



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



COMPONENTES HIPERBÓLICAS PRINCIPALES  
EN UNA FAMILIA DE POLINOMIOS CUÁRTICOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS EN  
MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

MIGUEL ROMERO GÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

CUNDUACÁN, TABASCO, MÉXICO.

MAYO 2019

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco



**UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO**

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

6 de mayo de 2019

**Lic. Miguel Romero Gómez**  
Pasante de la Maestría en Ciencias  
en Matemáticas Aplicadas  
Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“COMPONENTES HIPERBÓLICAS PRINCIPALES EN UNA FAMILIA DE POLINOMIOS CUÁRTICOS”** en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.

**Dr. Gerardo Delgadillo Piñón**  
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo  
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

Miembro CUMEX desde 2008  
**Consortio de  
Universidades  
Mexicanas**

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría: ***Componentes hiperbólicas principales en una familia de polinomios cuárticos***, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 10 días del mes Mayo del año 2019.

Autorizó

*MRG*

---

Miguel Romero Gómez

132A15002

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos Básicos de Análisis Complejo . . . . .	1
1.1.1. Conjuntos Simplemente Conexos . . . . .	1
1.1.2. Conjuntos Localmente Conexos . . . . .	3
1.1.3. Familias Normales . . . . .	4
1.2. Conceptos Básicos de Dinámica Local . . . . .	6
1.2.1. Funciones Racionales . . . . .	6
1.2.2. Órbitas . . . . .	7
1.2.3. Conjugación . . . . .	8
1.2.4. Ciclos Atractores . . . . .	10
1.2.5. Ciclos Indiferentes . . . . .	12
<b>2. Conjunto de Fatou y de Julia</b>	<b>14</b>
2.1. Definición y Propiedades . . . . .	14
2.2. Componentes de Fatou . . . . .	15
2.2.1. Clasificación de Componentes Periódicas . . . . .	15
2.2.2. Hiperbolicidad . . . . .	17
2.2.3. Rol del Punto Crítico . . . . .	18
2.3. Número de componentes de Fatou . . . . .	20
2.4. Funciones con Conjunto de Fatou Vacío . . . . .	21
<b>3. Conjunto de Julia de polinomios</b>	<b>24</b>
3.1. Conjunto de Julia Lleno . . . . .	24
3.1.1. Propiedades de $K_P$ . . . . .	24
3.2. Familia cuadrática . . . . .	25
3.2.1. Conjunto de Mandelbrot . . . . .	27
3.2.2. Componentes hiperbólicas del conjunto de Mandelbrot . . . . .	28

3.2.3. Rayos externos . . . . .	32
3.3. Isomorfismo entre las componentes hiperbólicas y el disco . . .	35
3.4. Localización de las componentes hiperbólicas . . . . .	39
<b>4. Dinámica de polinomios cuárticos</b>	<b>43</b>
4.1. Lugar de Conexidad . . . . .	43
4.2. Componentes hiperbólicas de periodo uno . . . . .	49
4.2.1. Caso $a = 0$ . . . . .	50
4.2.2. Caso $b = \frac{a^3+8}{4a}$ . . . . .	51
4.2.3. Caso $b = 0$ . . . . .	52
4.2.4. Caso $a = \frac{8+b^3}{4b}$ . . . . .	53
4.3. Componentes hiperbólicas de periodo dos . . . . .	55
4.3.1. Caso $b = 0$ . . . . .	55
4.3.2. Caso $a = \frac{8+b^3}{4b}$ . . . . .	56
4.4. Conjugación afín . . . . .	57
<b>Conclusión</b>	<b>65</b>
<b>Simbología</b>	<b>66</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

# Agradecimientos

---

A Dios:  
Por darme la sabiduría necesaria  
para alcanzar mis propósitos y  
culminar mis estudios.

A mis padres:  
Por brindarme su apoyo  
incondicional para alcanzar  
esta meta.

A mi asesor:  
Dr. Gamaliel Blé González  
por su valioso apoyo, paciencia,  
amistad y sugerencias para la  
realización y conclusión de  
este trabajo.

A CONACYT  
por su apoyo económico.

A la UJAT:  
El haberme permitido contar  
con sus instalaciones, apoyos  
económicos y su ambiente de trabajo.

# Introducción

---

El comienzo de la dinámica holomorfa se remonta a los trabajos del siglo XIX de Leau, G. Schroeder, G. Koenigs, L. E. Böttcher y a las memorias sobre la iteración de aplicaciones racionales de G. Julia [J] y P. Fatou alrededor de 1920. Después de ellos, pasaron algunas décadas sin grandes avances, salvo los trabajos de H. Cremer en 1932, C. L. Siegel en 1942 y de H. Brodin en 1965, [Be, CG, M].

En la década de los 80's, el estudio de la dinámica holomorfa regresó de manera explosiva al primer plano de la investigación. Este resurgimiento o renacimiento de la dinámica holomorfa se debió en gran parte a los avances en la graficación por computadora y a la introducción de una nueva herramienta teórica, las aplicaciones quasiconformes. Esta nueva herramienta fue utilizada por D. Sullivan en 1982, para demostrar la conjetura de Fatou, acerca de dominios no errantes, resolviendo uno de los problemas principales que Fatou había dejado abierto. Este acontecimiento marcó una nueva etapa en el estudio de la dinámica de las aplicaciones racionales, destacándose los trabajos de A. Douady y J. H. Hubbard en 1982, [DH].

Una de las conjeturas de Fatou que aún permanece sin resolver, es la que afirma la densidad de las componentes hiperbólicas de una familia de aplicaciones racionales. En particular, en esta tesis analizaremos las componentes hiperbólicas de una familia de polinomios cuárticos, la cual se obtiene como composición de dos funciones cuadráticas  $P_{ba} = P_b \circ P_a$ , donde  $P_a(z) = az + z^2$ , para  $a, b, z \in \mathbb{C}$ . En esta familia identificaremos las componentes hiperbólicas de periodo bajo y describiremos algunas características de ellas.

Este trabajo se ha dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace un repaso de algunos conceptos básicos de variable compleja tales como familias normales, equicontinuidad, conjuntos localmente conexo y simplemente conexo, así también se dará una introducción a la dinámica holomorfa y algunos resultados de suma importancia tales como el teorema de Fatou y el teorema de clasificación de puntos fijos.

En el capítulo dos estudiaremos dos conjuntos completamente invariantes

en  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ : el conjunto de Julia y el conjunto de Fatou. Haremos más énfasis en el conjunto de Fatou, dando un teorema de clasificación de componentes y contando el número de componentes que puede tener dicho conjunto. Además daremos la definición de función hiperbólica y enunciaremos la conjetura de Fatou.

En el capítulo tres estudiaremos los polinomios cuadráticos, en especial la familia  $P_c(z) = z^2 + c$ . Definiremos el conjunto de Julia lleno y el conjunto de Mandelbrot, así como también daremos la conjetura de hiperbolicidad para el caso cuadrático. Localizaremos las componentes hiperbólicas del interior del Mandelbrot de periodo 1,2,3,4 y 5, a partir de los centros de dichas componentes.

En el último capítulo se presentarán diferentes proyecciones de las componentes hiperbólicas asociadas a la familia de polinomios cuárticos  $(P_b \circ P_a)(z) = P_b(P_a(z))$ , donde  $P_a(z) = az + z^2$  y  $P_b(z) = bz + z^2$ , con  $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$ . Así como el lugar de conexidad para algunos casos particulares de dicha familia.

México.

Universidad Autónoma de Tabasco.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

---

# Capítulo 1

## Preliminares

---

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos de Variable Compleja y empezaremos a establecer el ambiente en donde trabajaremos. También recordaremos algunos resultados de dinámica holomorfa tales como el teorema de Fatou, el teorema de Koenigs y el teorema de Böttcher, entre otros, [Be, CG, M].

### 1.1. Conceptos Básicos de Análisis Complejo

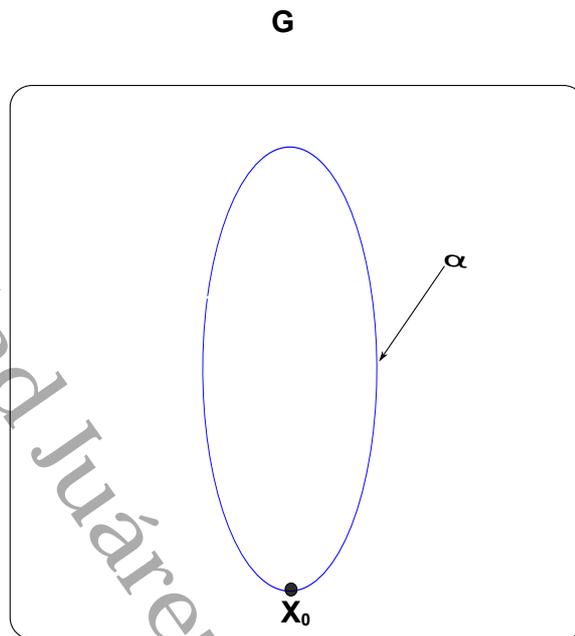
#### 1.1.1. Conjuntos Simplemente Conexos

Para definir conjuntos simplemente conexos necesitamos las siguientes definiciones.

**Definición 1.1.1 (Trayectoria).** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  una región. Una **trayectoria** en  $G$  es una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ .

**Definición 1.1.2 (Lazo basado en  $x_0$ ).** Sean  $G$  una región,  $x_0 \in G \subset \mathbb{C}$  y  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$  una trayectoria;  $\alpha$  se llama **lazo basado en  $x_0$**  si  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ .

Tal como se ilustra en la figura 1.1.

Figura 1.1: Lazo basado en  $x_0$ .

**Definición 1.1.3.** Sean  $\alpha_0, \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow G \subset \mathbb{C}$  dos lazos en una región  $G$ .  $\alpha_0$  es homotópico a  $\alpha_1$  en  $G$  si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  tal que:

1.  $H(s, 0) = \alpha_0(s)$  y  $H(s, 1) = \alpha_1(s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ )
2.  $H(0, t) = H(1, t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

Obsérvese que la homotopía define una relación de equivalencia entre lazos, por lo que si dos lazos están relacionados entonces están en la misma clase de equivalencia.

**Definición 1.1.4.** Sea  $\alpha$  un lazo en  $G \subset \mathbb{C}$ .  $\alpha$  es homotópico a cero si  $\alpha$  es homotópico a una constante.

**Definición 1.1.5.** Un conjunto  $G \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexo si  $G$  es conexo y todo lazo en  $G$  es homotópico a cero.

A continuación presentaremos unos ejemplos para entender mejor la definición de simplemente conexo.

**Ejemplos 1.1.6.** (a)  $\mathbb{D}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) < 1\}$  es simplemente conexo.

- (b)  $A_{1/2} = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$ , no es simplemente conexo, ya que el lazo mostrado en la figura 1.2 no es homotópico a cero

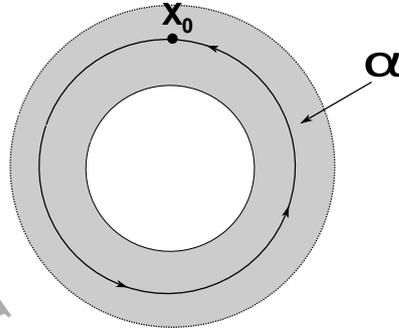


Figura 1.2: Conjunto que no es simplemente conexo.

**Definición 1.1.7.** Sea  $U \subset \mathbb{C}$ , diremos que  $U$  es un conjunto **lleno** si  $\mathbb{C} \setminus U$  es conexo.

Nótese que bajo ciertas condiciones un conjunto lleno y un conjunto simplemente conexo significan lo mismo, tal como lo muestra la siguiente proposición, [C2].

**Proposición 1.1.8.** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  abierto, acotado y conexo. Entonces  $U$  es lleno si y sólo si  $U$  es simplemente conexo.

### 1.1.2. Conjuntos Localmente Conexos

**Definición 1.1.9.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  es **localmente conexo** si para cada vecindad  $x \in A$ ,  $u(x)$ , existe una vecindad conexa  $v(x) \subset u(x)$ .

Para comprender mejor la definición anterior, véase los siguientes ejemplos:

**Ejemplos 1.1.10.** (a)  $\mathbb{Q}$  no es localmente conexo.

(b)  $I$  y  $\mathbb{R}$  son localmente conexos, donde  $I = [a, b]$  con  $a < b$ .

(c) Claramente se ve que no todos los conjuntos localmente conexos son conexos, por ejemplo  $(0, 1) \cup (2, 3)$  es localmente conexo, sin embargo no es conexo. Tampoco todo conexo es localmente conexo; a saber, el *espacio peine*, que es el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  siguiente:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ y } x = 0 \text{ o } \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

es conexo (véase la figura 1.3); sin embargo no es localmente conexo, pues para cada punto  $a = (0, y)$ ,  $y > 0$ , cualquier vecindad suficientemente pequeña intersecta a  $P$  en un disconexo. A saber una vecindad de cada uno de estos puntos  $P$  se ve como en la figura 1.4.

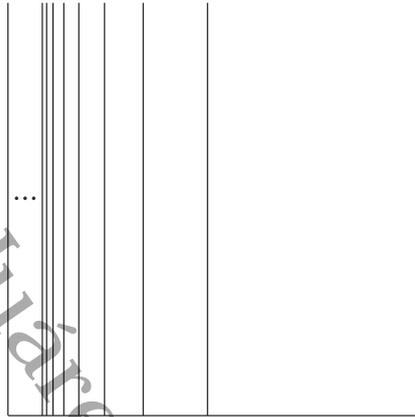


Figura 1.3: El espacio peine.

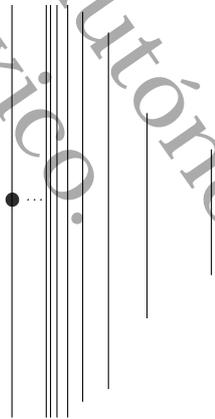


Figura 1.4: Una vecindad en el espacio peine.

### 1.1.3. Familias Normales

Antes de definir equicontinuidad y familia normal, denotaremos

$$\mathcal{C}(G, X) = \{f : (G, d_1) \rightarrow (X, d_2) : f \text{ es continua} \}$$

donde  $d_1, d_2$  son métricas en  $G$  y  $X$  respectivamente. Los siguientes resultados fueron tomados de [Be, C1].

**Proposición 1.1.11.** Si  $G$  es un abierto en  $\mathbb{C}$ , entonces existe una sucesión  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subconjuntos compactos de  $G$  tal que  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ . Además, los conjuntos  $K_n$  pueden ser elegidos de tal manera que cumplan con lo siguiente:

- (a)  $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$
- (b)  $K \subset G$  y  $K$  compacto implica que  $K \subset K_n$  para algún  $n$
- (c) Cada componente de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_n$  contiene una componente de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ .

**Proposición 1.1.12.** Una sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{C}(G, X)$  converge a  $f$  si y sólo si  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $f$  uniformemente sobre todo subconjunto compacto de  $G$ .

**Definición 1.1.13.** El conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  es normal si cada sucesión en  $\mathcal{F}$  tiene una subsucesión la cual converge a una función  $f$  en  $\mathcal{C}(G, X)$ .

**Proposición 1.1.14.** Un conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  es normal si y sólo si la clausura de  $\mathcal{F}$  es compacto.

A continuación enunciaremos la definición de equicontinuidad, así como su relación con las familias normales.

**Definición 1.1.15.** Un conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  es equicontinuo en el punto  $z_0 \in G$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_1(z, z_0) < \delta$ , entonces  $d_2(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$  para cada  $f \in \mathcal{F}$ .

$\mathcal{F}$  es equicontinua sobre un conjunto  $E \subset G$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d_1(z, z') < \delta$  implica  $d_2(f(z), f(z')) < \varepsilon$  para todo  $z, z' \in E$  y para todo  $f \in \mathcal{F}$ .

Note que si  $\mathcal{F}$  consiste de una sola función  $f$ , entonces la afirmación de que  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $z_0$ , es solo decir que  $f$  es continua en  $z_0$ . Lo importante acerca de la equicontinuidad es que el  $\delta$ , es el mismo para todas las funciones de  $\mathcal{F}$ . También observe que si  $F = \{f\}$  es equicontinua sobre  $E$ , entonces  $f$  debe ser uniformemente continua sobre  $E$ .

La analogía de continuidad con uniformemente continua se tiene en el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.16.** Supóngase que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  es equicontinua para cada punto de  $G$ , entonces  $\mathcal{F}$  es equicontinua sobre cada subconjunto compacto.

Si la familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua sobre cada subconjunto  $D_\alpha$  de  $G$ , entonces automáticamente es equicontinua sobre la unión  $\cup D_\alpha$ , tal como lo muestra el siguiente resultado

**Proposición 1.1.17.** *Sea  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$ . Entonces existe un subconjunto abierto máximo de  $G$  sobre el cual  $\mathcal{F}$  es equicontinua. En particular, si  $f$  es una función de un espacio métrico  $(G, d)$  en sí mismo, entonces existe un subconjunto abierto máximo de  $G$  sobre el cual la familia de iteradas  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  es equicontinua.*

Obsérvese que bajo ciertas restricciones equicontinuidad y normalidad son equivalentes tal como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.18 (de Arzela-Ascoli).** *Un conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  es normal si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- (a) *Para cada  $z \in G$ ,  $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$  tiene clausura compacta en  $X$ .*
- (b)  *$\mathcal{F}$  es equicontinua para cada punto de  $G$ .*

## 1.2. Conceptos Básicos de Dinámica Local

### 1.2.1. Funciones Racionales

Una función racional  $R(z)$  está definida como el cociente de dos polinomios  $P$  y  $Q$ , es decir,

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_mz^m} = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Así  $R$  está definida para toda  $z \in \mathbb{C}$  excepto las raíces de  $Q$ . Si  $P$  es el polinomio cero, entonces  $R$  es la función constante cero y si  $Q$  es el polinomio cero, entonces  $R$  es la función constante infinito.

Definimos  $R(\infty)$  como el límite de  $R(z)$  cuando  $z$  tiende a  $\infty$  y se define el grado  $\deg(R)$  de  $R$ , como

$$\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\},$$

donde  $\deg(S)$  es el grado usual del polinomio  $S$ .

El  $\infty$  es un punto especial de una función racional, cuando ésta es un polinomio de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$$

donde  $n > 0$  y  $a_n \neq 0$ . En este caso,  $P(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$  y la función

$$G(z) = \frac{1}{P(1/z)} = \frac{z^n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

es holomorfa cerca de cero y  $G'(0) = 0$ . Por lo que el  $\infty$  es un punto fijo de  $P$  con derivada cero. Más general, las funciones racionales son funciones meromorfas de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ , pero vistas de  $\hat{\mathbb{C}}$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  son analíticas. Si  $R$  es una función de grado  $d$  positiva, entonces  $R$  es una función de  $d$  -ramas de  $\hat{\mathbb{C}}$  sobre si mismo, es decir, para cualquier  $w \in \hat{\mathbb{C}}$ , la ecuación  $R(z) = w$  tiene  $d$  soluciones en  $z$ , contando las multiplicidades.

### 1.2.2. Órbitas

Uno de los problemas principales en el estudio de la iteración de una aplicación racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , es mostrar la convergencia de la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ , generada a partir de una condición inicial  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  y definida recursivamente como  $z_n = R(z_{n-1})$ . Notemos que si la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiene un límite  $L$ , entonces  $L$  es un punto fijo de  $R$ , ya que

$$R(L) = R(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = L.$$

Además de los puntos fijos, los puntos periódicos juegan un papel muy importante en la dinámica global de  $R$ , ya que si en lugar de tomar toda la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tomamos la subsucesión generada por los múltiplos de  $k$ , para un  $k$  fijo, es decir, la subsucesión  $\{z_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ , entonces, cuando esta converja, por el argumento anterior, lo hará a un punto periódico de periodo  $\ell$ , donde  $\ell|k$ .

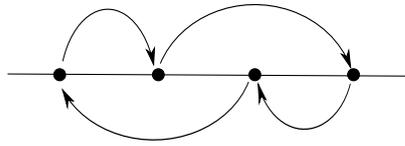
**Definición 1.2.1.** *Un punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  es un punto periódico de periodo  $k$  de una función  $f$  si  $f^k(z) = z$  y  $f^j(z) \neq z$  para  $j < k$ , donde  $f^k$  denota la composición de  $f$  consigo misma  $k$  veces.*

**Definición 1.2.2.** *Dado un  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , al conjunto*

$$\mathcal{O}_f(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : w = f^k(z) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

*se le llama la órbita de  $z$  bajo  $f$ .*

En el caso que  $z$  es periódico, este conjunto es finito y se le llama órbita periódica. El movimiento que representa una órbita de período cuatro se podría ver así, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Definición 1.2.3.** Dado  $x \in \hat{\mathbb{C}}$  y  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , diremos que  $x$  es un punto preperiódico o eventualmente periódico de periodo  $n$ , si existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(x)$  es un punto periódico de periodo  $n$ .

**Observación 1.2.4.** 1) Si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f$  no tiene puntos eventualmente periódicos.

2) Si  $x$  es un punto eventualmente periódico, entonces la cardinalidad de su órbita es finita.

Para entender mejor la definición 1.2.2 y 1.2.3, presentamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.2.5.** Si  $f(x) = 2x^2 - 1$ , entonces los puntos fijos de  $f$  son:  $-\frac{1}{2}$  y 1. Por otro lado los puntos periódicos de periodo dos son

$$x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ y } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Si tomamos  $x = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$  tenemos que  $x \rightarrow x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_0$ . Por lo tanto  $x$  es un punto preperiódico.

### 1.2.3. Conjugación

**Definición 1.2.6.** Dadas  $f$  y  $g$  funciones analíticas, se dice que son topológicamente (analíticamente) conjugadas en el abierto  $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ , si existe un homeomorfismo (bi-holomorfismo)  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  tal que  $\varphi \circ f(z) = g \circ \varphi(z)$  para toda  $z \in U$ . Esto es, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{g} & \varphi(U). \end{array}$$

Obsérvese que si  $f$  y  $g$  son dos funciones topológicamente conjugadas por medio de  $\varphi$  y  $z$  es un punto fijo de  $f$ , entonces  $\varphi(z)$  es un punto fijo de  $g$ , ya que  $g(\varphi(z)) = \varphi(f(z)) = \varphi(z)$ . Por lo que el homeomorfismo  $\varphi$  manda puntos fijos de  $f$  en puntos fijos de  $g$ , igualmente manda puntos periódicos de  $f$  en puntos periódicos de  $g$  tal como lo muestra el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.7.** *Sea  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un abierto y  $f : U \rightarrow U$ ,  $g : \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$  dos funciones analíticas conjugadas por el homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ . Si  $x$  es un punto periódico de  $f$  de periodo  $n$ , entonces  $\varphi(x)$  es un punto periódico de  $g$  de periodo  $n$ .*

*Demostración.* La demostración es por inducción, veamos para  $n = 1$ , es decir, supongamos que  $x$  es un punto fijo de  $f$ , así

$$g(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) = \varphi(x)$$

Supongamos que  $x$  es un punto fijo de  $f$  de periodo  $n + 1$ , así

$$g^{n+1}(\varphi(x)) = g(g^n(\varphi(x))) = g(\varphi(f^n(x))) = \varphi(f(f^n(x))) = \varphi(f^{n+1}(x)) = \varphi(x)$$

□

**Proposición 1.2.8.** *Para cada polinomio cuadrático  $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ , existe un  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $P_a(z) = az + z^2$  es analíticamente conjugado a  $P$ . De hecho la conjugación está dada por una función afín de la forma  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $\alpha \neq 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una conjugación de la forma  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$  tal que

$$\varphi(P(z)) = P_a(\varphi(z)) \tag{1.1}$$

Desarrollando (1.1) se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(a_2z^2 + a_1z + a_0) + \beta &= a(\alpha z + \beta) + (\alpha z + \beta)^2 \\ \alpha a_2 z^2 + \alpha a_1 z + \alpha a_0 + \beta &= \alpha^2 z^2 + (2\alpha\beta + \alpha a)z + \beta^2 + \beta a. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De donde se tienen las siguientes tres ecuaciones

$$\alpha a_2 = \alpha^2 \tag{1.3}$$

$$\alpha a_1 = 2\alpha\beta + \alpha a \tag{1.4}$$

$$\alpha a_0 + \beta = \beta^2 + \beta a \tag{1.5}$$

Como  $\alpha \neq 0$ , de (1.3) se sigue que

$$\alpha = a_2$$

Por lo que (1.4) se convierte en

$$a_2 a_1 = 2a_2 \beta + a_2 a \quad (1.6)$$

despejando  $a$  de (1.6), se tiene

$$a = a_1 - 2\beta$$

Remplazando el valor de  $a$  y de  $\alpha$  en (1.5), se obtiene

$$\beta = \frac{(a_1 - 1) \pm \sqrt{(1 - a_1)^2 - 4a_2 a_0}}{2}$$

□

Esta proposición nos muestra que el estudio dinámico de los polinomios cuadráticos lo podemos restringir a los polinomios de la forma  $P_a$ , con la ventaja de que estos últimos están parametrizados por el campo  $\mathbb{C}$ . De aquí, encontrar los puntos fijos de  $P$  se reduce a encontrar los puntos fijos de  $P_a$ , es decir, las raíces del polinomio  $(a - 1)z + z^2 = 0$ , los cuales son:

$$z = 0 \text{ y } z = 1 - a.$$

Otra familia muy importante es  $P_c(z) = z^2 + c$ , la cual está ligada a la familia  $P_a(z) = az + z^2$ , mediante el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.9.** *La familia  $P_a(z) = az + z^2$  es afínmente conjugada a la familia  $P_c(z) = z^2 + c$ .*

*Demostración.* Sean  $P_a(z) = az + z^2$ ,  $P_c(z) = z^2 + c$  y  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$ , con  $a, c, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , tal que  $\alpha \neq 0$ .

Resolviendo la ecuación  $\varphi(P_a(z)) = P_c(\varphi(z))$  se obtiene:

$$\alpha = 1, \beta = \frac{a}{2} \text{ y } c = -\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}.$$

□

La conjugación anterior  $\varphi$  es dos a uno, es decir, a cada  $c$  le corresponden dos valores de  $a$ . Es por ello que es importante considerar la familia  $P_c(z) = z^2 + c$ , ya que en esta familia, no hay polinomios repetidos, desde el punto de vista de conjugación afín. Más adelante, en el capítulo tres, abordaremos de nuevo esta familia.

#### 1.2.4. Ciclos Atractores

**Definición 1.2.10.** *Sea  $f$  una función analítica y  $z$  un punto periódico de  $f$  de periodo  $k$  con multiplicador  $\lambda = Df^k(z)$ , donde  $Df^k(z)$  denota la derivada de  $f^k$  en  $z$ . Decimos que*

1.  $z$  es atractor si  $|\lambda| < 1$ ; si  $\lambda = 0$  diremos que  $z$  es super-atractor,
2.  $z$  es repulsor si  $|\lambda| > 1$ , y
3.  $z$  es indiferente si  $|\lambda| = 1$ .

Si  $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  es una órbita periódica de  $f$ , entonces aplicando la regla de la cadena, se obtiene que  $Df^k(z_j)$  no depende de la  $j$ ; en consecuencia, la definición dada para puntos periódicos, no depende del punto y en consecuencia tiene sentido la definición para órbitas o ciclos periódicos.

**Teorema 1.2.11 (G. Koenigs-1884).** *Sea  $f$  una función analítica con un punto fijo en  $z_0$  y cuyo multiplicador es  $\lambda$ . Si  $0 < |\lambda| < 1$  ó  $|\lambda| > 1$ , entonces existen  $U, V$  vecindades de  $z_0$  y de  $0$ , respectivamente, y un biholomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  que conjugue analíticamente  $f$  con  $g(z) = \lambda z$ . Además, esta conjugación es única, módulo multiplicación por un escalar real.*

Este teorema nos dice que cerca de los puntos fijos atractores o repulsores las funciones se comportan como multiplicación por  $\lambda$ . En particular, si  $z_0$  es atractor, las órbitas de los puntos en una vecindad de  $z_0$  convergen a  $z_0$ .

Este teorema también es válido para órbitas periódicas atractoras o repulsores de periodo  $k$ , sustituyendo  $f$  por  $f^k$ , [CG].

**Definición 1.2.12 (Cuenca de Atracción).** *Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una aplicación racional y  $z^*$  un punto fijo atractor de  $f$ . La cuenca de atracción de  $z^*$  es el conjunto*

$$A_f(z^*) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z^*\}.$$

**La cuenca inmediata de atracción de  $z^*$**  denotada por  $A_f^*(z^*)$ , es la componente conexa de  $A_f(z^*)$  que contiene a  $z^*$ .

En el caso que  $\xi = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  es una órbita atractora de periodo  $k$ , entonces  $z_j$  es un punto fijo de  $f^k$  para  $j = 1, \dots, k$  y la cuenca de atracción de  $\xi$  es la unión de las cuencas de atracción  $A_{f^k}(z_j)$  para cada  $z_j$  con respecto a  $f^k$ , es decir,

$$A_f(\xi) = \cup_{j=1}^k A_{f^k}(z_j)$$

La cuenca inmediata de atracción del ciclo  $\xi$  denotada por  $A_f^*(\xi)$  es la unión de las  $k$  componentes de  $A_f(\xi)$  que contienen al ciclo.

Por definición, los puntos  $k$ -periódicos atractores siempre tienen dominios inmediatos de atracción abiertos y diferentes del vacío.

**Ejemplo 1.2.13.** La función  $f(z) = z^2$  tiene dos puntos fijos atractores, cero e infinito.  $A_f(0)$  es el disco unitario abierto y  $A_f(\infty)$  es el complemento de la cerradura del disco unitario.

**Teorema 1.2.14 (P. Fatou-1919).** Sea  $f$  una aplicación racional. Si  $z_0$  es un punto periódico atractor de  $f$ , entonces la cuenca inmediata de atracción de  $z_0$ ,  $A_f^*(z_0)$  contiene al menos un punto crítico de  $f$ .

Nótese que si  $f$  es un polinomio de grado  $d$  entonces por el Teorema 1.2.14,  $f$  tiene a lo más  $d - 1$  puntos periódicos atractores.

**Teorema 1.2.15 (L.E. Böttcher-1904).** Sea  $f$  una aplicación analítica y  $z_0$  un punto fijo super-atractor. Si  $f(z) = z_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$ , con  $a_k \neq 0$ , entonces existen  $U, V$  vecindades de  $z_0$  y  $0$ , respectivamente, y un biholomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  que conjugue  $f(z)$  y  $g(z) = z^k$ . Esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz  $(k - 1)$ -ésima de la unidad.

De igual manera que en el teorema de Koenigs, este teorema es válido para órbitas periódicas super-atractoras [CG].

### 1.2.5. Ciclos Indiferentes

Si una función analítica  $f$  en  $z_0$ , tiene un punto fijo  $z_0$  con multiplicador  $\lambda$  de módulo uno, entonces pueden ocurrir dos cosas: que exista una vecindad  $U$  de  $z_0$  donde  $f$  sea conjugada a la rotación  $\lambda z$  o que no exista tal vecindad; si ocurre el primer caso, decimos que  $f$  es **linealizable** en  $z_0$ .

Cuando  $\lambda$  es una raíz de la unidad,  $f$  no es linealizable, [CG]. Sin embargo, cuando  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  y  $\theta$  es irracional, el problema de linealización ha resultado ser complicado y antes de dar los resultados asociados a este caso, será necesario dar algunas definiciones y resultados de teoría de números que pueden ser consultados en [HW].

Notemos que si  $t \in [0, 1)$ , entonces lo podemos desarrollar en fracción continua y obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

que converge a  $t$ . A  $\frac{p_n}{q_n}$  se le llama  $n$ -ésima reducida o  $n$ -ésima aproximación a  $t$ . De hecho, la sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  está formada por números enteros no negativos y se obtiene usando el algoritmo de la división. En general, se

puede obtener la sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y, salvo  $a_0$ , todos son enteros no negativos. Además, la sucesión es finita cuando  $t$  es racional e infinita cuando  $t$  es irracional.

**Definición 1.2.16.** Sea  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Decimos que  $t$  es de tipo acotado si la sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  es acotada.

**Definición 1.2.17.** Decimos que  $t \in \mathbb{R}$  es diofantino de exponente  $k \geq 2$ , si existe  $C > 0$ , tal que

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^k} \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1$$

**Proposición 1.2.18.** Sea  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tal que  $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Entonces,  $t$  es de tipo acotado si y sólo si  $t$  es diofantino de exponente dos.

Como todos los números algebraicos son de tipo acotado, este resultado nos dice que los números algebraicos son mal aproximados por racionales.

**Teorema 1.2.19 (Siegel-1942).** Sea  $f$  una función analítica en  $z_0$ , tal que  $f(z_0) = z_0$  y  $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i \theta}$ . Si  $\theta$  es diofantino, entonces  $f$  es linealizable en  $z_0$ .

El dominio máximo de linealización  $\Delta$  de  $f$  se le llama **disco de Siegel** y a  $\theta$  se le llama número de rotación de  $f$  en  $\Delta$ .

A partir de este teorema, se tiene la siguiente clasificación de los puntos indiferentes en término de  $\theta$ .

**Definición 1.2.20.** Sea  $f$  una función analítica en  $z_0$ , tal que  $z_0$  es un punto fijo de  $f$  con multiplicador  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ . Decimos que el punto fijo  $z_0$  es:

1. Parabólico, si  $\theta$  es racional.
2. Siegel, si  $\theta$  es irracional y  $f$  es linealizable en una vecindad de  $z_0$ .
3. Cremer, si  $\theta$  es irracional y  $f$  no es linealizable en  $z_0$ .

**Teorema 1.2.21 (Brjuno-1965).** Sea  $f$  una función analítica en  $z_0$  tal que  $z_0$  es un punto fijo de  $f$  con multiplicador  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ . Si  $\frac{p_n}{q_n}$  denota la  $n$ -ésima aproximación a  $\theta$  y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty,$$

entonces  $f$  es linealizable en  $z_0$

J.C. Yoccoz demostró en 1988 que en la familia de polinomios cuadráticos, la condición de Brjuno es necesaria para tener linealización, pero en general no se tiene una condición necesaria, [CG, M].

# Conjunto de Fatou y de Julia

## 2.1. Definición y Propiedades

En esta sección daremos las definiciones y resultados básicos de los conjuntos de Julia y Fatou, los cuales pueden ser consultados más ampliamente en [Be, CG, DH].

**Definición 2.1.1.** Sea  $R$  una aplicación racional. Decimos que  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  pertenece al conjunto de Fatou de  $R$ ,  $F_R$ , si la familia  $\{R^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es normal en una vecindad de  $z_0$ . El conjunto de Julia  $J_R$  se define como el complemento de  $F_R$ .

Las siguientes proposiciones nos van a caracterizar los conjuntos de Julia de funciones racionales con grado  $d \geq 2$ .

**Proposición 2.1.2.** El conjunto de Julia  $J_R$  es no vacío.

*Demostración.* Supongamos que  $R$  es una función racional con grado  $d \geq 2$  y que  $J_R = \emptyset$ , entonces  $\{R^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia normal para todo punto de  $\hat{\mathbb{C}}$ , por lo que existe una subsucesión  $\{R^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $R^{n_k}(z)$  converge uniformemente a  $f(z)$ , para alguna  $f$  analítica. Nótese que la convergencia uniforme garantiza que  $f$  es racional y como  $d \geq 2$  es el grado de  $R$ , entonces  $d^{n_k}$  es el grado de  $R^{n_k}$ , por lo cual si  $n_k \rightarrow \infty$ , entonces  $d^{n_k} \rightarrow \infty$ , lo cual contradice el hecho de que  $f$  es racional.  $\square$

**Proposición 2.1.3.** El conjunto  $J_R$  es compacto.

*Demostración.* Claramente  $F_R$  es un conjunto abierto, entonces  $J_R$  es cerrado. Como  $\hat{\mathbb{C}}$  es compacto, entonces  $J_R$  es compacto.  $\square$

**Proposición 2.1.4.** El conjunto de Fatou y de Julia de la  $k$ -ésima iterada  $R^n$  es igual al conjunto de Fatou y de Julia de  $R$ .

**Proposición 2.1.5.** *Los conjuntos de Julia y de Fatou de  $R$  son completamente invariante.*

**Proposición 2.1.6.** *Si  $z \in J_R$ , entonces el conjunto  $\cup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z)$  es denso en  $J_R$ .*

Esta proposición se usa con frecuencia para construir un algoritmo que permite dibujar el conjunto de Julia en una computadora.

## 2.2. Componentes de Fatou

En esta sección de nuevo suponemos que el grado de  $R$  es  $d$  y es mayor que dos. Como el conjunto de Fatou es completamente invariante, entonces la imagen de cualquier componente de Fatou bajo  $R$  es una componente de Fatou y la imagen inversa de una componente de Fatou es la unión disjunta de a lo más  $d$  componentes de  $F_R$ . La dinámica de  $R$  puede ser comprendida en parte por la forma en que las componentes de  $F_R$  son movidas por  $R$ .

Dada una componente fija  $U$  de  $F_R$ . Existen cuatro posibilidades para la órbita de  $U$  bajo  $R$ .

1. Si  $R(U) = U$ , llamamos a  $U$  **componente fija** de  $F_R$ .
2. Si  $R^n(U) = U$  para algún  $n \geq 1$ , entonces a  $U$  se le llama **componente periódica** de  $F_R$ . El entero mínimo  $n$  es el período de la componente.
3. Si  $R^m(U)$  es periódica para algún  $m \geq 1$ , entonces a  $U$  se le llama **componente preperiódica** de  $F_R$ .
4. Por otra parte si todos  $\{R^n(U)\}_{n \geq 1}$  son distintos, entonces a  $U$  se le llama **dominio errante**.

### 2.2.1. Clasificación de Componentes Periódicas

**Teorema 2.2.1 (Clasificación de componentes de Fatou).** *Si  $U$  es una componente de Fatou periódica de periodo  $k$  de una función racional  $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , entonces*

1.  $U$  contiene un punto periódico atractor  $\zeta$  de periodo  $k$  y un punto crítico  $c$  de  $R$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R^{nk}(c) = \zeta$ .
2.  $U$  contiene a un punto (crítico) periódico de periodo  $k$  super-atractor.

3.  $U$  contiene a un punto periódico de periodo  $k$  indiferente con derivada  $e^{2\pi i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{I}$  y la dinámica de  $R|_U$  es conjugada a  $e^{2\pi i\theta}z$ .  
En este caso existe un punto crítico  $c_1$  de  $R$  tal que:

$$\partial U \subset \overline{\mathcal{O}_R(c_1)}.$$

4. La frontera de  $U$  contiene a un punto periódico de periodo  $k$  indiferente con derivada  $e^{2\pi ip/q}$  y  $U$  contiene un punto crítico que converge al punto parabólico.
5.  $U$  es un anillo topológico donde la dinámica es conjugada a una rotación.

La clasificación de componentes periódicas del conjunto de Fatou está contenida en los trabajos de Fatou y Julia, pero la existencia de dominios de tipo 4 y 5 fue demostrada posteriormente por Siegel y Herman, respectivamente. La posible existencia de componentes errantes del conjunto de Fatou  $F_R$  fue uno de los problemas abiertos por muchas décadas, en el estudio de la dinámica de las funciones racionales. Fue hasta la década de los ochenta que D. Sullivan demostró el siguiente resultado, el cual deja afuera las componentes errantes, [CG].

**Teorema 2.2.2 (Sullivan-1985).** *Si  $R$  es una función racional y  $U \subset F_R$  es una componente, entonces existe  $m \geq 0$  y  $n \geq 1$  tal que  $R^m(U)$  es periódica de periodo  $n$ .*

Este teorema nos dice que la órbita de cualquier componente de Fatou de una aplicación racional termina en una componente periódica. Sin embargo, I. N. Baker (1976) mostró que los conjuntos de Fatou de algunas funciones enteras en  $\mathbb{C}$  tiene dominios errantes, [B].

El conjunto postcrítico

$$P_R = \overline{\{R^n(z_0) : z_0 \text{ es un punto crítico de } R \text{ y } n \in \mathbb{N}\}},$$

es decir, la cerradura de la unión de las órbitas de todos los puntos críticos de una aplicación racional  $R$ . Este conjunto está estrechamente ligado a la dinámica de  $R$ , como lo resume el siguiente resultado, [CG].

**Teorema 2.2.3.** *El conjunto postcrítico  $P_R$  contiene, los ciclos atractores de  $R$ , los ciclos indiferentes que pertenecen al conjunto de Julia y la frontera de cada disco de Siegel y anillo de Herman.*

En particular, este resultado nos dice que el número de órbitas no repulsoras en una función racional está acotado por su número de puntos críticos.

### 2.2.2. Hiperbolicidad

Una idea central en dinámica que fue desarrollada en los años 1960s y 1970s (por Smale, Anosov, Sinai y muchos otros), es la idea de hiperbolicidad. En esta sección daremos la definición de aplicaciones racionales hiperbólicas y mostraremos las propiedades que hacen de este tipo de aplicaciones bien comportadas.

**Definición 2.2.4.** *Una aplicación racional,  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , es hiperbólica si las órbitas de todos los puntos críticos convergen a ciclos periódicos atractores de  $R$ .*

De entre todas las funciones racionales, las hiperbólicas son las mejor comportadas, ya que cuando  $R$  es hiperbólica, existe un conjunto finito  $A \subset \hat{\mathbb{C}}$  que atrae a un subconjunto abierto de  $\hat{\mathbb{C}}$  de medida total. El siguiente resultado caracteriza la propiedad de ser hiperbólico, [CG].

**Teorema 2.2.5 (Caracterización de Hiperbolicidad).** *Sea  $R$  una aplicación racional. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El conjunto poscrítico  $P_R$  es ajeno al conjunto de Julia  $J_R$ .*
2. *No hay puntos críticos o ciclos parabólicos en el conjunto de Julia.*
3. *Cada punto crítico de  $R$  converge a un ciclo atractor bajo iteración positiva.*
4. *Existe una métrica conforme suave  $\rho$  definida en una vecindad del conjunto de Julia tal que  $\|R'(z)\|_\rho > C > 1$  para cada  $z \in J_R$ .*
5. *Existe un entero  $n > 0$  tal que  $R^n$  expande estrictamente la métrica esférica en el conjunto de Julia.*

A las aplicaciones racionales hiperbólicas algunas veces se les llama expansivas o que satisface el Axioma A. de Smale.

**Teorema 2.2.6.** *El conjunto de Julia de una aplicación racional hiperbólica tiene medida de Lebesgue cero.*

De hecho, la dimensión de Hausdorff del conjunto de Julia de una aplicación racional hiperbólica es estrictamente menor que dos.

Uno de los problemas centrales en dinámica holomorfa es la siguiente conjetura que se remonta a los tiempos de Fatou.

**Conjetura 2.2.7 (Densidad de hiperbolicidad).** *El conjunto de aplicaciones racionales hiperbólicas es abierto y denso en el espacio de todas las aplicaciones racionales de grado  $d$ .*

La propiedad de que el conjunto de aplicaciones racionales hiperbólicas sea abierto es consecuencia del teorema de la función implícita, pero la propiedad de la densidad es difícil de mostrar y es conocida únicamente para la familia de funciones cuadráticas real, [GS, Ly].

### 2.2.3. Rol del Punto Crítico

**Teorema 2.2.8 (Fórmula de Riemann-Hurwitz).** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Riemann conexas y sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un cubriente ramificado de grado  $k$ , teniendo  $n$  puntos críticos contando multiplicidad. Entonces las características de Euler  $\chi(S_1)$  y  $\chi(S_2)$  están relacionadas por*

$$\chi(S_1) = k\chi(S_2) - n.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos dar en  $S_2$  una triangulación  $\tau$  teniendo  $f$  caras,  $e$  aristas y  $v$  vértices de tal manera que todos los valores críticos de  $f$  sean vértices, ya que si originalmente existe un valor crítico que no es vértice en  $\tau$ , basta con colocarle aristas que lo unan a los vértices adyacentes.

Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(\tau)$  es una triangulación de  $S_1$  teniendo  $kf$  caras,  $ke$  aristas,  $kv - n$  vértices, por lo que

$$\begin{aligned}\chi(S_1) &= kf - ke + (kv - n) \\ &= k(f - e + k) - n \\ &= k\chi(S_2) - n\end{aligned}$$

□

Si  $f$  es una función no constante y analítica en  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces  $f$  tiene asociada una serie de Taylor en  $z_0$ , es decir,

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

donde  $a_k \neq 0$ , y el entero positivo  $k$  está únicamente determinado por la condición de que el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

existe, es finito y distinto de cero. Al entero  $k$  lo denotaremos por  $v_f(z_0)$  y le llamaremos **orden** de  $f$  en  $z_0$ . Este número da las soluciones de la ecuación

$$f(z) = f(z_0).$$

**Definición 2.2.9.** Sea  $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ , la deficiencia total de  $R$  sobre  $A$  es

$$\delta_R(A) = \sum_{z \in A} [v_R(z) - 1].$$

**Corolario 2.2.10.** Para cualquier función racional  $R$  no constante

$$\delta_R(\hat{\mathbb{C}}) = 2 \deg(R) - 2$$

*Demostración.* Como  $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , de la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos

$$\begin{aligned} \chi(\hat{\mathbb{C}}) &= d\chi(\hat{\mathbb{C}}) - \sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} [v_R(z) - 1] \\ 2 &= 2d - \sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} [v_R(z) - 1], \end{aligned}$$

de donde se tiene lo deseado.  $\square$

**Proposición 2.2.11.** Si  $E$  es un conjunto cerrado totalmente invariante, entonces  $E$  tiene infinitos elementos o  $E$  contiene a lo más dos elementos.

*Demostración.* Si  $E$  es finito, entonces el complemento  $U$  es conexo y totalmente invariante. Además la característica de Euler de  $U$  está dada por:

$$\chi(U) = 2 - \chi(E) = 2 - \#E$$

Sea  $n$  el número de puntos críticos de  $f$  en  $U$  contando multiplicidad. Aplicando la fórmula de Riemann Hurwitz a  $f: U \rightarrow U$  tenemos:

$$\chi(U) = k\chi(U) - n.$$

Así

$$2 - \#E = \chi(U) = \frac{n}{k-1} \geq 0.$$

Por lo tanto  $\#E \leq 2$ .  $\square$

**Proposición 2.2.12.** *Si  $E$  es un conjunto cerrado totalmente invariante con infinitos elementos, entonces  $J_R \subset E$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega = \hat{C} \setminus E$  el complemento de  $E$ , el cual es un conjunto abierto totalmente invariante. Como  $\omega$  deja libre más de tres puntos, entonces por el Teorema de Montel [C1], la familia de iteradas  $\{R^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es normal sobre  $\omega$ .

Así,  $\omega \subset F_R$ , por lo que  $J_R \subset E$ . □

## 2.3. Número de componentes de Fatou

Para demostrar el número de componentes del conjunto de Fatou, vamos a enunciar una serie de resultados que pueden ser consultados en [Be].

**Proposición 2.3.1.** *Si  $D \subset \hat{C}$  es abierto. Entonces  $\hat{C} \setminus D$  es conexo si y sólo si cada componente de  $D$  es simplemente conexo.*

**Teorema 2.3.2.** *Si  $\deg(R) \geq 2$  y  $F_0$  es una componente completamente invariante de  $F_R$ . Entonces*

- i)  $\partial F_0 = J_R$ .
- ii)  $F_0$  es simplemente conexo o infinitamente conexo.
- iii) Todas las componentes de  $F_R$  son simplemente conexas.
- iv)  $F_0$  es simplemente conexo si y sólo si  $J_R$  es conexo.

**Teorema 2.3.3.** *Sean  $F_0$  y  $F_1$  componentes del conjunto de Fatou  $F_R$  de una función racional  $R$  y supóngase que  $R$  mapea  $F_0$  sobre  $F_1$ . Entonces, para algún entero  $m$ ,  $R$  es un cubriente ramificado de grado  $m$  que mapea  $F_0$  sobre  $F_1$  y*

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(F_1). \quad (2.1)$$

**Teorema 2.3.4.** *El conjunto de Fatou  $F_R$  de  $R$  contiene a lo más dos componentes completamente invariante. Además si son dos componentes completamente invariante entonces cada componente es simplemente conexa.*

*Demostración.* Supóngase que  $\deg(R) = d \geq 2$  y que cada componente  $F_1, F_2, \dots, F_k$  es completamente invariante, donde  $k \geq 2$ . Aplicando el Teorema 2.3.2 tenemos que cada  $F_j$  es simplemente conexo. Aplicando el Teorema 2.3.4 a cada  $F_j$ , obtenemos que

$$\delta_R(F_j) = (d - 1)\chi(F_j)$$

$$k(d-1) = \sum_{j=1}^k \delta_R(F_j) \leq \delta_R(\hat{\mathbb{C}}) = 2d-2.$$

Por lo que  $k \leq 2$ . □

**Teorema 2.3.5.** *El conjunto de Fatou  $F_R$  de una función racional  $R$  tiene 0, 1, 2 o infinitas componentes.*

*Demostración.* Supongamos que  $\deg(R) \geq 2$  y que  $F_R$  tiene un número finito de componentes, digamos  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , como  $R : F_R \rightarrow F_R$ , entonces existe un entero  $m$  tal que  $F_j$  es completamente invariante bajo  $R^m$ , para cada  $1 \leq j \leq k$  y como  $F_{R^m} = F_R$  aplicando el Teorema 2.3.4, tenemos que  $k \leq 2$ . □

## 2.4. Funciones con Conjunto de Fatou Vacío

Para mostrar la existencia de conjuntos de Fatou vacíos, se calcula el conjunto de Julia de la siguiente función racional ,

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)} \tag{2.2}$$

y se muestra que es toda la esfera. Este ejemplo fue dado por Lattès en 1918, [Be].

Para la función dada en (2.2), calculemos sus puntos críticos y veamos a donde converge su órbita. Los puntos críticos están dados por las raíces de

$$f'(z) = \frac{(z^2 + 1)(z^4 - 6z^2 + 1)}{4(z^2 - 1)^2 z^2} = 0$$

los cuales son  $i, -i, \sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ . Las órbitas de los puntos críticos se muestran en el diagrama de la figura 2.1.

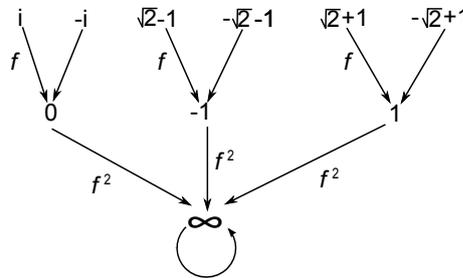


Figura 2.1: órbita de los puntos críticos.

Ahora nótese que el infinito es un punto fijo de la función 2.2, ya que

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)} = \infty$$

Además, el infinito es un punto repulsor, esto debido a que 0 es un punto fijo repulsor de  $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{-4z(z^2 - 1)}{(z^2 + 1)^2}$ .

Por lo tanto, todos los puntos críticos caen en una órbita repulsora, del teorema 2.2.1 de clasificación de las componentes de Fatou se concluye que no puede existir ninguna componente de Fatou y por lo tanto  $J_R = \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 2.4.1.** *Si todos los puntos críticos de una función racional  $R$  son eventualmente periódicos, entonces el Fatou de  $R$  es vacío.*

*Demostración.* Supongamos que todos los puntos críticos de  $R$  son eventualmente periódicos y que el Fatou  $F(R)$  es no vacío, entonces por el teorema de Sullivan, existe una componente de Fatou la cual es periódica bajo  $R$ . Aplicando el teorema de clasificación de componentes de Fatou tenemos que ocurre solo uno de los cinco casos mostrados anteriormente.

En el caso de que tengamos una componente que tenga un punto fijo superatractor, entonces tenemos un punto crítico periódico, mientras que en los casos restantes, existe un punto crítico con órbita infinita. En todos los casos llegamos a una contradicción, por lo que el Fatou de  $R$  debe ser vacío.  $\square$

El siguiente resultado nos permite caracterizar funciones racionales cuyo conjunto de Julia es toda la esfera de Riemann.

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $R$  una función racional.  $J_R = \hat{\mathbb{C}}$  si y sólo si existe algún  $z$  cuya órbita positiva  $\mathcal{O}_R(z) = \{R^n(z) : n \geq 1\}$  es densa en la esfera de Riemann.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sean  $\{B_n : n \geq 1\}$  una base numerable de  $\hat{\mathbb{C}}$  y  $D = \{z : \mathcal{O}_R(z) \text{ es densa en } \hat{\mathbb{C}}\}$ , esto es,  $z \in D$  si y sólo si para todo  $k$ , existe algún  $n$  tal que  $R^n(z) \in B_k$ . Así

$$D = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} R^{-n}(B_k) \tag{2.3}$$

Ahora supóngase que  $D = \emptyset$ ,  $A_k = \hat{\mathbb{C}} \setminus B_k$  y  $E_k = \bigcap_{n \geq 1} R^{-n}(A_k)$ , entonces aplicando leyes De Morgan a (2.3) se tiene que :

$$\hat{\mathbb{C}} = D^c = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} (R^{-n}(B_k))^c = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} R^{-n}((B_k)^c) = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} R^{-n}(A_k) = \bigcup_{k \geq 1} E_k \bullet$$

Nótese que por el teorema de Baire,  $\hat{\mathbb{C}}$  no es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, por lo que para algún  $k$ , la clausura de  $E_k$  tiene interior no vacío, digamos  $W$ . Por otro lado, como  $R$  es continua, entonces  $E_k$  es cerrado, así  $W \subset E_k = \overline{E_k}$ . Esto significa que para todo  $n$ ,  $R^n(W) \subset A_k$ , por lo que  $R^n$  sobre  $W$  no toma valores en el abierto  $B_k$ . Aplicando el teorema de Montel a la familia  $\{R^n\}_{n \geq 1}$  sobre  $W$  tenemos que  $\{R^n\}_{n \geq 1}$  es normal en  $W$ . Así  $W \subset F_R$ , contradiciendo el hecho de que  $J_R = \hat{\mathbb{C}}$ . Por lo tanto  $D \neq \emptyset$  y se tiene lo deseado.

$\Leftrightarrow$ ) Supóngase que  $J_R$  no es toda la esfera de Riemann, es decir,  $F_R \neq \emptyset$  y también que existe un  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  cuya órbita  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en la esfera.

### Caso I

Si  $z \in J_R$ , como  $J_R$  es invariante, entonces  $\mathcal{O}_R(z) \subset J_R$ . Además como  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en la esfera y  $J_R$  es cerrado, se tiene que

$$\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathcal{O}_R(z)} \subset \overline{J_R} = J_R,$$

es decir,  $J_R = \hat{\mathbb{C}}$ , contradiciendo el hecho de que  $F_R \neq \emptyset$ .

### Caso II

Si  $z$  pertenece a alguna componente  $\Omega$  de Fatou  $F_R$ , considerese las siguientes componentes de  $F_R$ .

$$\Omega, F(\Omega), F^2(\Omega), \dots$$

Como  $\mathcal{O}_R(z)$  es denso en la esfera, existe un  $N$  tal que  $R^N(\Omega) = \Omega$  y para cualquier componente  $\Omega_1$  de  $F_R$  existe un  $n$  tal que  $R^n(z) \in \Omega_1$ . Así, se tiene que  $R^n(\Omega) = \Omega_1$ . Sea  $N$  el mínimo entero tal que  $R^N(\Omega) = \Omega$ . En consecuencia,

$$F_R = \Omega \cup R(\Omega) \cup \dots \cup R^{N-1}(\Omega) \quad (2.4)$$

donde  $\Omega, R(\Omega), \dots$ , y  $R^{N-1}(\Omega)$  son mutuamente disjuntas. De aquí se tiene  $\Omega$  es completamente invariante bajo  $R^N$ .

Por otro lado, como  $\Omega$  es una componente de Fatou periódica, entonces por el teorema de clasificación de Fatou tenemos que  $\Omega$  es uno y solo uno de los cinco casos de dicho teorema. En ninguno de estos casos se puede dar que la órbita de un punto sea densa en la componente de Fatou, por lo que se tiene una contradicción.

De ambos casos concluimos que  $J_R = \hat{\mathbb{C}}$ . □

En este capítulo, restringiremos nuestro estudio a la dinámica de los polinomios. En particular se define el conjunto de Julia lleno y se estará interesado en analizar la dinámica y el espacio de parámetros de la familia cuadrática. Se enunciará la conjetura de hiperbolicidad para el caso cuadrático, así como algunos resultados equivalentes. Los resultados de este capítulo pueden ser consultados más ampliamente en [Be, CG, DH]

## 3.1. Conjunto de Julia Lleno

Antes de definir el dominio de atracción del infinito conviene observar que si  $P$  es un polinomio de grado  $d > 1$ , entonces el infinito es un punto fijo superatractor y por el teorema de Böttcher, existe una vecindad  $U$  del infinito donde  $P$  es analíticamente conjugado a la función  $z^d$ . En consecuencia, la órbita de cualquier punto  $z \in U$  converge al infinito y por lo tanto  $z \in F_P$ .

**Definición 3.1.1.** *El dominio de atracción del infinito es:*

$$A_P(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty\} \subset F_P$$

y el conjunto de Julia lleno de  $P$

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_P(z) \text{ es acotada}\}.$$

### 3.1.1. Propiedades de $K_P$

De la definición 3.1.1 se tienen las siguientes resultados para  $K_P$ .

**Proposición 3.1.2.** *El conjunto de Julia  $J_P$  es la frontera de  $K_P$ .*

*Demostración.* Primeramente observe que  $J_P \subset K_P$ . En efecto, ya que  $\infty \in A_P(\infty) \subset F_P$ , esto demuestra que  $\mathbb{C} \setminus K_P \subset F_P$ . Además, si  $U$  es una componente del interior de  $K_P$ , entonces las iteradas de  $P$  son acotadas en  $U$ , por lo tanto forman una familia normal. Esto prueba que  $J_P \subset \partial K_P$ .

Si  $z \in \partial K_P$ , entonces para un abierto arbitrario, existe un conjunto abierto de puntos con órbita acotada y un conjunto abierto de puntos con órbita tendiendo a infinito. Por lo tanto, la familia de iteradas de  $P$  no es normal en cualquier vecindad de  $z$ . Esto demuestra que  $\partial K_P \subset J_P$ .  $\square$

Otras propiedades importantes de  $K_P$ , son las siguientes.

1.  $K_P$  es no vacío, compacto y perfecto.
2. Es un conjunto lleno, es decir, su complemento en  $\hat{\mathbb{C}}$  es conexo.

**Teorema 3.1.3 (Fatou-1919).** *Sea  $P$  un polinomio. El conjunto  $K_P$  es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico de  $P$  es acotada.*

## 3.2. Familia cuadrática

En esta sección vamos a restringir el estudio a la familia  $P_c(z) = z^2 + c$  para  $c \in \mathbb{C}$ . Denotemos por  $K_c = K_{P_c}$  y  $J_c = J_{P_c}$ . Del teorema de Fatou 3.1.3 se siguen inmediatamente los siguientes resultados.

**Corolario 3.2.1.** *El conjunto  $J_c$  es conexo si y sólo si la órbita de cero es acotada*

**Corolario 3.2.2.** *Si la órbita de cero escapa bajo iteración de  $P_c$ , entonces  $K_c = J_c$  es un conjunto de Cantor.*

Este resultado nos dice que si la órbita de cero bajo  $P_c$  escapa, entonces  $K_c$  es totalmente desconexo, pero si la órbita de cero no escapa, entonces  $K_c$  es un conjunto conexo. Esto es, solo hay dos tipos de conjuntos de Julia lleno para polinomios cuadráticos, aquellos que consisten de una componente y aquellos que consisten de infinitas componentes.

En la figura 3.1 se muestran los conjuntos de Julia lleno de la familia  $P_c(z) = z^2 + c$  para  $c = -1, 0, -0.1225 + 0.7448i, i, -i, 0.2234 + 0.6730i, -0.5076 - 0.5601i, -0.7625 - 0.1170i$ .

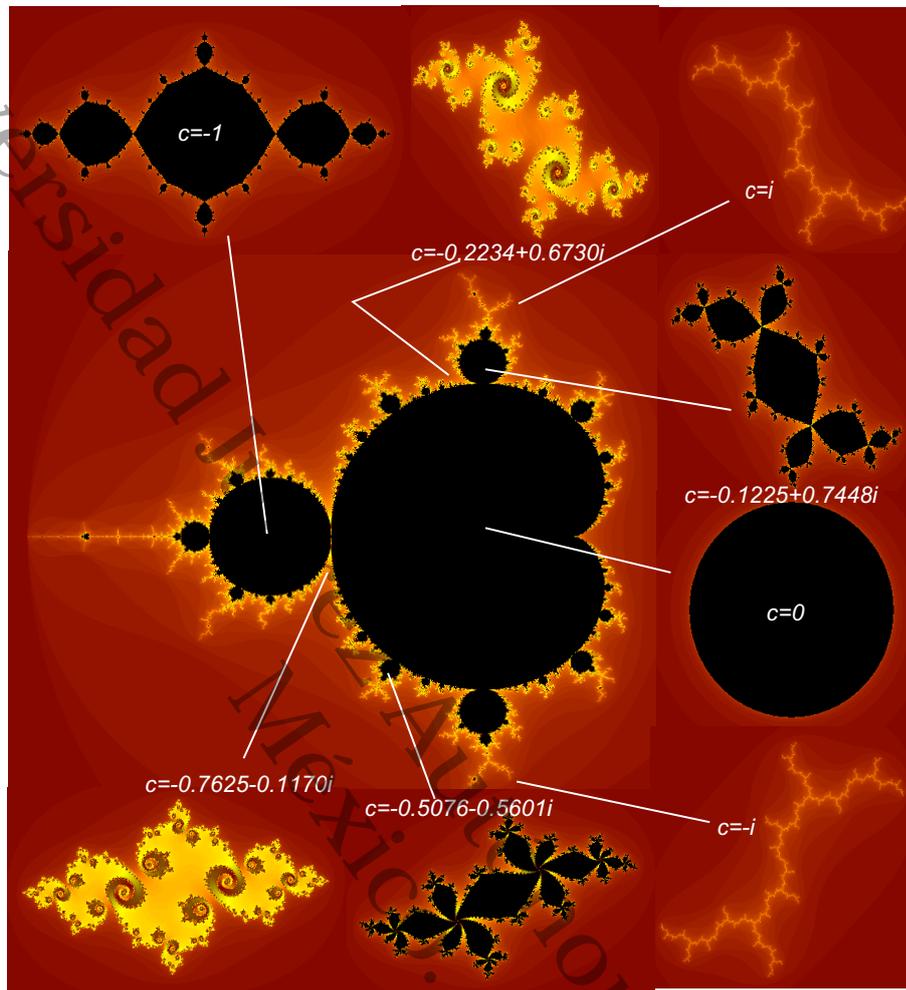


Figura 3.1: Algunos conjuntos de Julia lleno para la familia  $P_c(z) = z^2 + c$ .

### 3.2.1. Conjunto de Mandelbrot

**Definición 3.2.3.** *El conjunto de Mandelbrot  $M$  es  $M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_c(0) \text{ es acotada}\}$ .*

Nótese que  $M$  es diferente del vacío, ya que para  $c = 0$  el conjunto de Julia lleno es el disco unitario cerrado centrado en cero y por lo tanto es conexo. A continuación mostraremos la siguiente proposición que nos permite acotar el conjunto de Mandelbrot.

**Proposición 3.2.4.** *Sea  $S = \max\{2, |c|\}$ . Si  $|z| > S$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(z) = \infty$$

*Demostración.* Supongamos que  $|z| > S$ , de donde se sigue

$$\frac{|P_c(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq \frac{|z|^2 - |c|}{|z|} > |z| - 1 > 1. \quad (3.1)$$

De (3.1) se tiene que  $|P_c(z)| > |z|$ , por lo que  $|P_c(z)| < |P_c^2(z)|$  y haciendo inducción sobre  $n$  se obtiene  $|P_c^n(z)| < |P_c^{n+1}(z)|$ . Así  $|P_c^n(z)|$  tiende a infinito, cuando  $n$  tiende a infinito.  $\square$

**Corolario 3.2.5.** *Si  $|c| > 2$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = \infty.$$

*Demostración.* Como  $|P_c(0)| > 2$ , aplicando la proposición 3.2.4, se tiene lo deseado.  $\square$

Del corolario 3.2.5 podemos observar que el conjunto de Mandelbrot está contenido en el disco cerrado de radio dos, es decir,  $M \subset \overline{D_2(0)}$ .

**Teorema 3.2.6 (Douady-Hubbard-1982).** *El conjunto  $M$  es compacto, conexo y lleno.*

### 3.2.2. Componentes hiperbólicas del conjunto de Mandelbrot

La conjetura 2.2.7 de hiperbolicidad para la familia cuadrática se convierte en la siguiente:

**Conjetura 3.2.7.** *El conjunto de las  $c$  para las cuales  $P_c(z) = z^2 + c$  es hiperbólico forman un conjunto abierto y denso en  $\mathbb{C}$ .*

Nótese que si  $c \notin M$ , entonces por el Corolario 3.2.5 el punto crítico converge al punto fijo super-atractor en infinito, por lo que  $P_c$  es hiperbólico.

**Proposición 3.2.8.** *Si  $P_c$  tiene una órbita atractora en  $\mathbb{C}$ , entonces  $P_c$  es hiperbólico y  $c \in M$ .*

*Demostración.* Si  $P_c$  tiene una órbita periódica atractora en  $\mathbb{C}$ , entonces por el teorema de Fatou 1.2.14 atrae al punto crítico  $z = 0$ , por lo que la órbita de cero es acotada, así  $c \in M$ . Además como el otro punto crítico  $z = \infty$  es un super-atractor,  $P_c$  es hiperbólico.  $\square$

Una formulación equivalente de la conjetura 3.2.7 es la siguiente.

**Conjetura 3.2.9 (HG2).** *Cada componente del interior del conjunto de Mandelbrot es hiperbólica.*

**Conjetura 3.2.10 (MLC).** *La frontera del conjunto de Mandelbrot es localmente conexa.*

**Teorema 3.2.11 (Douady-Hubbard-1982).** *Si la frontera del conjunto de Mandelbrot es localmente conexa, entonces el interior del conjunto de Mandelbrot es la unión de componentes hiperbólicas.*

Este resultado fue demostrado por Douady y Hubbard en [DH], por lo cual la conjetura 3.2.10 es muy importante ya que de probarse, esta implicaría la conjetura de Fatou para familias cuadráticas.

Por otro lado, es importante mencionar que la conjetura 3.2.7 restringida a los reales, fue demostrada por Graczyk-Swiatek [GS] y Lyubich [Ly] independientemente.

**Definición 3.2.12.** *Una componente  $U$  del interior del Mandelbrot  $M$  es hiperbólica si  $P_c$  es hiperbólica para alguna  $c \in U$ .*

Para entender mejor las definiciones anteriores de hiperbolicidad, calculemos algunas componentes hiperbólicas del interior del Mandelbrot, ayudandonos de la proposición 3.2.8.

Para calcular los  $c \in U$  tal que  $U$  tiene un punto fijo atractor, debemos resolver las siguientes dos ecuaciones

$$P_c(z) = z \quad (3.2)$$

$$|P'_c(z)| = |2z| < 1 \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.2) tenemos que  $P_c$  tiene dos puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , uno de los cuales debe ser atractor y el otro debe ser repulsor, ya que si los dos fueran atractores, entonces por el teorema de Fatou 1.2.14,  $A_{P_c}^*(\alpha)$  debe contener un crítico al igual que  $A_{P_c}^*(\beta)$ , lo cual es imposible ya que  $P_c$  solo tiene un punto crítico.

Denotemos por  $\alpha$  al punto fijo atractor. Así,

$$|P'_c(\alpha)| = |2\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{2}$$

y para  $z = \alpha$

$$P_c(\alpha) = \alpha^2 + c = \alpha \Rightarrow c = \alpha - \alpha^2. \quad (3.4)$$

Así el conjunto de parámetros  $c$  para los cuales se tiene un punto fijo atractor es justamente la imagen del disco  $\{\alpha : |\alpha| < \frac{1}{2}\}$  bajo la función  $z \mapsto z - z^2$ . La función  $z \mapsto z - z^2$  la podemos ver como la composición  $f \circ g \circ h$ , donde  $h(z) = z - \frac{1}{2}$ ,  $g(z) = z^2$  y  $f(z) = \frac{1}{4} - z$ , y el conjunto de parámetros  $c$  para los cuales se tiene un punto fijo atractor, resulta ser el interior de la cardioide el cual se muestra en la figura 3.2.

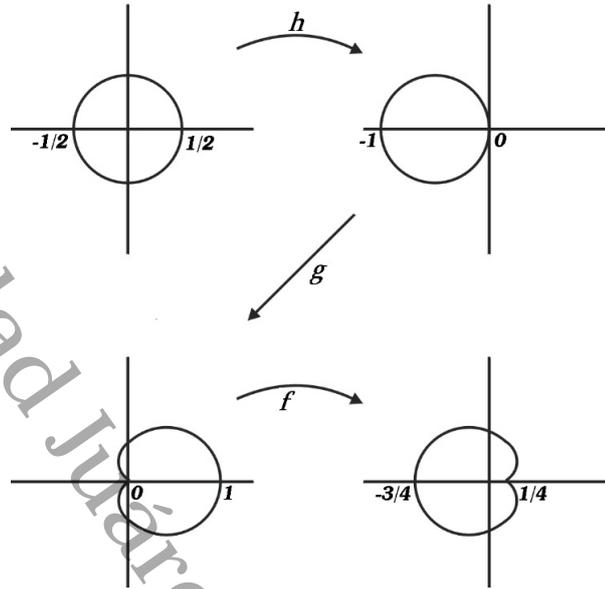


Figura 3.2: Imagen de  $S^1$  bajo  $f \circ g \circ h$ , donde  $h(z) = z - \frac{1}{2}$ ,  $g(z) = z^2$  y  $f(z) = \frac{1}{4} - z$ .

De manera similar, podemos localizar el conjunto de valores de  $c$  para los cuales  $P_c(z) = z^2 + c$  tiene un punto periódico atractor de periodo dos. Esto sucede cuando,

$$P_c^2(z) = z \quad (3.5)$$

y

$$|DP_c^2(z)| < 1. \quad (3.6)$$

Desarrollando el lado izquierdo de (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} P_c^2(z) &= (z^2 + c)^2 + c \\ &= z^4 + 2z^2c + c^2 + c. \end{aligned}$$

Como los puntos fijos de  $P_c$ , siguen siendo fijos para  $P_c^2$  tenemos:

$$\begin{aligned} P_c^2(z) - z &= z^4 + 2z^2c - z + c^2 + c \\ &= (z^2 - z + c)(z^2 + z + (c + 1)) \\ &= (z^2 - z + c)(z - u)(z - v). \end{aligned}$$

Ahora buscamos las condiciones en  $c$ , las cuales implican que  $\{u, v\}$  es un ciclo atractor de periodo dos, esto es,

$$P_c(u) = v, \quad p(v) = u, \quad u \neq v$$

$$|(P_c^2)'(u)| < 1, \quad |(P_c^2)'(v)| < 1,$$

Por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} |(P_c^2)'(v)| &= |P_c'(P_c(v))(P_c'(v))| \\ &= |P_c'(u)P_c'(v)| = |(2u)(2v)| \\ &= 4|uv| < 1. \end{aligned}$$

Esto implica que  $|uv| < \frac{1}{4}$ . De  $P_c^2(z) - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + (c + 1))$  tenemos que  $uv = c + 1$ .

Así el conjunto de parámetros para los cuales  $P_c$  tiene una órbita de periodo dos atractora es:

$$\{c : |1 + c| < \frac{1}{4}\}$$

Esta región es un disco centrado en  $-1$  y radio  $\frac{1}{4}$  el cual se muestra en la figura 3.3, junto con la región que corresponde a los valores de  $c \in M$  para los cuales se tiene una órbita atractora de periodo uno. Hasta aquí hemos encontrado la región de  $\mathbb{C}$  donde el polinomio  $P_c$  tiene una órbita atractora de periodo 1 o de periodo 2.

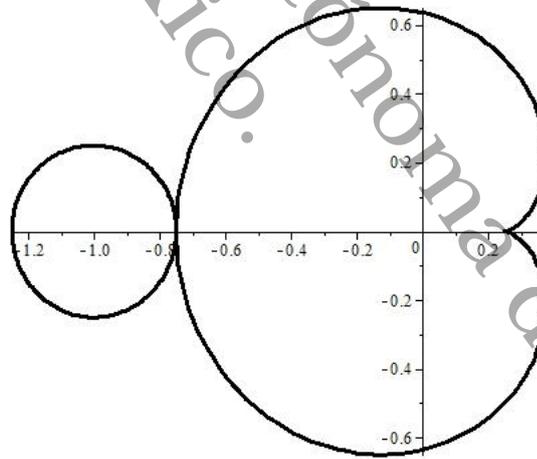


Figura 3.3: Componente principal de  $M$ .

Para concluir este apartado, enunciamos el siguiente resultado de Douady-Hubbard concerniente a los polinomios cuadráticos con ciclos indiferentes.

**Teorema 3.2.13.** *Si  $P_c$  tiene un ciclo indiferente, entonces  $c \in \partial M$ .*

### 3.2.3. Rayos externos

Antes de empezar a dar la teoría de rayos externos que utilizó Douady y Hubbard para intentar probar que la conjetura 3.2.10 era cierta, conviene dar los siguientes dos resultados de variable compleja que pueden ser consultados en [C1].

**Teorema del mapeo de Riemann 3.2.14.** *Sea  $G$  una región simplemente conexa que no es todo el plano y sea  $a \in G$ , entonces existe una función analítica y biyectiva  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  tal que  $f(a) = 0$  y  $f'(a) > 0$ .*

**Teorema 3.2.15 (Caratheodory).** *Sea  $U \subset \mathbb{C}$  abierto, acotado y simplemente conexo y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$  un biholomorfismo, entonces  $\varphi$  se extiende continuamente a la frontera si y sólo si  $\partial U$  es localmente conexa.*

Nótese que como  $\hat{\mathbb{C}} \setminus M$  es simplemente conexo, entonces por el Teorema 3.2.14 existe un isomorfismo  $\phi$  entre  $\hat{\mathbb{C}} \setminus M$  y  $\mathbb{D}$ . Además por el teorema de Caratheodory,  $\phi$  se extiende continuamente a la frontera de  $\mathbb{D}$  si y sólo si  $\partial M$  es localmente conexo. Por lo cual la conjetura 3.2.10 es equivalente a demostrar que  $\phi$  se extiende continuamente a la frontera. Para analizar esta extensión es importante analizar la convergencia de la función cuando nos acercamos a la frontera y para ello se definen los rayos externos.

Como el polinomio  $P_c$  tiene un punto fijo super-atractor en el infinito, por el teorema de Böttcher existe una vecindad  $U$  del infinito donde el polinomio  $P_c$  es analíticamente conjugado a la función  $z^2$ . Denotemos por  $\phi_c$  el biholomorfismo que realiza la conjugación.

**Teorema 3.2.16 (Douady-Hubbard).** *Sea  $U_c$  el abierto máximo donde  $\phi_c$  conjugua  $P_c$  con  $z^2$*

1. *Si  $c \in M$ , entonces  $U_c = \mathbb{C} \setminus K_c$  y*

$$\phi_c : U_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$$

*es un isomorfismo.*

2. *Si  $c \notin M$ , entonces  $U_c$  es una vecindad del infinito que contiene al valor crítico  $c$  y*

$$\phi_c : U_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$$

*es un isomorfismo.*

A partir del bi-holomorfismo  $\phi_c$  se puede definir la función

$$\begin{aligned} \Phi_M : \hat{\mathbb{C}} \setminus M &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \\ c &\mapsto \phi_c(c). \end{aligned}$$

Douady y Hubbard demostraron que esta función es un bi-holomorfismo que relaciona el espacio dinámico con el espacio de parámetros. Del teorema de Caratheodory tenemos que la conexidad local de la frontera de  $M$  es equivalente a demostrar que  $\Phi_M$  se extiende a la frontera. Para entender el comportamiento de  $\Phi_M$  en la frontera vamos a definir los rayos externos a  $M$  y a  $J_c$ .

**Definición 3.2.17.** Sea  $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , el rayo externo a  $M$  de ángulo  $\theta$  es el conjunto

$$R_M(\theta) = \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, 1 < r < \infty\}).$$

**Definición 3.2.18.** El rayo externo  $R_M(\theta)$  de ángulo  $\theta$  aterriza en  $c$  si

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Phi_M^{-1}(re^{2\pi i\theta})$$

existe y es  $c$ .

Estas definiciones también se tienen para  $K_c$ , usando el isomorfismo  $\phi_c$ , cuando  $c \in M$ . Además, si  $K_c$  es localmente conexo, entonces por el teorema de Caratheodory cada rayo  $R_c(\theta)$  aterriza. Los siguientes resultados nos permitirán decir para que valores de  $c$  el rayo  $R_c(\theta)$  aterriza [DH].

**Teorema 3.2.19 (Douady-Hubbard).** Sea  $c \in M$

1. Si  $P_c$  tiene una órbita atractora, entonces  $K_c$  es localmente conexo y la medida de Lebesgue de  $J_c$  es cero.
2. Si  $P_c$  tiene un punto periódico parabólico, entonces  $K_c$  es localmente conexo y la medida de Lebesgue de  $J_c$  es cero.
3. Si la órbita de cero es preperiódica, entonces  $K_c$  es localmente conexo y  $J_c = K_c$ .

**Definición 3.2.20.** Un parámetro  $c \in \mathbb{C}$  es **Misurewicz**, si la órbita de 0 bajo  $P_c$  es estrictamente preperiódica.

**Ejemplo 3.2.21.** Cuando  $c = -2$  y  $c = i$  tenemos puntos de Misurewicz

$$\begin{aligned} P_i &: 0 \rightarrow i \rightarrow -1+i \rightarrow -i \rightarrow -1+i. \\ P_{-2} &: 0 \rightarrow -2 \rightarrow 2 \rightarrow 2. \end{aligned}$$

Para  $c = -2$  el conjunto de Julia lleno es el intervalo sobre el eje real  $[-2, 2]$  y es igual al conjunto de Julia. Para  $c = i$ , el conjunto de Julia lleno lo mostraremos en la figura 3.4.

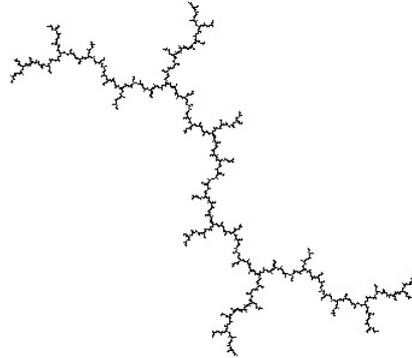


Figura 3.4: Conjunto de Julia de  $z^2 + i$ .

Del teorema de no errancia de Sullivan tenemos que para cualquier punto  $c$  de Misurewicz

$$J_c = K_c. \quad (3.7)$$

Por lo tanto  $c$  pertenece a  $J_c$ . [DH]. Esta propiedad es esencial ya que un conjunto de Julia conexo que satisface (3.7) es llamado una *dendrita*.

**Teorema 3.2.22.** *Todo rayo externo de  $M$  con argumento  $\theta = \frac{p}{q}$  con  $(p, q) = 1$  aterriza.*

1. *Si  $q$  es impar, el rayo externo  $R_M(\theta)$  aterriza a un punto  $c \in \partial M$  tal que  $P_c$  tiene un ciclo parabólico. De hecho para cada  $c \in \partial M$  con dicha propiedad aterrizan dos rayos externo, excepto  $c = 1/4$  correspondiendo a  $\theta = 0$ .*
2. *Si  $q$  es par, el rayo externo  $R_M(\theta)$  aterriza a un punto  $c \in \partial M$  tal que  $c$  es Misurewicz. Cada punto Misurewicz tiene un número finito de argumentos externos.*

En la figura 3.5 se muestran los puntos donde aterrizan algunos rayos externos en el conjunto de Mandelbrot.

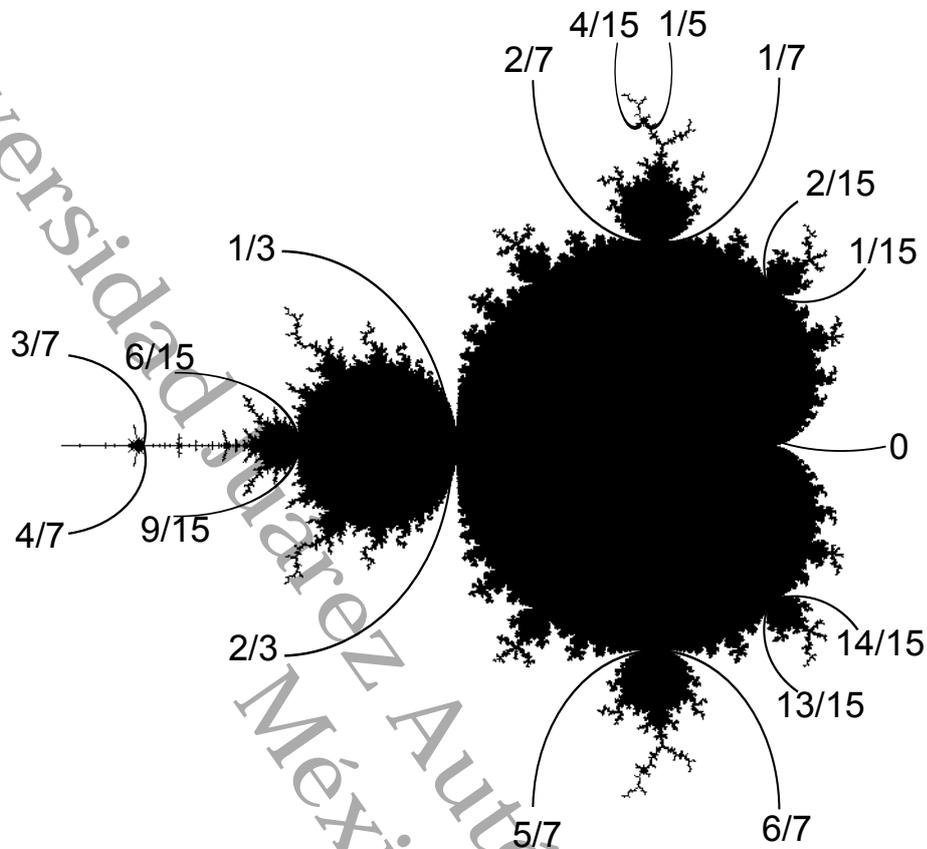


Figura 3.5: Localización de algunos rayos en  $M$ .

### 3.3. Isomorfismo entre las componentes hiperbólicas y el disco

En esta sección enunciaremos un teorema que nos permitirá localizar las componentes hiperbólicas del interior del Mandelbrot, pero antes de enunciarlo conviene presentar una serie de resultados que nos simplificarán la demostración de dicho teorema, el cual puede ser consultado en [DH].

Sea  $W$  una componente hiperbólica del  $int(M)$  de periodo  $k$ . Para cada  $c \in W$ , denotemos por  $\alpha(c)$  el punto periódico atractor de  $P_c$  que atrae al cero y definimos  $\rho_W(c) = DP_c^k(\alpha(c))$ .

**Lema 3.3.1.** *Sea  $c_0 \in W$  tal que  $P_{c_0}^k(0) = 0$ . Los mapeos  $c \mapsto P_c^k(0)$ ,  $c \mapsto \alpha(c)$  y  $c \mapsto \rho_W(c)$  tiene el mismo orden de anulaci3n en  $c_0$ .*

*Demostración.* Para cada  $c \in W$  se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_W(c) &= DP_c^k(\alpha(c)) = DP_c(P_c^{k-1}(\alpha(c)))DP_c^{k-1}(\alpha(c)) \\ &= DP_c(\alpha(c))DP_c(P_c(\alpha(c))) \cdots DP_c(P_c^{k-1}(\alpha(c))) \\ &= [2\alpha(c)] [2P_c(\alpha(c))] \cdots [2P_c^{k-1}(\alpha(c))] \\ &= 2^k \alpha(c) P_c(\alpha(c)) \cdots P_c^{k-1}(\alpha(c)) \end{aligned}$$

y en el ciclo  $\{\alpha(c), P_c(\alpha(c)), \dots, P_c^{k-1}(\alpha(c))\}$ , solo hay una componente de Fatou que contiene a  $\alpha(c)$  y a cero. Así el mapeo  $c \mapsto \alpha(c)$  y el mapeo  $c \mapsto \rho_W(c)$  tienen el mismo orden de anulación.

Por otro lado por el teorema del valor medio se sigue que, para  $c$  cerca de  $c_0$

$$|P_c^k(0) - P_c^k(\alpha(c))| = |DP_c^k(a)||0 - \alpha(c)| < \frac{1}{2}|\alpha(c)|.$$

Así  $c \mapsto P_c^k(0)$  y  $c \mapsto \alpha(c)$  cerca de  $c_0$  tienen la misma multiplicidad.  $\square$

Antes de enunciar la siguiente proposición, es necesario caracterizar dos puntos especiales en una componente hiperbólica.

**Definición 3.3.2.** *El centro de una componente hiperbólica  $W$  es el  $c \in W$  tal que  $DP_c^k(z_i(c)) = 0$ , donde  $z_i(c)$  es una órbita atractora de periodo  $k$ . Una raíz de  $W$  es un parámetro  $c \in \bar{W}$ , tal que  $DP_c^k(z_i(c)) = 1$ .*

De la definición 3.3.2 se puede observar que:

$$\begin{aligned} DP_c^k(z_i(c)) &= 0 \\ DP_c(z_1(c))DP_c(z_2(c)) \cdots DP_c(z_k(c)) &= 0 \\ DP_c(z_i(c)) &= 0 \text{ para algún } i, \end{aligned}$$

lo cual nos diría que  $z_i(c)$  es un punto crítico de  $P_c$ , es decir,  $z_i(c) = 0$ . Por lo que basta seguir la órbita de cero para encontrar los centros de las componentes hiperbólicas.

**Proposición 3.3.3.** *Los siguientes números son iguales:*

- a) el grado  $\mu$  del mapeo holomorfo  $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$  ;
- b) el número de ceros en  $W$  de  $c \mapsto \alpha(c)$ , contando multiplicidades;
- c) el número de ceros en  $W$  de  $c \mapsto P_c^k(0)$ , contando multiplicidades;

d) el número de raíces de  $W$  en  $\overline{W}$ .

*Demostración.* Los ceros de la función  $c \mapsto P_c^k(0)$ ,  $c \mapsto \alpha(c)$  y  $c \mapsto \rho_W(c)$  son los mismo, y de acuerdo al lema 3.3.1, tienen la misma multiplicidad. El número de ceros de  $c \mapsto \rho_W(c)$ , contando multiplicidades es  $\mu$ . La  $\partial W$  es homeomorfa a  $S^1$  y el grado de  $\rho_W : \partial W \rightarrow S^1$  es  $\mu$ . Como es creciente debido a que  $\rho_W$  es holomorfa sobre  $W$ , entonces el número de puntos en  $\rho_W^{-1}(1)$  es  $\mu$ .  $\square$

Sea  $P_k(c) = P_c^k(0)$ , nótese que  $P_k(c)$  es un polinomio mónico de grado  $2^{k-1}$ .

**Lema 3.3.4 (Gleason).** *Todas las raíces de  $P_k$  son simples.*

*Demostración.* Sea  $A$  el anillo de  $z \in \mathbb{C}$  los cuales son enteros algebraicos. El polinomio  $P_k$  es mónico y si  $P_k(c) = 0$ , se tiene que  $c \in A$ . Como  $P_k(c) = (P_{k-1}(c))^2 + c$ , entonces  $P'_k = 2P_{k-1}P'_{k-1} + 1$  y si  $c_1$  es raíz de  $P_k$ , entonces se tiene que  $P_k(c_1) = 0$  con  $c_1 \in A$ .

Nótese que si  $c_1 \in A$ , entonces  $P_{k-1}(c_1) \in A$  y  $P'_{k-1}(c_1) \in A$ .

Por lo tanto

$$P_{k-1}(c_1)P'_{k-1}(c_1) \in A.$$

Así

$$P'_k(c_1) - 1 = 2P_{k-1}(c_1)P'_{k-1}(c_1).$$

Por lo que  $P'_k(c_1) \equiv 1 \pmod{2A}$ , si  $c_1$  es raíz de  $P_k$ .  $\square$

Sea  $W$  una componente hiperbólica del  $\text{int}(M)$  con multiplicidad  $\mu$  y  $c_1, \dots, c_\mu$  sus raíces.

Para cada  $c \in M$  y  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , el rayo  $R_c(\theta)$  aterriza al punto  $\gamma_c(\theta) \in K_c$ . Se define la relación de equivalencia  $\sim_c$  sobre  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  por  $\theta \sim_c \theta' \Leftrightarrow \gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$ .

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser consultadas en [DH].

**Proposición 3.3.5.** *La relación  $\sim_c$  es constante sobre  $W \cup \{c_1, \dots, c_\mu\}$ .*

**Proposición 3.3.6.** *Sean  $c_1$  y  $c_2$  centros o raíces de componentes hiperbólicas; si  $\sim_{c_1} = \sim_{c_2}$ , entonces los árboles de Hubbard  $H_{c_1}$  y  $H_{c_2}$  son isomorfos.*

Denotaremos por  $H_f$  el árbol de Hubbard de  $f$ ,  $H_f^1 = f^{-1}(H_f)$  y  $A_f$  el conjunto postcrítico de  $f$ .

**Proposición 3.3.7.** Sean  $f$  y  $g$  dos polinomios de grado  $d \geq 2$  tal que cada punto crítico es periódico o preperiódico. Sea  $\varphi$  un homeomorfismo de  $H_f$  a  $H_g$ , respetando la estructura primaria y complementaria. Entonces existe un único homeomorfismo  $\varphi_1 : H_f^1 \rightarrow H_g^1$  tal que

1.  $g \circ \varphi_1 = \varphi \circ f$ .
2.  $\varphi_1|_{A_f} = \varphi$ .

De la proposición 3.3.7 se puede demostrar que  $f$  y  $g$  son afínmente conjugados.

**Proposición 3.3.8.** Sean  $f : z \mapsto z^2 + c_1$  y  $g : z \mapsto z^2 + c_2$  dos polinomios de grado 2. Si existe un homeomorfismo de  $H_f$  a  $H_g$  que preserva la estructura primaria, entonces  $c_1 = c_2$ .

**Teorema 3.3.9 (Douady-Hubbard-1982).** Para toda componente hiperbólica  $W$  del  $\text{int}(M)$ , el mapeo  $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Por la proposición 3.3.5 y 3.3.6 se tiene que si  $c_1$  y  $c_2$  son dos centros de la componente hiperbólica  $W$ , entonces los árboles de Hubbard son isomorfos y por la proposición 3.3.8 se concluye que  $c_1 = c_2$ . Además los centros son simples por el lema 3.3.1 y por la proposición 3.3.3 concluimos que el grado del mapeo  $\rho_W$  es igual a uno, de donde se tiene lo deseado.  $\square$

El teorema 3.3.9 es generalizado por B. Branner y Núria Fagella para polinomios unicríticos  $P_{d,c}(z) = z^d + c$  para  $d \geq 2$  [BF].

Sea

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : K(P_{d,c}) \text{ es conexo} \}.$$

En la figura 3.6 se muestra el lugar de conexidad de  $P_{d,c}$  para  $d = 3$  y  $d = 4$ .

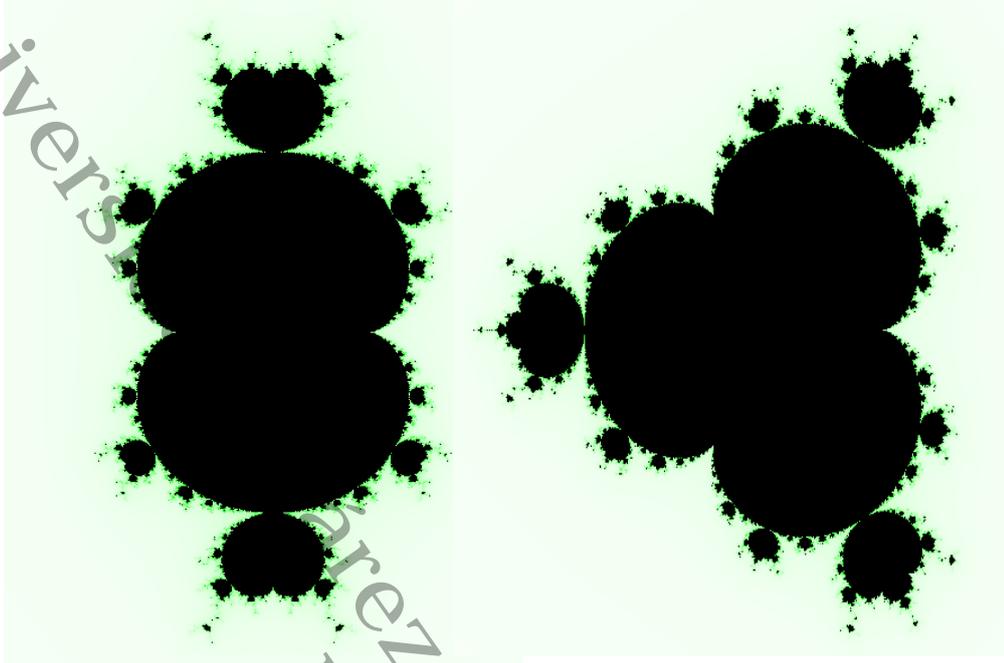


Figura 3.6: Lugar de conexidad de  $P_{3,c}(z) = z^3 + c$  y  $P_{4,c}(z) = z^4 + c$ .

**Teorema 3.3.10 (Mapeo multiplicador para el caso unicrítico).** *Si  $\Omega$  es una componente hiperbólica de  $\mathcal{M}$ , entonces el mapeo  $\rho_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  es un cubriente ramificado de grado  $d - 1$ , con punto de ramificación en cero.*

### 3.4. Localización de las componentes hiperbólicas en el Mandelbrot

En las secciones anteriores calculamos las componentes hiperbólicas de periodo 1 y 2. En esta sección calcularemos los centros de las componentes hiperbólicas de periodo 3, 4 y 5, haciendo uso del teorema 3.3.9 localizaremos dichas componentes en el conjunto de Mandelbrot.

Los centros de las componentes hiperbólicas que tienen un ciclo atractor de periodo tres son las soluciones de la siguiente ecuación

$$P^3(0) = (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0. \quad (3.8)$$

Nótese que el centro hiperbólico de periodo uno también es de periodo tres, por lo que la ecuación (3.8), se simplifica en

$$\frac{P^3(0)}{c} = \frac{c(c^3 + 2c^2 + c + 1)}{c} = c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0. \quad (3.9)$$

Así los centros hiperbólicos de las componentes de periodo tres, son tres y se enlistan en la tabla 3.1.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
-1.7548	-0.1225 - 0.7448i
	-0.1225 + 0.7448i

Cuadro 3.1: Centros hiperbólicos de periodo tres.

Para calcular los centros hiperbólicos de las componentes hiperbólicas de periodo cuatro, se resuelve la siguiente ecuación,

$$P^4(0) = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0. \quad (3.10)$$

Observe que los centros hiperbólicos de periodo dos también son de periodo cuatro, por lo que la ecuación (3.10) se simplifica en

$$\frac{P^4(0)}{P^2(0)} = c^6 + 3c^5 + 3c^4 + 3c^3 + 2c^2 + 1. \quad (3.11)$$

Así la raíces del polinomio (3.11) son los centros hiperbólicos de las componentes de periodo cuatro, las cuales son seis y se enlistan en la tabla 3.2.

Centros hiperbólicos	
Reales	• Complejas
-1.3101	0.2822 + 0.530i
-1.941	0.2822 - 0.530i
	-0.1565 + 1.032i
	-0.1565 - 1.032i

Cuadro 3.2: Centros hiperbólicos de periodo cuatro.

Por último se calculan los centros hiperbólicos de las componentes hiperbólicas de periodo cinco, las cuales están dadas mediante las raíces del siguiente polinomio.

$$P^5(0) = c^{16} + 8c^{15} + 28c^{14} + 60c^{13} + 94c^{12} + 116c^{11} + 114c^{10} + 94c^9 + 69c^8 + 44c^7 + 26c^6 + 14c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c.$$

Como los centros hiperbólicos de periodo uno también son de periodo cinco, entonces el polinomio  $P^5(0)$  se simplifica en

$$\frac{P^5(0)}{c} = c^{15} + 8c^{14} + 28c^{13} + 60c^{12} + 94c^{11} + 116c^{10} + 114c^9 + 94c^8 + 69c^7 + 44c^6 + 26c^5 + 14c^4 + 5c^3 + 2c^2 + c + 1.$$

Así los centros hiperbólicos de las componentes de periodo cinco son quince y se enlistan en la tabla 3.3.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
-1.6254	$0.3795 + 0.3349i$
-1.8607	$0.3795 - 0.3349i$
-1.9854	$0.3592 + 0.6425i$
	$0.3592 - 0.6425i$
	$-0.0442 + 0.9865i$
	$-0.0442 - 0.9865i$
	$-0.1980 + 1.1002i$
	$-0.1980 - 1.1002i$
	$-0.5043 + 0.5627i$
	$-0.5043 - 0.5627i$
	$-1.2563 + 0.3803i$
	$-1.2563 - 0.3803i$

Cuadro 3.3: Centros hiperbólicos de periodo cinco.

En la figura 3.7 se localizan las componentes hiperbólicas de periodo 1,2,3,4 y 5 en el conjunto de Mandelbrot, ayudandonos de los cálculos hechos anteriormente.

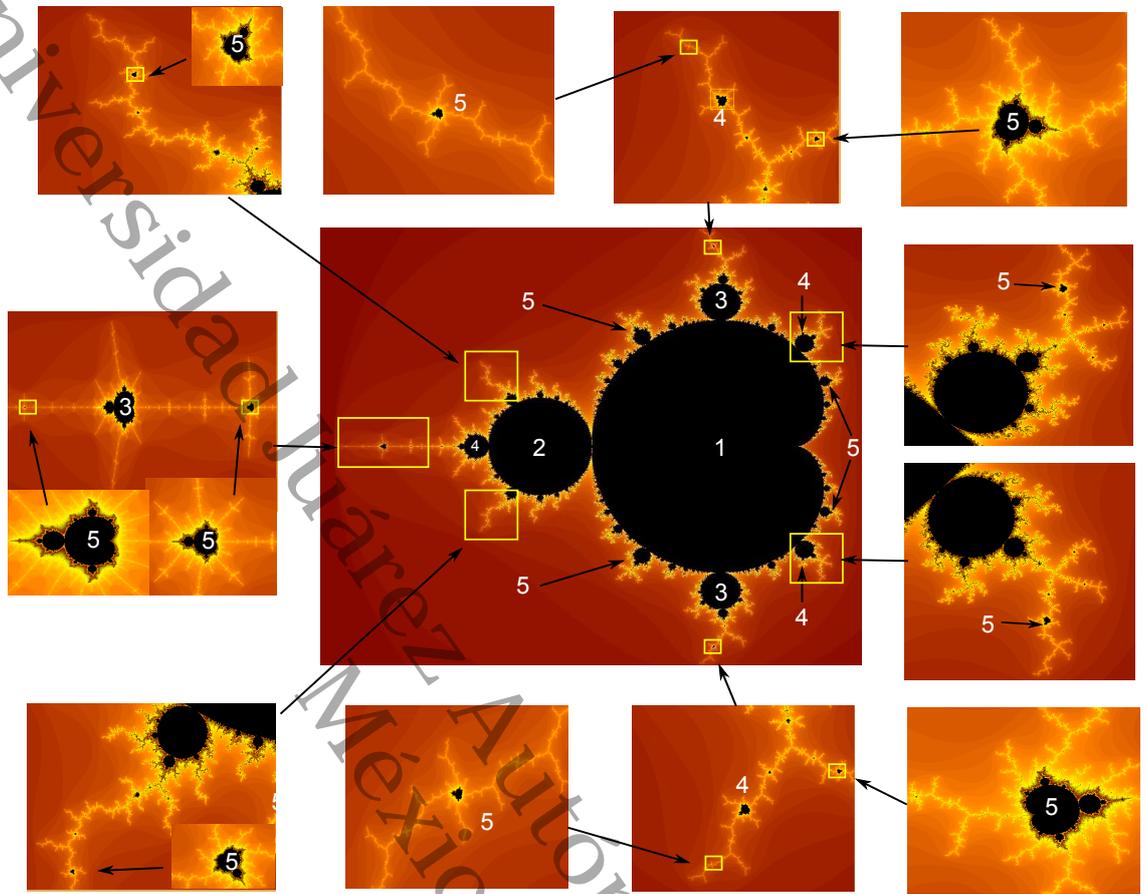


Figura 3.7: Algunas componentes hiperbólicas para la familia  $P_c(z) = z^2 + c$ .

En este capítulo estudiaremos el espacio de parámetros de una familia de polinomios cuárticos que se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma  $az + z^2$ .

## 4.1. Lugar de Conexidad

La familia de polinomios cuárticos en la cual centraremos nuestra atención es

$$P_{ba}(z) = P_b(P_a(z)) = z^4 + 2az^3 + (b + a^2)z^2 + baz \quad (4.1)$$

donde  $P_a(z) = az + z^2$  y  $P_b(z) = bz + z^2$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Definición 4.1.1.** *El lugar de conexidad, en el espacio de parámetros  $\mathcal{P}$ , de una familia de polinomios  $P_g$  se define por:*

$$M = \{g \in \mathcal{P} : K(P_g) \text{ es conexo}\}$$

Por el teorema de Fatou 3.1.3, la conexidad de  $K(P_g)$ , está determinada por las órbitas de los puntos críticos, las cuales deben ser acotadas. Por ejemplo, el lugar de conexidad para la familia  $P_a(z) = az + z^2$ , se muestra de color negro en la figura 4.1.

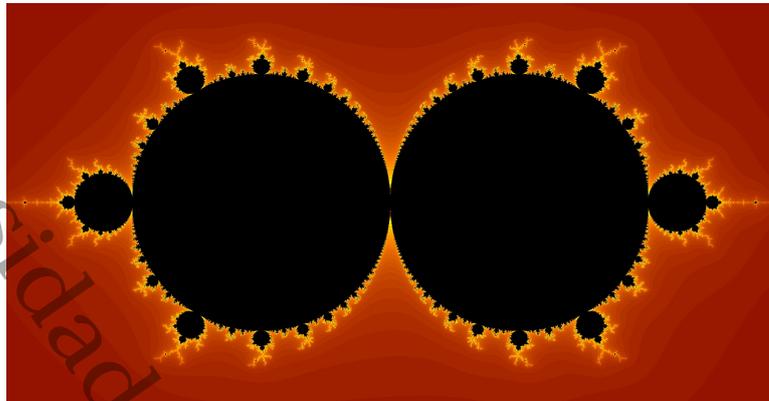


Figura 4.1: *Lugar de conexidad de  $P_a(z) = az + z^2$ .*

En la figura 4.1, la parte de color negro es la que corresponde a los valores de  $a \in \mathbb{C}$  tales que la órbita de  $-\frac{a}{2}$  es acotada bajo  $P_a$ .

Por otro lado, los puntos críticos de la familia  $P_{ba}(z)$  son:

- $c_1 = -\frac{a}{2}$ .
- $c_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b}}{2}$ .
- $c_3 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b}}{2}$ .

**Observación 4.1.2.** Como  $P_{ba}(c_2) = P_{ba}(c_3) = -\frac{b^2}{4}$ , estos polinomios cuárticos a lo más presentan dos dinámicas.

Ya que el espacio de parámetros de la familia  $P_{ba}(z)$  está contenido en  $\mathbb{C}^2$ , empezaremos analizando el lugar de conexidad de dicha familia cuando  $a, b \in \mathbb{R}$  el cual se muestra en la figura 4.2.

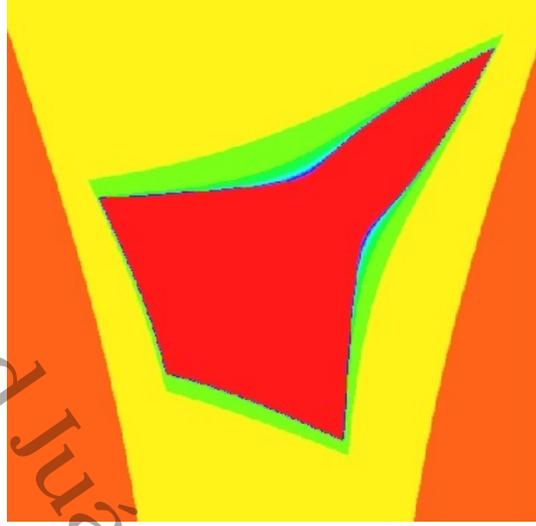


Figura 4.2: Lugar de conexidad de  $P_{ba}$  cuando  $a$  y  $b$  son reales.

En la figura 4.2 la parte de color rojo corresponde a los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales la órbita de  $c_1, c_2$  y  $c_3$  permanecen acotadas.

**Proposición 4.1.3.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $|a| \geq 5, |b| \geq 5$ . Si  $|z| \geq |a^2 + b|$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ba}^n(z) = \infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|z| \geq |a^2 + b|$  de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
 \frac{|P_{ba}(z)|}{|z|} &= |z^3 + 2az^2 + (a^2 + b)z + ab| \\
 &\geq |z|^2|z + 2a| - |(a^2 + b)z + ab| \\
 &= |z|^2|z + 2a| - |a^2 + b||z + \frac{b}{a^2 + b}a| \\
 &\geq (a^2 + b)^2|z + 2a| - |a^2 + b||z + \frac{b}{a^2 + b}a| \\
 &\geq (a^2 + b)^2|z + 2a| - |a^2 + b| \left[ |z| + \frac{|ba|}{|a^2 + b|} \right] \\
 &\geq (20)^2(5) - [30(5) + 25] > 1.
 \end{aligned}$$

De donde se tiene que  $|P_{ba}(z)| > |z|$ , por lo que  $|P_{ba}(z)| < |P_{ba}^2(z)|$  y haciendo inducción sobre  $n$  se tiene que  $|P_{ba}^n(z)| < |P_{ba}^{n+1}(z)|$ . Así  $|P_{ba}^n(z)|$  tiende a infinito, cuando  $n$  tiende a infinito.  $\square$

Para analizar el lugar de conexidad de esta familia haremos algunas restricciones que nos permitirán determinar ciertas componentes hiperbólicas.

en dicho espacio. Empezaremos analizando el espacio de parámetros cuando uno de los puntos críticos de  $P_{ba}$  esta fijo.

### Caso 1

$$P_{ba}(c_1) = c_1. \quad (4.2)$$

Resolviendo 4.2 tenemos que  $a = 0$  o  $b = \frac{a^3+8}{4a}$ .

#### Caso 1.1

si  $a = 0$ , entonces  $P_{ba}(z)$  se simplifica a  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$  y los punto críticos se convierten en

- $c_1 = 0$ ,
- $c_2 = \frac{\sqrt{-2b}}{2}$ ,
- $c_3 = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$ .

Por (4.2) y la observación 4.1.2, el lugar de conexidad de  $P_{ba}$  es el conjunto de  $b \in \mathbb{C}$  tal que la órbita  $c_2$  permanece acotada.

En la figura 4.3 se muestra el lugar de conexidad de  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$  en color negro.

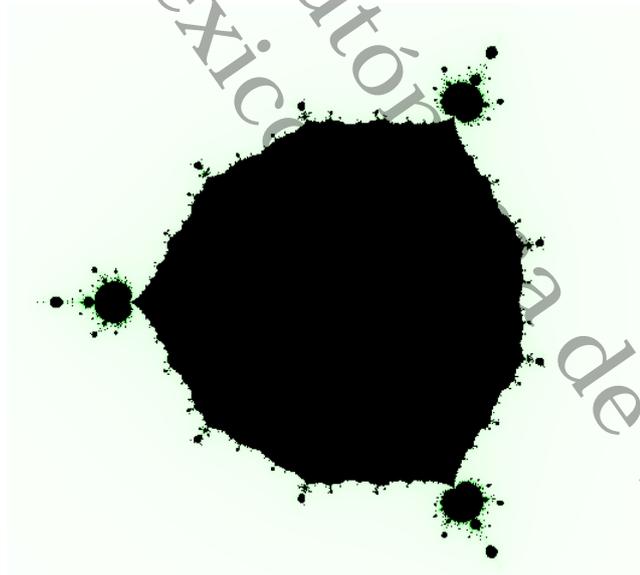


Figura 4.3: Lugar de conexidad de  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$ .

Nótese que por la observación 4.1.2 la órbita de  $c_3$  también permanece acotada, es decir, en la figura 4.3 los tres puntos críticos permanecen acotados.

## Caso 1.2

Si  $b = \frac{a^3+8}{4a}$ , entonces  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$  y los puntos críticos de  $P_{ba}(z)$  son

- $c_1 = -\frac{a}{2}$ ,
- $c_2 = \frac{-2a^2 + \sqrt{2a^4 - 16a}}{4a}$ ,
- $c_3 = -\frac{-2a^2 + \sqrt{2a^4 - 16a}}{4a}$ .

Por otro lado sabemos que  $c_1$  es un punto fijo de  $P_{ba}(z)$ , por lo que para dibujar el lugar de conexidad de  $P_{ba}(z)$ , basta ver para que valores de  $a \in \mathbb{C}$  la órbita de  $c_2$  permanece acotada. Con esta condición se obtiene el lugar de conexidad que se muestra en la figura 4.4.

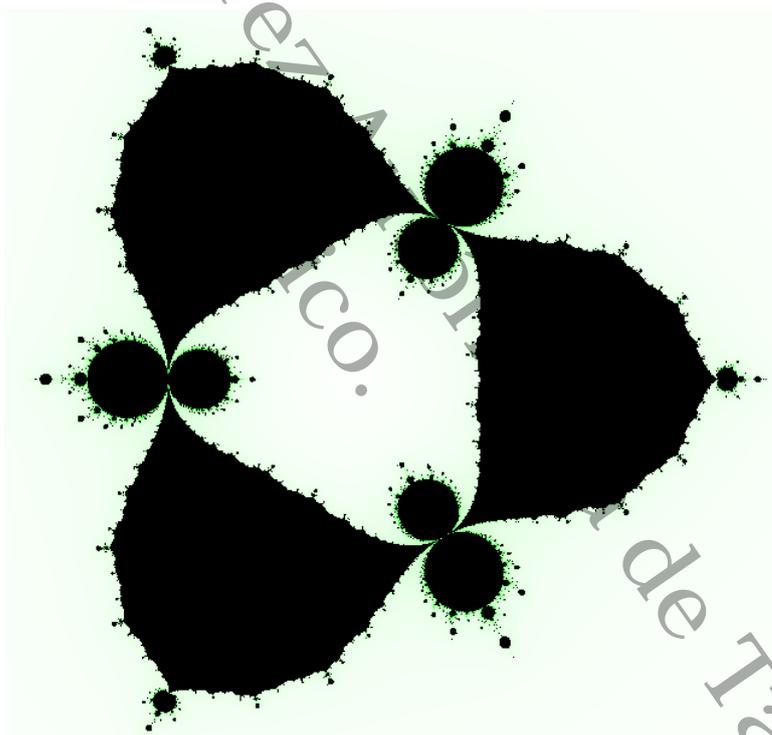


Figura 4.4: Lugar de conexidad de  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$

En la figura 4.4 la parte de color negro corresponde a los valores de  $a \in \mathbb{C}$  tales que la órbita de  $c_2$  permanece acotada.

**Caso 2**

$$P_{ba}(c_2) = c_2 \quad (4.3)$$

Resolviendo (4.3) tenemos que  $b = 0$  o  $a = \frac{8+b^3}{4b}$

**Caso 2.1**

Si  $b = 0$ , entonces  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$  y los puntos críticos son:

- $c_1 = -\frac{a}{2}$ ,
- $c_2 = 0$ ,
- $c_3 = -a$ .

Observe que  $c_2$  es un punto fijo de  $P_{ba}(z)$  y  $c_3$  es un punto eventualmente fijo, por lo que para dibujar el lugar de conexidad de  $P_{ba}(z)$ , necesitamos que la órbita de  $c_1$  sea acotada. En la figura 4.5 se muestra el lugar de conexidad de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

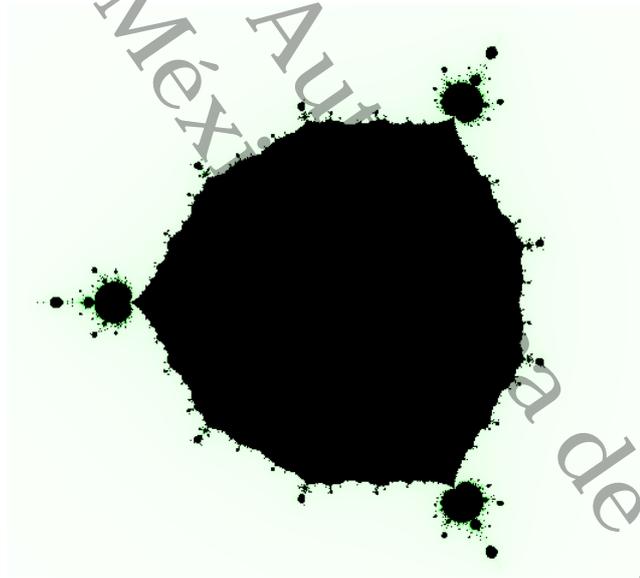


Figura 4.5: Lugar de conexidad de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

Al igual que en las figuras anteriores la parte de color negro son los valores de  $a \in \mathbb{C}$  tales que la órbita de  $c_1$  es acotada.

**Proposición 4.1.4.** Si  $|c| < 1.4$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ba}^n\left(-\frac{c}{2}\right) = 0$

## Caso 2.2

Si  $a = \frac{8+b^3}{4b}$ , entonces  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$  y los puntos críticos son:

- $c_1 = -\frac{8+b^3}{8b}$
- $c_2 = -\frac{b^2}{4}$
- $c_3 = -\frac{2}{b}$

Nótese que  $c_2$  es un punto fijo de  $P_{ba}$  y  $c_3$  es un punto eventualmente fijo, por lo que para dibujar el lugar de conexidad de  $P_{ba}$  basta ver para que valores de  $b \in \mathbb{C}$ , la órbita de  $c_1$  es acotada. En la figura 4.6 se muestra el espacio de parámetros de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ .

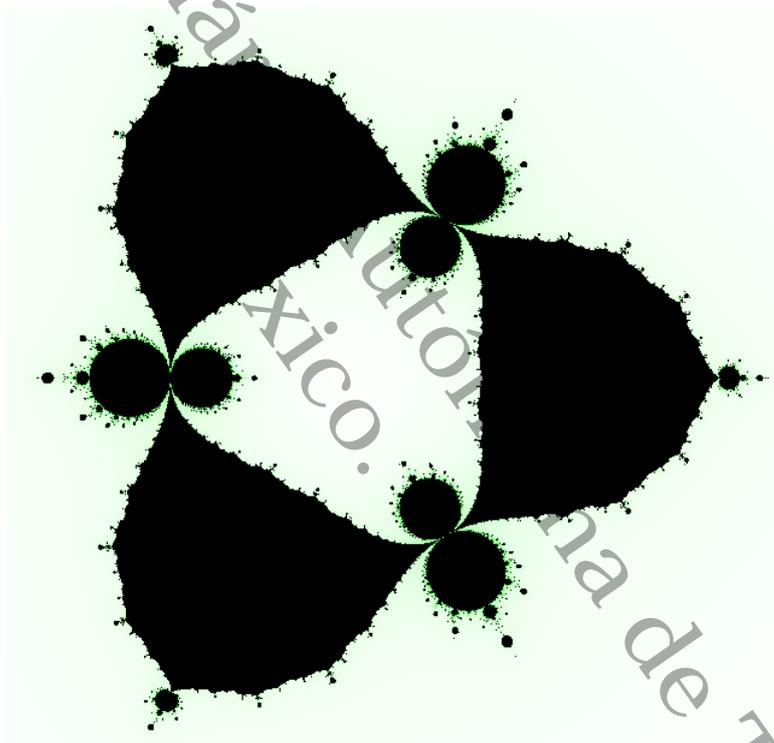


Figura 4.6: *Espacio de parámetros de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ .*

## 4.2. Componentes hiperbólicas de periodo uno

En esta sección localizaremos las componentes hiperbólicas de periodo uno de los lugares de conexidad analizados en la sección anterior.

### 4.2.1. Caso $a = 0$

Nótese que si  $a = 0$ , entonces  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$ . Recuerde que  $c_1$  es un punto fijo por hipótesis, por lo que si resolvemos

$$P_{ba}(c_2) = c_2,$$

encontramos los centros hiperbólicos los cuales se muestran en tabla 4.1.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
0	$1 - 1.7320i$
	$1 + 1.7320i$

Cuadro 4.1: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$ .

Por otro lado si resolvemos

$$P_{ba}(c_3) = c_3,$$

encontramos los centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z)$ , los cuales son  $0, -2$ . En la figura 4.7 se muestran las componentes hiperbólicas de  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$  de periodo uno.

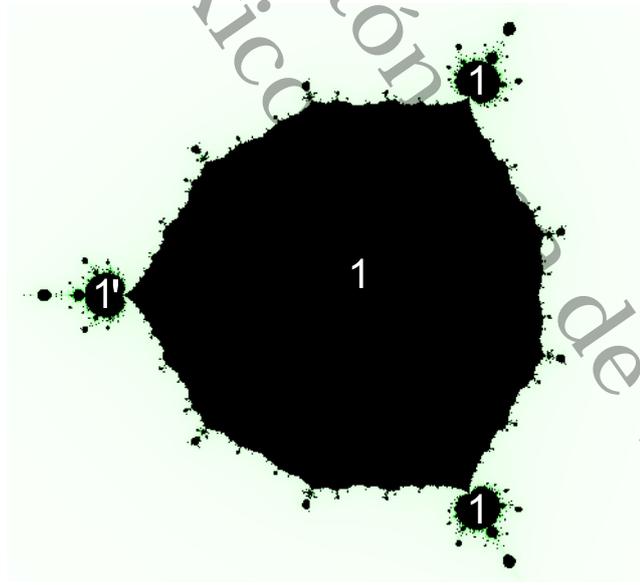


Figura 4.7: Componentes hiperbólicas de periodo uno de  $P_{ba}(z) = bz^2 + z^4$ .

En la figura 4.7 las componentes hiperbólicas de periodo están marcadas por 1, mientras que con 1' se marcan las componentes hiperbólicas de periodo uno cuando  $c_3$  queda fijo.

**4.2.2. Caso  $b = \frac{a^3+8}{4a}$**

Si  $b = \frac{a^3+8}{4a}$ , entonces  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$ . Recuerde que por hipótesis  $c_1$  está fijo y resolviendo

$$P_{ba}(c_2) = c_2,$$

obtenemos los centros hiperbólicos de periodo uno, los cuales se muestran en la tabla 4.2.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
-2	-1 - 1.7320i
-1.2361	-1 + 1.7320i
-2	-1.6180 + 2.8025i
	-1.6180 - 2.8025i

Cuadro 4.2: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$ .

Sin embargo si  $c_3$  queda fijo, entonces se tienen los siguientes centros hiperbólicos los cuales se muestran en la tabla 4.3.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
2	-1 - 1.7320i
3.2361	-1 + 1.7320i
	1 + 1.7320i
	1 - 1.7320i
	0.6180 + 1.0704i
	0.6180 - 1.0704i

Cuadro 4.3: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$ .

En la figura 4.8 se muestran las componentes hiperbólicas de

$$P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$$

de periodo uno.

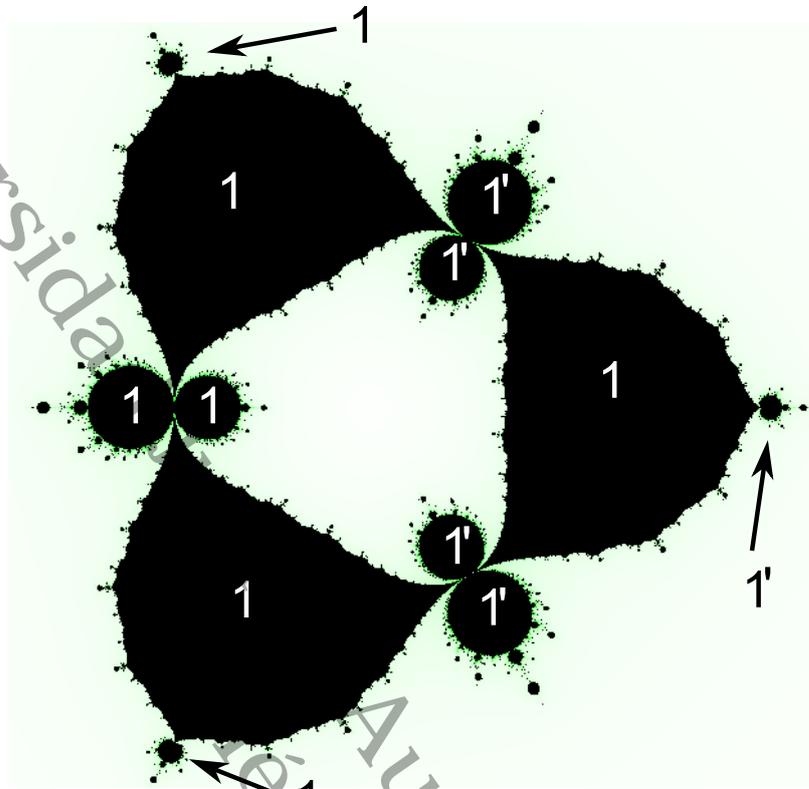


Figura 4.8: Componentes hiperbólicas de periodo uno de  $P_{ba}(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$ .

En la figura 4.8 se muestran las componentes hiperbólicas de periodo uno cuando  $c_2$  queda fijo y están marcadas por 1, mientras que con  $1'$  se marcan las componentes hiperbólicas de periodo uno cuando  $c_3$  queda fijo.

#### 4.2.3. Caso $b = 0$

Si  $b = 0$ , entonces  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ . Es importante mencionar que  $c_2$  es un punto crítico fijo y  $c_3$  es eventualmente fijo, por lo tanto para encontrar los centros hiperbólicos de periodo uno de  $P_{ba}(z)$ , resolvemos

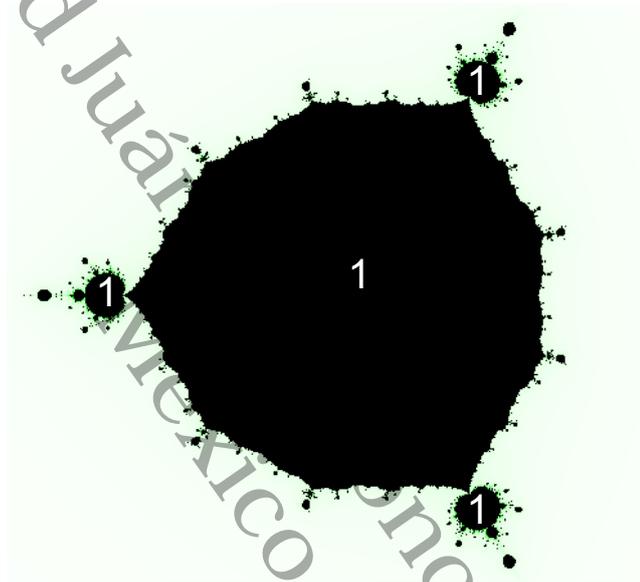
$$P_{ba}(c_1) = c_1.$$

Los centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$  de periodo uno se enlistan en la tabla 4.4.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
-2	$1 + 1.7320i$
0	$1 - 1.7320i$

Cuadro 4.4: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

En la figura 4.9 se muestran las componentes hiperbólicas de periodo uno de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

Figura 4.9: Componentes hiperbólicas de periodo uno de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

#### 4.2.4. Caso $a = \frac{8+b^3}{4b}$

Si  $a = \frac{8+b^3}{4b}$ , entonces  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ . Es importante mencionar que  $c_2$  es un punto fijo y  $c_3$  es eventualmente fijo, por lo que resolviendo

$$P_{ba}(c_1) = c_1$$

encontramos los centros hiperbólicos, los cuales se enlistan en la tabla 4.5.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
2	$-1 - 1.7320i$
3.2361	$-1 - 1.7320i$
$-1.2361$	$1 + 1.7320i$
$-2$	$1 - 1.7320i$
	$0.6180 - 1.0704i$
	$0.6180 + 1.0704i$
	$-1.6180 - 2.8025i$
	$-1.6180 + 2.8025i$

Cuadro 4.5: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ .

En la figura 4.10 se localizan las componentes hiperbólicas de periodo uno de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ .

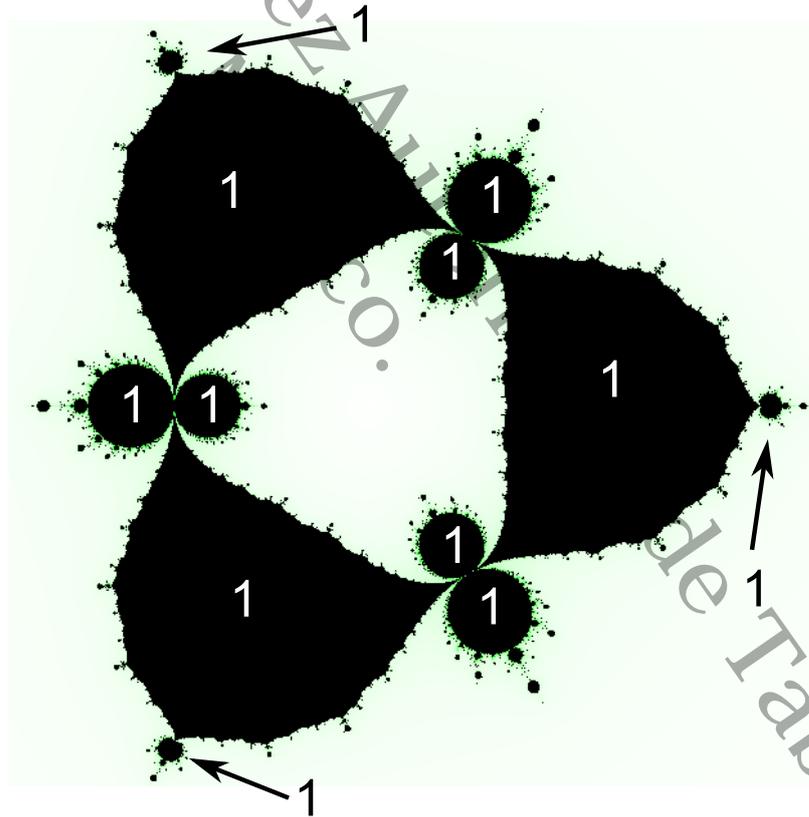


Figura 4.10: Componentes hiperbólicas de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$  de periodo uno.

### 4.3. Componentes hiperbólicas de periodo dos

#### 4.3.1. Caso $b = 0$

Al igual que en la sección anterior, para localizar las componentes hiperbólicas de periodo dos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ , calculamos sus centros hiperbólicos, resolviendo la siguiente ecuación.

$$\frac{P_{ba}^2(c_1) - c_1}{P_{ba}(c_1) - c_1} = 0. \quad (4.4)$$

Los centros de las componentes hiperbólicas de periodo dos de

$$P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$$

están enlistados en la tabla 4.6.

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
-2.2317	1.5721 + 0.4986i
-2.6357	1.5721 - 0.4986i
	-1.2179 + 1.1121i
	-1.2179 - 1.1121i
	-0.3542 + 1.6108i
	-0.3542 - 1.6108i
	1.1159 + 1.9327i
	1.1159 - 1.9327i
	1.3179 + 2.2826i
	1.3179 - 2.2826i

Cuadro 4.6: Centros hiperbólicos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

En la figura 4.11 se localizan 10 de las 12 componentes hiperbólicas de periodo dos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

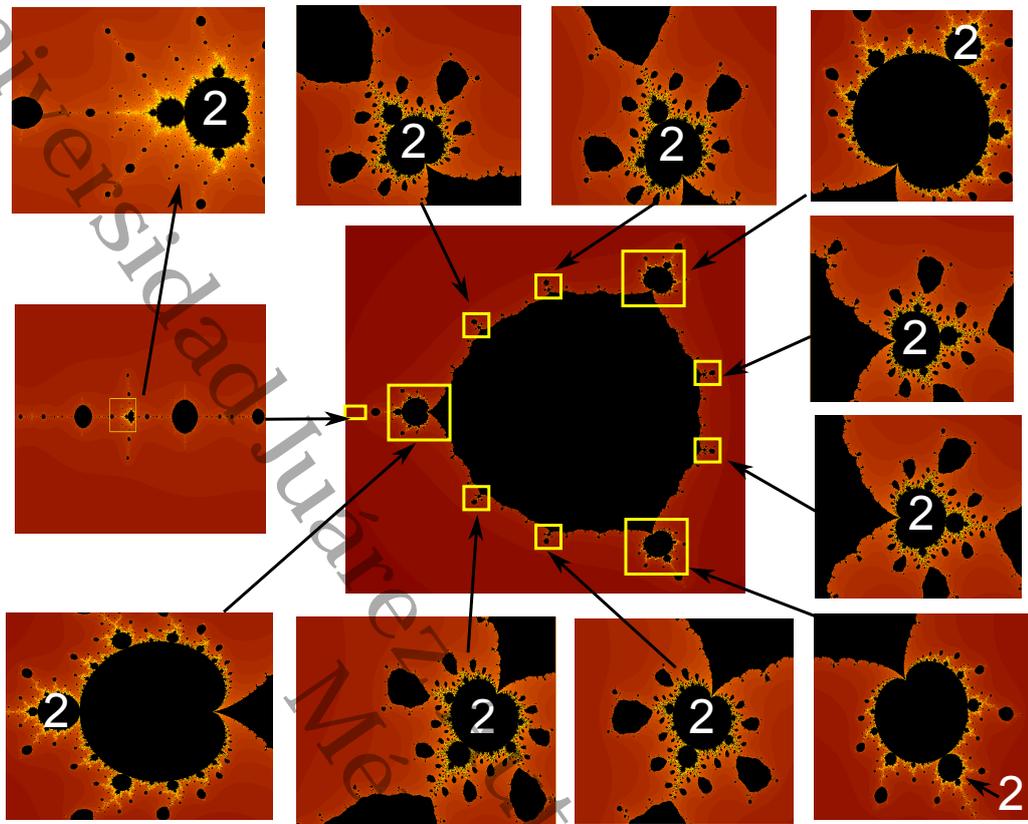


Figura 4.11: Componentes hiperbólicas de periodo dos de  $P_{ba}(z) = (az + z^2)^2$ .

### 4.3.2. Caso $a = \frac{8+b^3}{4b}$

Para localizar las componentes hiperbólicas de periodo dos de

$$P_{ba}(z) = \frac{z(8 + b^3 + 4zb)(4b^2 + 8z + zb^3 + 4z^2b)}{16b^2},$$

calculamos los centros hiperbólicos resolviendo la siguiente ecuación:

$$\frac{P_{ba}^2(c_1) - c_1}{P_{ba}(c_1) - c_1} = 0. \tag{4.5}$$

En la tabla 4.7 se enlistan los centros hiperbólicos de periodo dos de

$$P_{ba}(z) = \frac{z(8 + b^3 + 4zb)(4b^2 + 8z + zb^3 + 4z^2b)}{16b^2}.$$

Centros hiperbólicos	
Reales	Complejas
3.5750	$1.0451 + 0.2190i$
-1.0124	$1.0451 - 0.2190i$
-1.2361	$2.8287 + 0.6737i$
-1.9999	$2.8287 - 0.6737i$
-2.3500	$0.4045 + 0.7006i$
	$0.4045 - 0.7006i$
	$1.3830 + 2.3954i$
	$1.3830 - 2.3954i$
	$-0.2142 + 2.5676i$
	$-0.2142 - 2.5676i$
	$-0.3329 + 1.0146i$
	$-0.3329 - 1.0146i$
	$-1.6180 + 2.8025i$
	$-1.6180 - 2.8025i$
	$-1.6812 + 2.9120i$
	$-1.6812 - 2.9120i$
	$-1.9978 + 2.1129i$
	$-1.9978 - 2.1129i$

Cuadro 4.7: Centros hiperbólicos de periodo dos de  $P_{ba}(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ .

#### 4.4. Conjugación afín

En esta sección mostraremos que la familia  $Q_b(z) = bz^2 + z^4$  no es afínmente conjugada a la familia  $P_a(z) = (az + z^2)^2$ , al igual que  $\hat{P}_a(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$  con  $\hat{Q}_b(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$ , aunque presenten el mismo dibujo para el lugar de conexidad.

**Proposición 4.4.1.** *La familia de polinomios  $Q_b(z) = bz^2 + z^4$  con  $b, z \in \mathbb{C}$ , no es afínmente conjugada a la familia  $P_a(z) = (az + z^2)^2$  con  $a, z \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una conjugación afín de la forma  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$  tal que

$$\varphi(Q_b(z)) = P_a(\varphi(z)). \quad (4.6)$$

Desarrollando (4.6) se tiene

$$\begin{aligned}\alpha(bz^2 + z^4) + \beta &= a^2(\alpha z + \beta)^2 + 2a(\alpha z + \beta)^3 + (\alpha z + \beta)^4 \\ \alpha z^4 + (\alpha b)z^2 + \beta &= a^2(\alpha^2 z^2 + (2\alpha\beta)z + \beta^2) + 2a((\alpha z)^3 + 3(\alpha z)^2\beta + 3(\alpha z)\beta^2 + \beta^3) + \\ &((\alpha z)^4 + 4(\alpha z)^3\beta + 6(\alpha z)^2\beta^2 + 4\alpha z\beta^3 + \beta^4).\end{aligned}$$

De donde se siguen las siguientes cinco ecuaciones

$$\alpha = \alpha^4 \quad (4.7)$$

$$2a\alpha^3 + 4\alpha^3\beta = 0 \quad (4.8)$$

$$a^2\alpha^2 + 6\alpha^2\beta a + 6\alpha^2\beta^2 = \alpha b \quad (4.9)$$

$$2a^2\alpha\beta + 6a\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta^3 = 0 \quad (4.10)$$

$$a^2\beta^2 + 2a\beta^3 + \beta^4 = \beta. \quad (4.11)$$

Como  $\alpha \neq 0$ , de (4.7) se sigue que

$$\alpha^3 = 1.$$

Por lo que (4.8) se convierte en

$$\beta = -\frac{a}{2}.$$

Sustituyendo el valor de  $\beta$  en (4.9) se tiene que

$$b = -\alpha \frac{a^2}{2}.$$

Remplazando el valor de  $\beta$  y  $b$  en (4.11), se obtiene que  $a = -2$ . Esto muestra que los únicos polinomios que son afínmente conjugados son los parámetros que se muestran en la tabla 4.8.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$	$P_a(z)$	$Q_b(z)$	$\varphi$
-2	-2	1	1	$(-2z + z^2)^2$	$-2z + z^4$	$z + 1$
-2	$1 - \sqrt{3}i$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$(-2z + z^2)^2$	$(1 - \sqrt{3}i)z + z^4$	$(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 1$
-2	$1 + \sqrt{3}i$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$(-2z + z^2)^2$	$(1 + \sqrt{3}i)z + z^4$	$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 1$

Cuadro 4.8: Polinomios que son afínmente conjugados.

Por lo tanto, la familia  $Q_b$  no es afínmente conjugada a la familia  $P_a$ .  $\square$

**Proposición 4.4.2.** La familia de polinomios  $\hat{P}_a(z) = \frac{z(z+a)(a^3+4a^2z+4az^2+8)}{4a}$  con  $b, z \in \mathbb{C}$ , no es afínmente conjugada a la familia  $\hat{Q}_b(z) = \frac{z(8+b^3+4zb)(4b^2+8z+zb^3+4z^2b)}{16b^2}$  con  $a, z \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Supongamos que existe una conjugación afín de la forma  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$  tal que

$$\varphi(\hat{P}_a(z)) = \hat{Q}_b(\varphi(z)). \quad (4.12)$$

Desarrollando 4.12 se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{P}_a(z)) &= \alpha(\hat{P}_a(z)) + \beta \\ &= \alpha \left[ \left( \frac{1}{4}a^3 + 2 \right) z + \left( \frac{5}{4}a^2 + \frac{2}{a} \right) z^2 + 2az^3 + z^4 \right] + \beta \\ &= \beta + \alpha \left( \frac{1}{4}a^3 + 2 \right) z + \alpha \left( \frac{5}{4}a^2 + \frac{2}{a} \right) z^2 + 2\alpha az^3 + \alpha z^4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{Q}_b(\varphi(z)) &= 2\beta + \frac{1}{4}\beta b^3 + 2b\beta^2 + \frac{4}{b}\beta^3 + \frac{1}{16}b^4\beta^2 + \frac{1}{2}b^2\beta^3 + \beta^4 + \frac{4}{b^2}\beta^2 \\ &\quad + \left( 4\alpha\beta^3 + \frac{1}{4}\alpha b^3 + 2\alpha + 4\alpha\beta b + \frac{8}{b^2}\alpha\beta + \frac{12}{b}\alpha\beta^2 + \frac{1}{8}b^4\alpha\beta + \frac{3}{2}b^2\alpha\beta^2 \right) z \\ &\quad + \left( \frac{4}{b^2}\alpha^2 + 6\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2b + \frac{1}{16}b^4\alpha^2 + \frac{12}{b}\alpha^2\beta + \frac{3}{2}b^2\alpha^2\beta \right) z^2 \\ &\quad + \left( \frac{4}{b}\alpha^3 + 4\alpha^3\beta + \frac{1}{2}b^2\alpha^3 \right) z^3 + \alpha^4 z^4. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de  $\varphi(\hat{P}_a(z))$  con  $\hat{Q}_b(\varphi(z))$  se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^4 \\ 2\alpha a &= \frac{4}{b}\alpha^3 + 4\alpha^3\beta + \frac{1}{2}b^2\alpha^3 \\ \alpha \left( \frac{5}{4}a^2 + \frac{2}{a} \right) &= \frac{4}{b^2}\alpha^2 + 6\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2b + \frac{1}{16}b^4\alpha^2 + \frac{12}{b}\alpha^2\beta + \frac{3}{2}b^2\alpha^2\beta \\ \alpha \left( \frac{1}{4}a^3 + 2 \right) &= 4\alpha\beta^3 + \frac{1}{4}\alpha b^3 + 2\alpha + 4\alpha\beta b + \frac{8}{b^2}\alpha\beta + \frac{12}{b}\alpha\beta^2 + \frac{1}{8}b^4\alpha\beta + \frac{3}{2}b^2\alpha\beta^2 \\ \beta &= 2\beta + \frac{1}{4}\beta b^3 + 2b\beta^2 + \frac{4}{b}\beta^3 + \frac{1}{16}b^4\beta^2 + \frac{1}{2}b^2\beta^3 + \beta^4 + \frac{4}{b^2}\beta^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como  $\alpha \neq 0$ , de la primera ecuación de 4.13, se sigue que

$$\alpha^3 = 1$$

**Caso 1**  $\alpha = 1$

De la segunda ecuación de 4.13, se tiene que

$$\beta = \left( \frac{1}{8b} \right) (4ab - b^3 - 8)$$

sustituyendo el valor de  $\beta$  en la tercera ecuación de 4.13, se obtiene

$$\frac{1}{16}b^4 + \frac{4}{b^2} + \frac{3}{32b^2} (-8 - b^3 + 4ab)^2 + 2b + \frac{3}{2b^2} (-8 - b^3 + 4ab) + \frac{3}{16} (-8 - b^3 + 4ab) b - \frac{5}{4}a^2 - \frac{2}{a}$$

Despejando  $a$  de la tercera ecuación de 4.13, se obtiene

- $a = \frac{1}{12b}A + \frac{1}{2bA} (64 - 16b^3 + b^6)$
- $a = -\frac{1}{24b}A - \frac{1}{4bA} (64 - 16b^3 + b^6) + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left( \frac{1}{12b}A - \frac{1}{2bA} (64 - 16b^3 + b^6) \right)$
- $a = -\frac{1}{24b}A - \frac{1}{4bA} (64 - 16b^3 + b^6) - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left( \frac{1}{12b}A - \frac{1}{2bA} (64 - 16b^3 + b^6) \right)$

donde

$$A = (6912b^3 + 6\sqrt{C})^{1/3}$$

y

$$C = -1572864 + 1179648b^3 + 958464b^6 + 61440b^9 - 5760b^{12} + 288b^{15} - 6b^{18}.$$

### Caso 1.1

Si  $a = \frac{1}{12b}A + \frac{1}{2bA} (64 - 16b^3 + b^6)$ , entonces de la quinta ecuación de 4.13, se sigue que

- $b = 2$
- $b = -1 + \sqrt{3}i$
- $b = -1 - \sqrt{3}i$
- $b = 1 + \sqrt{3}i$
- $b = 1 - \sqrt{3}i$
- $b = 2(\sqrt{5} + 2)^{1/3}$
- $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} - \sqrt{3}i(\sqrt{5} + 2)^{1/3}$
- $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} + \sqrt{3}i(\sqrt{5} + 2)^{1/3}$
- $b = -2$
- $b = 1 - \sqrt{5}$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i(1 - \sqrt{5})$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i(1 - \sqrt{5})$

En la tabla 4.9 se enlistan los valores de los parámetros para los cuales se tiene una conjugación afín.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$
2	2	1	0
$-1 - 1.732050i$	$-1 + 1.732050i$	1	0
$-1 + 1.732050i$	$-1 - 1.732050i$	1	0
3.236067	3.236067	1	0
$-1.618033 + 2.802517i$	$-1.618033 - 2.802517i$	1	0
$-1.618033 - 2.802517i$	$-1.618033 + 2.802517i$	1	0
-2	-2	1	-1
-2	-1.236067	1	-0.381966
$1 - 1.732050i$	$1 + 1.732050i$	1	$0.5 - 0.866025i$
$1 + 1.732050i$	$1 - 1.732050i$	1	$0.5 + 0.866025i$
$1 + 1.732050i$	$0.618033 - 1.070466i$	1	$0.190983 + 0.330792i$
$1 - 1.732050i$	$0.618033 + 1.070466i$	1	$0.190983 - 0.330792i$

Cuadro 4.9

**Caso 1.2**

Si  $a = -\frac{1}{24b}A - \frac{1}{4bA}(64 - 16b^3 + b^6) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(\frac{1}{12b}A - \frac{1}{2bA}(64 - 16b^3 + b^6))$ , entonces de la ecuación cinco de 4.13, se sigue que

- $b = 2$
- $b = -2$
- $b = 1 - \sqrt{5}$
- $b = 1 + \sqrt{3}i$
- $b = 1 - \sqrt{3}i$
- $b = -1 + \sqrt{3}i$
- $b = -1 - \sqrt{3}i$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}i$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}i$
- $b = 2(\sqrt{5} + 2)^{1/3}$
- $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} + \sqrt{3}(\sqrt{5} + 2)^{1/3}i$
- $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} - \sqrt{3}(\sqrt{5} + 2)^{1/3}i$

En la tabla 4.10 se enlistan los valores de los parámetros para los cuales se tiene una conjugación afín.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$
$-1 + 1.732050i$	2	1	$-1.5 + 0.866025i$
3.236067	-2	1	1.618033
3.236067	-1.236067	1	2.236067
$0.618033 - 1.070466i$	$1 + 1.732050i$	1	$0.309016 - 0.535233i$
$-1.618033 - 2.802517i$	$1 - 1.732050i$	1	$-0.809016 - 1.401258i$
2	$-1 + 1.732050i$	1	$1.5 + 0.866025i$
$-1 - 1.732050i$	$-1 - 1.732050i$	1	$-1.732050i$
$0.618033 + 1.070466i$	$0.618033 - 1.070466i$	1	0
$-1.618033 + 2.802517i$	$0.618033 + 1.070466i$	1	$-1.118033 + 1.936491i$
-2	3.236067	1	-2.618033
$0.618033 - 1.070466i$	$-1.618033 - 2.802517i$	1	$1.118033 - 1.936491i$
$1 + 1.732050i$	$-1.618033 + 2.802517i$	1	$1.309016 + 2.267283i$

Cuadro 4.10

**Caso 1.3**

Si  $a = -\frac{1}{24b}A - \frac{1}{4bA}(64 - 16b^3 + b^6) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(\frac{1}{12b}A - \frac{1}{2bA}(64 - 16b^3 + b^6))$ , entonces de la ecuación cinco de 4.13, se sigue que

- $b = 2$
- $b = -2$
- $b = 1 - \sqrt{5}$
- $b = 1 + \sqrt{3}i$
- $b = 1 - \sqrt{3}i$
- $b = -1 + \sqrt{3}i$
- $b = -1 - \sqrt{3}i$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}i$
- $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}i$
- $b = 2(\sqrt{5} + 2)^{1/3}$
- $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} + \sqrt{3}(\sqrt{5} + 2)^{1/3}i$

▪  $b = -(\sqrt{5} + 2)^{1/3} - \sqrt{3}(\sqrt{5} + 2)^{1/3}i$

En la tabla 4.11 se enlistan los valores de los parámetros para los cuales se tiene una conjugación afín.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$
$-1 - 1.732050i$	2	1	$-1.5 - 0.866025i$
-1.236067	-2	1	-0.618033
-1.236067	-1.236067	1	0
$-1.618033 + 2.802517i$	$1 + 1.732050i$	1	$-0.809016 + 1.401258i$
$0.618033 + 1.070466i$	$1 - 1.732050i$	1	$0.309016 + 0.535233i$
$-1 + 1.732050i$	$-1 + 1.732050i$	1	$1.732050i$
2	$-1 - 1.732050i$	1	$1.5 - 0.866025i$
$-1.618033 - 2.802517i$	$0.618033 - 1.070466i$	1	$-1.118033 - 1.936491i$
$0.618033 - 1.070466i$	$0.618033 + 1.070466i$	1	0
-1.236067	3.236067	1	-2.236067
$0.618033 + 1.070466i$	$-1.618033 + 2.802517i$	1	$1.118033 + 1.936491i$
$1 - 1.732050i$	$-1.618033 - 2.802517i$	1	$1.309016 - 2.267283i$

Cuadro 4.11

**Caso 2**  $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

De la segunda ecuación de 4.13, se sigue que

$$\beta = \left(\frac{1}{8b}\right) \left(-8 - b^3 - 2ab + 2\sqrt{3}abi\right)$$

Despejando  $a$  de la tercera ecuación de 4.13, se obtiene

▪  $a = \frac{A}{6(1+\sqrt{3}i)} - \frac{64-16b^3+b^6}{2bA}$

▪  $a = -\frac{A}{12b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{4bA} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{A}{6b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{2bA}\right)$

▪  $a = -\frac{A}{12b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{4bA} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{A}{6b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{2bA}\right)$

donde

$$A = \left( (864b^3 + 864\sqrt{3}ib^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{B}) (1 + \sqrt{3}i)^2 \right)^{1/3}$$

y

$$B = \frac{262144 - 196608b^3 - 159744b^6 - 10240b^9 + 960b^{12} - 48b^{15} + b^{18}}{1 + \sqrt{3}i}$$

**Caso 2.1**

Si  $a = \frac{A}{6(1+\sqrt{3}i)} - \frac{64-16b^3+b^6}{2bA}$ , entonces de la quinta ecuación de 4.13, se sigue que

- $b = -1.236067$
- $b = 0.618033 - 1.070466i$

En la tabla 4.12 se enlistan los valores de los parámetros para los cuales se tiene una conjugación afín.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$
$0.618033 + 1.070464i$	$-1.236067$	1	0
$0.618033 - 1.070464i$	$0.618033 - 1.070466i$	1	0

Cuadro 4.12

**Caso 2.2**

Si  $a = -\frac{A}{12b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{4bA} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \left( \frac{A}{6b(1+\sqrt{3}i)} + \frac{64-16b^3+b^6}{2bA} \right)$ , entonces de la quinta ecuación de 4.13, se sigue que

- $b = -1 - 1.732050i$
- $b = 0.618033 - 1.070466i$

En la tabla 4.13 se enlistan los valores de los parámetros para los cuales se tiene una conjugación afín.

$a$	$b$	$\alpha$	$\beta$
$-1 + 1.732050i$	$-1 - 1.732050i$	1	$-1.732050i$
$-1.618033 + 2.802517i$	$0.618033 - 1.070466i$	1	$-1.118033 - 1.936491i$

Cuadro 4.13

□

## Conclusión

---

En el intento de resolver la conjetura MLC, se ha desarrollado mucha de la teoría de dinámica holomorfa, usando herramientas de diferentes áreas de matemáticas como: análisis complejo, álgebra, aritmética, combinatoria, topología, teoría de números, geometría, entre otras. Esto muestra que en matemáticas diferentes áreas están relacionadas entre si. Por otra parte, aunque parezca que ya se entiende toda la matemática alrededor de los polinomios cuadráticos y en particular del conjunto de Mandelbrot, existen aún conjeturas como la de Fatou o la conjetura MLC que permanecen sin resolver.

Para localizar algunas componentes hiperbólicas del interior del Mandelbrot, fue necesario encontrar los centros de dichas componentes, los cuales están determinados por las raíces del polinomio  $P_c^k(0)$  de grado  $2^{k-1}$ . Esta técnica permite clasificar los diferentes periodos de las componentes hiperbólicas del interior de  $M$ . Sin embargo, sólo funciona para periodos pequeños, porque cuando aumenta el periodo, el grado del polinomio a resolver crece exponencialmente. Usando esta misma idea, se pudieron identificar las componentes hiperbólicas de periodo bajo, para la familia cuártica y en particular se clasificaron las de periodo uno y dos.

# Simbología

---

Simbolo	Definición
$\mathbb{Q}$	Conjunto de números racionales
$\mathbb{I}$	Conjunto de números irracionales
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos
$\hat{\mathbb{C}}$	Extensión del plano complejo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{D}$	Disco unitario centrado en cero
$\bar{Y}$	La cerradura del conjunto $Y$
$M$	El conjunto de Mandelbrot
$P_c$	$P_c(z) = z^2 + c$
$K_c$	Conjunto de Julia lleno de $z^2 + c$
$J_c$	Conjunto de Julia de $z^2 + c$
$R_M(\theta)$	Rayo externo de $M$
$X \setminus A$	Complemento del conjunto $A$ respecto a $X$
$\partial M$	Frontera de $M$
$\mathcal{O}_R(c_1)$	La órbita de $c_1$ bajo $R$
$A_f(z^*)$	La cuenca de atracción de $z^*$
$A_f^*(z^*)$	La cuenca inmediata de atracción de $z^*$
$f^n$	La $n$ -ésima iterada $f \circ \dots \circ f$ ( $n$ -veces)
$P_R$	Conjunto postcrítico
$\chi(A)$	Característica de Euler de $A$
$P_{ba}$	$P_b \circ P_a$
$\delta_f(A)$	Deficiencia total de $f$ sobre $A$

## Bibliografía

---

- [Be] A.F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer, 1990.
- [BF] B. Branner & N. Fagella. *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2014.
- [B] I.N. Baker, *An entire function wich has wandering domains*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 22, pp. 173-176, 1976.
- [CG] L. Carleson & T. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [C1] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable* . Springer-Verlag New York, 1978.
- [C2] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable II*. Springer-Verlag New York, 1995.
- [D] R. L. Devaney. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. Volume 49, 1-11, 1994.
- [DH] A. Douady & J. Hubbard. *Etude dynamique des polynomes complexes*. Publication Mathematiques d'Orsay. 84-02, 1984; 85-04, 1985.
- [GS] J. Graczyk & G. Swiatek. *The real Fatou conjecture*, Annals of Math. Studies. 144, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [HW] G. H. Hardy & E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, New York, 1979.
- [J] G. Julia . *Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*. J. math. 8 , 47-245, 1918.
- [Ly] M. Lyubich. *Dynamics of quadratic polynomials*. I-II Acta Mathematica. 178, 185-297, 1997.

[McM] C.T. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press, 1994.

[M] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Annals of Math. Studies. 160. Princeton University Press, 2006.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.