



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco  
División Académica de Ciencias Básicas



**ESTABILIDAD GLOBAL DE UN  
MODELO EPIDEMIOLÓGICO CON  
MIGRACIÓN Y TRANSPORTE**

**Tesis**

Para obtener el título de:

**MAESTRA EN CIENCIAS EN  
MATEMÁTICAS APLICADAS**

Presenta

**LIC. ITZAYANA YISELY  
MADRIGAL ESTRADA**

Director de tesis:

Dr. Gamaliel Blé González

Co-director de tesis:

Dr. Iván Loreto Hernández

Cunduacán, Tabasco.

Agosto 2024.


## Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Cunduacán, Tabasco, el día 15 del mes agosto del año 2024, el que suscribe Itzayana Yisely Madrigal Estrada, alumna(o) de la División Académica de Ciencias Básicas con número de matrícula 222A15001 adscrito a la Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del título y titulada Estabilidad Global de un Modelo Epidemiológico con Migración y Transporte dirigida por el Dr. Gamaliel Blé González y el Dr. Iván Loreto Hernández.

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Cunduacán , Tabasco a 15 de agosto del 2024.



---

Itzayana Yisely Madrigal Estrada



**UJAT**  
UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

21 de agosto de 2024

**LIC. ITZAYANA YISELY MADRIGAL ESTRADA  
PASANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
PRESENTE**

Por medio del presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“ESTABILIDAD GLOBAL DE UN MODELO EPIDEMIOLÓGICO CON MIGRACIÓN Y TRANSPORTE”**, en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL y obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL  
DIRECTORA**



C.c.p.- Archivo

DIR'DRA.HPV/JP'DRA.EAM/jkal *J*

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

## CARTA DE AUTORIZACIÓN

Cunduacán, Tabasco a 15 de agosto del 2024.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada Estabilidad Global de un Modelo Epidemiológico con Migración y Transporte. Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; en y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

### COLABORADORES



Dr. Gamaliel Blé González.



Dr. Iván Loreto Hernández



Itzayana Yisely Madrigal Estrada

### TESTIGOS



Reina Marisol Madero Hernández



René de la Cruz de los Santos

# Agradecimientos

*Dedicado a:*  
Dios y mis padres.

## Agradecimientos

Agradezco:

*En primer lugar, me gustaría alabar y agradecer a Dios, el todopoderoso, que me ha concedido innumerables bendiciones, conocimientos y oportunidades, de modo que finalmente he podido culminar la tesis. Aparte de mis esfuerzos, el éxito de este trabajo depende en gran medida del aliento y las directrices de muchos otros. Aprovecho esta oportunidad para expresar mi gratitud a las personas que han sido fundamentales para la realización de esta tesis.*

*A mis padres por el aliento y apoyo incesante durante el proceso de finalización de la tesis, además, por las facilidades y la atención que me brindaron. Hoy cuando concluyo mis estudios, les dedico a ustedes este logro amados padres, como una meta más conquistada.*

*Expreso mi agradecimiento a los directores de tesis Dr. Gamaliel Blé González y Dr. Iván Loreto Hernández que me han apoyado durante todo este proyecto. Así como a todos los docentes que formaron parte de mi formación como Maestra en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.*

*A mi novio Johann Van-Strahlen por haberme apoyado tanto, por todas esas noches en vela siéndome de compañía, porque a pesar de todos mis fallos siempre creyó en mí y me hizo confiar en mí misma. Gracias a mis compañeros por haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que no voy a olvidar, sobretodo a mi compañera y amiga Fernanda Domínguez por el apoyo mutuo que nos dimos a lo largo de la maestría.*

*Este proyecto representa años de esfuerzo y dedicación por lo que jamás me alcanzarán las palabras para agradecer a cada persona que aportó a este gran logro.*

**Itzayana Madrigal**

# Índice general

Agradecimientos	v
<b>Estabilidad global de un modelo epidemiológico con migración y transporte</b>	<b>vi</b>
Resumen . . . . .	vi
Abstract . . . . .	vi
Introducción . . . . .	vii
Marco Teórico . . . . .	viii
Justificación . . . . .	ix
Pregunta de investigación . . . . .	x
Hipótesis . . . . .	x
Objetivo general . . . . .	x
Objetivos específicos . . . . .	x
Metodología . . . . .	x
<b>1. Preliminares de ecuaciones diferenciales</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría local . . . . .	1
1.1.1. Teorema de existencia y unicidad . . . . .	1
1.1.2. Linealización . . . . .	2
1.1.3. Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	2
1.1.4. Teorema de la variedad estable . . . . .	3
1.2. Estabilidad . . . . .	5
1.2.1. Funciones de Lyapunov . . . . .	5
1.2.2. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	6
1.2.3. Método para determinar estabilidad global en el equilibrio libre de enfermedad. . . . .	9
1.3. Análisis en puntos de equilibrio no hiperbólicos . . . . .	10
<b>2. Modelos epidemiológicos básicos</b>	<b>11</b>
2.1. Modelo sin migración . . . . .	12
2.1.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	12
2.1.2. Estabilidad global . . . . .	13
2.1.3. Bifurcación . . . . .	15
2.1.4. Simulaciones numéricas . . . . .	16
2.2. Solo individuos susceptibles viajan . . . . .	18

2.2.1.	Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	18
2.2.2.	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad . . . . .	23
2.2.3.	Simulaciones numéricas . . . . .	24
<b>3.</b>	<b>Modelos epidemiológicos con migración</b>	<b>29</b>
3.1.	Infectados de la ciudad 1 restringidos de viajar . . . . .	30
3.1.1.	Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	30
3.1.2.	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad . . . . .	32
3.1.3.	Bifurcación . . . . .	34
3.1.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	35
3.2.	Todos los individuos viajan entre las dos ciudades . . . . .	43
3.2.1.	Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	43
3.2.2.	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad . . . . .	44
3.2.3.	Bifurcación . . . . .	46
3.2.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	49
<b>4.</b>	<b>Modelo sin detección de enfermedad a la salida</b>	<b>56</b>
4.1.	Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	57
4.2.	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad . . . . .	59
4.3.	Simulaciones numéricas . . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Modelo con detección de enfermedad a la entrada y a la salida</b>	<b>70</b>
5.1.	Puntos de equilibrio y estabilidad local . . . . .	71
5.1.1.	Alta probabilidad de éxito en la detección de infectados a la salida . . . . .	73
5.1.2.	Baja probabilidad de éxito en la detección de infectados a la salida . . . . .	73
5.2.	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad . . . . .	74
5.3.	Simulaciones numéricas . . . . .	77
<b>Resultados</b>		<b>82</b>
<b>Conclusión</b>		<b>84</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>85</b>
<b>Apéndice A</b>		<b>87</b>
<b>Apéndice B</b>		<b>91</b>
5.4.	Prueba de la proposición 3.2.2. . . . .	91
5.5.	Prueba de la proposición 3.2.3 . . . . .	94
<b>Apéndice C</b>		<b>97</b>
<b>Apéndice D</b>		<b>106</b>
5.6.	Prueba del Teorema 5.1.1 . . . . .	106
5.7.	Prueba del Teorema 5.1.2 . . . . .	111

# Índice de tablas

5.1. Resumen de resultados. . . . .	83
-------------------------------------	----

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.



# Índice de figuras

1.1.	$\omega$ y $\alpha$ límite del sistema (1.6).	8
1.2.	Ejemplos gráficas y ciclos separatriz.	9
2.1.	Gráfica de bifurcación.	16
2.2.	Curvas solución.	18
2.3.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{2}{3}\right)$ .	25
2.4.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	26
2.5.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{14}{15}, \frac{2}{15}, \frac{14}{15}, \frac{2}{15}\right)$ .	28
2.6.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	28
3.1.	Bifurcación en el parámetro $\beta$ .	36
3.2.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{13}{16}, \frac{3}{16}, \frac{13}{16}, \frac{3}{16}\right)$ .	37
3.3.	Proyección en el hiperespacio.	38
3.4.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{6}{13}, \frac{8}{13}\right)$ .	39
3.5.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	40
3.6.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{9}, \frac{11}{9}, \frac{2}{9}\right)$ .	42
3.7.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	42
3.8.	Bifurcación en el parámetro $\beta$ .	48
3.9.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{11}{16}\right)$ .	50
3.10.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	50
3.11.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{11}{13}, \frac{17}{13}\right)$ .	52
3.12.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	52
3.13.	Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}, \frac{5}{9}\right)$ .	55
3.14.	Proyección en el espacio $I_2 = 0$ .	55
4.1.	Series de tiempo de las poblaciones con condición inicial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right)$ .	63

4.2. Proyección en el espacio $I_2 = 0$ . . . . .	64
4.3. Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{18}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ . . . . .	65
4.4. Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{10}, \frac{11}{4}, \frac{12}{10}, \frac{16}{10}, \frac{1}{30}\right)$ . . . . .	66
4.5. Series de tiempo con condición inicial $(5.99, 0.98, 0.4, 6.5, 1.2, 0.8)$ . . . . .	67
4.6. Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{23}{3}, \frac{14}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{9}{2}\right)$ . . . . .	68
4.7. Proyección en el espacio $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ . . . . .	69
5.1. Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right)$ . . . . .	78
5.2. Proyección en el espacio $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ . . . . .	79
5.3. Series de tiempo con condición inicial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right)$ . . . . .	80
5.4. Proyecciones de la solución del sistema (5.3.) con condición inicial. . . . .	81

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Estabilidad global de un modelo epidemiológico con migración y transporte

## Resumen

En este trabajo se analiza la dinámica de cuatro modelos epidemiológicos, los cuales permiten comparar el efecto de la migración y el establecimiento de controles para detectar infectados, a la hora de entrar o salir de un viaje, en la erradicación de una epidemia. En particular, calculamos el número reproductivo básico de cada modelo, establecemos condiciones para la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y para la existencia de un equilibrio endémico. Además, se muestran simulaciones numéricas que ejemplifican los resultados analíticos obtenidos para cada uno de los modelos.

**Palabras claves:** *equilibrio libre de enfermedad, equilibrio endémico, número reproductivo básico, estabilidad global.*

## Abstract

In this paper we analyze the dynamics of four epidemiological models, which allow us to compare the effect of migration and the establishment of controls to detect infection, when entering or leaving a trip, on the eradication of an epidemic. In particular, we calculate the basic reproductive number of each model, establish conditions for the global stability of the disease-free equilibrium and for the existence of an endemic equilibrium. In addition, numerical simulations are shown that exemplify the analytical results obtained for each of the models.

**Keywords:** *disease free equilibrium, endemic equilibrium, reproductive basic number, global stability.*

## Introducción

Un problema básico en epidemiología es la determinación de umbrales, los cuales son valores críticos para cantidades como el tamaño de la población o la densidad del vector que debe superarse para que se produzca una epidemia. Tal es el caso del número reproductivo básico  $R_0$ , el cual es el promedio de nuevos casos que una persona infectada va a provocar durante el período de contagio, por lo que  $R_0 < 1$  implica la erradicación de la enfermedad. Este número resulta ser de gran utilidad para la toma de decisiones en la salud pública, ya que constituye un indicador que estima la velocidad de propagación de una enfermedad en la población. En un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales, esta condición implica la existencia de un punto de equilibrio libre de enfermedad globalmente estable.

El propósito de este trabajo es analizar la dinámica global de los modelos epidemiológicos propuestos en los trabajos realizados por Cui-Takeuchi (2005) [CTS] y Liu-Takeuchi (2006) [LT], los cuales consideran la migración entre dos poblaciones y el establecimiento de medidas de control a la entrada y a la salida de un viaje. En particular, calcularemos el número reproductivo básico de cada modelo, estableceremos condiciones para la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y determinaremos condiciones para la existencia de un equilibrio endémico y para su estabilidad.

Cui-Takeuchi (2005) demuestran la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad y del equilibrio endémico del sistema (1) y nosotros contribuimos con la demostración de la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y el análisis de bifurcación del sistema. Por otro lado, Liu-Takeuchi (2006) determinan la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad y calculan en un caso particular el equilibrio endémico del sistema (2), nosotros demostramos la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y generalizamos las condiciones para la existencia del equilibrio endémico, así como su estabilidad local.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 estudiaremos la teoría básica de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, entre las cuales estudiaremos herramientas de estabilidad de los puntos de equilibrio, tales como el teorema de Hartman-Grobman, el teorema de Poincaré-Bendixson y un método para calcular funciones de Liapunov que permite determinar la estabilidad global en el equilibrio libre de enfermedad. En el capítulo 2 analizaremos la dinámica global de dos modelos epidemiológicos, uno sin migración y otro cuando solo los individuos susceptibles pueden viajar. En el capítulo 3 estudiaremos la dinámica de dos modelos, uno que considera la posibilidad de que únicamente haya migración de los individuos infectados de la población dos a la población uno y posteriormente analizaremos el caso cuando la migración de los individuos infectados se da en las dos direcciones. Determinaremos la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y condiciones para la existencia del equilibrio endémico y su estabilidad. En el capítulo 4 analizaremos la dinámica de un modelo que considera la migración de individuos infectados en ambas direcciones estableciendo medidas de control al inicio de un viaje. Por último, en el capítulo 5 estudiaremos la dinámica de un modelo que considera la migración de individuos infectados en ambas direcciones estableciendo medidas de control tanto a la entrada como a la salida de un viaje.

## Marco Teórico

La enfermedad ha estado siempre presente en la historia de la humanidad. Prácticamente desde el comienzo de la historia registrada ha habido epidemias. El término pandemia se usa cuando la epidemia se extiende a muchos países y ataca a muchos individuos en una región, mientras que epidemia se refiere a una enfermedad que azota un gran número de personas o animales en un mismo lugar en un período determinado [CR]. En la historia de la humanidad las grandes pandemias han representado importantes eventos para los seres humanos y el desarrollo de la sociedad. Desde tiempos antiguos, fueron conocidas como peste y hasta épocas posteriores, eran producidas por diferentes infecciones de causa bacteriana o viral, expandiéndose por continentes y múltiples países. Su aparición provocaba estelas de desolación y mortandad a través de los siglos y hasta nuestros días, como lo es la pandemia producida por el virus de la influenza SARS-CoV-2, coronavirus causante de la pandemia nombrada por la Organización Mundial de la Salud como COVID-19 [CR]. Antes de esta última, la humanidad ha sufrido más de 20 grandes epidemias y pandemias de las que se tiene constancia, la bacteria *Yersinia pestis*, transmitida por las pulgas, es responsable de al menos tres pandemias de peste humana, la peste de Justiniano, la peste negra y la tercera peste [Pi].

El desarrollo de modelos matemáticos para estudiar la propagación de epidemias ha tenido gran progreso en las últimas décadas. El modelo pionero basado en ecuaciones diferenciales fue introducido en 1927 por Kermack y McKendrick y se le conoce como modelo SIR [BCC]. Este supone que el tamaño de la población es constante y la divide en tres clases, Susceptibles (aquellos individuos sanos que pueden contraer la enfermedad), Infectados (enfermos que pueden contagiar la enfermedad a otros) y Removidos (individuos que adquirieron inmunidad o aislados de las otras clases). Explícitamente el modelo SIR básico es:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\alpha SI, \\ \dot{I} &= \alpha SI - \delta I, \\ \dot{R} &= \delta I,\end{aligned}$$

donde  $S, I$  y  $R$  son las proporciones de individuos susceptibles, infectados y removidos, respectivamente. Además,  $\alpha$  es la tasa de infección y  $\delta$  la tasa de recuperación. Como la población es constante, el análisis del modelo se reduce a estudiar solo las primeras dos ecuaciones. Este modelo ha sido adaptado haciendo diferentes supuestos en el tipo de inmunidad, mortalidad debido a la infección y migración [B, H]. En particular, Hethcote (1976) introdujo un modelo epidémico que considera la migración de la población entre dos parches. Posteriormente, Brauer y van den Driessche (2001) propusieron un modelo con inmigración de individuos infecciosos, que simula el hecho de que los viajeros pueden regresar a casa de un viaje al extranjero [Bv]. Wang y Zhao (2004) propusieron un modelo para describir la dinámica de la propagación de enfermedades debido a la migración de la población entre diferentes regiones. Ellos establecieron un umbral por encima del cual la enfermedad es uniformemente persistente y por debajo del cual el equilibrio libre de enfermedad es globalmente estable [WZ]. Cui *et al* (2006) propusieron el siguiente modelo SIS que considera la

posibilidad de adquirir la enfermedad durante el viaje [CTS].

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + \alpha I_2 + \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2 + \alpha I_1 + \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

En el análisis de este modelo, ellos muestran que la infección durante el transporte intensifica la propagación de una enfermedad por lo que es importante establecer restricciones en los pasajeros cuando aparecen enfermedades infecciosas. Esto llevó a Liu y Takeuchi (2006) a proponer el siguiente modelo que considera la implementación de una estrategia de revisión de pasajeros para detección de síntomas antes de abordar un viaje (escaneo de temperatura, aplicación de cuestionarios) [LT].

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 + f Q_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma(1 - \theta_d) \alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_d) I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + (1 - \theta_e)(1 - \theta_d) \alpha I_2 \\
 &\quad + (1 - \theta_e)(1 - \theta_d) \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_d) I_2}, \\
 \dot{Q}_1 &= \theta_d \alpha I_1 + \theta_e (1 - \theta_d) \alpha I_2 + \theta_e (1 - \theta_d) \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_d) I_2} - (e + f) Q_1, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 + f Q_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma(1 - \theta_d) \alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_d) I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2 + (1 - \theta_e)(1 - \theta_d) \alpha I_1 \\
 &\quad + (1 - \theta_e)(1 - \theta_d) \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_d) I_1}, \\
 \dot{Q}_2 &= \theta_d \alpha I_2 + \theta_e (1 - \theta_d) \alpha I_1 + \theta_e (1 - \theta_d) \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_d) I_1} - (e + f) Q_2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ellos demuestran condiciones para la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad, lo que implica que las medidas de detección de entrada de contagiados a un viaje son importantes para la erradicación de una enfermedad.

## Justificación

Los modelos matemáticos han contribuido a establecer estrategias de control en una epidemia que se propaga por un virus, como es el caso de la COVID-19. La finalidad de los modelos es determinar las variables y los parámetros que mas influyen en la erradicación de la enfermedad o en establecer un equilibrio endémico. Dado la movilidad que existe actualmente entre los individuos de las diferentes poblaciones, es importante considerar el efecto que tiene la migración y las medidas de control para detectar a un individuo infectado al iniciar o concluir un viaje entre dos poblaciones, en la erradicación de una pandemia.

En este trabajo analizaremos el modelo epidemiológico (2), propuesto por Liu-Takeuchi, basado en ecuaciones diferenciales que considera migración y medidas de control de infectados establecidas a la entrada o salida de un viaje entre dos poblaciones. Ellos analizan la dinámica local del equilibrio libre de enfermedad. Sin embargo, es importante determinar la estabilidad global de este punto de equilibrio, ya que eso implica que independientemente de las condiciones iniciales, es decir, del número de infectados la epidemia va a desaparecer. Por otro lado, cuando no se tiene la estabilidad global, es necesario determinar las condiciones en las que se da un equilibrio endémico.

## Pregunta de investigación

¿Qué tanto influyen los controles de detección de infectados, al iniciar o terminar un viaje, en la erradicación de una epidemia?

## Hipótesis

Establecer medidas de detección de infectados al iniciar un viaje entre dos poblaciones, o concluirlo, influye positivamente en la erradicación de una epidemia.

## Objetivo general

Analizar la dinámica global del modelo epidemiológico (2) que considera migración y medidas de detección de infectados antes de abordar o de concluir un viaje.

## Objetivos específicos

1. Determinar la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad y del equilibrio endémico, de diferentes simplificaciones del modelo (2). Primero sin migración y posteriormente migración sin medidas de detección.
2. Establecer las condiciones en los parámetros del sistema (2) que garanticen la estabilidad del punto de equilibrio libre de enfermedad.
3. Demostrar las condiciones en los parámetros del sistema que impliquen la existencia de un equilibrio endémico y su estabilidad.
4. Comparar los resultados obtenidos y determinar el efecto de la migración y de las medidas de control sanitario antes de abordar un viaje en la erradicación de una epidemia.
5. Realizar simulaciones numéricas que ejemplifiquen los diferentes resultados analíticos.

## Metodología

Para alcanzar el objetivo general de este trabajo se realizará lo siguiente:

1. Revisión de los conceptos y resultados básicos de la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales, [P, HS].
2. Revisión de los resultados obtenidos por Cui *et al* para el sistema (1) y de Liu-Takeuchi para el sistema (2).
3. Análisis de la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad y del equilibrio endémico de simplificaciones del sistema (2).
4. Análisis de la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad del sistema (2).
5. Determinación de condiciones para la existencia del equilibrio endémico, así como su estabilidad local.
6. Simulaciones numéricas de diferentes escenarios que presenta el modelo (2).
7. Análisis del efecto de la migración y de las medidas de control sanitario antes de abordar un viaje en la erradicación de una epidemia.



# Preliminares de ecuaciones diferenciales

En este capítulo daremos las herramientas geométricas para estudiar la dinámica de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales dados por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{x} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ . El sistema (1.1), en general no se puede resolver de manera explícita pero existen herramientas geométricas que ayudan a comprender el comportamiento local de las soluciones cercanas a un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$ , esto es donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Para ello daremos algunos resultados que establecen cuándo el sistema no lineal se puede analizar a partir del sistema lineal, obtenido de la matriz Jacobiana de la función vectorial  $\mathbf{f}$  en el punto  $\mathbf{x}_0$ , es decir,  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Las definiciones y resultados que usaremos en este capítulo pueden ser consultados en [P].

## 1.1. Teoría local

### 1.1.1. Teorema de existencia y unicidad

El siguiente resultado establece las condiciones para las cuales se tiene existencia y unicidad en un sistema no lineal de la forma de (1.1).

**Definición 1.1.1.** Supongamos que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\mathbf{x}(t)$  es una **solución de la ecuación diferencial** (1.1) en un intervalo  $I$  si  $\mathbf{x}(t)$  es diferenciable en  $I$  y si para todo  $t \in I$ ,  $\mathbf{x}(t) \in E$  y

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Dado  $\mathbf{x}_0 \in E$ ,  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del problema (1.1) con valor inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  en un intervalo  $I$ , si  $t_0 \in I$  y  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

**Teorema 1.1.1. (Teorema de Existencia y Unicidad)**

Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in E$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ . Entonces existe  $a > 0$  tal que el sistema (1.1) tiene una única solución  $\mathbf{x}(t)$  en el intervalo  $[-a, a]$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in E$  y  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  la solución del sistema (1.1) definida en su intervalo maximal  $I(\mathbf{x}_0)$ . Al conjunto de funciones definidas por

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0), \text{ para todo } t \in I(\mathbf{x}_0),$$

se le llama el *flujo* de la ecuación diferencial (1.1) o *flujo del campo vectorial*  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

### 1.1.2. Linealización

En esta sección vamos a determinar los puntos de equilibrio del sistema (1.1) y describir su comportamiento. Para ello, mostraremos condiciones para las cuales el sistema no lineal se comporta como el sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \quad (1.2)$$

A la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  se le llama linealización de (1.1) en  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 1.1.3.** Un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  se llama **punto de equilibrio hiperbólico** de (1.1) si la parte real de todos los valores propios de la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  es distinta de cero.

A continuación, damos una clasificación de los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones no lineal (1.1), la cual está determinada por los signos de la parte real de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ .

1. Es un **sumidero** si todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tienen parte real negativa.
2. Es una **fuentes** si todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tienen parte real positiva.
3. Es una **silla** si es un punto de equilibrio hiperbólico y  $\mathbf{A}$  tiene valores propios con parte real positiva y por lo menos uno con parte real negativa.

### 1.1.3. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado muy importante en la teoría local de ecuaciones diferenciales. El teorema garantiza que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$ , el sistema no lineal (1.1) tiene un comportamiento dinámico equivalente al que presenta su linealización con  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . A partir de esta sección asumiremos que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  ha sido trasladado al origen.

**Teorema 1.1.2. (Teorema de Hartman-Grobman)** Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.1). Supóngase que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces existe un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$  con  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos que contienen al cero tal que para toda  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_0$  tenemos que

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t} H(\mathbf{x}_0).$$

Este teorema nos dice que el sistema lineal es topológicamente conjugado al sistema no lineal en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico.

La demostración del teorema puede ser consultada en [P].

### 1.1.4. Teorema de la variedad estable

El siguiente teorema nos muestra que en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  existen variedades invariantes cuyas dimensiones topológicas están dadas por las dimensiones de los subespacios invariantes del sistema linealizado en  $x_0$ . La demostración del teorema se puede consultar en [P].

**Teorema 1.1.3.** (*Variedad estable*)

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.1). Supongamos que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que  $\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{0})$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa y  $n - k$  valores propios con parte real positiva. Entonces existe una variedad diferenciable  $S$  de dimensión  $k$  tangente en  $\mathbf{0}$  al subespacio estable  $E^s$  del sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ , tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(S) \subset S$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in S$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Además existe una variedad diferenciable  $U$  de dimensión  $n - k$  tangente en  $\mathbf{0}$  al subespacio inestable  $E^u$  de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$  tal que para todo  $t \leq 0$ ,  $\phi_t(U) \subset U$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

**Definición 1.1.4.** Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.1), las variedades estables e inestables globales en cero de este sistema se definen como

$$W^s = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S)$$

y

$$W^u = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U),$$

respectivamente.

A continuación damos el criterio de Routh-Hurwitz que ayuda a determinar la estabilidad local de un punto de equilibrio. Su demostración puede ser consultada en [Y].

**Teorema 1.1.4.** (*Criterio de Routh-Hurwitz*)

Sea

$$P_n(\lambda) = q_0 \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n, \quad q_0 = 1 \text{ y } q_k \in \mathbb{R}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Definimos la matriz  $H_q = (q_{ij})$ , donde  $q_{ij} = q_{2i-j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $q_k = 0$  si  $k < 0$  ó  $k > n$ , es decir,

$$H_q = \begin{bmatrix} q_1 & q_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{2n-3} & q_{2n-4} & q_{2n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & q_{n-2} \\ q_{2n-1} & q_{2n-2} & q_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

entonces el polinomio  $P(\lambda)$  es estable (todas sus raíces tienen parte real negativa) si y solo si, todos los coeficientes del polinomio son positivos, y los determinantes de todos los menores principales de  $H_q$  son positivos, esto es

$$D_1 = q_1 > 0, \quad D_2 = \det \begin{bmatrix} q_1 & q_0 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} > 0, \dots, D_n = \det H_q = q_n D_{n-1} > 0.$$

**Ejemplo 1.1.1.** Considere el polinomio cuadrático

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + q_1\lambda + q_2. \quad (1.3)$$

Su arreglo de Routh-Hurwitz es

$$H_q = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix},$$

por el criterio de Routh-Hurwitz todas las raíces del polinomio (1.3) tendrán parte real negativa si los coeficientes  $q_1, q_2$  y  $q_3$  de este polinomio son positivos y además,

$$D_1 = q_1 > 0, \\ D_2 = \det \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} = q_1q_2 - q_3,$$

la positividad de  $D_2$  se cumple si y solo si  $q_3 - q_1q_2 < 0$ . En consecuencia, el polinomio es estable.

**Ejemplo 1.1.2.** Considere el polinomio cúbico

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + q_1\lambda^2 + q_2\lambda + q_3. \quad (1.4)$$

Su arreglo de Routh-Hurwitz es

$$H_q = \begin{bmatrix} q_1 & 1 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}$$

por el criterio de Routh-Hurwitz todas las raíces del polinomio (1.4) tendrán parte real negativa si los coeficientes  $q_1, q_2$  y  $q_3$  de este polinomio son positivos y además,

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} = q_1q_2 - q_3 \quad \text{y} \quad D_3 = q_3D_2$$

deben ser positivos. Por lo tanto,  $P_3(\lambda)$  es estable si  $q_1, q_2, q_3$  y  $D_2$  son positivos.

**Ejemplo 1.1.3.** Considere el polinomio cuártico

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + q_1\lambda^3 + q_2\lambda^2 + q_3\lambda + q_4. \quad (1.5)$$

Su arreglo de Routh-Hurwitz es

$$H_q = \begin{bmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & 1 \\ 0 & q_4 & q_3 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix},$$

por el criterio de Routh-Hurwitz todas las raíces del polinomio  $P_4(\lambda)$  tendrán parte real negativa si  $q_1, q_2, q_3$  y  $q_4$  de este polinomio son positivos y además los menores principales

$$D_1 = q_1,$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} = q_1 q_2 - q_3,$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} q_1 & 1 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 \\ 0 & q_4 & q_3 \end{bmatrix} = q_1 q_2 q_3 - q_3^2 - q_1^2 q_4 \text{ y}$$

$$D_4 = -q_4(q_3^2 + q_1^2 q_4 - q_1 q_2 q_3) = q_4 D_3,$$

son positivos. Como  $D_1 > 0$  basta que  $D_3 > 0$  para tener  $D_2 > 0$  y  $D_4 > 0$ .

## 1.2. Estabilidad

### 1.2.1. Funciones de Lyapunov

Las funciones de Lyapunov ayudan a comprender la estabilidad alrededor de los puntos de equilibrio no hiperbólicos. A continuación, definimos de forma general, las nociones de punto de equilibrio estable y asintóticamente estable.

**Definición 1.2.1.** Sea  $\phi_t$  el flujo de (1.1) definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (1.1) es estable si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$  y  $t \geq 0$  tenemos

$$\phi_t(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es inestable si no es estable, y es asintóticamente estable si es estable y si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0.$$

**Teorema 1.2.1.** Si  $\mathbf{x}_0$  es un pozo de (1.1) y  $\operatorname{Re}(\alpha_j) < -\gamma < 0$  para todos los valores propios  $\alpha_j$  de la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , entonces para  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que para toda  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ ,  $\phi_t$  satisface

$$|\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq \varepsilon e^{-\alpha t},$$

para toda  $t \geq 0$ .

En consecuencia, todos los puntos de equilibrio hiperbólicos que son pozo son asintóticamente estables.

**Teorema 1.2.2.** Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio estable de (1.1), entonces  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  no tiene valores propios con parte real positiva.

La siguiente definición y el teorema subsecuente, proporcionan un método debido a Lyapunov y expuesto en 1982, que es muy útil para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio sea hiperbólico o no.

**Definición 1.2.2.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ ,  $V \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\phi_t$  el flujo de (1.1), entonces para  $\mathbf{x} \in E$  la derivada de la función  $V(\mathbf{x})$  a lo largo de la solución  $\phi_t(\mathbf{x})$  es:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(\mathbf{x}))|_{t=0} = DV(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

La última igualdad se sigue de la regla de la cadena. Si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa en  $E$  entonces  $V(\mathbf{x})$  disminuye a lo largo de la solución  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  que pasa por  $\mathbf{x}_0 \in E$  en  $t = 0$ . Una función  $V : E \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las hipótesis del siguiente teorema es llamada **función de Lyapunov**.

**Teorema 1.2.3.** (Lyapunov) Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in E$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Supongamos que existe una función que toma valores reales  $V \in \mathcal{C}^1(E)$  tal que  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ :

1. Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para toda  $\mathbf{x} \in E$ , entonces  $\mathbf{x}_0$  es estable.
2. Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para toda  $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , entonces  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable.
3. Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$  para toda  $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , entonces  $\mathbf{x}_0$  es inestable.

Note que si  $DV(\mathbf{x}) = 0$ , entonces  $V(\mathbf{x}) = c$ , donde  $c$  es constante. Entonces, las trayectorias o curvas soluciones están contenidas en los conjuntos de nivel de la función  $V$ . Una versión mejorada de este teorema es el siguiente resultado debido a Lasalle cuya demostración puede ser consultada en [LA].

**Teorema 1.2.4.** (Lyapunov-Lasalle) Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $V$  una función escalar tal que  $V \in \mathcal{C}^1(E)$ . Supongamos que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para toda  $\mathbf{x} \in E$  y

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in E : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Si  $\mathcal{M}$  es el conjunto maximal totalmente invariante en  $E$ , entonces cualquier solución acotada para tiempos positivos se aproxima al conjunto  $\mathcal{M}$  cuanto  $t$  tiende a infinito.

### 1.2.2. Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema fundamental de existencia y unicidad garantiza que el sistema (2.2) tiene una única solución  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ , cuando  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$  es abierto. Esta solución pasa por  $\mathbf{x}_0 \in E$  al tiempo  $t = 0$  y está definida para  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ , el intervalo maximal de existencia de la solución. La función  $\phi(\cdot, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow E$  define una **curva solución**, o una **trayectoria** o una **órbita** para el sistema. En esta sección enunciaremos el teorema de Poincaré-Bendixson, para ello será necesario introducir algunas definiciones y resultados básicos, los cuales pueden ser consultados en [P].

Denotemos

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\},$$

a la trayectoria que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0 \in E$  al tiempo  $t = 0$ . Además, denotaremos por

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0}^+ = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{x}_0), t \geq 0\}$$

y

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0}^- = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{x}_0), t \leq 0\},$$

como el movimiento a lo largo de la trayectoria para tiempos positivos o negativos que pasan por la condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , de tal manera que  $\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \Gamma_{\mathbf{x}_0}^+ \cup \Gamma_{\mathbf{x}_0}^-$ .

Un punto  $\mathbf{p} \in E$  es un punto  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  del sistema (1.1) si existe una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{p}.$$

De manera análoga, si  $\mathbf{q} \in E$  y existe una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{q},$$

entonces  $\mathbf{q}$  es llamado un punto  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  de (1.1). El conjunto de puntos de todos los  $\omega$ -límite de una trayectoria  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  es llamado el conjunto  $\omega$ -límite de  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  y es denotado por  $\omega(\Gamma_{\mathbf{x}_0})$ . El conjunto de todos los puntos  $\alpha$ -límite de una trayectoria  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  es llamada el conjunto  $\alpha$ -límite de  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$  y es denotado por  $\alpha(\Gamma_{\mathbf{x}_0})$ . El conjunto de todos los puntos límite de  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$ ,  $\alpha(\Gamma_{\mathbf{x}_0}) \cup \omega(\Gamma_{\mathbf{x}_0})$  es llamado el conjunto límite de  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$ .

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Mostraremos el  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de las trayectorias dado este caso.

En coordenadas polares el sistema (1.6) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

De la componente radial y tangencial observamos que todas las soluciones distintas de cero giran en espiral alrededor del origen en sentido contrario a las manecillas del reloj. En particular, una trayectoria con condición inicial  $r = 1$  permanece en la circunferencia unitaria por lo que su  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite es la circunferencia unitaria. Cuando tomamos la condición inicial con  $0 < r < 1$ , entonces la solución se aproxima a la circunferencia, por lo tanto el  $\omega$ -límite de cualquier trayectoria dentro del disco unitario es la circunferencia unitaria y su  $\alpha$ -límite es el origen. Por otro lado, cualquier trayectoria fuera del disco unitario tiene como  $\omega$ -límite a la circunferencia unitaria, véase la figura 1.1.

**Definición 1.2.3.** Un *ciclo* u *órbita periódica* de (1.1) es cualquier curva solución cerrada del sistema, la cual no es un punto de equilibrio de este. Una órbita periódica  $\Gamma$  se dice que es estable si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad  $U$  de  $\Gamma$  tal que para toda  $\mathbf{x} \in U$ , la distancia  $d(\Gamma_{\mathbf{x}}^+, \Gamma) < \varepsilon$ . Una órbita periódica  $\Gamma$  es llamada inestable si no es estable, y  $\Gamma$  es llamada asintóticamente estable si es estable y para todo punto  $\mathbf{x}$  en alguna vecindad  $U$  de  $\Gamma$

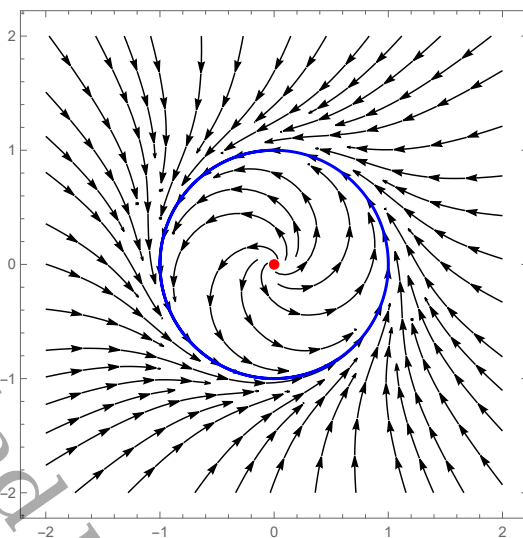


Figura 1.1:  $\omega$  y  $\alpha$  límite del sistema (1.6).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, \mathbf{x}), \Gamma) = 0.$$

Se dice que una órbita periódica  $\Gamma$  es un **ciclo límite** de (1.1) si es el  $\alpha$ -límite o el  $\omega$ -límite de otra trayectoria diferente a  $\Gamma$ .

**Definición 1.2.4.** Un **ciclo separatriz**  $S$  de (1.1), es la imagen continua de una circunferencia que consiste de la unión de un número finito de puntos de equilibrio y separatrices compatiblemente orientadas de (1.1),  $\mathbf{p}_j, \Gamma_j, j = 1, \dots, m$ , tal que para  $j = 1, \dots, m$ ,  $\alpha(\Gamma_j) = \mathbf{p}_j$  y  $\omega(\Gamma_j) = \mathbf{p}_{j+1}$  donde  $\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{p}_1$ . Una **gráfica**  $S$  de (1.1) es la unión de un número finito de ciclos de separatrices compatiblemente orientados del sistema.

En la figura 1.2 podemos observar ejemplos de gráficas y de ciclo separatriz.

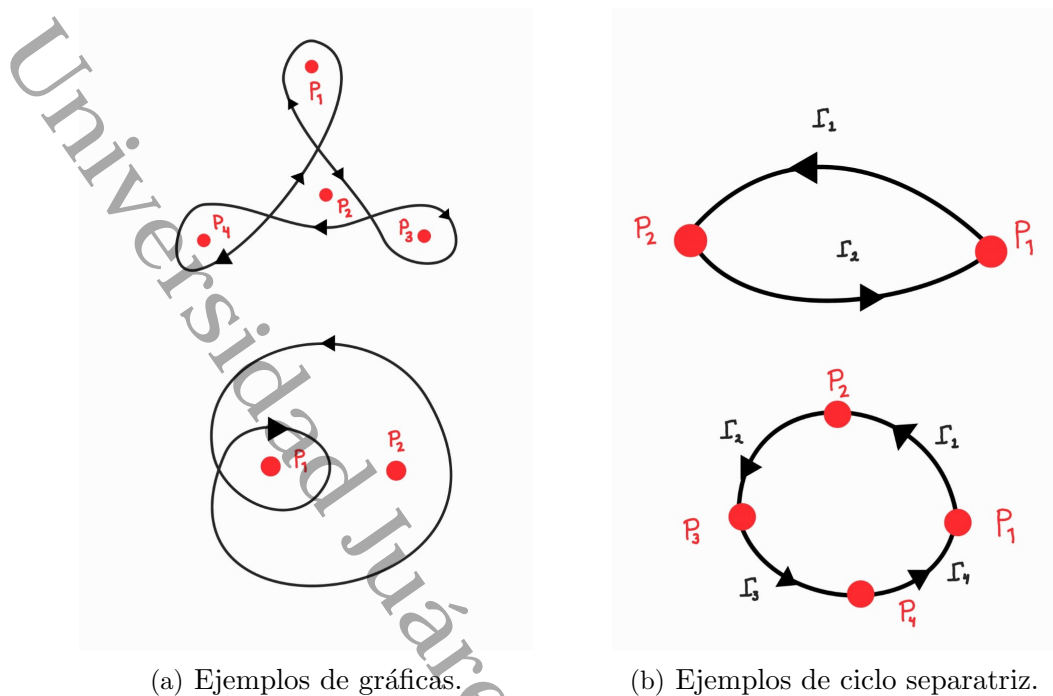
**Teorema 1.2.5. (Poincaré-Bendixson para sistemas analíticos)**

Supóngase que (1.1) es un sistema analítico en un conjunto abierto  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  que tiene una trayectoria  $\Gamma$ , con  $\Gamma^+$  contenida en un subconjunto compacto  $F$  de  $E$ . Entonces  $\omega(\Gamma)$  es, o un punto de equilibrio, una órbita periódica, o una gráfica del sistema.

**Teorema 1.2.6. (Criterio de Dulac)**

Sea  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  donde  $E$  es una región simplemente conexa en  $\mathbb{R}^2$ . Si existe una función  $B \in \mathcal{C}^1(E)$  tal que  $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$  no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $E$ , entonces el sistema no tiene una órbita cerrada que esté contenida en  $E$ . Si  $A$  es una región anular contenida en  $E$  en la cual  $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$  no cambia de signo, entonces hay como máximo un ciclo límite del sistema en  $A$ .





(a) Ejemplos de gráficas.

(b) Ejemplos de ciclo separatriz.

Figura 1.2:

### 1.2.3. Método para determinar estabilidad global en el equilibrio libre de enfermedad.

Mostraremos un método que ayuda a construir una función de Lyapunov para determinar la estabilidad global de los puntos de equilibrio. Para ello será necesario introducir definiciones y resultados básicos los cuales pueden ser consultados en [LXZY, MEK].

En los modelos compartimentales de transmisión de enfermedades infecciosas, los individuos se clasifican en varias clases: algunos se denominan compartimentos de enfermedad si los individuos que contienen están infectados, mientras que otros se denominan compartimentos de no enfermedad. Supongamos que hay  $n > 0$  compartimentos con infectados y  $m > 0$  compartimentos sin infección. Entonces, un modelo general de transmisión de la enfermedad por compartimentos puede escribirse como

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x, y) - \mathcal{V}(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (1.7)$$

donde  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$ . Denotemos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , como la población infectada y sin infección, respectivamente. Sean  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)^T$  y  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n)^T$ , la tasa de nuevos infectados y la tasa de transición de una clase a otra, respectivamente.

Para guiar la construcción de una función de Lyapunov, primero definamos lo siguiente

$$f(x, y) := (F - V)x - \mathcal{F}(x, y) + \mathcal{V}(x, y). \quad (1.8)$$

Entonces el sistema (1.7) para los compartimentos con infección puede escribirse como

$$\dot{x} = (F - V)x - f(x, y),$$

donde

$$F = D\mathcal{F}(0, y_0) \quad \text{y} \quad V = D\mathcal{V}(0, y_0). \quad (1.9)$$

Además,  $f(0, y) = 0$ . Sea  $w^T \geq 0$  el vector propio izquierdo de la matriz no negativa  $FV^{-1}$  correspondiente al valor propio  $\rho(FV^{-1}) = \mathfrak{R}_0$ .

**Teorema 1.2.7.** *Sea  $f(x, y)$ ,  $F$  y  $V$  definidas como en (1.8) y (1.9). Si  $f(x, y) \geq 0$  en  $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^{n+m}$ ,  $F \geq 0$ ,  $V^{-1} \geq 0$  y  $\mathfrak{R}_0 \leq 1$ , entonces la función  $Q = w^T V^{-1} x$  es una función de Lyapunov para el sistema (1.7) en  $\Gamma$ .*

### 1.3. Análisis en puntos de equilibrio no hiperbólicos

**Teorema 1.3.1. (Sotomayor)**

Supongamos que  $\mathbf{f}(x_0, \mu_0) = \mathbf{0}$  y la matriz  $A = D\mathbf{f}(x_0, \mu_0)$  de  $n \times n$ , tiene un valor propio  $\lambda = 0$  con vector propio  $\mathbf{v}$  y  $A^T$  tiene un vector propio  $\mathbf{w}$  correspondiente al valor propio 0. Además, supongamos que  $A$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa y  $(n - k - 1)$  valores propios con parte real positiva y que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Si

$$\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \neq 0,$$

entonces el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  presenta una **bifurcación silla-nodo** en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  cuando el parámetro  $\mu$  varía a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ .

2. Si

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{f}_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ \mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\mu(x_0, \mu_0)\mathbf{v}] &\neq 0 \quad \text{y} \\ \mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  experimenta una **bifurcación transcítica** en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  cuando el parámetro  $\mu$  varía a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ .

3. Si

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{f}_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ \mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\mu(x_0, \mu_0)\mathbf{v}] &\neq 0, \\ \mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &= 0 \quad \text{y} \\ \mathbf{w}^T [D^3\mathbf{f}(x_0, \mu_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v})] &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  experimenta una **bifurcación tridente** en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  cuando el parámetro  $\mu$  varía a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ .

## Modelos epidemiológicos básicos

La propagación de una enfermedad transmisible implica no sólo factores como el agente infeccioso, el modo de transmisión, incubación, el periodo infeccioso, la susceptibilidad y la resistencia, sino también factores sociales, culturales, económicos, demográficos y geográficos.

Una epidemia es la aparición de una enfermedad por encima de la expectativa normal, mientras que una enfermedad se llama endémica si está presente habitualmente. Un concepto básico en epidemiología es la existencia de umbrales; éstos son valores críticos para cantidades como el tamaño de la población o la densidad del vector que debe superarse para que se produzca una epidemia. En este trabajo, uno de los umbrales que analizaremos es  $\mathfrak{R}_0$  (el número reproductivo básico) que es el número promedio de contactos de un infeccioso durante su periodo de infección.

Para el estudio de la propagación de una epidemia entre dos poblaciones consideraremos un modelo compartimental determinista que divide a la población en dos clases, individuos susceptibles (individuos que pueden contraer la enfermedad) e individuos infectados (individuos que transmiten la enfermedad a otros). En primer lugar, consideraremos el caso cuando no hay migración y posteriormente cuando hay migración de los individuos susceptibles. Denotaremos por  $S_i$  e  $I_i$  la proporción de susceptibles e infectados en la ciudad  $i = 1, 2$ .

En este capítulo analizaremos el modelo (2.1) que fue propuesto por Cui-Takeuchi(2005) y para ello realizaremos algunas simplificaciones [CTS]. En el modelo se consideran las siguientes hipótesis:

1. La tasa de reclutamiento de individuos que entran a la zona de estudio es  $a$ .
2. La tasa de mortalidad natural de los individuos susceptibles es una tasa constante per cápita  $b$ .
3. La tasa constante per cápita de recuperación de individuos infectados es  $d$ , y la tasa per cápita de mortalidad de individuos infectados es  $c$ . Como esto incluye tanto la mortalidad natural como la inducida por la enfermedad, tenemos  $c > b$ .
4. La enfermedad es transmitida con una tasa de infección  $\beta$ .

5. Los individuos susceptibles e infectados que van de la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$  lo hacen con una tasa  $\alpha$ . Además, las dos ciudades están conectadas por transporte directo como trenes o aviones.
6. Cuando los individuos de la ciudad  $j$  viajan a la ciudad  $i$ , la enfermedad se transmite con una tasa de infección  $\alpha\gamma$ .
7. Ambas ciudades son idénticas en el sentido que los parámetros demográficos son los mismos para cada ciudad.
8. Durante el viaje no ocurren nuevos nacimientos, ni muertes y no hay recuperación de individuos infectados.

Explícitamente el modelo que analizaremos es:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - bS_1 + dI_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha)I_1 + \alpha I_2 + \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - bS_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha)I_2 + \alpha I_1 + \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

## 2.1. Modelo sin migración

En esta sección consideraremos el caso cuando no hay migración entre las dos ciudades, es decir,  $\alpha = 0$ , entonces el sistema se reduce a un modelo SI

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= a - \frac{\beta SI}{S + I} - bS + dI, \\
 \dot{I} &= \frac{\beta SI}{S + I} - (c + d)I.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Este modelo ha sido analizado anteriormente, por ejemplo en [BCC], en comparación para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio ellos hicieron uso de una función de Liapunov, en este caso usaremos el teorema de Poincaré-Bendixson e identificaremos una bifurcación con el teorema de Sotomayor.

### 2.1.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Los puntos de equilibrio de este sistema son los siguientes:

$$P_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \text{ y } P_2 = \left(\frac{a(c+d)}{b(c+d) + c[\beta - (c+d)]}, \frac{a[\beta - (c+d)]}{b(c+d) + c[\beta - (c+d)]}\right) \text{ si } \mathfrak{R}_0 > 1.$$

Al punto  $P_1$  se le llama **equilibrio libre de enfermedad**, y a  $P_2$  se le llama **equilibrio endémico** y  $\mathfrak{R}_0 := \frac{\beta}{c+d}$  es el **número reproductivo básico**.

La matriz Jacobiana del sistema (2.2) es

$$\mathbf{J}(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{\beta SI}{(S+I)^2} - \frac{\beta I}{S+I} - b & \frac{\beta SI}{(S+I)^2} - \frac{\beta S}{S+I} + d \\ \frac{\beta I}{S+I} - \frac{\beta SI}{(S+I)^2} & \frac{\beta S}{S+I} - \frac{\beta SI}{(S+I)^2} - c - d \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}\left(\frac{a}{b}, 0\right) = \begin{pmatrix} -b & d - \beta \\ 0 & \beta - c - d \end{pmatrix},$$

por lo que los valores propios son  $\lambda_1 = -b$  y  $\lambda_2 = \beta - c - d$ .

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_2$  tenemos lo siguiente:

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{b\beta - (c+d-\beta)^2}{\beta} & d - \frac{(c+d)^2}{\beta} \\ \frac{(c+d-\beta)^2}{\beta} & \frac{(c+d)(c+d-\beta)}{\beta} \end{pmatrix}$$

La estabilidad local de  $P_2$  la podemos determinar usando la traza y el determinante de  $\mathbf{J}(P_2)$ .

En este caso tenemos que  $\det(\mathbf{J}(P_2)) = \frac{(c+d-\beta)[(c-b)(c+d) - c\beta]}{\beta}$  el cual siempre es positivo ya que  $\beta > c+d$  y  $\tau(\mathbf{J}(P_2)) = c+d-\beta-b$ , el cual siempre es negativo, por lo que  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.

En resumen tenemos los siguientes resultados:

- Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , entonces el punto de equilibrio  $P_1$  es localmente asintóticamente estable y además  $P_2$  no es admisible.
- Si  $\mathfrak{R}_0 = 1$ , entonces  $\mathbf{J}\left(\frac{a}{b}, 0\right)$  tiene un valor propio igual a 0 por lo que el punto  $P_1$  es no hiperbólico.
- Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$  entonces  $P_1$  es un punto silla,  $P_2$  existe y es localmente estable.

### 2.1.2. Estabilidad global

Para demostrar la estabilidad global de los puntos de equilibrio primero definamos la siguiente región

$$D = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 \mid S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

y escribamos el campo vectorial como

$$\mathbf{F}(S, I) = \left( a - \frac{\beta SI}{S+I} - bS + dI, \frac{\beta SI}{S+I} - (c+d)I \right).$$

**Proposición 2.1.1.** *El conjunto  $D$  es invariante bajo el campo vectorial  $\mathbf{F}$ .*

*Demostración.* Para demostrar que  $D$  es invariante, vamos a mostrar que el campo vectorial está entrando en las fronteras de  $D$ . Comenzaremos calculando lo que pasa en la recta  $I = 1 - S$ . Para ello calcularemos el producto punto del campo vectorial con el vector  $(1,1)$  que es ortogonal a la frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(S, I) \cdot (1, 1) &= \left( a - \frac{\beta SI}{S+I} - bS + dI, \frac{\beta SI}{S+I} - (c+d)I \right) \cdot (1, 1) \\ &= a - \frac{\beta SI}{S+I} - bS + dI + \frac{\beta SI}{S+I} - (c+d)I \\ &= a - bS - cI. \end{aligned}$$

Como  $I = 1 - S$ , tenemos que

$$a - bS - cI = a - bS - c(1 - S),$$

el cual es negativo siempre que  $a < \min\{b, c\}$ .

Por otro lado, si estamos en el eje horizontal tenemos que  $I = 0$  e  $\dot{I} = 0$  por lo que el campo vectorial sobre esta recta es horizontal y apunta hacia la derecha cuando  $S < 1$  y  $a < b$ , y apunta hacia la izquierda cuando  $a > b$  ya que

$$\dot{S} = a - bS.$$

Es decir, las soluciones no se salen de la región delimitada por esta recta.

Por último, si estamos en el eje vertical tenemos que  $S = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{S} &= a + dI, \\ \dot{I} &= -(c+d)I. \end{aligned}$$

Como  $\dot{S}$  es positivo e  $\dot{I}$  es negativo, entonces el campo está entrando, en consecuencia, las soluciones no se salen de la región  $D$ .

Por lo tanto, con este análisis hemos demostrado que la región  $D$  es invariante. □

**Observación 2.1.1.** *Los parámetros del sistema deben cumplir que  $a < b$  y  $a < c - \frac{(c-b)(c+d)}{\beta}$ , para que  $P_1, P_2 \in D$  respectivamente.*

Como  $D$  es una región invariante y no hay puntos de equilibrio en su interior, del teorema de Poincaré-Bendixson tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.2.** *Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$ ,  $P_1$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Proposición 2.1.3.** *Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ ,  $P_1$  es un punto silla y  $P_2$  es globalmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Ahora veamos la estabilidad global del punto  $P_2$  haciendo uso del teorema de Poincaré-Bendixson. De la proposición 2.1.1 tenemos que el conjunto  $D$  es invariante, por lo que para demostrar la estabilidad global de  $P_2$  basta con demostrar que el campo vectorial no tiene órbitas periódicas en la región  $D$ . Para ello, usaremos el criterio de Dulac (teorema 1.2.6) y la función  $\frac{1}{SI}$ . Note que

$$\frac{1}{SI} \mathbf{F}(S, I) = \left( \frac{a - bS + I \left( d - \frac{\beta S}{S + I} \right)}{SI}, \frac{\beta}{S + I} - \frac{c + d}{S} \right).$$

La divergencia de este campo vectorial es

$$-\frac{a + dI}{S^2 I},$$

la cual es siempre negativa.

Por el teorema de Poincaré-Bendixson tenemos que  $P_2$  es globalmente asintóticamente estable.  $\square$

### 2.1.3. Bifurcación

**Proposición 2.1.4.** Si  $\mathfrak{R}_0 = 1$ ,  $P_1 = P_2 = \left( \frac{a}{b}, 0 \right)$ ,  $J \left( \frac{a}{b}, 0 \right)$  tiene un valor propio igual a cero, por el teorema de Sotomayor el sistema presenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio respecto al parámetro  $\beta$ .

*Demostración.* Para usar el teorema de Sotomayor, demostremos que se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d) = 0$
2.  $\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d)\mathbf{v}] \neq 0$
3.  $\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \neq 0$

Propiedad 1. Para demostrarla, hagamos uso de la matriz Jacobiana evaluada en  $P_1$  y en el parámetro  $\beta = c + d$ ,

$$A_1 = J(P_1, c + d) = \begin{pmatrix} -b & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que sus valores propios son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -b$ . El vector propio del valor propio igual a 0 es  $\mathbf{v} = \left( -\frac{c}{b}, 1 \right)$ . El vector propio de la matriz  $A_1^T$  es  $\mathbf{w} = (0, 1)$ .

Tenemos además que  $\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d) = (0, 0)$ , de manera que  $\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d) = (0, 1)^T \cdot (0, 0) = 0$  como se quería.

Propiedad 2. Observemos que

$$\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d)\mathbf{v}] = (0, 1)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{c}{b} \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, se cumple la segunda propiedad del teorema.

Propiedad 3. Para esta propiedad calculamos lo siguiente

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d) = \left( \frac{2b(c + d)u_2v_2}{a}, -\frac{2b(c + d)u_2v_2}{a} \right).$$

Ahora, evaluando en el vector  $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , tenemos que

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \left( \frac{2b(c + d)}{a}, -\frac{2b(c + d)}{a} \right).$$

De manera que

$$\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] = -\frac{2b(c + d)}{a} \neq 0.$$

De las 3 propiedades anteriores y el teorema de Sotomayor, concluimos que cuando  $\mathfrak{R}_0 = 1$  el sistema presenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio  $P_1$  respecto al parámetro  $\beta$ . En la figura 2.1 podemos ver la coordenada  $x$  y la coordenada  $y$  de los puntos de equilibrio  $P_1$  y  $P_2$ , así como su estabilidad.  $\square$

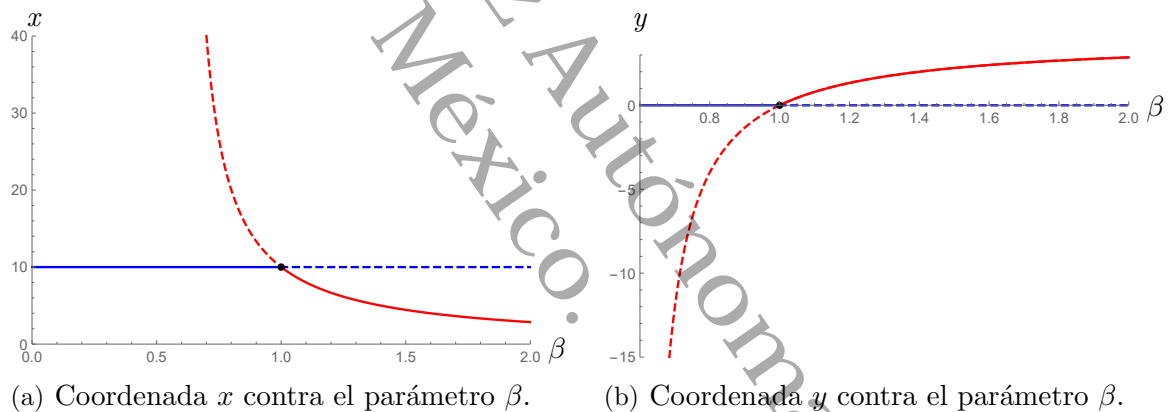


Figura 2.1: Las gráficas de color azul corresponden a las coordenadas del punto  $P_1$  y las de color rojo a las de  $P_2$ . La línea continua (punteada) representa la estabilidad (inestabilidad) de cada punto de equilibrio. Para esta gráfica los valores de los parámetros son  $a = 2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.5$ .

#### 2.1.4. Simulaciones numéricas

**Ejemplo 2.1.1.** Dando valores a los parámetros,  $a = c = d = \beta = 1$  y  $b = 2$ , tenemos que el sistema (2.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 1 - 2S + I - \frac{SI}{S + I}, \\ \dot{I} &= \frac{SI}{S + I} - 2I. \end{aligned} \tag{2.3}$$



Los puntos de equilibrio del sistema (2.3) son  $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  y  $P_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ . Solo consideraremos el punto de equilibrio  $P_1$  ya que  $P_2$  se encuentra fuera de la región de interés. La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{S(S+2I)}{(S+I)^2} - 3 & \frac{I(2S+I)}{(S+I)^2} \\ \frac{I^2}{(S+I)^2} & \frac{S^2}{(S+I)^2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  son  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$  por lo que en este caso  $P_1$  es globalmente estable. Las curvas solución pueden observarse en la figura 2.2(a).

**Ejemplo 2.1.2.** Dando valores a los parámetros,  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = d = 1$  y  $\beta = 3$ , tenemos que el sistema (2.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{1}{4} + I - \frac{S(S+7I)}{2(S+I)}, \\ \dot{I} &= \frac{(S-2I)I}{S+I}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Los puntos de equilibrio del sistema (2.4) son  $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  y  $P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S, I) = \begin{pmatrix} -\frac{S^2 + 2SI + 7I^2}{2(S+I)^2} & \frac{3S^2}{(S+I)^2} \\ \frac{3I^2}{(S+I)^2} & \frac{3S^2}{(S+I)^2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

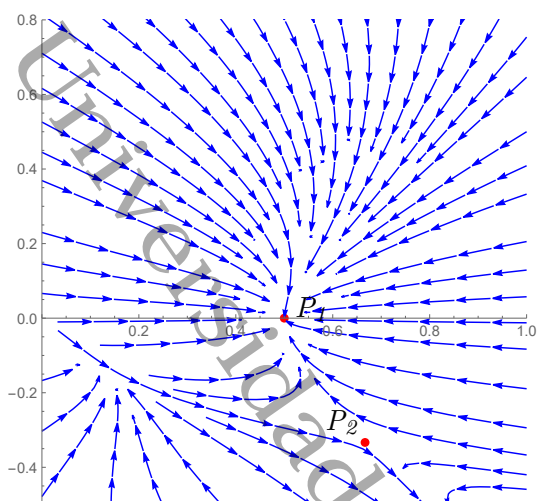
$$\mathbf{J}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  por lo que  $P_1$  es inestable.

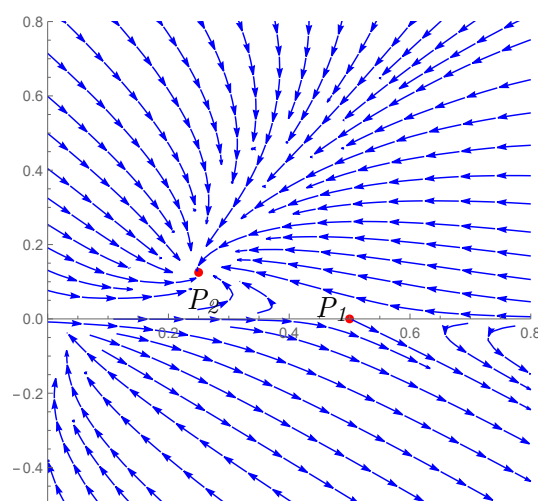
Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{12}(-9 \pm i\sqrt{15})$  por lo que en este caso  $P_2$  es globalmente estable, de manera que la parte lineal del sistema (2.4) alrededor de  $P_2$  es un foco estable. Las curvas solución pueden observarse en la figura 2.2(b).



(a) Curvas solución del sistema (2.3) alrededor del punto de equilibrio  $P_1$ .



(b) Curvas solución del sistema (2.4) las cuales convergen al punto de equilibrio  $P_2$ .

Figura 2.2:

## 2.2. Solo individuos susceptibles viajan

En esta sección analizamos el caso cuando los individuos infectados son inhibidos de viajar, el modelo es:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d) I_1, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d) I_2.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

### 2.2.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Los puntos de equilibrio son

$$P_1 = \left( \frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0 \right), P_2 = (S^*, I^*, S^*, I^*), P_3 = (\bar{S}_1, 0, \bar{S}_2, \bar{I}_2), P_4 = (\bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{S}_1, 0).$$

Donde

$$S^* = \frac{a}{b + c(\mathfrak{R}_0 - 1)}, \quad I^* = \frac{a(\mathfrak{R}_0 - 1)}{b + c(\mathfrak{R}_0 - 1)},$$

$$\bar{S}_1 = \frac{a + \alpha \bar{S}_2}{b + \alpha}, \quad \bar{S}_2 = \frac{a(b + 2\alpha)}{b(b + 2\alpha) + c(b + \alpha)[\mathfrak{R}_0 - 1]}, \quad \bar{I}_2 = (\mathfrak{R}_0 - 1)\bar{S}_2,$$

y  $\mathfrak{R}_0 := \frac{\beta}{c + d}$ . Además,  $P_2, P_3$  y  $P_4$  son admisibles si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ .

**Observación 2.2.1.** Cuando  $\mathfrak{R}_0 = 1$ , entonces  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$ , y la parte lineal del sistema en  $P_1$  tiene 2 valores propios cero.

**Proposición 2.2.1.** Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , entonces el equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable. Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$  entonces  $P_2$  es localmente asintóticamente estable y  $P_1$ ,  $P_3$  y  $P_4$  son inestables.

*Demostración.* Para determinar la estabilidad de estos 4 puntos de equilibrio calculamos la matriz Jacobiana del sistema (2.5)

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_1) = \begin{pmatrix} -\beta A_{11} - b - \alpha & -\beta A_{12} + d & \alpha & 0 \\ \beta A_{11} & \beta A_{12} - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\beta A_{33} - b - \alpha & -\beta A_{34} + d \\ 0 & 0 & \beta A_{33} & \beta A_{34} - (c + d) \end{pmatrix}.$$

Donde  $A_{11} = \left(\frac{I_1}{S_1 + I_1}\right)^2$ ,  $A_{12} = \left(\frac{S_1}{S_1 + I_1}\right)^2$ ,  $A_{33} = \left(\frac{I_2}{S_2 + I_2}\right)^2$  y  $A_{34} = \left(\frac{S_2}{S_2 + I_2}\right)^2$ .

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -b - \alpha & -\beta + d & \alpha & 0 \\ 0 & \beta - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -b - \alpha & -\beta + d \\ 0 & 0 & 0 & \beta - (c + d) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = -b - 2\alpha$ ,  $\lambda_3 = \mathfrak{R}_0 - 1$  y  $\lambda_4 = \mathfrak{R}_0 - 1$ . Por lo tanto,  $P_1$  es localmente asintóticamente estable, si  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .

Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ , entonces  $P_1$  es un punto silla y es inestable.

Por otro lado,

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\beta \left(\frac{I^*}{S^* + I^*}\right)^2 - b - \alpha & -\beta \left(\frac{S^*}{S^* + I^*}\right)^2 + d \\ \beta \left(\frac{I^*}{S^* + I^*}\right)^2 & \beta \left(\frac{S^*}{S^* + I^*}\right)^2 - (c + d) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar la estabilidad local, usaremos el criterio de Routh-Hurwitz, para ello calculamos el polinomio característico y veremos si sus coeficientes son positivos y si se cumple la condición  $EQ < 0$ .

El polinomio característico es,

$$\lambda^4 + B_1\lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_3\lambda + B_4,$$

y sus coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 2 \left( \frac{\alpha + b}{c + d} + \mathfrak{R}_0 - 1 \right), \\
 B_2 &= \frac{(b^2 + 2\alpha b)}{c + d} + \mathfrak{R}_0(\beta + 2(\alpha + b - d)) - \frac{2(\alpha + b - c)}{\mathfrak{R}_0} - (3c - d), \\
 B_3 &= -\frac{2(1 - \mathfrak{R}_0)(b^2(c + d) - b(c + d)(2c + d - 2\alpha) + \beta b(2c + d) + \zeta(c^2 + c(d - 2\alpha - \beta) - \alpha d))}{\beta}, \\
 B_4 &= \frac{(1 - \mathfrak{R}_0)((b - c)(c + d) + \beta c)((c + d)(2\alpha + b - c) + \beta c)}{\beta^2}.
 \end{aligned}$$

Donde  $\zeta = c + d - \beta$ . Ya que  $\mathfrak{R}_0 > 1$ ,  $B_1$  es positivo. Además, usando Mathematica se puede verificar que  $B_2, B_3$  y  $B_4$  son positivos y  $EQ$  es negativo. Por el criterio de Routh-Hurwitz, se concluye que  $P_2$  es localmente asintóticamente estable. Véase lema 2.1 de [BDL].

Una alternativa para demostrar la estabilidad local de  $P_2$  es usar las matrices  $A + B$  y  $A - B$ , siguiendo la idea de Cui *et al.* [CTS].

El polinomio característico, es

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{J}(P_2) - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} A + B - \lambda I & B \\ A + B - \lambda I & A - \lambda I \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{pmatrix} \\
 &= \det(A + B - \lambda I) \det(A - B - \lambda I)
 \end{aligned}$$

Por lo que los valores propios de  $\mathbf{J}(P_2)$  están dados por los de  $A + B$  y  $A - B$ . Observemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} -\beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 - b & -\beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 + d \\ \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 & \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que la  $tr(A + B) < 0$  ya que si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) &= \beta \left( \frac{c + d}{\beta} \right)^2 - (c + d) \\
 &= \frac{(c + d)^2}{\beta} - (c + d) \\
 &= (c + d) \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_0} - 1 \right) < 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\det(A + B) &= - \left[ \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 + b \right] \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] \\
&\quad - \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left[ -\beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 + d \right] \\
&= -\beta^2 \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - b \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] \\
&\quad + \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 (c + d) - \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 d \\
&\quad + \beta^2 \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 \\
&= \beta c \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 - b \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] > 0.
\end{aligned}$$

Entonces los dos valores propios de  $A + B$  tienen parte real negativa.

Luego,

$$A - B = \begin{pmatrix} -\beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 - b - 2\alpha & -\beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 + d \\ \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 & \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que la  $\text{tr}(A - B) < 0$  ya que  $\mathfrak{R}_0 > 1$  y por (2.6).

Además,

$$\begin{aligned}
\det(A - B) &= - \left[ \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 + b + 2\alpha \right] \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] \\
&\quad - \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left[ -\beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 + d \right] \\
&= -\beta^2 \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (b + 2\alpha) \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] \\
&\quad + \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 (c + d) - \beta \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 d \\
&\quad + \beta^2 \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 \\
&= \beta c \left( \frac{I^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (b + 2\alpha) \left[ \beta \left( \frac{S^*}{S^* + I^*} \right)^2 - (c + d) \right] > 0.
\end{aligned}$$

Entonces los dos valores propios de  $A - B$  tienen parte real negativa. Entonces  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.

Evaluando  $P_3$  en la matriz Jacobiana,

$$\mathbf{J}(P_3) = \begin{pmatrix} -b - \alpha & -\beta + d & \alpha & 0 \\ 0 & \beta - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\beta\bar{A}_{33} - b - \alpha & -\beta\bar{A}_{34} + d \\ 0 & 0 & \beta\bar{A}_{33} & \beta\bar{A}_{34} - (c + d) \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es,

$$\lambda^4 + C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_3\lambda + C_4 \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(\alpha + b), \\ C_2 &= \frac{\Re_0 b^2}{\beta} + \frac{b(-\beta^2 + 2\beta(\alpha + c + d) - (c + d)^2) + (-\alpha - \beta + c)(-\beta + c + d)^2}{\beta(c + d)}, \\ C_3 &= -\frac{(-\beta + c + d)^2 (b^2 + b(2\alpha + \beta + d) - c^2 + c(\beta - d) + \alpha(\beta + d))}{\beta}, \\ C_4 &= \frac{(-\beta + c + d)^2 ((c + d)(-b^2 + b(c - 2\alpha) + \alpha c) - \beta c(\alpha + b))}{\beta}. \end{aligned}$$

Usando Mathematica se muestra que  $C_2$  es positivo y los coeficientes  $C_3$  y  $C_4$  son negativos. Por la regla de Descartes tenemos que el polinomio (2.7) tiene una raíz positiva. En consecuencia,  $P_3$  es inestable.

La matriz jacobiana en el punto  $P_4$  es

$$\mathbf{J}(P_4) = \begin{pmatrix} -\beta\bar{A}_{33} - b - \alpha & -\beta\bar{A}_{34} + d & \alpha & 0 \\ \beta\bar{A}_{33} & \beta\bar{A}_{34} - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -b - \alpha & -\beta + d \\ 0 & 0 & 0 & \beta - (c + d) \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es,

$$\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 \quad (2.8)$$

y sus coeficientes son:

$$\begin{aligned} D_1 &= 2(\alpha + b), \\ D_2 &= \frac{\Re_0 b^2}{\beta} + \frac{b(-\beta^2 + 2\beta(\alpha + c + d) - (c + d)^2) + (-\alpha - \beta + c)(-\beta + c + d)^2}{\beta(c + d)}, \\ D_3 &= -\frac{(-\beta + c + d)^2 (b^2 + b(2\alpha + \beta + d) - c^2 + c(\beta - d) + \alpha(\beta + d))}{\beta}, \\ D_4 &= \frac{(-\beta + c + d)^2 ((c + d)(-b^2 + b(c - 2\alpha) + \alpha c) - \beta c(\alpha + b))}{\beta}. \end{aligned}$$

Usando Mathematica se muestra que  $D_2$  es positivo y los coeficientes  $D_3$  y  $D_4$  son negativos. Por la regla de Descartes tenemos que el polinomio (2.8) tiene una raíz positiva. En consecuencia,  $P_4$  es inestable.  $\square$

**Proposición 2.2.2.** Si  $\beta = c + d$  entonces  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$  y es un punto de equilibrio no hiperbólico.

### 2.2.2. Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad

Para determinar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad, usaremos las matrices de siguiente generación del teorema de van den Driessche [ZV].

**Teorema 2.2.1.** Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$  entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad es globalmente estable.

*Demostración.* En el caso de nuestro modelo el vector de infección  $\mathcal{F}$  y el vector de transmisión  $\mathcal{V}$  asociado al sistema (2.5) están dados por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (c+d)I_1 \\ (c+d)I_2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Las matrices de siguiente generación son

$$F = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned} f(I_1, I_2) &= \begin{pmatrix} \beta - (c+d) & 0 \\ 0 & \beta - (c+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c+d)I_1 \\ (c+d)I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta I_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_1 + I_1}\right) \\ \beta I_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_2 + I_2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c+d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c+d} \end{pmatrix} \text{ y } FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{c+d} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{c+d} \end{pmatrix}.$$

Calculando el radio espectral  $\rho(FV^{-1})$  tenemos que es  $\frac{\beta}{c+d}$ , el cual coincide con el número reproductivo para el modelo (2.5), es decir,

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{c+d}.$$

Además, para este caso es menor o igual a 1. Observemos que  $f(I_1, I_2) \geq 0$ ,  $F \geq 0$  y  $V^{-1} \geq 0$ .

Dado lo anterior, la función de Lyapunov es

$$Q(I_1, I_2) = \mathbf{w}^T V^{-1} \mathbf{x} = (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{c+d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c+d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{I_1}{c+d},$$

donde  $w^T = (1, 0)$  es el vector propio izquierdo de la matriz  $FV^{-1}$  correspondiente al valor propio  $\rho(FV^{-1}) = \mathfrak{R}_0$ . Derivando la función de Lyapunov,

$$\dot{Q}(I_1, I_2) = \frac{\partial Q}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial Q}{\partial I_2} \dot{I}_2 = \frac{1}{c+d} \left( \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c+d) I_1 \right) = \left( \mathfrak{R}_0 \frac{S_1}{S_1 + I_1} - 1 \right) I_1 \leq 0.$$

Observemos que  $\dot{Q} < 0$  siempre que  $\mathfrak{R}_0 \leq 1$  y es 0 si y solo si  $I_1 = 0$ . Como en  $I_1 = 0$  las soluciones convergen al punto de equilibrio libre de enfermedad  $P_1$ , por el teorema de Lyapunov Lasalle  $P_1$  es globalmente estable.  $\square$

### 2.2.3. Simulaciones numéricas

**Ejemplo 2.2.1.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{3}{2}$ ,  $d = 1$  y  $\beta = 1$ , tenemos que el sistema (2.5) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= 1 - \frac{3}{2} S_1 + S_2 + I_1 - \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{5}{2} I_1, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - \frac{3}{2} S_2 + I_2 - \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \frac{5}{2} I_2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En este caso consideramos  $\beta < c + d$  entonces los puntos de equilibrio del sistema (2.10) son  $P_1 = (2, 0, 2, 0)$ ,  $P_2 = (-5/2, 3/2, -5/2, 3/2)$ ,  $P_3 = (-25, 15, -16, 0)$  y  $P_4 = (-16, 0, -25, 15)$ . Sin embargo el único punto de equilibrio (con coordenadas positivas) de nuestro interés es  $P_1$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} \frac{S_1(S_1 + 2I_1)}{(S_1 + I_1)^2} - \frac{5}{2} & \frac{I_1(2S_1 + I_1)}{(S_1 + I_1)^2} & 1 & 0 \\ \frac{I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{S_2(S_2 + 2I_2)}{(S_2 + I_2)^2} - \frac{5}{2} & \frac{I_2(2S_2 + I_2)}{(S_2 + I_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que



$$\mathbf{J}(2, 0, 2, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(2, 0, 2, 0)$  son  $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$  y  $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$  por lo que en este caso  $P_1$  es globalmente estable. En la figura 2.3 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(6/5, 2/3, 6/5, 2/3)$  y en la figura 2.4 mostramos una proyección de la solución al sistema (2.10) con condición inicial  $(6/5, 2/3, 6/5)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

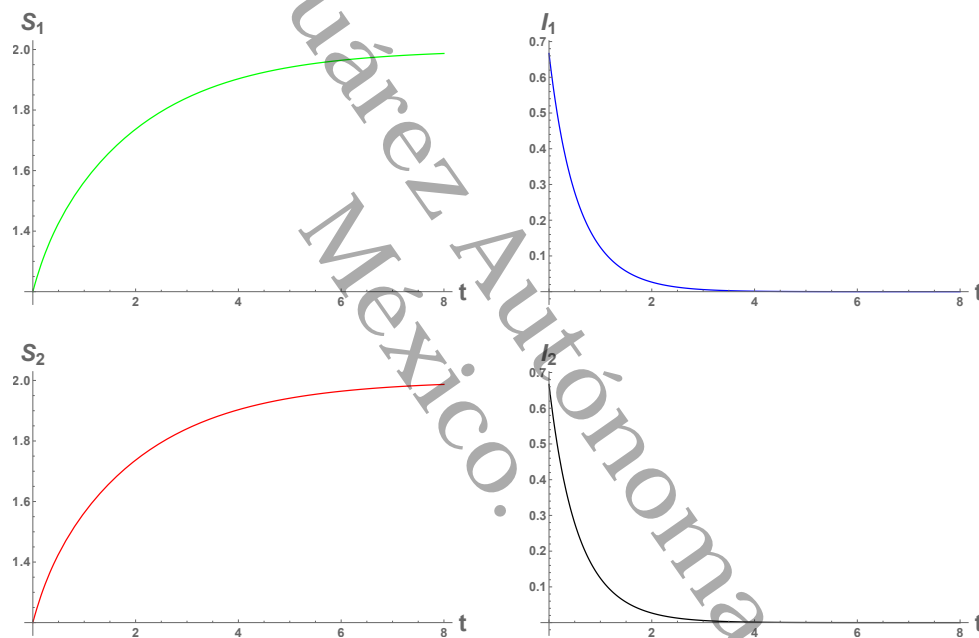


Figura 2.3: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  tomando como condición inicial  $(6/5, 2/3, 6/5, 2/3)$ .

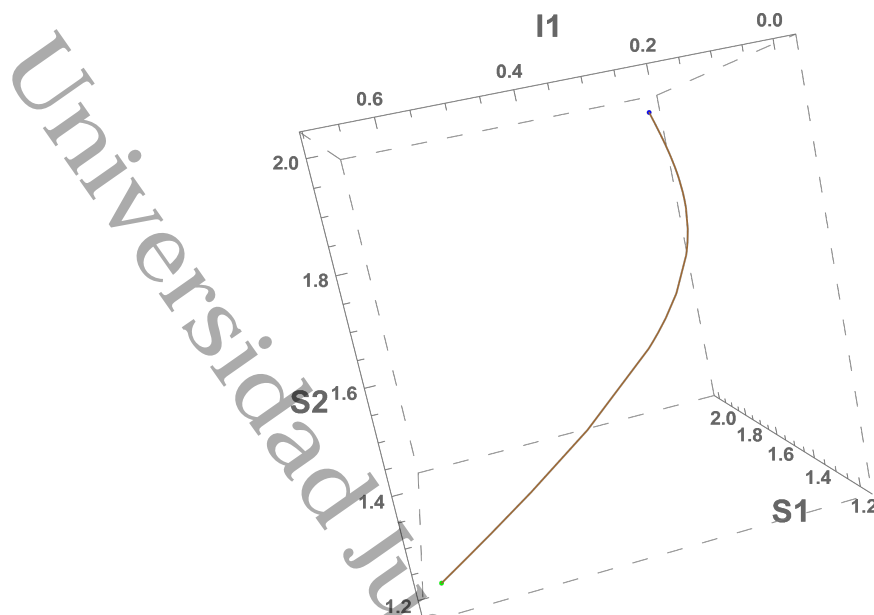


Figura 2.4: Proyección de la solución del sistema (2.10) con condición inicial  $(6/5, 2/3, 6/5)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = a = b = d = 1$ ,  $\beta = 4$  y  $c = 2$ , tenemos que el sistema (2.5) se simplifica como

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= 1 - 2S_1 + S_2 + I_1 - \frac{4S_1I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{4S_1I_1}{S_1 + I_1} - 3I_1, \\
 \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - 2S_2 + I_2 - \frac{4S_2I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{4S_2I_2}{S_2 + I_2} - 3S_2.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En este caso consideramos  $\mathfrak{R}_0 > 1$  entonces los puntos de equilibrio del sistema (2.11) son  $P_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $P_2 = (3/5, 1/5, 3/5, 1/5)$ ,  $P_3 = (9/13, 3/13, 11/13, 0)$  y  $P_4 = (11/13, 0, 9/13, 3/13)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2(S_1^2 + 2S_1I_1 + 3I_1^2)}{(S_1 + I_1)^2} & 1 - \frac{4S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & 1 & 0 \\ \frac{4I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{4S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{2(S_2^2 + 2S_2I_2 + 3I_2^2)}{(S_2 + I_2)^2} & 1 - \frac{4S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{4I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{4S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 3 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(1, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(1, 0, 1, 0)$  son  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 1$  y  $\lambda_4 = 1$  por lo que  $P_1$  es inestable.

Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = -3.118$ ,  $\lambda_{2,3} = -1 \pm 0.5i$  y  $\lambda_4 = -0.882$  como la parte real de todos los valores propios es negativa, entonces el punto de equilibrio  $P_2$  en este caso es globalmente estable.

Luego, evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_3$  tenemos que

$$\mathbf{J}\left(\frac{9}{13}, \frac{3}{13}, \frac{11}{13}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(9/13, 3/13, 11/13, 0)$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3.059$  y  $\lambda_{3,4} = -0.97 \pm 0.34i$  por lo que  $P_3$  es inestable.

Ahora, evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_4$ ,

$$\mathbf{J}\left(\frac{11}{13}, 0, \frac{9}{13}, \frac{3}{13}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3.059$  y  $\lambda_{3,4} = -0.97 \pm 0.347i$  por lo que  $P_4$  es inestable. En la figura 2.5 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(14/15, 2/15, 14/15, 2/15)$  y en la figura 2.6 mostramos una proyección de la solución al sistema (2.11) con condición inicial  $(14/15, 2/15, 14/15)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

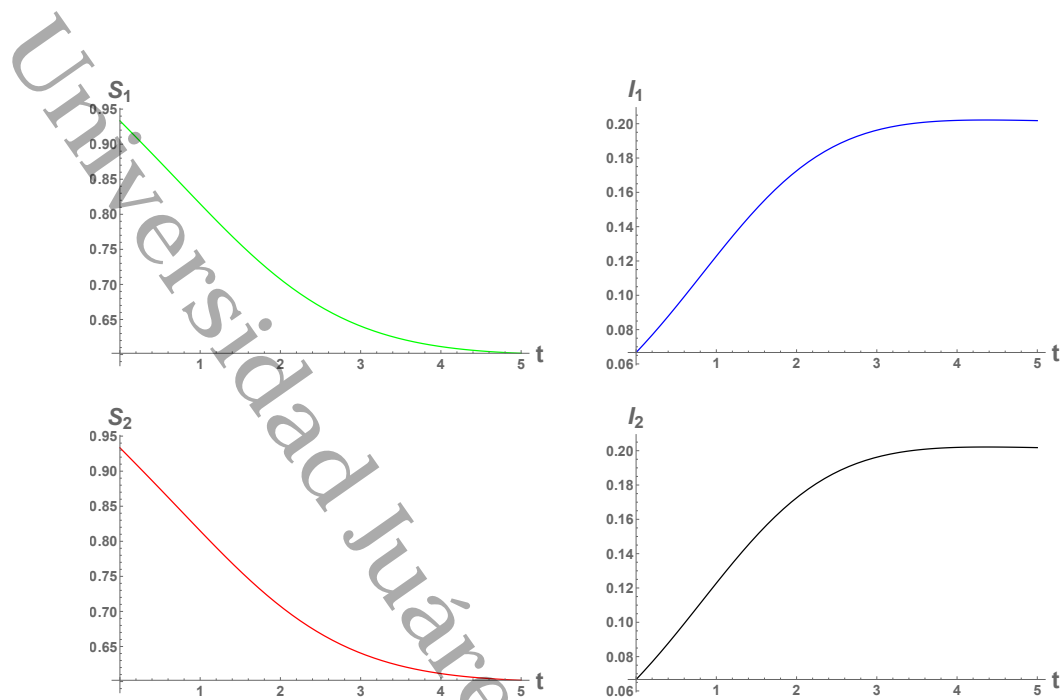


Figura 2.5: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  tomando como condición inicial  $(14/15, 2/15, 14/15, 2/15)$ .

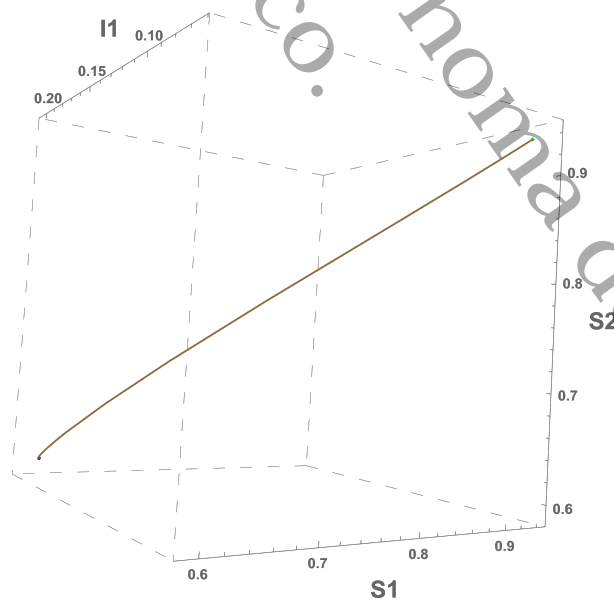


Figura 2.6: Proyección de la solución del sistema (2.11) con condición inicial  $(14/15, 2/15, 14/15)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

## Modelos epidemiológicos con migración

En este capítulo analizaremos un modelo propuesto por Cui-Takeuchi (2005) que considera la migración de individuos infectados entre dos poblaciones [CTS]. Ellos analizan la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad y del equilibrio endémico y nosotros mostraremos además la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad. Explícitamente analizaremos la dinámica del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + \alpha I_2 + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\alpha \gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2 + \alpha I_1 + \frac{\alpha \gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

En este sistema se toman en cuenta los siguientes parámetros:

1. Cuando los individuos de la ciudad  $j$  viajan a la ciudad  $i$ , la enfermedad se transmite con una tasa  $\alpha \gamma$ .
2. La tasa de reclutamiento de individuos que entran a la zona de estudio es  $a$ .
3. La tasa de mortalidad natural de los individuos susceptibles es una tasa constante per cápita  $b$ .
4. La tasa constante per cápita de recuperación de individuos infectados es  $d$ , y la tasa per cápita de mortalidad de individuos infectados es  $c$ . Como esta incluye tanto la mortalidad natural como la inducida por la enfermedad, tenemos  $c > b$ .
5. La enfermedad es transmitida con una tasa de infección  $\beta$ .
6. Los individuos susceptibles e infectados que van de la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$  lo hacen con una tasa  $\alpha$ . Además, las dos ciudades están conectadas por transporte directo como trenes o aviones.

### 3.1. Infeccionados de la ciudad 1 restringidos de viajar a la ciudad 2

En esta sección examinaremos un caso particular del sistema (3.1) donde se considera que únicamente las personas infectadas de la ciudad 2 viajan a la ciudad 1, pero las personas infectadas de la ciudad 1 no pueden viajar a la ciudad 2.

Explícitamente, analizaremos el siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d) I_1 + \alpha I_2 + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

#### 3.1.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Los puntos de equilibrio de este sistema son los siguientes:

$$P_1 = \left( \frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0 \right), P_2 = (\bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{S}_1, 0) \text{ y } P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$$

$$\bar{S}_1 = \frac{a + \alpha \bar{S}_2}{b + \alpha}, \quad \bar{S}_2 = \frac{a(b + 2\alpha)}{b(b + 2\alpha) + c(b + \alpha)[\mathfrak{R}_0 - 1]}, \quad \bar{I}_2 = (\mathfrak{R}_0 - 1)\bar{S}_2.$$

Donde,  $\mathfrak{R}_0 := \frac{\beta}{c + d}$ . Además,  $P_2$  es admisible si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ .  $P_3$  es admisible si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ ,

$k_1 = 2S_{10}I_{20}$ ,  $S_{20} = \frac{k_1 + S_{10}I_{20}}{I_{10}}$ ,  $I_{10} = 2I_{20}$ ,  $c = k_2 + \frac{1656(d + k_2)}{23 + 567\gamma}$  y  $S_{10} = 7I_{20}$ , donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ .

Al punto  $P_1$  se le llama **equilibrio libre de enfermedad**, y a  $P_2, P_3$  se les llama **equilibrios endémicos**.

**Proposición 3.1.1.** *Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$ , entonces el equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable. Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$  y  $\frac{\alpha}{c + d} > \mathfrak{R}_0 - 1$  entonces  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Para determinar la estabilidad de estos 2 puntos de equilibrio calculamos la matriz Jacobiana del sistema (3.2)

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -\beta A_{11} - b - \alpha & -\beta A_{12} + d & \alpha - \gamma \alpha A_{33} & -\gamma \alpha A_{34} \\ \beta A_{11} & \beta A_{12} - (c + d) & \gamma \alpha A_{33} & \alpha + \gamma \alpha A_{34} \\ \alpha & 0 & -\beta A_{33} - b - \alpha & -\beta A_{34} + d \\ 0 & 0 & \beta A_{33} & \beta A_{34} - (c + d + \alpha) \end{pmatrix}.$$

De donde  $A_{11} = \left(\frac{I_1}{S_1 + I_1}\right)^2$ ,  $A_{12} = \left(\frac{S_1}{S_1 + I_1}\right)^2$ ,  $A_{33} = \left(\frac{I_2}{S_2 + I_2}\right)^2$  y  $A_{34} = \left(\frac{S_2}{S_2 + I_2}\right)^2$ .

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -b - \alpha & -\beta + d & \alpha & -\gamma\alpha \\ 0 & \beta - (c + d) & 0 & \alpha + \gamma\alpha \\ \alpha & 0 & -b - \alpha & -\beta + d \\ 0 & 0 & 0 & \beta - (c + d + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Por lo que los valores propios son  $\lambda_1 = (c + d)(\mathfrak{R}_0 - 1) - \alpha$ ,  $\lambda_2 = (c + d)(\mathfrak{R}_0 - 1)$ ,  $\lambda_3 = -b$  y  $\lambda_4 = -(b + 2\alpha)$ . Por lo tanto,  $P_1$  es localmente asintóticamente estable cuando  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .

La matriz jacobiana en el punto  $P_2$  es

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \beta - \frac{(c+d)^2}{\beta} + 2(c+d) & d - \frac{(c+d)^2}{\beta} & \alpha & -\alpha\gamma \\ \frac{(-\beta+c+d)^2}{\beta} & \frac{(c+d)(-\beta+c+d)}{\beta} & 0 & \alpha(\gamma + 1) \\ \alpha & 0 & -\alpha - b & d - \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + \beta - c - d \end{pmatrix}.$$

Usaremos el criterio de Routh-Hurwitz para determinar su estabilidad por lo que necesitamos calcular su polinomio característico, verificar que sus coeficientes son positivos y que se cumple la condición  $D_3 < 0$ . El polinomio característico es,

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + E_1\lambda^3 + E_2\lambda^2 + E_3\lambda + E_4 \quad (3.3)$$

y sus coeficientes son:

$$E_1 = 2b + 3(k_3 + k_4),$$

$$E_2 = \frac{b^2\xi + 4bk_4\xi + bk_3(4(c+d) + 3k_3) + k_3^2(3c + 2d + k_3) + 2k_4^2\xi + k_3k_4(5(c+d) + 4k_3)}{c + d + k_3},$$

$$E_3 = \frac{b^2(k_4\xi + k_3(c+d)) + b(k_3^2(3c + 2d) + 2k_4^2\xi + 3k_3k_4(2(c+d) + k_3)) + k_3\chi}{c + d},$$

$$E_4 = \frac{k_3k_4(b^2(c+d) + bk_3(3c + 2d) + 2bk_4(c+d) + ck_3(k_3 + k_4))}{c + d + k_3}.$$

Donde  $k_3 = \mathfrak{R}_0 - 1$ ,  $k_4 = \alpha - k_3$ , con  $k_3, k_4 > 0$ ,  $\xi = c + d + k_3$  y  $\chi = c(k_3^2 + 4k_3k_4 + 2k_4^2) + k_4(2d + k_3)(k_3 + k_4)$ . Además,

$$D_3 = -\frac{F_1F_2}{\xi^2},$$

donde

$$F_1 = b^2(k_4\xi + k_3(c+d)) + b(k_3^2(3c + 2d) + 4k_4^2\xi + 3k_3k_4(2(c+d) + k_3)) + k_3^2k_4(4c + 2d + k_3) + k_3k_4^2(5(c+d) + 4k_3) + 3k_4^3\xi + ck_3^3,$$

y

$$F_2 = b^2(6k_4\xi + k_3(10(c+d) + 9k_3)) + 2b^3\xi + b(k_3^2(15c + 14d + 11k_3) + 4k_4^2\xi + 14k_3^2k_4) + 2bk_3k_4(8(c+d) + k_3(c(8k_3^2 + 11k_3k_4 + 4k_4^2) + (2d + k_3)(k_3 + k_4)(3k_3 + 2k_4))).$$

Por lo tanto, todos los coeficientes de  $P_4(\lambda)$  son positivos y  $D_3$  es negativo siempre que se cumplan  $\mathfrak{R}_0 > 1$  y  $\frac{\alpha}{c+d} > \mathfrak{R}_0 - 1$ . Por el criterio de Routh-Hurwitz, se concluye que  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.  $\square$

**Observación 3.1.1.** Si  $\frac{\alpha}{c+d} < \mathfrak{R}_0 - 1$  entonces el coeficiente  $E_2$  puede ser negativo. En consecuencia,  $P_4(\lambda)$  en (3.3) tiene una raíz positiva y por lo tanto el punto de equilibrio  $P_2$  es inestable.

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en el Apéndice A (5.3).

**Proposición 3.1.2.** Si  $\mathfrak{R}_0 > 1$ ,  $k_1 = 2S_{10}I_{20}$ ,  $S_{20} = \frac{k_1 + S_{10}I_{20}}{I_{10}}$ ,  $I_{10} = 2I_{20}$ ,  $c = k_2 + \frac{1656(d+k_2)}{23+567\gamma}$  y  $S_{10} = 7I_{20}$ , donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , entonces el sistema tiene un punto de equilibrio con coordenadas positivas  $P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$  localmente asintóticamente estable.

### 3.1.2. Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad

Para determinar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad usaremos las matrices de siguiente generación del teorema de van den Driessche.

**Teorema 3.1.1.** Si  $\mathfrak{R}_0 < 1$  entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad es globalmente estable.

*Demostración.* En el caso de nuestro modelo el vector de infección  $\mathcal{F}$  y el vector de transmisión  $\mathcal{V}$  asociado al sistema (3.2) están dados por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \alpha I_2 \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (c+d)I_1 \\ (\alpha+c+d)I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Por lo que las matrices de siguiente generación son

$$F = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \gamma + \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ y } V = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & \alpha+c+d \end{pmatrix}.$$

Además,

$$f(I_1, I_2) = \begin{pmatrix} \beta - (c+d) & \alpha \gamma + \alpha \\ 0 & \beta - (\alpha+c+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \alpha I_2 \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c+d)I_1 \\ (\alpha+c+d)I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta I_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_1 + I_1}\right) + I_2 \alpha \gamma \left(1 - \frac{S_2}{S_2 + I_2}\right) \\ \beta I_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_2 + I_2}\right) \end{pmatrix}.$$



Por otro lado,

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c+d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha+c+d} \end{pmatrix} \text{ y } V^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{c+d} & \frac{\alpha(\gamma+1)}{c+d} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha+c+d} \end{pmatrix}.$$

Calculando el radio espectral  $\rho(FV^{-1})$  tenemos que es  $\frac{\beta}{c+d}$ . El cual coincide con el número reproductivo para el modelo (3.2), es decir,

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{c+d}.$$

Además, para este caso es menor o igual a 1. Notemos que  $f(I_1, I_2) \geq 0$ ,  $F \geq 0$  y  $V^{-1} \geq 0$ . Sea,  $\mathbf{w} = (x, y)$ , resolvemos la ecuación  $\mathbf{w}V^{-1}F = \mathfrak{R}_0\mathbf{w}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{w}V^{-1}F - \mathfrak{R}_0\mathbf{w} &= \frac{\alpha \left( -\frac{\beta y}{\alpha+c+d} + \gamma x + x \right)}{c+d} = x(\alpha\gamma + \alpha) - \frac{\alpha\beta y}{\alpha+c+d} = 0 \\ x &= \frac{\beta y}{(\gamma+1)(\alpha+c+d)}, \end{aligned}$$

y encontramos el vector

$$\mathbf{w}^T = \left( \frac{\beta}{(\gamma+1)(\alpha+c+d)}, 1 \right)$$

Dado lo anterior, se propone como función de Lyapunov

$$\begin{aligned} Q(I_1, I_2) &= \mathbf{w}^T V^{-1} \mathbf{x} = \left( \frac{\beta}{(\gamma+1)(\alpha+c+d)}, 1 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c+d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha+c+d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I_2}{\alpha+c+d} + \mathfrak{R}_0 \frac{I_1}{(\alpha+c+d)(1+\gamma)} \end{aligned}$$

Derivando la función de Lyapunov,

$$\begin{aligned} \dot{Q}(I_1, I_2) &= \mathbf{w}^T V^{-1} (F - V)x - \mathbf{w}^T V^{-1} f(x, y) = -\frac{(c+d-\beta)((\gamma+1)I_2(\alpha+c+d) + \beta I_1)}{(\gamma+1)(c+d)(\alpha+c+d)} \\ &\quad - \frac{\beta((\gamma+1)I_2^2(c+d)(I_1+S_1) + \beta I_1^2(I_2+S_2) + \alpha\gamma I_2^2(I_1+S_1))}{(\gamma+1)(c+d)(I_1+S_1)(I_2+S_2)(\alpha+c+d)}. \end{aligned}$$

Observemos que  $\dot{Q} < 0$  siempre que  $\mathfrak{R}_0 \leq 1$  y es 0 si y solo si  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$ . Como en  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$  las soluciones convergen al punto de equilibrio libre de enfermedad  $P_1$ , por el teorema de Lyapunov-Lasalle  $P_1$  es globalmente estable.  $\square$

### 3.1.3. Bifurcación

**Proposición 3.1.3.** Si  $\beta = c + d$  entonces  $P_1 = P_2 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$ , es un punto de equilibrio no hiperbólico y hay una bifurcación transcítica.

*Demostración.* Para usar el teorema de Sotomayor, demostremos que se cumplen las siguientes propiedades

1.  $\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma) = 0$ ,
2.  $\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma)\mathbf{v}] \neq 0$ ,
3.  $\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d - \alpha\gamma)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \neq 0$ .

Propiedad 1. Para demostrarla, hagamos uso de la matriz Jacobiana evaluada en  $P_1$  y en el parámetro  $\beta = c + d$

$$A_1 = J(P_1, c + d) = \begin{pmatrix} -b & -c & \alpha & -\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma + \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha - b & -c \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Notemos que sus valores propios son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\alpha$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}\alpha - \alpha - 2b)$  y  $\lambda_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}\alpha - \alpha - 2b)$ .

El vector propio del valor propio igual a 0 es  $\mathbf{v} = \left(-\frac{-\alpha - b}{\alpha}, -\frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}, 1, 0\right)$ .

El vector propio de la matriz  $A_1^T$  es  $\mathbf{w} = \left(-\frac{-\alpha - b}{\alpha}, -\frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}, 1, 0\right)$ .

Tenemos además que  $\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d) = (0, 0, 0, 0)$ , de manera que

$$\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d) = \left(-\frac{-\alpha - b}{\alpha}, -\frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}, 1, 0\right)^T \cdot (0, 0, 0, 0) = 0$$

como se quería.

Propiedad 2. Observemos que

$$\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d)\mathbf{v}] =$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{-\alpha - b}{\alpha}, -\frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}, 1, 0\right)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{-\alpha - b}{\alpha}, -\frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}, 1, 0\right) \\ &= -\frac{(-\alpha^2 + b^2 + \alpha b) \left(\frac{-\alpha - b}{\alpha} - \frac{-\alpha^2 + b^2 + \alpha b}{\alpha c}\right)}{\alpha c}. \end{aligned}$$

Usando Mathematica se verifica que lo anterior es diferente de cero si  $2b + \alpha > \sqrt{5}\alpha$ , por lo tanto, se cumple la segunda propiedad del teorema.

Propiedad 3. Para esta propiedad calculamos lo siguiente

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d) = \left( \frac{2bs_1s_2(c+d)}{a} + \frac{2\alpha b\gamma v_1v_2}{a}, -\frac{2bs_1s_2(c+d)}{a} - \frac{2\alpha b\gamma v_1v_2}{a}, \frac{2bv_1v_2(c+d)}{a}, -\frac{2bv_1v_2(c+d)}{a} \right).$$

Ahora, evaluando en el vector  $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , tenemos que

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \left( \frac{2b(-\alpha^2 + b^2 + \alpha b)^2(c+d)}{a\alpha^2c^2}, -\frac{2b(-\alpha^2 + b^2 + \alpha b)^2(c+d)}{a\alpha^2c^2}, 0, 0 \right).$$

De manera que

$$\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] = \frac{2b(-\alpha^2 + b^2 + \alpha b)^2(c+d)(b^2 + b(\alpha + c) + \alpha(c - \alpha))}{a\alpha^3c^3}.$$

De nuevo lo anterior es distinto de cero cuando  $2b + \alpha > \sqrt{5}\alpha$ . De las 3 propiedades anteriores y el teorema de Sotomayor, concluimos que cuando  $\beta = c + d$  el sistema presenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio  $P_1$  respecto al parámetro  $\beta$ . En la figura 3.1 podemos ver las coordenadas  $S_1, I_1$  y las coordenadas  $S_2, I_2$  de los puntos de equilibrio  $P_1$  y  $P_2$ , así como su estabilidad.  $\square$

### 3.1.4. Simulaciones numéricas

**Ejemplo 3.1.1.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = a = b = d = \gamma = 1$ ,  $c = 2$  y  $\beta = \frac{3}{2}$ , tenemos que el sistema (3.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= 1 - 2S_1 + S_2 + I_1 - \frac{3S_1I_1}{2(S_1 + I_1)} - \frac{S_2I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{3S_1I_1}{2(S_1 + I_1)} - 3I_1 + I_2 + \frac{S_2I_2}{(S_2 + I_2)}, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - 2S_2 + I_2 - \frac{3S_2I_2}{2(S_2 + I_2)}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{3S_2I_2}{2(S_2 + I_2)} - 4I_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En este caso consideramos  $\mathfrak{R}_0 < 1$  entonces el único punto de equilibrio del sistema (3.5) con coordenadas positivas es  $P_1 = (1, 0, 1, 0)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{4S_1^2 + 8S_1I_1 + 7I_1^2}{2(S_1 + I_1)^2} & 1 - \frac{3S_1^2}{2(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_2(S_2 + 2I_2)}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{3I_1^2}{2(S_1 + I_1)^2} & \frac{3S_1^2}{2(S_1 + I_1)^2} - 3 & \frac{I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 1 \\ 1 & 0 & -\frac{4S_2^2 + 8S_2I_2 + 7I_2^2}{2(S_2 + I_2)^2} & 1 - \frac{3S_2^2}{2(S_2 + I_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{3I_2^2}{2(S_2 + I_2)^2} & \frac{3S_2^2}{2(S_2 + I_2)^2} - 4 \end{pmatrix}.$$

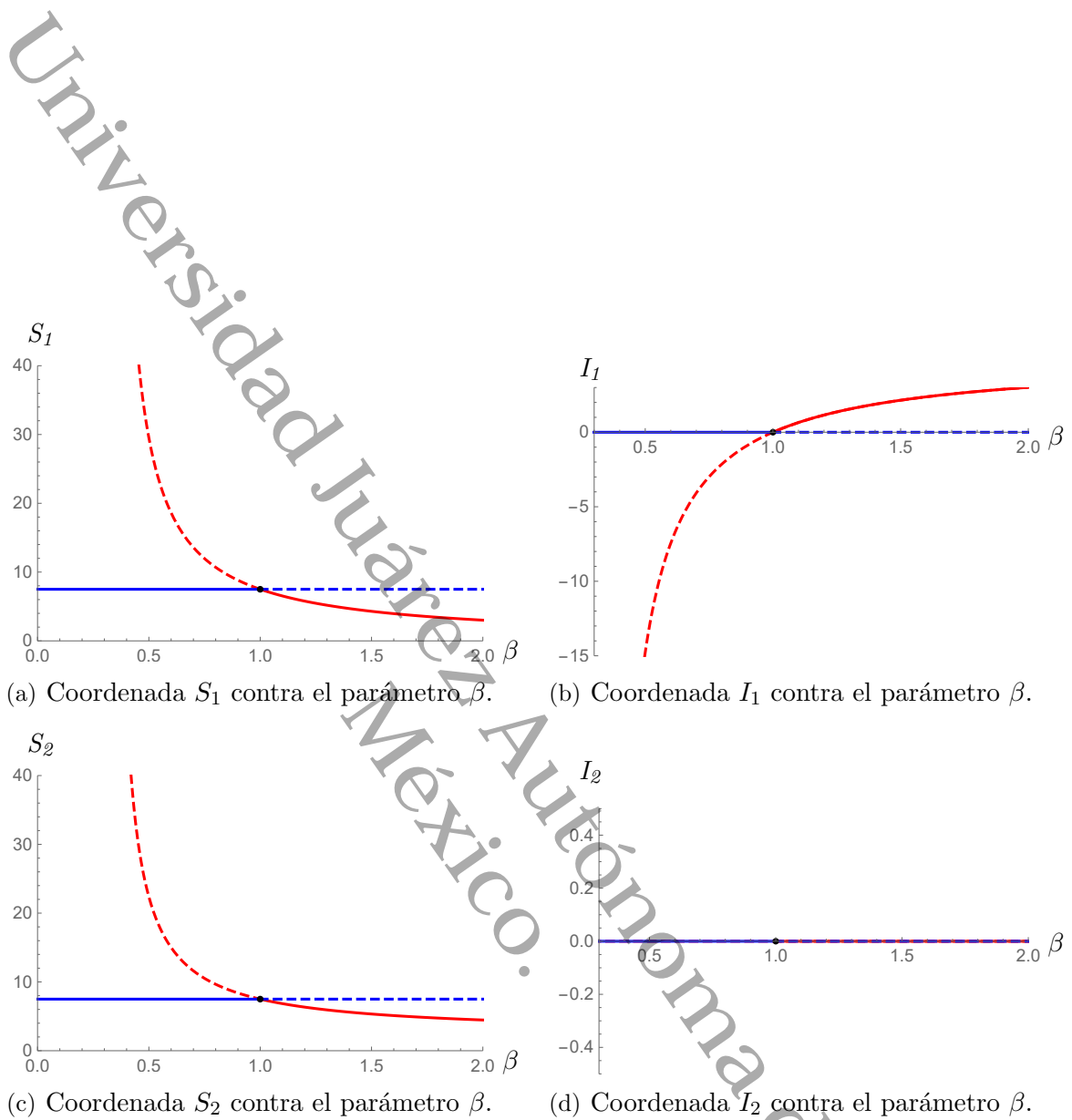


Figura 3.1: Las gráficas de color azul corresponden a las coordenadas del punto  $P_1$  y las de color rojo a las de  $P_2$ . La línea continua (punteada) representa la estabilidad (inestabilidad) de cada punto de equilibrio. Para estas gráficas los valores de los parámetros son  $a = 1.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.5$ ,  $\alpha = 0.42$ ,  $\gamma = 0.5$ .

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -5/2$ ,  $\lambda_3 = -3/2$  y  $\lambda_4 = -1$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  en este caso es globalmente estable. En la figura 3.2 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(13/16, 3/16, 13/16, 3/16)$  y en la figura 3.3 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.5) con condición inicial  $(13/16, 3/16, 13/16)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

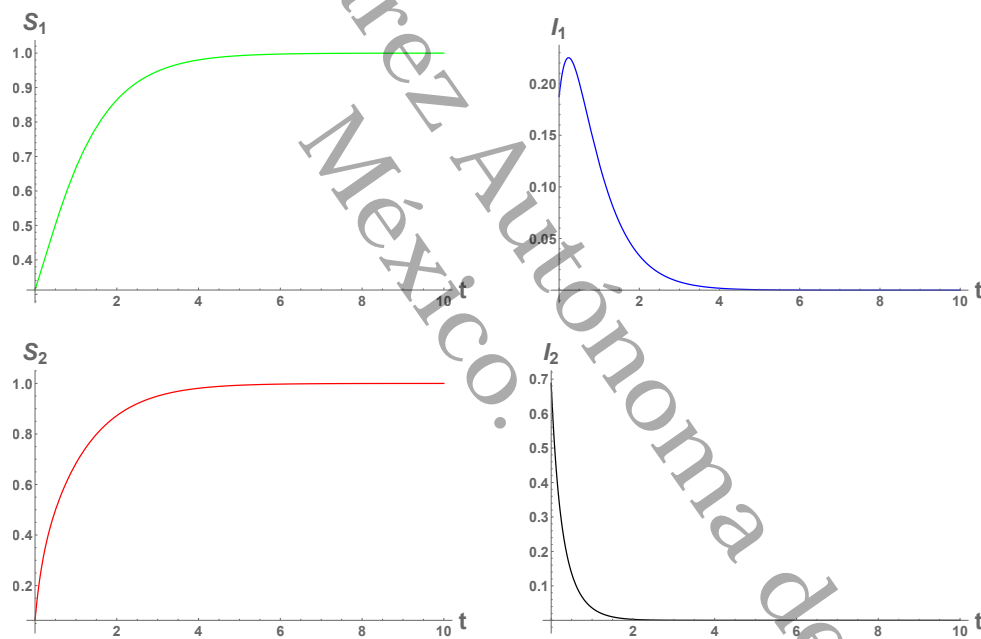


Figura 3.2: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  tomando como condición inicial  $(13/16, 3/16, 13/16, 3/16)$ .

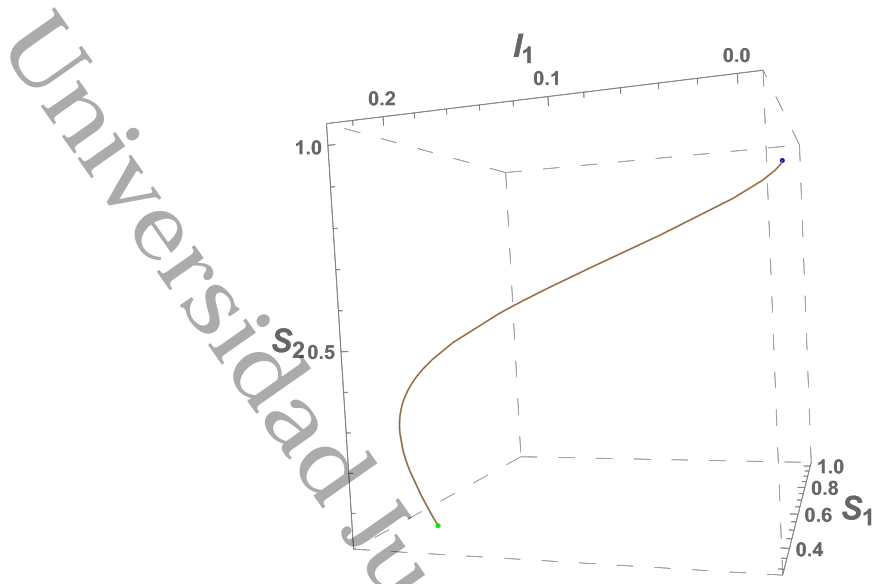


Figura 3.3: Proyección de la solución del sistema (3.5) con condición inicial  $(13/16, 3/16, 13/16)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Dando valores a los parámetros,  $a = c = d = \gamma = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 4$  y  $\beta = 3$ , tenemos que el sistema (3.2) se simplifica como

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= 1 - \frac{9}{2}S_1 + 4S_2 + I_1 - \frac{3S_1I_1}{S_1 + I_1} - \frac{4S_2I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{3S_1I_1}{S_1 + I_1} - 2I_1 + 4I_2 + \frac{4S_2I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{S}_2 &= 1 + 4S_1 - \frac{9}{2}S_2 + I_2 - \frac{3S_2I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{3S_2I_2}{S_2 + I_2} - 6I_2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

En este caso consideramos  $\mathfrak{R}_0 > 1$  y  $\frac{\alpha}{c+d} > \mathfrak{R}_0 - 1$  entonces los puntos de equilibrio del sistema (3.6) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (2, 0, 2, 0)$  y  $P_2 = (17/13, 17/26, 18/13, 0)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - \frac{9}{2} & 1 - \frac{3S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{4S_2(S_2 + 2I_2)}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{4S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{3I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{3S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 2 & \frac{4I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{4S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 4 \\ 4 & 0 & -\frac{3I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - \frac{9}{2} & 1 - \frac{3S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{3I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{3S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 6 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -\frac{17}{2}$  y  $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$  por lo que  $P_1$  es inestable.

Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{29}{6} & -\frac{1}{3} & 4 & -4 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = -8.66$ ,  $\lambda_2 = -3$  y  $\lambda_{3,4} = -0.66 \pm 0.23i$ . Como la parte real de los valores propios es negativa, entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable. En la figura 3.4 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(5/13, 6/13, 6/13, 8/13)$  y en la figura 3.5 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.6) con condición inicial  $(5/13, 6/13, 6/13)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

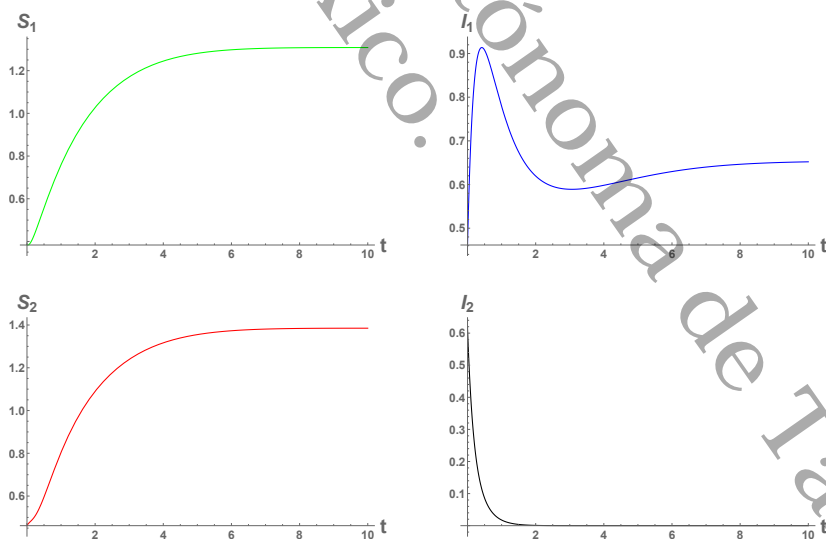


Figura 3.4: Series de tiempo de  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  tomando como condición inicial  $(5/13, 6/13, 6/13, 8/13)$ .

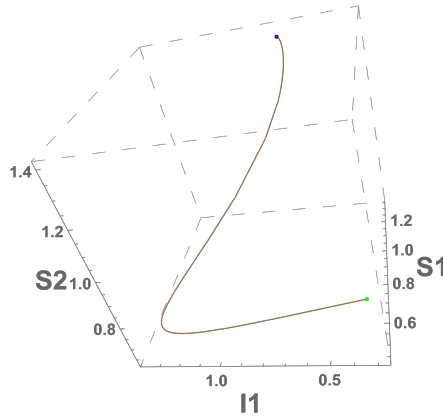


Figura 3.5: Proyección de la solución del sistema (3.6) con condición inicial  $(5/13, 6/13, 6/13)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

**Ejemplo 3.1.3.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = 0.623$ ,  $\beta = 9.021$ ,  $b = 0.285$ ,  $c = 6.613$ ,  $a = 12.42$ ,  $\gamma = 1$  y  $d = 1$ , tenemos que el sistema (3.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -\frac{3726S_1I_1}{413(S_1 + I_1)} - \frac{1878S_1}{2065} - \frac{184S_2I_2}{295(S_2 + I_2)} + \frac{184S_2}{295} + I_1 + \frac{3664}{295}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{23(S_2 + I_2)(56I_2(S_1 + I_1) + I_1(110S_1 - 511I_1)) + 7(2S_1(27S_2I_1 + 92S_2I_2 + 27I_1I_2) + N_1)}{2065(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= \frac{184S_1}{295} - \frac{3726S_2I_2}{413(S_2 + I_2)} - \frac{1878S_2}{2065} + I_2 + \frac{3664}{295}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{162I_2(2S_2 - 21I_2)}{413(S_2 + I_2)}. \end{aligned}$$

Donde  $N_1 = I_1(-567S_2I_1 + 184S_2I_2 - 567I_1I_2)$ . Entonces los puntos de equilibrio del sistema (3.7) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (43.47, 0, 43.47, 0)$ ,  $P_2 = (12.28, 2.27, 22.08, 0)$  y  $P_3 = (7, 2, 10.5, 1)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -M_{16} & 1 - \frac{3726S_1^2}{413(S_1 + I_1)^2} & \frac{184S_2(S_2 + 2I_2)}{295(S_2 + I_2)^2} & -\frac{184S_2^2}{295(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{3726I_1^2}{413(S_1 + I_1)^2} & \frac{M_{17}}{2065} & \frac{184I_2^2}{295(S_2 + I_2)^2} & \frac{184}{295} \left( \frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 1 \right) \\ \frac{184}{295} & 0 & -M_{18} & 1 - \frac{3726S_2^2}{413(S_2 + I_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{3726I_2^2}{413(S_2 + I_2)^2} & \frac{162}{413} \left( \frac{23S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 21 \right) \end{pmatrix}.$$

Donde

$$M_{16} = \frac{6(313S_1^2 + 626S_1I_1 + 3418I_1^2)}{2065(S_1 + I_1)^2},$$

$$M_{17} = 2 \left( \frac{9315S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 7861 \right),$$

$$M_{18} = \frac{6(313S_2^2 + 626S_2I_2 + 3418I_2^2)}{2065(S_2 + I_2)^2}.$$



Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1878}{2065} & -\frac{3313}{413} & \frac{184}{295} & -\frac{184}{295} \\ 0 & \frac{2908}{2065} & 0 & \frac{368}{295} \\ \frac{184}{295} & 0 & -\frac{1878}{2065} & -\frac{3313}{413} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{324}{413} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -1.53$ ,  $\lambda_2 = 1.40$ ,  $\lambda_3 = -0.78$  y  $\lambda_4 = -0.28$ . Como hay un valor propio positivo, el punto de equilibrio  $P_1$  es inestable.

Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{21721802}{19235475} & \frac{14907881}{2747925} & \frac{184}{295} & -\frac{184}{295} \\ \frac{4228232}{19235475} & \frac{3265684}{2747925} & 0 & \frac{368}{295} \\ \frac{184}{295} & 0 & -\frac{1878}{2065} & -\frac{3313}{413} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{324}{413} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 0.78$ ,  $\lambda_{2,3} = -1.21 \pm 0.91i$ ,  $\lambda_4 = -0.79$  y como hay un valor propio positivo, entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es inestable. Luego, evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_3$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2798}{2065} & -\frac{263}{59} & \frac{840}{1357} & -\frac{3528}{6785} \\ \frac{184}{413} & \frac{636}{295} & \frac{32}{6785} & \frac{1552}{1357} \\ \frac{184}{295} & 0 & \frac{46434}{47495} & \frac{8849}{1357} \\ 0 & 0 & \frac{648}{9499} & -\frac{972}{1357} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_3)$  son  $\lambda_{1,2} = -1.89 \pm 1.28i$  y  $\lambda_{3,4} = -0.71 \pm 0.71i$  como la parte real de los valores propios es negativa, entonces  $P_3$  es localmente asintóticamente estable. En la figura 3.6 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(4/9, 3/9, 11/9, 2/9)$  y en la figura 3.7 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.7) con condición inicial  $(4/9, 3/9, 11/9)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

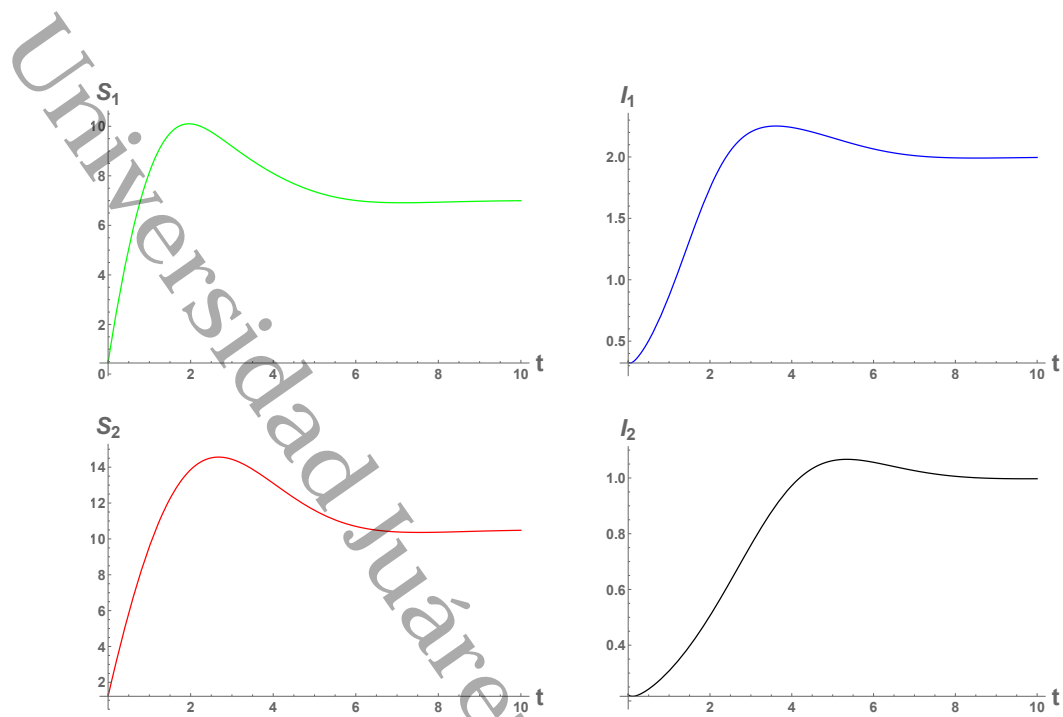


Figura 3.6: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  tomando como condición inicial  $(4/9, 3/9, 11/9, 2/9)$ .

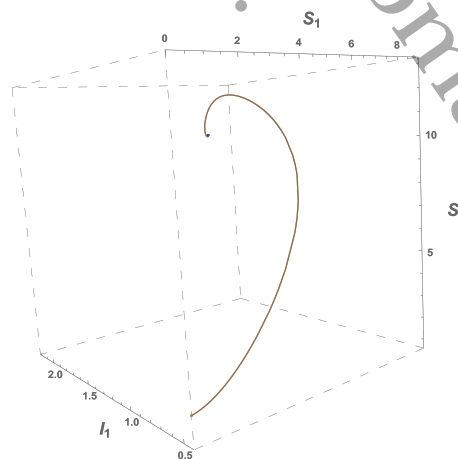


Figura 3.7: Proyección de la solución del sistema (3.7) con condición inicial  $(4/9, 3/9, 11/9)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

## 3.2. Todos los individuos viajan entre las dos ciudades

Consideraremos el modelo completo donde los individuos susceptibles e infectados pueden viajar entre las dos ciudades sin ninguna restricción. Explícitamente, analizaremos el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + \alpha I_2 + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\alpha \gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2 + \alpha I_1 + \frac{\alpha \gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Los puntos de equilibrio de este sistema son los siguientes:

$$P_1 = \left( \frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0 \right), P_2 = \left( \frac{a}{b + c(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)}, \frac{a(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)}{b + c(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)}, \frac{a}{b + c(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)}, \frac{a(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)}{b + c(\mathfrak{R}_{0\gamma} - 1)} \right),$$

y  $P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$

Donde  $\mathfrak{R}_{0\gamma} := \mathfrak{R}_0 + \frac{\alpha \gamma}{c + d}$ . Además,  $P_2$  es admisible si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$ ,  $P_3$  es admisible si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$ ,  $k_1 = 2S_{20}I_{10}$ ,  $S_{10} = \frac{k_1 + S_{20}I_{10}}{I_{20}}$ ,  $S_{20} = 4I_{20}$ ,  $k_2 = \frac{94}{100}$ ,  $I_{10} = k_2 I_{20}$ ,  $c = 100d$  y  $\gamma = 250$ , donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ .

**Proposición 3.2.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} < 1$ , entonces el equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Para determinar la estabilidad de este punto de equilibrio calculamos la matriz Jacobiana del sistema (3.8)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & d - \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \alpha - \frac{\alpha \gamma I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{\alpha \gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{\alpha \gamma I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \alpha + \frac{\alpha \gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \alpha - \frac{\alpha \gamma I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\frac{\alpha \gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - b - \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & d - \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{\alpha \gamma I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \alpha + \frac{\alpha \gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\alpha - b & d - \beta & \alpha & -\alpha \gamma \\ 0 & +\beta - c - d - \alpha & 0 & \alpha \gamma + \alpha \\ \alpha & -\alpha \gamma & -\alpha - b & d - \beta \\ 0 & \alpha \gamma + \alpha & 0 & +\beta - c - d - \alpha \end{pmatrix},$$

por lo que los valores propios son  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = -b - 2\alpha$ ,  $\lambda_3 = \beta - \alpha \gamma - 2\alpha - c - d$ ,  $\lambda_4 = \alpha \gamma + \beta - c - d$ . Por lo tanto,  $P_1$  es estable cuando  $\mathfrak{R}_{0\gamma} < 1$ .  $\square$

Las demostraciones de las siguientes proposiciones se encuentran en el Apéndice B, (5.4) y (5.5), respectivamente.

**Proposición 3.2.2.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma} \leq 2\mathfrak{R}_0$  entonces  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.*

**Proposición 3.2.3.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$ ,  $k_1 = 2S_{20}I_{10}$ ,  $S_{10} = \frac{k_1 + S_{20}I_{10}}{I_{20}}$ ,  $S_{20} = 4I_{20}$ ,  $k_2 = \frac{94}{100}$ ,  $I_{10} = k_2I_{20}$ ,  $c = 100d$  y  $\gamma = 250$ , donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , entonces el sistema tiene un punto de equilibrio con coordenadas positivas  $P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$  localmente asintóticamente estable.*

### 3.2.2. Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad

Para determinar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad, usaremos las matrices de siguiente generación del teorema de van den Driessche [ZV].

**Teorema 3.2.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma} < 1$  entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad es globalmente estable.*

*Demostración.* En el caso de nuestro modelo el vector de infección  $\mathcal{F}$  y el vector de transmisión  $\mathcal{V}$  asociado al sistema (3.8) están dados por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha \gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \frac{\alpha \gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (c + d + \alpha)I_1 - \alpha I_2 \\ -\alpha I_1 + (c + d + \alpha)I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Por lo que las matrices de siguiente generación son

$$F = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \gamma \\ \alpha \gamma & \beta \end{pmatrix} \text{ y } V = \begin{pmatrix} \alpha + c + d & -\alpha \\ -\alpha & \alpha + c + d \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
f(I_1, I_2) &= \begin{pmatrix} \beta - (\alpha + c + d) & \alpha\gamma - \alpha \\ \alpha\gamma - \alpha & \beta - (\alpha + c + d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c + d + \alpha)I_1 - \alpha I_2 \\ -\alpha I_1 + (c + d + \alpha)I_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\beta - (\alpha + c + d)]I_1 + (\alpha\gamma + \alpha)I_2 \\ (\alpha\gamma + \alpha)I_1 + [\beta - (\alpha + c + d)]I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c + d + \alpha)I_1 - \alpha I_2 \\ -\alpha I_1 + (c + d + \alpha)I_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\beta - (\alpha + c + d)]I_1 + (\alpha\gamma + \alpha)I_2 - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ (\alpha\gamma + \alpha)I_1 + [\beta - (\alpha + c + d)]I_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (c + d + \alpha)I_1 - \alpha I_2 \\ -\alpha I_1 + (c + d + \alpha)I_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta I_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_1 + I_1}\right) + I_2 \alpha\gamma \left(1 - \frac{S_2}{S_2 + I_2}\right) \\ \beta I_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_2 + I_2}\right) + I_1 \alpha\gamma \left(1 - \frac{S_1}{S_1 + I_1}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
V^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha + c + d}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\alpha}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \\ \frac{\alpha}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\alpha + c + d}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \end{pmatrix} \text{ y} \\
V^{-1}F &= \begin{pmatrix} \frac{\beta(\alpha + c + d)}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\alpha\gamma^2}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \\ \frac{\alpha\gamma^2}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\beta(\alpha + c + d)}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculando el radio espectral  $\rho(FV^{-1})$  tenemos que es

$$\mathfrak{R}_{0\gamma} = \frac{\beta + \alpha\gamma}{c + d}.$$

Observemos que  $f(I_1, I_2) \geq 0$ ,  $F \geq 0$  y  $V^{-1} \geq 0$  y además, para este caso  $\mathfrak{R}_{0\gamma}$  es menor o igual a 1.

Dado lo anterior, la función de Lyapunov es

$$Q(I_1, I_2) = \mathbf{w}^T V^{-1} \mathbf{x} = (1, 1) \begin{pmatrix} \frac{\alpha + c + d}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\alpha}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \\ \frac{\alpha}{(c + d)(2\alpha + c + d)} & \frac{\alpha + c + d}{(c + d)(2\alpha + c + d)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{I_1 + I_2}{c + d},$$

donde  $\mathbf{w}^T = (1, 1)$  es el vector propio izquierdo de la matriz  $V^{-1}F$  correspondiente al valor propio  $\rho(FV^{-1}) = \mathfrak{R}_{0\gamma}$ . Derivando la función de Lyapunov,

$$\begin{aligned}\dot{Q}(I_1, I_2) &= \frac{\partial Q}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial Q}{\partial I_2} \dot{I}_2 \\ &= \frac{1}{c+d} \left( \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c+d+\alpha)I_1 + \alpha I_2 + \frac{\alpha\gamma S_2 I_2}{S_2 + I_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c+d} \left( \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c+d+\alpha)I_2 + \alpha I_1 + \frac{\alpha\gamma S_1 I_1}{S_1 + I_1} \right) \\ &= I_1 S_1 \left( \frac{\alpha\gamma}{(c+d)(I_1 + S_1)} + \frac{\beta}{(c+d)(I_1 + S_1)} - \frac{1}{S_1} \right) \\ &\quad + I_2 S_2 \left( \frac{\alpha\gamma}{(c+d)(I_2 + S_2)} + \frac{\beta}{(c+d)(I_2 + S_2)} - \frac{1}{S_2} \right) \\ &= -\frac{I_1(c(I_1 + S_1) + d(I_1 + S_1) - S_1(\alpha\gamma + \beta))}{(c+d)(I_1 + S_1)} \\ &\quad - \frac{I_2(c(I_2 + S_2) + d(I_2 + S_2) - S_2(\alpha\gamma + \beta))}{(c+d)(I_2 + S_2)}.\end{aligned}$$

Para que la igualdad anterior sea negativa se debe cumplir que

$$c(I_1 + S_1) + d(I_1 + S_1) - S_1(\alpha\gamma + \beta) > 0$$

y

$$c(I_2 + S_2) + d(I_2 + S_2) - S_2(\alpha\gamma + \beta) > 0.$$

Resolviendo para la primera desigualdad

$$-S_1(\beta + \alpha\gamma) > -(c+d)(I_1 + S_1) \Rightarrow \frac{\beta + \alpha\gamma}{c+d} < \frac{I_1 + S_1}{S_1},$$

pero  $\frac{I_1 + S_1}{S_1}$  es mayor que 1, entonces

$$\frac{\beta + \alpha\gamma}{c+d} < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{c+d-\beta}{\gamma}.$$

Análogamente para la segunda desigualdad, por lo que  $\dot{Q} \leq 0$  siempre que  $\alpha \leq \frac{c+d-\beta}{\gamma}$  o equivalentemente  $\mathfrak{R}_{0\gamma} \leq 1$  y es 0 si y solo si  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$ . Como en  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$  las soluciones convergen al punto de equilibrio libre de enfermedad  $P_1$ , por el teorema de Lyapunov-Lasalle  $P_1$  es globalmente estable.  $\square$

### 3.2.3. Bifurcación

**Proposición 3.2.4.** Si  $\beta = c + d - \alpha\gamma$  entonces  $P_1 = P_2 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$ , es un punto de equilibrio no hiperbólico y hay una bifurcación transcítica.

*Demostración.* Para usar el teorema de Sotomayor, demostremos que se cumplen las siguientes propiedades

1.  $\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma) = 0$ ,
2.  $\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma)\mathbf{v}] \neq 0$ ,
3.  $\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d - \alpha\gamma)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \neq 0$ .

Propiedad 1. Para demostrarla, hagamos uso de la matriz Jacobiana evaluada en  $P_1$  y en el parámetro  $\beta = c + d - \alpha\gamma$

$$A_1 = J(P_1, c + d - \alpha\gamma) = \begin{pmatrix} -\alpha - b & \alpha\gamma - c & \alpha & -\alpha\gamma \\ 0 & -\alpha\gamma - \alpha & 0 & \alpha\gamma + \alpha \\ \alpha & -\alpha\gamma & -\alpha - b & \alpha\gamma - c \\ 0 & \alpha\gamma + \alpha & 0 & -\alpha\gamma - \alpha \end{pmatrix}$$

Notemos que sus valores propios son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -b$ ,  $\lambda_3 = -b - 2\alpha$  y  $\lambda_4 = -2(\alpha + \alpha\gamma)$ . El vector propio del valor propio igual a 0 es  $\mathbf{v} = \left(-\frac{c}{b}, 1, -\frac{c}{b}, 1\right)$ . El vector propio de la matriz  $A_1^T$  es  $\mathbf{w} = \left(-\frac{c}{b}, 1, -\frac{c}{b}, 1\right)$ .

Tenemos además que  $\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma) = (0, 0, 0, 0)$ , de manera que  $\mathbf{w}^T \mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma) = \left(-\frac{c}{b}, 1, -\frac{c}{b}, 1\right)^T \cdot (0, 0, 0, 0) = 0$  como se quería.

Propiedad 2. Observemos que

$$\mathbf{w}^T [D\mathbf{f}_\beta(P_1, c + d - \alpha\gamma)\mathbf{v}] = \left(-\frac{c}{b}, 1, -\frac{c}{b}, 1\right)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{c}{b}, 1, -\frac{c}{b}, 1\right) = \frac{2c}{b} + 2 \neq 0.$$

Por lo tanto, se cumple la segunda propiedad del teorema.

Propiedad 3. Para esta propiedad calculamos lo siguiente

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d - \alpha\gamma) = \left( \frac{2bs_1s_2M}{a} + \frac{2\alpha b\gamma v_1v_2}{a}, -\frac{2bs_1s_2M}{a} - \frac{2\alpha b\gamma v_1v_2}{a}, \frac{2bv_1v_2M}{a} + \frac{2\alpha b\gamma s_1s_2}{a}, -\frac{2bv_1v_2M}{a} - \frac{2\alpha b\gamma s_1s_2}{a} \right).$$

Donde  $M = -\alpha\gamma + c + d$ . Ahora, evaluando en el vector  $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , tenemos que

$$D^2\mathbf{f}(P_1, c + d - \alpha\gamma)(v, v) = \left( \frac{2b(c + d)}{a}, -\frac{2b(c + d)}{a}, \frac{2b(c + d)}{a}, -\frac{2b(c + d)}{a} \right).$$

De manera que

$$\mathbf{w}^T [D^2\mathbf{f}(P_1, c + d - \alpha\gamma)(\mathbf{v}, \mathbf{v})] = -\frac{4(b + c)(c + d)}{a} \neq 0.$$

De las 3 propiedades anteriores y el teorema de Sotomayor, concluimos que cuando  $\beta = c + d - \alpha\gamma$  el sistema presenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio  $P_1$  respecto al parámetro  $\beta$ . En la figura 3.8 podemos ver las coordenada  $S_1, I_1$  y las coordenadas  $S_2, I_2$  de los puntos de equilibrio  $P_1$  y  $P_2$ , así como su estabilidad.  $\square$

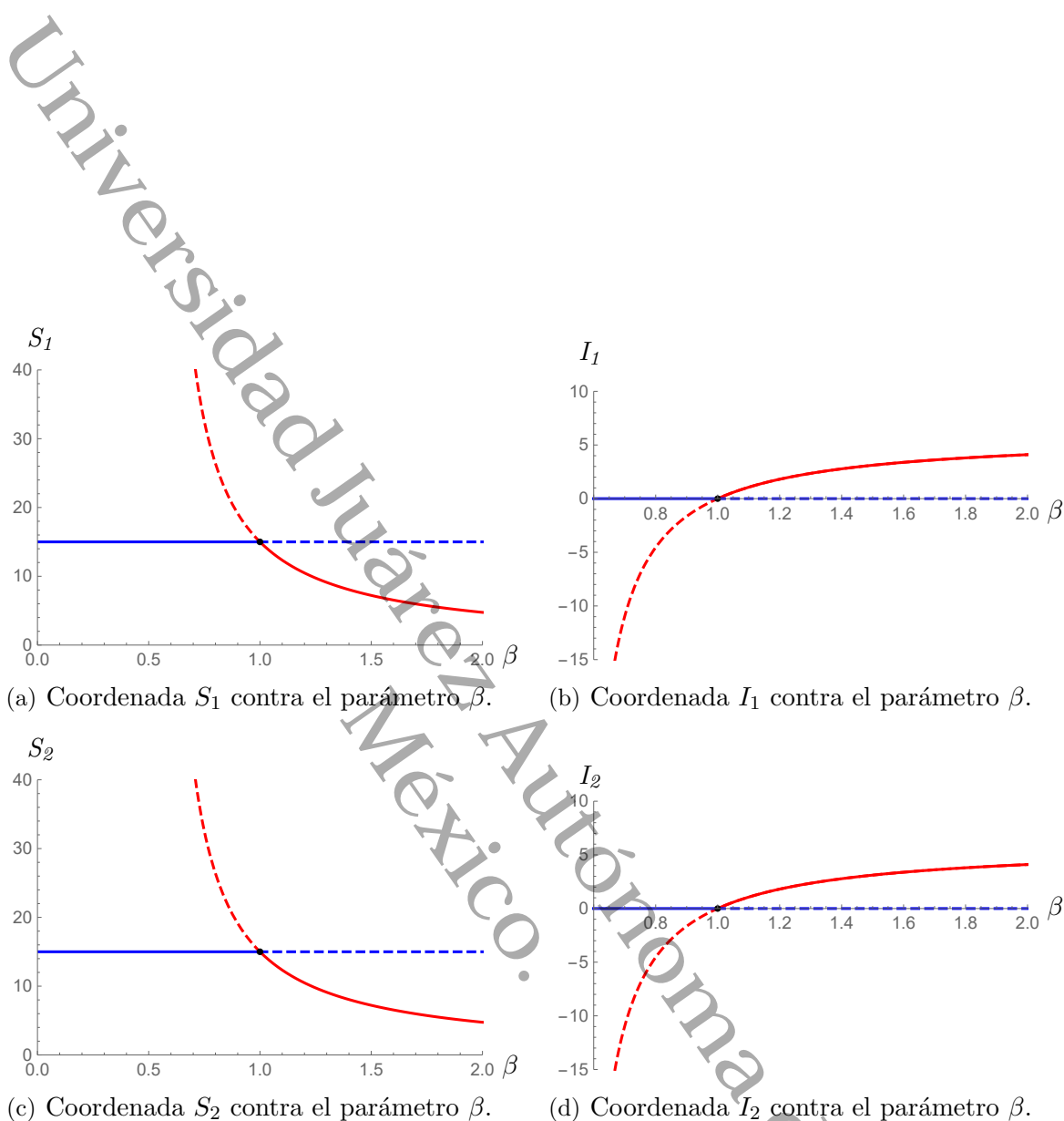


Figura 3.8: Las gráficas de color azul corresponden a las coordenadas del punto  $P_1$  y las de color rojo a las de  $P_2$ . La línea continua (punteada) representa la estabilidad (inestabilidad) de cada punto de equilibrio. Para estas gráficas los valores de los parámetros son  $a = 3$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.66$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.4$ .



### 3.2.4. Simulaciones numéricas

**Ejemplo 3.2.1.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = a = d = \beta = \gamma = 1$ ,  $c = 2$  y  $b = \frac{3}{2}$ , tenemos que el sistema (3.8) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= S_1 \left( \frac{S_1}{S_1 + I_1} - \frac{7}{2} \right) + \frac{S_2^2}{S_2 + I_2} + I_1 + 1, \\ \dot{I}_1 &= I_1 \left( \frac{S_1}{S_1 + I_1} - 4 \right) + \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} + I_2, \\ \dot{S}_2 &= \frac{S_1^2}{S_1 + I_1} + S_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + I_2} - \frac{7}{2} \right) + I_2 + 1, \\ \dot{I}_2 &= \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} + I_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + I_2} - 4 \right) + I_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En este caso  $\mathfrak{R}_{0\gamma} < 1$  por lo que el único punto de equilibrio del sistema (3.10) con coordenadas no negativas es  $P_1 = (2/3, 0, 2/3, 0)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} \frac{S_1(S_1 + 2I_1)}{(S_1 + I_1)^2} - \frac{7}{2} & \frac{I_1(2S_1 + I_1)}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_2(S_2 + 2I_2)}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 4 & \frac{I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 1 \\ \frac{S_1(S_1 + 2I_1)}{(S_1 + I_1)^2} & -\frac{S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_2(S_2 + 2I_2)}{(S_2 + I_2)^2} - \frac{7}{2} & \frac{I_2(2S_2 + I_2)}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} + 1 & \frac{I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 4 \end{pmatrix}$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = -7/2$ ,  $\lambda_3 = -3/2$  y  $\lambda_4 = -1$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  en este caso es globalmente estable. En la figura 3.9 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(5/16, 3/16, 1/16, 11/16)$  y en la figura 3.10 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.10) con condición inicial  $(5/16, 3/16, 1/16)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

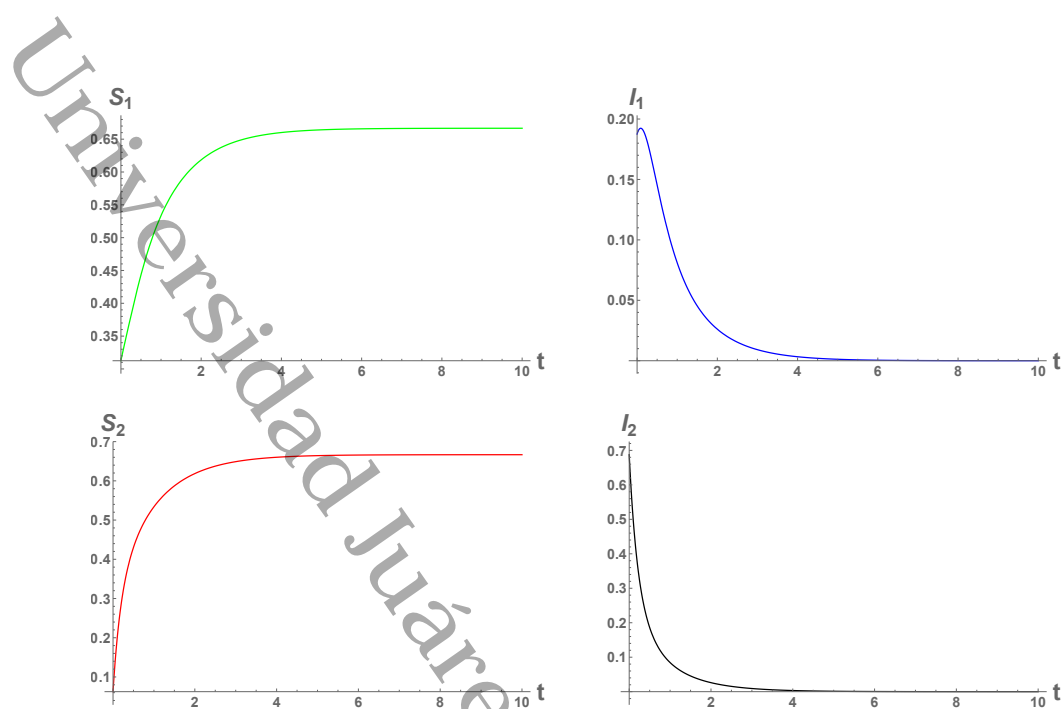


Figura 3.9: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  con condición inicial  $(5/16, 3/16, 1/16, 11/16)$ .

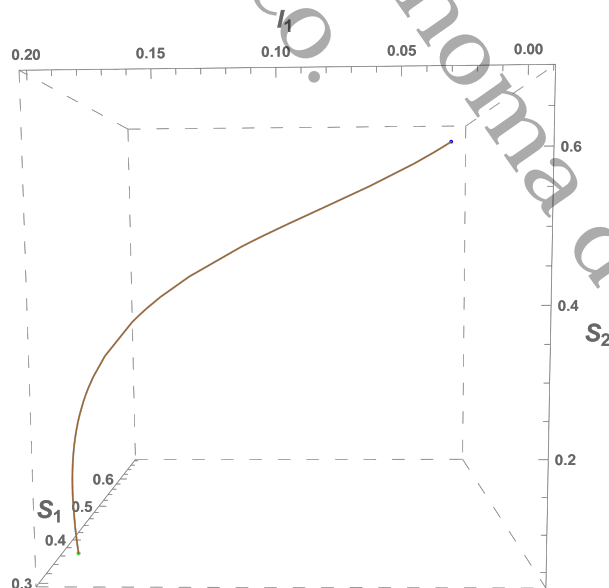


Figura 3.10: Proyección de la solución del sistema (3.10) con condición inicial  $(5/16, 3/16, 1/16)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

**Ejemplo 3.2.2.** Dando valores a los parámetros,  $a = 1$ ,  $b = 77/720$ ,  $c = 77/360$ ,  $d = 7/18$ ,  $\alpha = 7/12$  y  $\beta = 49/90$ ,  $\gamma = 7/15$ , tenemos que el sistema (3.8) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -\frac{49S_1I_1}{90(S_1+I_1)} - \frac{497S_1}{720} - \frac{49S_2I_2}{180(S_2+I_2)} + \frac{7S_2}{12} + \frac{7I_1}{18} + 1, \\ \dot{I}_1 &= \frac{49S_1I_1}{90(S_1+I_1)} + \frac{49S_2I_2}{180(S_2+I_2)} - \frac{427I_1}{360} + \frac{7I_2}{12}, \\ \dot{S}_2 &= -\frac{49S_1I_1}{180(S_1+I_1)} + \frac{7S_1}{12} - \frac{49S_2I_2}{90(S_2+I_2)} - \frac{497S_2}{720} + \frac{7I_2}{18} + 1, \\ \dot{I}_2 &= \frac{49S_1I_1}{180(S_1+I_1)} + \frac{49S_2I_2}{90(S_2+I_2)} + \frac{7I_1}{12} - \frac{427I_2}{360}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En este caso  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma} \leq 2\mathfrak{R}_0$  por lo que los puntos de equilibrio del sistema (3.11) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (720/77, 0, 720/77, 0)$  y  $P_2 = (5.46, 1.94, 5.46, 1.94)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{7(71S_1^2 + 142S_1I_1 + 127I_1^2)}{720(S_1+I_1)^2} & \frac{7}{90} \left( 5 - \frac{7S_1^2}{(S_1+I_1)^2} \right) & \frac{7(15S_2^2 + 30S_2I_2 + 8I_2^2)}{180(S_2+I_2)^2} & -\frac{49S_2^2}{180(S_2+I_2)^2} \\ \frac{49I_1^2}{90(S_1+I_1)^2} & \frac{7}{360} \left( \frac{28S_1^2}{(S_1+I_1)^2} - 61 \right) & \frac{49I_2^2}{180(S_2+I_2)^2} & \frac{7}{180} \left( \frac{7S_2^2}{(S_2+I_2)^2} + 15 \right) \\ \frac{7(15S_1^2 + 30S_1I_1 + 8I_1^2)}{180(S_1+I_1)^2} & -\frac{49S_1^2}{180(S_1+I_1)^2} & -\frac{7(71S_2^2 + 142S_2I_2 + 127I_2^2)}{720(S_2+I_2)^2} & \frac{7}{90} \left( 5 - \frac{7S_2^2}{(S_2+I_2)^2} \right) \\ \frac{49I_1^2}{180(S_1+I_1)^2} & \frac{7}{180} \left( \frac{7S_1^2}{(S_1+I_1)^2} + 15 \right) & \frac{49I_2^2}{90(S_2+I_2)^2} & \frac{7}{360} \left( \frac{28S_2^2}{(S_2+I_2)^2} - 61 \right) \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{497}{720} & -\frac{7}{45} & \frac{7}{12} & -\frac{49}{180} \\ 0 & -\frac{77}{120} & 0 & \frac{77}{90} \\ \frac{7}{12} & -\frac{49}{180} & -\frac{497}{720} & -\frac{7}{45} \\ 0 & \frac{77}{90} & 0 & -\frac{77}{120} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -\frac{539}{360}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{917}{720}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{77}{720}$  y  $\lambda_4 = \frac{77}{360}$  por lo que  $P_1$  es inestable.

Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{943}{1296} & \frac{299}{3240} & \frac{3659}{6480} & -\frac{961}{6480} \\ \frac{121}{3240} & -\frac{1441}{1620} & \frac{121}{6480} & \frac{4741}{6480} \\ \frac{3659}{6480} & \frac{961}{6480} & -\frac{943}{1296} & \frac{299}{3240} \\ \frac{121}{6480} & \frac{4741}{6480} & \frac{121}{3240} & -\frac{1441}{1620} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = -1.634$ ,  $\lambda_2 = -1.279$  y  $\lambda_{3,4} = -0.16 \pm 0.05i$ , como la parte real de los valores propios es negativa, entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable. En la figura 3.11 mostramos las series de tiempo de las poblaciones

$S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(6/13, 4/13, 11/13, 17/13)$  y en la figura 3.12 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.11) con condición inicial  $(6/13, 4/13, 11/13)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

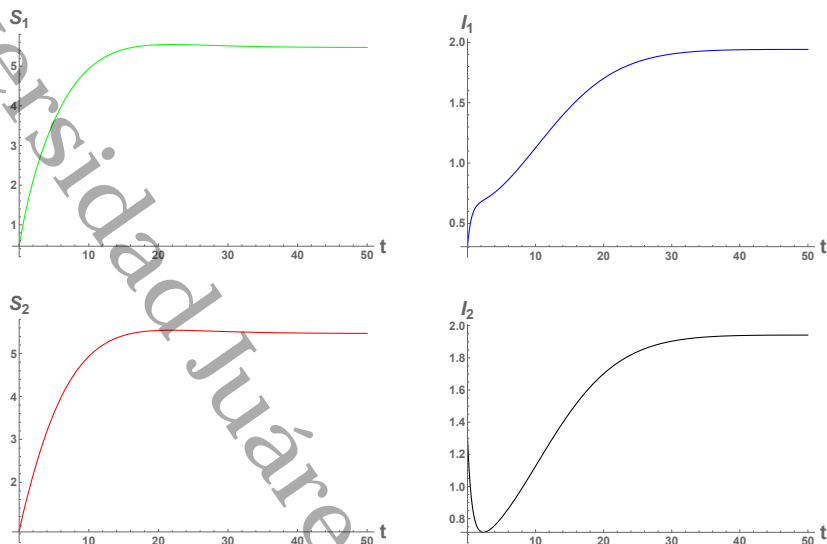


Figura 3.11: Series de tiempo de  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  con condición inicial  $(6/13, 4/13, 11/13, 17/13)$ .

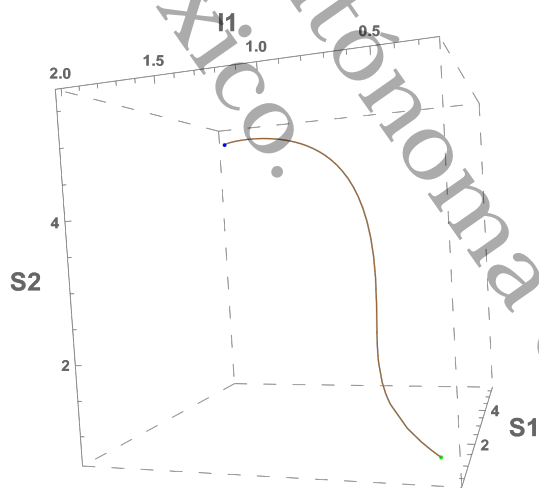


Figura 3.12: Proyección de la solución del sistema (3.11) con condición inicial  $(6/13, 4/13, 11/13)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

**Ejemplo 3.2.3.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = 0.415$ ,  $\beta = 13.61$ ,  $b = 0.00002$ ,  $c = 100$ ,  $a = 97$ ,  $\gamma = 250$  y  $d = 1$ , tenemos que el sistema (3.8) se simplifica como

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= \frac{S_1(2246280400S_2^2 - 70451892335S_2I_1 + 1128S_2(464894279 - 495854450I_2))}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{4I_1(561570100S_2^2 + 1351546105S_2I_1 - 282S_2(495854450I_2 - 464894279))}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{4I_1((1351546105I_1 + 131100186678)I_2) - 2246392700S_1^2(S_2 + I_2)}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{S_1((524400746712 - 70451892335I_1)I_2)}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}, \\
\dot{I}_1 &= -\frac{101(S_1(10328783S_2I_1 - 12268880S_2I_2 + 10328783I_1I_2 - 48880I_2^2))}{11881724(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&- \frac{101(4I_1(2982651S_2I_1 - 3067220S_2I_2 + 2982651I_1I_2 - 12220I_2^2))}{11881724(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}, \\
\dot{S}_2 &= \frac{S_2(2246280400S_1^2 - 70451892335S_1I_2 + 1128S_1(464894279 - 495854450I_1))}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{4I_1(561570100S_1^2 + 1351546105S_1I_2 - 282S_1(495854450I_1 - 464894279))}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{4I_1((1351546105I_1 + 131100186678)I_2) - 2246392700S_1^2(S_2 + I_2)}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&+ \frac{S_2((524400746712 - 70451892335I_2)I_1)}{5406184420(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}, \\
\dot{I}_2 &= -\frac{101(S_2(10328783S_1I_2 - 12268880S_1I_1 + 10328783I_2I_1 - 48880I_1^2))}{11881724(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\
&- \frac{101(4I_2(2982651S_1I_2 - 3067220S_1I_1 + 2982651I_1I_2 - 12220I_1^2))}{11881724(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Entonces los puntos de equilibrio del sistema (3.12) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (4669640, 0, 4669649, 0)$ ,  $P_2 = (5.94, 0.97, 5.94, 0.97)$ ,  $P_3 = (11.28, 0.94, 4, 1)$  y  $P_4 = (4, 1, 11.28, 0.94)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} N_{11} & 1 - \frac{161783921S_1^2}{11881724(S_1 + I_1)^2} & \frac{1234220(S_2^2 + 2S_2I_2 - 249I_2^2)}{2970431(S_2 + I_2)^2} & -\frac{308555000S_2^2}{2970431(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{161783921I_1^2}{11881724(S_1 + I_1)^2} & 101 \left( \frac{1601821S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 11930604 \right) & \frac{308555000I_2^2}{2970431(S_2 + I_2)^2} & \frac{1234220(251S_2^2 + 2S_2I_2 + I_2^2)}{2970431(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{1234220(S_1^2 + 2S_1I_1 - 249I_1^2)}{2970431(S_1 + I_1)^2} & -\frac{308555000S_1^2}{2970431(S_1 + I_1)^2} & N_{33} & \frac{161783921S_2^2}{11881724(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{308555000I_1^2}{2970431(S_1 + I_1)^2} & \frac{1234220(251S_1^2 + 2S_1I_1 + I_1^2)}{2970431(S_1 + I_1)^2} & \frac{161783921I_2^2}{11881724(S_2 + I_2)^2} & 101 \left( \frac{1601821S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 11930604 \right) \end{pmatrix}$$

Donde

$$N_{11} = -\frac{449278540S_1^2 + 898557080S_1I_1 + 1517161535I_1^2}{1081236884(S_1 + I_1)^2} \text{ y}$$

$$N_{33} = \frac{449278540S_2^2 + 898557080S_2I_2 + 15171615351I_2^2}{1081236884(S_2 + I_2)^2}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -0.415523 & -12.6162 & 0.415502 & -103.875 \\ 0 & -87.7993 & 0 & 104.291 \\ 0.415502 & -103.875 & -0.415523 & -12.6162 \\ 0 & 104.291 & 0 & -87.7993 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -192.09$ ,  $\lambda_2 = -0.83$ ,  $\lambda_3 = -0.00002$  y  $\lambda_4 = 16.49$ . Como los valores propios son reales de signos opuestos, el punto de equilibrio  $P_1$  es inestable.

Ahora evaluamos  $\mathbf{J}$  en  $P_2$ ,

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -0.683793 & -9.062 & -1.63108 & -76.7612 \\ 0.26827 & -91.3535 & 2.04658 & 77.1767 \\ -1.63108 & -76.7612 & -0.683793 & -9.062 \\ 2.04658 & 77.1767 & 0.26827 & -91.3535 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 0.23$ ,  $\lambda_2 = -167.81$ ,  $\lambda_{3,4} = -8.24 \pm 12.78i$  y como hay un valor propio con parte real positiva, entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es inestable.

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_3$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{536392959}{1081236884} & \frac{409401409}{38615603} & \frac{11107980}{2970431} & \frac{197475200}{2970431} \\ \frac{12444917}{154462412} & \frac{3468203751}{38615603} & \frac{12342200}{2970431} & \frac{198709420}{2970431} \\ \frac{7690140}{38615603} & \frac{3417840000}{38615603} & \frac{25954300311}{27030922100} & \frac{572874909}{74260775} \\ \frac{23735000}{38615603} & \frac{3433884860}{38615603} & \frac{161783921}{297043100} & \frac{6884058091}{74260775} \end{pmatrix}.$$

Como las coordenadas de  $P_3$  y  $P_4$  son simétricas, su parte lineal tiene los mismos valores propios, los cuales son  $\lambda_1 = -167.45$ ,  $\lambda_2 = -0.29$  y  $\lambda_{3,4} = -8.10 \pm 14.84i$ . Como la parte real de los valores propios es negativa, entonces  $P_3$  y  $P_4$  son localmente asintóticamente estable. En la figura 3.13 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2$  con condición inicial  $(4/9, 5/9, 11/9, 5/9)$  y en la figura 3.14 mostramos una proyección de la solución al sistema (3.12) con condición inicial  $(4/9, 5/9, 11/9)$  en el espacio  $I_2 = 0$ .

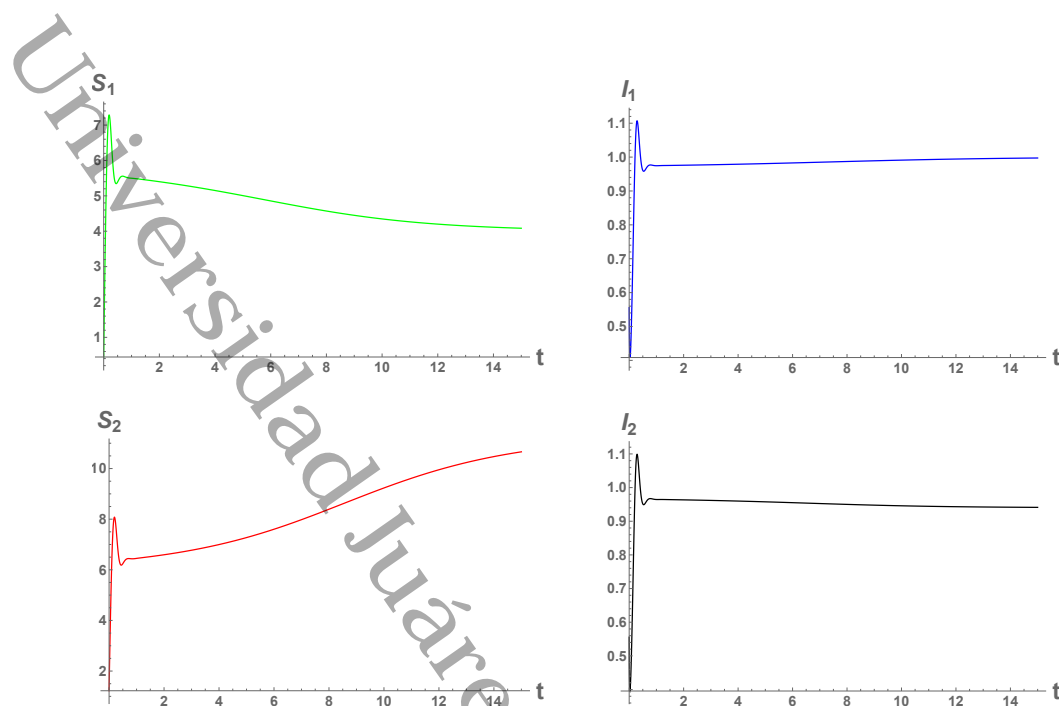


Figura 3.13: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1$  e  $I_2$  con condición inicial  $(4/9, 5/9, 11/9, 5/9)$ .

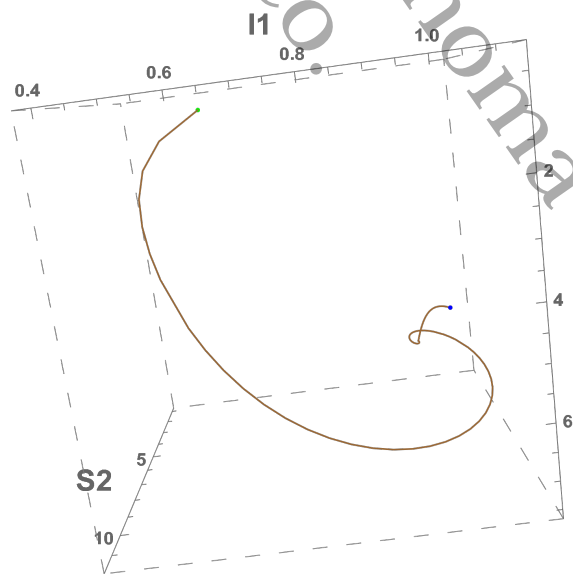


Figura 3.14: Proyección de la solución del sistema (3.12) con condición inicial  $(4/9, 5/9, 11/9)$  en el sistema  $I_2 = 0$ .

## Modelo sin detección de enfermedad a la salida

En este capítulo analizaremos el efecto de establecer control a la entrada de un viaje en la propagación de una epidemia tomando como base un modelo SIQS propuesto por Liu-Takeuchi (2006) [LT]. Ellos analizan la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad y del equilibrio endémico y nosotros mostraremos además la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad. Mostraremos simulaciones para ejemplificar los resultados obtenidos cuando el número reproductivo básico es menor que 1 y para cuando es mayor que 1. En este caso, el modelo a analizar es:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - bS_1 + dI_1 + fQ_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha)I_1 + (1 - \theta)\alpha I_2 + (1 - \theta)\frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\
 \dot{Q}_1 &= \theta \alpha I_2 + \theta \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (e + f)Q_1, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - bS_2 + dI_2 + fQ_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha)I_2 + (1 - \theta)\alpha I_1 + (1 - \theta)\frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{Q}_2 &= \theta \alpha I_1 + \theta \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (e + f)Q_2.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

El significado de los parámetros anteriores es el siguiente:

1. El parámetro  $a$  es la tasa de reclutamiento de individuos que entran a la zona de estudio.
2. La tasa de mortalidad natural de los individuos susceptibles es una tasa constante per cápita  $b$ .
3. La tasa constante per cápita de recuperación de individuos infectados es  $d$ , y la tasa per cápita de mortalidad de individuos infectados es  $c$ . Como esto incluye tanto la mortalidad natural como la inducida por la enfermedad, tenemos  $c > b$ .
4. La enfermedad es transmitida con una tasa de infección  $\beta$ .



5. Los individuos susceptibles e infectados que van de la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$  lo hacen con una tasa  $\alpha$ . Asumimos que las dos ciudades están conectadas por transporte directo como trenes o aviones.
6. Cuando los individuos de la ciudad  $j$  viajan a la ciudad  $i$ , la enfermedad se transmite con una tasa de infección  $\gamma\alpha$ .
7. Asumimos que ambas ciudades son idénticas, es decir, los parámetros demográficos son los mismos para cada ciudad.
8. Suponemos que durante el viaje no ocurren nuevos nacimientos, ni muertes y no hay recuperación de individuos infectados.
9. El parámetro  $\theta$  es la probabilidad de detectar exitosamente un individuo infectado por control de entrada.
10. Los individuos infectados aislados en cada ciudad se representan con  $Q_i$ .
11. La tasa de mortalidad per-cápita de individuos aislados lo representamos con  $e$ .
12. La tasa de recuperación per-cápita de individuos infectados aislados durante el tratamiento es  $f$ .

#### 4.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Para encontrar las ecuaciones de un equilibrio endémico vamos a suponer que sus coordenadas satisfacen  $S_1 = S_2$ ,  $I_1 = I_2$ ,  $Q_1 = Q_2$ , así las ecuaciones del sistema son

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 + f Q_1 - \alpha S_1 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + (1 - \theta) \alpha I_1 + (1 - \theta) \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{Q}_1 &= \theta \alpha I_1 + \theta \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (e + f) Q_1, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 + f Q_1 - \alpha S_1 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + (1 - \theta) \alpha I_1 + (1 - \theta) \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\
 \dot{Q}_2 &= \theta \alpha I_1 + \theta \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (e + f) Q_1.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

resolviendo este sistema tenemos que los puntos de equilibrio son los siguientes:

$$P_1 = \left( \frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0 \right) \text{ y } P_2 = (S^*, I^*, Q^*, S^*, I^*, Q^*) \text{ si } \mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1.$$

Donde

$$I^* = \frac{a}{c + b/(\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}) + e\theta\alpha(1 + \gamma/(\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}))/(e + f)},$$

$$S^* = \frac{I^*}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} - 1},$$

$$Q^* = \frac{\theta\alpha}{e + f} \left(1 + \frac{\gamma}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right) I^*,$$

$$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} := \frac{\beta + (1 - \theta)\alpha\gamma}{c + d + \theta\alpha}.$$

El punto  $P_1$  es el **equilibrio libre de enfermedad**, y  $P_2$  es el **equilibrio endémico** y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}$  es el número reproductivo básico.

La matriz Jacobiana del sistema (4.2) es

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, Q_1, S_2, I_2, Q_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & d - \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & f \\ \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -e - f \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & d - \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & f \\ \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -e - f \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\alpha\gamma I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\frac{\alpha\gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta-1)I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\frac{\alpha(\theta-1)(\gamma S_1^2 + (S_1 + I_1)^2)}{(S_1 + I_1)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \alpha\theta \left(\frac{\gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} + 1\right) & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\alpha\gamma I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{\alpha\gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta-1)I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{\alpha(\theta-1)(\gamma S_2^2 + (S_2 + I_2)^2)}{(S_2 + I_2)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \alpha\theta \left(\frac{\gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 1\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 4.1.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} < 1$ , entonces el equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\alpha - b & d - \beta & f & \alpha & -\alpha\gamma & 0 \\ 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 & 0 & -\alpha(\gamma + 1)(\theta - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -e - f & 0 & \alpha(\gamma + 1)\theta & 0 \\ \alpha & -\alpha\gamma & 0 & -\alpha - b & d - \beta & f \\ 0 & -\alpha(\gamma + 1)(\theta - 1) & 0 & 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 \\ 0 & \alpha(\gamma + 1)\theta & 0 & 0 & 0 & -e - f \end{pmatrix},$$

por lo que los valores propios son  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = -e - f$ ,  $\lambda_3 = -e - f$ ,  $\lambda_4 = -b - 2\alpha$ ,  $\lambda_5 = -\alpha(\gamma + 1)\theta + \alpha\gamma + \beta - c - d$  y  $\lambda_6 = \alpha(\gamma(\theta - 1) + \theta - 2) + \beta - c - d$ . Para ver cuando los valores propios  $\lambda_5$  y  $\lambda_6$  son negativos, hacemos lo siguiente:

Primero veamos cuál de los dos es más grande,

$$\lambda_5 - \lambda_6 = -\alpha(\gamma + 1)\theta + \alpha\gamma + \beta - c - d - (\alpha(\gamma(\theta - 1) + \theta - 2) + \beta - c - d) = 2\alpha(\gamma + 1)(1 - \theta)$$

Como  $\theta$  es menor que 1,  $\lambda_5$  es mayor que  $\lambda_6$ . Por lo que basta con que  $\lambda_5$  sea negativo para que todos los valores propios sean negativos, pero  $\lambda_5 < 0$  es equivalente a  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} < 1$ . Por lo tanto, si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} < 1$ , entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable.  $\square$

**Teorema 4.1.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$  entonces  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.*

La demostración de este teorema se encuentra en el Apéndice C (5.5).

## 4.2. Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad

Para determinar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad, usaremos las matrices de siguiente generación del teorema de van den Driessche [ZV].

**Teorema 4.2.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} < 1$  y  $\gamma < \frac{\alpha\theta - \beta + c + d}{\alpha - \alpha\theta}$  entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad es globalmente estable.*

*Demostración.* Para calcular las matrices de siguiente generación asociadas al sistema (4.2), notemos que los vectores  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{V}$  de infección y de transmisión, respectivamente, son

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{(1-\theta)(\alpha\gamma S_2 I_2)}{S_2 + I_2} \\ \frac{\theta(\alpha\gamma S_2 I_2)}{S_2 + I_2} \\ \frac{(1-\theta)(\alpha\gamma S_1 I_1)}{S_1 + I_1} + \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\theta(\alpha\gamma S_1 I_1)}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta)I_2 \\ Q_1(e + f) - \alpha\theta I_2 \\ I_2(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta)I_1 \\ Q_2(e + f) - \alpha\theta I_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que las matrices de siguiente generación son

$$F = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\gamma(1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\theta & 0 \\ \alpha\gamma(1 - \theta) & 0 & \beta & 0 \\ \alpha\gamma\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{pmatrix} \alpha + c + d & 0 & -\alpha(1 - \theta) & 0 \\ 0 & e + f & -\alpha\theta & 0 \\ -\alpha(1 - \theta) & 0 & \alpha + c + d & 0 \\ -\alpha\theta & 0 & 0 & e + f \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
g(I_1, Q_1, I_2, Q_2) &= \begin{pmatrix} -\alpha + \beta - c - d & 0 & -\alpha(\gamma + 1)(\theta - 1) & 0 \\ 0 & -e - f & \alpha(\gamma + 1)\theta & 0 \\ -\alpha(\gamma + 1)(\theta - 1) & 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 \\ \alpha(\gamma + 1)\theta & 0 & 0 & -e - f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ I_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{(1-\theta)(\alpha \gamma S_2 I_2)}{S_2 + I_2} \\ \frac{\theta(\alpha \gamma S_2 I_2)}{S_2 + I_2} \\ \frac{(1-\theta)(\alpha \gamma S_1 I_1)}{S_1 + I_1} + \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\theta(\alpha \gamma S_1 I_1)}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta)I_2 \\ Q_1(e + f) - \alpha\theta I_2 \\ I_2(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta)I_1 \\ Q_2(e + f) - \alpha\theta I_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -I_1(\alpha - \beta + c + d) - \alpha(\gamma + 1)(\theta - 1)I_2 \\ \alpha(\gamma + 1)\theta I_2 - Q_1(e + f) \\ -I_2(\alpha - \beta + c + d) - \alpha(\gamma + 1)(\theta - 1)I_1 \\ \alpha(\gamma + 1)\theta I_1 - Q_2(e + f) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\alpha \gamma (\theta - 1) S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \alpha(\theta - 1)I_2 \\ Q_1(e + f) - \frac{\alpha \theta I_2 (\gamma S_2 + S_2 + I_2)}{S_2 + I_2} \\ I_2(\alpha + c + d) + \frac{\alpha \gamma (\theta - 1) S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \alpha(\theta - 1)I_1 \\ Q_2(e + f) - \frac{\alpha \theta I_1 (\gamma S_1 + S_1 + I_1)}{S_1 + I_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{I_2(-\alpha \gamma \theta I_2 (S_1 + I_1) + \alpha \gamma S_1 I_2 + \beta I_1^2 + \alpha \gamma I_1 I_2) + \beta S_2 I_1^2}{(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\ \frac{\alpha \gamma \theta I_2^2}{S_2 + I_2} \\ \frac{\beta S_1 I_2^2 + I_1(\alpha \gamma S_2 I_1 - \alpha \gamma \theta I_1 (S_2 + I_2) + \alpha \gamma I_1 I_2 + \beta I_2^2)}{(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)} \\ \frac{\alpha \gamma \theta I_1^2}{S_1 + I_1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha + c + d}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 & -\frac{\alpha(\theta - 1)}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha^2(\theta - 1)\theta}{(e + f)((\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2)} & \frac{1}{e + f} & \frac{\alpha\theta(\alpha + c + d)}{(e + f)((\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2)} & 0 \\ -\frac{\alpha(\theta - 1)}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 & \frac{\alpha + c + d}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\theta(\alpha + c + d)}{(e + f)((\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2)} & 0 & -\frac{\alpha^2(\theta - 1)\theta}{(e + f)((\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2)} & \frac{1}{e + f} \end{pmatrix}$$

y

$$V^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\alpha\gamma(\theta - 1)^2 + \beta) + \beta c + \beta d}{(-\alpha(\theta - 2) + c + d)(\alpha\theta + c + d)} & 0 & -\frac{\alpha(\theta - 1)(\beta + \gamma(\alpha + c + d))}{(-\alpha(\theta - 2) + c + d)(\alpha\theta + c + d)} & 0 \\ -\frac{\alpha^2\gamma(\theta - 1)\theta}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 & \frac{\alpha\gamma\theta(\alpha + c + d)}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha(\theta - 1)(\beta + \gamma(\alpha + c + d))}{(-\alpha(\theta - 2) + c + d)(\alpha\theta + c + d)} & 0 & \frac{\alpha(\alpha\gamma(\theta - 1)^2 + \beta) + \beta c + \beta d}{(-\alpha(\theta - 2) + c + d)(\alpha\theta + c + d)} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta(\alpha + c + d)}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 & -\frac{\alpha^2\gamma(\theta - 1)\theta}{(\alpha + c + d)^2 - \alpha^2(\theta - 1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando el radio espectral de la matriz  $FV^{-1}$  tenemos que

$$\rho(FV^{-1}) = \frac{-\alpha\gamma\theta + \alpha\gamma + \beta}{\alpha\theta + c + d} = \mathfrak{R}_{0\gamma\theta}.$$

Notemos que  $g(I_1, Q_1, I_2, Q_2) \geq 0$ ,  $F \geq 0$ ,  $V^{-1} \geq 0$  y además,  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}$  es menor o igual a 1. Definimos la función de Lyapunov como

$$Q(I_1, Q_1, I_2, Q_2) = \mathbf{w}^T V^{-1} \mathbf{x} = \frac{I_1 + I_2}{\alpha\theta + c + d},$$

donde  $\mathbf{w}^T = (1, 0, 1, 0)$  es el vector propio izquierdo de la matriz  $V^{-1}F$  correspondiente al valor propio  $\rho(FV^{-1}) = \Re_{0\gamma\theta}$ .

Derivando la función de Lyapunov,

$$\begin{aligned} \dot{Q}(I_1, Q_1, I_2, Q_2) &= \frac{\partial Q}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial Q}{\partial I_2} \dot{I}_2 + \frac{\partial Q}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 \\ &= -\frac{c(I_1 + I_2) + d(I_1 + I_2) + \frac{\alpha\theta(\gamma M_1 + (S_1 + I_1)(S_2 + I_2)(I_1 + I_2)) - (\alpha\gamma + \beta)M_1}{(S_1 + I_1)(S_2 + I_2)}}{\alpha\theta + c + d}, \end{aligned}$$

donde  $M_1 = S_1 I_2 (S_2 + I_1) + S_1 S_2 I_1 + S_2 I_1 I_2$ . Usando Mathematica se verifica que la derivada de la función de Liapunov es negativa si  $\gamma < \frac{\alpha\theta - \beta + c + d}{\alpha - \alpha\theta}$  y  $\beta < c + d$ . Además, la derivada de  $Q$  es 0 si y solo si  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$ . Para analizar lo que ocurre en el espacio  $S_1, Q_1, S_2, Q_2$  notemos que cuando  $I_1 = I_2 = 0$ ,  $\dot{Q}_1 < 0$  y  $\dot{Q}_2 < 0$ , por lo que para tener la estabilidad global de  $P_1$  basta con analizar lo que ocurre en el plano  $S_1, S_2$ . En este plano, el sistema se ve como

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2, \dot{S}_2 = a - bS_2 + \alpha S_1 - \alpha S_2. \quad (4.3)$$

El punto de equilibrio es  $(a/b, a/b)$  y es asintóticamente estable. Por el teorema de Lyapunov Lasalle, concluimos que  $P_1$  es globalmente estable.  $\square$

### 4.3. Simulaciones numéricas

En el siguiente ejemplo vamos a tomar valores de los parámetros para el sistema (4.2), de tal manera que el número reproductivo básico  $\Re_{0\gamma\theta} < 1$  y mostraremos las correspondientes series de tiempo.

**Ejemplo 4.3.1.** Dando valores a los parámetros,  $\alpha = a = d = \beta = \gamma = c = e = f = 1$ , y  $b = \theta = \frac{1}{2}$ , tenemos que el sistema (4.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= Q_1 + \frac{S_1^2}{S_1 + I_1} - \frac{5S_1}{2} + \frac{S_2^2}{S_2 + I_2} + I_1 + 1, \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{2} \left( I_1 \left( \frac{2S_1}{S_1 + I_1} - 6 \right) + \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} + I_2 \right), \\ \dot{Q}_1 &= \frac{1}{2} \left( -4Q_1 + \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} + I_2 \right), \\ \dot{S}_2 &= Q_2 + \frac{S_1^2}{S_1 + I_1} + S_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + I_2} - \frac{5}{2} \right) + I_2 + 1, \\ \dot{I}_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} + 2I_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + I_2} - 3 \right) + I_1 \right), \\ \dot{Q}_2 &= \frac{1}{2} \left( -4Q_2 + \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} + I_1 \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

En este caso  $\Re_{0\gamma\theta} < 1$ , entonces el único punto de equilibrio del sistema (4.4) con coordenadas

no negativas es  $P_1 = (2, 0, 0, 2, 0, 0)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{3S_1^2+6S_1I_1+5I_1^2}{2(S_1+I_1)^2} & \frac{I_1(2S_1+I_1)}{(S_1+I_1)^2} & 1 & \frac{S_2(S_2+2I_2)}{(S_2+I_2)^2} & -\frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} & 0 \\ \frac{I_1^2}{(S_1+I_1)^2} & \frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} - 3 & 0 & \frac{I_2^2}{2(S_2+I_2)^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} + 1 \right) & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{I_2^2}{2(S_2+I_2)^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} + 1 \right) & 0 \\ \frac{S_1(S_1+2I_1)}{(S_1+I_1)^2} & -\frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} & 0 & -\frac{3S_2^2+6S_2I_2+5I_2^2}{2(S_2+I_2)^2} & \frac{I_2(2S_2+I_2)}{(S_2+I_2)^2} & 1 \\ \frac{I_1^2}{2(S_1+I_1)^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} + 1 \right) & 0 & \frac{I_2^2}{(S_2+I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} - 3 & 0 \\ \frac{I_1^2}{2(S_1+I_1)^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} + 1 \right) & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -5/2$ ,  $\lambda_{3,4} = -2$ ,  $\lambda_5 = -1$  y  $\lambda_6 = -1/2$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  es localmente asintóticamente estable. Como la parte real de los valores propios es negativa, entonces  $P_3$  y  $P_4$  son localmente asintóticamente estables. En la figura 4.1 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2, Q_1, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$  y en la figura 4.2 mostramos una proyección de la solución al sistema (4.4) con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

**Ejemplo 4.3.2.** Dando valores a los parámetros,  $a = e = f = 1$ , y  $b = 155/2048$ ,  $c = 155/1024$ ,  $d = 155/512$ ,  $\alpha = 5/8$ ,  $\beta = 15/16$ ,  $\gamma = 7/8$ ,  $\theta = 3/4$  tenemos que el sistema (4.2) se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= Q_1 + \frac{1920S_1^2}{S_1+I_1} - 3355S_1 + \frac{160S_2(8S_2+I_2)}{S_2+I_2} + 620I_1 + 2048, \\ \dot{I}_1 &= \frac{5(I_1(\frac{192S_1}{S_1+I_1} - 221) + 4I_2(\frac{7S_2}{S_2+I_2} + 8))}{1024}, \\ \dot{Q}_1 &= \frac{15I_2(15S_2+8I_2)}{256(S_2+I_2)} - 2Q_1, \\ \dot{S}_2 &= Q_2 + \frac{5S_1(8S_1+I_1)}{64(S_1+I_1)} - \frac{5S_2(287S_2+671I_2)}{2048(S_2+I_2)} + \frac{155I_2}{512} + 1, \\ \dot{I}_2 &= \frac{5(4I_1(\frac{7S_1}{S_1+I_1} + 8) + I_2(\frac{192S_2}{S_2+I_2} - 221))}{1024}, \\ \dot{Q}_2 &= \frac{15I_1(15S_1+8I_1)}{256(S_1+I_1)} - 2Q_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

En este caso  $\mathfrak{R}_{0,\theta} > 1$ , entonces los únicos punto de equilibrio del sistema (4.5) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (2048/155, 0, 0, 2048/155, 0, 0)$  y

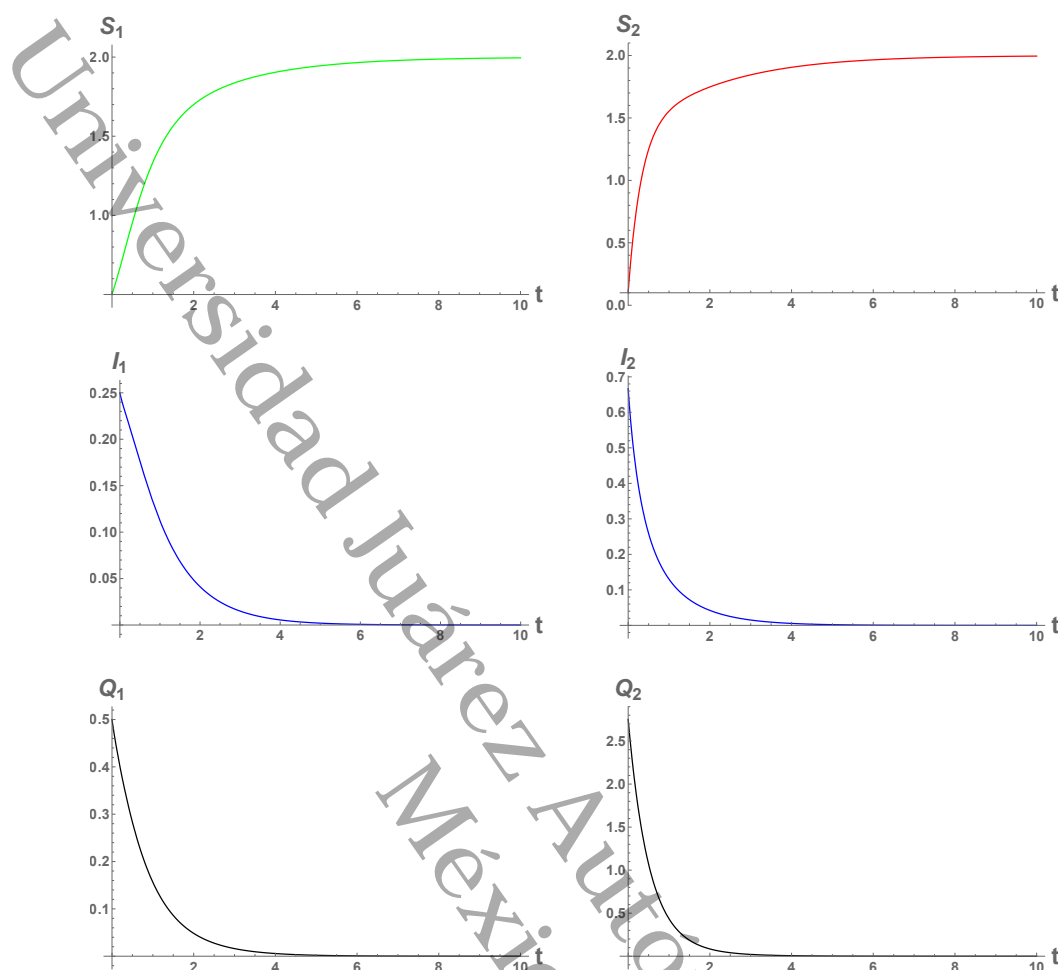


Figura 4.1: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$ .

$P_2 = (2128896/357337, 11264/11527, 9249/23054, 2128896/357337, 11264/11527, 9249/23054)$ .  
La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{5(287S_1^2 + 574S_1I_1 + 671I_1^2)}{2048(S_1 + I_1)^2} & \frac{5}{512} \left( 31 - \frac{96S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} \right) & 1 & \frac{5(8S_2^2 + 16S_2I_2 + I_2^2)}{64(S_2 + I_2)^2} & -\frac{35S_2^2}{64(S_2 + I_2)^2} & 0 \\ \frac{15I_1^2}{16(S_1 + I_1)^2} & \frac{5 \left( \frac{192S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 221 \right)}{1024} & 0 & \frac{35I_2^2}{256(S_2 + I_2)^2} & \frac{5}{256} \left( \frac{7S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 8 \right) & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{105I_2^2}{256(S_2 + I_2)^2} & \frac{15}{256} \left( \frac{7S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} + 8 \right) & 0 \\ \frac{5(8S_1^2 + 16S_1I_1 + I_1^2)}{64(S_1 + I_1)^2} & -\frac{35S_1^2}{64(S_1 + I_1)^2} & 0 & -\frac{5(287S_2^2 + 574S_2I_2 + 671I_2^2)}{2048(S_2 + I_2)^2} & \frac{5}{512} \left( 31 - \frac{96S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \right) & 1 \\ \frac{35I_1^2}{256(S_1 + I_1)^2} & \frac{5}{256} \left( \frac{7S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} + 8 \right) & 0 & \frac{15I_2^2}{16(S_2 + I_2)^2} & \frac{5 \left( \frac{192S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 221 \right)}{1024} & 0 \\ \frac{105I_1^2}{256(S_1 + I_1)^2} & \frac{15}{256} \left( \frac{7S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} + 8 \right) & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

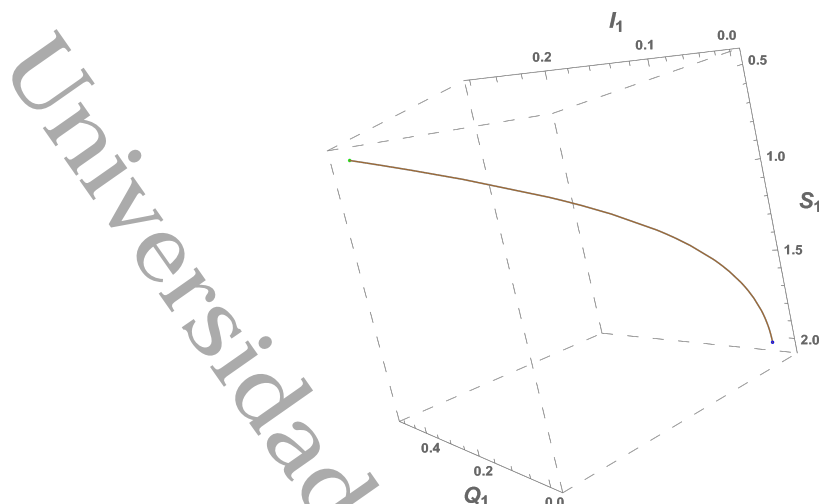


Figura 4.2: Proyección de la solución del sistema (4.4) con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1435}{2048} & -\frac{325}{512} & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{35}{64} & 0 \\ 0 & -\frac{145}{1024} & 0 & 0 & \frac{75}{256} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{225}{256} & 0 \\ \frac{5}{8} & -\frac{35}{64} & 0 & -\frac{1435}{2048} & -\frac{325}{512} & 1 \\ 0 & \frac{75}{256} & 0 & 0 & -\frac{145}{1024} & 0 \\ 0 & \frac{225}{256} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -2715/2048$ ,  $\lambda_4 = -445/1024$ ,  $\lambda_5 = -155/2048$  y  $\lambda_6 = 155/1024$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  es inestable.

Evalutando  $\mathbf{J}$  en  $P_2$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{891239}{1239040} & -\frac{120551}{309760} & 1 & \frac{380473}{619520} & \frac{250047}{619520} & 0 \\ \frac{2883}{154880} & -\frac{239873}{619520} & 0 & \frac{6727}{2478080} & \frac{637247}{2478080} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{20181}{2478080} & \frac{1911741}{2478080} & 0 \\ \frac{380473}{619520} & -\frac{250047}{619520} & 0 & -\frac{891239}{1239040} & -\frac{120551}{309760} & 1 \\ \frac{6727}{2478080} & \frac{637247}{2478080} & 0 & \frac{2883}{154880} & -\frac{239873}{619520} & 0 \\ \frac{20181}{2478080} & \frac{1911741}{2478080} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_2)$  son  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1.32$ ,  $\lambda_4 = -0.657$  y  $\lambda_{5,6} = -0.118 \pm 0.0892i$  por lo que el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable. En las figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2, Q_1, Q_2$  variando las condiciones iniciales y en la figura 4.7 mostramos una proyección de la solución al sistema (4.5) con condición inicial  $(18/10, 1/2, 1/4)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .



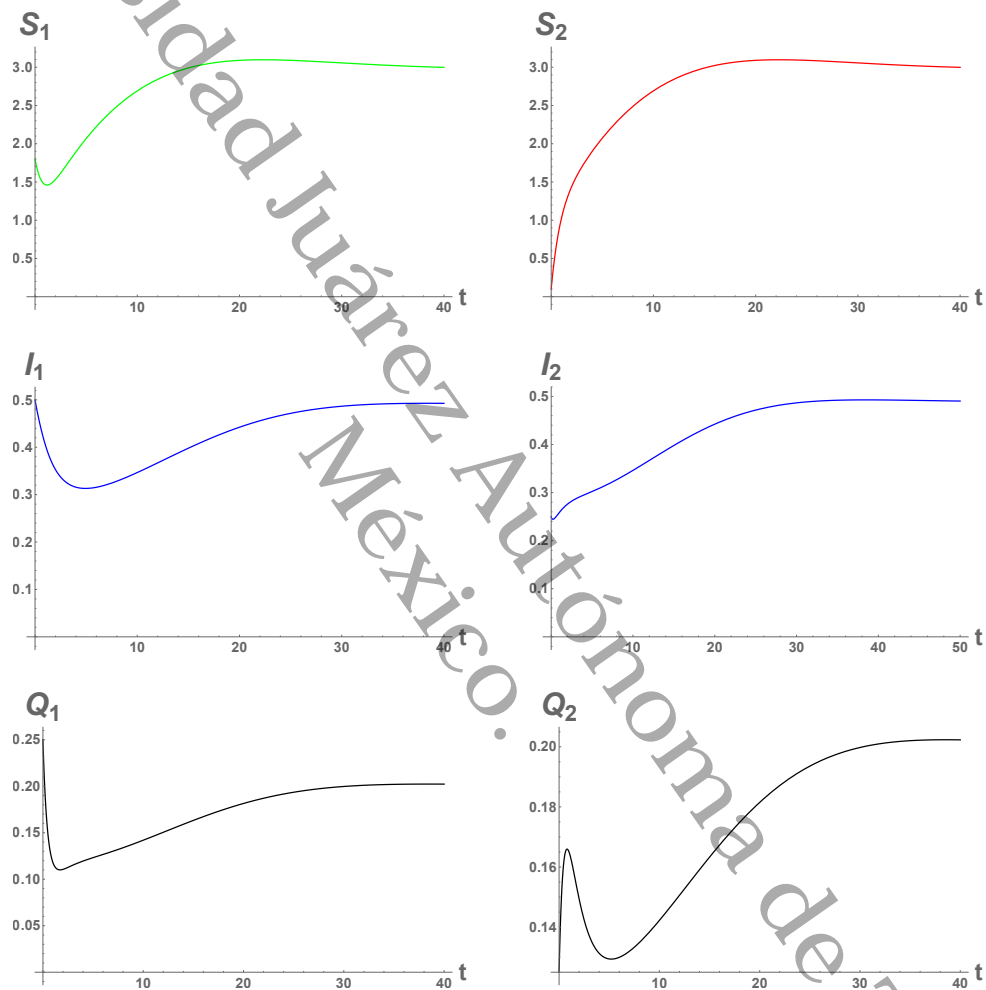


Figura 4.3: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(18/10, 1/2, 1/4, 1/10, 1/4, 1/8)$ .

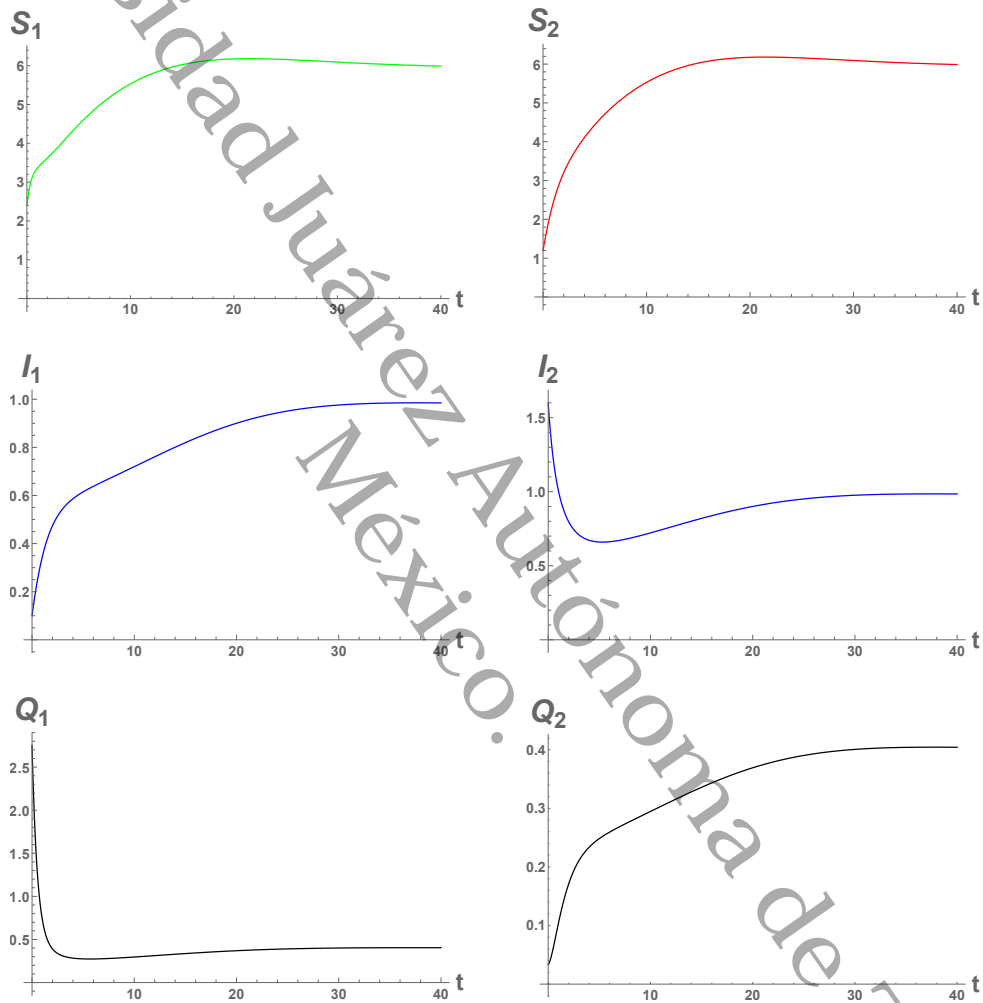


Figura 4.4: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(12/5, 1/10, 11/4, 12/10, 16/10, 1/30)$ .

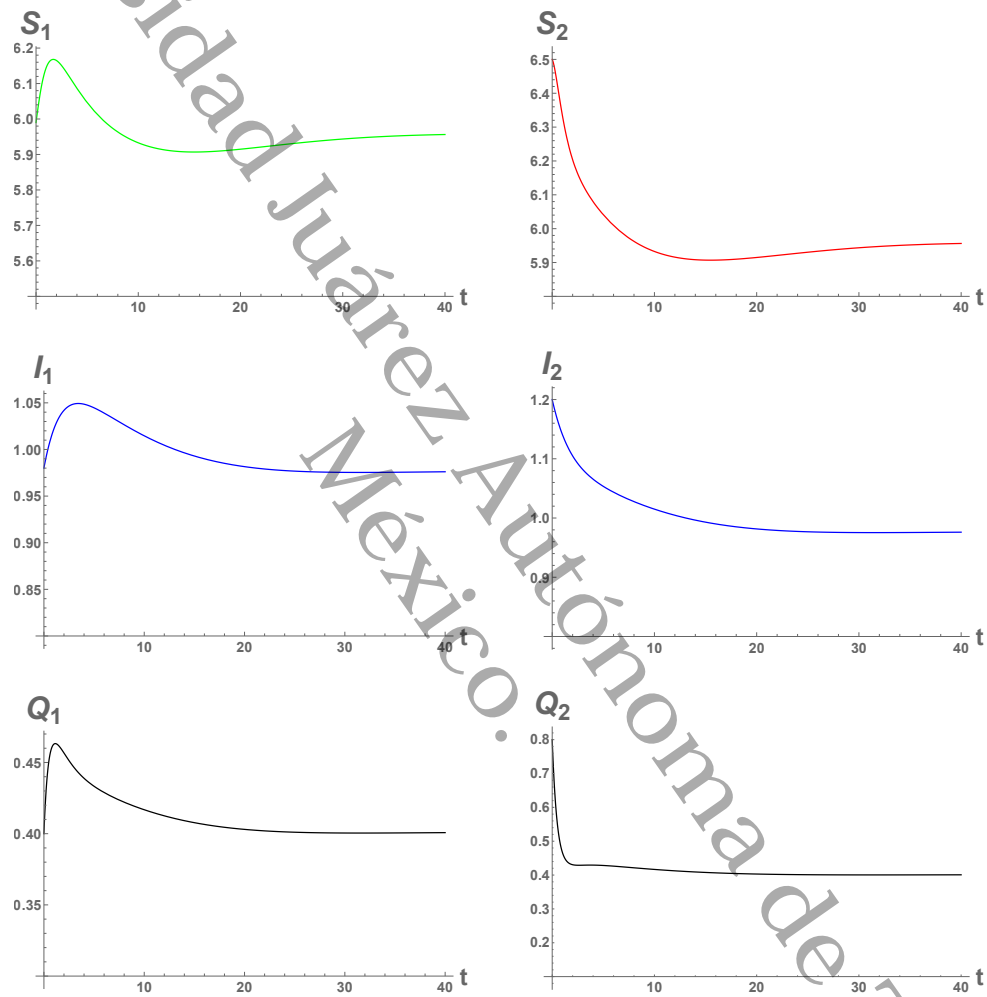


Figura 4.5: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(5.99, 0.98, 0.4, 6.5, 1.2, 0.8)$ .

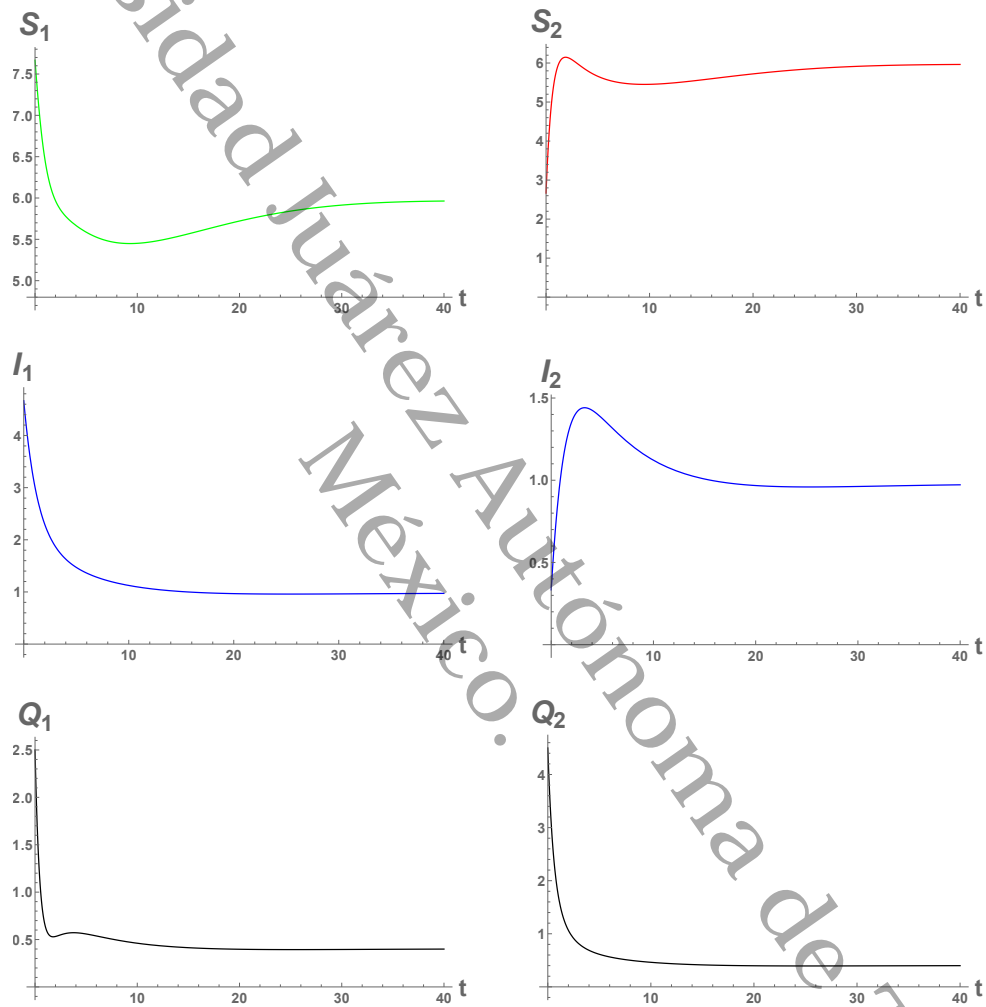


Figura 4.6: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(23/3, 14/3, 5/2, 8/3, 1/3, 9/2)$ .

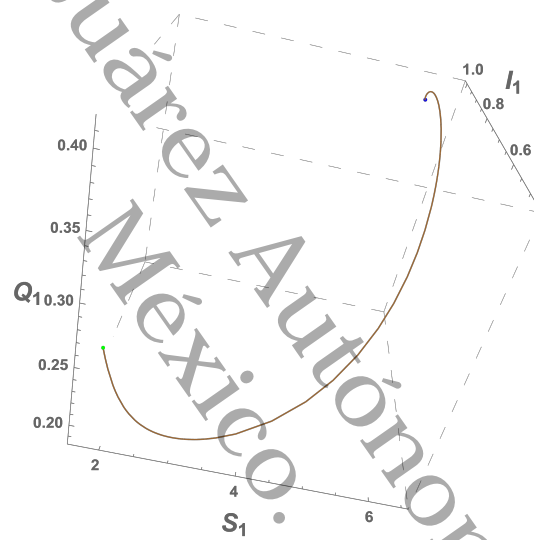


Figura 4.7: Proyección de la solución del sistema (4.5) con condición inicial  $(18/10, 1/2, 1/4)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

## Modelo con detección de enfermedad a la entrada y a la salida

En este capítulo analizaremos el efecto de establecer control a la entrada y a la salida de un viaje, en la propagación de una epidemia tomando como base un modelo SIQS propuesto por Liu-Takeuchi (2006) [LT]. Ellos analizan la estabilidad local del equilibrio libre de enfermedad y nosotros además mostraremos la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y estableceremos condiciones para la existencia de un equilibrio endémico, así como su estabilidad local. Mostraremos simulaciones para ejemplificar los resultados obtenidos cuando el número reproductivo básico es menor que 1 y para cuando es mayor que 1.

Explícitamente el modelo a considerar es:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 + f Q_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma(1 - \theta_s)\alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2}, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha)I_1 + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_2 \\
 &\quad + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\frac{\gamma\alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2}, \\
 \dot{Q}_1 &= \theta_s\alpha I_1 + \theta_e(1 - \theta_s)\alpha I_2 + \theta_e(1 - \theta_s)\frac{\gamma\alpha S_2 I_2}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2} - (e + f)Q_1, \\
 \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 + f Q_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma(1 - \theta_s)\alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha)I_2 + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_1 \\
 &\quad + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1}, \\
 \dot{Q}_2 &= \theta_s\alpha I_2 + \theta_e(1 - \theta_s)\alpha I_1 + \theta_e(1 - \theta_s)\frac{\gamma\alpha S_1 I_1}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1} - (e + f)Q_2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Se agregan dos nuevos parámetros los cuales permitirán demostrar que las medidas de detección de entrada y salida de contagiados a un viaje son importantes para la erradicación de enfermedades, ya que mostraremos condiciones para erradicar la enfermedad provocada por la infección.

1. El parámetro  $a$  es la tasa de reclutamiento de individuos que entran a la zona de estudio.

2. La tasa de mortalidad natural de los individuos susceptibles es una tasa constante per cápita  $b$ .
3. La tasa constante per cápita de recuperación de individuos infectados es  $d$ , y la tasa per cápita de mortalidad de individuos infectados es  $c$ . Como esto incluye tanto la mortalidad natural como la inducida por la enfermedad, tenemos  $c > b$ .
4. La enfermedad es transmitida con una tasa de infección  $\beta$ .
5. Los individuos susceptibles e infectados que van de la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$  lo hacen con una tasa  $\alpha$ . Asumimos que las dos ciudades están conectadas por transporte directo como trenes o aviones.
6. Cuando los individuos de la ciudad  $j$  viajan a la ciudad  $i$ , la enfermedad se transmite con una tasa de infección  $\gamma\alpha$ .
7. Asumimos que ambas ciudades son idénticas, es decir, los parámetros demográficos son los mismos para cada ciudad.
8. Suponemos que durante el viaje no ocurren nuevos nacimientos, ni muertes y no hay recuperación de individuos infectados.
9. Los parámetros  $\theta_s$  y  $\theta_e$  son la probabilidad de detectar exitosamente un individuo infectado por control de salida y por control de entrada respectivamente.
10. Los individuos infectados aislados en cada ciudad se representan con  $Q_i$ .
11. La tasa de mortalidad per-cápita de individuos aislados lo representamos con  $e$ .
12. La tasa de recuperación per-cápita de individuos infectados aislados durante el tratamiento es  $f$ .

## 5.1. Puntos de equilibrio y estabilidad local

Resolviendo el sistema anterior, tenemos que los puntos de equilibrio son los siguientes:

$$P_1 = \left( \frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0 \right) \quad \text{y} \quad P_2 = (S_0, I_0, Q_0, S_0, I_0, Q_0).$$

Además,  $P_2$  es admisible si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ ,  $Q_0 = \frac{\alpha I_0((\theta_s-1)I_0(\theta_e(\theta_s-1)-\theta_s)+S_0(\theta_s-(\gamma+1)\theta_e(\theta_s-1)))}{(e+f)(-\theta_s I_0+I_0+S_0)}$ ,

$$\beta = \frac{(I_0+S_0)(c(-\theta_s I_0+I_0+S_0)+d(-\theta_s I_0+I_0+S_0)+\alpha(\theta_s-1)I_0(\theta_e(\theta_s-1)-\theta_s)+\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s)+\theta_e+\theta_s-1)+\theta_e(-\theta_s)+\theta_e+\theta_s))}{S_0(-\theta_s I_0+I_0+S_0)}$$

$$\text{y} \quad a = bS_0 + cI_0 + \frac{\alpha e I_0((\theta_s-1)I_0(\theta_e(\theta_s-1)-\theta_s)+S_0(\theta_s-(\gamma+1)\theta_e(\theta_s-1)))}{(e+f)(-\theta_s I_0+I_0+S_0)}.$$

De manera que  $Q_0, \beta$  y  $a$  son positivos si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y se cumplen las siguientes hipótesis,

- $\mathbf{H}_1$   $\frac{1}{2} \leq \theta_s \leq 1$  ó
- $\mathbf{H}_2$   $0 < \theta_s < \frac{1}{2}$  y  $\theta_e\theta_s + \frac{1}{2} \leq \theta_e + \theta_s$ .

El punto  $P_1$  es el **equilibrio libre de enfermedad**,  $P_2$  es el **equilibrio endémico** y

$$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} := \frac{\beta + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha\gamma}{c + d + \theta_e\alpha + (1 - \theta_e)\theta_s\alpha}$$

es el número reproductivo básico.

La matriz Jacobiana del sistema (5.1) se puede escribir como

$$\mathbf{J}(S_1, I_1, Q_1, S_2, I_2, Q_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & d - \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & f \\ \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & 0 \\ 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & d - \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & f \\ \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & 0 \\ 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(S_1^2 - 2(\theta_s - 1)S_1I_1 - (\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2I_1^2)}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)S_1^2}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2I_1^2}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\gamma + 1)S_1^2 - 2(\theta_s - 1)S_1I_1 + (\theta_s - 1)^2I_1^2)}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2I_1^2}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & -\frac{\alpha\theta_e(\theta_s - 1)((\gamma + 1)S_1^2 - 2(\theta_s - 1)S_1I_1 + (\theta_s - 1)^2I_1^2)}{(S_1 - \theta_s I_1 + I_1)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(S_2^2 - 2(\theta_s - 1)S_2I_2 - (\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2I_2^2)}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)S_2^2}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2I_2^2}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\gamma + 1)S_2^2 - 2(\theta_s - 1)S_2I_2 + (\theta_s - 1)^2I_2^2)}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2I_2^2}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & -\frac{\alpha\theta_e(\theta_s - 1)((\gamma + 1)S_2^2 - 2(\theta_s - 1)S_2I_2 + (\theta_s - 1)^2I_2^2)}{(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 5.1.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$ , entonces el equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\alpha - b & d - \beta & f & \alpha & \alpha\gamma(\theta_s - 1) & 0 \\ 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 & 0 & \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1) & 0 \\ 0 & \alpha\theta_s & -e - f & 0 & -\alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) & 0 \\ \alpha & \alpha\gamma(\theta_s - 1) & 0 & -\alpha - b & d - \beta & f \\ 0 & \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1) & 0 & 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 \\ 0 & -\alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) & 0 & 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix},$$

por lo que los valores propios son  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = -e - f$ ,  $\lambda_3 = -e - f$ ,  $\lambda_4 = -b - 2\alpha$ ,  $\lambda_5 = \alpha(-(\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma\theta_e - \gamma + \theta_e - 2) + \beta - c - d$  y  $\lambda_6 = \alpha((\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma(-\theta_e) +$



$\gamma - \theta_e) + \beta - c - d$ . Para ver cuando los valores propios  $\lambda_5$  y  $\lambda_6$  son negativos, hacemos lo siguiente:

Primero veamos cuál de los dos es más grande,

$$\begin{aligned} \lambda_6 - \lambda_5 &= \alpha((\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma(-\theta_e) + \gamma - \theta_e) + \beta - c - d - \alpha(\gamma + 1)\theta_s + \alpha\gamma + \beta - c - d \\ &\quad - (\alpha(-(\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma\theta_e - \gamma + \theta_e - 2) + \beta - c - d) \\ &= 2\alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1). \end{aligned}$$

Como  $\theta_e$  y  $\theta_s$  son menores que 1,  $\lambda_6$  es mayor que  $\lambda_5$ . Por lo que basta con que  $\lambda_6$  sea negativo para que todos los valores propios sean negativos, pero  $\lambda_6 < 0$  es equivalente a  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$ . Por lo tanto, si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$ , entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad  $P_1$  es localmente asintóticamente estable.  $\square$

La estabilidad del equilibrio endémico la demostraremos siguiendo la idea empleada en [LT]. Demostraremos en dos secciones la estabilidad del equilibrio endémico, en la primera haciendo uso de las condiciones  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y  $\mathbf{H}_1$ , es decir, cuando la detección de salida es alta. La otra sección constará de las condiciones  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y  $\mathbf{H}_2$ , es decir, cuando la detección de salida es baja.

### 5.1.1. Alta probabilidad de éxito en la detección de infectados a la salida

Para demostrar la estabilidad local del equilibrio endémico cuando  $\theta_s \in [\frac{1}{2}, 1]$  es necesario establecer las siguientes hipótesis:

- $\mathbf{H}_3$   $I_0 \geq \sqrt{2}S_0$ ,
- $\mathbf{H}_4$   $K_1 \leq \theta_s < 1$ .

Donde  $K_1$  es la primera raíz (las raíces son ordenadas con respecto a su parte real) del siguiente polinomio de grado 3,

$$\mathbf{K}_1(\lambda) = 2I_0^2\lambda^3 + -5I_0^2 - 4I_0S_0\lambda^2 + 4I_0^2 + 6I_0S_0 + 3S_0^2\lambda - I_0^2 - 2I_0S_0 - 2S_0^2.$$

**Teorema 5.1.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ ,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $0 < \gamma < 1$  y se satisfacen las hipótesis  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_3$  y  $\mathbf{H}_4$  entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.*

La demostración de este teorema se encuentra en el Apéndice D (5.6).

### 5.1.2. Baja probabilidad de éxito en la detección de infectados a la salida

Para demostrar la estabilidad local del equilibrio endémico cuando  $\theta_s \in (0, \frac{1}{2})$  es necesario establecer las siguientes hipótesis:

- $\mathbf{H}_5$   $2\theta_e \geq 2 + \frac{1}{\theta_s - 1}$ ,

- $\mathbf{H}_6$   $0 \leq S_0 < K_2$ ,
- $\mathbf{H}_7$   $\theta_s \leq K_3$ ,
- $\mathbf{H}_8$   $1 + \theta_e + \frac{1}{\theta_s - 1} < 0$ ,
- $\mathbf{H}_9$   $0 < \gamma < -\frac{(\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2}{\theta_e(\theta_s - 1)S_0^2}$ .

donde  $K_2$  es la tercera raíz del siguiente polinomio de grado 9,

$$\mathbf{K}_2(\lambda) = 4\lambda^9 + 34I_0\lambda^8 - 886I_0^2\lambda^7 + 1680I_0^3\lambda^6 + 6845I_0^4\lambda^5 + 4446I_0^5\lambda^4 + 1260I_0^6\lambda^3 + 1840I_0^7\lambda^2 + 712I_0^8\lambda - 16I_0^9.$$

Además,  $K_3$  es la primera raíz del siguiente polinomio de grado 3,

$$\mathbf{K}_3(\lambda) = 4I_0^2\lambda^3 + (-9I_0^2 - 8I_0S_0)\lambda^2 + (6I_0^2 + 10I_0S_0 + 6S_0^2)\lambda - I_0^2 - 2I_0S_0 - 2S_0^2.$$

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el Apéndice D (5.7).

**Teorema 5.1.2.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ ,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $0 < \gamma < 1$  y se satisfacen las hipótesis  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$ ,  $\mathbf{H}_5 - \mathbf{H}_9$  entonces el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.*

## 5.2. Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad

Para determinar la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad, usaremos las matrices de siguiente generación del teorema de van den Driessche [ZV].

**Teorema 5.2.1.** *Si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$  entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad es globalmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Para calcular las matrices de siguiente generación asociadas al sistema (5.1), notemos que los vectores  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{V}$  de infección y de transmisión, respectivamente son

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_2 + \frac{(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)(\alpha \gamma S_2 I_2)}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2} \\ \frac{\theta_e(1 - \theta_s)(\alpha \gamma S_2 I_2)}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_1 + \frac{(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)(\alpha \gamma S_1 I_1)}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1} \\ \frac{\theta_e(1 - \theta_s)(\alpha \gamma S_1 I_1)}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)I_2 \\ Q_1(e + f) - \theta_s\alpha I_1 - \alpha\theta_e(1 - \theta_s)I_2 \\ I_2(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)I_1 \\ Q_2(e + f) - \theta_s\alpha I_2 - \alpha\theta_e(1 - \theta_s)I_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que las matrices de siguiente generación son

$$F = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\gamma(1-\theta_e)(1-\theta_s) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\theta_e(1-\theta_s) & 0 \\ \alpha\gamma(1-\theta_e)(1-\theta_s) & 0 & \beta & 0 \\ \alpha\gamma\theta_e(1-\theta_s) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$V = \begin{pmatrix} \alpha + c + d & 0 & \alpha(1-\theta_e)(-(1-\theta_s)) & 0 \\ \alpha(-\theta_s) & e + f & \alpha(-\theta_e)(1-\theta_s) & 0 \\ \alpha(1-\theta_e)(-(1-\theta_s)) & 0 & \alpha + c + d & 0 \\ \alpha(-\theta_e)(1-\theta_s) & 0 & \alpha(-\theta_s) & e + f \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned} g(I_1, Q_1, I_2, Q_2) &= \begin{pmatrix} -\alpha + \beta - c - d & 0 & \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1) & 0 \\ \alpha\theta_s & -e - f & -\alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) & 0 \\ \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1) & 0 & -\alpha + \beta - c - d & 0 \\ -\alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) & 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ I_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_2 + \frac{(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)(\alpha\gamma S_2 I_2)}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2} \\ \frac{\theta_e(1 - \theta_s)(\alpha\gamma S_2 I_2)}{S_2 + (1 - \theta_s)I_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + (1 - \theta_e)(1 - \theta_s)\alpha I_1 + \frac{(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)(\alpha\gamma S_1 I_1)}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1} \\ \frac{\theta_e(1 - \theta_s)(\alpha\gamma S_1 I_1)}{S_1 + (1 - \theta_s)I_1} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)I_2 \\ Q_1(e + f) - \theta_s\alpha I_1 - \alpha\theta_e(1 - \theta_s)I_2 \\ I_2(\alpha + c + d) - \alpha(1 - \theta_e)(1 - \theta_s)I_1 \\ Q_2(e + f) - \theta_s\alpha I_2 - \alpha\theta_e(1 - \theta_s)I_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_2 - I_1(\alpha - \beta + c + d) \\ -(Q_1(e + f)) + \alpha\theta_s I_1 - \alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1)I_2 \\ \alpha(\gamma + 1)(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_1 - I_2(\alpha - \beta + c + d) \\ -(Q_2(e + f)) - \alpha(\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1)I_1 + \alpha\theta_s I_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} I_1(\alpha + c + d) - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)S_2 I_2}{S_2 - \theta_s I_2 + I_2} - \alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_2 \\ eQ_1 + fQ_1 + \alpha\theta_e(\theta_s - 1)I_2 \left( \frac{\gamma S_2}{S_2 - \theta_s I_2 + I_2} + 1 \right) - \alpha\theta_s I_1 \\ I_2(\alpha + c + d) - \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - 2\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_1 \\ eQ_2 + fQ_2 + \alpha\theta_e(\theta_s - 1)I_1 \left( \frac{\gamma S_1}{S_1 - \theta_s I_1 + I_1} + 1 \right) - \alpha\theta_s I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta S_2 I_1^2 - (\theta_s - 1)I_2(\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)S_1 I_2 + \beta I_1^2 + \alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_1 I_2)}{(S_1 + I_1)(S_2 - \theta_s I_2 + I_2)} \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_2^2}{S_2 - \theta_s I_2 + I_2} \\ \frac{\beta I_2^2}{S_2 + I_2} - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)I_1(S_1 - \gamma I_1 + I_1)}{S_1 + I_1} \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_1^2}{S_1 - \theta_s I_1 + I_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+c+d}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & -\frac{\alpha(1-\theta_e)(\theta_s-1)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \\ \frac{\alpha(\alpha(\theta_e-1)\theta_e(\theta_s-1)^2 - \theta_s(\alpha+c+d))}{(e+f)((\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2)} & \frac{1}{e+f} & -\frac{\alpha(\theta_s-1)(\theta_e(\alpha+c+d) - \alpha(\theta_e-1)\theta_s)}{(e+f)((\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2)} & 0 \\ -\frac{\alpha(1-\theta_e)(\theta_s-1)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & \frac{\alpha+c+d}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha(\theta_s-1)(\theta_e(\alpha+c+d) - \alpha(\theta_e-1)\theta_s)}{(e+f)((\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2)} & 0 & -\frac{\alpha(\alpha(\theta_e-1)\theta_e(\theta_s-1)^2 - \theta_s(\alpha+c+d))}{(e+f)((\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2)} & \frac{1}{e+f} \end{pmatrix}$$

y

$$V^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2\gamma(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2 + \beta(\alpha+c+d)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & -\frac{\alpha(1-\theta_e)(\theta_s-1)(\beta + \gamma(\alpha+c+d))}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha^2\gamma(1-\theta_e)\theta_e(1-\theta_s)(\theta_s-1)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & \frac{\alpha\gamma\theta_e(1-\theta_s)(\alpha+c+d)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha(1-\theta_e)(\theta_s-1)(\beta + \gamma(\alpha+c+d))}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & \frac{\alpha^2\gamma(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2 + \beta(\alpha+c+d)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(1-\theta_s)(\alpha+c+d)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 & -\frac{\alpha^2\gamma(1-\theta_e)\theta_e(1-\theta_s)(\theta_s-1)}{(\alpha+c+d)^2 - \alpha^2(\theta_e-1)^2(\theta_s-1)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando el radio espectral de la matriz  $FV^{-1}$  tenemos que

$$\rho(FV^{-1}) = \frac{\alpha\gamma(\theta_e-1)(\theta_s-1) + \beta}{\alpha(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s) + c + d} = \mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s}.$$

Notemos que  $g(I_1, Q_1, I_2, Q_2) \geq 0$ ,  $F \geq 0$ ,  $V^{-1} \geq 0$  y además,  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s}$  es menor o igual a 1. Definimos la función de Lyapunov como

$$Q(I_1, Q_1, I_2, Q_2) = \mathbf{w}^T V^{-1} \mathbf{x} = \frac{I_1 + I_2}{\alpha(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s) + c + d},$$

donde  $\mathbf{w}^T = (1, 0, 1, 0)$  es el vector propio izquierdo de la matriz  $V^{-1}F$  correspondiente al valor propio  $\rho(FV^{-1}) = \mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s}$ .

Derivando la función de Lyapunov,

$$\begin{aligned} \dot{Q}(I_1, Q_1, I_2, Q_2) &= \frac{\partial Q}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial Q}{\partial I_2} \dot{I}_2 + \frac{\partial Q}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 \\ &= \frac{-I_1(\alpha+c+d) - I_2(\alpha+c+d) + \frac{\gamma M_1 S_1 I_1}{S_1 - \theta_s I_1 + I_1} + \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \frac{\gamma M_1 S_2 I_2}{S_2 - \theta_s I_2 + I_2} + \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} + M_1 I_1 + M_1 I_2}{M_1 + \theta_e + \theta_s} + c + d, \end{aligned}$$

donde  $M_1 = \alpha(\theta_e-1)(\theta_s-1)$ . Usando el software Mathematica se verifica que la derivada de la función de Liapunov es negativa si  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$ . Además, la derivada de  $Q$  es 0 si y solo si  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$ . Para analizar lo que ocurre en el espacio  $S_1, Q_1, S_2, Q_2$  notemos que cuando  $I_1 = I_2 = 0$ ,  $\dot{Q}_1 < 0$  y  $\dot{Q}_2 < 0$ , por lo que para tener la estabilidad global de  $P_1$  basta con analizar lo que ocurre en el plano  $S_1, S_2$ . En este plano, el sistema se ve como

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= a - bS_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2, \\ \dot{S}_2 &= a - bS_2 + \alpha S_1 - \alpha S_2, \end{aligned}$$

el cual tiene como punto de equilibrio  $(a/b, a/b)$ . Éste es globalmente asintóticamente estable en el plano y por el teorema de Lyapunov-Lasalle, concluimos que  $P_1$  es globalmente asintóticamente estable.  $\square$

### 5.3. Simulaciones numéricas

En el siguiente ejemplo vamos a tomar valores de los parámetros para el sistema (5.1), de tal manera que el número reproductivo básico  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$  y mostraremos las correspondientes series de tiempo.

**Ejemplo 5.3.1.** Dando valores a los parámetros,  $a = d = \gamma = c = e = f = 1$ , y  $b = \alpha = \theta_e = \theta_s = 1/2$ ,  $\beta = 7/4$ , tenemos que el sistema (5.1) se simplifica como

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= 6Q_1 + S_1 \left( -\frac{7I_1}{4(S_1+I_1)} - 1 \right) + \frac{S_2^2}{2S_2+I_2} + I_1 + 1, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{1}{8} \left( I_1 \left( \frac{14S_1}{S_1+I_1} - 20 \right) + \frac{2S_2I_2}{2S_2+I_2} + I_2 \right), \\
 \dot{Q}_1 &= \frac{1}{8} \left( -16Q_1 + \frac{2S_2I_2}{2S_2+I_2} + 2I_1 + I_2 \right), \\
 \dot{S}_2 &= Q_2 + \frac{S_1^2}{2S_1+I_1} + S_2 \left( -\frac{7I_2}{4(S_2+I_2)} - 1 \right) + I_2 + 1, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{1}{8} \left( \frac{2S_1I_1}{2S_1+I_1} + 2I_2 \left( \frac{7S_2}{S_2+I_2} - 10 \right) + I_1 \right), \\
 \dot{Q}_2 &= \frac{1}{8} \left( -16Q_2 + \frac{2S_1I_1}{2S_1+I_1} + I_1 + 2I_2 \right).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

En este caso  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$ , entonces el único punto de equilibrio del sistema (5.2) con coordenadas no negativas es  $P_1 = (2, 0, 0, 2, 0, 0)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{4S_1^2+8S_1I_1+11I_1^2}{4(S_1+I_1)^2} & 1 - \frac{7S_1^2}{4(S_1+I_1)^2} & 1 & \frac{2S_2(S_2+I_2)}{(2S_2+I_2)^2} & -\frac{S_2^2}{(2S_2+I_2)^2} & 0 \\ \frac{7I_1^2}{4(S_1+I_1)^2} & \frac{7S_1^2}{4(S_1+I_1)^2} - \frac{5}{2} & 0 & \frac{I_2^2}{4(2S_2+I_2)^2} & \frac{S_2^2}{2(2S_2+I_2)^2} + \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -2 & \frac{I_2^2}{4(2S_2+I_2)^2} & \frac{S_2^2}{2(2S_2+I_2)^2} + \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{2S_1(S_1+I_1)}{(2S_1+I_1)^2} & -\frac{S_1^2}{(2S_1+I_1)^2} & 0 & -\frac{4S_2^2+8S_2I_2+11I_2^2}{4(S_2+I_2)^2} & 1 - \frac{7S_2^2}{4(S_2+I_2)^2} & 1 \\ \frac{I_1^2}{4(2S_1+I_1)^2} & \frac{S_1^2}{2(2S_1+I_1)^2} + \frac{1}{8} & 0 & \frac{7I_2^2}{4(S_2+I_2)^2} & \frac{7S_2^2}{4(S_2+I_2)^2} - \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{I_1^2}{4(2S_1+I_1)^2} & \frac{S_1^2}{2(2S_1+I_1)^2} + \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -2 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3/2$ ,  $\lambda_{3,4} = -2$  y  $\lambda_{5,6} = -1/2$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  es globalmente asintóticamente estable. En la figura 5.1 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2, Q_1, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$  y en la figura 5.2 mostramos una proyección de la solución al sistema (5.2) con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

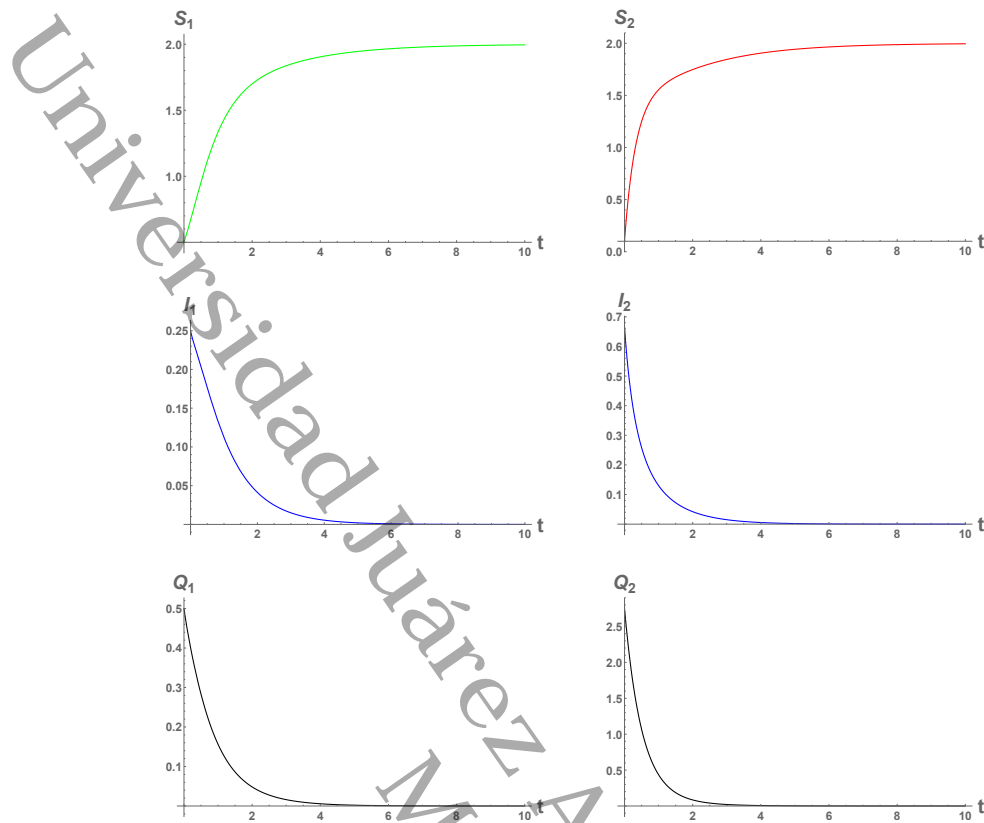


Figura 5.1: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$ .

En el siguiente ejemplo vamos a tomar valores de los parámetros para el sistema (5.1), de tal manera que  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y se satisfagan las hipótesis dadas anteriormente y en consecuencia se presente un equilibrio endémico localmente asintóticamente estable.

**Ejemplo 5.3.2.** Dando valores a los parámetros,  $a = 24269080453/72546648064$ ,  $c = 495663513/2267082752$ ,  $e = f = \beta = b = 1$ ,  $\alpha = 3/2$ ,  $d = 7/32$ ,  $\gamma = 1/8$ ,  $\theta_e = 1/4$  y  $\theta_s = 7/64$ , tenemos que el sistema (5.1) se simplifica como

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= Q_1 + \frac{S_1^2}{S_1 + I_1} - \frac{7S_1}{2} + \frac{3}{16}S_2 \left( \frac{64S_2}{64S_2 + 57I_2} + 7 \right) + \frac{7I_1}{32} + \frac{24269080453}{72546648064}, \\
 \dot{I}_1 &= I_1 \left( \frac{S_1}{S_1 + I_1} - \frac{4392211993}{2267082752} \right) + \frac{513}{512}I_2 \left( \frac{8S_2}{64S_2 + 57I_2} + 1 \right), \\
 \dot{Q}_1 &= \frac{3 \left( 57I_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + \frac{57I_2}{64}} + 8 \right) + 224I_1 \right)}{4096} - 2Q_1, \\
 \dot{S}_2 &= Q_2 + \frac{3}{16}S_1 \left( \frac{64S_1}{64S_1 + 57I_1} + 7 \right) + \frac{S_2^2}{S_2 + I_2} - \frac{7S_2}{2} + \frac{7I_2}{32} + \frac{24269080453}{72546648064}, \\
 \dot{I}_2 &= \frac{513}{512}I_1 \left( \frac{8S_1}{64S_1 + 57I_1} + 1 \right) + I_2 \left( \frac{S_2}{S_2 + I_2} - \frac{4392211993}{2267082752} \right), \\
 \dot{Q}_2 &= \frac{3 \left( 57I_1 \left( \frac{S_1}{S_1 + \frac{57I_1}{64}} + 8 \right) + 224I_2 \right)}{4096} - 2Q_2.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

En este caso  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ , entonces los únicos puntos de equilibrio del sistema (5.3) con coordenadas no negativas son  $P_1 = (24269080453/72546648064, 0, 0, 24269080453/72546648064, 0, 0)$

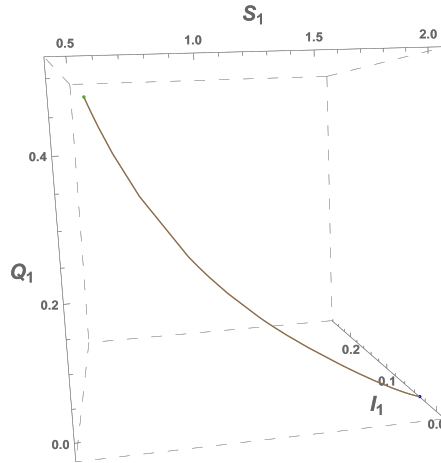


Figura 5.2: Proyección de la solución del sistema (5.2) con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

y  $P_2 = (623/2048, 1/16, 1610013/96600064, 623/2048, 1/16, 1610013/96600064)$ . La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{S_1(S_1+2I_1)}{(S_1+I_1)^2} - \frac{7}{2} & \frac{7}{32} - \frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} & 1 & \frac{24S_2(32S_2+57I_2)}{(64S_2+57I_2)^2} + \frac{21}{16} & -\frac{684S_2^2}{(64S_2+57I_2)^2} & 0 \\ \frac{I_1^2}{(S_1+I_1)^2} & \frac{S_1^2}{(S_1+I_1)^2} - \frac{4392211993}{2267082752} & 0 & \frac{29241I_2^2}{64(64S_2+57I_2)^2} & \frac{513S_2^2}{(64S_2+57I_2)^2} + \frac{513}{512} & 0 \\ 0 & \frac{21}{128} - \frac{684S_1^2}{(64S_1+57I_1)^2} & -2 & \frac{9747I_2^2}{64(64S_2+57I_2)^2} & \frac{171S_2^2}{(64S_2+57I_2)^2} + \frac{171}{512} & 0 \\ \frac{24S_1(32S_1+57I_1)}{(64S_1+57I_1)^2} + \frac{21}{16} & -\frac{513S_1^2}{(64S_1+57I_1)^2} & 0 & \frac{S_2(S_2+2I_2)}{(S_2+I_2)^2} - \frac{7}{2} & \frac{7}{32} - \frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} & 1 \\ \frac{29241I_1^2}{64(64S_1+57I_1)^2} & \frac{513S_1^2}{(64S_1+57I_1)^2} + \frac{513}{512} & 0 & \frac{I_2^2}{(S_2+I_2)^2} & \frac{S_2^2}{(S_2+I_2)^2} - \frac{4392211993}{2267082752} & 0 \\ \frac{9747I_1^2}{64(64S_1+57I_1)^2} & \frac{171S_1^2}{(64S_1+57I_1)^2} + \frac{171}{512} & 0 & 0 & \frac{21}{128} & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_1$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{25}{32} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{171}{1024} & 0 \\ 0 & -\frac{2125129241}{2267082752} & 0 & 0 & \frac{4617}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{21}{128} & -2 & 0 & \frac{1539}{4096} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{171}{1024} & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{25}{32} & 1 \\ 0 & \frac{4617}{4096} & 0 & 0 & -\frac{2125129241}{2267082752} & 0 \\ 0 & \frac{1539}{4096} & 0 & 0 & \frac{21}{128} & -2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}(P_1)$  son  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = -146268085/70846336$ ,  $\lambda_{3,4} = -2$ ,  $\lambda_5 = -1$  y  $\lambda_6 = 215160119/1133541376$  por lo que el punto de equilibrio  $P_1$  es inestable. Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_2$  tenemos que

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2852773}{1128002} & -\frac{8472121}{18048032} & 1 & \frac{3249267}{2172676} & -\frac{66370059}{556205056} & 0 \\ \frac{16384}{564001} & -\frac{2126886011735}{1702579146752} & 0 & \frac{29241}{8690704} & \frac{2428275753}{2224820224} & 0 \\ 0 & \frac{21}{128} & -2 & \frac{9747}{8690704} & \frac{809425251}{2224820224} & 0 \\ \frac{3249267}{2172676} & -\frac{66370059}{556205056} & 0 & -\frac{2852773}{1128002} & -\frac{8472121}{18048032} & 1 \\ \frac{29241}{8690704} & \frac{2428275753}{2224820224} & 0 & \frac{16384}{564001} & -\frac{2126886011735}{1702579146752} & 0 \\ \frac{9747}{8690704} & \frac{809425251}{2224820224} & 0 & 0 & \frac{21}{128} & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $J(P_2)$  son  $\lambda_1 = -4.02017$ ,  $\lambda_2 = -2.33696$ ,  $\lambda_3 = -2.0081$ ,  $\lambda_4 = -1.99152$ ,  $\lambda_5 = -1.03074$  y  $\lambda_6 = -0.169039$  por lo que el punto de equilibrio  $P_2$  es localmente asintóticamente estable. En la figura 5.3 mostramos las series de tiempo de las poblaciones  $S_1, S_2, I_1, I_2, Q_1, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$  y en la figura 5.4 mostramos dos proyecciones de la solución al sistema (5.3) con diferentes condiciones iniciales en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

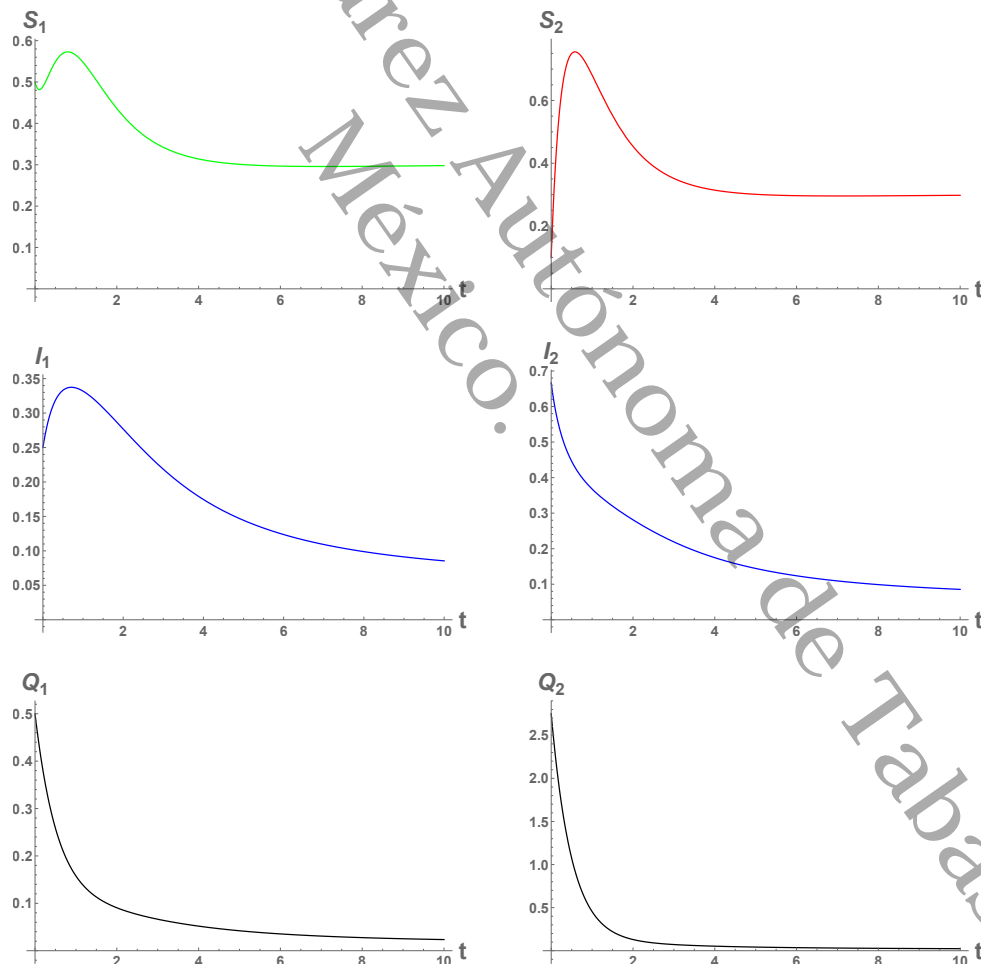
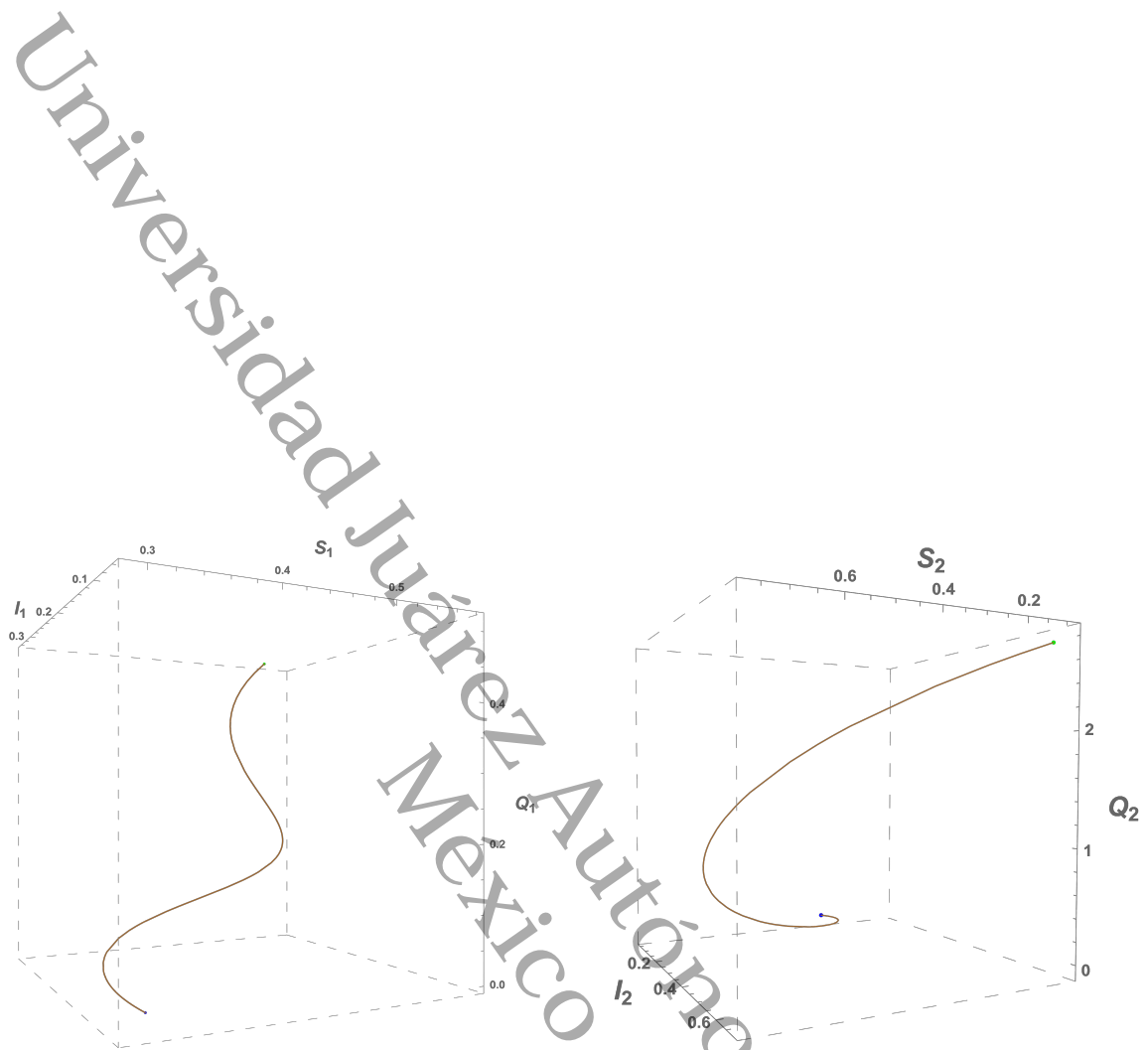


Figura 5.3: Series de tiempo de las poblaciones  $S_1, I_1, Q_1$  y  $S_2, I_2, Q_2$  con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2, 1/10, 2/3, 11/4)$ .





(a) Proyección de la solución del sistema (5.3) con condición inicial  $(1/2, 1/4, 1/2)$  en el espacio  $S_2 = I_2 = Q_2 = 0$ .

(b) Proyección de la solución del sistema (5.3) con condición inicial  $(1/10, 2/3, 11/4)$  en el espacio  $S_1 = I_1 = Q_1 = 0$ .

Figura 5.4:

# Resultados

Los resultados analíticos mostraron que el número reproductivo básico  $\mathfrak{R}_{0*}$  debe ser menor que uno, para que el equilibrio libre de enfermedad, de todos los modelos analizados en este trabajo, sea estable. Podemos observar en las primeras dos filas de la tabla 5.1 que  $\mathfrak{R}_0 \leq \mathfrak{R}_{0\gamma}$ , por lo que el hecho de que haya migración ( $\alpha > 0$ ), implica un incremento en  $\mathfrak{R}_0$  y en consecuencia puede ser mayor que uno, lo que se traduce en la pérdida de la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad. Por ejemplo, cuando  $c = 0.79$ ,  $d = 0.88$ ,  $\beta = 1.63$  y  $\alpha = 0$ , tenemos estabilidad en el equilibrio libre de enfermedad en el sistema (2.2) y en consecuencia la enfermedad desaparece, pero si consideramos migración con una tasa  $\alpha = 0.414$ , entonces  $\mathfrak{R}_{0\gamma} = 1.1$  y el equilibrio libre de enfermedad del sistema con migración (3.8) pierde su estabilidad. Por otro lado, si incorporamos el parámetro de detección de individuos infectados al iniciar un viaje entre las dos poblaciones, es decir,  $\theta > 0$  esto contribuye a recuperar la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad. Por ejemplo, basta con tomar  $\theta = 0.303$ , para que  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}$  sea menor que uno y tener estabilidad en el equilibrio libre de enfermedad del sistema con migración y control de individuos infectados al inicio de un viaje (4.2). Sin embargo, si la migración se incrementa a una tasa  $\alpha = 0.893$  se vuelve a perder la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad del sistema (5.1) ya que  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ . Para recuperar su estabilidad mostramos que es suficiente incorporar medidas de control de infectados al momento de salir del viaje. Por ejemplo, si  $\theta_s = 0.001$  entonces  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$  y en consecuencia se erradica la enfermedad.

Estos resultados mostraron que las tasas de detección de infectados, al momento de iniciar o concluir un viaje, son importantes para que la epidemia desaparezca, independientemente de la tasa de migración.

Modelo epidemiológico	Número reproductivo básico	Estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad
Modelo sin migración (2.2).	$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{c+d}$	$\mathfrak{R}_0 < 1$
Todos los individuos viajan entre las dos ciudades (3.8).	$\mathfrak{R}_{0\gamma} = \frac{\beta + \alpha\gamma}{c+d}$	$\mathfrak{R}_{0\gamma} < 1$
Modelo sin detección de la enfermedad a la salida (4.2).	$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} = \frac{\beta + (1-\theta)\alpha\gamma}{c+d+\theta\alpha}$	$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} < 1$ y $\gamma < \frac{\alpha\theta - \beta + c + d}{\alpha - \alpha\theta}$
Modelo con detección a la entrada y a la salida (5.1).	$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} = \frac{\beta + (1-\theta_e)(1-\theta_s)\alpha\gamma}{c+d+\theta_e\alpha + (1-\theta_e)\theta_s\alpha}$	$\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} < 1$

Tabla 5.1: Resumen de resultados.

# Conclusión

A lo largo de este trabajo, consideramos un modelo SIS y sus variantes para las cuales demostramos condiciones que implican la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad. Además, establecimos condiciones para la estabilidad del equilibrio endémico y mostramos que existe bifurcación transcítica en los siguientes tres casos: cuando no hay migración entre las dos ciudades, cuando los infectados de la ciudad 1 no pueden viajar a la ciudad 2 y cuando hay migración tanto de susceptibles como de infectados en ambas ciudades.

Analizamos de igual manera un modelo SIQS que considera la posibilidad de infectarse durante el viaje entre las dos ciudades, por lo que se establecen controles a la entrada y a la salida de un viaje para detectar a los individuos infectados. En el caso cuando solo hay control a la entrada del viaje mostramos la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y condiciones para la estabilidad del equilibrio endémico. Además, mostramos simulaciones numéricas para ejemplificar los resultados analíticos obtenidos. Por último, en el caso general mostramos condiciones para que el equilibrio libre de enfermedad sea globalmente asintóticamente estable. Así mismo, encontramos condiciones para la existencia de un equilibrio endémico y mostramos cómo su estabilidad depende de la probabilidad de éxito en la detección de infectados a la salida del viaje.

Los resultados mostraron la relación que existe entre la tasa de migración y las tasas de detección de individuos infectados a la entrada o a la salida de un viaje. Estos sugieren que el uso de dispositivos de detección de infectados a la entrada o a la salida de un viaje contribuyen fuertemente a erradicar una epidemia, o a controlarla en el caso de que esta se vuelva endémica.

# Bibliografía

- [B] Brauer, F. (2005). Some simple epidemic models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 3(1), pp. 1-15.
- [BCC] Brauer, F., Castillo-Chavez, C., y Feng, Z. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag.
- [BDL] Blé, G., Dela-Rosa, M. A., y Loreto-Hernández, I. (2019). Stability analysis of a tritrophic model with stage structure in the prey population. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 12 (2019), 765–790.
- [Bv] Brauer, F., y van den Driessche, P. (2001). Models for translation of disease with immigration of infectives. *Mathematical Bioscience*, 171(2), 143-154.
- [CR] Castañeda Gullot, C., y Ramos Serpa G. (2020). Principales pandemias en la historia de la humanidad. *Revista Cubana de Pediatría*, v. 92, jun. 2020. ISSN 1561-3119. <http://www.revpediatria.sld.cu/index.php/ped/article/view/1183/714>.
- [CTS] Cui, J., Takeuchi, Y., y Saito, Y. (2005). Spreading disease with transport-related infection. *Journal of Theoretical Biology* 239, pp. 376–390.
- [H] Hethcote, H.W. (1976). Qualitative analyses of communicable disease models. *Mathematical Biosciences*, 28 (3-4), pp. 335-356.
- [HS] Hirsh, M.W., y Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York.
- [LA] LaSalle, J. P. (1964). Recent advances in Liapunov stability theory. *SIAM review*, Vol. 6, No. 1.
- [LT] Liu, X., y Takeuchi, Y. (2006). Spread of disease with transport-related infection and entry screening. *Journal of Theoretical Biology*, 242(2), 517-528.
- [LXZY] Li, J., Xiao, Y., Zhang, F., y Yang, Y. (2012). An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(5), 2006-2016.

- [MEK] Muroya, Y., Enatsu, Y., y Kuniya, T. (2013). Global stability of extended multi-group sir epidemic models with patches through migration and cross patch infection. *Acta Mathematica Scientia*, 33(2), 341-361.
- [P] Perko, L. (2006). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York.
- [Pi] Piret, J., y Boivin, G. (2021). Pandemics throughout history. *Frontiers in microbiology*, 11, 631736.
- [Y] Yang, X. (2002). Generalized form of Hurwitz-Routh criterion and Hopf bifurcation of higher order. *Applied Mathematics Letters*, 15 (2002), 615-621.
- [WZ] Wang, W., y Zhao, X. Q. (2004). An epidemic model in a patchy environment. *Mathematical biosciences*, 190(1), 97-112.
- [ZV] Shuai, Z., y van den Driessche, P. (2013). Global stability of infectious disease models using Lyapunov functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(4), 1513-1532.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

# Apéndice A

## Prueba de la proposición 3.1.2.

*Demostración.* Supongamos que existe un punto de equilibrio  $P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$  y resolvemos el campo vectorial igual a cero en términos de los siguientes parámetros (para facilitar las expresiones)

$$\alpha = \frac{I_{10}(c+d)(S_{20}+I_{20})(S_{20}I_{10}-S_{10}I_{20})}{\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10})+(S_{20}+I_{20})(S_{10}I_{20}(S_{20}+I_{10})+S_{10}S_{20}I_{10}+S_{20}I_{10}I_{20})}$$

$$\beta = \frac{(c+d)(S_{10}+I_{10})(S_{20}+I_{20})((S_{20}+I_{20})(I_{10}+I_{20})+\gamma S_{20}I_{20})}{\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10})+(S_{20}+I_{20})(S_{10}I_{20}(S_{20}+I_{10})+S_{10}S_{20}I_{10}+S_{20}I_{10}I_{20})}$$

$$a = \frac{(S_{10}I_{20}-S_{20}I_{10})((S_{20}+I_{20})M_1+c\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10}))}{(S_{10}-S_{20})(\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10})+(S_{20}+I_{20})(S_{10}I_{20}(S_{20}+I_{10})+S_{10}S_{20}I_{10}+S_{20}I_{10}I_{20}))}$$

$$b = \frac{c(S_{20}+I_{20})M_2+c\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10})(I_{20}-I_{10})+2dI_{10}(S_{20}+I_{20})(S_{10}-S_{20}-I_{20})M_3}{(S_{10}-S_{20})(\gamma S_{20}^2 I_{20}(S_{10}+I_{10})+(S_{20}+I_{20})(S_{10}I_{20}(S_{20}+I_{10})+S_{10}S_{20}I_{10}+S_{20}I_{10}I_{20}))}$$

donde  $M_1 = cI_{10}(S_{10}^2 + S_{10}S_{20} - S_{20}^2) + cS_{10}S_{20}I_{20} + dI_{10}(S_{10} + S_{20})(S_{10} - S_{20} - I_{20})$ ,  
 $M_2 = 2S_{10}^2 I_{10}I_{20} - S_{10}(I_{10} + I_{20})(3S_{20}I_{10} - S_{20}I_{20} + I_{10}I_{20}) + S_{20}I_{10}(2S_{20}I_{10} + I_{20}(I_{10} + I_{20}))$   
 y  $M_3 = S_{10}I_{20} - S_{20}I_{10}$ .

Para que los parámetros sean positivos y se tengan expresiones cortas de los parámetros tomamos  $k_1 = 2S_{10}I_{20}$ ,  $S_{20} = \frac{k_1 + S_{10}I_{20}}{I_{10}}$ ,  $I_{10} = 2I_{20}$ ,  $c = k_2 + \frac{1656(d+k_2)}{23+567\gamma}$  y  $S_{10} = 7I_{20}$  donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , de modo que sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, tenemos que

$$\alpha = \frac{184(c+d)}{1679+567\gamma},$$

$$\beta = \frac{621(c+d)(23+7\gamma)}{7(1679+567\gamma)},$$

$$a = 4I_{20} \left( \frac{621(d+k_2)}{23+567\gamma} \right),$$

$$b = \frac{2k_2}{7}.$$

Ahora, sustituyendo los parámetros anteriores en el sistema, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= -\frac{184S_1(d+k_2)}{567\gamma+23} - \frac{621(7\gamma+23)S_1I_1(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)} + \frac{184S_2(d+k_2)}{567\gamma+23} - \frac{184\gamma S_2I_2(d+k_2)}{(567\gamma+23)(S_2+I_2)} \\ &\quad + 4I_{20} \left( \frac{621(d+k_2)}{567\gamma+23} + k_2 \right) + dI_1 - \frac{2}{7}k_2S_1, \\ \dot{I}_1 &= \frac{(d+k_2)(7\gamma(2S_1(27S_2I_1+92S_2I_2+27I_1I_2)+I_1(184S_2I_2-567I_1I_2-567S_2I_1))+M_4)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)(S_2+I_2)}, \\ \dot{S}_2 &= \frac{184S_1(d+k_2)}{567\gamma+23} - \frac{184S_2(d+k_2)}{567\gamma+23} - \frac{621(7\gamma+23)S_2I_2(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)} + 4I_{20} \left( \frac{621(d+k_2)}{567\gamma+23} + k_2 \right) \\ &\quad + dI_2 - \frac{2k_2S_2}{7}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{27(7\gamma+23)I_2(d+k_2)(2S_2-21I_2)}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)}\end{aligned}$$

donde  $M_4 = 23(S_2 + I_2)(56I_2(S_1 + I_1) + I_1(110S_1 - 511I_1))$ . Calculando la matriz Jacobiana  $J(S_1, I_1, S_2, I_2) =$

$$\begin{pmatrix} -M_5 & M_6 & \frac{184(d+k_2)((S_2+I_2)^2 - \gamma I_2^2)}{(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} & -\frac{184\gamma S_2^2(d+k_2)}{(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} \\ \frac{621(7\gamma+23)I_1^2(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)^2} & M_7 & \frac{184\gamma I_2^2(d+k_2)}{(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} & \frac{184(d+k_2)(\gamma S_2^2 + (S_2+I_2)^2)}{(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} \\ \frac{184(d+k_2)}{567\gamma+23} & 0 & M_8 & M_9 \\ 0 & 0 & \frac{621(7\gamma+23)I_2^2(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} & \frac{27(7\gamma+23)(d+k_2)M_{10}}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}M_5 &= \frac{621(7\gamma+23)I_1(d+k_2)(S_1+I_1) - 621(7\gamma+23)S_1I_1(d+k_2) + 1288(d+k_2)(S_1+I_1)^2}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)^2} \\ &\quad + \frac{2(567\gamma+23)k_2(S_1+I_1)^2}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)^2}, \\ M_6 &= -\frac{621(7\gamma+23)S_1(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)} + \frac{621(7\gamma+23)S_1I_1(d+k_2)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)^2} + d, \\ M_7 &= \frac{(d+k_2)((378\gamma+2530)S_1^2 - 14(567\gamma+1679)S_1I_1 - 7(567\gamma+1679)I_1^2)}{7(567\gamma+23)(S_1+I_1)^2}, \\ M_8 &= -\frac{621(7\gamma+23)I_2(d+k_2)(S_2+I_2) - 621(7\gamma+23)S_2I_2(d+k_2) + 1288(d+k_2)(S_2+I_2)^2}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2} \\ &\quad - \frac{2(567\gamma+23)k_2(S_2+I_2)^2}{7(567\gamma+23)(S_2+I_2)^2},\end{aligned}$$



$$M_9 = -\frac{621(7\gamma + 23)S_2(d + k_2)}{7(567\gamma + 23)(S_2 + I_2)} + \frac{621(7\gamma + 23)S_2I_2(d + k_2)}{7(567\gamma + 23)(S_2 + I_2)^2} + d,$$

$$M_{10} = 2S_2^2 - 42S_2I_2 - 21I_2^2.$$

Evaluable la matriz Jacobiana en el punto  $P_3$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -M_{11} & d - \frac{161M_{13}M_{14}}{1701\gamma + 69} & -\frac{8(4\gamma - 529)M_{13}}{23(567\gamma + 23)} & -\frac{3528\gamma M_{13}}{23(567\gamma + 23)} \\ \frac{92M_{13}M_{14}}{21(567\gamma + 23)} & \frac{2(287\gamma + 667)M_{13}}{1701\gamma + 69} & \frac{32\gamma M_{13}}{23(567\gamma + 23)} & \frac{8(441\gamma + 529)M_{13}}{23(567\gamma + 23)} \\ \frac{184M_{13}}{567\gamma + 23} & 0 & M_{12} & d - \frac{1701M_{13}M_{14}}{23(567\gamma + 23)} \\ 0 & 0 & \frac{108M_{13}M_{14}}{161(567\gamma + 23)} & -\frac{162M_{13}}{23(567\gamma + 23)} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } M_{11} = \frac{2(46(7\gamma + 65)d + 7(289\gamma + 437)k_2)}{21(567\gamma + 23)},$$

$$M_{12} = \frac{2}{483} \left( -\frac{48116(d + k_2)}{567\gamma + 23} - 2d - 71k_2 \right),$$

$$M_{13} = d + k_2,$$

$$M_{14} = 7\gamma + 23.$$

El polinomio característico es

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + F_1\lambda^3 + F_2\lambda^2 + F_3\lambda + F_4 \quad (5.4)$$

y sus coeficientes son:

$$F_1 = \frac{4}{189} \left( 23 \left( \frac{562(c + d)}{567\gamma + 1679} + c \right) + 23d + 27k_2 \right),$$

$$F_2 = \frac{4((27080487\gamma^2 + 245356594\gamma + 455868395)c^2 + 8c((4651668\gamma^2)d))}{3381(567\gamma + 1679)^2}$$

$$+ \frac{4(8c((48105351\gamma + 93355275)d + 2228(3969\gamma^2 + 24794\gamma + 38617)k_2))}{3381(567\gamma + 1679)^2}$$

$$+ \frac{4(23(440559\gamma^2 + 6064618\gamma + 12651035)d^2 + 17824(3969\gamma^2 + 24794\gamma + 38617)dk_2)}{3381(567\gamma + 1679)^2}$$

$$+ \frac{4(69(567\gamma + 1679)^2k_2^2)}{3381(567\gamma + 1679)^2},$$

$$F_3 = \frac{16(c + d)(7(\gamma(189\gamma(244377\gamma + 3542897) + 2737238027) + 3407794195)c^2)}{3381(567\gamma + 1679)^3}$$

$$+ \frac{16(c + d)(c((7\gamma(567\gamma(81459\gamma + 1407347) + 3460757675) + 30795297517)d))}{3381(567\gamma + 1679)^3}$$

$$+ \frac{16(c + d)(c(966(567\gamma + 1679)(\gamma(2583\gamma + 20968) + 36777)k_2))}{3381(567\gamma + 1679)^3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16(c+d)((567\gamma+1679)(7\gamma(183519\gamma+1813274)+23748397)dk_2)}{3381(567\gamma+1679)^3} \\
& + \frac{16(c+d)(4968(7\gamma+23)(25837\gamma+60743)d^2)}{3381(567\gamma+1679)^3}, \\
F_4 = & \frac{144(7\gamma+23)(c+d)^2(23(7\gamma(567\gamma+7814)+113689)c^2+6cM_{15})}{1127(567\gamma+1679)^3} \\
& + \frac{144(7\gamma+23)(c+d)^2((287\gamma+667)k_2(4048d+3(567\gamma+1679)k_2))}{1127(567\gamma+1679)^3}.
\end{aligned}$$

donde  $M_{15} = 184(623\gamma + 1564)d + 3(49\gamma(495\gamma + 4232) + 360249)k_2$ .

De modo que  $F_1, F_3$  y  $F_4$  se ven claramente que son positivos y usando Mathematica se prueba que  $F_2$  es positivo y que  $D_3 = F_1^2 F_4 - F_1 F_2 F_3 + F_3^2$  negativo, por el criterio de Routh-Hurwitz tenemos estabilidad local en el punto de equilibrio  $P_3$ .  $\square$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Apéndice B

## 5.4. Prueba de la proposición 3.2.2.

*Demostración.* En este primer caso seguimos la idea empleada en el artículo [CTS].

Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio  $P_2$  calculamos la matriz Jacobiana del sistema (3.8)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & d - \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \alpha - \frac{\alpha \gamma I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\frac{\alpha \gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{\beta I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{\alpha \gamma I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & \alpha + \frac{\alpha \gamma S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \alpha - \frac{\alpha \gamma I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\frac{\alpha \gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & -\alpha - b - \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & d - \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{\alpha \gamma I_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \alpha + \frac{\alpha \gamma S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} & \frac{\beta I_2^2}{(S_2 + I_2)^2} & -\alpha - c - d + \frac{\beta S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} \end{pmatrix}.$$

Evaluando  $\mathbf{J}$  en  $P_2$  tenemos que

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{(\alpha \gamma + \beta)^2(\alpha + b + \beta) + \beta c^2 - 2\beta c(\alpha \gamma + \beta - d) + \beta d^2 - 2\beta d(\alpha \gamma + \beta)}{(\alpha \gamma + \beta)^2} & d - \frac{\beta(c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} \\ \frac{\beta(-\alpha \gamma - \beta + c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} & \alpha + \frac{\beta(c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} - c - d \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\gamma(-(c + d)^2) - (\alpha \gamma + \beta)(\alpha \gamma^2 + \beta(\gamma - 1) - \gamma(\alpha + 2(c + d))))}{(\alpha \gamma + \beta)^2} & \frac{\alpha \gamma(c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} \\ \frac{\alpha \gamma(-\alpha \gamma - \beta + c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} & \alpha + \frac{\alpha \gamma(c + d)^2}{(\alpha \gamma + \beta)^2} \end{pmatrix}.$$

Calculando el polinomio característico, tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \det(\mathbf{J}(P_2) - \lambda I) \\
 &= \det \begin{pmatrix} A + B - \lambda I & B \\ A + B - \lambda I & A - \lambda I \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{pmatrix} \\
 &= \det(A + B - \lambda I) \det(A - B - \lambda I).
 \end{aligned}$$

Observemos que,

$$A + B = \begin{pmatrix} -(\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 - b & -\frac{(\beta + \alpha\gamma)}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} + d \\ (\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 & (c + d) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}} - 1\right) \end{pmatrix}$$

y

$$A - B = \begin{pmatrix} -(\beta - \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 - b - 2\alpha & -\frac{(\beta - \alpha\gamma)}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} + d \\ (\beta - \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 & \frac{(\beta - \alpha\gamma)}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} - (c + d + 2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Primero, consideremos la matriz  $A + B$  y observemos que la  $tr(A - B) < 0$  ya que  $\mathfrak{R}_{0\gamma} > 1$ , además,

$$(\beta + \alpha\gamma) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} - (c + d) = (c + d) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}} - 1\right) < 0. \quad (5.5)$$

Calculando el determinante de la matriz  $A + B$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 \det(A + B) &= \left[ b + (\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 \right] \left[ (c + d) - (\beta + \alpha\gamma) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} \right] \\
 &+ (\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 \left[ (\beta + \alpha\gamma) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} - d \right] \\
 &= c \left[ b + (\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 \right] + b \left[ d - (\beta + \alpha\gamma) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} \right] \\
 &> c \left[ b + (\beta + \alpha\gamma) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 \right] - bc \\
 &= c(\beta + \gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}}\right)^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Esto porque  $\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}} < 1$ , tenemos que  $-(c+d)\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} > -(c+d)$ , lo cual implica  $-(c+d)\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} + d > -c$ .

De donde obtenemos

$$b \left[ d - (c + d) \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right] > -bc.$$

Además,

$$(\beta + \alpha\gamma) \left( \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} \right) = (c + d) \frac{1}{\Re_{0\gamma}}.$$

Del determinante y la traza concluimos que la parte real de los valores propios de  $A + B$  es negativa.

Consideremos la matriz  $A - B$  y observemos la traza y el determinante respectivamente,

$$\text{tr}(A - B) = -\beta \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 + \left[ \gamma \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 - 4 \right] \alpha - b + \left[ (\beta - \gamma\alpha) \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d) \right].$$

Ya que  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $\Re_{0\gamma} > 1$  y por (5.5), tenemos

$$\text{tr}(A - B) < \left[ (\beta + \alpha\gamma) \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d) \right] < 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \det(A - B) &= - \left[ (\beta - \alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 + b + 2\alpha \right] \left[ (\beta - \alpha\gamma) \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d + 2\alpha) \right] \\ &\quad - (\beta - \gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 \left[ -(\beta - \gamma\alpha) \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} + d \right] \\ &= -(b + 2\alpha)(\beta - \alpha\gamma) \frac{1}{\Re_{0\gamma}^2} + (b + 2\alpha)(c + d + 2\alpha) \\ &\quad + (\beta - \alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 (c + 2\alpha) \\ &= -(b + 2\alpha) \left[ \frac{\beta - \alpha\gamma}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d) \right] + 2\alpha(b + 2\alpha) \\ &\quad + (\beta - \alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 (c + 2\alpha) \\ &= -(b + 2\alpha) \left[ \frac{\beta + \gamma\alpha - 2\alpha\gamma}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d) \right] + 2\alpha(b + 2\alpha) \\ &\quad + (\beta - \alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 (c + 2\alpha) \\ &= -(b + 2\alpha) \left[ \frac{\beta + \gamma\alpha}{\Re_{0\gamma}^2} - (c + d) \right] + 2\gamma\alpha \frac{b + 2\alpha}{\Re_{0\gamma}^2} \\ &\quad + 2\alpha(b + 2\alpha) + (\beta - \alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma}} \right)^2 (c + 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(b+2\alpha) \left[ \frac{\beta+\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} - (c+d) \right] + 2\alpha(b+2\alpha) \left[ \frac{\gamma}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} + 1 \right] \\
&+ (\beta-\alpha\gamma) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}} \right)^2 (c+2\alpha) \\
&= (c+d)(c+2\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma}} \right)^2 (2\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}_{0\gamma}) \\
&- (b+2\alpha) \left[ \frac{\beta+\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} - (c+d) \right] + 2\alpha(b+2\alpha) \left( \frac{\gamma}{\mathfrak{R}_{0\gamma}^2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Por lo que,  $\det(A-B) > 0$  siempre que  $\mathfrak{R}_{0\gamma} \leq 2\mathfrak{R}_0$ . En consecuencia, si se cumplen las hipótesis los valores propios de  $A-B$  tienen parte real negativa, por lo tanto,  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.  $\square$

## 5.5. Prueba de la proposición 3.2.3

*Demostración.* Supongamos que existe un punto de equilibrio  $P_3 = (S_{10}, I_{10}, S_{20}, I_{20})$ , resolvemos el campo vectorial igual a cero en términos de los siguientes parámetros (para facilitar las expresiones),

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{I_{10}I_{20}(c+d)(S_{10}+I_{10})(M_8)(S_{10}I_{20}-S_{20}I_{10})}{M_1(M_2+(S_{10}+I_{10})(M_8)(I_{10}-I_{20}))}, \\
\beta &= \frac{(c+d)(S_{10}+I_{10})(M_8)(M_3+(S_{10}+I_{10})(M_8)(I_{10}-I_{20})(I_{10}+I_{20}))}{M_1(M_2+(S_{10}+I_{10})(M_8)(I_{10}-I_{20}))}, \\
a &= -\frac{(S_{20}I_{10}-S_{10}I_{20})(c\gamma M_1 M_2 + c(S_{10}+I_{10})(M_8)(S_{10}I_{10}+S_{20}I_{20})(S_{20}I_{10}-S_{10}I_{20})-M_4)}{(S_{10}-S_{20})M_1(M_2+(S_{10}+I_{10})(M_8)(I_{10}-I_{20}))}, \\
b &= -\frac{cM_7+2dI_{10}I_{20}(S_{10}+I_{10})(M_8)(S_{10}-S_{20}+I_{10}-I_{20})(S_{10}I_{20}-S_{20}I_{10})}{(S_{10}-S_{20})M_1(M_2+(S_{10}+I_{10})(M_8)(I_{10}-I_{20}))},
\end{aligned}$$

donde  $M_1 = S_{10}I_{20}(S_{20}+I_{10}) + S_{10}S_{20}I_{10} + S_{20}I_{10}I_{20}$ ,  
 $M_2 = \gamma(S_{10}S_{20}(I_{10}-I_{20}) + S_{10}I_{10}I_{20} - S_{20}I_{10}I_{20})$ ,  
 $M_3 = \gamma(S_{10}S_{20}I_{10}^2 - S_{20}I_{20}^2(S_{10}+I_{10}) + S_{10}I_{10}^2I_{20})$ ,  
 $M_4 = dI_{10}I_{20}(S_{10}+S_{20})(S_{10}+I_{10})(M_8)(S_{10}-S_{20}+I_{10}-I_{20})$ ,  
 $M_5 = S_{20}^2(I_{10}+I_{20})(I_{10}^2 + \gamma(I_{10}-I_{20})^2 - 4I_{10}I_{20} + I_{20}^2)$   
 $+ S_{20}I_{20}(2(\gamma+1)I_{10}^3 - I_{10}^2(2\gamma I_{20} + I_{20}) - 4I_{10}I_{20}^2 + I_{20}^3)$   
 $+ I_{10}I_{20}^2((\gamma+1)I_{10}^2 - (\gamma-2)I_{10}I_{20} - I_{20}^2)$ ,  
 $M_6 = S_{20}^2(-4I_{10}^2I_{20} + I_{10}^3 - (2\gamma+1)I_{10}I_{20}^2 - 2(\gamma+1)I_{20}^3) + 2S_{20}^3I_{10}I_{20}$   
 $+ 2S_{20}I_{20}(I_{10}+I_{20})(I_{10}^2 - 3I_{10}I_{20} + I_{20}^2) + I_{10}I_{20}^2(I_{10}-I_{20})(I_{10}+I_{20})$ ,  
 $M_7 = S_{10}^2M_5 + 2S_{10}^3I_{10}I_{20}^2(M_8) + S_{10}I_{10}M_6 + S_{20}I_{10}^2I_{20}(2S_{20}^2I_{10})$   
 $+ S_{20}I_{10}^2I_{20}(S_{20}(-I_{10}^2 - (\gamma-2)I_{10}I_{20} + (\gamma+1)I_{20}^2) - I_{10}^2I_{20} + I_{20}^3)$ .

de modo que para que los parámetros sean positivos, basta con que  $k_1 = 2S_{20}I_{10}$ ,  $S_{10} =$

$\frac{k_1 + S_{20}I_{10}}{I_{20}}$ ,  $S_{20} = 4I_{20}$ ,  $k_2 = \frac{94}{100}$ ,  $I_{10} = k_2I_{20}$ ,  $c = 100d$  y  $\gamma = 250$  donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, tenemos las siguientes simplificaciones

$$\alpha = \frac{1234220d}{2970431}, \beta = \frac{161783921d}{11881724}, a = \frac{131100186678dI_{20}}{1351546105}, b = \frac{5615d}{270309221}.$$

Ahora, sustituyendo los parámetros anteriores en el sistema, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = & -\frac{161783921dS_1I_1}{11881724(S_1 + I_1)} - \frac{112319635dS_1}{270309221} - \frac{308555000dS_2I_2}{2970431(S_2 + I_2)} + \frac{1234220dS_2}{2970431} \\ & + dI_1 + \frac{131100186678dI_{20}}{1351546105}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{161783921dS_1I_1}{11881724(S_1 + I_1)} + \frac{308555000dS_2I_2}{2970431(S_2 + I_2)} - \frac{301247751dI_1}{2970431} + \frac{1234220dI_2}{2970431},$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 = & -\frac{308555000dS_1I_1}{2970431(S_1 + I_1)} + \frac{1234220dS_1}{2970431} - \frac{161783921dS_2I_2}{11881724(S_2 + I_2)} - \frac{112319635dS_2}{270309221}, \\ & + dI_2 + \frac{131100186678dI_{20}}{1351546105} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{308555000dS_1I_1}{2970431(S_1 + I_1)} + \frac{161783921dS_2I_2}{11881724(S_2 + I_2)} + \frac{1234220dI_1}{2970431} - \frac{301247751dI_2}{2970431}.$$

Calculando la matriz Jacobiana

$$J(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & d - \frac{161783921dS_1^2}{11881724(S_1 + I_1)^2} & A_{13} & -\frac{308555000dS_2^2}{2970431(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{161783921dI_1^2}{11881724(S_1 + I_1)^2} & \frac{101d \left( \frac{1601821S_1^2}{(S_1 + I_1)^2} - 11930604 \right)}{11881724} & \frac{308555000dI_2^2}{2970431(S_2 + I_2)^2} & \frac{1234220d(251S_2^2 + 2S_2I_2 + I_2^2)}{2970431(S_2 + I_2)^2} \\ A_{31} & -\frac{308555000dS_1^2}{2970431(S_1 + I_1)^2} & A_{33} & d - \frac{161783921dS_2^2}{11881724(S_2 + I_2)^2} \\ \frac{308555000dI_1^2}{2970431(S_1 + I_1)^2} & \frac{1234220d(251S_1^2 + 2S_1I_1 + I_1^2)}{2970431(S_1 + I_1)^2} & \frac{161783921dI_2^2}{11881724(S_2 + I_2)^2} & \frac{101d \left( \frac{1601821S_2^2}{(S_2 + I_2)^2} - 11930604 \right)}{11881724} \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{11} = -\frac{d(449278540S_1^2 + 898557080S_1I_1 + 15171615351I_1^2)}{1081236884(S_1 + I_1)^2},$$

$$A_{13} = \frac{1234220d(S_2^2 + 2S_2I_2 - 249I_2^2)}{2970431(S_2 + I_2)^2},$$

$$A_{31} = \frac{1234220d(S_1^2 + 2S_1I_1 - 249I_1^2)}{2970431(S_1 + I_1)^2}$$

$$A_{33} = -\frac{d(449278540S_2^2 + 898557080S_2I_2 + 15171615351I_2^2)}{1081236884(S_2 + I_2)^2}$$

Ahora evaluemos la matriz Jacobiana en el punto  $P_3$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{536392959d}{1081236884} & \frac{409401409d}{38615603} & \frac{11107980d}{2970431} & \frac{197475200d}{2970431} \\ \frac{12444917d}{154462412} & \frac{3468203751d}{38615603} & \frac{12342200d}{2970431} & \frac{198709420d}{2970431} \\ \frac{7690140d}{38615603} & \frac{3417840000d}{38615603} & \frac{25954300311d}{27030922100} & \frac{572874909d}{74260775} \\ \frac{23735000d}{38615603} & \frac{3433884860d}{38615603} & \frac{161783921d}{297043100} & \frac{6884058091d}{74260775} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + G_1\lambda^3 + G_2\lambda^2 + G_3\lambda + G_4 \quad (5.6)$$

y sus coeficientes son:

$$G_1 = \frac{497290389511d}{2703092210},$$

$$G_2 = \frac{17865282331384841503517d^2}{5845365996610147280},$$

$$G_3 = \frac{1376409149349927865602438079269d^3}{28215291589349599142001230},$$

$$G_4 = \frac{10861864770806863108859406796272d^4}{76463440207137413674823333},$$

$$\text{y } D_3 = -\frac{10953077263302798732948238190175152354615458102437457131674166183d^6}{44581750050432447894356834973902284259618020047224000}.$$

De donde obtenemos que todos los coeficientes son positivos y que  $D_3$  (mencionado en el ejemplo 1.1.3) es negativo. Por el criterio de Routh-Hurwitz tenemos estabilidad local en el punto de equilibrio  $P_3$ .  $\square$



# Apéndice C

## Prueba del teorema 4.1.1

*Demostración.* En este primer caso seguimos la idea empleada en el artículo [LT]. Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio endémico, evaluamos  $P_2$  en la matriz jacobiana del sistema (2)

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 - b - \alpha & -\frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} + d & f \\ \beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 & \frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -e - f \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 & \frac{\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} & 0 \\ (1 - \theta)\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 & (1 - \theta)\alpha + \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} & 0 \\ \theta\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 & \theta\alpha + \frac{\theta\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que,

$$A + B = \begin{pmatrix} -\beta N_1^2 - b - \gamma\alpha N_1^2 & -\frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} + d - \frac{\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} & f \\ \beta N_1^2 + (1 - \theta)\gamma\alpha N_1^2 & \frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha + (1 - \theta)\alpha + \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} & 0 \\ \theta\gamma\alpha N_1^2 & \theta\alpha + \frac{\theta\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} & -e - f \end{pmatrix},$$

y

$$A - B = \begin{pmatrix} -\beta N_1^2 - b - 2\alpha + \gamma\alpha N_1^2 & -\frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} + d + \frac{\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} & f \\ \beta N_1^2 - (1 - \theta)\gamma\alpha N_1^2 & \frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha - (1 - \theta)\alpha - \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} & 0 \\ -\theta\gamma\alpha N_1^2 & -\theta\alpha - \frac{\theta\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} & -e - f \end{pmatrix}.$$

Donde  $N_1 = \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)$ . Notemos que las matrices  $A + B$  y  $A - B$  tienen la siguiente forma:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

El polinomio característico de la matriz  $H$  es

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3,$$

donde  $A_1 = -tr(H)$ ,  $A_2 = H_1 + H_2 + H_3$ ,  $A_3 = -det(H)$ , donde  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ,  $H_2 = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$ ,  $H_3 = a_{22}a_{33}$ . Por el ejemplo (1.1.2),  $P_3(\lambda)$  es estable si y solo si  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_1A_2 - A_3$  son positivos. En este caso,

$$\begin{aligned} A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + det(H) \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\ &\quad - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\ &\quad - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Notemos que  $A + B$  y  $A - B$  tienen dos entradas iguales  $a_{13} = f$ ,  $a_{33} = -(e + f)$ . Usando esto,  $A_3$  puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_3 &= -det(H) \\ &= -a_{33}H_1 - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= eH_1 + f(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Primero probaremos la estabilidad para el polinomio característico de  $A + B$ . Por simplificación denotaremos a las entradas de  $A + B$  y  $A - B$  como  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Notemos que  $a_{11} < 0$ ,  $a_{33} < 0$  y como  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha + (1 - \theta)\alpha + \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \\
&= \frac{\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - (c + d + \alpha\theta) \\
&= -(c + d + \alpha\theta) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A_1 = -\text{tr}(A + B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Ya que  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22})$ , como  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ ,  $a_{21} > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{21} &= -\beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 - b - \gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \\
&\quad + \beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 - (1 - \theta)\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \\
&= -b - \theta\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 < 0,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a_{12} + a_{22} &= -\frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} + d - \frac{\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}^2} \\
&\quad + \frac{\beta}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha + (1 - \theta)\alpha + \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \\
&= -c - \theta\alpha - \theta\gamma\alpha \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} < 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $H_1 > 0$ .

Para demostrar que  $H_2 > 0$  notemos que  $0 \leq \theta \leq 1$  y que  $a_{11} < 0$ , entonces,

$$\begin{aligned}
H_2 &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\
&= -ea_{11} - fa_{11} + fa_{31} \\
&= -ea_{11} + f(a_{31} - a_{11}) \\
&= -ea_{11} + f \left[ \beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 + b + \gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\alpha}}\right)^2 (1 - \theta) \right] \\
&= -ea_{11} + f \left[ (\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 + b \right] > 0.
\end{aligned}$$

Debido a que  $a_{22} < 0$  y  $a_{33} < 0$  entonces  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ .

(iii) Ahora demostremos que  $A_3 > 0$  y  $A_1A_2 - A_3 > 0$ , como  $a_{22} < 0$ ,  $H_1 > 0$ ,  $a_{21} > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} A_3 &= -\det(A + B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + fa_{22}(-b) - fa_{21}(-c) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + \det(A + B) \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) \\ &\quad - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}. \end{aligned}$$

Por lo hecho anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  y por la matriz  $A + B$  tenemos que  $a_{21} > 0$ ,  $a_{32} \geq 0$ ,  $a_{13} > 0$ . Por lo tanto, por el ejemplo (1.1.2),  $A + B$  es estable.

Ahora demostremos estas condiciones para la matriz  $A - B$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Observemos que  $a_{33} = -e - f < 0$ , como  $0 < \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right)^2 < 1$  cuando  $\Re_{0\gamma\theta} > 1$ , si consideramos que  $0 \leq \gamma \leq 1$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\beta \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right)^2 - b - 2\alpha + \gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right)^2 \\ &= -\beta \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right)^2 - b - \left(2 - \gamma \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right)^2\right)\alpha < 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{\beta}{\Re_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha - (1 - \theta)\alpha - \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} \\ &= \frac{\beta}{\Re_{0\gamma\theta}^2} - c - d - \alpha + (1 - \theta)\alpha - 2(1 - \theta)\alpha + \frac{(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} - \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} \\ &= \frac{\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} - (c + d + \theta\alpha) - 2(1 - \theta)\alpha - \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} \\ &= -(c + d + \theta\alpha) \left(1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}}\right) - 2(1 - \theta)\alpha - \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2}. \end{aligned}$$

Como  $\Re_{0\gamma\theta} > 1$  y  $0 \leq \theta \leq 1$  entonces  $a_{22} < 0$ . Por lo tanto  $A_1 = -\text{tr}(A - B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Por lo demostrado anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y por la matriz  $A - B$  tenemos que  $a_{31} < 0$ ,  $a_{13} > 0$ , por lo que  $H_2 = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} > 0$  y  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ . Ahora, para  $H_1$

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22}) \\ &= \left[ -b - 2\alpha + \theta\gamma\alpha \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right] \left[ (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} - c - d - 2\alpha + \theta\alpha \right] \\ &\quad - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \left( -c - 2\alpha + \theta\alpha + \frac{\theta\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \right) \\ &= (b + 2\alpha)(c + d + 2\alpha - \theta\alpha) - (b + 2\alpha)(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \\ &\quad + (c + 2\alpha - \theta\alpha)(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right). \end{aligned}$$

De modo que  $H_1 > 0$  puede demostrarse con los siguientes dos casos.

Caso 1:  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) > 0$ . Ya que  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} = \frac{\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha}{c + d + \theta\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} (c + d + \theta\alpha) &= (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \\ &= [(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) + 2(1 - \theta)\gamma\alpha] \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}. \end{aligned}$$

Entonces  $H_1$  puede reescribirse como

$$\begin{aligned} H_1 &= (b + 2\alpha)(2\alpha - 2\theta\alpha + 2(1 - \theta)\gamma\alpha \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}) \\ &\quad + (b + 2\alpha)(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \\ &\quad + (c + 2\alpha - \theta\alpha)(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2. \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \theta \leq 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$ , entonces es claro que  $H_1 > 0$ .

Caso 2:  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \leq 0$ . Podemos reescribir  $H_1$  como

$$\begin{aligned} H_1 &= (b + 2\alpha)d + (c + 2\alpha - \theta\alpha) \left[ b + \beta \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 + \left( 2 - (1 - \theta)\gamma \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \alpha \right] \\ &\quad - (b + 2\alpha)(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}. \end{aligned}$$

Ya que  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$  es claro que  $H_1 > 0$ .

(iii) Demostremos que  $A_3 > 0$ ,  $A_1A_2 - A_3 > 0$ .

$$\begin{aligned} A_3 &= -\det(A - B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + f(a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(-c - 2\alpha)). \end{aligned}$$

Como  $H_1 > 0$ , debemos probar que

$$a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(-c - 2\alpha) > 0.$$

Si  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} a_{21} &= \beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 - (1 - \theta)\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \\ &= (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

y como  $a_{22} < 0$  por lo tanto,  $A_3 > 0$ .

Si  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \leq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} &a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(-c - 2\alpha) = \\ &= \left(c + d + 2\alpha - \theta\alpha - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}\right)(b + 2\alpha) \\ &\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 (c + 2\alpha) \\ &= \left[\frac{c + 2\alpha}{2} + \frac{c}{2} + d + \alpha(1 - \theta)\right](b + 2\alpha) - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}(b + 2\alpha) \\ &\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 (c + 2\alpha) \\ &= b \left[\frac{c + 2\alpha}{2} + \frac{c}{2} + d + \alpha(1 - \theta)\right] + 2\alpha \left(\frac{c}{2} + d + \alpha(1 - \theta)\right) - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}(b + 2\alpha) \\ &\quad + \beta \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 (c + 2\alpha) + (c + 2\alpha) \left[1 - (1 - \theta)\gamma \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2\right] \alpha. \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$  entonces  $a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(-c - 2\alpha) > 0$  y por lo tanto  $A_3 > 0$  como se quería.

Por (5.8),  $a_{13} = f$ ,  $a_{33} = -(e + f)$ ,  $A_1A_2 - A_3$  puede ser calculado como

$$\begin{aligned} A_1A_2 - A_3 &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) \\ &\quad - a_{33}(H_2 + H_3) + ea_{11}a_{22} + f(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{32}). \end{aligned}$$

Como  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , es suficiente probar que

$$a_{11}a_{22} + a_{21}a_{32} > 0. \quad (5.10)$$

Si  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \leq 0$ , entonces  $a_{21} \leq 0$ , (5.10) se cumple ya que  $a_{32} \leq 0$ . Si  $(\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) > 0$  y usando el hecho de que  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} = \frac{\beta + (1 - \theta)\alpha\gamma}{c + d + \theta\alpha}$ , tenemos que

$$c + d + \theta\alpha - (\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} = (c + d + \theta\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)$$

y

$$\begin{aligned} (c + d + \theta\alpha)\alpha &= (\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \\ &\geq (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{\theta\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}. \end{aligned}$$

Ya que  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta} > 1$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22} + a_{21}a_{32} = \\ &= (b + 2\alpha +) (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 - \theta\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \\ &\quad \times \left(c + d + 2\alpha - \theta\alpha - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}\right) \\ &\quad - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \left(\theta\alpha + \frac{\theta\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right) \\ &= \left(b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2\right) \\ &\quad \times \left(c + d + 2\alpha - \theta\alpha - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}\right) \\ &\quad - \theta\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \left((c + d + 2\alpha - \theta\alpha) - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2\right) \theta\alpha \\ &= \left(b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2\right) \\ &\quad \times \left(c + d + \theta\alpha - (\beta + (1 - \theta)\gamma\alpha) \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} + 2(1 - \theta)\alpha + \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2}\right) \\ &\quad - \theta\gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2 \left((c + d + 2\alpha - \theta\alpha) - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}}\right)^2\right) \theta\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \\
&\quad \times \left( (c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) + 2(1 - \theta)\alpha + \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \right) \\
&\quad - \theta\gamma\alpha \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \left( (c + d + 2\alpha(1 - \theta) + \theta\alpha) - (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \theta\alpha \\
&= \left( b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \\
&\quad + 2 \left( b + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) (1 - \theta)\alpha \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)(c + d) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^3 \\
&\quad + b(c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \\
&\quad + (c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \alpha \left( 1 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \right) \\
&\quad + 2(1 - \theta)\alpha^2 \left( 2 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \\
&\quad + (c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \alpha \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\theta\alpha \left( \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^3 - \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \\
&\geq \left( b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}^2} \\
&\quad + 2 \left( b + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) (1 - \theta)\alpha \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)(c + d) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^3 \\
&\quad + b(c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \\
&\quad + (c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \alpha \left( 1 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \right) \\
&\quad + 2(1 - \theta)\alpha^2 \left( 2 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\theta\alpha \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right) \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\theta\alpha \left( \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^3 - \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( b + 2\alpha + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \frac{2(1 - \theta)\gamma\alpha}{\Re_{0\gamma\theta}^2} \\
&\quad + 2 \left( b + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) (1 - \theta)\alpha \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)(c + d) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right)^3 \\
&\quad + b(c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right) \\
&\quad + (c + d + \theta\alpha) \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right) \alpha \left( 1 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right) \right) \\
&\quad + 2(1 - \theta)\alpha^2 \left( 2 - \theta\gamma \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right)^2 \right) \\
&\quad + (\beta - (1 - \theta)\gamma\alpha)\theta\alpha \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}^2} \left( 1 - \frac{1}{\Re_{0\gamma\theta}} \right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Dado lo anterior,  $A_1A_2 - A_3 > 0$ . Por el criterio de Routh-Hurwitz,  $A - B$  también es estable. Por lo tanto,  $P_2$  es localmente asintóticamente estable.  $\square$

# Apéndice D

## 5.6. Prueba del Teorema 5.1.1

*Demostración.* Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio endémico, evaluamos  $P_2$  en la matriz jacobiana del sistema (5.1)

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{I_0^2 M_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & d - \frac{S_0 M_1}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & f \\ \frac{I_0^2 M_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & -\frac{I_0 M_1}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)M_2}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0} & 0 \\ 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(-(\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & -\frac{\alpha\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde  $M_1 = c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + \alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e)$  y  $M_2 = (-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)$ .

Observemos que,

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

y

$$A - B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\alpha - b + \frac{\alpha((1-\gamma)(\theta_s-1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s-1)I_0 S_0 + S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{I_0^2(c(I_0 - \theta_s I_0 + S_0) + d(S_0 - \theta_s I_0 + I_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s))}{S_0(I_0 + S_0)(I_0 - \theta_s I_0 + S_0)} \\
&\quad - \frac{I_0^2(\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) - \theta_e \theta_s + \theta_e + \theta_s))}{S_0(I_0 + S_0)(I_0 - \theta_s I_0 + S_0)}, \\
b_{12} &= S_0^2 \left( -\frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + S_0^2 \left( -\frac{\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right), \\
b_{13} &= f, \\
b_{21} &= I_0^2 \left( \frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + I_0^2 \left( \frac{\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} - \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
b_{22} &= -\frac{I_0(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad + \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)(-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0}, \\
b_{23} &= 0, \\
b_{31} &= \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2}, \\
b_{32} &= \alpha \left( \theta_s - \frac{\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
b_{33} &= -e - f, \\
c_{11} &= -\frac{I_0^2(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad + \frac{\alpha((\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2 + 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 - S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - \alpha - b, \\
c_{12} &= S_0^2 \left( -\frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad - S_0^2 \left( \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right) + d, \\
c_{13} &= f, \\
c_{21} &= I_0^2 \left( \frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + I_0^2 \left( \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= \frac{I_0(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)(-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0}, \\
c_{23} &= 0, \\
c_{31} &= -\frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2}, \\
c_{32} &= \alpha \left( \theta_s + \frac{\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
c_{33} &= -e - f.
\end{aligned}$$

De modo que  $N_1 = \alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)$ .

Notemos que para demostrar la estabilidad del equilibrio endémico es suficiente con mostrar que los polinomios de las matrices  $A + B$  y  $A - B$  son estables. Observemos que las matrices  $A + B$  y  $A - B$  tienen la siguiente forma:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

El polinomio característico de la matriz  $H$  es

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3,$$

donde  $A_1 = -tr(H)$ ,  $A_2 = H_1 + H_2 + H_3$ ,  $A_3 = -det(H)$ ,  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ,  $H_2 = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$  y  $H_3 = a_{22}a_{33}$ . Por el ejemplo 1.1.2,  $H$  es estable si y solo si  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_1A_2 - A_3$  son positivos. En este caso,

$$\begin{aligned}
A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + det(H) \\
&= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\
&\quad - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\
&\quad + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} \\
&= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\
&\quad - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}.
\end{aligned} \quad (5.12)$$

Notemos que  $A + B$  y  $A - B$  tienen dos entradas iguales  $a_{13} = f$ ,  $a_{33} = -(e + f)$ . Usando esto,  $A_3$  puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A_3 &= -det(H) \\
&= -a_{33}H_1 - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= eH_1 + f(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\
&= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}).
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Primero probaremos la estabilidad para el polinomio característico de  $A + B$ . En este caso  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Notemos que  $a_{33} < 0$ , usando Mathematica obtenemos que si se cumple  $\Re_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ ,  $\gamma < 1$  y  $\mathbf{H}_1$  entonces  $a_{11} < 0$  y  $a_{22} < 0$ . Por lo tanto,  $A_1 = -tr(A + B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Probemos que  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22}) > 0$ . Como  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ , usando Mathematica tenemos que  $a_{21} > 0$  si  $0 < \gamma < 1$ , además,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ , y  $\Re_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ , entonces

$$a_{11} + a_{21} = -\frac{b(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + \alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} < 0,$$

y

$$a_{12} + a_{22} = -\alpha\theta_s - c + \alpha\theta_e \left( \theta_s + \frac{\gamma(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - 1 \right).$$

Usando Mathematica encontramos que si se cumple  $\mathbf{H}_1$  entonces  $a_{12} + a_{22}$  es negativo. Por lo tanto,  $H_1 > 0$ .

Para demostrar que  $H_2 > 0$  notemos que  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $\gamma < 1$ ,  $a_{11} < 0$  y  $\mathbf{H}_1$  entonces

$$\begin{aligned} H_2 &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\ &= -ea_{11} - fa_{11} + fa_{31} \\ &= -ea_{11} + f(a_{31} - a_{11}) \\ &= -ea_{11} + f \left[ \frac{I_0^2 (c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + \alpha N_2)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Donde  $N_2 = -(\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 ((\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + S_0^2 ((\theta_s - 1)(\theta_e(\gamma(\theta_s - 2) - 1) + \gamma\theta_s) + \theta_s)$ . Debido a que  $a_{22} < 0$  y  $a_{33} < 0$  entonces  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ .

(iii) Ahora demostremos que  $A_3 > 0$  y  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ , como  $a_{22} < 0$ ,  $H_1 > 0$  y  $a_{21} > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} A_3 &= -det(A + B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + fa_{22}(-b) - fa_{21}(-c). \end{aligned}$$

Dado lo anterior,  $A_3 > 0$ .

Luego,

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + det(A + B) \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) \\ &\quad - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}. \end{aligned}$$

Por lo hecho anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $a_{21} > 0$  y por la matriz  $A + B$  tenemos que  $a_{32} \geq 0$ ,  $a_{13} > 0$ . Por lo tanto, por el criterio de Routh-Hurwitz  $A + B$  es estable (cf. el ejemplo 1.1.2).

Ahora demostraremos la estabilidad para el polinomio característico de  $A - B$ . En este caso  $a_{ij} = c_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Observemos que  $a_{33} = -e - f < 0$ , haciendo uso de Mathematica tenemos que  $a_{11}$  y  $a_{22}$  son negativos si se cumplen las condiciones  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y  $\mathbf{H}_1$ .

Por lo tanto  $A_1 = -\text{tr}(A - B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Por lo demostrado anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ . Ahora, para demostrar que  $H_1 > 0$ , notemos que

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22}) \\ &= \left( \frac{\alpha((\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\gamma\theta_e - 2) + 4(\theta_s - 1)I_0 S_0 - 2S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - b \right) a_{22} \\ &\quad - \left( \alpha \left( -\theta_e \theta_s + \theta_e + \theta_s - \frac{\gamma\theta_e(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - 2 \right) - c \right) a_{21}. \end{aligned}$$

Ya que  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $0 < \gamma < 1$ , además, se cumple  $\mathbf{H}_1$  y como  $a_{22} < 0$ , el primer sumando es positivo, luego,  $a_{21}$  es positivo siempre que se cumpla  $\mathbf{H}_3$  y haciendo uso de Mathematica el segundo sumando también es positivo si se cumple  $\mathbf{H}_1$ , de modo que  $H_1 > 0$ .

Ahora demostremos que  $H_2 > 0$ , notemos que  $a_{11}$  y  $a_{33}$  son negativos, entonces

$$\begin{aligned} H_2 &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\ &= a_{11}a_{33} - \left( -\frac{\alpha\gamma f\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $H_2$  es positivo.

(iii) Demostremos que  $A_3 > 0$ ,  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ . Observemos que por lo demostrado anteriormente  $a_{21} > 0$ ,  $a_{22} < 0$  y si se cumple  $\mathbf{H}_1$  entonces,

$$\begin{aligned} A_3 &= -\det(A - B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + f(a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(2\alpha(\theta_s - 1) - c)) > 0. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ , notemos que

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} \\ &\quad - \frac{\alpha f I_0^2 ((\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s) - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 (\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s) + N_3) (N_4 + N_5)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^4}. \end{aligned}$$

Donde  $N_3 = S_0^2((\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s)$ ,  $N_4 = -c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 - d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2$ ,  $N_5 = \alpha((\theta_s - 1)^2 I_0^2(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0((\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma(-\theta_e) + \gamma - \theta_e) - N_6)$  y  $N_6 = (S_0^2(\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 2)(\theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s))$ . Como  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  los primeros 4 sumandos son positivos, luego, el último sumando es positivo siempre que se cumpla  $\mathbf{H}_4$  y por lo tanto  $A_1 A_2 - A_3$  es positivo como se quería. Entonces, por el criterio de Routh-Hurwitz  $A - B$  es estable (cf. el ejemplo 1.1.2).  $\square$

## 5.7. Prueba del Teorema 5.1.2

*Demostración.* Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio endémico, evaluamos  $P_2$  en la matriz jacobiana del sistema (5.1)

$$\mathbf{J}(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - b - \frac{I_0^2 M_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & d - \frac{S_0 M_1}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & f \\ \frac{I_0^2 M_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} & -\frac{I_0 M_1}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)M_2}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0} & 0 \\ 0 & \alpha\theta_s & -e - f \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(-(\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \\ -\frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \\ \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & -\frac{\alpha\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde  $M_1 = c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + \alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e)$  y  $M_2 = (-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)$ .

Observemos que,

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

y

$$A - B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\alpha - b + \frac{\alpha((1-\gamma)(\theta_s-1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s-1)I_0 S_0 + S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{I_0^2(c(I_0 - \theta_s I_0 + S_0) + d(S_0 - \theta_s I_0 + I_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s))}{S_0(I_0 + S_0)(I_0 - \theta_s I_0 + S_0)} \\
&\quad - \frac{I_0^2(\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) - \theta_e \theta_s + \theta_e + \theta_s))}{S_0(I_0 + S_0)(I_0 - \theta_s I_0 + S_0)}, \\
b_{12} &= S_0^2 \left( -\frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + S_0^2 \left( -\frac{\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right), \\
b_{13} &= f, \\
b_{21} &= I_0^2 \left( \frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + I_0^2 \left( \frac{\alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} - \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
b_{22} &= -\frac{I_0(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad + \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)(-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0}, \\
b_{23} &= 0, \\
b_{31} &= \frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2}, \\
b_{32} &= \alpha \left( \theta_s - \frac{\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
b_{33} &= -e - f, \\
c_{11} &= -\frac{I_0^2(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad + \frac{\alpha((\gamma - 1)(\theta_s - 1)^2 I_0^2 + 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 - S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - \alpha - b, \\
c_{12} &= S_0^2 \left( -\frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad - S_0^2 \left( \frac{\alpha\gamma(\theta_s - 1)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right) + d, \\
c_{13} &= f, \\
c_{21} &= I_0^2 \left( \frac{c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \right) \\
&\quad + I_0^2 \left( \frac{\alpha\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c_{22} &= \frac{I_0(c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0) + \alpha(\theta_s - 1)I_0(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + N_1)}{(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\theta_e - 1)(\theta_s - 1)(-\theta_s I_0 + I_0 + \gamma S_0 + S_0)}{-\theta_s I_0 + I_0 + S_0}, \\
c_{23} &= 0, \\
c_{31} &= -\frac{\alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2}, \\
c_{32} &= \alpha \left( \theta_s + \frac{\theta_e(\theta_s - 1)((\theta_s - 1)^2 I_0^2 - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 + (\gamma + 1)S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right), \\
c_{33} &= -e - f.
\end{aligned}$$

Donde  $N_1 = \alpha S_0(\gamma(\theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s)$ .

Recordemos que para demostrar la estabilidad del equilibrio endémico es suficiente con mostrar que los polinomios característicos de las matrices  $A+B$  y  $A-B$  son estables. Observemos que las matrices  $A+B$  y  $A-B$  tienen la siguiente forma:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

El polinomio característico de la matriz  $H$  es

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3,$$

donde  $A_1 = -tr(H)$ ,  $A_2 = H_1 + H_2 + H_3$ ,  $A_3 = -det(H)$ ,  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ,  $H_2 = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$  y  $H_3 = a_{22}a_{33}$ . Por el ejemplo 1.1.2,  $H$  es estable si y solo si  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_1A_2 - A_3$  son positivos. En este caso,

$$\begin{aligned}
A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + det(H) \\
&= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\
&\quad - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\
&\quad + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} \\
&= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) \\
&\quad - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}.
\end{aligned} \quad (5.15)$$

Notemos que  $A+B$  y  $A-B$  tienen dos entradas iguales  $a_{13} = f$ ,  $a_{33} = -(e+f)$ . Usando esto,  $A_3$  puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A_3 &= -det(H) \\
&= -a_{33}H_1 - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= eH_1 + f(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\
&= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}).
\end{aligned} \quad (5.16)$$

Primero probaremos la estabilidad para el polinomio característico de  $A + B$ . En este caso  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Notemos que  $a_{33} < 0$ , usando Mathematica obtenemos que si se cumple  $\Re_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ ,  $\gamma < 1$  y  $\mathbf{H}_2$  entonces  $a_{11} < 0$  y  $a_{22} < 0$ . Por lo tanto,  $A_1 = -tr(A + B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Probemos que  $H_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22})$ . Como  $a_{11} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ , usando Mathematica tenemos que  $a_{21} > 0$  si  $0 < \gamma < 1$ . Además,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $0 \leq \theta_s \leq 1$  y  $\Re_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$ , entonces

$$a_{11} + a_{21} = -\frac{b(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + \alpha\gamma\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} < 0,$$

y

$$a_{12} + a_{22} = -\alpha\theta_s - c + \alpha\theta_e \left( \theta_s + \frac{\gamma(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - 1 \right).$$

Usando Mathematica encontramos que si se cumple  $\mathbf{H}_2$  entonces  $a_{12} + a_{22}$  es negativo. Por lo tanto,  $H_1 > 0$ .

Para demostrar que  $H_2 > 0$  notemos que  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $\gamma < 1$ ,  $a_{11} < 0$  y  $\mathbf{H}_2$  entonces

$$\begin{aligned} H_2 &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\ &= -ea_{11} - fa_{11} + fa_{31} \\ &= -ea_{11} + f(a_{31} - a_{11}) \\ &= -ea_{11} + f \left[ \frac{I_0^2 (c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 + \alpha N_2)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Donde  $N_2 = -(\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 ((\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) + S_0^2 ((\theta_s - 1)(\theta_e(\gamma(\theta_s - 2) - 1) + \gamma\theta_s) + \theta_s)$ . Debido a que  $a_{22} < 0$  y  $a_{33} < 0$  entonces  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ .

(iii) Ahora demostremos que  $A_3 > 0$  y  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ , como  $a_{22} < 0$ ,  $H_1 > 0$  y  $a_{21} > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} A_3 &= -det(A + B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + fa_{22}(-b) - fa_{21}(-c). \end{aligned}$$

Dado lo anterior,  $A_3 > 0$ .

Luego,

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(H_1 + H_2 + H_3) + det(A + B) \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) \\ &\quad - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}. \end{aligned}$$

Por lo hecho anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $a_{21} > 0$  y por la matriz  $A + B$  tenemos que  $a_{32} \geq 0$ ,  $a_{13} > 0$ . Por lo tanto, por el criterio de Routh-Hurwitz  $A + B$  es estable (cf. el ejemplo 1.1.2).

Ahora demostraremos la estabilidad para el polinomio característico de  $A - B$ . En este caso  $a_{ij} = c_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ .

(i) Demostremos que  $A_1 > 0$ .

Observemos que  $a_{33} = -e - f < 0$ , haciendo uso de Mathematica tenemos que  $a_{11}$  y  $a_{22}$  son negativos si se cumplen las condiciones  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $\mathfrak{R}_{0\gamma\theta_e\theta_s} > 1$  y  $\mathbf{H}_2$ .

Por lo tanto  $A_1 = -\text{tr}(A - B) = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$  como se quería.

(ii) Demostremos que  $H_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Por lo demostrado anteriormente sabemos que  $a_{ii} < 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $H_3 = a_{22}a_{33} > 0$ . Ahora, para demostrar que  $H_1 > 0$ , notemos que

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= (a_{11} + a_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{22}) \\ &= \left( \frac{\alpha((\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\gamma\theta_e - 2) + 4(\theta_s - 1)I_0 S_0 - 2S_0^2)}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - b \right) a_{22} \\ &\quad - \left( \alpha \left( -\theta_e \theta_s + \theta_e + \theta_s - \frac{\gamma\theta_e(\theta_s - 1)S_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} - 2 \right) - c \right) a_{21}. \end{aligned}$$

Observemos que  $a_{11} + a_{21}$  y  $a_{12} + a_{22}$  son negativos ya que  $0 \leq \theta_e \leq 1$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Además, se cumple  $\mathbf{H}_2$  y como  $a_{22} < 0$ , el primer sumando es positivo, luego,  $a_{21}$  es positivo siempre que se cumpla  $\mathbf{H}_3$  y  $\mathbf{H}_5$ , de esta manera el segundo sumando también es positivo, de modo que  $H_1 > 0$ .

Ahora demostremos que  $H_2 > 0$ , notemos que  $a_{11}$  y  $a_{33}$  son negativos, por lo que

$$\begin{aligned} H_2 &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\ &= a_{11}a_{33} - \left( -\frac{\alpha\gamma f\theta_e(\theta_s - 1)^2 I_0^2}{(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $H_2$  es positivo.

(iii) Demostremos que  $A_3 > 0$ ,  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ . Primero observemos que por lo demostrado anteriormente  $a_{21} > 0$ ,  $a_{22} < 0$  y si se cumple  $\mathbf{H}_2$  entonces,

$$\begin{aligned} A_3 &= -\det(A - B) \\ &= eH_1 + fa_{22}(a_{11} + a_{21} + a_{31}) - fa_{21}(a_{12} + a_{22} + a_{32}) \\ &= eH_1 + f(a_{22}(-b - 2\alpha) - a_{21}(2\alpha(\theta_s - 1) - c)) > 0. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ , notemos que

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &= -a_{11}(H_1 + H_2 + H_3) - a_{22}(H_1 + H_3) - a_{33}(H_2 + H_3) - a_{11}a_{22}a_{33} \\ &\quad - \frac{\alpha f I_0^2 ((\theta_s - 1)^2 I_0^2 (\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s) - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0 (\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s) + N_3) (N_4 + N_5)}{S_0(I_0 + S_0)(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^4}. \end{aligned}$$

Donde  $N_3 = S_0^2((\gamma + 1)\theta_e(\theta_s - 1) + \theta_s)$ ,  $N_4 = -c(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2 - d(-\theta_s I_0 + I_0 + S_0)^2$ ,  $N_5 = \alpha((\theta_s - 1)^2 I_0^2(\theta_e(\theta_s - 1) - \theta_s) - 2(\theta_s - 1)I_0 S_0((\gamma + 1)(\theta_e - 1)\theta_s + \gamma(-\theta_e) + \gamma - \theta_e) - N_6)$  y  $N_6 = (S_0^2(\gamma(\theta_e - 1)(\theta_s - 2)(\theta_s - 1) + \theta_e(-\theta_s) + \theta_e + \theta_s))$ . Como  $a_{ii} < 0$ ,  $H_i > 0$ , para  $i = 1, 2, 3$  los primeros 4 sumandos son positivos, luego, el último sumando es positivo siempre que se cumpla  $\mathbf{H}_6 - \mathbf{H}_9$  y por lo tanto  $A_1 A_2 - A_3$  es positivo como se quería. Entonces, por el criterio de Routh-Hurwitz  $A - B$  es estable (cf. el ejemplo 1.1.2).

□

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de la tesis:	Estabilidad global de un modelo epidemiológico con migración y transporte.
Autor de la tesis:	Itzayana Yisely Madrigal Estrada
ORCID:	0009-0002-5602-6421
Resumen de la tesis:	<p>En este trabajo se analiza la dinámica de cuatros modelos epidemiológicos, los cuales permiten comparar el efecto de la migración y el establecimiento de controles para detectar infectados, a la hora de entrar o salir de un viaje, en la de una epidemia.</p> <p>En particular, calculamos el número reproductivo básico de erradicación cada modelo, establecemos condiciones para la estabilidad global del equilibrio libre de enfermedad y para la existencia de un equilibrio endémico. Además, se muestran simulaciones numéricas que ejemplifican los resultados analíticos obtenidos para cada uno de los modelos.</p>
Palabras claves de la tesis:	Equilibrio libre de enfermedad, equilibrio endémico, número reproductivo básico, estabilidad global.
Referencias citadas:	<p>Brauer, F. (2005). Some simple epidemic models. <i>Mathematical Biosciences and Engineering</i>, 3(1), pp. 1-15.</p> <p>Brauer, F., Castillo-Chavez, C., y Feng, Z. (2001). <i>Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology</i>. Springer-Verlag.</p> <p>Blé, G., Dela-Rosa, M. A., y Loreto-Hernández, I. (2019). Stability analysis of a tritrophic model with stage structure in the prey population. <i>Journal of Nonlinear Sciences and Applications</i>, 12 (2019), 765–790.</p> <p>Brauer, F., y van den Driessche, P. (2001). Models for translation of disease with immigration of infectives. <i>Mathematical Bioscience</i>, 171(2), 143-154.</p> <p>Castañeda Gullot, C., y Ramos Serpa G. (2020). Principales pandemias en la historia de la humanidad <i>Revista Cubana de Pediatría</i>, v. 92, jun. 2020. ISSN 1561-3119.</p> <p><a href="http://www.revpediatria.sld.cu/index.php/ped/article/view/1183/714">http://www.revpediatria.sld.cu/index.php/ped/article/view/1183/714</a>.</p> <p>Cui, J., Takeuchi, Y., y Saito, Y. (2005). Spreading disease with transport-related infection. <i>Journal of Theoretical Biology</i> 239, pp. 376–390.</p>

	<p>Hethcote, H.W. (1976). Qualitative analyses of communicable disease models. <i>Mathematical Biosciences</i>, 28 (3-4), pp. 335-356.</p> <p>LaSalle, J. P. (1964). Recent advances in Liapunov stability theory. <i>SIAM review</i>, Vol. 6, No. 1.</p> <p>Liu, X., y Takeuchi, Y. (2006). Spread of disease with transport-related infection and entry screening. <i>Journal of Theoretical Biology</i>, 242(2), 517-528.</p> <p>Li, J., Xiao, Y., Zhang, F., y Yang, Y. (2012). An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models. <i>Nonlinear Analysis: Real World Applications</i>, 13(5), 2006-2016.</p> <p>Muroya, Y., Enatsu, Y., y Kuniya, T. (2013). Global stability of extended multi-group sir epidemic models with patches through migration and cross patch infection. <i>Acta Mathematica Scientia</i>, 33(2), 341-361.</p> <p>Perko, L. (2006). <i>Differential Equations and Dynamical Systems</i>. Springer, New York.</p> <p>Piret, J., y Boivin, G. (2021). Pandemics throughout history. <i>Frontiers in microbiology</i>, 11, 631736.</p> <p>Yang, X. (2002). Generalized form of Hurwitz-Routh criterion and Hopf bifurcation of higher order. <i>Applied Mathematics Letters</i>, 15 (2002), 615-621.</p> <p>Wang, W., y Zhao, X. Q. (2004). An epidemic model in a patchy environment. <i>Mathematical biosciences</i>, 190(1), 97-112.</p> <p>Shuai, Z., y van den Driessche, P. (2013). Global stability of infectious disease models using Lyapunov functions. <i>SIAM Journal on Applied Mathematics</i>, 73(4), 1513-1532.</p>
--	---