos, por un error aritmético, descartaron esta configuración.

El teorema principal de esta sección es el siguiente.

**Teorema 4.3.** Consideremos la siguiente configuración del problema de 5 cuerpos: Tres masas colineales  $m_1, m_2, m_3$ , ordenadas de izquierda a derecha, con  $m_1 = m_3$  en configuración central de Euler del problema de 3 cuerpos, mientras que las masas  $m_4$  y  $m_5$  están colocadas simétricamente con respecto a la configuración central colineal. Entonces, existen configuraciones centrales del problema de 5 cuerpos con  $m_4 = m_5 = 1$ , tal que la línea recta que contiene a  $m_4$  y  $m_5$  cruza a la configuración colineal a la derecha de  $m_3$ , o simétricamente a la izquierda de  $m_1$ .

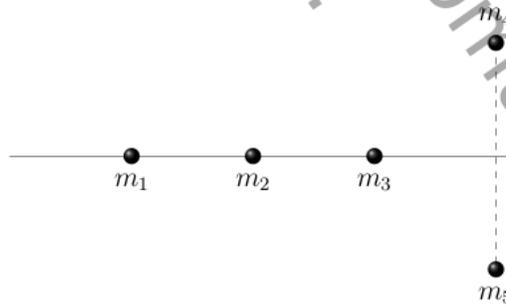


Figura 4.2: Configuración de 5 cuerpos: Euler más dos

*Demostración.* Por hipótesis  $m_1 = m_3$  y  $r_{12} = r_{23}$ , las ecuaciones (2.4) y (2.8) del capítulo 2 deben cumplirse debido a que cumplen con la simetría 1, entonces sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $a = b = 1$ . De las ecuaciones (2.4)

tenemos

$$m_1 = \frac{(R_{24} - R_{45})\Delta_{245}}{(R_{14} - R_{34})\Delta_{241}}, \quad (4.1a)$$

$$m_2 = \frac{-2(R_{24} - R_{45})(R_{13} - R_{34})\Delta_{245} + (R_{14} - R_{45})(R_{14} - R_{34})\Delta_{145}}{(1 - R_{24})(R_{14} - R_{34})\Delta_{241}}, \quad (4.1b)$$

$$0 = -R_{14}\Delta_{145} - R_{34}\Delta_{345} + 2R_{24}\Delta_{245}. \quad (4.1c)$$

Definimos la función  $g = g(c, d)$  igual al lado derecho de la ecuación (4.1c), entonces

$$g(c, d) = \frac{(1+c)d}{((1+c)^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{(1-c)d}{((c-1)^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{2cd}{(c^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

Observemos que  $g$  es la misma función que fue considerada por Gidea y Llibre en [12] para el caso (iii) en la demostración del inciso (a) de su teorema 1. Por lo tanto, una familia de configuraciones centrales apiladas estará dada por los puntos de la curva  $g(c, d) = 0$ , excluyendo aquellos valores de  $c$  y  $d$  donde  $g(c, 0) = 0$  y  $g(0, d) = 0$ , es decir, los casos donde existe colisión de  $m_4$  con  $m_5$ , y cuando la configuración corresponde a un rombo con  $m_2$  en el centro.

Las configuraciones del rombo con una masa en el centro fueron estudiadas por Gidea y Llibre [12], y demostraron la existencia de esta familia. No consideraremos estas curvas, y por ende nos concentraremos en encontrar nuevas configuraciones centrales apiladas que satisfagan que  $g(c, d) = 0$ , con  $c > 0$ ,  $d > 0$ ,  $m_1 > 0$  y  $m_2 > 0$ .

Sea  $\mathcal{M}_i$  el conjunto de puntos en el plano  $(c, d)$  tales que  $m_i > 0$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$ , en este caso  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_3$ . Para demostrar el teorema 4.3 es suficiente mostrar que  $g(c, d) = 0$  interseca  $\mathcal{M}$ .

Notemos que  $r_{14} = \sqrt{(1+c)^2 + d^2} > r_{34} = \sqrt{(1-c)^2 + d^2}$  para todo  $c > 0$ , esto es,  $R_{14} - R_{34} < 0$ . También  $\Delta_{245} < 0$  y  $\Delta_{241} > 0$ . Así  $m_1 > 0$  cuando  $R_{24} > R_{45}$ . Se sigue que  $\mathcal{M}_1 = \{(c, d) \mid d > \frac{c}{\sqrt{3}}\}$ .

Ahora estudiaremos las intersecciones de  $m_1 = 0$  con  $g(c, d) = 0$ , para lo cual definimos  $\chi(c) = \frac{\sqrt{3}}{c} g\left(c, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ . Es fácil ver que  $\chi(c)$  está bien definida en el intervalo  $[1, 7]$ , más aún  $\chi(1) < 0$  y  $\chi(7) > 0$ . Entonces, las curvas  $m_1 = 0$  y  $g(c, d) = 0$  se intersecan en al menos un punto  $(c_0, \frac{c_0}{\sqrt{3}})$  con  $1 < c_0 < 7$ . Por otro lado, debido al cambio de signo de  $\chi(c)$ , la curva  $g(c, d) = 0$  interseca a la región  $\mathcal{M}_1$ .

Finalmente, tenemos que verificar que  $m_2 > 0$  en al menos uno de los puntos que pertenecen a la intersección de  $m_1 = 0$  con  $g(c, d) = 0$ . Si  $m_1 = 0$ , la ecuación (4.1b)

toma la siguiente forma:

$$m_2 = -\frac{16\sqrt{3}(1+c)c^3 \left( \frac{2c}{\sqrt{3}} - \sqrt{1+2c+\frac{4}{3}c^2} \right)}{2c(8c^3 - 3^{3/2})\sqrt{1+2c+\frac{4}{3}c^2}}.$$

Un cálculo inmediato muestra que  $m_2 > 0$  para  $c > 1$ , con lo cual queda demostrado el teorema 4.3.  $\square$

Como ya mencionamos antes, Gidea y Llibre afirmaron que no existen configuraciones de este tipo, sin embargo, hay un error en su demostración en la página 97 de [12], donde ellos suponen que

$$(1-s)t((s-1)^2+t^2)^{-3/2} - (1+s)t((1+s)^2+t^2)^{-3/2} + 2st(2t)^{-3}$$

es igual a  $g(t, s)$ , definida en la página 94 de [12], lo cual no es cierto debido a que estas dos expresiones difieren en el último sumando.

En la figura 4.3 mostramos una configuración central apilada (5, 2) con valores de masas  $m_1 = m_2 = m_3 \approx 0.378378411156148$  y  $m_4 = m_5 = 1$ . La curva que contiene a  $m_4$  representa todas sus posibles posiciones, esto es, la familia de configuraciones centrales apiladas para valores de  $m_1$  y  $m_2$  variando. Notemos que cuando el valor de  $m_1$  tiende a cero, el valor de  $m_2$  tiende a 1.28240390152325, y la configuración se aproxima a una configuración de Lagrange del problema de 3 cuerpos. Por otro lado, cuando el valor de  $m_2$  tiende a cero, el valor de  $m_1$  tiende a 0.961839715898175, y la configuración se aproxima a una configuración central del problema de 4 cuerpos, ver [18].

#### 4.2.1. Unicidad de configuraciones Euler más dos

En esta sección mostraremos analíticamente la unicidad para las configuraciones que cumplen con una simetría adicional  $r_{12} = r_{23}$  además de la simetría 1, las cuales incluyen a las configuraciones centrales Euler más dos que fueron mostradas en la sección anterior.

En el capítulo 2 definimos la aplicación de masas y para las configuraciones que cumplen con la simetría 1 tales que  $r_{12} = r_{23}$ . La aplicación de masas es  $\mu : \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \subseteq (\mathbb{R}^2)^+ \rightarrow (\mathbb{R}^3)^+ \setminus (0, 0, 0)$  donde

$$\mu(c, d) = (m_1(c, d), m_2(c, d), m_3(c, d)). \quad (4.3)$$

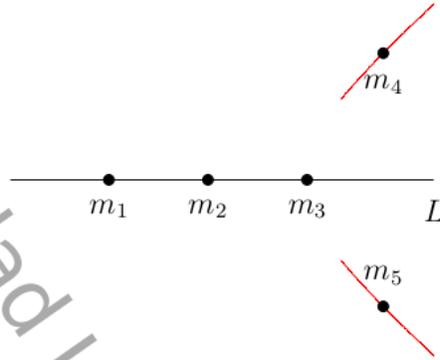


Figura 4.3: Una configuración central apilada (5, 2): “Euler más dos”, donde  $m_1 = m_2 = m_3 \approx 0.378378411156148$ , y  $m_4 = m_5 = 1$ . En ese caso,  $c \approx 1.76905011042108651$  y  $d \approx 1.21909474808793510$ .

De las ecuaciones (2.7) podemos expresar las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  en términos de  $(c, d)$  como sigue

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_3 \bar{\gamma} + \alpha (\varepsilon - \bar{\varepsilon})}{\gamma}, \\ m_2 &= \frac{-2m_3 \bar{\beta} - 2\delta \varepsilon}{\gamma + \delta - \alpha}, \\ m_3 &= \frac{(\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \alpha \beta + \gamma (\delta \varepsilon - \bar{\delta} \bar{\varepsilon})}{-\frac{7}{8} (\bar{\gamma} - \gamma)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{(c^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{8d^3}, & \beta &= \frac{1}{8} - \frac{1}{((1+c)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{((1+c)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}, & \delta &= \frac{1}{((1+c)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{8d^3} \end{aligned}$$

y  $\varepsilon = 1 + c$ . Aquí estamos usando el operador  $\bar{\alpha}(c, d) = \alpha(-c, d)$ .

Sea  $F_i$  el numerador de  $m_i$ , de tal forma que la frontera de  $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$  es determinada por las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_1 &= (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \alpha \bar{\beta} + \bar{\gamma} (\delta \varepsilon - \bar{\delta} \bar{\varepsilon}) = 0, \\ F_2 &= (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \alpha \beta \bar{\beta} + \bar{\delta} \bar{\gamma} \bar{\beta} \bar{\varepsilon} - \delta \bar{\gamma} \beta \varepsilon = 0, \\ F_3 &= (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \alpha \beta + \gamma (\delta \varepsilon - \bar{\delta} \bar{\varepsilon}) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el capítulo 2 mostramos numéricamente que los conjuntos  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  son no vacíos, esto debido a que es muy difícil verificar los signos de las expresiones algebraicas del sistema (4.4). Los conjuntos  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  están representados por las regiones azul oscuro en la figura 2.8 del apartado 2.1.2.

Las curvas  $F_i = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ , las mostramos en la figura 2.8. Las dos regiones conexas  $\mathcal{N}_1$  y  $\mathcal{N}_2$  representan los valores correspondientes  $(c, d)$  para masas positivas.

El siguiente resultado nos garantiza que dado un punto  $(c, d) \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ , la aplicación de masas tiene un sólo vector para las masas.

**Teorema 4.4.** Cada configuración central simétrica del problema plano de 5 cuerpos, donde el eje de simetría contiene los cuerpos  $m_1, m_2$  y  $m_3$ , ordenados de izquierda a derecha y  $r_{12} = r_{23}$ , tiene vector de masas  $(m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, m_5 = 1)$  único, siempre que la configuración colineal de las masas  $m_4, m_2$  y  $m_5$  esté excluida.

*Demostración.* Las ecuaciones (2.7) pueden ser reducidas de un sistema homogéneo  $Am = 0$  a un sistema no homogéneo  $Bm = b$  donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (R_{12} - R_{24})\Delta_{142} & (R_{13} - R_{34})\Delta_{143} \\ (R_{12} - R_{14})\Delta_{241} & 0 & (R_{23} - R_{34})\Delta_{243} \\ (R_{13} - R_{14})\Delta_{341} & (R_{23} - R_{24})\Delta_{342} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} (-R_{14} + R_{45})\Delta_{145} \\ (-R_{24} + R_{45})\Delta_{245} \\ (-R_{34} + R_{45})\Delta_{345} \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

Observemos que la existencia y unicidad (positiva o no) en  $(m_1, m_2, m_3)$  del sistema lineal  $Bm = b$  depende de que  $\det(B) \neq 0$ . De las simetrías del sistema tenemos que  $\Delta_{142} = -\Delta_{241}$ ,  $\Delta_{341} = -\Delta_{143}$  y  $\Delta_{243} = -\Delta_{342}$ , entonces obtenemos

$$\det(B) = [(R_{13} - R_{14})(R_{12} - R_{24})(R_{23} - R_{34}) - (R_{12} - R_{14})(R_{23} - R_{24})(R_{13} - R_{34})]\Delta_{341}\Delta_{142}\Delta_{243}. \quad (4.6)$$

Si  $r_{12} = r_{23}$ , tenemos que (4.6) toma la forma

$$\det(B) = (R_{12} - R_{24})(R_{34} - R_{14})(R_{12} - R_{13})\Delta_{341}\Delta_{142}\Delta_{243}.$$

Ya que las áreas orientadas satisfacen  $\Delta_{341}\Delta_{142}\Delta_{243} \neq 0$ , además que  $r_{12} = 1 \neq 2 = r_{13}$  y  $r_{14} \neq r_{34}$  ( $c > 0$ ), el vector de masas positivo normalizado  $(m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, m_5 = 1)$  es único siempre y cuando  $r_{12} \neq r_{24}$ . Notemos que cuando  $r_{14} = r_{34}$ ,  $c = 0$  y  $\Delta_{245} = 0$ , esto es un rombo con  $m_2$  en el centro, este caso ha sido estudiado por Gidea y Llibre en [12] como caso (i) de la demostración del inciso (a) de su teorema 1.

Cuando  $r_{12} = r_{24}$  tenemos que la configuración forma un círculo con  $m_2$  en su centro. Aplicando el corolario 3 de [4] obtenemos que la única configuración central posible con cuatro cuerpos formando un círculo es un cuadrado con cuatro masas iguales en sus vértices. El cuadrado corresponde a  $c = 0$  y  $d = 1$ , donde la línea  $m_4m_5$  pasa a través de  $m_2$ . Por lo tanto, el teorema queda demostrado.  $\square$

El caso  $c = 0$  y  $d \neq 1$  corresponde a la configuración del rombo con una masa en el centro, la cual también fue estudiada por Gidea y Llibre [12]. Ellos enunciaron en el inciso (a) de su teorema 1 que las masas están únicamente determinadas por cada configuración que pertenece a la familia, pero de acuerdo a lo enunciado por Roberts en la página 144 de [41], esta afirmación no es cierta. Roberts demostró que fijando el tamaño del rombo, existe una familia uniparamétrica de equilibrios relativos para la cual los valores de las masas  $m_1$  y  $m_2$  cambian linealmente una con respecto de la otra.

El teorema 4.4 nos dice que dada una configuración, el vector de masas correspondiente es único, responder al problema inverso del planteado en el teorema anterior es un problema aún mucho más complicado, ¿dado un conjunto de masas, la configuración correspondiente tal que el sistema sea una configuración central es único?

En general resolver el sistema de ecuaciones (2.7) para un par de variables es muy complicado debido a los exponentes fraccionarios que hay en los denominadores. En la figura (4.4) mostramos evidencia numérica de que el problema inverso del teorema 4.4 también es cierto, dado un conjunto de masas  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  con  $m_1 = m_3$  y  $0 < m_1 < 0.96183\dots$ , y  $m_4 = m_5 = 1$ , existe una única configuración central apilada con  $c > 1$  del tipo Euler más dos.

Se han realizado dos parametrizaciones correspondientes a los casos  $b > c$  y  $b < c$ , lo cual para las configuraciones Euler más dos corresponde a  $b = 1$ , es decir para  $1 > c$  y  $1 < c$ . En resumen, podemos decir que para cualquier vector de masas  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  con  $m_1 = m_3$  y  $0 < m_1 < 0.96183$ , y  $m_4 = m_5 = 1$ , existen dos configuraciones centrales apiladas del tipo Euler más dos, una corresponde a una configuración del rombo con una masa en el centro ( $1 > c$ ) mientras que la otra corresponde a las mostradas en la sección 4.2 para ( $1 < c$ ).

### 4.3. Configuración central apilada: Lagrange más Euler en uno

En esta sección mostramos la existencia de una familia de configuraciones centrales apiladas (5, 2) del problema plano de 5 cuerpos, donde 3 cuerpos forman una configuración central de Euler, mientras que 3 cuerpos forman una configuración cen-

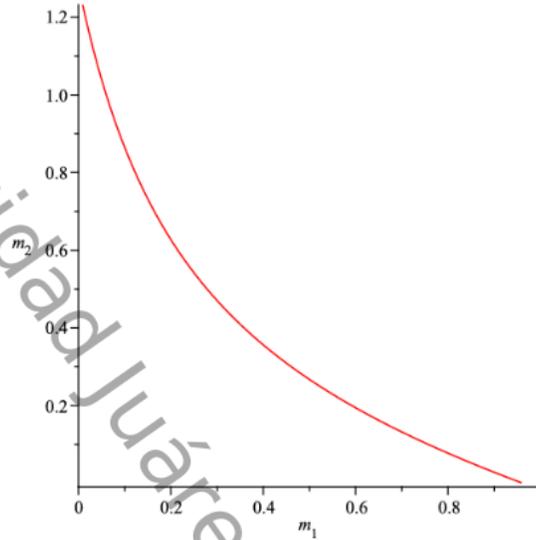


Figura 4.4: Relación de  $m_1$  con  $m_2$  en todas las configuraciones centrales Euler más dos,  $\lim_{m_1 \rightarrow 0} m_2 \approx 1.28240$  y  $\lim_{m_2 \rightarrow 0} m_1 \approx 0.96183$ .

tral de Lagrange; evidentemente uno de los cuerpos forma parte de las configuraciones de Euler y Lagrange. Por lo que el número de configuración central apilada para esta configuración es dos. Debido a las formas obtenidas después de remover los dos subconjuntos diferentes de dos masas, hemos llamado a esta configuración central apilada de 5 cuerpos *Lagrange más Euler en uno*. Hasta donde llega nuestro conocimiento, esta es la primera vez que este tipo de configuraciones centrales son mostradas en el plano. Para un fenómeno similar en el espacio, ver [6].

**Teorema 4.5.** Consideremos una configuración central de 5 cuerpos con tres masas  $m_2, m_4, m_5$  en configuración de triángulo equilátero y las masas  $m_1$  y  $m_3$  sobre la línea del bisector perpendicular al triángulo, ver la figura 4.5. Entonces existe al menos una familia de configuraciones centrales de 5 cuerpos tal que las masas  $m_1, m_2$  y  $m_3$  forman una configuración central de Euler.

*Demostración.* Este problema cumple con la simetría 1 del capítulo 2, entonces por el teorema 2.2 tenemos que  $m_4 = m_5$  y las ecuaciones 2.1 son reducidas a 2.4. Además buscamos que  $m_1, m_2$  y  $m_3$  formen una configuración de Euler, entonces éstas deben satisfacer la ecuación cuántica de Euler (1.10).

Podemos resolver las ecuaciones (2.4) para las masas

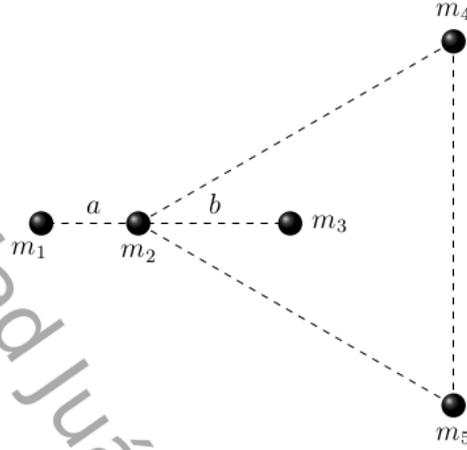


Figura 4.5: Configuración central: Lagrange más Euler en uno.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{(R_{23} - R_{34})\Delta_{243}}{(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}} m_3, \\
 m_2 &= -\frac{(R_{13} - R_{34})(R_{12} - R_{14})(R_{34} - R_{45})\Delta_{143}\Delta_{241}\Delta_{345} + (R_{14} - R_{45})(R_{23} - R_{34})(R_{13} - R_{14})\Delta_{145}\Delta_{243}\Delta_{341}}{(R_{12} - R_{45})\Delta_{142}(R_{23} - R_{34})\Delta_{243}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + (R_{13} - R_{34})\Delta_{143}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{23} - R_{45})\Delta_{342}}, \\
 m_3 &= \frac{(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}((R_{12} - R_{45})\Delta_{142}(R_{34} - R_{45})\Delta_{345} - (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}(R_{23} - R_{45})\Delta_{342})}{(R_{12} - R_{45})\Delta_{142}(R_{23} - R_{34})\Delta_{243}(R_{13} - R_{14})\Delta_{341} + (R_{13} - R_{34})\Delta_{143}(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}(R_{23} - R_{45})\Delta_{342}}.
 \end{aligned}$$

Sea  $r_{12} = a$ ,  $r_{23} = b$  y  $r_{24} = r_{45} = 1$ , entonces usando las expresiones de las distancias relativas dadas en (2.5), podemos expresar las masas en función de las variables  $a$  y  $b$ , es decir,  $m_i = m_i(a, b)$  para  $i = 1, 2, 3$ . Luego, en este caso la ecuación cuántica de Euler toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 E &= - (m_2 + m_3) - (2m_2 + 3m_3)\alpha - (m_2 + 3m_3)\alpha^2 + (3m_1 + m_2)\alpha^3 \\
 &\quad + (2m_2 + 3m_1)\alpha^4 + (m_1 + m_2)\alpha^5,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde  $\alpha = \frac{b}{a}$ , de tal forma que  $E = E(a, b)$ .

Sea  $\mathcal{M}$  la región en el plano  $(a, b)$  donde las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  son positivas. Luego, para demostrar el teorema debemos probar que existe intersección de la curva  $E(a, b) = 0$  con  $\mathcal{M}$ . Para hacer esto mostraremos que existe al menos un punto  $(a_0, b_0) \in \partial\mathcal{M}$  que está en la intersección de las curvas  $E(a, b) = 0$  y  $m_1(a, b) = 0$ , además que la intersección es transversal. La figura 4.6 proporciona una evidencia numérica de que el conjunto  $\mathcal{M}$  es no vacío, también fue mostrado en [21]. A partir de la ecuación  $f_{24}$  del sistema de ecuaciones (2.4) obtenemos

$$m_1 = \frac{m_3(R_{34} - R_{23})\Delta_{243}}{(R_{12} - R_{14})\Delta_{241}}, \tag{4.8}$$

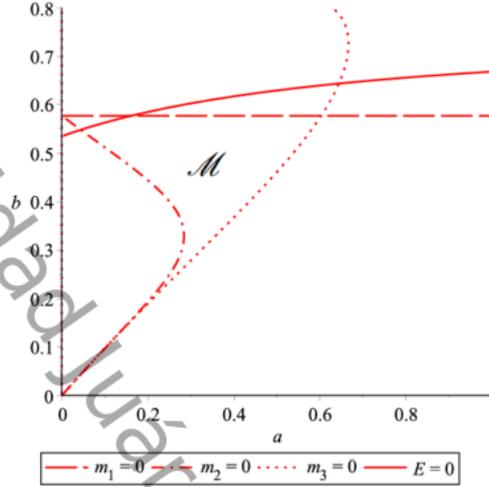


Figura 4.6: Región de masas positivas  $\mathcal{M}$  con  $E = 0$  en el plano  $(a, b)$ .

de donde  $\Delta_{243} < 0$ ,  $\Delta_{241} > 0$  y  $R_{12} - R_{14} > 0$ . Entonces tenemos que  $m_1 = 0$  cuando  $m_3 = 0$  o  $r_{23} = r_{34}$ , lo cual implica que  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Además  $m_1 > 0$  cuando  $m_3 > 0$  y  $b < \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Por continuidad existirán puntos en el plano  $(a, b)$  tales que  $m_1 > 0$  para cualquier bola abierta centrada en algún punto de la recta  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , si en este punto  $m_3 > 0$ . Sea  $L$  el segmento de recta donde  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$  con  $a \in (0, \frac{1}{3})$ . Mostraremos que  $m_3 > 0$  para toda  $a \in L$ .

Como consecuencia de lo dicho anteriormente, para demostrar que  $L$  está en  $\partial\mathcal{M}$  debemos probar que  $m_2$  y  $m_3$  son positivas para toda  $a \in L$ . De la ecuación  $f_{34} = 0$  del sistema de ecuaciones (2.4), tenemos que  $m_2 = 1$  siempre que  $m_1 = 0$  y  $r_{23} = r_{34}$ . Falta demostrar que  $m_3 > 0$  en  $L$ , recta en la cual se cumple  $r_{23} = r_{34}$ ,  $m_1 = 0$  y  $m_2 = 1$ . Sustituyendo ésto en la ecuación  $f_{14}$  del sistema (2.4) obtenemos

$$m_3(m_1 = 0, m_2 = 1) = \frac{(R_{12} - R_{45})\Delta_{142} + (R_{14} - R_{45})\Delta_{145}}{(R_{34} - R_{13})\Delta_{143}}, \quad (4.9)$$

$$m_3\left(a, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{(3a + \sqrt{3})^2 N(a)}{27a^3 (\sqrt{3}a^2 + 3a + \sqrt{3}) (a^2 + \sqrt{3}a + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.10)$$

donde

$$N(a) = -2a^3 - \sqrt{3}a^2 + (3a^5 + 4\sqrt{3}a^4 + 6a^3 - a^2 + \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}a - 1) \sqrt{a^2 + a\sqrt{3} + 1}.$$

Un cálculo inmediato nos permite verificar que  $\lim_{a \rightarrow 0^+} m_3(a, \frac{\sqrt{3}}{3}) = +\infty$ , además dado que  $N(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27} - \frac{\sqrt{3}}{9} - \left(\frac{71+14\sqrt{3}}{81}\right) \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}} < 0$ , entonces  $m_3(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$ . Ahora, para garantizar que  $m_3(a, \frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$  para  $a \in (0, \frac{1}{3})$ , demostraremos que  $m_3(a, \frac{\sqrt{3}}{3})$  no se anula para  $a \in (0, \frac{1}{3})$ .

Ahora hacemos manipulación algebraica en la función numerador  $N(a)$  de (4.10), de tal forma que obtenemos un polinomio  $P = P(a)$  de grado 12 con coeficientes  $c_n$  correspondientes a los términos  $a^n$ , respectivamente. Estos coeficientes son  $c_{12} = 9$ ,  $c_{11} = 33\sqrt{3}$ ,  $c_{10} = 165$ ,  $c_9 = (162\sqrt{3} - 6)$ ,  $c_8 = (306 - 20\sqrt{3})$ ,  $c_7 = (126\sqrt{3} - 90)$ ,  $c_6 = (96 - 78\sqrt{3})$ ,  $c_5 = (14\sqrt{3} - 126)$ ,  $c_4 = (12 - 42\sqrt{3})$ ,  $c_3 = (9\sqrt{3} - 24)$ ,  $c_2 = (12 - 2\sqrt{3})$ ,  $c_1 = 3\sqrt{3}$  y  $c_0 = 1$ . Ahora vamos aplicar el teorema de Sturm para demostrar que  $P(a)$  no tiene ceros cuando  $a \in (0, \frac{1}{3})$ . Sea  $R_1$  el residuo obtenido de dividir  $P$  por  $P'$  y  $T_1 = -R_1$ . Sea  $R_2$  el residuo obtenido de dividir  $P'$  por  $T_1$  y  $T_2 = -R_2$ , finalmente  $R_k$  el residuo obtenido de dividir  $T_{k-2}$  por  $T_{k-1}$  con  $T_k = -R_k$ .

Evaluamos las sucesiones en los puntos  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{3}$  y obtenemos la tabla 4.1. Notemos que las sucesiones de Sturm asociadas a  $a = 0$  y  $a = \frac{1}{3}$  tienen seis cambios de signos, y el teorema de Sturm nos garantiza que no hay raíces de  $P(a)$  cuando  $a \in (0, \frac{1}{3})$  y por lo tanto  $m_3 > 0$  para todo  $a \in L$ .

Tabla 4.1:

$a$	0	$\frac{1}{3}$
$P(a)$	1	$\frac{76693}{59049} + \frac{37739}{59049}\sqrt{3}$
$P'(a)$	$3\sqrt{3}$	$-\frac{14512}{6561} - \frac{14927}{19683}\sqrt{3}$
$T_1$	$-\frac{37}{48}$	$-\frac{4049605}{2834352} - \frac{507703}{708588}\sqrt{3}$
$T_2$	$\frac{287712+142272\sqrt{3}}{121}$	$\frac{218793536}{29403} + \frac{376399856}{88209}\sqrt{3}$
$T_3$	$-\frac{121(-775+717\sqrt{3})}{16(1233+626\sqrt{3})^2}$	$-\frac{121(3815527+5783121\sqrt{3})}{209952(1233+626\sqrt{3})^2}$
$T_4$	$-\frac{32(47985538239+28537522888\sqrt{3})}{5929(395+58\sqrt{3})^2}$	$-\frac{16(2725693418250549+1576558677574052\sqrt{3})}{38900169(395+58\sqrt{3})^2}$
$T_5$	$T_5(0) > 0$	$T_5(\frac{1}{3}) > 0$
$T_6$	$T_6(0) > 0$	$T_6(\frac{1}{3}) > 0$
$T_7$	$T_7(0) > 0$	$T_7(\frac{1}{3}) > 0$
$T_8$	$T_8(0) > 0$	$T_8(\frac{1}{3}) > 0$
$T_9$	$T_9(0) < 0$	$T_9(\frac{1}{3}) > 0$
$T_{10}$	$T_{10}(0) < 0$	$T_{10}(\frac{1}{3}) < 0$
$T_{11}$	$T_{11} > 0$	$T_{11} > 0$

Luego, hemos demostrado que  $m_2$  y  $m_3$  son positivas en el segmento de recta  $L$ , entonces por continuidad existe una vecindad tubular centrada en  $L$  donde  $m_2$  y  $m_3$  son positivas, por lo tanto  $L \subset \partial\mathcal{M}$ .

Para completar la demostración del teorema falta mostrar que la curva  $E(a, b) = 0$  interseca a  $L$  y que la intersección es transversal. La expresión de  $E$  evaluada en  $L$  está dada por

$$E\left(a, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = - (1 + m_3) - (2 + 3m_3) \left(\frac{b}{a}\right) - (1 + 3m_3) \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^5. \quad (4.11)$$

Un cálculo directo muestra que  $\lim_{a \rightarrow 0^+} E(a, \frac{\sqrt{3}}{3}) = +\infty$  y  $E(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) < 0$ , lo cual implica que  $E(a, \frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$  tiene al menos una solución para  $a \in (0, \frac{1}{3})$ . Entonces podemos afirmar que existe al menos un punto  $(a_0, \frac{\sqrt{3}}{3})$  que está en la intersección de la curva  $E(a, b) = 0$  y el segmento de recta  $L$ . Ahora mostraremos que esta intersección es transversal, para lo cual es suficiente verificar que  $\frac{\partial E}{\partial a} \Big|_{b=\frac{\sqrt{3}}{3}}$  no se anula para valores de  $a \in (0, \frac{1}{3})$ . A partir de la diferencial

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial a} + \frac{\partial E}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial a} + \frac{\partial E}{\partial m_3} \frac{\partial m_3}{\partial a} + \frac{\partial E}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a},$$

usando (4.11) y las expresiones  $m_i = m_i(a, b)$  obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial a} \Big|_{b=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{g(a)}{27a^4(1-3\sqrt{3})(a^2+\sqrt{3}a+1)^{\frac{5}{2}}(-1+3\sqrt{3}+(9-\sqrt{3})a+(-1+3\sqrt{3})a^2)}$$

donde

$$\begin{aligned} g(a) = & 738 - 810\sqrt{3} - 12825a + 3895\sqrt{3}a + 28290a^2 - 31050\sqrt{3}a^2 \\ & - 136080a^3 + 41328\sqrt{3}a^3 + 120294a^4 - 132030\sqrt{3}a^4 - 264060a^5 \\ & + 80196\sqrt{3}a^5 + 109962a^6 - 120690\sqrt{3}a^6 - 109215a^7 + 33169\sqrt{3}a^7 \\ & + 17958a^8 - 19710\sqrt{3}a^8 - 4860a^9 + 1476\sqrt{3}a^9 + (-738 + 810\sqrt{3} \\ & + 16056a - 6048\sqrt{3}a - 60462a^2 + 47070\sqrt{3}a^2 + 244584a^3 - 114120\sqrt{3}a^3 \\ & - 416178a^4 + 279306\sqrt{3}a^4 + 662688a^5 - 345384\sqrt{3}a^5 - 599922a^6 \\ & + 369090\sqrt{3}a^6 + 430344a^7 - 240840\sqrt{3}a^7 - 193518a^8 + 112086\sqrt{3}a^8 \\ & + 53208a^9 - 31392\sqrt{3}a^9 - 7074a^{10} + 3906\sqrt{3}a^{10})\sqrt{a^2+\sqrt{3}a+1}. \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de  $\frac{\partial E}{\partial a}$  vamos a estudiar las raíces de  $g(a)$ , para lo cual tomamos  $g(a) = 0$  y agrupamos del lado derecho de la ecuación los términos con

factor  $\sqrt{a^2 + \sqrt{3}a + 1}$ , luego elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y simplificamos, de tal forma que al reagrupar obtenemos un polinomio de grado 21 dado por

$$\begin{aligned}
 G(a) = & (95811984 - 55262088\sqrt{3})a^{21} + (-1654275960 + 955606896\sqrt{3})a^{20} \\
 & + (13827401136 - 7981918200\sqrt{3})a^{19} + (-74240855856 + 42858828864\sqrt{3})a^{18} \\
 & + (287097440688 - 165799426824\sqrt{3})a^{17} + (-850259626344 + 490727960496\sqrt{3})a^{16} \\
 & + (1998290401920 - 1154130993504\sqrt{3})a^{15} + (-3821426402616 + 2205573951216\sqrt{3})a^{14} \\
 & + (6032096619468 - 3483558597978\sqrt{3})a^{13} + (-7949089483200 + 4588574039424\sqrt{3})a^{12} \\
 & + (8791043641344 - 5075943572592\sqrt{3})a^{11} + (-8185733091144 + 4726144576368\sqrt{3})a^{10} \\
 & + (6414997379184 - 3703154535144\sqrt{3})a^9 + (-4215550581864 + 2434574823792\sqrt{3})a^8 \\
 & + (2309521611144 - 1332747953532\sqrt{3})a^7 + (-1041812321472 + 601941337920\sqrt{3})a^6 \\
 & + (381654231696 - 220106238408\sqrt{3})a^5 + (-110382563376 + 63829686240\sqrt{3})a^4 \\
 & + (24409357632 - 14061676464\sqrt{3})a^3 + (-3850279272 + 2229735792\sqrt{3})a^2 \\
 & + (390205068 - 224358282\sqrt{3})a - 18819216 + 10924992\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Luego, los ceros de  $g(a)$  están incluidos en las raíces de  $G(a) = 0$ . Notemos que el polinomio  $G(a)$  sólo tiene dos cambios de signos en los coeficientes, entonces la regla de los signos de Descartes garantiza que  $G(a)$  tiene a lo más dos raíces reales positivas. Ya que  $G(0) = -18819216 + 10924992\sqrt{3} > 0$ ,  $G(\frac{1}{3}) = \frac{206991159238864}{43046721} + \frac{119798174664376\sqrt{3}}{43046721} > 0$  y  $G(1) = -594199056 - 343061016\sqrt{3} < 0$ , entonces las raíces de  $G(a)$  deben ser mayores que  $\frac{1}{3}$ , pues en caso contrario habría más de dos raíces de  $G(a)$ . Por lo tanto,  $G(a)$  no tiene raíces para valores de  $a \in (0, \frac{1}{3})$ , y como consecuencia  $\frac{\partial E}{\partial a} \Big|_{b=\frac{\sqrt{3}}{3}} \neq 0$  para toda  $a \in (0, \frac{1}{3})$ . Luego, podemos concluir que la curvas  $E(a, b) = 0$  y el segmento de recta  $L$  se intersectan transversalmente en el punto  $(a_0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ .

□

Numéricamente, observamos que el teorema 4.5 es válido para cualquier valor fijo  $0.043964649299756 < a < 0.162031454283589$ . Un ejemplo de configuración central apilada en el problema de 5 cuerpos del tipo Lagrange más Euler en uno es dado por  $m_1 = 0.117224179225200$ ,  $m_2 = 0.890322344850114$ ,  $m_3 = 38.7407741323209$  y  $m_4 = m_5 = 1$ . En ese caso  $a = \frac{1}{8}$  y  $b = 0.569110604510880$ .

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Conclusión

En el capítulo 2, hemos demostrado, de manera numérica, la existencia de varias familias de configuraciones centrales de 5 cuerpos no colineales en el plano que contienen un eje de simetría, donde se le ha pedido además que cumplan un par de distancias mutuas iguales. Varias de estas familias que hemos mostrado son nuevas.

En el capítulo 3 damos una prueba analítica de la existencia de las familias más interesantes, hablando de geometría, que fueron encontradas en el capítulo 2. Estas familias son aquellas donde cuatro masas de los 5 cuerpos forman un rombo y en particular para cuando el rombo es un cuadrado.

El último capítulo muestra la existencia de dos familias de configuraciones centrales apiladas, una de estas familias había sido señalada erróneamente como inexistente por Gidea Y Llibre en [12]. En este trabajo hemos demostrado de manera analítica lo contrario y también ha sido publicado por los autores en [7]. Además, se demuestra la existencia de una familia de configuraciones centrales apiladas muy especial debido a que consiste en una configuración central apilada que contiene a las dos primeras configuraciones centrales que fueron descubiertas; la configuración central de Euler y la de Lagrange. Este resultado también lo hemos publicado en [8].

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Apéndice A

### Regiones definidas por el teorema del bisector perpendicular

Tabla A.1:  $r_{12} = r_{23}$  con  $b > c$

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34}$	$d > \sqrt{1-c^2} \vee d > \frac{1+c}{\sqrt{3}}$ $d < \sqrt{4-(1-c)^2}$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$d > \frac{c}{\sqrt{3}}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$\frac{1-c}{\sqrt{3}} < d < \sqrt{4-(1+c)^2}$

Tabla A.2:  $r_{12} = r_{23}$  con  $b < c$

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34} \vee r_{15} > r_{45}$	$c > 1$ $\sqrt{4-(c-1)^2} > d \vee \frac{1+c}{\sqrt{3}} > d$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \vee r_{45} > r_{25}$	$\sqrt{(c-1)^2 + d^2} > 1 \vee d > c/\sqrt{3}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$\frac{c-1}{\sqrt{3}} < d$

Tabla A.3:  $r_{12} = r_{24}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$	$c < \frac{1}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$c < \frac{\sqrt{3}}{2}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$\sqrt{2+2c} - 1 < b < \sqrt{3}\sqrt{1-c^2} + c$

Tabla A.4:  $r_{12} = r_{24}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$	$c < \frac{1}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \vee r_{45} > r_{25}$	$\frac{1}{2c} > b \vee c < 1$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$b > c - \sqrt{3}\sqrt{1-c^2}$

Tabla A.5:  $r_{12} = r_{34}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$	$2c > b \vee c + \sqrt{1 - \frac{(1+c)^2}{3}} > b$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$b < c + \frac{\sqrt{-3c^2+9}}{3}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 2c + 3} + \frac{c}{2} - \frac{1}{2} < b < \frac{\sqrt{3}}{2} + c$

Tabla A.6:  $r_{12} = r_{34}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \quad \vee \quad r_{45} > r_{25}$	$1 > b \vee b > c - \frac{\sqrt{-3c^2+9}}{3}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$b > c - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.7:  $r_{12} = r_{45}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \quad \vee \quad r_{45} > r_{15}$	$c > \frac{\sqrt{3}}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \quad \vee \quad r_{45} > r_{25}$	$\frac{4c^2+1}{8c} > b$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$b > c - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.8:  $r_{13} = r_{24}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \quad \vee \quad r_{45} > r_{25}$	$b < c - 1 + \sqrt{c^2 - 2c} \quad \vee \quad b > \frac{2c}{\sqrt{3}} - 1$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$b > -\frac{3}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3 + 6c + 9c^2}$

Tabla A.9:  $r_{13} = r_{34}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \quad \vee \quad r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34} \quad \vee \quad r_{15} > r_{45}$	$b < c$ $c > b + \frac{1}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \quad \vee \quad r_{45} > r_{25}$	$0 < b < 1$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$c < b + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.10:  $r_{13} = r_{45}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \quad \vee \quad r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$b > c + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $b < c + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$c < \frac{\sqrt{3}}{2}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, \quad r_{13} > r_{14}$	$c + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < b < c + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.11:  $r_{13} = r_{45}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \quad \vee \quad r_{45} > r_{15}$	$b > 1 - \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}}$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \quad \vee \quad r_{45} > r_{25}$	$\frac{c^2 + \frac{1}{4}}{2c} > b \quad \vee \quad c < \frac{\sqrt{3}}{2}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$b > c - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.12:  $r_{14} = r_{23}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Restricciones en las distancias relativas	Restricciones en los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$c < \frac{1-2a^2}{2a} \vee c < \frac{\sqrt{3}}{2} - a$ $c > \frac{1-2a^2-2a}{2(1+a)}$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$c < \frac{-3a + \sqrt{-3a^2 + 12}}{4}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$c < \frac{-3a + 1 + \sqrt{-3a^2 - 6a + 9}}{4}$

Tabla A.13:  $r_{14} = r_{34}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - c > a$ $a > \frac{1-2c}{2}$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$\sqrt{1 - \frac{c^2}{3}} - c > a$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$\frac{1-2c}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2} - c$

Tabla A.14:  $r_{14} = r_{45}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} > a$ $b > \frac{1-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$1 - a < b < \sqrt{3} - a$

Tabla A.15:  $r_{14} = r_{45}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$ $r_{13} > r_{34} \vee r_{15} > r_{45}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} > a$ $b > \frac{1-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}}$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$0 < b < \frac{\sqrt{3}}{2} - a$

Tabla A.16:  $r_{23} = r_{24}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$1 > a \vee \sqrt{3(1-c^2)} - c > a$ $a > \sqrt{2-2c} - 1$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} > c$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$1 > c$

Tabla A.17:  $r_{23} = r_{34}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$	$\sqrt{2c} > a \vee \sqrt{3(2c-c^2)} - c > a$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$\frac{3}{2} > c$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$c > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, a > \frac{2c-1}{2-2c}$

Tabla A.18:  $r_{23} = r_{34}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$	$\sqrt{2c} > a \vee \sqrt{3(2c - c^2)} - c > a$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \vee r_{45} > r_{25}$	$\frac{3}{2} > c$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{35}$	$c < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.19:  $r_{23} = r_{45}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}} > a \vee \frac{\sqrt{3}}{2} - c > a$ $a > \sqrt{(1-c)^2 + \frac{1}{4}} - 1$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} > c$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < c < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabla A.20:  $r_{24} = r_{34}$  con  $b > c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{14}$ $r_{13} > r_{34}$	$1 > a \vee \sqrt{3(1-c^2)} - c > a$ $a > 1 - 2c$
$m_2, m_4$	$r_{45} > r_{25}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} > c$
$m_3, m_4$	$r_{45} > r_{34}, r_{13} > r_{14}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} > c, a > \frac{1-4c^2}{2c}$

Tabla A.21:  $r_{24} = r_{45}$  con  $b < c$ 

Teorema del bisector aplicado a	Condiciones en las distancias relativas	Condiciones en términos de los parámetros
$m_1, m_4$	$r_{24} > r_{12} \vee r_{45} > r_{15}$	$1 > a$
$m_2, m_4$	$r_{34} > r_{23} \vee r_{45} > r_{25}$	$b < \frac{1}{\sqrt{3}}$

## Apéndice B

### Gráficas de las regiones definidas por el teorema del bisector perpendicular

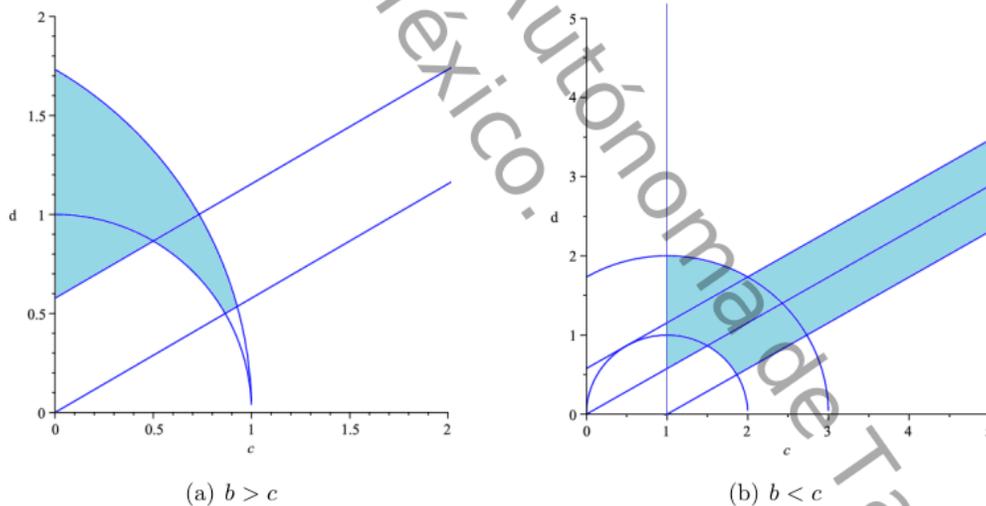


Figura B.1: Regiones para  $r_{12} = r_{23}$ .

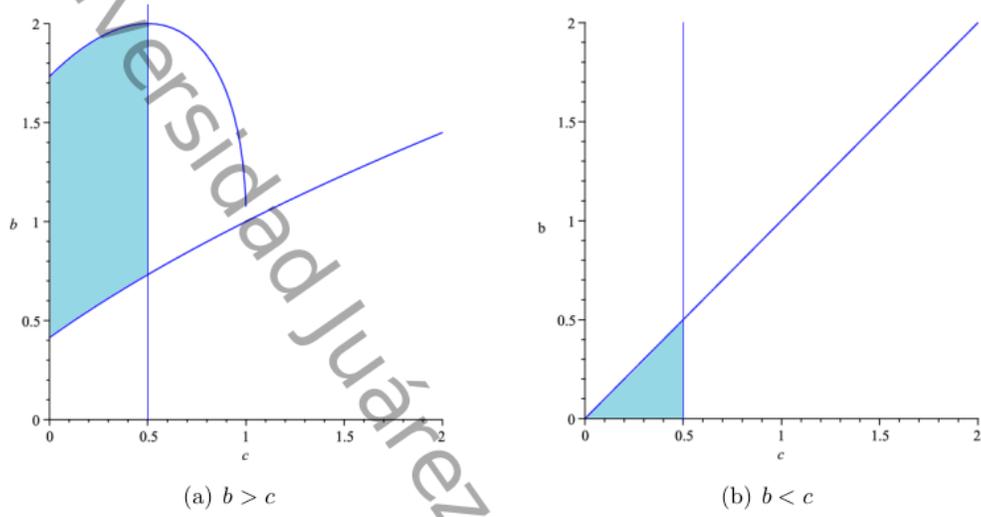


Figura B.2: Regiones para  $r_{12} = r_{24}$

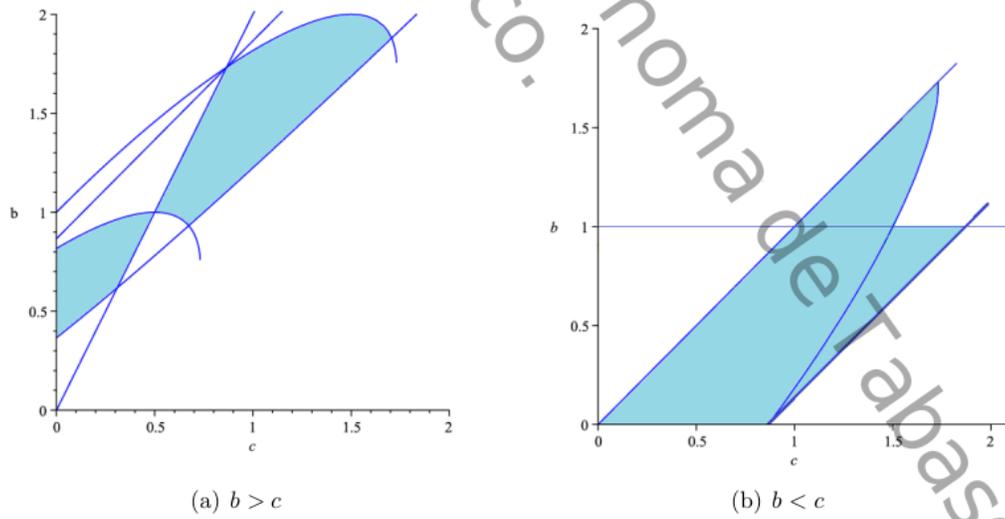


Figura B.3: Regiones para  $r_{12} = r_{34}$

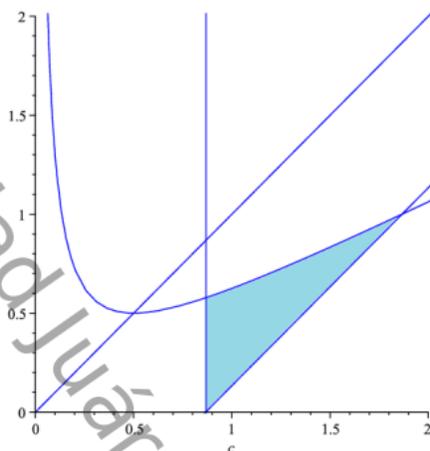


Figura B.4: Región para  $r_{12} = r_{45}$  con  $b < c$ .

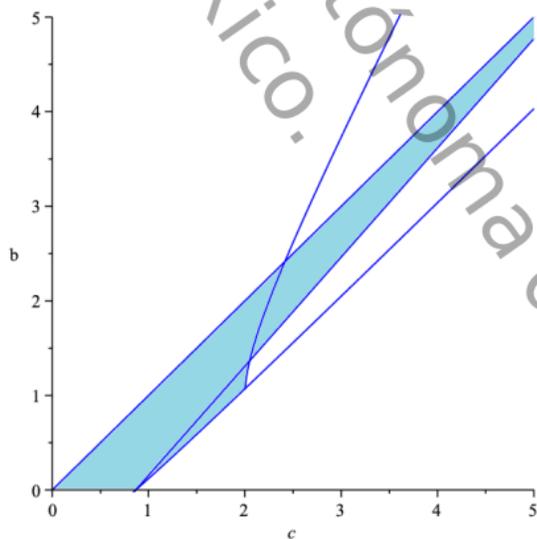


Figura B.5: Región para  $r_{13} = r_{24}$  con  $b < c$ .

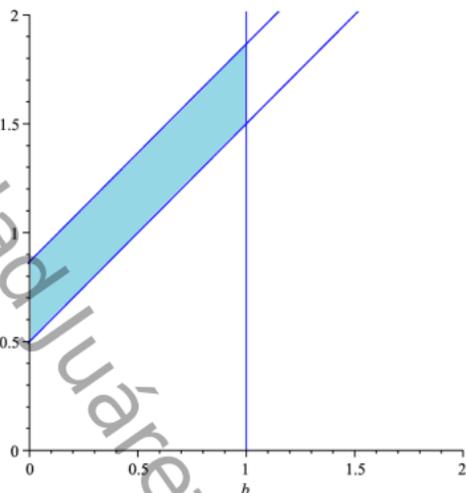
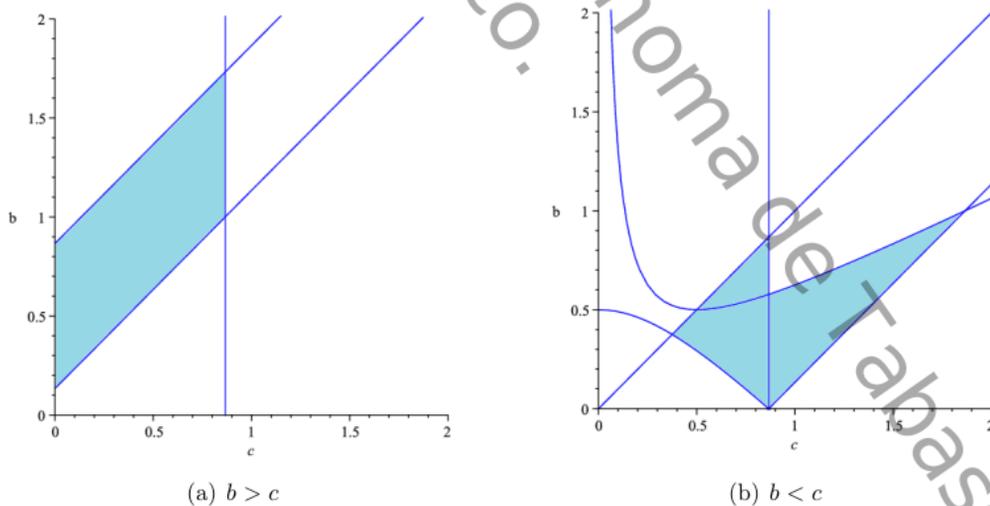


Figura B.6: Región para  $r_{13} = r_{34}$  con  $b < c$ .



(a)  $b > c$

(b)  $b < c$

Figura B.7: Regiones para  $r_{13} = r_{45}$

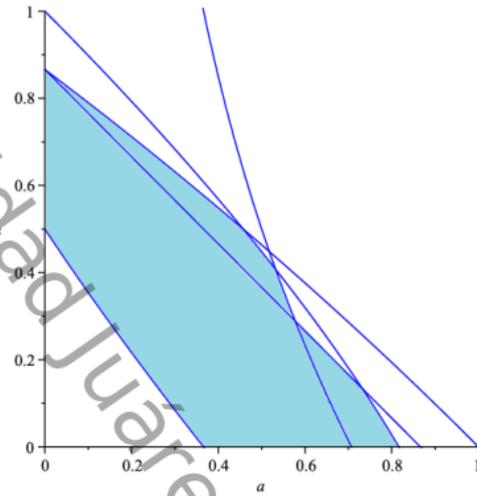


Figura B.8: Región para  $r_{14} = r_{23}$  con  $b > c$ .

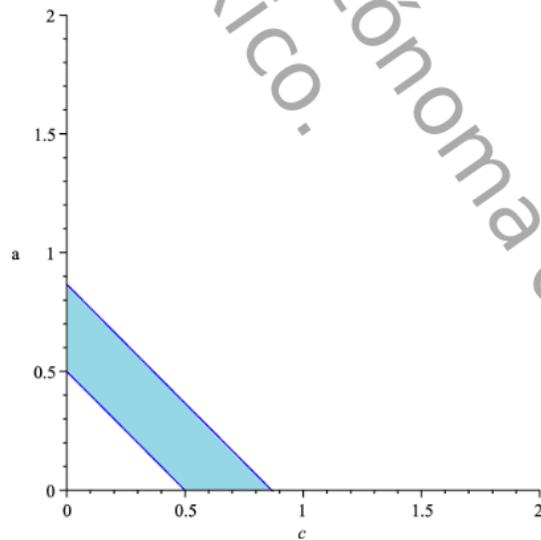
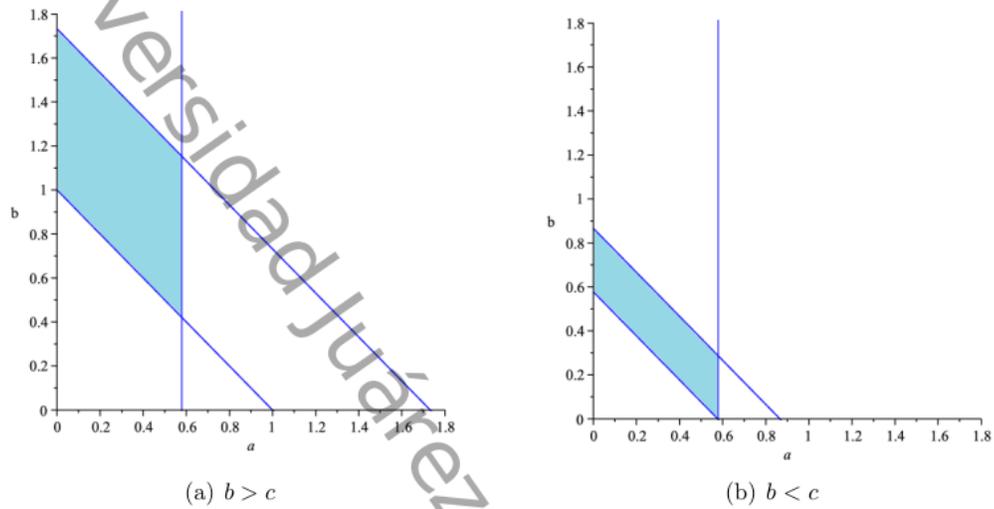
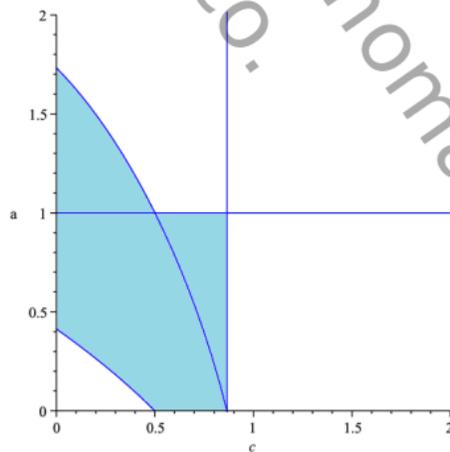


Figura B.9: Región para  $r_{14} = r_{34}$  con  $b > c$ .

Figura B.10: Regiones para  $r_{14} = r_{45}$ ,Figura B.11: Región para  $r_{23} = r_{24}$  con  $b > c$ .

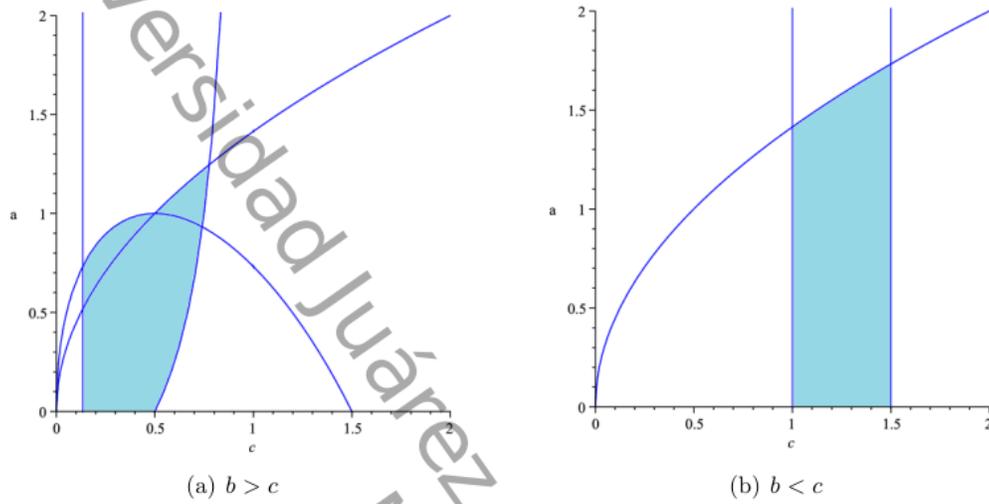


Figura B.12: Regiones para  $r_{23} = r_{34}$ .

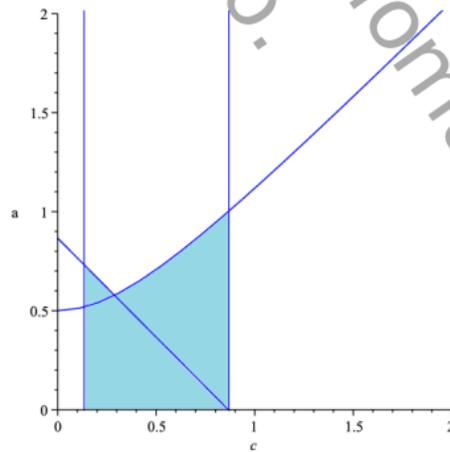
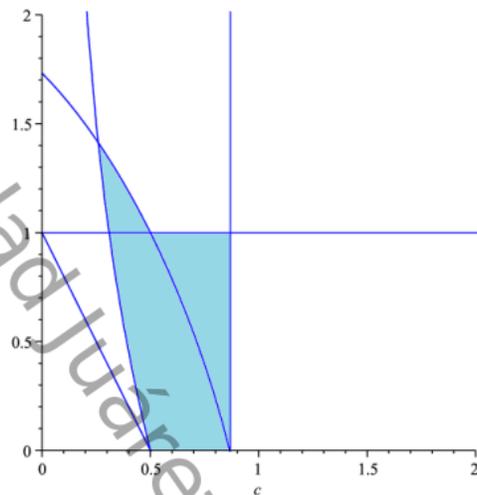
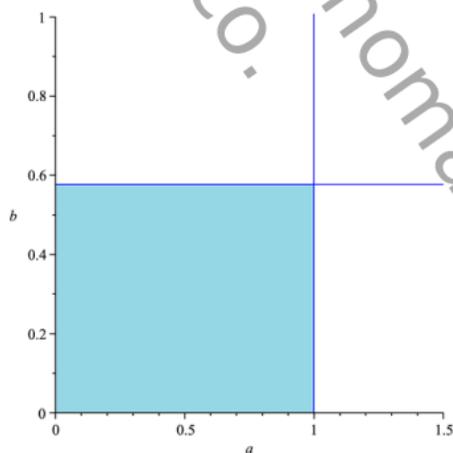


Figura B.13: Región para  $r_{23} = r_{45}$  con  $b > c$ .

Figura B.14: Región para  $r_{24} = r_{34}$  con  $b > c$ .Figura B.15: Región para  $r_{24} = r_{45}$  con  $b < c$ .

## Apéndice C

### Complemento de la tabla [4.1](#)

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

$$T_5(0) = \frac{160083 (38088694690937439772147600 + 21991131762569516340342619\sqrt{3})}{32 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2}$$

$$T_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5929 (93723017599343542444332040678 + 54111272353301014131689673097\sqrt{3})}{1728 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2}$$

$$T_6(0) = \frac{64 (+227636518603645988463689318022148808827757796343484956701427044147 + 1314260052932055944120642378837965897468904712498968422300382609899\sqrt{3})}{5029 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2}$$

$$T_6\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32 (183526876534474667469115250234645348849408360274960721362392698999657 + 105959291570710291414908326304020908921721092728256672190843436691649\sqrt{3})}{1440747 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2}$$

$$T_7(0) = \frac{160083 (\eta_1 + \eta_2\sqrt{3})}{32 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2 (43 - \eta_4\sqrt{3})^2}$$

$$T_7\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5929 (\eta_5 + \eta_6\sqrt{3})}{576 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2 (\eta_3 + \eta_4\sqrt{3})^2}$$

$$T_8(0) = \frac{64 (\eta_7 + \eta_8\sqrt{3})}{148225 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2 (\eta_9 + \eta_{10}\sqrt{3})^2}$$

$$T_8\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{128 (\eta_{11} + \eta_{12}\sqrt{3})}{4002075 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2 (\eta_9 + \eta_{10}\sqrt{3})^2}$$

$$T_9(0) = -\frac{4002075 (\eta_{13} + \eta_{14}\sqrt{3})}{1024 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2 (\eta_{15} + \eta_{16}\sqrt{3})^2 (\eta_{17} + \eta_{18}\sqrt{3})^2}$$

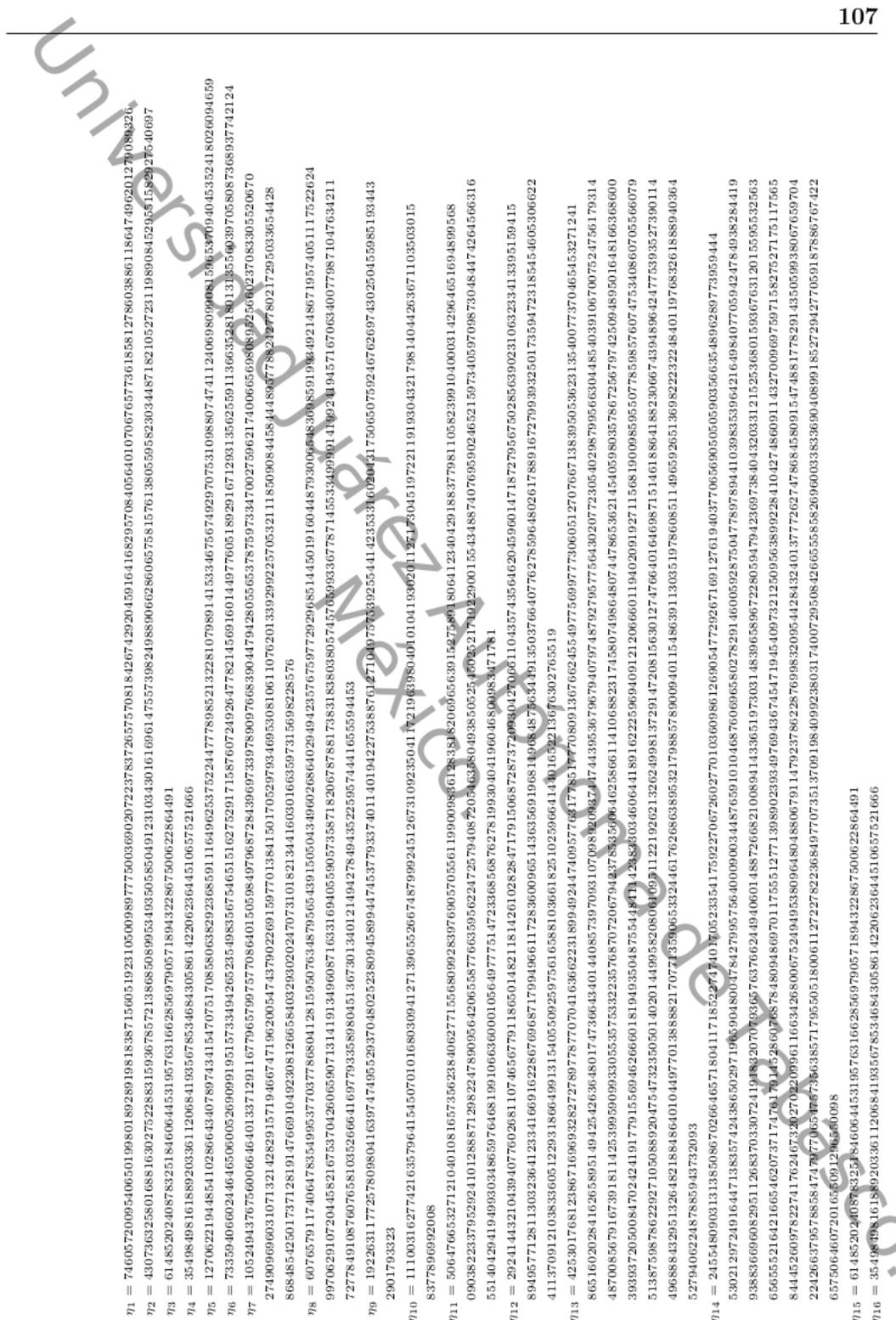
$$T_9\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{444675 (\eta_{19} + \eta_{20}\sqrt{3})}{512 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2 (\eta_{15} + \eta_{16}\sqrt{3})^2 (\eta_{17} + \eta_{18}\sqrt{3})^2}$$

$$T_{10}(0) = -\frac{519168 (\eta_{21} + \eta_{22}\sqrt{3})}{148225 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2 (\eta_{23} + \eta_{24}\sqrt{3})^2 (\eta_{25} + \eta_{26}\sqrt{3})^2}$$

$$T_{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3072 (\eta_{27} + \eta_{28}\sqrt{3})}{148225 (395 + 58\sqrt{3})^2 (49826514356798896898175731 + 287660489170931485881887414\sqrt{3})^2 (\eta_{23} + \eta_{24}\sqrt{3})^2 (\eta_{25} + \eta_{26}\sqrt{3})^2}$$

$$T_{11} = \frac{97383825 (\eta_{29} + \eta_{30}\sqrt{3})}{4096 (1233 + 626\sqrt{3})^2 (4837645588527 + 2801120472248\sqrt{3})^2 (\eta_{15} + \eta_{16}\sqrt{3})^2 (\eta_{17} + \eta_{18}\sqrt{3})^2 (\eta_{31} + \eta_{32}\sqrt{3})^2}$$

71 = 74605720095406550199801892891981838715605192310500989775003690207223783726557081842674292045916416829570840564010706765773618581278603886118647496201270089326  
 72 = 43073632580168816302752288315936785721386850895953493505850491231034301616961475373982498890662860657581576138055958230344871821052723119890845259581582927540697  
 73 = 6148520240878325184606445319576316628569790571894332867500622864491  
 74 = 35498498161889203361120684193567853468430586142290623644510657521666  
 75 = 127062219448541028664340780743415470751708580638292368591116496253752244778985213228107980141533467567492970753109880747411240698099081596539704046352418026094659  
 76 = 73359406602446465060052699919515733419426523549835675465151627529171587607242647782145691601449776051892916712931356255911366352818013135560397058087368937741214  
 77 = 1052494376756006646401337129116779657997577086401505984979687284396973397890976683904479428056563787597334700275962174006656968956602370833035520670  
 78 = 99096903107132142829157194667471962005474379022691597701384150170529793469530810611076201339299223705332111850908445844489677882497780217295033654428  
 79 = 868485425017371281914766910492308126658403293020247073101821344160301663597315698228576  
 80 = 6076579117406478354995377037786804128159507634879565439150504349602686402949233767597292968514450191604487930066830985919884921486719574051117522624  
 99706291072044582167537042606590713141913496087163316940559057358718206787881738318380380574576309336778714553349090141992119457167063400779871047634211  
 727784910876076581035266641697793358980451367301340121494278494345225957441655594453  
 79 = 1922963117257809804163974749652937048025238094589944745377933740114019422753887612710407533925544142335331020431750650759246762697430250455985193443  
 2901793323  
 710 = 11100316274216357964154507010168030941271396552667487999245126731092350411621943980401010418902011571740451972211919304321798140442636711035503015  
 8377896992008  
 711 = 506476653271210401081657356238406277155680992839769057055611990098612838182069565391548759918064123402918837981105823991040003142964651694899568  
 09038223795292411028887129822478909564206558776635956224725794087205463804938505254602521710290015543488740769590246521597340597098730484474264566316  
 551404294194993034865976468199106636000105649775147233685687627819930404196046800083471781  
 712 = 29241443210439407602681107465677911865014821181426102828471791506872873729093042706611043574356462045960147187279567502856390231063233413395159415  
 8949577128113032364123341669162286769687179949661172836009651436356919681406848763419135037664077627859648026178891672799393250173594723185454605306602  
 4113709121038336051229318664991315405509259756165881036611825102596641401652213676392765519  
 713 = 425300176812386716969328272789778770704163662231899492447409577637785177708091367662454977569977306051270766713839505362313540077370464543271241  
 865160202841626589514942542636480174736643401440857397093107098209874744395367967940797487927957756430207723054029879956630448540391067007524756179314  
 4870085679167391811425399590933053532323576870206794237835964625866114106882317458074986480744786536214540598035786725679742509489501648166368600  
 3939372050084702424191779155694626660181949350487554481424839303460644189162225969409121206660119402091927115681900985955077859857607475340860705566079  
 51387598786229271050889204754732350501402014499582080609591122192621326249981372914720815630127476640164698715146188641882306674394896424775393527390114  
 49688843295132648218848640104497701388882170771659065332446176208638963217988578900940115486391130351978608511496592651369822232248401197683261888940364  
 527940622487885943732093  
 714 = 2455480903133850867026646571804117185297410180523354175922706726027701036098612690547729267169127619403770656905050590356354896289773959444  
 5302129724916447138357424386502971965904800784279957564000900344876591046876069605802791460059287504778978944103983539642164984077059424784938284419  
 93836690052951126837033072119189207079365763762449406014887266810089414339517930314839958967228059479423697384043203312152530801593676312015595532563  
 65655216421665462073717476170145286976878480948697017555127713989023934976943674547194540973212509563899284104274860911432700969759715827527175117565  
 844452609522741762467340270209961166342680007524949538096480488067911479327862287699832095442843240137772627478684580915474881778291435059938067659704  
 2242663795788584747477065476736638571795505180061127227822368497707351370919840992380317400729508426655858269600338336904089918527294277059187886767422  
 6575064607201656091246580098  
 715 = 6148520240878325184606445319576316628569790571894332867500622864491  
 716 = 35498498161889203361120684193567853468430586142290623644510657521666



717 = 31122570269294473560953133717562318593462199294895220659491759763990686448082727132222008244621502443153313475910061430418356509494964019246094017568  
4138542627743461576080266066204428468533874885022367676280670119045487172840946559266749901558290029529490375665995196919687729330218761453977266017634808  
492168590170109811048968846819804336480350248454469317130928383946158356050257513486245099  
718 = 6481162471614350011125332626386951059835686858616126095553355153414448080555392902528611415221780246979775974468113373930363212313862188285969616138  
80110366320292419680163859353539589808510324692581380552489448532735946217846649080148140027989808304384689247818035891283755746469719448404773747977  
24082475938583651841638276538569251875955852244086699941777583391705556865308864  
719 = 1735293888992980946309311822988654701508375353931173707378102355112725297839820474892407302716307752574532228879046056282183949265056154064390588838  
8608248238028636727989485092556026415276197824982370356591398866091122330081028725406370498886018228414513505488463673717919187473670288930708605896246  
2484977842781163376856834615072404804115592942064981201831207227905050205375755040908606048907898462805892363539408255614224001121666003595128262740183  
403691051641530954204162225770337559013767957947096760697559131050407436077298039092505237820504100503115531124753226749297273675773709867648262718196  
17806277096121644546761536296700417614238952362104621469234506493437589103521301645803091070980138132700354423216879340070020444185080854016468601579452  
1317515871295463691201662500876886291957224276265249376253673263140473247473952677085303119628474751697851699066340591483633222707994202802527354917  
4052542054766723205658841  
720 = 10018723765586142234881659261498644116804441668809418816221585604626056527187182170956044194658792215230792392965498863320813644871988319031932684  
49191315340972533616405642331726017118197796102858114954238976954946329797852595786845678084787812545897998470008271206466876271913805536930661011585  
2041733610996762992148574708889767241887950600027257885124029761591830167080853410805669283701924019748961998961027775283191510509708709271522540105247  
601030021261384700135601771429595644129388770616307197578929974644532775493889634361691463142188841754734327004406670687347640703367906116394621874584  
68849681600943970847479590348593622307110391030582239964786855278551983790076313136752662826751254075515487228394764200606964109301383765204102217467775  
4762364388747679226423218245842468821666077518360012409137529487962032839940845989500520090946569918918743976560507856324963006661663206516694422520468  
6788461780229802316513765  
721 = 32146289501295978195933005056944532431224421532880818445741827706794654793231415362185222888724161172542352025648158691038293969307524962968582143  
8210535651670612871252462043266555481650236662500467610383969794338616677042913340620159190247698482832371472767123416764925924158408630230845163591042  
986686653652918397266800338194093355595305568536532044064579214456644818000386904462028399351584177713570335283363894427606295146642749827006313582  
34791583064368531997782241430744982486941894130590330342517722394794516702592387651808839006652096122889014553292843034129985352666144806880727823393552  
762545637833292502183337036654035263300297724006468154173290688788596372348293047519059246898061840791626761086137695024339081966010544863169589422933  
405188468713086666670713701932612177057568069779857734832651729408609520397495716324613481396806903564765586390366691599354210250066796990308193194863874  
5133262738836365049476076994101078407003848432874049205016525017211974515510232662133591658010158449850606694335373026050299268319204457919605925328220934  
2059530714161871015093043484701050766936862779546338241584815850999543552766389631338505078103027540897345408611901800130027026476420276900195205681856  
23583369572854588749207904011078407003848432874049205016525017211974515510232662133591658010158449850606694335373026050299268319204457919605925328220934  
1835094804126672741412110416792303256237481581415692587544423060154159555354532992084794364250534265690997578147579684714854315157961603136005902183383661  
9319806190305919658018728513040490601924227686405131643950018826364103257732721419946360492965845941587461981905255317367795904608166726607761622948  
80613477491021496455100268698197275881868474833072626164733451804806589429147611243408009291197184571434864637251974821953125021372980354932757891534534  
9506595681148331427328327987378508212592647995045849793119224701129373229165017458951677402065395269418326319914925869258045700909732156764427414565881  
955447426022409870886778734777651447717582203854151453679649079612408395587352926226722901508983771391746950018491567524056576175213262671130832543554  
6628405066549988177047415414756177688767971569303127643176165345519674739915208615712010198658975183344752393975335129012



722 = 1855966889702087358285572812838414929783324652059077205465284962235250951439464262144519833370177608186075796381847008033392300764912401439677  
150622238234288303232534346274481815066991006767059638715593287154945217148056801825381108271369723052577791041088481846253895844650404207526801407299152  
88108369250117674195988451017708779102342728002209342967549212500394908464661637239563168214341863714491581012803534591803547023300744895480639806371  
31171723110523400151232787392996059609920996558713989744485950616238906120560413526466987830548376787449040653711471339216943624382104607102741374190  
2041970328421241182228212695578539291863274640278632244843934004627541310507827556545303725394689089085052103487638843980897411291071847099194496739661  
1705546050659527362391128321754806650167722551105828781822129849700101314318273336373223725394689089089085052103487638843980897411291071847099194496739661  
342811871812469162251126662255340512362067110282127394255846657494730095036202537129707700849644961101550600430656463398728235087910160212720881548610349603  
1820602253710119285372816307929557399648917019852045943943038343341658453109948753675301963231263908764699535013373745451041951636686065817811941508577955  
95183719264465394218534391339908601744822828560005808258359920574850942693665505439236163065240359767179260711370140208905614345064897897853309722894951177  
212904707515347911993209225946632765390460951054287460743621692016920174373703171868267041978115898200243373121743186869904757784577424668744220196871880923  
05435902747941513355752526808552508671798899541127797933453203306800060138400749530278032847363679736355925450144682392780220976745641311826321499858310  
0164742942014565968139629956353368901629229618501019793524511589380801839704203490917387128031141859219043385867576046401721233594269325342202843067811  
06858045492743742682807077023296746418676685134553514188042202131116098518437413819492715393287796787342469773296506166785584061638286779065194378477230  
9058941214648369269127623780234588353424361847012634639835234359828998411326337213168933511754017918040150259224104871159242012974525014698290169595795  
7059755421329088685141185023270668132581289027085423887142603209438441015470844116055071597132981171496710482517878807805  
723 = 192263117725780980416397474955293704802523809458994474537793374011401942272538876127104975753925541412338316020431750650759246762697430250455985193  
4432901793323  
724 = 1110031627742163579641545070101680309412713965526674879992451267310925304117219639804010104030201127173045197221191930432179814044263671103503015  
8377896992008  
725 = 184594882035132092147041317980321248425442400754596096104175650662742138971734467108740346453897342301359709205145905696380226201144706302920268158  
385051828167014094517342906982118307111892696719053831112045106739439592317022889043692918896267678596488637084620291547662440057984027310630529158833  
350242906397558019930336848288809959729098824034606706963699712306294327222660963548545914874161616899994314149876925532340175489005027617874898986  
56114544745867348318379522415512057217715843359328432693123429162244352069161284359414597063794437807986292934599102773477883712494158277452679867778  
1086760700404938328888457337440839171237789681385457327282778956058820674859551913716837685354969105844292484185832053867470343026329248631756041203  
727873375928148921209113143270867527666545452432939765434623893092465664641084524209006473186392470767950481065897816640592404861592536838801623690034936  
6937683275222587598458907  
726 = 1065759048340107264820151493794443189138681350233723048455715180693819815358180380925944605789270053537507168772146783489942251267396073646401354  
73206486588605699822048142007412640589909950618644477373330679174002302247886092051678751060124245855968328048456754399019163623010147206127838677263  
43604100810771316138243242256534416239200216500119930239275262071252392747103316854678656678802980496057502554839946535635080510167829212241083292  
0096725173909945343474369081030104342013473907976538979919288196017566285159196696778533015333522963131919197929482927790397189751279296208848183791  
292246067802403299139935001197503431767108978044872430890465093956693216030007146706614919036000369353745601874439108737214993951273097294358030118212049  
57681894244668175929486825786637315876786609859087336723732535202892075653398613430803801596045429502221015184685202724967999137963879982459982561499647  
0141590274027810403594484

de Tabasco.

727 = 754939373886159465716064696891233764944150981106951199761177241342985192598639017101483213602936457053383696879465748580154205707716679683160812210  
81567377739508877572364272021258027120580494544095781387103863066827668488758662891504579592523404062975773960113792421667186267717032187213819478568067806  
69736523751644618783741862191291392260543685662029575341498326299613335541978012883091587918523640546588225489683215832697189271892454  
47732099268079557263760246133628535992750888256840155529072025401943763000473175537715637372985259338303709652398915800926687502507648837090077989904539  
9542165696195238769908702310814944079680866764560698748762675833290765188904142862048953479290136169042754294124880707757184827467794831745782053730204  
57331417576436644287403833211671577973025727638454804274421395353018608059378062925810453088968056189329974026917575303630563670249374966204838529001  
6645991405475090866145105319952406482005620860801342150377655478341441331782836177310396780614475739052793658165078346521054367086631843708268491  
632037524877075017136514258587964334119006878504981773527384639909703051217788009885322161783869042729739708171762258311527510236677085946614709716796  
5509166904864384515104438195079273537628646606330727444969551437543632147046362828645018999819761410149497350046989963126481765885064506774534486116435  
9004195114718295969353628860148998295936201090199205552295835898579833651180282630404313987172067507733919912902541346208497800019123075181175325401572  
5268235009259039907722313664910685246881674934135852927099492154490255446001060705499183320657437049465697498689927892264136047466083358946101387899874  
9287512159430860676604883478134381833121354858761343374927315873005504038346747576251918796527015870480458608670963846284563684433850300588938058753132  
640613737937369518998686286316824812885700587676082000203774610366899107009351618733309501784996343772009468285058370257049631481447052654900160029196  
09022771864823748641180841982490096823189337295199142366592086832906616580657669973252338153982128238428946412087990213905786885192452775701283765714828  
77252712012036334881328320100153242100155453159746933194103272297198184660071749415078934145711055876456944117165995495411534

728 = 43586445015767142964966156514169847079073580344092850010286391097711635222727820283552673703007288179238815192308299276620869330014525522250236414  
323118665334311598455136199372206800316941639846549952948793133440807317865824702848374063814592468345089027211989350363764093497276257551272881416233  
07071382856330963996904138923382631262514159077566902254754247600175548918882164010423076020382918373338129743002765114150484478313411568767435048163272  
32730045270076674765323955801247434763622988908123308359614962952468481914775653498231056047196992198595574973166013015975910138126992183185701800091210  
73945198465658213208379520870144318582842979361790698773439781282395577855208239651022398605146392664477820506319023694798095621660791770896758319145  
650061010296525292825719501228950973357525715995078878418590465263445670990606157376663832519412838282811707193107971153223613298407033076081054976  
4637292794095546005844036064954053993861889443660888926018546579964167761506287979394054995912212474835922902877193540975716628399073153585880911338041  
6104619740039132558926938233430990058033968643724201069489136397616468122193927866465580307038940520906614362048847989197163224343314608773387770461  
3007139775480677849837421237692745774496909631176651388128223159407238915895641622688651442385766285191544841151759239535701980238973586148216163001  
17962319218216631434317058099861054099421469740670478655890287974906294790699616381988844339389549888209391861654761250337477673  
5313988832554121626115445766973759782500796910519059997359922465279103245181957436456965425042814590036287162438148987682713907999886332728596630293254  
667236320821354161306153243398438470341894409077004047278609645844013334920086948013379243872760772422885610012308475761137463521999572259113738695  
299370787726246334886854210530023695362534595157574719271323808983010350060199520127424134865936371129434293532327359400382042122796834679760973482  
5863632902208275644322154481278731619885400173509030682006282373312865255514191563574294586342714869260055330071746892600553300717860472313586038887  
457564819905189278278013374014086665956486410280904749977062963672643999403347392437088743637553569997476808137932273329767621

Ma de Tabasco.



730 = 463292573444399471293412311279433673205184276492026330651779265728091202094800208680666200513885377471090227642507971219332001600736259  
68284635990490775686425614663988847787013784392035261120000310705660292099073022835255783484092320551715046139211846842069836009292243315205278920705182477  
736886599281753399452639025448959997080524233824389661826045383846953598544893382042974199909205253813690162336906914453688465405869314546882253532375842441  
972442699092684420404879725540109438636657478926723611885811127900426240336645226995630831071586172481496874708836043781241586363226727462182962681176004199  
593866946089733738969305832887317426033442878979396673351098273637651525110067325940479551454543794082093701268506086759426055686382879402057964352  
8520326348349419355689536403780221286579151093036828575593275888439070559526452900749352679781822614745925222764596527366630841063751586439399458512043  
0604430193551827731153002238761352426933476212215992732577898655061492078955036720518955948919783626759844839883281504129650018371350634507945107604652011732  
117388632022928935721928261701404096885091288833671042795134058067037150429335205618309869084811376362422692227467588508239782892439848369848398519750120  
73306444069350183696557821430408795657143157177401935332722997902847663088058430879635456070756016436134614100089215236259914962017489710294604169375  
51137897936602839962069990197995670023209008017845187167093965402119273732762325272390299994630612897589329384241694510866000470550257708147799196854980509  
69063270588875228083860332230331961778364882812941403344642441748149612703191212654048129659254550359140541534457496537954150407417087081641597215558  
22837249131470250616888911395395256859771051993848040591827205100420263593943320248325249661382288213411068755882925446031686262122917748552  
53436025706049089653309020357413812981673938283029665936295423422524976869910177443475334492889667103569104761012950018371350634507945107604652011732  
80331369431491406037120596429938872200319820607490334131229338875314786511264472232671782807979003865424536967761510963143497907820463948671853109  
306497706662100700120143371931807045613414349592683045191000285914613663770133476746761941827470128484924638337537057266058549484780225248060121443692  
598737691953022975483498003044851946442571267158056544159271469421740320385094367478357154203786784066232849039623246783218653293463970357359667  
29092912417195154476787927895838300986616971374521009854364910766246239956389728382441454229136361375187575118789317502032054480527998096498504766354  
8646830898781942578607895545074407561203616077046633705380657016207251178947830624960256510596298991001732918827465922217471251653103204594847789317178  
96748204889002983947597355591868044573699765946066398476245016775496520201690282490879068629914900487100237419197493404162096479026722110243213657834465  
2792736375913320282963245711230461483050417352587630342356596240710399759021096992259530663458889108482450202263235766919617238851568485700235470916846  
09918538670744685932120466435295590124321940421764361516146940550682100268342859161567653936691431914713848540296324016243177932739906510834443264182  
667114699767604412239728599213203260276942197829175984610681964321574399968290024568085181593917747161490916257165777351212040163101633478952898690266  
399054589475379725015201466598940060435820704610865967576352171798434342020331760773573992295477897348620560633770082630026035396613368329951831211329  
22438605032257857219071779993579891420439188610711603605685796250765407334154226754490580645357028700756889682634276314108641814287225729574877423199968  
812295588156165378258632950501167178285735387547887806846113068398115182027805624074737333448352387494686636365155714404431705231873468695672875637154  
43011622407051251996481851973155784063079342254046848030604789814058332888563009536634174145550309166250206541649707671149982396462781364773083478316  
1337360802175402462793618364069406108105977569756317508914817228427454007925243230505684613464096346876229601585459976898491735119217351155659531150752  
8713918251042294965273971844267100408910446362603156645722365891198043432621890478609586686771351590365169733039323474771093654477569222480089054053915  
23547445792681611293203375500080198017808007828437639398730040562591536029507900391519875580550949299967445188024325251404703595487801556594416302936  
6640790203782849040924717729015459919683304769230259299247667302795251073843897189789282470505113141618711041473786916392369204207  
78927649522652783813591887911456183493908684231217158802841605265078656486161117437270553542211810810229754340711963297879870664565126289233344950833704  
278204503755956296032629772368021576669961198696642487551314944592786818064771313115160893151525344624763828415200474273947929583046632394301783022  
467673556356649156598049089945977958664980850354020706748583405322911776129076594680181268912674345184150025665165425328118371793775670164514053582836743  
6533419904269370451237016949754563180179709332797821166825508049838044296974263557809432351982084126627183020846091248320175338911246106859183345450473  
68616276759300953794149439498420007497758554019063935727821667467216214813939286683978695545632846244031665



731 = 105835401571287171023984557144355834282291286006326840140701765490774562659998740276473417099066608083560978060180196149745349742781247871954196  
879046262131587651165349120945038963156584026745915297056106646247897802157037425129282538138577150906885515906080742845932951152902238314364675120799472  
0249560465245514893496646824109647571484939786973170998006671952822018116628074554881469059516611369924723371881876521523345928007236315611250  
154671586510063767067523665913975976228854073878194862510853727740428946049602020307434972577824174267733096446212664079310112833543205673023959184739  
7927572831819624988095196087925300600251482858728294235438516397639029818872631492684538447082543308655135989332638609741733230433672709167108526  
559272831819624988095196087925300600251482858728294235438516397639029818872631492684538447082543308655135989332638609741733230433672709167108526  
8685388688420841086391824153968210891628319866243021584759599937402807652178397342033490492089065719471211129135767796678120463330808780020764471011901  
486988417092175650081463538472159426975835439053583508107452292858602372235212947664616246238989478624030573901813150179018168480022360828292624206057229  
75617887235259795082441512086037382580562397525438708927112636174635350406737658191143755848132599058131209196103328787294915135660357733462214911711528  
930888127382101784286029008972631970371473135192650902244119801689674604701821153927641241986731045427049346959786480728004223619364778589067135378545  
5651442447872376318183581127885002896447428608804295978967288046345965200284433753208564461566901920946264602980787314699059269461806072593600317741591  
286999533911650753890190657572517435747877153825666692583312817939906349718261196338513070845045818594197267142461419170279954014054853861508914706427  
792760784335182402309714068744471335327331160929281320493673983937976968476274717639645882252161228328844703377919732141565635728171180893536329358110  
6961633319367076734461349956698341957998883668192620380122129444316349671748075233772628184549869390830215628571981928304253  
732 = 105835401571287171023984557144355834282291286006326840140701765490774562659998740276473417099066608083560978060180196149745349742781247871954196  
879046262131587651165349120945038963156584026745915297056106646247897802157037425129282538138577150906885515906080742845932951152902238314364675120799472  
0249560465245514893496646824109647571484939786973170998006671952822018116628074554881469059516611369924723371881876521523345928007236315611250  
154671586510063767067523665913975976228854073878194862510853727740428946049602020307434972577824174267733096446212664079310112833543205673023959184739  
7927572831819624988095196087925300600251482858728294235438516397639029818872631492684538447082543308655135989332638609741733230433672709167108526  
559272831819624988095196087925300600251482858728294235438516397639029818872631492684538447082543308655135989332638609741733230433672709167108526  
8685388688420841086391824153968210891628319866243021584759599937402807652178397342033490492089065719471211129135767796678120463330808780020764471011901  
486988417092175650081463538472159426975835439053583508107452292858602372235212947664616246238989478624030573901813150179018168480022360828292624206057229  
75617887235259795082441512086037382580562397525438708927112636174635350406737658191143755848132599058131209196103328787294915135660357733462214911711528  
930888127382101784286029008972631970371473135192650902244119801689674604701821153927641241986731045427049346959786480728004223619364778589067135378545  
5651442447872376318183581127885002896447428608804295978967288046345965200284433753208564461566901920946264602980787314699059269461806072593600317741591  
286999533911650753890190657572517435747877153825666692583312817939906349718261196338513070845045818594197267142461419170279954014054853861508914706427  
792760784335182402309714068744471335327331160929281320493673983937976968476274717639645882252161228328844703377919732141565635728171180893536329358110  
6961633319367076734461349956698341957998883668192620380122129444316349671748075233772628184549869390830215628571981928304253



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Bibliografía

- [1] R. Abraham y J. E. Marsden: Foundations of mechanics. Second edition. Addison-Wesley, Reading Mass, 1978.
- [2] A. Albouy: Recherches sur le problème des  $n$  corps, Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes, Paris, 78 (1997).
- [3] A. Albouy y V. Kaloshin: Finiteness of central configurations of five bodies in the plane, *Ann. of Math.* **176**, 535–588 (2012).
- [4] M. Álvarez-Ramírez, A. Almeida Santos y C. Vidal: On co-circular central configurations in the four and five body-problems for homogeneous force law, *J. Dynam. Differential Equations* **25** (2013), no. 2, 269–290.
- [5] E. Barrabés y J. Cors: On central configurations of twisted crowns, 190 arXiv:1612.07135 [math.DS]
- [6] M. Corbera, J. Llibre y E. Pérez-Chavela: Spatial bi-stacked central configurations formed by two dual regular polyhedra, *J. Math. Anal. Appl.* **413** (2014) 648-659.
- [7] J. L. Cornelio, M. Álvarez-Ramírez y J. M. Cors: A family of stacked central configurations in the planar five-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **129** (3) (2017), 321–328.
- [8] J. L. Cornelio, M. Álvarez-Ramírez y J. M. Cors: A Special Family of Stacked Central Configurations: Lagrange Plus Euler in One, *J Dyn Diff Equat.* (2018).
- [9] L. Euler: De motu rectilineo trium corporum se mutuo a trahentium, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, **11** (1767) 144-151.
- [10] A. C. Fernandes y L. F. Mello: On Stacked planar central configurations with five bodies when one body is removed, *Qual. Theory Dyn. Syst.* **12** (2013), 293-303.
- [11] A. C. Fernandes y L. F. Mello: On stacked central configurations with  $n$  bodies when one body is removed, *J. Math. Anal. Appl.* **405** (2013), 320–325.

- [12] M. Gidea y J. Llibre: Symmetric planar central configurations of five bodies: Euler plus two, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **106** (2010), 89-107.
- [13] Y. Hagihara: *Celestial mechanics*. Vol .1, MIT Press,1970.
- [14] M. Hampton: Stacked central configurations: new examples in the planar five-body problem, *Nonlinearity* **18** (2005), 2299-2304.
- [15] M. Hampton y R. Moeckel: Finiteness of relative equilibria of the four-body problem, *Inventiones mathematicae* **163** (2006), 289-312.
- [16] M. Hampton y M. Santopetre: Seven-body central configurations: a family of central configurations in the spatial seven-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **99** (2007), 293-305.
- [17] J. L. Lagrange: Essai sur le problème des trois corps. Œuvres, Tome VI. Gauthier-Villars (Paris), 1867-1892 edition, 1772.
- [18] E. S. G. Leandro: Finiteness and bifurcations of some symmetrical classes of central configurations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **167** (2003), 147-177.
- [19] P. Lehmann-Filhés: Ueber zwei Fälle des Vielkörperproblems, *Astron. Nachr.* **127** (1891),137-144.
- [20] J. Llibre: Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos, *Publicacions Matemàtiques UAB* **3** (1976), 73-88
- [21] J. Llibre y L. F. Mello: New central configurations for the planar 5-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **100** , no. 2 (2008), 141-149.
- [22] J. Llibre, L. Fernando Mello y E. Pérez-Chavela: New stacked central configurations for the planar 5-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **110** (2011), 43-52.
- [23] L. Mello y A. Fernandes: Configurações centrais planares encaixantes, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **29** (3) (2007), 385-388.
- [24] L. Mello y A. Fernandes: Stacked central configurations for the spatial seven-body problem, *Qual. Theory Dyn. Syst.* **12** (2013), 101-114.
- [25] L. Mello, A. Fernandes, F. Chaves y B. Garcia: Stacked central configurations for the spatial six-body problem, *J. Geom. Phys.* **59** (2009), 1216-1226.
- [26] D. Mitchell: Perpendicular bisectors of triangle sides, *Forum Geometricorum*, **13** (2013), 53-59.

- [27] R. Moeckel: On central configurations, *Math. Z.* **205** (1990), 499-517.
- [28] R. Moeckel y C. Simó: Bifurcation of spatial central configurations from planar ones, *SIAM J. Math. Anal.* **26** (4) (1995) 978–998.
- [29] F. R. Moulton: The straight line solutions of the problem of  $n$  bodies, *Ann. of Math.* **12** (1910), 1-17.
- [30] I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, University of Cambridge, 1687.
- [31] L. M. Perko y E. L. Walter: Regular Polygon Solutions of the  $N$ -Body Problem, *American Mathematical Society* **94**, no. 2 (1985) 301–309.
- [32] H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* I-III, Publisher Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892.
- [33] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York 1987.
- [34] D. Saari: On the role and properties of central configurations, *Cel. Mech.* **21** (1980), 9-20. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **90** (2004), no. 3–4, 213–238.
- [35] S. Smale: Topology and mechanics. I. *Invent. Math.* **10** (1970), 305-331.
- [36] S. Smale: Topology and mechanics. II. The planar  $n$ -body problem. *Invent. Math.* **11** (1970), 45-64.
- [37] S. Smale: Mathematical problems for the next century, *Mathematical Intelligencer*, **20** (1998) No. 2, 7-15.
- [38] X. Su: New stacked central configurations for the spatial seven-body problem, *Reports on mathematical physics*, **72** (2013), 179–189.
- [39] X. Su y C. Deng: Two classes of stacked central configurations for the spatial  $2n + 1$ -body problem: Nested regular polyhedra plus one, *Journal of Geometry and Physics*, **76** (2014), 1–9.
- [40] J. V. Uspensky: *Teoría de Ecuaciones*, 1ª Ed., México, Limusa, 1987.
- [41] G. E. Roberts: A continuum of relative equilibria in the five-body problem, *Phys. D* **127** (1999), no. 3–4, 141–145.
- [42] A. Wintner: *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton University Press, 1941.
- [43] F. Zhao y J. Chen: Stacked central configurations for newtonian  $N + 2p$ -body problems, *Math. Anal. Appl.* **405** (2013), 541–544.

# CONFIGURACIONES CENTRALES DE 5 CUERPOS EN EL PLANO

INFORME DE ORIGINALIDAD

4%

ÍNDICE DE SIMILITUD

## FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="http://hdl.handle.net">hdl.handle.net</a> Internet	321 palabras — 1%
2	<a href="http://mat.izt.uam.mx">mat.izt.uam.mx</a> Internet	174 palabras — 1%
3	<a href="http://ddd.uab.cat">ddd.uab.cat</a> Internet	132 palabras — 1%
4	<a href="http://revistas.ujat.mx">revistas.ujat.mx</a> Internet	88 palabras — < 1%
5	<a href="http://qdoc.tips">qdoc.tips</a> Internet	62 palabras — < 1%
6	<a href="http://investigacion.unirioja.es">investigacion.unirioja.es</a> Internet	45 palabras — < 1%
7	<a href="http://livrosdeamor.com.br">livrosdeamor.com.br</a> Internet	34 palabras — < 1%
8	<a href="http://es.wikipedia.org">es.wikipedia.org</a> Internet	20 palabras — < 1%

EXCLUIR BIBLIOGRAFÍA ACTIVADO

EXCLUIR COINCIDENCIAS DESACTIVADO