



Universidad Juárez Autónoma
de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

Dinámica de polinomios en
árboles de Hubbard

Tesis

que para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Presenta

Domingo González Martínez

Director de tesis:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco, Septiembre de 2018.

Carta Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito, a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, para que utilice tanto física, como digitalmente la tesis de doctorado: ***“DINÁMICA DE POLINOMIOS EN ÁRBOLES DE HUBBARD,”*** de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso, por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa, más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica, con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco, a los 30 días del mes de Agosto del año 2018.

Autorizó



Domingo González Martínez



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

29 de agosto de 2018

M.C. Domingo González Martínez
Pasante de la Maestría en Ciencias Matemáticas
Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**Dinámica de Polinomios en árboles de Hubbard**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

Miembro CUMEX desde 2008
**Consortio de
Universidades
Mexicanas**
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Dedicatorias

A Dios...

Por concederme sabiduría,
capacidad y voluntad para
desarrollar este proyecto.

A la memoria de mi padre...

Pedro González Jiménez, por ser siempre
un impulsor en mi educación y superación.

A mi madre...

Elsa Martínez Correa, por apoyarme
y procurar mi bienestar, e inculcarme
valores, que conducen a ser mejor persona.

A mi esposa e hija...

Diana Emily Peregrino J. y Sofía Mariel,
a la primera, por su solidaridad en las
dificultades y su comprensión en las
ausencias. A la segunda, por ser un
motivo de inspiración e impulso
natural de ser mejor cada día.

A mis Hermanos...

Ma. Cristina, Cipriano, Ma. Dimas,
Saturnino y Miguel A.
por brindarme su apoyo
incondicional para salir adelante.

Agradecimientos

A mi director de tesis, Dr. Gamaliel Blé González. Por dedicar su tiempo, paciencia y voluntad para dirigir este proyecto doctoral.

A los sinodales, por la revisión exhaustiva de este trabajo, señalando algunos errores y haciendo recomendaciones, que ayudaron a mejorar significativamente el mismo.

A CONACYT, por el apoyo a través de la beca de doctorado 278289 – 399279.

DINÁMICA DE POLINOMIOS
EN ÁRBOLES DE HUBBARD

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | x |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Puntos periódicos | 1 |
| 1.2. Conjunto de Julia y conjunto de Fatou | 4 |
| 1.3. Hiperbolicidad | 6 |
| 1.4. Familia cuadrática | 7 |
| 1.5. Árboles de Hubbard | 10 |
| 1.6. Renormalización | 12 |
| 1.6.1. Funciones de tipo polinomial | 13 |
| 1.6.2. Renormalización | 15 |
| 1.6.3. Modulación | 16 |
| 2. Entropía topológica | 17 |
| 2.1. Definición y propiedades | 17 |
| 2.2. Entropía topológica fundamental | 27 |
| 2.2.1. Caso cuadrático | 27 |
| 2.2.2. Caso cúbico | 28 |
| 3. Entropía fundamental | 30 |
| 3.1. Espacio de parámetros y espacio dinámico | 31 |
| 3.2. Entropía en las copias del conjunto de Mandelbrot | 35 |
| 3.3. Entropía en las componentes de tipo captura | 36 |
| 3.4. Monotonicidad de la entropía fundamental | 37 |
| 3.4.1. Rayos externos y el árbol de Hubbard | 37 |
| 3.4.2. Intervalos de ángulos en el árbol de Hubbard | 38 |
| 3.4.3. Monotonicidad | 40 |

| | |
|--|-----------|
| 4. Algoritmo de Thurston para el cálculo de entropía | 49 |
| 4.1. Algoritmo de Thurston | 49 |
| 4.1.1. Algoritmo de Thurston para polinomios de grado d | 50 |
| 4.1.2. Algoritmo de Thurston en una familia de polinomios con un punto fijo de orden máximo | 60 |
| 4.2. Gráficas y cuñas | 68 |
| 4.2.1. Gráficas | 68 |
| 4.2.2. Cuñas | 72 |
| 4.3. Continuidad de la entropía | 75 |
| Conclusiones | 78 |
| A. Matrices no negativas | 80 |
| B. Rutinas Matlab para calcular la entropía fundamental | 84 |
| Bibliografía | 90 |

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Conjunto de Mandelbrot. | 8 |
| 1.2. | Rayos externos a J_c y sus correspondientes en el Mandelbrot. | 11 |
| 1.3. | Conjunto de Julia y árbol de Hubbard de P_a | 13 |
| 1.4. | Regiones para la función tipo polinomial del ejemplo 1.6.3. | 14 |
| 3.1. | Regiones de conexidad para $d = 4$ y $d = 5$ | 31 |
| 3.2. | Conjunto de Julia lleno e intervalos de ángulos de P_a | 39 |
| 4.1. | Retratos críticos de grado 5. | 53 |
| 4.2. | Conjunto de Julia para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$ | 57 |
| 4.3. | Retrato crítico para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$ | 57 |
| 4.4. | Conjunto de Julia para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$ | 58 |
| 4.5. | Retrato crítico para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$ | 59 |
| 4.6. | Retrato crítico restringido para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$ | 66 |
| 4.7. | Retrato crítico restringido para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$ | 67 |
| 4.8. | Gráfica de la entropía como función del argumento externo para $d = 3$ | 78 |

Introducción

El concepto de entropía fue introducido por el Físico-Matemático Clausius Rudolf Emmanuel en 1865, y establece que la energía no sólo puede medirse en cantidad, sino también en calidad; a mayor entropía, menor calidad de la energía y mayor tendencia al caos, [C].

En matemáticas, este concepto fue introducido con la finalidad de medir la complejidad de un sistema. Usando la similitud con la física, se propone que el incremento en el desorden de las órbitas de un sistema tenga asociado el incremento de su entropía.

Dada una función definida de un conjunto compacto X en si mismo, la entropía topológica $h(f)$ es la medida del grado de complejidad en las órbitas de f , más precisamente, la tasa de crecimiento del número de órbitas de f . Es conocido que dado un polinomio $P_d : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado d , $h(P_d) = \log d$. Más aún la entropía de P_d restringida a su conjunto de Julia lleno, es la misma que la entropía de P_d restringida a su conjunto de Julia y es igual a $\log d$, [L].

El concepto de entropía de polinomios reales fue estudiada principalmente por Milnor, Thurston y Tresser, éstos estudiaron la familia cúbica a un parámetro y probaron que la entropía es monótona con respecto al parámetro, [MT, MiT]. Por otro lado, Radulescu estudió el comportamiento de la entropía para funciones logísticas acopladas, usando dinámica simbólica, [R]. Asimismo, Thurston generalizó el concepto de entropía definido para funciones en un intervalo, a la restricción de una función a su árbol de Hubbard, el cual guarda información dinámica de P_d y a esta entropía se llama entropía fundamental (del inglés core entropy).

La entropía fundamental es una herramienta que permite caracterizar el espacio de parámetros de familias de polinomios. Para el caso de polinomios cuadráticos se demostró que la entropía fundamental crece a lo largo de las venas del conjunto de Mandelbrot [Tz1, L]. Además, Tiozzo demostró la continuidad de la entropía fundamental al variar el argumento externo, [Tz2]. En este trabajo generalizaremos los resultados de monotonidad y continuidad para la siguiente familia de

polinomios de grado d a un parámetro,

$$P_a(z) = z^{d-1}\left(z + \frac{da}{d-1}\right),$$

Las propiedades topológicas de las componentes hiperbólicas de esta familia fueron estudiadas en [Ro].

Este trabajo consta de cuatro capítulos. En el capítulo uno se presentan algunos conceptos importantes en el estudio de la dinámica de funciones racionales, como son: conjunto de Julia, conjunto de Fatou, renormalización y árboles de Hubbard. En el capítulo dos se define el concepto de entropía topológica en un espacio topológico, se presentan algunos resultados. Asimismo, definimos la entropía fundamental para polinomios con conjunto postcrítico finito y se muestran algunos resultados para las familias de funciones cuadráticas y cúbicas, los cuales fueron demostrados por Li en [L].

En el capítulo tres se muestra el primer resultado del proyecto de doctorado, el cual consiste en demostrar que la entropía fundamental es monótona en la familia de polinomios de grado $d \geq 3$. Li demostró que la entropía básica es monótona en la familia cuadrática y en una familia de polinomios cúbicos, [L]. Nosotros generalizamos este resultado a una familia de polinomios de grado $d \geq 3$ con dos puntos críticos, uno de los cuales tiene orden máximo. Este resultado se ha escrito en un artículo que ha sido aceptado para publicación en la revista *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, [GB1].

En el capítulo cuatro se describe el algoritmo para calcular la entropía fundamental, propuesto por Thurston para polinomios. Además, se demuestra que para polinomios de grado $d \geq 3$ que tienen dos puntos críticos, donde uno de ellos es de orden máximo, este algoritmo se puede restringir de modo que es posible ignorar a este último. Este resultado fue escrito en un artículo sometido para su publicación en *Entropy*, [GB2]. Además, usando las ideas de Tiozzo, en ese mismo capítulo se demuestra que la entropía fundamental es continua en la frontera de la región de conexidad para polinomios de grado $d \geq 3$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene los conceptos y resultados generales de dinámica holomorfa que son empleados para el desarrollo de este trabajo, como son puntos periódicos, conjunto de Fatou y conjunto de Julia, hiperbolicidad y renormalización entre otros. Aunque muchas definiciones son válidas en un contexto más general, en este capítulo nos centraremos en las propiedades de las funciones analíticas definidas en un subconjunto abierto de $\hat{\mathbb{C}}$, los resultados aquí presentados se pueden consultar en [B, CG, M1].

1.1. Puntos periódicos

El estudio de la dinámica de una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tiene como objetivo mostrar la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$, generada a partir de una condición inicial $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, aplicando repetidamente f , esto es, $z_n = f(z_{n-1})$. Note que si la función es continua y la sucesión $\{z_n\}$ converge a un límite L , entonces

$$f(L) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = L,$$

esto significa que L es un punto fijo de f . Por lo que, los puntos fijos de f juegan un papel muy importante en la dinámica global de f , ya que son los puntos a donde van las sucesiones de iteraciones que convergen.

Definición 1.1.1 *Un punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ es un punto periódico de período k de la función f , si $f^k(z) = z$ y $f^j(z) \neq z$ para $j < k$, donde f^k denota la composición de f consigo misma k veces. Si $k = 1$ decimos que z es punto fijo de f .*

Si en vez de tomar toda la sucesión $\{z_n\}$, tomamos una subsucesión generada por los múltiplos de un número natural k , $\{z_{kn}\}$, usando el mismo argumento que para los puntos fijos, si esta subsucesión tiene un límite, entonces éste es un punto periódico de período l de f , donde $l|k$. Por lo que los puntos periódicos juegan un papel muy importante en las iteraciones de f .

Para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\mathcal{O}_f(z) = \{w \in \mathbb{C} : w = f^k(z) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

se le llama la órbita de z bajo f . En el caso que z es periódico, este conjunto es finito y se le llama órbita periódica.

En muchos casos es complicado determinar los puntos fijos y puntos periódicos de f , y en consecuencia su comportamiento, por lo que en general, se busca una función más fácil de analizar que en cierto sentido tenga las mismas propiedades de f .

Definición 1.1.2 *Dos funciones analíticas f y g , son topológicamente (analíticamente) conjugadas en el abierto $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$, si existe un homeomorfismo (bi-holomorfismo) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\varphi \circ f(z) = g \circ \varphi(z)$ para toda $z \in U$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{g} & \varphi(U). \end{array}$$

Dos funciones conjugadas pueden considerarse la misma función en coordenadas diferentes, desde esta perspectiva se espera que el comportamiento dinámico de dos funciones conjugadas sea el mismo. De la definición de conjugación, se puede verificar que si f y g son dos funciones topológicamente conjugadas por medio de φ y z es un punto fijo de f , entonces $\varphi(z)$ es un punto fijo de g , ya que $g(\varphi(z)) = \varphi(f(z)) = \varphi(z)$. Aplicando inducción sobre n se puede mostrar que esta propiedad también es cierta para los puntos periódicos de f en U .

Definición 1.1.3 *Sea f una función analítica y z un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = Df(z)$, donde $Df(z)$ denota la derivada de f en z . Se dice que z es:*

1. *atractor si $|\lambda| < 1$; si $\lambda = 0$, diremos que z es superatractor,*

2. repulsor si $|\lambda| > 1$,

3. indiferente si $|\lambda| = 1$.

Si $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ es una órbita periódica, cualquier punto z_j puede considerarse como un punto fijo de f^k . Usando la regla de la cadena, se verifica que $Df^k(z_j)$ no depende de j ; por lo tanto, la clasificación anterior es válida para las órbitas periódicas.

Para mostrar la importancia que tiene esta clasificación de puntos periódicos, se enuncian los siguientes resultados, cuyas demostraciones pueden ser revisadas en [CG, B].

El siguiente teorema caracteriza los puntos superatractores para una función analítica f .

Teorema 1.1.4 (Koenigs-1884) *Sea f una función analítica con un punto fijo en z_0 , el cual tiene multiplicador λ . Si $0 < |\lambda| < 1$ ó $|\lambda| > 1$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y de 0 , respectivamente, y un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue analíticamente f con $g(z) = \lambda z$. Además, esta conjugación es única, salvo multiplicación por un escalar real.*

Este teorema nos dice que cerca de los puntos fijos atractores o repulsores las funciones se comportan como multiplicación por λ . En particular, si z_0 es atractor, las órbitas de los puntos en una vecindad de z_0 convergen a z_0 .

Este teorema también es válido para órbitas periódicas atractoras o repulsoras de período k , lo cual se puede verificar sustituyendo f por f^k .

Definición 1.1.5 (Cuenca de Atracción). *Si $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función y z_0 es un punto fijo atractor de f , la cuenca de atracción de z_0 es el conjunto*

$$A_f(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0\}.$$

La cuenca inmediata de atracción de z_0 denotada por $A_f^(z_0)$, es la componente conexa de $A_f(z_0)$ que contiene a z_0 .*

Las cuencas de atracción para puntos k -periódicos atractores se definen usando a f^k en vez de f . Por definición, los puntos k -periódicos atractores siempre tienen dominios inmediatos de atracción abiertos y diferentes del vacío.

Teorema 1.1.6 (Böttcher-1904) Sean f una aplicación analítica y z_0 un punto fijo superatractor. Si $f(z) = z_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$, con $a_k \neq 0$, entonces, existen U, V vecindades de z_0 y 0 , respectivamente, y un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugua $f(z)$ y $g(z) = z^k$. Esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz $(k - 1)$ -ésima de la unidad.

De igual manera que en el teorema de Koenigs, este teorema es válido para órbitas periódicas superatractoras.

Otro elemento importante en el estudio de los sistemas dinámicos es el conjunto postcrítico, ya que éste guarda las órbitas principales del sistema.

El conjunto postcrítico de una función f se define como

$$Post(f) = \overline{\{f^n(z_0) : z_0 \text{ es punto crítico de } f \text{ y } n \in \mathbb{N}\}},$$

es decir, la cerradura de la unión de las órbitas de todos los puntos críticos de f .

El conjunto postcrítico de f , está estrechamente ligado a la dinámica de la función, como lo muestra el siguiente resultado, consecuencia de los trabajos de Fatou, [CG].

Proposición 1.1.7 El conjunto postcrítico $Post(f)$ contiene los ciclos atractores de f y los ciclos indiferentes que pertenecen al conjunto de Julia.

Este resultado particularmente nos dice que todo punto periódico atractor de f , contiene un punto crítico en su cuenca de atracción, de hecho, el punto crítico está en la cuenca inmediata de atracción.

1.2. Conjunto de Julia y conjunto de Fatou

En esta sección se definen los conjuntos de Julia y Fatou para funciones racionales y se considera el caso particular de los polinomios. Las demostraciones de los resultados que se muestran pueden ser consultadas en [B, CG].

Definición 1.2.1 Sea $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en U . La familia \mathcal{F} es normal en $z_0 \in U$, si para toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función f_0 , en subconjuntos compactos de U , contenidos en una vecindad de z_0 .

Definición 1.2.2 Sea R una aplicación racional. Se define el conjunto de Fatou de R , F_R , como el conjunto de puntos $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que la familia $\{R^n\}$ es normal en una vecindad de z_0 . El conjunto de Julia J_R se define como el complemento de F_R .

Los conjuntos de Julia y de Fatou tienen las siguientes propiedades:

1. F_R es abierto.
2. El conjunto J_R es compacto, perfecto y diferente del vacío.
3. Los conjuntos J_R y F_R son completamente invariantes, es decir, $R^{-1}(J_R) = R(J_R) = J_R$ y de igual manera para F_R .
4. Si f denota la k -ésima iterada de R para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir $f = R^k$, entonces $J_R = J_f = J_{R^k}$ y $F_R = F_f = F_{R^k}$.
5. Si $z \in J_R$, entonces, el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z)$ es denso en J_R .
6. Sea z un punto periódico de período k de R .
 - a) Si z es atractor, entonces $z \in F_R$.
 - b) Si z es repulsor, entonces $z \in J_R$.
7. Los puntos periódicos repulsores de R son un conjunto denso en J_R , es decir, $J_R = \overline{\{\text{puntos periódicos repulsores de } R\}}$.

De manera particular, si R es un polinomio P de grado d , entonces el infinito es un punto fijo superatractor y además por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde el polinomio P es analíticamente conjugado a la función z^d . Por lo tanto, la órbita de todos los puntos $z \in U$ converge al infinito.

Se define la cuenca de atracción del infinito como el conjunto

$$A_p(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty\}.$$

Por el principio del módulo máximo, las iteraciones de P son acotadas en las componentes de Fatou acotadas, por lo tanto, $A_p(\infty)$ es conexo y es la única componente de Fatou de P no acotada, además es totalmente invariante. Así, el conjunto de Julia coincide con $\partial A_p(\infty)$.

Definición 1.2.3 Sea P un polinomio. Se define el conjunto de Julia lleno de P como el conjunto de puntos tales que su órbita es acotada, y se denota por K_P , esto es

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_P(z) \text{ es acotada}\}.$$

Note que el conjunto de Julia, J_P , coincide con la frontera de K_P y el conjunto de Fatou, F_P , es la unión del interior de K_P y $A_P(\infty)$.

Propiedades de K_P

Por definición tenemos las siguientes propiedades de K_P .

1. Es compacto, perfecto y diferente del vacío.
2. Es un conjunto lleno, es decir, su complemento en $\hat{\mathbb{C}}$ es conexo.
3. Su frontera es igual al conjunto de Julia de P .

Teorema 1.2.4 (Fatou-1919) Sea P un polinomio. El conjunto K_P es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico de P es acotada.

Por las propiedades que tiene el conjunto de Fatou resulta interesante estudiar el comportamiento de sus componentes. Como el conjunto de Fatou es completamente invariante, la imagen de una de sus componentes conexas es otra componente conexa. Una componente conexa U del conjunto de Fatou es *periódica* si existe un entero $n > 0$ tal que $P^n(U) = U$.

Teorema 1.2.5 (Sullivan-1985) Sea P un polinomio y U una componente del conjunto de Fatou. Entonces cada componente de F_P es eventualmente periódica.

Este teorema nos dice que la órbita de cualquier componente de Fatou de un polinomio termina en una componente periódica.

1.3. Hiperbolicidad

Un concepto fundamental en el estudio de la dinámica holomorfa es la hiperbolicidad, el cual fue desarrollado en los años 1960s y 1970s (por Smale, Anosov, Sinai y muchos otros). En esta sección daremos la definición de hiperbolicidad para funciones racionales y mostraremos las propiedades que hacen a este tipo de funciones bien comportadas, estos resultados pueden ser consultados en [McM].

Definición 1.3.1 *Un función racional $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, es hiperbólica si las órbitas de los puntos críticos convergen a los ciclos periódicos atractores de R .*

En el conjunto de funciones racionales, las hiperbólicas son las mejor comportadas, ya que cuando R es hiperbólica, existe un conjunto finito $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que atrae a un subconjunto abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$ de medida total. El siguiente resultado muestra algunas características de las funciones racionales.

Teorema 1.3.2 (Caracterización de Hiperbolicidad) *Sea $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El conjunto postcrítico $\text{Post}(R)$ es ajeno al conjunto de Julia J_R .*
3. *Cada punto crítico de R converge a un ciclo atractor bajo iteración positiva.*
4. *Existe una métrica conforme suave ρ definida en una vecindad del conjunto de Julia tal que $\|R'(z)\|_\rho > C > 1$ para toda $z \in J_R$.*
5. *Existe un entero $n > 0$ tal que R^n expande estrictamente la métrica esférica en el conjunto de Julia.*

1.4. Familia cuadrática

En esta sección nos restringimos a la familia de polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$ para $c \in \mathbb{C}$, los cuales son polinomios mónicos centrados con punto crítico cero. Los resultados aquí presentados se pueden consultar en [DH1, CG].

Denotemos por $K_c = K_{P_c}$ y $J_c = J_{P_c}$. Del teorema de Fatou 1.2.4 se tienen los siguiente corolarios:

Corolario 1.4.1 *El conjunto J_c es conexo si y sólo si la órbita de cero es acotada.*

Corolario 1.4.2 *El conjunto J_c es un conjunto de Cantor si y sólo si la órbita de cero converge a infinito, es decir, $0 \in A_c(\infty)$.*

Se define el conjunto de Mandelbrot M como

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_c(0) \text{ es acotada}\}.$$

Notemos que si $c = 0$, entonces K_c es el disco unitario cerrado centrado en cero y por lo tanto, es conexo. De aquí tenemos que M es diferente del vacío. En esta sección enunciaremos más propiedades de M y su relación con la dinámica de P_c .

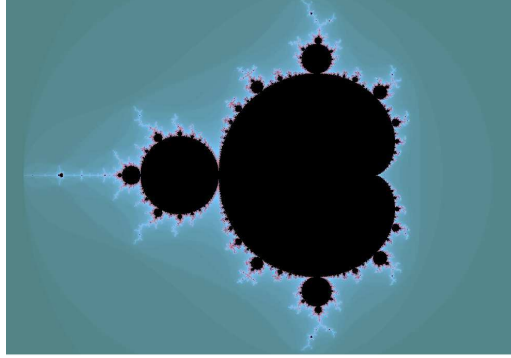


Figura 1.1: Conjunto de Mandelbrot.

Proposición 1.4.3 Sea $S = \max\{2, |c|\}$. Si $|z| > S$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(z) = \infty.$$

Observación 1.4.4 Si $|c| > 2$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = \infty.$$

Corolario 1.4.5 El conjunto M está contenido en el disco

$$\overline{D_2(0)} = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}.$$

Teorema 1.4.6 (Douady-Hubbard-1982) El conjunto M es conexo y compacto. Además, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ es conexo.

Una de las preguntas que aún siguen abiertas con respecto a la familia cuadrática, es la conexidad local de M , aunque en las últimas décadas se han hecho importantes avances al respecto, [DH1, Ly].

Como consecuencia de la definición de hiperbolicidad, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.4.7 Para c en el conjunto de Mandelbrot, el polinomio $P_c(z) = z^2 + c$ es hiperbólico si y sólo si P_c tiene un ciclo atractor en \mathbb{C} .

Definición 1.4.8 Una componente W del interior del conjunto de Mandelbrot M es hiperbólica, si P_c es hiperbólico para alguna c en W .

Si W es una componente del interior de M y $c_0 \in W$ es un parámetro hiperbólico, se puede mostrar que P_c es hiperbólico para toda c en W , [D1]. Además, si W es una componente hiperbólica de M y $c \in W$, entonces P_c tiene un único ciclo atractor. Por lo tanto, se puede definir la función multiplicador $\rho : W \rightarrow \mathbb{D}$, como

$$\rho(c) = DP_c^k(z_i(c)),$$

la cual es un isomorfismo de cada componente hiperbólica W al disco unitario, lo que nos permite definir los siguientes elementos de cada componente hiperbólica W , [DH1].

Definición 1.4.9 *El centro de una componente hiperbólica W , es el parámetro $c \in W$ tal que $DP_c^k(z_i(c)) = 0$, donde $z_i(c)$ es una órbita atractor de período k . Una raíz de W es un parámetro $c \in \overline{W}$, tal que $DP_c^k(z_i(c)) = 1$. Además, se define el rayo interno con ángulo θ de W , como la imagen inversa del arco radial en \mathbb{D} de ángulo θ , esto es $\rho^{-1}(\{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1\})$.*

Dado que el complemento del conjunto de Mandelbrot es simplemente conexo, por el teorema de la aplicación conforme de Riemann, existe un isomorfismo ϕ entre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ y \mathbb{D} . Además, por el teorema de Carathéodory, ϕ se extiende continuamente a la frontera de \mathbb{D} si y sólo si la frontera de M es localmente conexa [McM, D1]. De aquí, demostrar que el conjunto de Mandelbrot es localmente conexo es equivalente a mostrar que el isomorfismo ϕ se puede extender continuamente a la frontera. Para analizar la extensión a la frontera, en primer lugar, daremos más información de este isomorfismo e introduciremos el concepto de rayos externos a M .

Como el polinomio P_c tiene un punto fijo super-atractor en el infinito, por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde el polinomio P_c es analíticamente conjugado a la función z^2 . Denotemos por ϕ_c al bi-holomorfismo que realiza dicha conjugación, deja fijo al infinito y es tangente a la identidad en el infinito. Si U es el conjunto máximo donde ϕ_c conjugua P_c con z^2 , entonces tenemos dos casos:

1. Si $c \in M$, entonces $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus K_c$.
2. Si $c \notin M$, entonces U es una vecindad del infinito que contiene al valor crítico c .

A partir del bi-holomorfismo ϕ_c se puede definir la función

$$\begin{aligned} \Phi_M : \widehat{\mathbb{C}} \setminus M &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \\ c &\mapsto \phi_c(c). \end{aligned}$$

Douady y Hubbard demostraron que esta función es un bi-holomorfismo y relaciona el espacio dinámico con el espacio de parámetros. Para entender el comportamiento de Φ_M en la frontera vamos a definir los rayos externos a M y a J_c . Si $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces el rayo externo a M de ángulo θ es el conjunto

$$R_M(\theta) = \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, 1 < r < \infty\}).$$

Si el $\lim_{r \rightarrow 1} R_M(\theta) = c$, se dice que el rayo de ángulo θ aterriza en c y que c tiene a θ como argumento externo.

Esta definición también es válida para los conjuntos de Julia llenos conexos, si sustituimos a Φ_M por ϕ_c .

Teorema 1.4.10 (Douady-Hubbard-1982) *Sea c un parámetro en la frontera de una componente hiperbólica W de M y con ángulo interno $t \in \mathbb{T}$.*

1. *Si t es racional y $c \neq 1/4$, entonces c tiene dos argumentos externos, es decir, hay dos ángulos θ_1, θ_2 tales que los rayos externos $R_M(\theta_i)$ aterrizan en c , para $i = 1, 2$. Además, los rayos $R_c(\theta_i)$ aterrizan en un punto de la frontera de la componente del interior de K_c que contiene a c y son adyacentes a ésta.*
2. *Si t es irracional, entonces existe un único ángulo θ tal que $R_M(\theta)$ aterriza en c .*

Además, Douady y Hubbard demostraron por una parte, que todos los rayos externos de ángulo racional θ aterrizan en la frontera de M y por otra, que si θ es periódico bajo la función 2θ , entonces $R_M(\theta)$ aterriza en un parámetro c parabólico (P_c tiene una órbita parabólica) y en caso contrario, $R_M(\theta)$ aterriza en un parámetro de Misiurewicz c , (cero es pre-periódico).

1.5. Árboles de Hubbard

Los árboles de Hubbard son una herramienta que permiten construir los ángulos de los rayos externos en el espacio dinámico y ayudan a entender la dinámica de un polinomio en su conjunto de Julia. El árbol de Hubbard está definido para polinomios cuyo conjunto postcrítico es finito, por lo que en esta sección nos restringimos a polinomios con esa característica. Los resultados aquí presentados se pueden consultar en [DH1, Po].

Sea P un polinomio de grado $d \geq 2$, denotemos por $\{U_i\}_{i \in I}$ la familia de componentes conexas de K_P . Para todo $i \in I$, $P(U_i) = U_j$. Además, $P : U_i \rightarrow U_j$

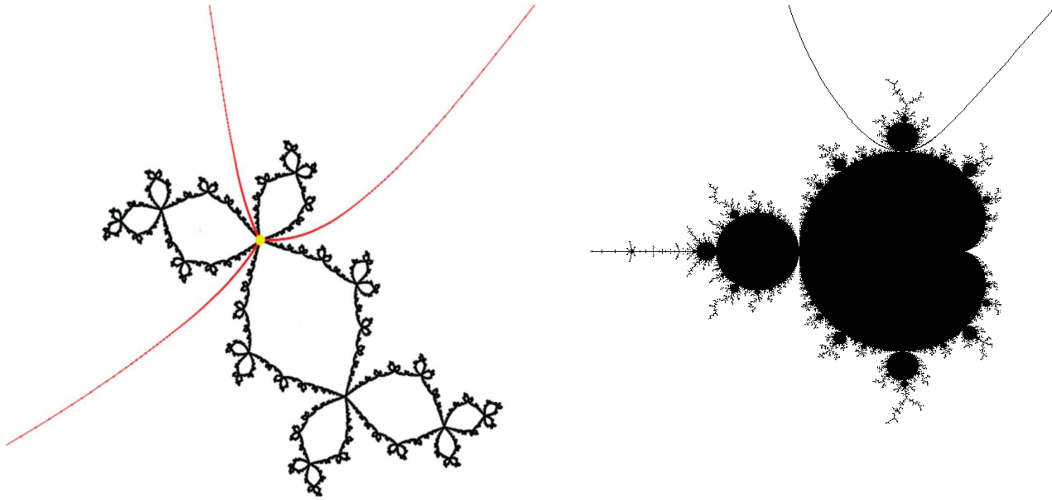


Figura 1.2: Rayos externos a J_c y sus correspondientes en el Mandelbrot.

es propia y holomorfa de grado d_i , donde $d_i - 1$ es el número de puntos críticos, contando multiplicidad, contenidos en U_i .

Dada cualquier componente de Fatou acotada U , existe un homeomorfismo $\phi : \overline{U} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ el cual es holomorfo en U con $\phi(c(U)) = 0$. Un arco radial es un arco en U de la forma $\phi^{-1} \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1\}$. Dado que ϕ es único excepto por una rotación de $\overline{\mathbb{D}}$, los arcos radiales están bien definidos.

Un arco incrustado en el conjunto de Julia lleno $K(P)$ es cualquier subconjunto de $K(P)$ el cual es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Un arco incrustado I es regulado si para toda componente de Fatou acotada U , la intersección $I \cap \overline{U}$ es o bien vacía, un punto o consiste de arcos radiales en \overline{U} .

El siguiente lema se muestra en [Z] para polinomios cuadráticos, pero el argumento es válido para polinomios de grado d .

Lema 1.5.1 *Dados cualesquiera dos puntos $x, y \in K(P)$, existe un único arco regulado $I \subset K$ con puntos extremos x, y . Además, si η es cualquier arco incrustado en $K(P)$ el cual conecta x con y , entonces $I \cap J(P) \subset \eta \cap J(P)$.*

Denotamos el arco regulado I del lema anterior por $[x, y]$. El arco abierto (x, y) se define como $[x, y] \setminus \{x, y\}$. Similarmente, podemos definir un arco semiabierto $[x, y)$. Más en general, dado un conjunto finito de puntos x_1, x_2, \dots, x_n en $K(P)$ existe un único conjunto conexo mas pequeño $[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset K(P)$, el cual

consiste de arcos regulados y contiene estos puntos. Este conjunto siempre es un árbol topológico y se llama el árbol regulado generado por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Definición 1.5.2 *Dado un polinomio P con conjunto postcrítico finito, se define el árbol de Hubbard de P como el árbol regulado mas pequeño que contiene las órbitas de los puntos críticos y se denota por H .*

Algunos puntos importantes que caracterizan un árbol de Hubbard son los siguientes:

Dado un árbol de Hubbard H , un punto $x \in H$ es llamado punto extremo si $H \setminus \{x\}$ es conexo. El conjunto de puntos extremos se denota por ∂H y el número de puntos extremos es $N(H) = \#\partial H$.

Un punto $x \in H$ es llamado punto de ramificación si $H \setminus \{x\}$ tiene mas de dos componentes. El conjunto de puntos de ramificación se denota por $Br(H)$.

Un punto $x \in H$ es un vértice de H si x pertenece a la órbita de un punto crítico o $x \in Br(H)$. Denotamos el conjunto de vértices por $V(H)$. El conjunto de vértices divide al árbol de Hubbard H en un número finito de intervalos topológicos abiertos, I_j con $j = 1, \dots, k$. La clausura de estos intervalos se denominan aristas del árbol de Hubbard. Dos puntos x, y en $V(H)$ son adyacentes si $(x, y) \cap V(H) = \emptyset$.

Nota 1.5.3 *De la definición 1.5.2 se sigue que el árbol H es P -invariante.*

Proposición 1.5.4 *Sea η un arco regulado que no contiene puntos críticos, excepto en sus puntos extremos. Entonces $P_a|_\eta$ es inyectiva y $P_a(\eta)$ es un arco regulado.*

La prueba de esta proposición las podemos consultar en [Po].

Ejemplo 1.5.5 *Considérese el polinomio $P_a(z) = z^3 + 1.5az$, con $a = 1.008797290108 + 0.563206697807i$, P_a tiene dos puntos críticos, $c_0 = 0$ y $c_1 = -a$. Además, se tiene que c_0 es un punto crítico fijo y $-a$ es un punto crítico eventualmente periódico, el cual cae en una órbita de período 3, como se muestra en la figura 1.3.*

1.6. Renormalización

Algunos sistemas dinámicos permiten ser estudiados a pequeña escala, tomando una pequeña pieza del espacio dinámico y considerando la aplicación de primer

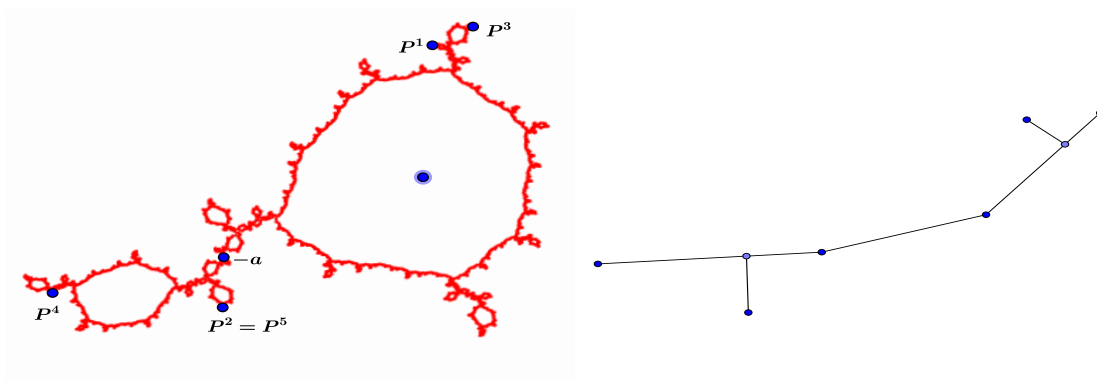


Figura 1.3: Conjunto de Julia y árbol de Hubbard de P_a .

retorno a esta pieza, de tal manera que se obtenga una función de tipo polinomial que permita estudiar la dinámica en esos nuevos espacios. Por otro lado, se tiene el proceso, que en cierto sentido, es inverso a la renormalización, llamado modulación. En esta sección definiremos dichos procesos, para lo cual es necesario introducir algunas propiedades de las funciones de tipo polinomial, las cuales pueden ser consultadas en [DH2, McM].

1.6.1. Funciones de tipo polinomial

Definición 1.6.1 Una función de tipo polinomial de grado d es una tripleta (U, U', f) donde U y U' son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} isomorfos al disco, con U' relativamente compacto en U y $f : U' \rightarrow U$ es una función analítica propia de grado d .

Las funciones tipo polinomial que son interesantes son las de grado $d \geq 2$.

Ejemplo 1.6.2 Los polinomios son los ejemplos más sencillos de funciones de tipo polinomial. En efecto, para ver un polinomio f como una función de tipo polinomial, tómesese a U como un disco de radio suficientemente grande, de modo que todos los valores críticos queden dentro de U y $U' = f^{-1}(U)$. Es claro que $f : U' \rightarrow U$ es una función de tipo polinomial.

Ejemplo 1.6.3 Sea $f(z) = \cos z - 2$, $U' = \{z : |\operatorname{Re}(z)| < 2, \operatorname{Im}(z) < 3\}$. Entonces $U = f(U')$ es la región representada en la figura 1.4 y $f : U' \rightarrow U$ es tipo polinomial de grado 2.

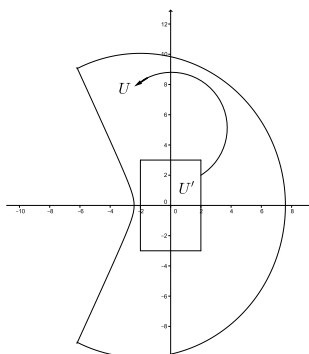


Figura 1.4: Regiones para la función tipo polinomial del ejemplo 1.6.3.

Dada una función f de tipo polinomial se define su conjunto de Julia llenol, como el conjunto de puntos que no escapan del dominio U' , esto es

$$K(f) = \{z \in U' : f^n(z) \in U', n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Por otra parte, conjunto de Julia se define como $J(f) = \partial K(f)$. Estos conjuntos son conexos si y sólo si ninguno de los puntos críticos escapan de la vecindad U' .

La elección del dominio U' y el rango U de una función de tipo polinomial f no esta unívocamente determinado, podemos encontrar un par de conjuntos V' y V de modo que la función $f : V' \rightarrow V$ es tal que la terna (V', V, f) cumpla las propiedades de la definición 1.6.1 con el mismo conjunto de Julia.

Dadas f y g funciones de tipo polinomial, diremos que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo h que va de una vecindad de K_f en una vecindad de K_g tal que $h \circ f(x) = g \circ h(x)$ para toda x en la vecindad. Esto es, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ h(U) & \xrightarrow{g} & h(U). \end{array}$$

Si h es cuasiconforme (analítica), entonces diremos que f y g son cuasiconforme (analíticamente) equivalentes.

Si dicha conjugación h entre f y g es cuasiconforme, con $\bar{\partial}h = 0$ casi donde quiera en el conjunto de Julia lleno $K(f)$, entonces f y g son llamadas híbridas o

internamente equivalentes. Una clase híbrida $\mathcal{H}(f)$ es el conjunto de funciones de tipo polinomial híbridamente equivalentes a f , módulo una equivalencia afín.

Teorema 1.6.4 (Douady-Hubbard) *Cualquier clase híbrida $\mathcal{H}(f)$ de funciones de tipo polinomial de grado d con conjunto de Julia conexo, contiene (salvo conjugación afín) un único polinomio de grado d .*

Una demostración de este teorema se puede consultar en [DH2].

En particular, cualquier clase híbrida de funciones tipo polinomial de grado $d = 2$ con conjunto de Julia conexo, contiene un único polinomio de la forma $P_c(z) = z^2 + c$ con c en el conjunto de Mandelbrot M . Por lo que, las clases híbridas de funciones tipo cuadrático son etiquetadas por los puntos del conjunto de Mandelbrot.

Teorema 1.6.5 (Douady-Hubbard) *Sean $f_i : U_i \rightarrow V_i$ funciones de tipo polinomial de grado d_i , $i = 1, 2$. Supongamos que $f_1 = f_2 = f$ en $U = U_1 \cap U_2$. Sea U' una componente de U con $U' \subset f(U') = V'$. Entonces,*

$$f : U' \rightarrow V',$$

es una función de tipo polinomial con grado $d \leq \max(d_1, d_2)$ y

$$K(f) = K(f_1) \cap K(f_2) \cap U'.$$

Si $d = d_i$, entonces $K(f) = K(f_i)$.

1.6.2. Renormalización

Definición 1.6.6 *Sean f una función analítica y c_k un punto crítico de f . Diremos que una iterada f^n de f es una renormalización de f alrededor de c_k , si existen vecindades U y V con $c_k \in U$ de modo que*

$$f^n : U \rightarrow V$$

es de tipo polinomial con conjunto de Julia conexo.

Dado el conjunto

$$\mathcal{R}(f) = \{n \geq 1 \mid f^n \text{ es renormalizable}\},$$

los enteros n que aparecen en $\mathcal{R}(f)$ son los niveles de renormalización.

Teorema 1.6.7 (Unicidad de renormalización) *Cualesquiera dos renormalizaciones de f^n tienen el mismo conjunto de Julia lleno.*

Si para cada $n \in \mathcal{R}$ tenemos la renormalización $f^n : U_n \rightarrow V_n$, entonces definimos para ésta, sus conjuntos poscrítico, de Julia y de Julia lleno: $Post_n$, J_n y K_n , respectivamente. $f^n : U_n \rightarrow V_n$. Hemos asumido que J_n y K_n son conexos con $Post_n \subset K_n$.

Sea $K(i) = f^i(K_n)$ para $i = 1, \dots, n$. Estos conjuntos de Julia llenos pequeños son permutados cíclicamente por f . Note que $K_n(n) = K_n$.

Teorema 1.6.8 (Conjuntos de Julia casi disjuntos) *Dados dos conjuntos de Julia llenos pequeños $K_n(i)$ y $K_n(j)$ con intersección no vacía, entonces*

$$K_n(i) \cap K_n(j) = \{x\},$$

donde x es un punto fijo repulsor de f^n .

1.6.3. Modulación

El proceso inverso de la renormalización es la modulación en el conjunto de Mandelbrot M , la cual es una herramienta que se emplea para conocer la dinámica de un polinomio P_c a partir de la dinámica de polinomios conocidos. Este concepto y sus propiedades pueden ser consultados en [D2, Ha].

Sea W una componente hiperbólica de M , de período k , con centro en c_0 . Existe una copia M_W de M dentro del conjunto de Mandelbrot en la cual W corresponde a la cardiode principal W_0 . Más precisamente, existe una biyección continua $\psi : M \rightarrow M_W$ tal que:

- a) $\psi(0) = c_0$.
- b) $\psi(W_0) = W$.
- c) $\partial M_W \subset \partial M$.

Para $x \in M$, el punto $\psi(x)$ se llama la modulación de x en c_0 y se denota por $c_0 \perp x$. El conjunto de Julia lleno $K_{c_0 \perp x}$ se obtiene de K_{c_0} de la siguiente manera: para cada componente U del interior de K_{c_0} , reemplazamos en K_{c_0} la parte que corresponde a \overline{U} por una copia de K_x . Además, ψ es un homeomorfismo entre K_x y la parte de $K_{c_0 \perp x}$ que corresponde a \overline{U} en K_{c_0} , el cual conjuga P_x con $P_{c_0 \perp x}^k$.

Capítulo 2

Entropía topológica

En este capítulo introducimos el concepto de entropía topológica, el cual es una medida de la complejidad dinámica de una función. Además, con respecto a dos familias de polinomios, la cuadrática y una de cúbicos, se muestran resultados de la monotonicidad de la entropía restringida al árbol de Hubbard de polinomios con conjunto postcrítico finito. Los conceptos y resultados aquí presentados pueden ser consultados en [BC, D].

2.1. Definición y propiedades

En esta sección daremos la definición de entropía topológica para una función continua $f : X \rightarrow X$, con X un espacio topológico compacto. Dicha definición será abordada usando el concepto de cubierta abierta, los conceptos y propiedades mostrados en esta sección están basados en [BC].

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico compacto. Una cubierta abierta de X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X . Dadas dos cubiertas abiertas α y β , se dice que β es refinamiento de α si cada conjunto abierto de β está contenido en un conjunto abierto de α , y se denota por $\alpha < \beta$.*

Se dice que β es una subcubierta de α , si cada conjunto abierto de β es un conjunto abierto de α .

Definición 2.1.2 *Dadas dos cubiertas abiertas α y β su “unión” $\alpha \vee \beta$, es la cubierta abierta que consta de todos los conjuntos $A \cap B$ con $A \in \alpha$ y $B \in \beta$. Así, $\alpha \vee \beta$ es un refinamiento de las dos cubiertas α y β .*

Dado que X es compacto, cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. La entropía de una cubierta abierta α se define como

$$H(\alpha) = \log(N(\alpha)),$$

donde $N(\alpha)$ es el ínfimo de las cardinalidades sobre todas las subcubiertas finitas. Se puede observar que $H(\alpha) \geq 0$, y la igualdad se da si y sólo si, $X \in \alpha$.

Observación 2.1.3 *i) Si $\alpha < \beta$, entonces*

$$H(\alpha) \leq H(\beta) \text{ y } H(\alpha \vee \beta) = H(\beta).$$

En efecto, como los elementos de α son más grandes, entonces es posible que se requieran menos elementos de α que de β para cubrir X . La igualdad se tiene debido que cada abierto de β está contenido en algún abierto de α . Por lo tanto, los elementos de $\alpha \vee \beta$ son elementos de β , de donde se concluye que $\text{Card}(\alpha \vee \beta) = \text{Card}(\beta)$.

$$\text{ii) } H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

Lo cual se obtiene del hecho de que $\text{Card}(\alpha \vee \beta) \leq \text{Card}(\alpha)\text{Card}(\beta)$, y de la propiedad del logaritmo natural de un producto.

Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para cualquier cubierta abierta α de X , denotamos por $f^{-n}\alpha$ a la cubierta que consta de los subconjuntos de la forma $f^{-n}(A)$, con $A \in \alpha$, y por α^n al conjunto $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha$. Un elemento no vacío

$$W = U_0 \cap f^{-1}(U_0) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(U_0)$$

de α^n , corresponde a un itinerario en α , es decir, una sucesión $(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ tal que existe $x \in X$ que satisface $f^i(x) \in U_i$ para $i = 0, \dots, n-1$. Para las cubiertas refinadas se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{iii) si } \alpha < \beta, \text{ entonces } f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta.$$

Ya que si $A \subseteq B$ entonces, $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Además, como la imagen inversa es bien comportada con respecto a la intersección de conjuntos se tiene

$$\text{iv) } f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta.$$

Además,

v) $H(f^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$, y la igualdad se tiene si f es suprayectiva.

Ya que $f(X) \subseteq X$, cualquier cubierta de X es cubierta de $f(X)$. Si f es sobre $X = f(X)$, por lo tanto, en este caso se da la igualdad.

De iv), ii) y v) se obtiene que para cualesquiera enteros positivos m y n .

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m-n+1}\alpha) &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha \vee f^{-m}\alpha \vee f^{-m-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-m-n+1}\alpha) \\ &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha \vee f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha). \end{aligned}$$

En consecuencia, el límite

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n},$$

existe de acuerdo con el siguiente resultado de análisis, cuya demostración puede ser consultada en [BC].

Lema 2.1.4 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, la cual es subaditiva, es decir,*

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ existe y es igual a $\inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$.

Al límite $h(f, \alpha)$ se le llama entropía topológica de f relativa a la cubierta α y satisface

$$0 \leq h(f, \alpha) \leq H(\alpha).$$

Dadas dos cubiertas α y β de X , de i), iii) y usando las propiedades del ínfimo se obtiene:

vi) si $\alpha < \beta$, entonces $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Afirmación 2.1.5 *Si f es un homeomorfismo, entonces $h(f^{-1}, \alpha) = h(f, \alpha)$.*

$$\begin{aligned}
H(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha) &= H(f^{n-1}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\
&= H(f^{n-1}\alpha \vee \dots \vee \alpha) \\
&= H(\alpha \vee f\alpha \vee \dots \vee f^{n-1}\alpha) \\
&= H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha)}{n}.$$



Definición 2.1.6 Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, al número

$$h(f) = \sup_{\alpha} h(f, \alpha),$$

se le llama *entropía topológica de f* , donde el supremo se toma sobre todas las cubiertas abiertas α de X .

De vi) se obtiene que es suficiente tomar el supremo sobre todas las cubiertas abiertas finitas, Note que $0 \leq h(f) \leq +\infty$.

Proposición 2.1.7 Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua en un espacio métrico compacto X , entonces

$$h(f^k) = kh(f),$$

para todo entero $k > 0$.

Demostración. Para cualquier cubierta abierta α se tiene que

$$\begin{aligned}
h(f^k) &\geq h(f^k, \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-k+1}\alpha) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kH(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-k+1}\alpha \vee f^{-k}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha)}{nk} \\
&= kh(f, \alpha).
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para cualquier cubierta abierta α , por la propiedad del supremo, se concluye que

$$h(f^k) \geq kh(f).$$

Por otro lado,

$$\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha \leq \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha,$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha)}{nk} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha)}{nk} \\ &= \frac{h(f^k, \alpha)}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$kh(f, \alpha) \geq h(f^k, \alpha).$$

De donde se concluye que

$$kh(f) \geq h(f^k).$$

Lo cual completa la demostración. ◀

Proposición 2.1.8 *Si $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces $h(f) = h(f^{-1})$.*

La prueba de esta proposición se sigue directamente de la afirmación 2.1.5.

Proposición 2.1.9 *Sean X y Y espacios topológicos compactos. Si $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$, son funciones continuas que son conjugadas via un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$, entonces $h(f) = h(g)$.*

Demostración. Si α es una cubierta abierta de Y , puesto que φ es sobreyectiva, entonces $\varphi^{-1}\alpha$ es una cubierta abierta de X . Además, como f y g son conjugadas por φ , tenemos que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. En consecuencia, $\varphi \circ f^k = g^k \circ \varphi$ y

$$\begin{aligned}
h(g, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha)}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha))}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee \varphi^{-1}g^{-1}\alpha \vee \dots \vee \varphi^{-1}g^{-n+1}\alpha)}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee f^{-1}\varphi^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\varphi^{-1}\alpha)}{n} \\
&= h(f, \varphi^{-1}\alpha).
\end{aligned}$$

Ahora bien, por cada cubierta α de Y , tenemos la cubierta $\varphi^{-1}\alpha$. Entonces por la propiedad del supremo $h(g) \leq h(f)$.

Como φ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1} \circ g = f \circ \varphi^{-1}$. Luego, dada una cubierta abierta α de X existe la correspondiente cubierta $\varphi\alpha$ de Y , por lo tanto, $h(f) \leq h(g)$.

De las dos desigualdades se concluye que $h(f) = h(g)$. ◀

Este resultado muestra que la entropía topológica es un invariante bajo la conjugación topológica.

Ahora vamos estudiar cómo se relaciona la entropía topológica de una función en todo su dominio X , con la entropía de f restringida a un subconjunto invariante Y . Posteriormente, como un caso especial, mostraremos un teorema de Bowen, el cual establece que la entropía topológica de una función se concentra en su conjunto no errante. La siguiente proposición nos muestra dicha relación.

Proposición 2.1.10 *Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua, y Y es un subconjunto cerrado e invariante de X bajo f , entonces $h(f|_Y) \leq h(f)$.*

Demostración. Sea α una cubierta abierta de Y , para cada $A \in \alpha$ existe un subconjunto abierto \tilde{A} de X tal que $A = \tilde{A} \cap Y$. La colección de estos subconjuntos \tilde{A} , junto con el conjunto abierto $X \setminus Y$, forman una cubierta abierta $\tilde{\alpha}$ de X . Si $g = f|_Y$ y n es un entero positivo, entonces

$$H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha) = H(\tilde{\alpha} \vee f^{-1}\tilde{\alpha} \vee \dots \vee f^{-n+1}\tilde{\alpha}).$$

De ello se deduce que $h(g, \alpha) \leq h(f, \tilde{\alpha}) \leq h(f)$ y por lo tanto, como α fue arbitraria $h(g) \leq h(f)$. ◀

Además, si el espacio X se puede dividir en conjuntos totalmente invariantes, la entropía se puede estudiar en cada uno de ellos como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.11 *Si $X = X_1 \cup X_2$ con X_i compacto y f -invariante para $i = 1, 2$, entonces $h(f, X) = \max\{h(f, X_1), h(f, X_2)\}$.*

Entre todos los subconjuntos cerrados del dominio de f , existe uno de gran importancia para el estudio de la dinámica del sistema, éste es el conjunto no errante, el cual se define enseguida.

Definición 2.1.12 *Un punto $x \in X$, es no errante si para toda vecindad U de x , existe $m \geq 1$ tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no errantes se llama el conjunto no errante de f y se denota por $\Omega(f)$.*

En otras palabras, $x \in X$ es un punto no errante de f si cada conjunto abierto que contiene a x , contiene al menos dos puntos de una misma órbita. El siguiente teorema muestra que la complejidad en la dinámica de f está en su conjunto no errante.

Teorema 2.1.13 *Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua, entonces $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.*

Demostración. De la proposición 2.1.10 se tiene que $h(f|_{\Omega(f)}) \leq h(f)$. Por lo que, sólo tenemos que demostrar que $h(f) \leq h(f|_{\Omega(f)})$.

Para ello primero vamos a demostrar que si una cubierta abierta α de X , tiene la propiedad de que $\Omega(f) \subseteq A$ para algún $A \in \alpha$, entonces $h(f, \alpha) = 0$.

En efecto, para cada $x \in X \setminus \Omega(f)$, sea A_x un conjunto abierto en α que contiene a x . Entonces existe una vecindad abierta B_x de x tal que $B_x \subseteq A_x$ y $f^k(B_x) \cap B_x = \emptyset$ para cada número entero positivo k . La colección α' de todos los conjuntos B_x junto con A es una cubierta abierta de X , la cual es un refinamiento de α . Sea $\beta = \{A, B_{x_1}, \dots, B_{x_t}\}$ una subcubierta finita de α' con $t > 1$. Como $\alpha < \beta$, entonces es suficiente demostrar que $h(f, \beta) = 0$.

Para un número entero positivo n , sea β^n el conjunto de todas las sucesiones $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$, donde cada C_i es un conjunto abierto de β . Se define una aplicación φ de β^n a $\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta$ por

$$\varphi(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) = C_0 \cap f^{-1}(C_1) \cap \dots \cap f^{-n+1}(C_{n-1}).$$

Si para alguna sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) \in \beta^n$, el número de términos C_i diferentes de A es mayor que t , entonces no existe j y k con $j < k$, tales que $C_j = C_k = B_{x_s}$ para alguna s . Entonces, $\varphi(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) = \emptyset$, ya que si $x \in C_0 \cap f^{-1}(C_1) \cap \dots \cap f^{-n+1}(C_{n-1})$ se tiene que $x \in f^{-j}(B_{x_s}) \cap \dots \cap f^{-k}(B_{x_s})$, lo que significa que $f^j(x) \in B_{x_s}$ y $f^k(x) \in B_{x_s}$, por lo tanto, $f^{k-j}(B_{x_s}) \cap B_{x_s} \neq \emptyset$, esto contradice la definición de los conjuntos B_x . Por lo tanto, el número de conjuntos no vacíos en la cubierta abierta $\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta$ no es mayor que el número de sucesiones $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) \in \beta^n$ con a lo más t términos diferentes de A . Así,

$$\begin{aligned} N(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta) &\leq 1 + \binom{n}{1}t + \dots + \binom{n}{t}t^t \\ &\leq n^t t^{t+1}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(f, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta)}{n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^t t^{t+1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \log n + (t+1) \log t}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(f, \beta) = 0$, como queríamos probar.

Si α es cualquier cubierta abierta de X y k cualquier entero positivo, entonces

$$k\alpha = \{A_1 \cup \dots \cup A_k : A_i \in \alpha\}$$

es una cubierta abierta de X .

Observe que se cumplen las siguientes propiedades.

- i) $N(\alpha) \leq kN(k\alpha)$.
- ii) $f^{-1}(k\alpha) = kf^{-1}(\alpha)$.
- iii) Si $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ son cubiertas abiertas de X , entonces

$$k\alpha_0 \vee \dots \vee k\alpha_{n-1}$$

es una subcubierta de $k^n(\alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{n-1})$.

De lo anterior se sigue que

- iv) $h(f, k\alpha) \geq h(f, \alpha) - \log k$,
ya que

$$\begin{aligned} h(f, k\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k\alpha \vee f^{-1}(k\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(k\alpha))}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k\alpha \vee kf^{-1}\alpha \vee \dots \vee kf^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k^n(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha))}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)/k^n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)/n] - \frac{n \log k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} - \log k \\ &= h(f, \alpha) - \log k. \end{aligned}$$

Si α es cualquier cubierta abierta de X y Y es un subconjunto cerrado invariante de X , denotamos por $\alpha|_Y$ la cubierta abierta $\{A \cap Y : A \in \alpha\}$ de Y . De ello se tienen las siguientes propiedades

v) $f^{-1}(\alpha) |_Y = (f |_Y)^{-1}(\alpha |_Y)$.

vi) Si β es cualquier otra cubierta abierta de X , entonces

$$(\alpha \vee \beta) |_Y = (\alpha |_Y) \vee (\beta |_Y).$$

vii) Si Z es un subconjunto cerrado e invariante de Y , entonces

$$N(\alpha |_Z) = N(\alpha |_Y).$$

viii) También se cumple que si α es cualquier cubierta abierta de X , entonces

$$h(f, \alpha) \leq H(f |_{\Omega(f)})$$

Sea $k = N(\alpha |_{\Omega(f)})$ y sea $\{A_1 \cap \Omega(f), \dots, A_k \cap \Omega(f)\}$, donde $\{A_1, \dots, A_k\}$ es una subcubierta de $\alpha |_{\Omega}$ que contiene k elementos. Entonces

$$\alpha'' = \{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A : A \in \alpha\},$$

es una subcubierta de $k\alpha$. Usando iv) se tiene que

$$h(f, \alpha'') \geq h(f, k\alpha) \geq h(f, \alpha) - \log k.$$

Pero $h(f, \alpha'') = 0$ por la primera parte de la prueba, ya que $\Omega(f) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k$. Así, por viii) $h(f, \alpha) \leq \log k$.

Finalmente, sea α cualquier cubierta abierta de X y m un entero positivo, tomando $\gamma = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha$, se tiene que

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-mn+1}\alpha)}{mn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\gamma \vee f^{-m}\gamma \vee \dots \vee f^{-(n-1)m}\alpha)}{mn} \\ &= \frac{h(f^m, \gamma)}{m}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de viii) se sigue que

$$h(f^m, \gamma) \leq H(\gamma |_{\Omega(f^m)}) \leq H(\gamma |_{\Omega(f)}).$$

Además, de v) y vi) se tiene que

$$H(\gamma |_{\Omega(f)}) = H(\alpha |_{\Omega(f)} \vee (f |_{\Omega(f)})^{-1}(\alpha |_{\Omega(f)}) \vee \dots \vee (f |_{\Omega(f)})^{-m+1}(\alpha |_{\Omega(f)})),$$

por lo que,

$$h(f, \alpha) \leq h(f |_{\Omega(f)}, \alpha |_{\Omega(f)}).$$

Como esto se vale para cualquier cubierta α concluimos que $h(f) \leq h(f |_{\Omega(f)})$ y con ello la demostración. ◀

2.2. Entropía topológica fundamental

En esta sección se estudia la entropía topológica restringida al árbol de Hubbard, a la cual se le denomina entropía topológica fundamental (del inglés *Core Entropy*). La razón por la cual el estudio de la entropía se restringe al árbol de Hubbard, se debe al hecho de que para familias de polinomios en variable compleja, la entropía restringida al conjunto de Julia es constante y sólo depende del grado de los polinomios de la familia, [D, L]. Por ello, Thurston propuso restringir el estudio de la entropía para un polinomio con conjunto posterítico finito, a su árbol de Hubbard, la cual llamó entropía fundamental. Ya que el árbol de Hubbard es invariante bajo la dinámica, este enfoque generaliza el estudio de la entropía en un intervalo invariante en el caso de polinomios en variable real y permite clasificar el comportamiento de algunas familias de polinomios.

La entropía fundamental es una herramienta para estudiar el espacio de parámetros de familias de polinomios. Douady estudió la entropía topológica en la familia cuadrática con variable real y demostró que ésta es monótona, [D]. Radulescu estudió una familia de polinomios reales de grado cuatro a dos parámetros, donde cada polinomio se obtiene como composición de dos polinomios de grado dos y demostró propiedades de monotonocidad en el espacio de parámetros, [R]. Para polinomios con variable compleja, se estudia la entropía fundamental y en este caso Tao Li demostró que para polinomios cuadráticos y cúbicos la entropía fundamental crece a lo largo de las venas del conjunto de Mandelbrot. Los conceptos y resultados aquí presentados pueden ser consultados en [L, T].

2.2.1. Caso cuadrático

En el conjunto de Mandelbrot M se define el conjunto M^0 que consiste de todos los parámetros para los cuales el polinomio correspondiente tiene conjunto

postcrítico finito. Además, se define un orden parcial \prec en M^0 de la siguiente manera: dados dos parámetros c_1 y c_2 en M^0 diremos que $c_2 \prec c_1$ si c_2 (o la raíz de la componente hiperbólica que contiene a c_2) separa a c_1 del cero en M .

Si $c_2 \prec c_1$, los números de puntos extremos de los árboles $H(c_2)$, $H(c_1)$ correspondientes se relacionan de la siguiente manera.

Proposición 2.2.1 Sean $c_1, c_2 \in M^0$. Si $c_2 \prec c_1$, entonces $N(c_2) \leq N(c_1)$.

Teorema 2.2.2 (Li-2007) Dados dos parámetros c_2 y c_1 en M^0 , si $c_2 \prec c_1$, entonces $h(H(c_2), P_{c_2}) \leq h(H(c_1), P_{c_1})$, donde $H(c_i)$ denota el árbol de Hubbard correspondiente a P_{c_i} .

La prueba de este resultado se divide en dos casos. El primero cuando $c_2 \prec c_1$ y $N(c_1) = N(c_2)$, en el cual la herramienta principal para la prueba son los rayos externos y el teorema de Carathéodory. El segundo caso, cuando $c_2 \prec c_1$ y $N(c_2) < N(c_1)$, cuya demostración hace uso de herramientas de combinatoria y particiones de Markov, [D].

2.2.2. Caso cúbico

En [T] se estudia la entropía topológica fundamental para polinomios cúbicos con conjunto postcrítico finito y que tienen un punto crítico fijo. Estos polinomios pueden ser representados por la familia $P_a(z) = z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a$, en la cual para $a = 0$, P_a tiene un único punto crítico.

De manera análoga al caso cuadrático, se define el lugar de conexidad \mathcal{C} como el conjunto de parámetros para los cuales el polinomio correspondiente tiene conjunto de Julia conexo. Es decir,

$$\mathcal{C} = \{a \in \mathbb{C} : J_a \text{ es conexo.}\}.$$

Denotemos por \mathcal{C}^0 el subconjunto de \mathcal{C} que consiste de todos los parámetros para los cuales el polinomio correspondiente tiene conjunto postcrítico finito. Se define un orden parcial \prec en \mathcal{C}^0 de la siguiente manera: dados dos parámetros a_1 y a_2 en \mathcal{C}^0 diremos que $a_2 \prec a_1$ si a_2 (o la raíz de la componente hiperbólica que contiene a a_2) separa a a_1 del cero en \mathcal{C} .

De manera similar al caso cuadrático, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.3 (Li-2007) Dados dos parámetros a_2 y a_1 en \mathcal{C}^0 , si $a_2 \prec a_1$, entonces $h(H(a_2), P_{a_2}) \leq h(H(a_1), P_{a_1})$, donde $H(a_1)$ y $H(a_2)$ son los árboles de Hubbard de P_{a_1} y P_{a_2} , respectivamente.

En el siguiente capítulo, generalizaremos este resultado a polinomios de grado superior.

Capítulo 3

Entropía fundamental para polinomios de grado d

En este capítulo se generaliza el teorema 2.2.3 a una familia de polinomios de grado d a un parámetro, la cual consiste de polinomios de grado $d \geq 3$ que tienen un punto crítico fijo de orden máximo. En este caso, se muestra que la entropía fundamental es monótona cuando movemos el parámetro hacia la frontera del lugar de conexidad.

La familia de polinomios con un punto crítico fijo de orden máximo es descrita módulo conjugación afín, como la familia de polinomios $\{P_a : a \in \mathbb{C}\}$ de la forma

$$P_a(z) = z^{d-1} \left(z + \frac{da}{d-1} \right), \quad (3.1)$$

donde el parámetro a es un número complejo y P_a tiene dos puntos críticos, 0 que es el punto crítico de orden máximo y $-a$ que es un punto crítico simple.

La dinámica de esta familia y la topología de las componentes hiperbólicas en el espacio de parámetros de la misma, han sido estudiados por Roesch en [Ro]. Para formular nuestro resultado, parte de los objetivos de esta tesis, definimos un orden parcial en el espacio de parámetros, siguiendo las ideas del trabajo de Kaffl, [K], de la siguiente manera:

diremos que $a \prec b$ si el polinomio P_a está dinámicamente contenido en el polinomio P_b . Empleando este orden se tiene el siguiente resultado.

Teorema. *Dados dos parámetros a_2 y a_1 que representan polinomios de grado d con conjunto postcrítico finito y punto crítico $-a_i$ periódico, si $a_2 \prec a_1$ entonces $h(H(a_2), P_{a_2}) \leq h(H(a_1), P_{a_1})$. Donde $H(a_1)$ y $H(a_2)$ denotan el árbol de Hubbard*

de P_{a_1} y P_{a_2} , respectivamente.

Para la demostración de este resultado se hará uso de los rayos externos y la conjugación de la dinámica de polinomios de grado d con la multiplicación por d .

3.1. Espacio de parámetros y espacio dinámico

Comenzamos recordando parte de las propiedades presentadas en la sección 1.2, adaptadas a nuestro caso de interés. Dado un polinomio P_a el conjunto de Julia lleno K_a de P_a consiste de los puntos cuya órbita no escapa al infinito y el conjunto de Julia J_a de P_a , es la frontera de K_a .

La región de conexidad de la familia $P_a(z)$ se define como

$$\mathcal{C} = \{a \in \mathbb{C} : J_a \text{ es conexo}\}.$$

El conjunto de parámetros está dividido en dos regiones \mathcal{C} y W_∞ , donde W_∞ es el conjunto de todos los parámetros para los cuales el punto crítico libre $-a$ es atraído por ∞ . En la figura 3.1 se muestra la región de conexidad para $d = 4$ y $d = 5$. Dentro de la región de conexidad nos interesa el estudio de parámetros que

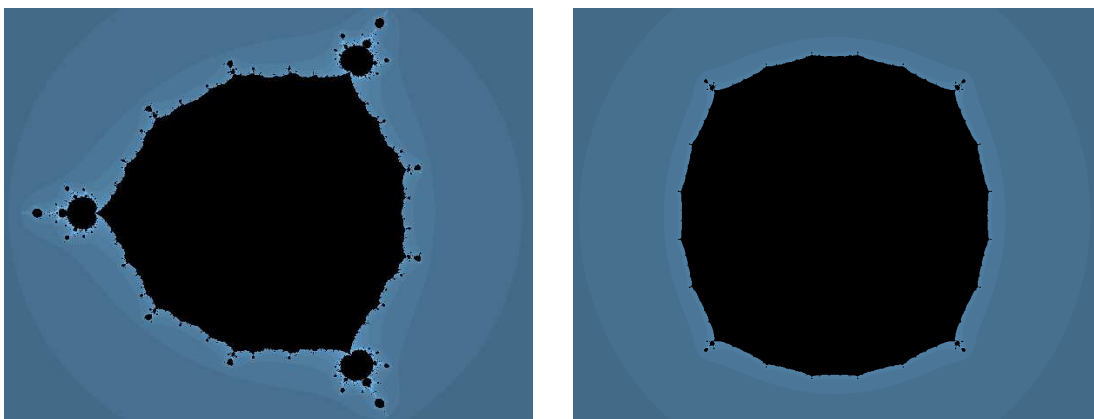


Figura 3.1: Regiones de conexidad para $d = 4$ y $d = 5$.

representan polinomios con conjunto postcrítico finito \mathcal{C}^0 .

Note que si $a \in \mathcal{C}$, entonces $K_a \neq J_a$, dado que K_a contiene la cuenca de atracción de 0, $\tilde{B}_a = \{z \in \mathbb{C} : P_a^n(z) \rightarrow 0\}$. Denotamos por B_a la cuenca inmediata

de atracción del cero, esto es, la componente de \tilde{B}_a que contiene a 0. Se sigue del principio del módulo máximo que B_a es topológicamente un disco. Si $-a \notin B_a$, entonces el polinomio $P_a|_{B_a}$ es conjugado a z^{d-1} en \mathbb{D} . De otro modo $\tilde{B}_a = B_a$.

Para los puntos fijos superatractores $p = 0, \infty$, por el teorema 1.1.6, de Bötcher, existen vecindades V_a^p, W_a^p de p tal que $P_a(V_a^p) \subset V_a^p$ e isomorfismos conformes $\varphi_a^p : V_a^p \rightarrow W_a^p$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} V_a^\infty & \xrightarrow{P_a} & V_a^\infty \\ \varphi_a^\infty \downarrow & & \downarrow \varphi_a^\infty \\ W_a^\infty & \xrightarrow{z^d} & W_a^\infty \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V_a^0 & \xrightarrow{P_a} & V_a^0 \\ \varphi_a^0 \downarrow & & \downarrow \varphi_a^0 \\ W_a^0 & \xrightarrow{z^{d-1}} & W_a^0, \end{array}$$

es decir,

$$\varphi_a^0 \circ P_a = (\varphi_a^0)^{d-1} \text{ en } V_a^0 \quad \text{y} \quad \varphi_a^\infty \circ P_a = (\varphi_a^\infty)^d \text{ en } V_a^\infty,$$

con φ_a^∞ tangente a la identidad cerca de ∞ , es decir, $\frac{\varphi_a^\infty(z)}{z} \rightarrow 1$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ y φ_a^0 tangente a $z \rightarrow \lambda(a)z$ alrededor del cero, donde $\lambda(a)$ es una raíz $d-2$ -ésima de $\frac{da}{d-1}$. Estas conjugaciones permiten definir equipotenciales rayos externos y rayos internos.

Por otro lado, si $a \in \mathcal{C}^0$, entonces J_a es localmente conexo. Por lo tanto, el conjunto V_a^∞ es el conjunto $\mathbb{C} \setminus K_a$.

La rotación $\tau(z) = \tau z$, donde $\tau = e^{\frac{2\pi i}{d-1}}$, es la única conjugación conforme entre dos polinomios P_a y $P_{a'}$; esto es $P_{\tau a}(\tau z) = \tau(P_a(z))$. Además, P_a es conjugado al polinomio $P_{\bar{a}}$ por la conjugación compleja $\sigma(z) = \bar{z}$. De este modo, un dominio fundamental para el estudio de la familia de polinomios P_a es

$$\mathbf{S} = \left\{ a \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(a) \leq \frac{1}{2(d-1)} \right\}.$$

Definición 3.1.1 *La componente conexa W_0 es el conjunto $\{a : -a \in B_a\}$.*

De acuerdo con Milnor, existen cuatro posibles tipos de componentes hiperbólicas acotadas en la familia de polinomios con dos puntos críticos,

Componente Adyacente: Es una componente hiperbólica para la cual los dos puntos críticos están en la misma componente de la cuenca inmediata de atracción de una órbita periódica.

Componente bitransitiva: Es una componente hiperbólica para la cual los dos puntos críticos están en diferentes componentes de la cuenca inmediata de atracción

de una órbita periódica.

Componente captura: Es una componente hiperbólica para la cual únicamente un punto crítico está en la cuenca inmediata de atracción de una órbita periódica pero el otro es atraído por ésta.

Componente disjunta: Es una componente hiperbólica para la cual hay dos órbitas periódicas distintas, tal que, cada una de ellas atrae un punto crítico, véase [M3].

En el caso que 0 es un punto fijo, no existen componente bitransitivas dado que el 0 es super atractor. Por otro lado la componente principal W_0 es la única componente adyacente y aparecen componentes tipo captura y tipo disjunta.

Definición 3.1.2 Una componente captura se dice que tiene profundidad i , si es una componente conexa del conjunto $W_i = \{a \in \mathcal{C} : P_a^i(-a) \in B_a \text{ y } P_a^{i-1}(-a) \notin B_a\}$.

La región de conexidad \mathcal{C} es compacta y conexa, además W_∞ es isomorfo a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, [Ro]. De hecho, el isomorfismo

$$\phi_\infty : \mathbb{C} \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

se define como $\phi_\infty(a) = \varphi_a^\infty(P_a(-a))$, donde φ_a^∞ es la coordenada de Böttcher de P_a en el infinito, para $a \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$. A partir de φ_a^∞ podemos definir los rayos externos $\mathcal{R}_a(\theta)$ a K_a y con ϕ_∞ podemos definir los rayos externos $\mathcal{R}_\mathcal{C}(\theta)$ a \mathcal{C} .

Las siguientes dos proposiciones muestran algunas de las características importantes de los rayos externos con argumento racional. La prueba de cada una de ellas puede ser consultada en [Ro].

Proposición 3.1.3 Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces el rayo externo $\mathcal{R}_\mathcal{C}(\alpha)$ aterriza en el parámetro $a(\alpha) \in \mathcal{C}$. Además, $P_{a(\alpha)}$ tiene conjunto postcrítico finito.

Proposición 3.1.4 Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces en el plano dinámico de P_a , el rayo externo $\mathcal{R}_a(\alpha)$ aterriza en $P_a(-a)$ (o en la raíz de la componente de Fatou U_α que contiene a $P_a(-a)$). Además, para $l = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, se tiene que:

- Si $\frac{\alpha}{d} + \frac{l}{d}$, $(\frac{\alpha}{d} + \frac{l+1}{d})$ es periódico por multiplicación por d , entonces $a(\alpha)$ es un parámetro parabólico y el rayo $\mathcal{R}_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l}{d})$ ($\mathcal{R}_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l+1}{d})$ respectivamente) aterriza en la raíz p de la componente de Fatou que contiene al punto crítico $-a$ y el rayo $\mathcal{R}_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l+1}{d})$ ($\mathcal{R}_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l}{d})$ respectivamente) aterriza en la preimagen de $P_a(p)$ en ∂U_α .

- En otro caso, $a(\alpha)$ es un parámetro de Misiurewicz y los rayos $R_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l}{d})$, $R_a(\frac{\alpha}{d} + \frac{l+1}{d})$ aterrizan en el punto $-a$.

Dentro de la región de conexidad \mathcal{C} analizaremos el conjunto de parámetros $a \in \mathcal{C}$ para los cuales P_a tiene conjunto postcrítico finito. A este conjunto lo denotamos por \mathcal{C}^0

Dado $a \in \mathcal{C}^0$, como P_a tiene un punto fijo superatractor en 0, el interior $\text{int}(K_a)$ del conjunto de Julia lleno es no vacío. Toda componente U del $\text{int}(K_a)$ es una componente de Fatou acotada, con cerradura \overline{U} homeomorfa al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$. Además, toda componente U es eventualmente periódica. Por lo tanto, si $-a$ es preperiódico, entonces U es enviada en la componente B_a y si $-a$ es periódico, entonces U es enviada en la componente B_a o en la componente periódica U_{-a} que contiene a $-a$.

El centro $c(U)$ de la componente U se define como la única imagen inversa de 0 o $-a$ que está en U , vía el homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, en particular, $c(B_a)$ es 0.

Lema 3.1.5 *Dado un polinomio $P_a(z)$ de grado d con $a \in \mathcal{C}^0$, sea $N(a)$ el número de puntos extremos de $H(a)$. Suponga que $0 \notin \partial(H(a))$. Entonces el conjunto*

$$\{P_a(-a), \dots, P_a^{N(a)}(-a)\},$$

está formado exactamente por los únicos puntos extremos del árbol de Hubbard $H(a)$.

Demostración. Supongamos que $a \neq 0$ y que el punto crítico libre $-a$ es un punto extremo de $H(a)$ no fijo. Cualquier punto no extremo que es enviado en un punto extremo, debe ser un punto crítico. Pero el punto crítico 0 es fijo, por lo tanto, no existe punto no extremo que sea enviado en $-a$, concluimos que la preimagen de $-a$ es un punto extremo. Por lo tanto, $-a$ es periódico y su órbita es exactamente el conjunto de puntos extremos.

Ahora supongamos que $a \neq 0$ y que el punto crítico libre $-a$ no es un punto extremo de $H(a)$. Dado que P_a es localmente inyectiva, excepto en los puntos críticos y que el punto crítico 0 es fijo, entonces el único punto no extremo que es llevado a un punto extremo, es el punto crítico $-a$. De donde concluimos que los puntos extremos de $H(a)$ están generados por las primeras iteraciones del punto crítico.

◀

3.2. Entropía en las copias del conjunto de Mandelbrot

Comenzando en la componente principal W_0 , a lo largo de cualquier dirección $t \in \mathbb{T}$, para t periódico bajo multiplicación por $d-1$, existe una copia pequeña del conjunto de Mandelbrot directamente pegada a W_0 , [Ro]. Denotando el centro de esta copia por $a(t)$, entonces la copia pequeña del conjunto de Mandelbrot puede representarse por $P_{a(t)} * \mathcal{M}$.

Supongamos que el ángulo $t \in \mathbb{Q}$ y el punto crítico $-a(t)$ tiene período k . Entonces el árbol de Hubbard $H(a(t))$ consiste de k aristas radiales saliendo de un vértice central ubicado en el cero, conectando a un punto de la órbita del punto crítico libre $-a(t)$, el polinomio $P_{a(t)}$ actuando en $H(a(t))$, es conjugado a multiplicación por $d-1$ en estas aristas. Luego, $h(H(a(t)), P_{a(t)}) = 0$.

Cualquier polinomio P_a con $a \in P_t * \mathcal{M}$ tiene la forma $P_{a(t)} \perp P_c$ donde P_c es un polinomio cuadrático con $c \in \mathcal{M}$ y \perp denota la modulación. El conjunto de Julia K_a de P_a se puede obtener del conjunto de Julia $K_{a(t)}$ de la siguiente manera: la cerradura de cada componente U del interior de $K_{a(t)}$ se reemplaza por una copia de K_c , [D1].

Lema 3.2.1 *Sea $P_m = P_a \perp P_c$ la modulación de P_c sobre P_a . Entonces*

$$h(H(m), P_m) = \sup \left\{ h(H(a), P_a), \frac{1}{k} h(H(c), P_c) \right\},$$

donde k es el período de la órbita crítica de P .

Demostración. $H(m)$ puede verse como la unión de dos conjuntos distinguibles. En efecto, $H(m) = A \cup B$ donde A consiste de k copias del árbol de Hubbard $H(c)$ y B es el árbol de Hubbard de P_a removiendo los k arcos regulados que contienen la órbita crítica periódica. Como P_m^k es conjugado a P_c en cada copia de $H(c)$, por el lema 2.1.7 $kh(A, P_m) = h(H(c), P_c)$, por lo que $h(A, P_m) = \frac{1}{k} h(H(c), P_c)$. Por la proposición 2.1.11 se concluye que $h(H(m), P_m) = \sup \left\{ h(B, P_a), \frac{1}{k} h(H(c), P_c) \right\}$.

Para completar la prueba, se debe demostrar que $h(B, P_a) = h(H(a), P_a)$. Para ello usamos una idea similar a la anterior, en este caso, sobre el árbol $H(a)$, $H(a) = A' \cup B$ donde A' es el conjunto que consiste de los k arcos regulados que contienen la órbita crítica de P_a y B es el complemento de A' en árbol de Hubbard. Como la k -ésima iterada de P_a , restringida a cualesquiera de estos arcos regulados,

es conjugada a z^d en un intervalo I y $h(z^d, I)$, entonces $h(A', P_a) = 0$. Por lo tanto, $h(B, P_a) = h(H(a), P_a)$. Así, $h(H(m), P_m) = \sup \{h(H(a), P_a), \frac{1}{k}h(H(c), P_c)\}$.

◀

Dado que $h(H(a), P_a) = 0$ se tiene que $h(H(m), P_m) = \frac{1}{k}h(H(c), P_c)$.

3.3. Entropía en las componentes de tipo captura

Para cualquier copia del conjunto de Mandelbrot, $P_t * \mathcal{M}$, en cualquiera de sus puntas, existe una componente captura C directamente pegada a $P_t * \mathcal{M}$, [Ro].

Sea a una punta cualquiera de $P_t * \mathcal{M}$, entonces $P_a = P_t \perp P_c$ donde P_t es el polinomio que corresponde al centro de la copia del conjunto de Mandelbrot, y c es la punta correspondiente en el conjunto de Mandelbrot. De manera análoga a como se demostró el lema 3.2.1, se tiene que $h(H(a), P_a) = \frac{1}{k}h(H(c), P_c)$.

Proposición 3.3.1 *Sea a_0 el centro de alguna componente captura C . Sea $a \in \partial C$ tal que el punto crítico libre $-a$ es preperiódico con respecto a P_a . Entonces,*

$$h(H(a), P_a) = h(H(a_0), P_{a_0}).$$

Demostración. Dado un parámetro $a \in \partial C$ tal que el punto crítico libre $-a$ es estrictamente preperiódico bajo P_a , existe un entero n , más pequeño tal que $P_a^n(-a)$ es periódico y $P_a^n(-a) \in \partial B_a$. Denotemos por k el período de $P_a^n(-a)$ y sea $l \leq n$ el entero más pequeño, tal que $P_a^l(-a) \in \partial B_a$. Entonces $B_a \cap H(a) = \{P_a^l(-a), P_a^{l+1}(-a), \dots, P_a^n(-a), P_a^{n+1}(-a), P_a^{n+k}(-a)\}$. Esto es, la órbita de $P_a^l(-a)$ consiste de $n+k-l$ puntos y que están en la frontera de B_a . Sea T el arco regulado generado por la órbita de $P_a^l(-a)$, ésta órbita consiste de $n+k-l$ aristas, las cuales tienen un vértice en común, el punto crítico superatractor 0. Sea b_i la arista que conecta a con $P_a^i(-a)$ para $l \leq i \leq n+k-1$. Entonces, $P_a(b_i) = b_{i+1}$ para $l \leq i < n+k-1$ y $P_a(b_{n+k-1}) = b_n$. Por lo tanto, $h(T, P_a) = 0$. Por otro lado, se puede obtener el árbol de Hubbard $H(a)$ del árbol de Hubbard $H(a_0)$, reemplazando el punto crítico 0 por el árbol regulado T descrito anteriormente. Como $h(T, P_a) = 0$, entonces

$$h(H(a), P_a) = \sup \{h(H(a_0), P_{a_0}), h(T, P_a)\} = h(H(a_0), P_{a_0}).$$

◀

Corolario 3.3.2 *Sea C una componente captura tal que $C \cap \mathcal{M}_l = \{b\}$, donde \mathcal{M}_l es una copia del conjunto de Mandelbrot. Entonces el árbol de Hubbard del centro de C tiene la misma entropía que el árbol de Hubbard de P_b .*

3.4. Monotonicidad de la entropía fundamental

3.4.1. Rayos externos y el árbol de Hubbard

Inspirados en el trabajo de Douady, [D], para la familia cuadrática, en el cual se analiza la dinámica del polinomio llevándolo a la circunferencia unitaria y hacer el análisis con la función multiplicación por 2, de forma análoga, empleando la función multiplicación por d en la circunferencia podemos estudiar la entropía sobre el árbol de Hubbard asociado a un polinomio arbitrario P_a . Empleando la conjugación dada por el teorema de Bötcher se tiene que la entropía de P_a en el árbol de Hubbard es la misma que la entropía de la función $z \mapsto dz$ restringida a un subconjunto de la circunferencia $T_J \subset \mathbb{T}$. Este conjunto puede obtenerse del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{T} \\ \gamma_a \downarrow & & \downarrow \gamma_a \\ J_a & \xrightarrow{P_a} & J_a. \end{array}$$

Donde $\gamma_a : \mathbb{T} \rightarrow J_a$ es el homeomorfismo dado por el teorema de Carathéodory, ([CG], teorema 2.1). Esto es $h(H(a), P_a) = h(\gamma_a^{-1}(H(a)), \rho)$.

Para determinar el subconjunto de la circunferencia que es importante para nuestro objeto de estudio, analizamos las propiedades de los rayos externos, [DH1, DH2].

Dado que 0 es punto fijo superatractor, la descripción de rayos externos que aterrizan en el árbol de Hubbard es similar a [L]. Sea P_a un polinomio con conjunto postcrítico finito y $a \in \mathcal{C}^0$. Dado $x \in H(a)$, se define $\theta(x)$ como los ángulos de los rayos externos que aterrizan en x si $x \in J_a$, o como los ángulos de los rayos externos que aterrizan en la raíz de la componente de Fatou que contiene a x si $x \notin J_a$. Denotamos por $\mathcal{R}_a(\vartheta(x))$ el rayo externo con ángulo $\vartheta(x)$ y que aterriza en $x \in H(a)$. Si existen más de un rayo externo que aterrizan en x o en la componente de Fatou que contiene a x , especificamos escribiendo $\mathcal{R}_a(\theta(x)^-)$, $\mathcal{R}_a(\theta(x)^+)$, $\mathcal{R}_a(\theta(x)^1)$, $\mathcal{R}_a(\theta(x)^2)$, etc.

Para $a \in \mathcal{C}^0$ fija vamos a denotar por $H = H(a)$ el árbol de Hubbard correspondiente a P_a . Además, $H_1 = P_a^{-1}(H)$ y $H_{n+1} = P_a^{-1}(H_n)$. Note que $H \subset H_1 \subset$

$H_2 \subset \dots$

Definición 3.4.1 *Sea P_a un polinomio con conjunto postcrítico finito. Sea $[x, y]$ un arco regulado tal que $[x, y] \cap [-a, 0] = \emptyset$. Diremos que $x \prec y$ si $x \in (0, y)$ y $\theta(x) \neq \theta(y)$.*

Sea P_a un polinomio de grado d con $a \in \mathcal{C}^0$ y $[x, y]$ un arco regulado que no contiene puntos críticos. Considere el conjunto $\{\theta(x)^-, \theta(x)^+, \theta(y)^-, \theta(y)^+\}$ formado por los ángulos de los cuatro rayos externos que aterrizan tales que $[\theta(x)^-, \theta(y)^-]$ y $[\theta(x)^+, \theta(y)^+]$ son los intervalos más pequeños que contienen todos los rayos externos que aterrizan en $[x, y]$. Los rayos externos

$$\mathcal{R}_a(\theta(x)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y)^+), \mathcal{R}_a(\theta(x)^+)$$

se llaman rayos externos asociados a $[x, y]$. Cuando únicamente un rayo aterriza en y , se tiene que $\theta(y)^- = \theta(y)^+ = \theta(y)$. En este caso los rayos externos asociados a $[x, y]$ se representan por

$$\mathcal{R}_a(\theta(x)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y)), \mathcal{R}_a(\theta(x)^+).$$

De la definición de rayos externos asociados, se sigue directamente el siguiente resultado

Lema 3.4.2 *Sean P_a un polinomio con conjunto postcrítico finito y $x, y \in H(a)$. Si $x \prec y$, entonces los elementos del conjunto de rayos externos asociados a $[x, y]$*

$$\{\mathcal{R}_a(\theta(x)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y)^+), \mathcal{R}_a(\theta(x)^+)\}$$

están en orden cíclico positivo. En consecuencia, se tiene que \prec define un orden parcial.

3.4.2. Intervalos de ángulos en el árbol de Hubbard

Sea P_a un polinomio con conjunto postcrítico finito y H el árbol de Hubbard de P_a . Suponga que el punto crítico libre $-a$ no es un punto extremo de H . Note que podemos escribir el conjunto $H_1 \setminus H$ de una única manera como unión finita de arcos regulados semiabiertos, es decir

$$H_1 \setminus H = \cup_{k=1}^n I_k,$$

donde $I_k = (x_k, y_k]$, $x_k \in V(H_0)$ y $y_k \in \partial H_1$.

Para $x_k \neq 0$, sea $\{\mathcal{R}_a(\theta(x_k)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y_k)^-), \mathcal{R}_a(\theta(y_k)^+), \mathcal{R}_a(\theta(x_k)^+)\}$ el conjunto de los rayos externos asociados a $[x_k, y_k]$. Se define el intervalo $U_k = (\theta(x_k)^-, \theta(x_k)^+)$.

Por otro lado, sea $H \cap \partial B_a = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ el conjunto de puntos en H que intersectan la frontera de la componente B_a del superatractor. Los rayos externos que aterrizan en estos puntos z_l se denotan por $\mathcal{R}_a(\varepsilon_l)^\pm$, para $1 \leq l \leq m$, véase la figura 3.2. Se define el subconjunto de la circunferencia

$$\nu(a) = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{l=1}^m (\varepsilon_l^-, \varepsilon_l^+).$$

Se define el intervalo de ángulos característicos $\mathcal{U}(a)$ asociado al árbol de Hubbard H como

$$\mathcal{U}(a) = \nu(a) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n U_k \right).$$

Nota 3.4.3 *Cualesquiera dos arcos regulados de $H_1 \setminus H$ tienen intersección vacía, o bien si $I_k \cap I_l \neq \emptyset$, entonces $U_k = U_l$ o $U_k \cap U_l = \emptyset$.*

Ejemplo 3.4.4 *En la figura 3.2 se muestra el conjunto de Julia y los ángulos asociados a $H(a)$, para $a = 0.434 + 0.9605i$, $H \cap \overline{B}_a$ es una órbita de período dos,*

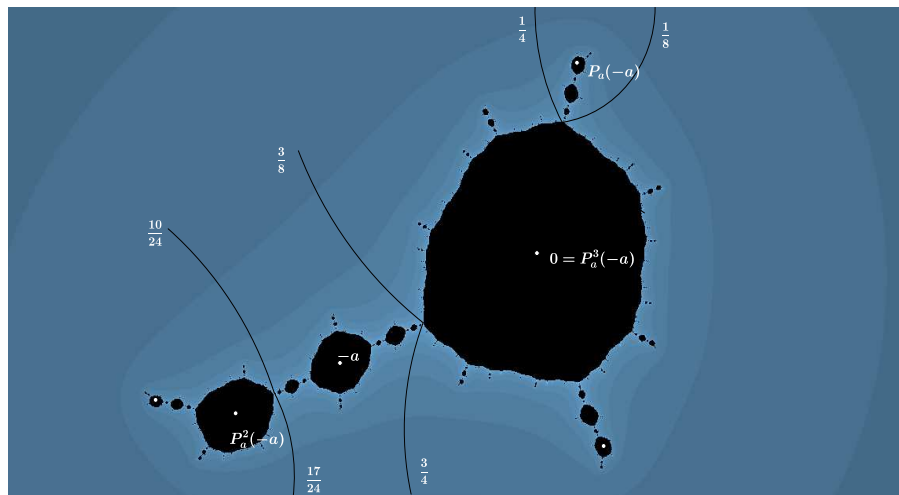


Figura 3.2: Conjunto de Julia lleno e intervalos de ángulos de P_a .

con rayos externos cuyos ángulos están en los conjuntos $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\}$ y $\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\}$. Por lo tanto, $\nu(a) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$. Además, $H_1 \setminus H$ consiste de un único arco regulado

disjuncto de \overline{B}_a y está acotado por los rayos externos con ángulos $\frac{10}{24}$ y $\frac{17}{24}$, por lo tanto,

$$\mathcal{U}(a) = \nu(a) \cup U_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{10}{24}, \frac{17}{24}\right).$$

Lema 3.4.5 *Dado un polinomio P_a con $a \in \mathcal{C}^0$, se tiene que, un rayo externo $\mathcal{R}_a(\theta)$ aterriza en H si y sólo si la órbita de θ bajo multiplicación por d no entra en $\mathcal{U}(a)$.*

Demostración. Primero vamos a probar la condición necesaria. Dado que H es invariante, $P_a(H) = H$. Si $\mathcal{R}_a(\theta)$ aterriza en H , entonces $\mathcal{R}_a(\rho(\theta))$ también aterriza en H , esto garantiza que la órbita de θ nunca interseca en $\mathcal{U}(a)$.

Para la condición suficiente, supongamos que $\mathcal{R}(\theta)$ aterriza en $x \in J_a \setminus H$. Se define

$$\alpha^+ = \inf \{ \alpha \geq \theta : \mathcal{R}_a(\alpha) \text{ aterriza en } H \}$$

y

$$\alpha^- = \sup \{ \alpha \leq \theta : \mathcal{R}_a(\alpha) \text{ aterriza en } H \}.$$

Como H es cerrado y J_a es localmente conexo, los rayos con ángulos α^+, α^- deben aterrizar en H y $\theta \in (\alpha^+, \alpha^-)$. Vamos a demostrar que existe un entero $k \geq 0$ tal que $\rho^k(\alpha^+, \alpha^-) \subset \mathcal{U}(a)$. En efecto, dado que $H \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots$ y $\cup_{n=0}^{\infty} H_n$ es denso en J_a , entonces la imagen de (α^+, α^-) bajo iteración por ρ , debe entrar en $\gamma_a^{-1}(H_1)$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^k(\alpha^+, \alpha^-) \cap \gamma_a^{-1}(H_1) \neq \emptyset$ y $\rho^{k-1}(\alpha^+, \alpha^-) \cap \gamma_a^{-1}(H_1) = \emptyset$, donde $\gamma_a : \mathbb{T} \rightarrow J_a$ es el mapeo de Carathéodory. Como $H_1 = P_a^{-1}(H) = H \cup (H_1 \setminus H)$ se tiene que $\rho^k(\alpha^+, \alpha^-)$ interseca a $\gamma^{-1}(H_1 \setminus H)$ antes de entrar en $\gamma^{-1}(H)$. Por la construcción de $\mathcal{U}(a)$, $\rho^k(\alpha^+, \alpha^-) \subset \mathcal{U}(a)$. Luego, como $\theta \in (\alpha^+, \alpha^-)$, se concluye que la órbita de θ entra en $\mathcal{U}(a)$, lo cual finaliza la prueba. ◀

3.4.3. Monotonidad

En esta sección analizaremos la entropía de polinomios restringida a árboles de Hubbard (entropía fundamental) de polinomios para los cuales el punto crítico libre $-a$ es periódico, para ello se propone una forma de comparar árboles de Hubbard, basada en [K].

Comenzamos introduciendo una relación de equivalencia entre árboles de Hubbard, tal que toda clase de equivalencia es caracterizada por la dinámica en el conjunto de vértices de cualquier representante.

Definición 3.4.6 Sea H el árbol de Hubbard asociado al polinomio P_a , sea \mathcal{P} la partición de H que consta de cinco elementos $\{c_1\}, \{c_2\}, T_0, T_1, T_2$ (algunos pueden ser vacíos), tal que $P_a|_{T_i}$ es un homeomorfismo para toda i , además, $c_1, c_2 \in \overline{T_0}$ y para $i = 1, 2$, $c_i \in \overline{T_i}$ a menos que $T_i = \emptyset$. A \mathcal{P} se le llama la partición asociada a H , donde $c_1 = 0$ y $c_2 = -a$.

Con esta partición podemos definir el itinerario para cada punto de H , de la siguiente manera.

Definición 3.4.7 El itinerario de un punto $z \in H$ es la sucesión infinita $\tau(z) = (\tau_n(z))_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1, 2, C_1, C_2\}$ dada por

$$\tau_n(z) = \begin{cases} j, & \text{si } f^{n-1}(z) \in T_j, \\ C_i, & \text{si } f^{n-1}(z) = c_i. \end{cases}$$

Empleando esta definición daremos una caracterización de los árboles de Hubbard, la cual nos permitirá definir una relación de equivalencia.

Sea $\tau(z)$ el itinerario de un punto z de un árbol de Hubbard, denotamos por $\overleftarrow{\tau}(z)$ el itinerario que se obtiene al intercambiar los símbolos 1 y 2.

Definición 3.4.8 Dos árboles de Hubbard $H(a_1), H(a_2)$, son equivalentes si existe una biyección $\xi : V(a_1) \rightarrow V(a_2)$ entre el conjunto de vértices de $H(a_1)$ y $H(a_2)$, tal que ξ conjuga $P_{a_1}|_{V(a_1)}$ con $P_{a_2}|_{V(a_2)}$. Además, $v, \tilde{v} \in V(a_1)$ son vértices adyacentes si y sólo si $\xi(v), \xi(\tilde{v})$ también lo son. Así mismo, $\tau(v) = \tau(\xi(v))$ para toda $v \in V(a_1)$ o $\tau(v) = \overleftarrow{\tau}(\xi(v))$.

Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de árboles de Hubbard.

Definición 3.4.9 Sea x un punto periódico. Si existen $i \in \{1, 2\}$ y $\tilde{x} \in \text{orb}(x) \cap (c_i, f(c_i)) \setminus \{c_1, c_2\}$ de tal manera que $\text{orb}(x) \subset G_{\tilde{x}}(c_i)$, entonces al punto \tilde{x} se le llama punto v_i -característico de $\text{orb}(x)$, $(G_{\tilde{x}}(c_i))$ es la componente conexa de $H \setminus \{x\}$ que contiene a c_i . Un punto z es característico si es periódico y v_i -característico, para $i = 1$ o $i = 2$.

La siguiente definición muestra la forma en la cual la dinámica de un polinomio P_a puede contener puntos particulares que siguen un comportamiento similar a puntos en la dinámica de algún otro polinomio P_b .

Definición 3.4.10 Sean $(H, P_a, \mathcal{P}), (\tilde{H}, P_{\tilde{a}}, \tilde{\mathcal{P}})$ dos árboles de Hubbard con punto crítico libre periódico, sea n el período exacto de $-\tilde{a}$. Diremos que (H, P_a, \mathcal{P}) contiene dinámicamente al árbol de Hubbard $(\tilde{H}, P_{\tilde{a}}, \tilde{\mathcal{P}})$ si existe un encaje $\iota : \tilde{H} \rightarrow H$, un punto característico $z \in H$ y una biyección $\xi : \tilde{V} \rightarrow \text{orb}(z) \cup \iota(\tilde{V} \setminus \text{orb}(-\tilde{a}))$ tal que,

i) $\xi(P_{\tilde{a}}(-\tilde{a})) = z$;

ii) $\xi \circ P_{\tilde{a}}|_{\text{orb}(-\tilde{a})} = P \circ \xi|_{\text{orb}(z)}$;

iii) $\iota(\tilde{H}) = [\text{orb}(z)]$, donde $[\text{orb}(z)]$ es el árbol generado por la órbita de z en H .

iv) Para cualquier punto extremo $P_a^i(z) \in \iota(\tilde{H})$, se tiene que $P_a^i(z) \in T_j$ si y sólo si $\tilde{P}_{\tilde{a}}^i(-\tilde{a}) \in \text{cl}(\tilde{T}_j)$.

v) Si $\tilde{v} \neq \tilde{w} \in \tilde{V}$ son adyacentes en \tilde{H} , entonces $\xi(\tilde{v}), \xi(\tilde{w})$ también son adyacentes como vértices del subárbol $[\text{orb}(z)]$ de H .

Por otro lado, si $\xi(\tilde{v}), \xi(\tilde{w})$ son adyacentes como vértices de $[\text{orb}(z)]$, entonces \tilde{v}, \tilde{w} son o bien adyacentes, o existe un único punto de ramificación $\tilde{c}_i \in \text{orb}(-\tilde{a})$ de \tilde{H} tal que $(\tilde{v}, \tilde{w}) \cap \tilde{V} = \tilde{c}_i$.

Empleando la definición anterior, se define un orden parcial en \mathcal{C}^0 de la siguiente manera:

Dados $a_1, a_2 \in \mathcal{C}^0$, se dice que $a_2 \prec a_1$ si el árbol de Hubbard $H(a_2)$ está contenido dinámicamente en el árbol de Hubbard $H(a_1)$ y $H(a_1), H(a_2)$ no están contenidos en la misma clase de equivalencia.

Nota 3.4.11 Si $a_2 \prec a_1$, entonces $N(a_2) \leq N(a_1)$.

Dado que el lema de la órbita forzada, es válido en las copias del conjunto de Mandelbrot [M2], se tiene la siguiente relación:

Lema 3.4.12 Sea $M_0 \subset \mathcal{C}$ una copia del conjunto de Mandelbrot con raíz en W_0 , $a_1, a_2 \in M_0$ y P_{a_1}, P_{a_2} polinomios con conjunto postcrítico finito. Si a_2 o la componente que lo contiene separa al punto a_1 de W_0 , entonces $a_2 \prec a_1$.

Lema 3.4.13 Sean P_{a_1} y P_{a_2} con $a_2 \prec a_1$, $N(a_1) = N(a_2)$ y $z \in H(a_1)$ es el punto característico de la definición 3.4.10. Entonces

$$H(a_1) \cong H(a_2) \cong [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)],$$

donde \cong significa topológicamente homeomorfo.

Demostración. Por simplicidad, denotemos el número de puntos extremos por $N(a_1) = N(a_2) = N$ y P_{a_1} por P . Por la propiedad iv) de la definición 3.4.10, los rayos externos que aterrizan en z en el árbol $H(a_1)$ son exactamente los mismos rayos externos que aterrizan en $P_{a_2}(-a)$ en el árbol $H(a_2)$. Entonces, los elementos de $\{z, P(z), P^2(z), \dots, P^{N-1}(z)\}$ son precisamente los puntos extremos de

$$[z, P(z), P^2(z), \dots, P^{N-1}(z)].$$

Por lo tanto,

$$H(a_2) \cong [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)].$$

Ahora bien, usando inducción, vamos a demostrar que no existen puntos de ramificación ni puntos críticos en los intervalos $(P^k(z), P^k(P(-a)))$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Primero, $0, -a \notin (z, P(-a))$ y no hay puntos de ramificación en $(x, 0)$ (de otro modo $N(a_1) > N(a_2)$). Ahora supongamos que no existen puntos de ramificación ni puntos críticos en $(P^k(z), P^k(P(-a)))$ para todo $k \leq k_0 \leq N-1$. Dado que P es uno a uno en cada arco regulado que no contiene punto crítico, se sigue que $(P^{k_0+1}(z), P^{k_0+1}(P(-a)))$ no contiene puntos de ramificación. Por otro lado, si $c_i \in (P^{k_0+1}(z), P^{k_0+1}(P(-a)))$, dado que $N(a_1) = N(a_2)$, existe $k_0+1 < l < N$ tal que $P^l(z) \in (c_i, P^{k_0+1}(P(-a)))$, esto significa que $P^{k_0+1}(z)$ no es un punto extremo de $[P(z), P^2(z), \dots, P^N(z)]$, esto es una contradicción. Por otro lado, como no hay puntos de ramificación en $(P^k(z), P^k(P(-a)))$ para $k = 1, 2, \dots, N$, entonces $H(a_1) \cong [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)]$. De hecho, $P^k(P(-a))$ es el único punto de $[P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)]$ que separa a $P^{k_0+1}(P(-a))$ de 0. ◀

Lema 3.4.14 Dado $P = P_a$ como en el lema anterior, sean $x, y \in H \cap J_a$. Suponga que $P^i(x) \prec P^i(y)$ para $0 \leq i \leq k$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.

- 1) Si $P^k(y) \prec y'$ en H_1 , entonces $P^k(x) \prec x'$ en H_1 .
- 2) Si $y' \prec P^k(y)$ en H_1 , entonces $x' \prec P^k(x)$ en H_1 .

Donde y' es cualquier preimagen de $P(y)$ diferente de y , y x' es la preimagen de $P(x)$ tal que $[x', y']$ no contiene puntos críticos.

Demostración. Observemos que H_1 es la unión del árbol de Hubbard H y sus preimágenes, es decir, $H_1 = H \cup P^{-1}(H)$. Dado que $P^i(x) \prec P^i(y)$ para $0 \leq i \leq k$, entonces no hay puntos críticos en $[P^i(x), P^i(y)]$ y

$$P : [P^i(x), P^i(y)] \rightarrow [P^{i+1}(x), P^{i+1}(y)]$$

es un homeomorfismo para $0 \leq i \leq k - 1$. Ahora bien, vamos a probar la primer afirmación por contradicción. Supongamos que $P^k(y) \prec y'$ y $x' \prec P^k(x)$ en $H_1(a)$. Entonces se tiene

$$x' \prec P^k(x) \leq P^k(y) \prec y'$$

y consecuentemente $(P^k(x), P^k(y)) \subset [x', y']$. Entonces P^k restringido a $[x', y']$ es un homeomorfismo sobre un subconjunto propio, lo cual es una contradicción con la expansividad de $P|_{J_a}$ ya que $x', y' \in J_a$.

Para la prueba del caso 2) se emplea el mismo argumento. ◀

Teorema 3.4.15 Sean P_{a_1} y P_{a_2} polinomios tales que $a_1, a_2 \in \mathcal{C}^0$, $a_2 \prec a_1$ y $N(a_1) = N(a_2)$. Entonces $\mathcal{U}(a_1) \subset \mathcal{U}(a_2)$.

Demostración. Note que $\nu(a_1) = \nu(a_2)$.

Por otro lado, $\mathcal{U}(a_1)$ y $\mathcal{U}(a_2)$ son unión disjunta de intervalos de ángulos. Cada uno de estos intervalos está asociado a un arco regulado del árbol $H_1(a_1)$ y $H_1(a_2)$ respectivamente.

Se probará que para cada intervalo de ángulos $U \subset \mathcal{U}(a_1)$ limitados por rayos externos que no aterrizan en B_a , existe un intervalo de ángulos $U' \subset \mathcal{U}(a_2)$ tal que $U \subset U'$.

Para simplificar la notación hacemos $N(a_1) = N(a_2) = N$ y $P = P_{a_1}$.

Sea $H_1(a_1) \setminus H(a_1) = \bigcup_{k=1}^l I_k$ una unión finita de arcos regulados. Dado cualquier arco regulado I_k tal que $I_k \cap \partial B_a = \emptyset$, se tienen dos casos:

1) Si I_k es de la forma $(P^{k_1}(-a), -P^{k_2}(-a))$ para $1 \leq k_1, k_2 < N$, entonces $P^{k_1}(-a) \prec -P^{k_2}(-a)$ ($k_1 \neq k_2$).

Si

$$\mathcal{R}_a(\theta(P^{k_1})^-), \mathcal{R}_a(\theta(-P^{k_2})^-), \mathcal{R}_a(\theta(-P^{k_2})^+), \mathcal{R}_a(\theta(P^{k_1})^+)$$

son los rayos externos asociados al arco regulado $(P^{k_1}(-a), -P^{k_2}(-a))$, entonces

$$(\theta(P^{k_1}(-a))^- , \theta(P^{k_1}(-a))^+) \subset \mathcal{U}(a_1)$$

es un intervalo de ángulos de $\mathcal{U}(a_1)$. Por el lema 3.4.14, $P^{k_1}(z) \prec -P^{k_2}(z)$. Note que si $k_1 > k_2$ aplicamos el primer caso del lema y si $k_1 < k_2$ aplicamos la segunda parte. Dado que los rayos aterrizando en $P^{k_1}(z)$ en el árbol $H_1(a_1)$ son exactamente los mismos que los rayos que aterrizan en $P_{a_2}^{k_1}(-a_2)$ en el árbol $H_1(a_2)$. Entonces, igual que antes,

$$(\theta(P^{k_1}(z))^- , \theta(P^{k_1}(z))^+) \subset \mathcal{U}(a_2)$$

es un intervalo de ángulos de $\mathcal{U}(a_2)$.

Por el lema 3.4.13, $H(a_1) \cong [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)]$ y $P^{k_1} \prec P^{k_1}(-a)$. Además, $P^{k_1}(-a) - P^{k_2}(z) \in [P^{k_1}(z), -P^{k_2}(-a)]$. En consecuencia,

$$(\theta(P^{k_1}(z))^- , \theta(P^{k_1}(z))^+) \subset (\theta(P^{k_1}(-a))^- , \theta(P^{k_1}(-a))^+).$$

2) En cualquier otro caso, I_k debe ser de la forma $(w, -P^{k_1}(-a))$ para algún $0 \leq k_1 \leq N$, donde $w \notin \text{Orb}(-a)$. Dado que $H(a_1) \cong [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)]$, entonces $(w, -P^{k_1}(-a)) \cap [P_{a_1}(z), P_{a_1}^2(z), \dots, P_{a_1}^N(z)] = \{w\}$. De aquí se obtiene que el intervalo de ángulos U_k correspondiente a I_k es también un intervalo de ángulos de $\mathcal{U}(a_2)$.

De 1) y 2) se tiene la prueba de teorema ◀

Enseguida enunciamos el teorema que relaciona la entropía topológica en el árbol de Hubbard, de dos polinomios comparables en \mathcal{C}^0 .

Teorema 3.4.16 *Dados dos parámetros a_2 y a_1 que representan polinomios de grado d en \mathcal{C}^0 con punto crítico periódico, si $a_2 \prec a_1$ y $N(a_2) = N(a_1)$, entonces $h(H(a_2), P_{a_2}) \leq h(H(a_1), P_{a_1})$.*

Demostración. Por el teorema 3.4.15, sabemos que $\mathcal{U}(a_1) \subset \mathcal{U}(a_2)$. Entonces, $\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_2)) \subset \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_1))$. Por lo tanto, tenemos la siguiente desigualdad en la entropía:

$$h\left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_2)), \rho\right) \leq h\left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_1)), \rho\right),$$

ya que se tiene la siguiente conjugación entre P_{a_i} y la función ρ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_2)) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_2)) \\ \gamma_{a_i} \downarrow & & \downarrow \gamma_{a_i} \\ H(a_i) & \xrightarrow{P_{a_i}} & H(a_i), \end{array}$$

tenemos que

$$h(H(a_i), P_{a_i}) = h\left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(\mathcal{U}(a_2)), \rho\right).$$

Por lo tanto,

$$h(H(a_2), P_{a_2}) \leq h(H(a_1), P_{a_1}).$$

◀

Para el caso de polinomios con parámetros $a_2 \prec a_1$ cuyos arboles de Hubbard tienen números de puntos extremos diferentes, se utiliza la matriz de Markov asociada al arbol de Hubbard, la cual codifica la relación que existen entre las aristas y la imagen de una de ellas.

Sea P_a un polinomio hiperbólico, la restricción de P_a a cualquier arista e de $H(a)$ es inyectiva. Además, $P_a(e)$ consta de la unión de aristas e_1, \dots, e_l de $H(a)$. Si $H(a)$ consta de las aristas e_1, \dots, e_n , se define la matriz de Markov $M(a)$, asociada a $H(a)$ como $M_{ij} = 1$ si $e_j \subset P_a(e_i)$ y 0 en otro caso. Note que M es una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas 0 y 1. Por el teorema de Perron-Frobenius, el radio espectral λ de M es mayor o igual a 1, [P].

Proposición 3.4.17 *Dado un polinomio P_a con $a \in \mathcal{C}$ postcríticamente finito e hiperbólico y $H(a)$ su árbol de Hubbard, entonces $h(H(a), P_a) = \log \lambda$.*

Demostración. Sea \mathcal{P} la partición de $H(a)$ que consta de todas las aristas de $H(a)$, es decir $\mathcal{P} = \{e_i\}_{i=1}^l$, esta partición satisface que $e_i \cap e_j = \emptyset$ o consiste de un solo punto, para todo $1 \leq i < j \leq k$. Además, el conjunto $\partial\mathcal{P}$ formado por los puntos extremos de las aristas e_i son los vértices de $H(a)$. Para cada $k \geq 1$ se define la partición $P_a^k * S$ de $H(a)$ determinada por el conjunto $\partial P_a^k * S = P_a^{-k}(\partial S)$. Si S y S' son dos particiones de $H(a)$, se define una nueva partición $S \vee S'$ de $H(a)$ determinada por los puntos en $\partial S \cup \partial S'$.

Considérese la partición

$$\bigvee^n S = S \vee P_a * S \vee, \dots, \vee P_a^{n-1} * S.$$

Por el lema 3.1.5, el punto crítico libre $-a$ no es un punto de ramificación. Además, $-a$ no es eventualmente crítico. Entonces el número de puntos de ramificación en $H(a)$ es invariante bajo P_a^{-1} , por lo tanto, $\partial \bigvee^n * S$ consiste de la unión de todas las preimágenes de orden n de la orbita $-a$ en $H(a)$, el cero y los puntos de ramificación de $H(a)$. De la definición de entropía con respecto a una cubierta, se tiene que

$$h(H(a), P_a, S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{card} \bigvee^n * S.$$

AFIRMACION: $h(H(a), P_a, S) = h(H(a), P_a)$. La prueba de esta afirmación se obtiene usando el mismo argumento del lema 1 de [D].

Por la construcción de $P_a^k * S$, se tiene que

$$\partial S \subset \partial(P_a * S) \subset \dots \subset \partial(P_a^{n-1} * S) \text{ y } \bigvee^n S = (P_a^{n-1}) * S.$$

Si S' es una partición más fina que S , definimos el vector de Markov de $v_{S'} = (v_1, \dots, v_k)$ asociado a S' , donde v_i es el número de elementos de la partición S' que están contenidos en la arista e_i de S . Note que $v_S = (1, 1, \dots, 1)$ y $v_{P_a * S} = M^t \cdot v_S$ donde M^t es la matriz traspuesta de la matriz de Markov M de $H(a)$, por lo que $v_{\bigvee^n S} = (M^t)^{n-1} c \cdot v_S$. Con respecto a la norma $\|v\| = \sum v_i$, para cualquier vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ tal que $v_1 > 0$ existen constantes $0 < c_1 < c_2$ tal que $c_1 \cdot \lambda^n \leq \|(M^t)^n \cdot v\| \leq c_2 \cdot \lambda^n$. Observe que $\|v_S\| = \text{card } S$, por lo tanto, $c_1 \cdot \lambda^n \leq \text{card } \bigvee^n * S \leq c_2 \cdot \lambda^n$.

Tomando el logaritmo y dividiendo entre n se tiene que

$$\frac{\log c_1 \cdot \lambda^n}{n} \leq \frac{\log \text{card } \bigvee^n * S}{n} \leq \frac{\log c_2 \cdot \lambda^n}{n},$$

haciendo $n \rightarrow \infty$ concluimos que $h(H(a), P_a, S) = \log \lambda$. ◀

De manera general, sea M es una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas 0 y 1 y su radio espectral $\lambda \geq 1$. Dado un conjunto compacto y conexo X y $f : X \rightarrow X$ una función continua, la colección $A = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de subconjuntos compactos de X tal que los interiores, $\text{int}(X_i)$ son no vacíos y mutuamente disjuntos se llama *empaquetado de Markov*¹ con matriz M , si $X_j \subset f(X_i)$ siempre y cuando $M_{ij} = 1$.

Proposición 3.4.18 *Si $A = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ empaquetado de Markov con matriz M , entonces $h(X, f) \geq \log \lambda$, donde λ es el radio espectral de M .*

Teorema 3.4.19 *Sean $a_2 \prec a_1$ dos parámetros que representan polinomios hiperbólicos en una copia del conjunto de Mandelbrot M_a que se bifurca directamente de la componente principal W_0 , entonces $h(H(a_2), P_{a_2}) \leq h(H(a_1), P_{a_1})$.*

Demostración. 1) Si $N(a_1) = N(a_2)$ el resultado se tiene por el teorema 3.4.16.

2) Supongamos que $N(a_2) < N(a_1)$. De la observación 3.4.11 el número de puntos es no decreciente. Podemos asumir que no existe parámetro $c \in \mathcal{C}^0$ hiperbólico tal que $c_2 \prec c \prec c_1$ y $N(c_2) < N(c) < N(c_1)$. Dados $H(a_1)$, $H(a_2)$ los árboles de Hubbard, z el punto característico de la definición 3.4.10 y $H(z)$ el árbol regulado generado por el punto z , note que $H(z)$ es un subárbol de $H(a_1)$ el cual no es invariante bajo P_{a_1} . Considere los vértices de $H(z)$ como la unión de los puntos de la órbita de z con los puntos de ramificación de $H(z)$. Se puede establecer una biyección entre los vértices de $H(z)$ y los vértices de $H(a_2)$. Más aún, de la definición 3.4.10 note que $H(z)$ es topológicamente homeomorfo al árbol

¹del inglés Over Markov Packing

de Hubbard $H(a_2)$. Sean e_1, e_2, \dots, e_n las aristas de $H(a_2)$, y $M(a_2)$ la matriz de Markov asociada a $H(a_2)$. Entonces $h(H(a_2), P_{a_2}) = \log \lambda$, donde λ es el radio espectral de $M(a_2)$. Por otro lado, $H(z)$ es homeomorfo a $H(a_2)$, lo que nos permite etiquetar las n aristas de $H(z)$ por $e_1^z, e_2^z, \dots, e_n^z$, las cuales satisfacen la condición que $P_{a_1}(e_i^z) \supset e_j^z$ siempre y cuando $M(i, j) = 1$. El conjunto $E_z = \{e_1^z, e_2^z, \dots, e_n^z\}$ es un empaquetado de Markov con matriz $M(a_2)$, por lo que $h(H(a_1), P_{a_1}) \geq \log \lambda$. Por lo tanto, $h(H(a_1), P_{a_1}) \geq h(H(a_2), P_{a_2})$. De 1) y 2) se tiene el resultado. ◀

Capítulo 4

Algoritmo de Thurston para el cálculo de entropía

Con el propósito de facilitar el cálculo de la entropía fundamental de un polinomio P , Thurston propuso un algoritmo (sin demostración) que permite calcularla. Para ello se define una transformación lineal A en términos de los puntos críticos de P y de los argumentos externos en J_P , obteniendo como resultado que el radio espectral de A coincide con la entropía fundamental. En 2017, Yan Gao dió una prueba de este algoritmo y en ese mismo año, Tiozzo demostró la continuidad de la entropía en la familia cuadrática sobre la frontera del conjunto de Mandelbrot, empleando el algoritmo de Thurston, [G, Tz2].

En este capítulo se demuestra que para calcular la entropía fundamental de polinomios con un punto crítico de orden máximo, como en la familia (3.1), se puede ignorar el punto crítico fijo. Por lo tanto, cada polinomio puede verse como un polinomio unicrítico. Esta simplificación permite usar las herramientas de gráficas, cuñas y retratos críticos que utilizó Tiozzo para demostrar la continuidad de entropía en la familia cuadrática, de este modo generalizamos dicho resultado a la familia (3.1).

4.1. Algoritmo de Thurston

En esta sección se describe el algoritmo de Thurston que calcula la entropía fundamental de un polinomio de grado d a partir de las órbitas de los puntos críticos.

4.1.1. Algoritmo de Thurston para polinomios de grado d

Sea $P(z)$ un polinomio postcríticamente finito de grado d . $P(z)$ tiene exactamente $d - 1$ puntos críticos, c_1, c_2, \dots, c_n (contando la multiplicidad). Cada c_i o bien está en J_p o es el centro de una componente de Fatou. El desarrollo de este algoritmo está basado en el análisis de los rayos externos que aterrizan en los puntos críticos que están en el conjunto de Julia o los rayos que aterrizan en las componentes de Fatou que contienen puntos críticos.

Dado un rayo externo $R(\theta)$ que aterriza en un punto q de la frontera de una componente de Fatou U , existe un único rayo interno que une q con el centro de U , el cual se denota por $r_U(\theta)$. El rayo

$$\mathcal{E}_U(\theta) = r_U(\theta) \cup R(\theta),$$

se llama rayo extendido en U de ángulo θ .

Definición 4.1.1 *Decimos que un rayo externo $R(\theta)$ soporta una componente de Fatou acotada U si:*

- 1) *El rayo aterriza en un punto q de la frontera de U .*
- 2) *Existe un sector, basado, en q delimitado por $R(\theta)$ y el rayo interno de U que aterriza en q , tal que el sector no contiene otro rayo externo que aterriza en q .*

Sea P un polinomio postcríticamente finito de grado d y U una componente de Fatou crítica, es decir, una componente de Fatou que contiene un punto crítico, tal que $\delta = \text{Grad}(P|_U)$, se define el conjunto $\Theta(U)$ de la siguiente manera:

- 1) Si U es periódica con órbita

$$U \rightarrow P(U) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(U) = U,$$

construimos $\Theta(U', z', \theta)$ para todo U' en este ciclo simultáneamente, de la siguiente manera. Sea $z \in \partial U$ la raíz de U . Note que esta elección determina una raíz $P^k(z)$ para cada componente de Fatou $P^k(U)$ para $k = 1, 2, \dots, n - 1$, a la cual se llama la raíz preferente de $P^k(U)$. Si U' es cualquier componente del ciclo y z' su raíz preferente, considere un rayo $R(\theta)$ soporte de U' en z' . Se define el conjunto $\Theta(U', z', \theta)$ como el conjunto de argumentos de los $\delta_{U'}$ rayos soportes para la componente U' que son imagen inversa de $P(R(\theta))$.

- 2) Si la componente de Fatou U es estrictamente preperiódica, tomemos n el número más pequeño tal que $P^n(U)$ es una componente de Fatou crítica. Sea $z \in \partial U$ el punto que es llevado a $\gamma(\alpha)$ por el polinomio P , donde $\gamma(\alpha)$ es el punto

donde aterriza $R(\alpha)$ y $\alpha \in \Theta(P^n(U), \gamma(\alpha), \alpha)$. Consideremos un rayo $R(\theta)$ que soporta la componente U que contiene a z , definimos $\Theta(U, z, \theta)$ como el conjunto de los δ_U argumentos de los rayos soportes de U que bajo P^n caen en $R(\alpha)$.

Nota 4.1.2 *Para cada componente de Fatou crítica U , existe una cantidad finita de posibles conjuntos $\Theta(U', z', \theta)$, los cuales dependen de la elección de las raíces de z , de U y el argumento θ . Podemos elegir uno de ellos y lo denotamos como $\Theta(U)$.*

Definición 4.1.3 *Sea P un polinomio con conjunto postcrítico finito y U_1, U_2, \dots, U_n las componentes de Fatou críticas disjuntas por pares. Una colección finita de subconjuntos de la circunferencia unitaria*

$$\Theta_P = \{\Theta(c_1), \dots, \Theta(c_m), \Theta(U_1), \dots, \Theta(U_m)\},$$

se llama una marca crítica débil si:

1. Cada conjunto $\Theta(U_k)$ satisface la definición 4.1.2.
2. La unión de los c_1, c_2, \dots, c_m es igual a la unión de todos los puntos críticos de P en J_P .
3. Cada $\Theta(c_j)$ consiste de al menos dos ángulos tales que los rayos externos con estos ángulos, aterrizan en c_j y son llevados por P a un mismo rayo externo.
4. Las envolventes convexas de $\Theta(c_1), \dots, \Theta(c_m)$, en el disco unitario, son disjuntas por pares.
5. Para cada punto crítico $c \in J_P$.

$$\text{Grad}(P|_c) - 1 = \sum_{c_j=c} (\#\Theta(c_j) - 1).$$

Cualquier polinomio P con conjunto postcrítico finito siempre tiene una marca crítica débil. Por ejemplo, si c_1, \dots, c_m son los puntos críticos de P que están en J_P y U_1, \dots, U_m las componentes de Fatou críticas, entonces para cada U_i , $i = 1, \dots, m$ se construye el conjunto $\Theta(U_i)$ como antes. Por otro lado, para cada punto crítico c_j , simplemente se toma un rayo $R(\theta_j)$ que aterriza en $P(c_j)$ y se define Θ_j como el conjunto de argumentos de los rayos externos $P^{-1}(R(\theta_j))$ que aterrizan en c_j , para $j = 1, \dots, m$.

En la definición 4.1.3, cuando c_1, \dots, c_m son diferentes, la marca crítica débil Θ_P es llamada simplemente *marca crítica de P* . En este caso, la cardinalidad de cada $\Theta(c_j)$ es igual al grado de $P|_{c_j}$.

Sea $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_l\}$ una marca crítica de un polinomio P de grado d . Se definen los conjuntos crítico y postcrítico de Θ como

$$\text{crit}(\Theta) = \bigcup_{k=1}^l \Theta_k \text{ y } \text{post}(\Theta) = \bigcup_{n \geq 1} \tau^n \text{crit}(\Theta),$$

respectivamente. Donde $\tau : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es la función definida por $\tau(\theta) = d\theta \pmod{1}$.

De la definición 4.1.3 se tienen las siguientes propiedades:

1. Cada $\tau\Theta_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ consta de un único ángulo.
2. Las envolventes convexas de Θ_i y Θ_j , en el disco unitario, se intersectan a lo más en un punto de \mathbb{T} para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$.
3. La cardinalidad de cada Θ_i es mayor o igual 2, y $\sum_{i=1}^l (\#\Theta_i - 1) = d - 1$.

Estas propiedades pueden ser representadas de manera abstracta, dando origen al concepto de retrato crítico.

Sea \mathbb{D} el disco unitario dotado de la métrica hiperbólica. Identificamos cualquier punto en $\partial\mathbb{D}$ con su argumento en \mathbb{T} , de este modo todos los ángulos en la circunferencia son considerados módulo 1. Una hoja es o bien un punto en \mathbb{T} o la clausura en \mathbb{D} de una cuerda hiperbólica. A partir de ahora, cuando mencionemos cuerda o envolvente, en el disco, será en el sentido hiperbólico. Para cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{T}$ denotamos por $Env(S)$ a la envolvente convexa de S en \mathbb{D} .

Un *retrato crítico* de grado d , es una colección finita de subconjuntos finitos de la circunferencia, $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k\}$ tal que se cumplen las propiedades **1**, **2**, **3**.

Note que, cualquier marca crítica débil de un polinomio postcríticamente finito es un retrato crítico. Si además identificamos cada elemento $\Theta_i \in \Theta$ con su envolvente convexa en \mathbb{D} entonces, un retrato crítico puede ser visto como una colección de hojas y polígonos disjuntos por pares en \mathbb{D} .

Lema 4.1.4 *Si $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k\}$ es un retrato crítico de grado d , entonces $\mathbb{D} \setminus \bigcup_{l=1}^k Env(\Theta_l)$ tiene d componentes conexas y los arcos en \mathbb{T} de cada una de ellas cubre un arco de circunferencia de tamaño $\frac{1}{d}$.*

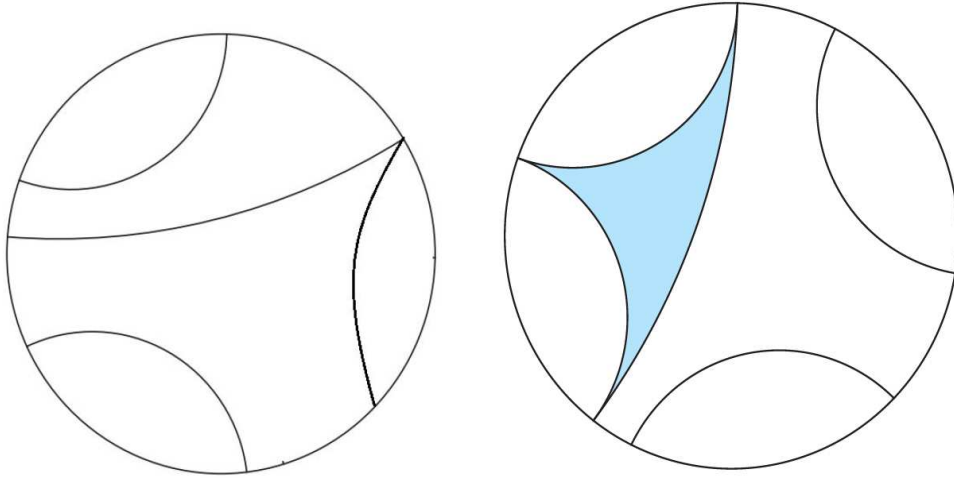


Figura 4.1: Retratos críticos de grado 5.

Una prueba del lema 4.1.4 puede ser consultada en [G].

Definición 4.1.5 *Dos puntos $x, y \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{l=1}^k \text{Env}(\Theta_l)$ se dice que son no separados en \mathbb{T} con respecto a Θ , si ambos pertenecen a la misma componente de $\mathbb{T} \setminus \Theta_i$ para todo $\Theta_i \in \Theta$.*

La relación de no separado dada por la definición 4.1.5 cumple las propiedades de una relación de equivalencia. De esto y el lema 4.1.4 se deduce la siguiente relación.

Proposición 4.1.6 *1) Dos puntos $x, y \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{l=1}^k \text{Env}(\Theta_l)$ son no separados en \mathbb{T}*

si y sólo si ambos pertenecen a una componente común de $\mathbb{D} \setminus \bigcup_{l=1}^k \text{Env}(\Theta_l)$.

2) Existen d clases de equivalencias en \mathbb{T} , denotadas por I_1, I_2, \dots, I_d . Además, para cada I_k y cualquier par de ángulos $x, y \in \bar{I}_k$, $\tau(x) = \tau(y)$ si y sólo si existen $\Theta_{i_1}, \dots, \Theta_{i_m} \in \Theta$ con $m \geq 1$ tales que $x \in \Theta_{i_1}$, $y \in \Theta_{i_m}$ y $\Theta_{i_j} \cap \Theta_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \dots, m-1$.

A continuación mostramos una partición en el plano dinámico de un polinomio de grado d determinada por su marca crítica. En primer lugar tomamos la marca crítica

$$\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_l\}$$

de un polinomio P , ésta induce una partición en el disco unitario (retrato crítico). Por otro lado, para cada punto crítico c_i y cada componente de Fatou crítica U , se definen los conjuntos $R_j(c_j)$ y $R(U)$ en el plano dinámico, donde $R_j(c_j)$ consiste de los rayos externos con ángulos Θ_j junto con c_j y $R(U)$ consiste de la unión de los rayos extendidos con ángulos en $\Theta(U)$.

De la definición de los conjuntos $\Theta(U_i)$ y $\Theta(c_j)$, se tienen las siguientes propiedades para $R(c_j)$ y $R(U_i)$.

Proposición 4.1.7 ■ *Los conjuntos $R(c_j)$ y $R(U_i)$ son tipo estrella con un punto crítico en el centro. Además, $R(c_j) \cap K_P = \{c_j\}$ y $R(U_i) \cap K_P$ consiste de un rayo interno crítico en U_i .*

- *La intersección de dos conjuntos $R(c_j)$ y $R(c_k)$ es igual a $\{c_j\}$ si $c_i = c_k$ y es vacía en cualquier otro caso.*
- *Si $R(c_j) \cap R(U_i) \neq \emptyset$, entonces $c_j \in \partial U_i$ y la intersección es o bien $\{c_j\}$ o la unión de $\{c_j\}$ con un rayo externo que aterriza en c_j . El segundo caso ocurre si y sólo si $\Theta(c_j) \cap \Theta(U_i) \neq \emptyset$.*
- *Si $R(U_i) \cap R(U_j) \neq \emptyset$ con $i \neq j$, entonces la intersección es o bien un punto $p \in \partial U_i \cap \partial U_j$ o la unión de $\{p\}$ y un rayo externo $R(\theta)$ aterrizando en p . El segundo caso ocurre si y sólo si $\Theta(U_i) \cap \Theta(U_j) \neq \emptyset$.*

Para $\Theta \in \Theta$ usaremos la siguiente notación:

$$R(\Theta) = \begin{cases} R(c_j) & \text{si } \Theta = \Theta(c_j) \text{ con } j = 1, \dots, m; \\ R(U_i) & \text{si } \Theta = \Theta(U_i) \text{ con } U_i \text{ una componente de Fatou crítica.} \end{cases}$$

Definición 4.1.8 *Sean z_1, z_2 dos puntos de $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^l R(\Theta_i)$. Diremos que z_1, z_2 no están separados, si ambos pertenecen a una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus R(\Theta_i)$ para todo Θ_i .*

La relación de no separado es una relación de equivalencia. Además, los rayos $R(\Theta_i)$ y $R(\Theta_j)$ están en una misma clase de equivalencia en el plano dinámico si y sólo si Θ_i y Θ_j están en una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^l R(\Theta_i)$.

Sea $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_l\}$ un retrato crítico. Dados cualesquiera dos ángulos $x, y \in \mathbb{T}$ (posiblemente iguales) y un elemento Θ de Θ , diremos que la cuerda \overline{xy} cruza la envolvente convexa $Env(\Theta)$ de Θ si $x, y \notin \Theta$ y $\overline{xy} \cap Env(\Theta) \neq \emptyset$. En esta situación decimos que x, y están separados por Θ .

Definición 4.1.9 *Dado cualquier par de ángulos $x, y \in \mathbb{T}$, su conjunto de separación relativo a Θ , es el conjunto $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$, si la cuerda \overline{xy} cruza sucesivamente $Env(\Theta_1), \dots, Env(\Theta_{k_p})$ de x a y , donde cada Θ_{k_j} está en Θ y ningún otro elemento de Θ separa los ángulos x, y . Los ángulos x, y son llamados no separados, si su conjunto de separación es el conjunto vacío.*

Si P es un polinomio con conjunto postcrítico finito, entonces todos los elementos de su retrato crítico Θ son racionales y $post(\Theta)$ es un conjunto finito. Por lo tanto, es posible definir el conjunto finito S que consta de los pares no ordenados $\{x, y\}$ con $x \neq y \in post(\Theta)$ siempre y cuando $card(post(\Theta)) \geq 2$. Si $post(\Theta) = \{x\}$, entonces S tiene un único elemento $\{x, x\}$, en este caso x es un punto fijo de τ . Una vez que se ha definido el conjunto S , el algoritmo de Thurston para aproximar la entropía de P , sobre el árbol de Hubbard $H(P)$, consta de los pasos descritos en el algoritmo 1.

Algoritmo 1

- Sea \mathcal{V} el espacio vectorial sobre \mathbb{R} generado por los elementos de S .
 - Se define una transformación lineal $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ sobre la base S de \mathcal{V} de la siguiente manera. Para cualquier vector $\{x, y\} \in S$ se define la imagen de $\{x, y\}$ como sigue:
 $\mathcal{A}(\{x, y\}) = \{\tau(x), \tau(y)\}$, si x, y no son separados por Θ ; y
 $\mathcal{A}(\{x, y\}) = \sum_{i=0}^p \mathcal{A}(\{\theta_i, \theta_{i+1}\})$, donde $\theta_0 = x$, $\theta_{p+1} = y$ y $\theta_i \in \Theta_{k_i} \in \Theta$, si el par $\{x, y\}$ tiene conjunto de separación $\{k_1, \dots, k_p\} \neq \emptyset$.
 - Sea A la matriz asociada a la transformación \mathcal{A} en la base S . Ya que esta matriz es no negativa, por el teorema de Perron-Frobenius el radio espectral ρ de A es no negativo, [P].
-

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre el radio espectral de la matriz A , obtenida por el algoritmo 1 y la entropía en el árbol de Hubbard del polinomio.

Teorema 4.1.10 *Sea P_d un polinomio de grado d con conjunto postcrítico finito, y Θ una marca crítica de P_d . Si ρ es el radio espectral de la matriz en el algoritmo de Thurston, entonces $h(H(P_d), P_d) = \log \rho$.*

Idea de la prueba. Si P_d es un polinomio de grado d con conjunto postcrítico finito, la entropía fundamental es igual al radio espectral de la matriz de incidencia $A_{H(P_d)}$, tomando la partición de Markov de $H(P_d)$ definida por las aristas, [G]. Como los arcos regulados en $H(P_d)$, que conectan dos puntos del conjunto postcrítico de P_d , es una unión de aristas, la acción de P_d en $H(P_d)$ induce otra matriz de incidencia, la cual tiene el mismo radio espectral que la matriz de incidencia $A_{H(P_d)}$.

La ventaja de esta aproximación radica en el hecho de que a cada punto del conjunto postcrítico, le corresponde un ángulo en el conjunto $post(\Theta)$, de modo que cualquier arco de $H(P_d)$ entre dos vértices, puede ser representado por algún par de ángulos (posiblemente no determinado de manera única). Así, intuitivamente se puede pensar que la acción de P_d en estos arcos induce una transformación en el espacio generado por los pares de ángulos en el conjunto $post(\Theta)$, la cual es la matriz A en el algoritmo de Thurston. En general, la matriz A del algoritmo es más grande que la matriz de incidencia en $H(P_d)$, ya que a un punto del conjunto postcrítico de P_d , regularmente le corresponden varios ángulos en el conjunto $post(\Theta)$.

La demostración del teorema 4.1.10 concluye que las matrices $A_{H(P_d)}$ y A tienen el mismo radio espectral. Una prueba completa de este teorema puede consultarse en [G].

Ejemplo 4.1.11 *En la familia*

$$P_a(z) = z^{d-1} \left(z + \frac{da}{d-1} \right),$$

para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$, el punto crítico $-a$, eventualmente va en el punto fijo superattractor cero, ya que $P_a^3(-a) = 0$. El conjunto de Julia se muestra en la figura 4.2. El retrato crítico asociado a P_a es $\Theta = \left\{ \left\{ 0, \frac{1}{3} \right\}, \left\{ \frac{11}{27}, \frac{20}{27} \right\} \right\}$ y $post(\Theta) = \left\{ 0, \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \right\}$, los cuales se muestran en la figura 4.3.

Así, la base S del espacio \mathcal{V} es $S = \left\{ \left\{ 0, \frac{2}{9} \right\}, \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \right\} \right\}$ y la transformación \mathcal{A} aplicándola en los elementos de la base está dada de tal modo que:

$$\begin{aligned} \left\{ 0, \frac{2}{9} \right\} &\mapsto \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} \\ \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} &\mapsto \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} + \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} \\ \left\{ \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \right\} &\mapsto \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} + \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} + \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}. \end{aligned}$$

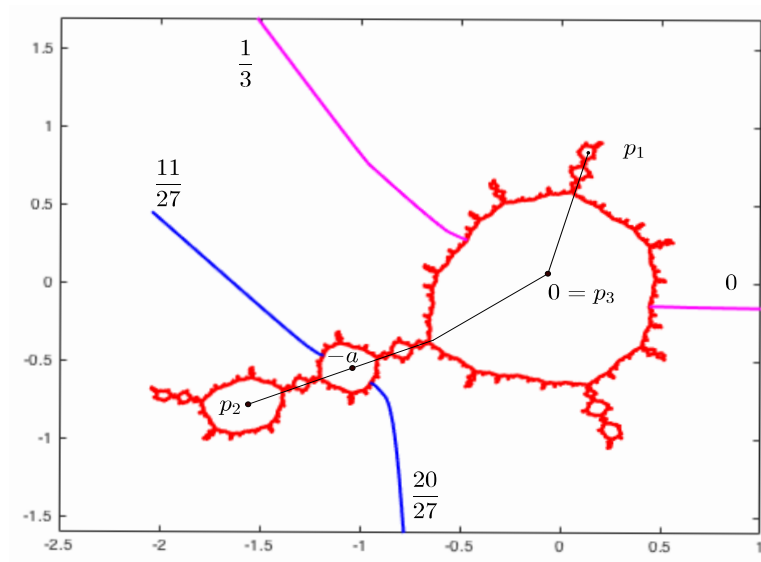


Figura 4.2: Conjunto de Julia para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$.

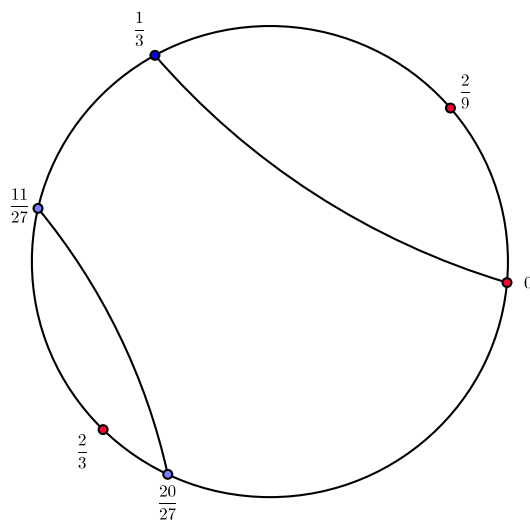


Figura 4.3: Retrato crítico para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$.

Por lo que, la matriz asociada a \mathcal{A} es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo radio espectral es 1.4142. Del teorema 4.1.10, se concluye que la entropía fundamental de P_a es $\log(1.4142)$.

Ejemplo 4.1.12 Tomando $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$ para la familia (3.1), se tiene un polinomio para el cual el punto crítico $-a$ es periódico de período cuatro. El conjunto de Julia se muestra en la figura 4.4.

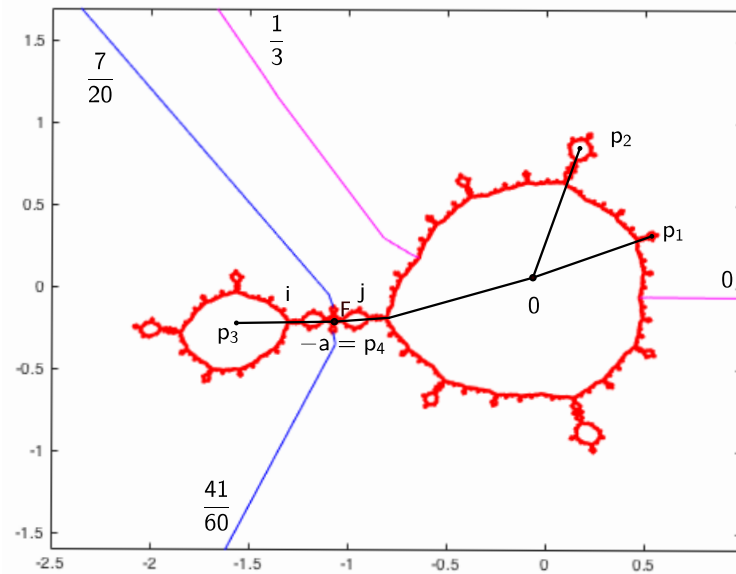


Figura 4.4: Conjunto de Julia para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$.

En este caso el retrato crítico asociado a P_a es $\Theta = \{\{0, \frac{1}{3}\}, \{\frac{7}{20}, \frac{41}{60}\}\}$ y $\text{post}(\Theta) = \{0, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{9}{20}, \frac{7}{20}\}$, los cuales se muestran en la figura 4.5.

Asimismo, la base S del espacio \mathcal{V} es

$$S = \left\{ \left\{0, \frac{1}{20}\right\}, \left\{0, \frac{3}{20}\right\}, \left\{0, \frac{9}{20}\right\}, \left\{0, \frac{7}{20}\right\}, \left\{\frac{1}{20}, \frac{3}{20}\right\}, \left\{\frac{1}{20}, \frac{9}{20}\right\}, \left\{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\right\}, \left\{\frac{3}{20}, \frac{9}{20}\right\}, \left\{\frac{3}{20}, \frac{7}{20}\right\}, \left\{\frac{9}{20}, \frac{7}{20}\right\} \right\}.$$

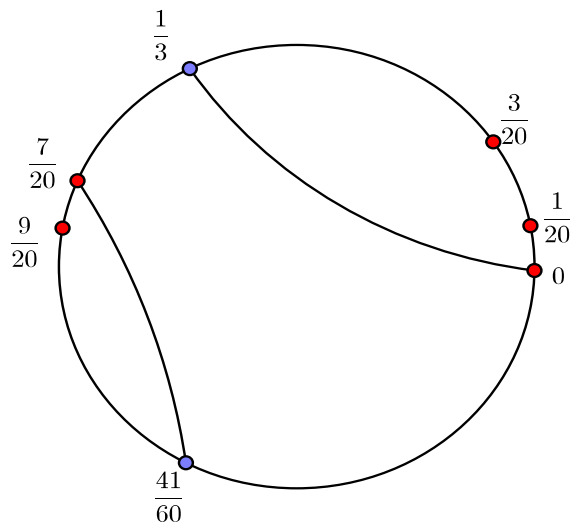


Figura 4.5: Retrato crítico para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$.

Aplicando la transformación \mathcal{A} a los elementos de la base se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \{0, \frac{1}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{3}{20}\} \\
 \{0, \frac{3}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{9}{20}\} \\
 \{0, \frac{9}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{1}{20}\} + \{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\} \\
 \{0, \frac{7}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{1}{20}\} \\
 \{\frac{1}{20}, \frac{3}{20}\} &\mapsto \{\frac{3}{20}, \frac{9}{20}\} \\
 \{\frac{1}{20}, \frac{9}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{3}{20}\} + \{0, \frac{1}{20}\} + \{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\} \\
 \{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{3}{20}\} + \{0, \frac{1}{20}\} \\
 \{\frac{3}{20}, \frac{9}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{9}{20}\} + \{0, \frac{1}{20}\} + \{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\} \\
 \{\frac{3}{20}, \frac{7}{20}\} &\mapsto \{0, \frac{9}{20}\} + \{0, \frac{1}{20}\} \\
 \{\frac{9}{20}, \frac{7}{20}\} &\mapsto \{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a \mathcal{A} es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo radio espectral es 1.3953. Del teorema 4.1.10 se concluye que la entropía de P_a restringido a su árbol de Hubbard es $(\log 1.3953)$.

4.1.2. Algoritmo de Thurston en una familia de polinomios con un punto fijo de orden máximo

En esta sección se presenta una adaptación de algoritmo del Thurston para el caso de la familia de polinomios 3.1 que tienen la forma

$$P_a(z) = z^{d-1} \left(z + \frac{da}{d-1} \right).$$

Sea P_a uno de tales polinomios. Los puntos críticos de P_a son 0 y $-a$. El 0 es el centro de la componente de Fatou fija B_a y $-a$ es un punto crítico libre. Si $-a$ es el centro de una componente de Fatou, dicha componente la denotaremos por U_1 .

Se definen los conjuntos de ángulos

$$\Theta_0 = \Theta(B_a),$$

$$\Theta_{-a} = \begin{cases} \Theta(U_1) & \text{si } -a \text{ es el centro de una componente de Fatou} \\ \Theta(c_1) & \text{si } -a \in J_a, \end{cases}$$

donde $\Theta(B_a)$, $\Theta(U_1)$ y $\Theta(c_1)$ son definidos como en la sección 4.1.1.

Definición 4.1.13 Dado P_a un polinomio de la familia (3.1) postcríticamente finito, a la colección de ángulos $\Theta_{P_a} = \Theta_{-a}$ le llamaremos marca crítica restringida.

Sea Θ_{P_a} la marca crítica restringida de P_a . Se definen los conjuntos crítico restringido y postcrítico restringido como

$$\text{crit}(\Theta_{P_a}) = \Theta_{-a} \text{ y } \text{post}(\Theta_{P_a}) = \bigcup_{n \geq 1} \tau^n \text{crit}(\Theta_{P_a}),$$

donde $\tau : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ está definida como $\tau(\theta) = d\theta \pmod{1}$.

Observación 4.1.14 $\tau\Theta_{P_a}$ consta de un único ángulo.

Si \mathbb{D} es el disco unitario, identificamos cualquier punto en $\partial\mathbb{D}$ con su argumento en \mathbb{T} , de este modo todos los ángulos en la circunferencia son considerados módulo 1. La marca crítica restringida de P_a vista en \mathbb{D} se denomina retrato crítico restringido de P_a y se denota por Θ_a .

Lema 4.1.15 Si Θ_a es un retrato crítico restringido del polinomio P_a , entonces $\mathbb{D} \setminus \text{Env}(\Theta_a)$ tiene 2 componentes conexas con arcos en \mathbb{T} de longitud $\frac{1}{d}$ y $\frac{d-1}{d}$, respectivamente.

Demostración. Dado que $\text{Grad}(P|_{-a}) = 2$, Θ_a consta de dos elementos. Por lo tanto, la envolvente convexa $\text{Env}(\Theta_a)$ divide a \mathbb{D} en dos regiones. Por otro lado, de la proposición 3.1.4 se tiene que la longitud del arco entre los elementos de Θ_a es igual a $\frac{1}{d}$, lo cual completa la prueba. ◀

Definición 4.1.16 Dos puntos $x, y \in \mathbb{T} \setminus \text{Env}(\Theta_a)$ se dice que son no separados en \mathbb{T} con respecto a Θ_a , si ambos pertenecen a la misma componente de $\mathbb{T} \setminus \text{Env}(\Theta_a)$.

Se define el conjunto $R(a)$ como

$$R(a) = \begin{cases} R(-a) & \text{si } -a \in J_a; \\ R(U_1) & \text{si } -a \text{ es el centro de una componente de Fatou,} \end{cases}$$

donde $R(U)$ y $R(-a)$ son definidos como en la sección 4.1.1.

Definición 4.1.17 Dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus R(a)$ son no separados si ambos pertenecen a una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus R(a)$.

La propiedad de no separado es una relación de equivalencia. Los rayos $R(\theta)$ y $\mathcal{R}(\gamma)$ están en una misma clase de equivalencia en el plano dinámico si y sólo si θ y γ están en una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus R(a)$.

De manera análoga, se define el concepto de puntos no separados en \mathbb{T} . Sea Θ_a un retrato crítico restringido. Dados cualesquiera dos ángulos $x, y \in \mathbb{T}$ (posiblemente iguales). Diremos que la cuerda \overline{xy} cruza la envolvente convexa $Env(\Theta_a)$ de Θ_a si $x, y \notin \Theta_a$ y $\overline{xy} \cap Env(\Theta_a) \neq \emptyset$. Con estas condiciones decimos que x, y están separados por Θ_a .

Si P_a es un polinomio con conjunto postcrítico finito, entonces todos los elementos del retrato crítico restringido son racionales y $post(\Theta_a)$ es un conjunto finito. Por lo tanto, es posible definir el conjunto finito S que consta de los pares no ordenados $\{x, y\}$ con $x \neq y \in post(\Theta_a)$ siempre y cuando $card(post(\Theta_a)) \geq 2$. Si $post(\Theta_a) = \{x\}$, entonces S consta de un único elemento $\{x, x\}$ y x es un punto fijo de τ . Una vez que se ha definido el conjunto S , el algoritmo de Thurston adaptado para aproximar la entropía de P_a sobre el árbol de Hubbard $H(P_a)$ consta de los pasos descritos en el algoritmo 2

Algoritmo 2

- Se define \mathcal{V} el espacio vectorial sobre \mathbb{R} generado por los elementos de S .
 - Se define una transformación lineal $\mathcal{A}' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ sobre la base S de \mathcal{V} de la siguiente manera: Para cualquier vector $\{x, y\} \in S$ se define la imagen de $\{x, y\}$ como sigue:

$$\mathcal{A}'(\{x, y\}) = \{\tau(x), \tau(y)\}, \text{ si } x, y \text{ son no separados por } \Theta;$$

$$\mathcal{A}'(\{x, y\}) = \{\tau(x), \tau(\theta)\} + \{\tau(\theta), \tau(y)\}, \theta \in \Theta_a, \text{ si } x, y \text{ están separados por } \Theta.$$
 - Sea A' la matriz asociada a la transformación \mathcal{A}' en la base S . La matriz A' es no negativa y por el teorema de Perron-Frobenius [P], el radio espectral ρ' de A' es no negativo.
-

Teorema 4.1.18 *Sea P_a un polinomio postcríticamente finito. Si A denota la matriz obtenida por el algoritmo 1 y A' la matriz obtenida por el algoritmo 2, entonces A y A' tienen el mismo radio espectral ρ .*

Demostración. Para demostrar este teorema, consideramos dos casos.

1) Si $-a \in B_a$, la entropía fundamental es cero, y mostraremos que en el algoritmo restringido el radio espectral de la matriz A' es 1.

2) Si $-a \notin B_a$, mostraremos que la transformación A se puede construir sin considerar la línea de separación del punto crítico cero.

Sea P_a un polinomio de grado d con conjunto postcrítico finito. Por el teorema de Böttcher existe un bi-holomorfismo ϕ_a que conjugua P_a con la función z^d en una vecindad del infinito. Como P_a es postcríticamente finito, el conjunto de Julia es localmente conexo, por lo tanto, P_a se extiende continuamente a J_a , [DH1]. Asimismo, la dinámica en B_a es conjugada a z^{d-1} y la conjugación se extiende continuamente a la frontera, por lo que, existe un punto fijo p de P_a , con ángulo interno cero, que está en ∂B_a . Elegimos la cordenada de Böttcher en el infinito de tal manera que el argumento externo de p sea cero.

De acuerdo a lo anterior y a la construcción de los retratos críticos, el conjunto de ángulos $\Theta_0 = \left\{0, \frac{k_1}{d}, \dots, \frac{k_{d-2}}{d}\right\}$, con $k_i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$, para cualquier polinomio P_a . Por lo tanto, el retrato crítico de P_a está dado por

$$\Theta = \left\{ \left\{0, \frac{k_1}{d}, \dots, \frac{k_{d-2}}{d}\right\}, \Theta_{-a} \right\} \text{ y } \text{post}(\Theta) = \bigcup_{n \geq 1} \tau^n(\Theta_{-a}) \cup \{0\}.$$

Lo cual muestra que para d fijo, el conjunto postcrítico varía en función únicamente del punto crítico $-a$.

Por otro lado, las aristas del árbol de Hubbard están relacionadas con los pares de ángulos en el retrato crítico de la siguiente manera: el intervalo de ángulos con extremos $\{\theta_1, \theta_2\}$ en la circunferencia, representa una unión de aristas en el árbol de Hubbard; asimismo, el intervalo de ángulos en la circunferencia determinado por la imagen $\mathcal{A}(\{\theta_1, \theta_2\})$, es equivalente al intervalo de ángulos que comprenden la imagen bajo P_a de la unión de aristas correspondientes.

Nota 4.1.19 Si S denota la base del espacio vectorial en el algoritmo 1 y el par $\{\theta_1, \theta_2\} \in S$ es separado con respecto a la línea crítica Θ_{c_i} , entonces la arista (o aristas) correspondientes contienen al punto crítico c_i .

Demostración del caso 1: Si P_a es un polinomio postcríticamente finito tal que $-a \in B_a$, como P_a es conjugado a z^{d-1} en B_a , entonces el árbol de a es tipo estrella con n aristas. Podemos enumerar las aristas de modo que la matriz de incidencia \tilde{A} del árbol $H(P_a)$ queda definida de la siguiente manera: $A_{i,i+1} = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$, $a_{n,j} = 1$, para algún $j \in \{i, \dots, n\}$ y cero en cualquier otro caso. Ya que el polinomio característico de la matriz de incidencia tiene la forma $(-1)^n \lambda^{k-1} (\lambda^{n-(k-1)} - 1)$, su radio espectral es 1. Por lo tanto, $h(P_a) = 0$. Por otro lado, el teorema 4.1.10 nos garantiza que el radio espectral de la matriz A obtenida por el algoritmo 1.

Ya que la órbita de $-a$ está en B_a , el retrato crítico restringido Θ_a consta de ángulos externos correspondientes a la componente B_a . Por lo tanto, no existen pares $\{\theta_i, \theta_j\}$ separados con respecto al punto crítico $-a$. Si además, despreciamos la separación con respecto del cero (como en el algoritmo restringido), entonces no existen pares que sean separados. En consecuencia, todos los pares $\{\theta_i, \theta_j\} \in S$, tienen una sola imagen. Así, todas las filas de la matriz A' obtenida en el algoritmo (2) suman 1, por lo tanto, el radio espectral es 1, [HJ].

Demostración del caso 2: Si $-a \notin B_a$, tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 4.1.20 *Como cero es un punto crítico fijo de P_a , si $[v_1, 0]$ y $[0, v_2]$ son dos aristas de $H(a)$ y $\gamma = [v_1, 0] \cup [0, v_2]$, entonces $P_a(\gamma) = [P_a(v_1), P_a(v_2)]$.*

Demostración. Si $-a$ es un punto periódico, entonces no existen aristas de la forma $[v_1, 0]$ y $[0, v_2]$ que tengan la misma imagen. Luego, como 0 es un punto fijo, $P_a(\gamma) = [P_a(v_1), P_a(v_2)]$. Por otro lado, si $-a$ es preperiódico con $-a \notin B_a$, entonces $-a$ eventualmente va en un punto de bifurcación de ∂B_a , por lo tanto, para este caso tampoco existen aristas de la forma $[v_1, 0]$ y $[0, v_2]$ que tengan la misma imagen. ◀

Por lo tanto, en el conjunto S , para obtener la imagen de una pareja separada $\{\theta_1, \theta_2\}$ podemos descartar la característica de ser separado con respecto a línea crítica de Θ_0 . Así, para P_a de la familia de polinomios 3.1, si el par $\{\theta_1, \theta_2\}$ es separado con respecto a Θ , su conjunto de separación consta únicamente de un elemento (el que está asociado a Θ_{-a}).

Dado que para cada P_a el conjunto postcrítico depende únicamente del punto crítico $-a$, éstos se pueden comprender si los separamos de la siguiente manera:

i) Si $-a$ es el centro de una componente captura, entonces la órbita de Θ_{-a} eventualmente contiene al ángulo cero, el cual es un ángulo fijo. En este caso podemos considerar el conjunto postcrítico de Θ únicamente como $\bigcup_{n \geq 1} \tau^n(\Theta_{-a})$. Por

lo tanto, para este caso $A = A'$.

ii) Si $-a$ eventualmente va en $p \in \partial B_a$, con p fijo, entonces la órbita de Θ_{-a} contiene al ángulo cero, de forma análoga que el inciso 1), $A = A'$.

iii) En cualquier otro caso, las órbitas de Θ_{-a} y Θ_0 son disjuntas. Por lo tanto, el conjunto postcrítico es de la forma $Post(\Theta) = \{0, \theta_1, \dots, \theta_k\}$, donde $\theta_i = P_a^i(\theta)$, con $\theta \in \Theta_{-a}$.

Si escribimos el conjunto S de modo que los primeros k elementos son los de la forma $\{0, \theta_i\}$, entonces S puede escribirse como

$$S = \{\{0, \theta_1\}, \dots, \{0, \theta_k\}\} \cup \{\{\theta_i, \theta_j\}; i \leq j\}.$$

Así, la matriz de la transformación \mathcal{A} se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} B & X \\ \mathbf{N} & C \end{pmatrix},$$

donde B es la submatriz correspondiente a la relación de las imágenes de los pares de la forma $\{0, \theta_i\}$ con ellos mismos y C es la submatriz correspondiente a la relación de las imágenes de los pares de la forma $\{\theta_i, \theta_j\}$ con ellos mismos. La submatriz inferior \mathbf{N} representa las relación entre las imágenes de los pares $\{\theta_i, \theta_j\}$ con $\{0, \theta_i\}$. Esta matriz es idénticamente cero debido a que la imagen de un par de la forma $\{\theta_i, \theta_j\}$ nunca tiene una componente de la forma $\{0, \theta_i\}$, ya que no se considera la separación con respecto a la línea crítica Θ_0 y la órbita de Θ_{-a} no contiene al cero.

Como la matriz C es exactamente la matriz A' , para concluir la demostración del caso 2), basta con probar la siguiente afirmación.

Afirmación 4.1.21 *El radio espectral de la matriz B es 1.*

Demostración. Note que un par de la forma $\{0, \theta_i\}$ queda fijo bajo la transformación \mathcal{A} , únicamente cuando el ángulo θ_i queda fijo. Ya que el único ángulo fijo de τ es cero y $\theta_i \neq 0$, se tiene que todos los elementos de la diagonal de B son ceros. Por otro lado, si $\{0, \theta_i\}$ es no separado su imagen es $\{0, \theta_{i+1}\}$; y si es separado su imagen es de la forma $\{0, \theta_1\} + \{\theta_1, \theta_i\}$. En el primer caso, esto genera un 1 sobre la diagonal de B y en el segundo caso genera un 1 sobre la primera columna. Por lo tanto, B tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual tiene radio espectral igual a 1. Esto completa la demostración del teorema.

◀

Enseguida se muestran los resultados que se obtienen usando el retrato crítico restringido para calcular la entropía fundamental de los ejemplos 4.1.11 y 4.1.12 mostrados en la sección 4.1.1.

Ejemplo 4.1.22 Considere el polinomio P_a del ejemplo 4.1.11. Como se mencionó en dicho ejemplo, el punto crítico $-a$ eventualmente va en el punto fijo superatractor cero, su conjunto de Julia se muestra en la figura 4.2.

El retrato crítico restringido asociado a P_a es $\Theta = \{\{\frac{11}{27}, \frac{20}{27}\}\}$, y $\text{post}(\Theta) = \{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}\}$, los cuales se muestran en la figura 4.6.

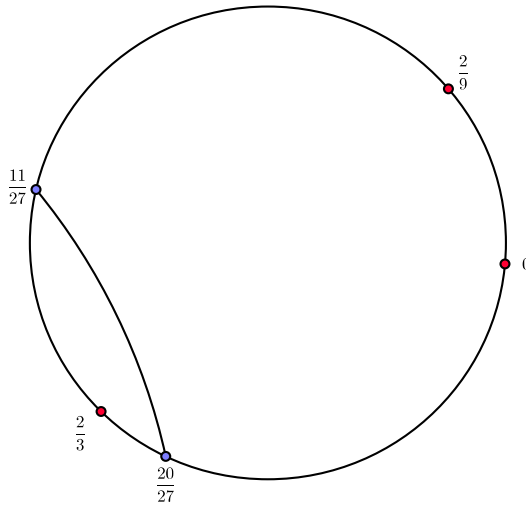


Figura 4.6: Retrato crítico restringido para $d = 3$ y $a = 1.06344911 + 0.543876i$.

La base S del espacio \mathcal{V} es $S = \{\{0, \frac{2}{9}\}, \{0, \frac{2}{3}\}, \{\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\}\}$ y la transformación \mathcal{A}' sobre \mathcal{V} en los elementos de la base, de acuerdo a la sección 4.1.2 es:

$$\begin{aligned} \{0, \frac{2}{9}\} &\mapsto \{0, \frac{2}{3}\} & \{0, \frac{2}{3}\} &\mapsto \{0, \frac{2}{3}\} + \{0, \frac{2}{3}\}, \\ \{\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\} &\mapsto \{\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\} + \{0, \frac{2}{3}\}. \end{aligned}$$

La matriz asociada es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual tiene radio espectral 1.4142. Por el teorema 4.1.18, se concluye que la entropía fundamental de P_a es $\log(1.4142)$, la cual coincide con la entropía fundamental del ejemplo 4.1.11.

Ejemplo 4.1.23 Para este ejemplo consideramos $a = 1.07183814 + 0.1928507i$. Como se muestra en el ejemplo 4.1.12, este polinomio tiene punto crítico $-a$ periódico de período cuatro, su conjunto de Julia se muestra en la figura 4.4.

El retrato crítico restringido asociado a P_a es $\Theta = \{\{\frac{7}{20}, \frac{41}{60}\}\}$, y $\text{post}(\Theta) = \{\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{9}{20}, \frac{7}{20}\}$ los cuales se muestran en la figura 4.7.

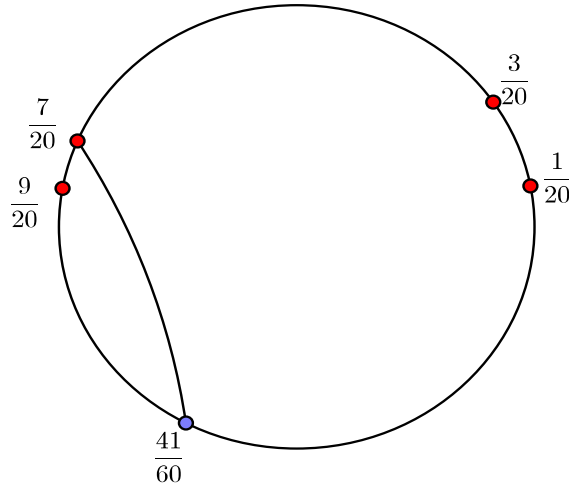


Figura 4.7: Retrato crítico restringido para $d = 3$ y $a = 1.07183814 + 0.1928507i$.

Así, la base S del espacio \mathcal{V} está dada por

$$S = \left\{ \left\{ \frac{1}{20}, \frac{3}{20} \right\}, \left\{ \frac{1}{20}, \frac{9}{20} \right\}, \left\{ \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right\}, \left\{ \frac{3}{20}, \frac{9}{20} \right\}, \left\{ \frac{3}{20}, \frac{7}{20} \right\}, \left\{ \frac{9}{20}, \frac{7}{20} \right\} \right\}.$$

La transformación \mathcal{A}' sobre \mathcal{V} se define en los elementos de la base como sigue:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{20}, \frac{3}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{3}{20}, \frac{9}{20} \right\}, \\ \left\{ \frac{1}{20}, \frac{9}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{1}{20}, \frac{3}{20} \right\} + \left\{ \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right\}, \\ \left\{ \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{1}{20}, \frac{3}{20} \right\}, \\ \left\{ \frac{3}{20}, \frac{9}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{1}{20}, \frac{9}{20} \right\} + \left\{ \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right\}, \\ \left\{ \frac{3}{20}, \frac{7}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{1}{20}, \frac{9}{20} \right\}, \\ \left\{ \frac{9}{20}, \frac{7}{20} \right\} &\mapsto \left\{ \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right\}. \end{aligned}$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con radio espectral 1.3953. Por el teorema 4.1.18, se concluye que la entropía de P_a restringido a su árbol de Hubbard es $\log(1.3953)$, la cual coincide con la entropía del ejemplo 4.1.11.

Observe que en los ejemplos 4.1.11 y 4.1.22 no existe ventaja de emplear el retrato crítico restringido, ya que la dimensión de las matrices asociadas a los algoritmos 1 y 2 es la misma. Sin embargo el hecho de no considerar la línea de separación dada por la envolvente convexa de Θ_0 simplifica la definición de la transformación \mathcal{A}' .

Por otro lado, en el ejemplo 4.1.23 se muestra claramente la ventaja de usar el retrato crítico restringido, ya que además de no considerar la línea de separación dada por la envolvente convexa de Θ_0 , la dimensión de la matriz A' se reduce significativamente con respecto a la matriz A del ejemplo 4.1.12.

4.2. Gráficas y cuñas

En esta sección se definen los conceptos de gráfica y cuña, como también se muestran algunas de sus propiedades que permiten relacionar el Algoritmo de Thurston con algunos elementos de las gráficas, los cuales permiten estudiar la continuidad de la entropía fundamental. Las definiciones y resultados aquí presentados están basados en el trabajo de Tiozzo y las pruebas pueden ser consultadas en [Tz2].

4.2.1. Gráficas

Una gráfica Γ consiste de un conjunto V no vacío, llamado el conjunto de vértices de la gráfica, un conjunto de aristas E y un mapeo ϕ del conjunto de aristas E a un conjunto ordenado o desordenado de pares de elementos de V . Supongamos que los conjuntos V y E de una gráfica son finitos. Por definición se

tiene que para cada arista de la gráfica Γ , podemos asociar una pareja ordenada o no ordenada de vértices pertenecientes a la gráfica. Si una arista $e \in E$ está asociada con un par ordenado (u, v) o un par no ordenado $\{u, v\}$, donde $u, v \in V$, entonces se dice que la arista e conecta o une los vértices u y v . Cualquier par de vértices que estén conectados por una arista en una gráfica son llamados vértices adyacentes.

En una gráfica $\Gamma(V, E)$, una arista que esté asociada a un par ordenado de $V \times V$ es llamado arista dirigida de Γ , mientras una arista que esté asociada a un par no ordenado de vértices es llamada arista no dirigida. Para cada arista dirigida e denotamos por $s(e)$ su punto de salida y por $t(e)$ su punto final. Al conjunto de aristas que salen de e lo denotaremos por $Out(e)$. Una gráfica en la que cada arista es dirigida, es llamada gráfica dirigida y una gráfica en la que cada arista es no dirigida es llamada gráfica no dirigida. Si algunas aristas son dirigidas y otras son no dirigidas en una gráfica, se trata de una gráfica mixta.

En una gráfica dirigida, al número de aristas que tienen a v como su vértice inicial se le llama grado de salida del vértice v . Al número de aristas que tienen a v como su vértice terminal es llamado grado de entrada de v . A la suma del grado de entrada y de salida del vértice v se le llama grado total de v y es igual al número de aristas que inciden en v .

Una trayectoria basada en un vértice v es una sucesión (e_1, e_2, \dots, e_n) de aristas tal que $s(e_1) = v$ y $t(e_i) = s(e_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n - 1$. La cantidad n de aristas se denomina longitud de la trayectoria.

De manera similar una trayectoria cerrada (e_1, e_2, \dots, e_n) basada en v es una trayectoria tal que $s(e_1) = t(e_n) = v$. Note que de acuerdo a la definición puede ocurrir que una trayectoria se intersecte a sí misma, esto es, que $s(e_i) = s(e_j)$ con $i \neq j$; además, dos trayectorias cerradas con diferentes vértices de salida se consideran diferentes.

Por otro lado, se define una trayectoria simple (e_1, e_2, \dots, e_n) , como aquella que no se intersecta a sí misma, esto es, $s(e_i) \neq s(e_j)$ para $i \neq j$. Dos trayectorias cerradas simples se consideran la misma si son cíclicamente permutadas, es decir, (e_1, \dots, e_n) y $(e_{k+1}, \dots, e_n, e_1, \dots, e_k)$. Un multíciclo es la unión de ciclos simples con vértices disjuntos por pares. La longitud de un multíciclo está dada por la suma de las longitudes de los ciclos simples que lo componen.

Definición 4.2.1 *Una gráfica contable Γ tiene ciclos acotados si tiene grado de salida acotado y para cada n , Γ tiene una cantidad finita de ciclos simples de longitud n .*

Si Γ tiene ciclos acotados, entonces para cada n el número de caminos cerrados de longitud n es finito. Se denota por $C(\Gamma, n)$ al número de caminos cerrados de longitud n . Además, si Γ tiene una cantidad contable de vértices también el número de multiciclos de tamaño n , $K(\Gamma, n)$, es finito.

Definición 4.2.2 Si Γ es una gráfica con ciclos acotados, se define la tasa de crecimiento de Γ , denotado por $r = r(\Gamma)$, como el crecimiento exponencial del número de trayectorias cerradas de longitud n ,

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C(\Gamma, n)}.$$

Por otro lado, se define la tasa de crecimiento de multiciclos de Γ , $\sigma = \sigma(\Gamma)$, como el crecimiento exponencial del número de multiciclos de longitud n ,

$$\sigma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{K(\Gamma, n)}.$$

Dada una gráfica finita Γ con matriz de adyacencias A , el determinante espectral de Γ está dado por el polinomio característico $P(t) = \det(I - tA)$. Se tiene que $P(t)$ se relaciona con el número de multiciclos de la siguiente manera

$$P(t) = \sum_{\gamma \text{ multiciclos}} (-1)^{C(\gamma)} t^{l(\gamma)}. \quad (4.2)$$

donde $C(\gamma)$ es el número de componentes conexas de γ y $l(\gamma)$ denota la longitud del multiciclo γ , véase [CDH].

Teorema 4.2.3 Sea Γ una gráfica con una cantidad contable de vértices y ciclos acotados, r y σ como en la definición 4.2.2, supongamos que $\sigma \leq 1$. Entonces, $P(t)$ como en la ecuación (4.2) define una función holomorfa en el disco unitario. Además, $P(z)$ no tiene ceros en el interior del disco $|z| \leq r^{-1}$; pero si $r \geq 1$, entonces $P(r^{-1}) = 0$.

Lema 4.2.4 Si Γ es una gráfica finita, entonces su tasa de crecimiento es igual al radio espectral de su matriz de adyacencia.

Dadas dos gráficas Γ_1 y Γ_2 con ciclos acotados, un mapeo de gráficas de Γ_1 a Γ_2 es una función $\pi : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$ en el conjunto de vértices y una función $\pi : E(\Gamma_1) \rightarrow E(\Gamma_2)$ en el conjunto de aristas, la cual es compatible en el sentido

que si la arista e conecta los vértices v_1 y v_2 en Γ_1 , entonces $\pi(e)$ conecta los vértices $\pi(e_1)$ y $\pi(e_2)$ en Γ_2 . Un mapeo de gráficas se denota por $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Un cubriente débil de gráficas es un mapeo de gráficas $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que, $\pi : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$ es sobreyectiva.

La función inducida por π del conjunto $Out(e)$ al conjunto $Out(\pi(e))$ es una biyección para cada $e \in V(\Gamma_1)$.

De la definición de cubriente débil se obtiene la siguiente afirmación.

Proposición 4.2.5 *Sea $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un cubriente débil de gráficas. Entonces dado $e \in V(\Gamma_1)$, para todo camino γ_2 en Γ_2 basado en $\pi(e)$ existe un único camino γ_1 en Γ_1 basado en e tal que $\pi(\gamma_1) = \gamma_2$.*

Por otro lado, cada mapeo de gráficas $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ en cada vértice $v \in V(\Gamma_1)$ induce una función en el conjunto de los caminos de longitud n ,

$$\begin{aligned} \Pi_{n,e} : \{ \text{Caminos cerrados en } \Gamma_1 \text{ de longitud } n \text{ basados en } e \} \\ \rightarrow \{ \text{Caminos cerrados en } \Gamma_2 \text{ de longitud } n \text{ basados en } \pi(e) \}. \end{aligned}$$

Además, si π es un cubriente débil, entonces $\Pi_{n,e}$ es inyectiva.

Partiendo de una gráfica localmente finita es posible construir un cubriente de gráficas vía una relación de equivalencia compatible en el conjunto de vértices V , en el sentido de que si $v_1 \sim v_2$, entonces para cualquier vértice w , el número de aristas de v_1 a cualquier miembro de la clase $[w]$ de w , es igual al número de aristas de v_2 a cualquier miembro de la clase de w . Denotamos por \bar{V} al conjunto de clases de equivalencia. A partir de la relación de equivalencia se define una gráfica cociente $\bar{\Gamma}$ con conjunto de vértices \bar{V} . El número de aristas de $[v]$ a $[w]$ está definido por

$$\#([v] \rightarrow [w]) := \sum_{u \in [w]} \#(v \rightarrow u).$$

Note que debido a la compatibilidad en las aristas, la suma no depende del representante v que se elija en la clase $[w]$. De hecho se puede verificar que la función cociente $\pi : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ es un cubriente débil de gráficas.

El siguiente resultado relaciona el crecimiento de una gráfica con el crecimiento de su cubriente débil.

Proposición 4.2.6 *Sean $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un cubriente débil de gráficas con ciclos acotados y $T \neq \emptyset$ un conjunto de vértices de Γ_1 . Supongamos que todo camino cerrado en Γ_1 pasa a través de T . Entonces para cada n se tiene que*

$$C(\Gamma_1, n) \leq n \cdot \#T \cdot C(\Gamma_2, n).$$

De lo cual se obtiene que

$$r(\Gamma_1) \leq r(\Gamma_2).$$

Suponga que G es un conjunto de caminos cerrados en Γ_2 tal que cada $\gamma \in G$ cruza al menos un vértice v de modo que $T_v = \pi^{-1} \cap T$ es no vacío y cualquier levantamiento de γ desde un elemento de T_v termina en T_v . Entonces, existe $L \geq 0$ tal que para cada n

$$\#\{\gamma \in G : longitud(\gamma) = n\} \leq n \sum_{k=0}^L C(\Gamma_1, n+k).$$

De la proposición 4.2.6 se puede concluir que si Γ_1 y Γ_2 son ambas finitas y $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es un cubriente débil de gráficas, entonces la tasa de crecimiento de Γ_1 es igual a la tasa de crecimiento de Γ_2 .

4.2.2. Cuñas

En esta sección se describe el concepto de cuña, el cual permite guardar la información de la dinámica de arcos en el conjunto posterítico de un polinomio. De hecho se construye una gráfica cuyos vértices representan todos los posibles arcos entre las iteradas de los dos puntos críticos y sus aristas representan las transiciones entre los arcos vía el polinomio.

Consideremos una cuña como el conjunto de pares de números naturales distintos $\Sigma = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq j\}$, el cual se puede mostrar en un arreglo como el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \dots \\ & & & & & (4, 5) & \dots \\ & & & & (3, 4) & (3, 5) & \dots \\ & & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & \dots \\ & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & \dots \end{array}$$

Para cada elemento $v = (i, j)$ de Σ , la entrada i se llama la altura de v y la entrada j se denomina el ancho de v . Cada elemento v de Σ se etiqueta con una S o una N , la etiqueta caracteriza a v como separado o no separado (análogo al algoritmo de Thurston en la sección 4.1.2). A Σ junto con esta asignación se le llama cuña etiquetada y la denotamos por W .

Definición 4.2.7 Dada una cuña etiquetada W , se define la gráfica Γ_W asociada a W , de la siguiente manera. Tomamos como conjunto de vértices de Γ_W al conjunto W y las aristas se definen de la siguiente forma:

1. Si $v = (i, j) \in W$ es no separada, entonces únicamente hay una arista con salida en v y vértice de llegada $w = (i + 1, j + 1)$. Además, se dice que la arista $(i, j) \rightarrow (i + 1, j + 1)$ es una arista hacia arriba, la cual se etiqueta con la letra U .
2. Si $v = (i, j) \in W$ es separada, entonces Γ_W tiene dos aristas con salida en v :
 $(i, j) \rightarrow (i, j + 1)$, la cual se denomina arista hacia adelante y se etiqueta con la letra F .
 $(i, j) \rightarrow (i + 1, j)$, la cual se denomina arista hacia atrás y se etiqueta con la letra B .

La etiqueta que se asigna a cada arista está asociada al tipo de ésta. (U, B, F son de los términos en inglés *Upward, Backward, Forward*). Por otro lado, el tipo de arista se ha asignado de acuerdo al comportamiento de éstas.

Proposición 4.2.8 Sea Γ_W la gráfica asociada a la cuña etiquetada W , entonces

- Cada vértice dentro de cualquier camino cerrado de longitud n tiene altura a lo más n .
- El soporte de cada camino cerrado de longitud n intersecta al conjunto $\{(i, k) : 2 \leq k \leq n + 1\}$.
- Cada vértice dentro de cualquier camino cerrado de longitud n tiene ancho a lo más $2n$.
- Para cada $k \geq 1$, existe a lo más un vértice separado contenido en la k -ésima diagonal $D_k = \{(i, j) \in W : j - i = k\}$, el cual está contenido en el soporte de al menos un camino cerrado.
- El número de multiciclos de longitud n es a lo más $(2nk)^{\sqrt{2kn}}$.

Teorema 4.2.9 Sea W una cuña etiquetada. Entonces, su gráfica asociada Γ tiene ciclos acotados y su determinante espectral $P(t)$ define una función holomorfa en el disco unitario. Además, la tasa de crecimiento r de la gráfica Γ es igual al inverso de la raíz positiva más pequeña de $P(z)$, en el siguiente sentido, $P(z) \neq 0$ para todo $|z| < r^{-1}$ y si $r > 1$, entonces $P(r^{-1}) = 0$.

Lema 4.2.10 *Si una sucesión de cuñas etiquetadas $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a W , entonces en la tasa de crecimiento de W_n converge a la tasa de W .*

Dado enteros $p \geq 1$ y $q \geq 0$ se define la relación de equivalencia $\equiv_{p,q}$ en \mathbb{N}^+ , tal que $i \equiv_{p,q} j$ si

- $\min\{i, j\} \leq q$ e $i = j$, o
- $\min\{i, j\} \geq q + 1$ e $i \equiv j \pmod{p}$.

Note que si $q = 0$, la relación de equivalencia $\equiv_{p,q}$ es simplemente la congruencia módulo p . Un conjunto de representantes para las clases de equivalencia es el conjunto $\{1, 2, \dots, p + q\}$. Esta relación de equivalencia induce una relación de equivalencia en $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ dada por $(i, j) \equiv_{p,q} (k, l)$ si y sólo si $i \equiv_{p,q} k$ y $k \equiv_{p,q} l$. Además, ésta induce una relación de equivalencia en el conjunto de pares no ordenados $\{i, j\}$, de modo que el par no ordenado $\{i, j\}$ es equivalente a $\{k, l\}$ si y sólo si $(i, j) \equiv_{p,q} (k, l)$ o $(i, j) \equiv_{p,q} (l, k)$.

Definición 4.2.11 *Una cuña etiquetada es periódica de período p y preperíodo q , si se cumplen las siguientes condiciones:*

- Cualesquiera dos pares (i, j) y (k, l) tal que $\{i, j\} \equiv_{p,q} \{k, l\}$, tienen la misma etiqueta.
- Si $i \equiv_{p,q} j$, entonces el par (i, j) es no separado.

Cuando $q = 0$, se dice que la cuña es puramente periódica.

Los pares diagonales son aquellos de la forma (i, j) tal que $i \equiv_{p,q} j$. Note que de acuerdo a la definición 4.2.11, todo par diagonal es no separado.

A partir de una cuña de período p y preperíodo q , con gráfica asociada Γ , posiblemente infinita, se construye una gráfica finita denotada por Γ^F , que guarda la información esencial de Γ , específicamente su tasa de crecimiento.

Se define el conjunto de vértices de Γ^F como el conjunto de las $\equiv_{p,q}$ -clases de equivalencia de pares no ordenados, no diagonales. Un conjunto de representantes de $V(\Gamma^F)$ es el conjunto

$$\Sigma_{p,q} = \{\{i, j\} : 1 \leq i \leq j \leq p + q\}.$$

Las aristas de Γ^F son inducidas por las aristas de Γ , siguiendo las reglas de la definición 4.2.7.

La relación principal entre Γ y Γ^F está dada en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.12 *Sea W una cuña periódica etiquetada, con gráfica asociada Γ . Entonces, la tasa de crecimiento de Γ es igual al la tasa de crecimiento de su gráfica finita asociada Γ^F .*

Proposición 4.2.13 *Sean W_1 y W_2 dos cuñas etiquetadas puramente periódicas de período p . Supongamos que todos los pares (i, j) con $i, j \not\equiv 0 \pmod{p}$ la etiqueta de (i, j) en W_1 es igual a la etiqueta del mismo par en W_2 . Entonces, las gráficas finitas Γ_1^F y Γ_2^F son isomorfas. Como consecuencia, las tasas de decrecimiento de W_1 y W_2 son iguales.*

4.3. Continuidad de la entropía como función del argumento externo

En esta sección vamos a estudiar la relación entre las propiedades que tienen las gráficas asociadas a una cuña etiquetada y las propiedades de los retratos críticos que se emplean en el algoritmo de Thurston, descrito en la sección 4.1.1. Dado que este algoritmo se aplica a polinomios con conjunto postcrítico finito, los cuales tienen asociado un retrato crítico racional, comenzaremos trabajando con éstos y a partir de ellos estudiaremos otros parámetros. Como lo hemos hecho a lo largo de este trabajo, nos enfocaremos en la familia de polinomios (3.1).

Sea P_a un polinomio postcríticamente finito y Θ_a el retrato crítico restringido, asociado a P_a . Si θ denota el ángulo $\tau(\Theta_{-a})$, entonces los elementos del conjunto postcrítico se pueden representar por $\{0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, donde $x_l = \tau^l(\theta) \pmod{1}$ en la circunferencia unitaria. De este modo, dada una cuña Σ , un par $(i, j) \in \Sigma$ es etiquetado como no separado si x_i y x_j no son separados por Θ_a y es etiquetado como separado si x_i y x_j son separados por Θ_a . Procediendo de esta forma, P_a genera una cuña etiquetada, la cual a su vez genera una gráfica, las cuales se denotan por W_a y Γ_a , respectivamente.

Por otro lado, si \mathcal{C} es la región de conexidad de la familia de polinomios (3.1), de la proposición 3.1.3 se tiene que, si θ es racional, entonces el rayo externo $\mathcal{R}(\theta)$ aterriza en un parámetro $a(\theta) \in \partial\mathcal{C}$. Además, el polinomio $P_{a(\theta)}$ tiene conjunto postcrítico finito y en el espacio dinámico, el rayo externo $R(\theta)$ aterriza en el valor crítico $P_{a(\theta)}(-a)$ o en la componente de Fatou que lo contiene, (proposición 3.1.4). Sin embargo posiblemente $R(\theta)$ no sea el único rayo externo que cumple esta propiedad. Dado P_a , para construir el conjunto Θ_{-a} del retrato crítico restringido se tiene la libertad de elegir cualquiera de los rayos externos que aterrizan en $P_a(-a)$ o en la componente de Fatou que lo contiene. Podemos elegir el rayo $R(\theta)$ de la

proposición 3.1.4 como partida para construir Θ_{-a} , lo cual nos permite representar el conjunto postcrítico de $\Theta_{\mathbf{a}}$ por $\{0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, donde $x_j = \tau^{j-1}i(\theta) \pmod{1}$. Además, con esta elección de acuerdo a la definición 4.1.13 y a la proposición 3.1.4, se tiene que $\Theta_{-a} = \{\frac{\theta}{d} + \frac{l}{d}, \frac{\theta}{d} + \frac{l+1}{d}\}$, donde $l = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.

Recapitulando la primera parte de esta sección, se tiene que si θ es un ángulo racional, el rayo externo $\mathcal{R}(\theta)$ aterriza en un parámetro $a(\theta)$ cuyo polinomio correspondiente, $P_{a(\theta)}$, tiene conjunto postcrítico finito, por lo que, $P_{a(\theta)}$, tiene asociado un retrato crítico restringido Θ_a y en consecuencia, también tiene asociada una gráfica Γ_θ .

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1 *La función $\theta \rightarrow \log r_\theta$ es continua, y coincide con la entropía fundamental $h(\theta)$ para todo θ racional.*

Para probar el teorema primero se estudia la relación que existe entre un ángulo θ y su cuña etiquetada correspondiente W_θ .

Lema 4.3.2 *Si θ es periódico de período p y preperíodo q bajo la multiplicación por d , entonces la cuña etiquetada W_θ es periódica del mismo período y preperíodo.*

Demostración. De la definición de la relación de equivalencia $\equiv_{p,q}$, se tiene que $i \equiv_{p,q} j$ si sólo si $\tau^{i-1}\theta \equiv \tau^{j-1}\theta \pmod{1}$, lo cual prueba la primera condición de la definición 4.2.11. Por otro lado, note que si (i, j) es un par diagonal, entonces $x_i \equiv x_j$, por lo que, (i, j) es no separado verificando la segunda condición de la definición de cuña periódica. ◀

A continuación se prueba que el logaritmo de la tasa de crecimiento de Γ_θ , coincide con la entropía para los ángulos racionales, lo cual corresponde a la primera parte del teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.3 *Sean θ un ángulo racional, Γ_θ la gráfica asociada la cuña etiquetada W_θ y r_θ la tasa de crecimiento de Γ_θ . Entonces, se tiene la siguiente igualdad*

$$h(\theta) = \log r_\theta.$$

Demostración. Sea Γ_θ^F la gráfica finita asociada a Γ_θ . Observe que la matriz A' generada por el algoritmo de Thurston restringido es exactamente la matriz de adyacencias de la gráfica finita Γ_θ^F . Por otro lado, el lema 4.2.4 garantiza que la tasa de crecimiento de Γ_θ^F coincide con el radio espectral de su matriz de adyacencias, esto es, el radio espectral de A , el cual es igual a la entropía fundamental. Además,

la proposición 4.2.12 implica que la tasa de crecimiento de Γ_θ es igual a la tasa de crecimiento de Γ_θ^F , digamos r_θ . En consecuencia, $h(\theta) = \lambda$, donde λ es el radio espectral de A . Por lo tanto,

$$h(\theta) = \lambda = r_\theta.$$

◀

La parte que resta probar en esta sección es que la función entropía $\theta \rightarrow h(\theta)$ definida para ángulos θ racionales, tiene una extensión continua en \mathbb{R}/\mathbb{Z}

Proposición 4.3.4 *Para cada ángulo $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ los límites unilaterales*

$$r_\theta^+ := \lim_{\theta' \rightarrow \theta^+} r_{\theta'}, \quad r_\theta^- := \lim_{\theta' \rightarrow \theta^-} r_{\theta'},$$

existen. Además, $r_\theta^+ = r_\theta^- = r_\theta$.

Demostración. Dado que la función $x_j = \tau^{j-1}(\theta)$ es continua, para todo j , entonces $\lim_{\theta' \rightarrow \theta} x_j(\theta')$ existe para todo θ . Esto significa que los vértices de $W_{\theta'}$ convergen cuando $\theta' \rightarrow \theta$. Para analizar las aristas de las gráficas $\lim_{\theta' \rightarrow \theta^+} W_{\theta'}$ y $\lim_{\theta' \rightarrow \theta^-} W_{\theta'}$, analizamos la posición de los argumentos $x_i(\theta) = \tau^{i-1}(\theta)$, con respecto a la partición determinada por Θ_a . Para el análisis se tienen dos casos:

1) Si θ no es estrictamente periódico, entonces $x_i \notin \Theta_{-a} = \{\frac{\theta}{d} + \frac{l}{d}, \frac{\theta}{d} + \frac{l+1}{d}\}$, para todo $x_i(\theta) \in \text{post}(\Theta_a)$. Por lo tanto, para todo θ' en una vecindad de θ el argumento $x_i(\theta)$ pertenece al mismo sector de su respectivo retrato crítico. Por lo tanto, $W_\theta^+ = \lim_{\theta' \rightarrow \theta^+} W_{\theta'} = \lim_{\theta' \rightarrow \theta^-} W_{\theta'} = W_\theta^+$. Del lema 4.2.10 se tiene que $r_\theta^+ = r_\theta^-$.

2) Si θ es estrictamente periódico de período p , entonces $x_j(\theta) \in \Theta_{-a} = \{\frac{\theta}{d} + \frac{l}{d}, \frac{\theta}{d} + \frac{l+1}{d}\}$, si y sólo si $j \equiv 0 \pmod{p}$. Por lo tanto, para $j \not\equiv p \pmod{p}$, $x_j(\theta')$ se comporta como en el inciso 1) para θ suficientemente cercana a θ . Por lo tanto, W_θ^- y W_θ^+ únicamente difieren en las etiquetas de los pares (i, j) , donde $i \equiv 0 \pmod{p}$ ó $j \equiv 0 \pmod{p}$. Así, $W_\theta^- = \lim_{\theta' \rightarrow \theta^-} W_{\theta'}$ y $W_\theta^+ = \lim_{\theta' \rightarrow \theta^+} W_{\theta'}$ son diferentes.

Por otro lado, para $j \equiv 0 \pmod{p}$, $x_j(\theta) = \phi_k(\theta)$ para algún $k \in \{1, 2\}$. Esto es, $x_{np} = \phi_k(\theta)$ para toda $n \geq 1$.

Además, la función $x_{np} = \tau^{np-1}(\theta) \pmod{1}$ tiene derivada diferente a la función $\phi_k(\theta)$. Por lo que, existe $\epsilon \geq 0$ tal que para todo $\theta' \in (\theta, \theta + \epsilon)$, $x_{np}(\theta') > \phi_k(\theta')$ pertenece al mismo sector de la partición determinada por Θ_a para todo $n \geq 1$. Esto demuestra que W_θ^+ es periódica de período p . De manera análoga se prueba que W_θ^- es periódica de período p y por el lema 4.3.2 W_θ tiene el mismo período.

Por la proposición 4.2.13 las gráficas Γ_θ^- , Γ_θ^+ y Γ_θ asociadas a W_θ^- , W_θ^+ y W_θ respectivamente, tienen la misma tasa de crecimiento. Por lo tanto,

$$r_\theta = r_\theta^+ = r_\theta^-.$$



Del teorema 4.3.3 y de la proposición 4.3.4 se tiene el resultado de la sección.

Teorema 4.3.1. *La función $\theta \rightarrow r_\theta$ es continua para todo θ en \mathbb{R}/\mathbb{Z} y coincide con la entropía fundamental de $P_{a(\theta)}$ para valores de θ racionales.*

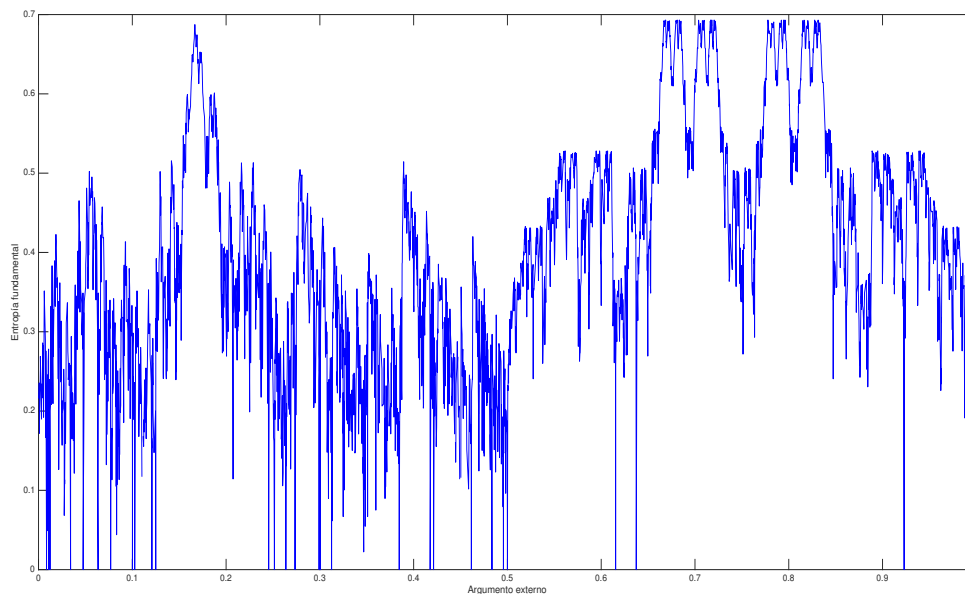


Figura 4.8: Gráfica de la entropía como función del argumento externo para $d = 3$.

Conclusiones

Este trabajo muestra que la entropía topológica fundamental es una buena herramienta para entender la complejidad de familias de polinomios. El trabajo se enfocó en el estudio de la entropía fundamental para la familia (3.1), la cual está formada por polinomios de grado d con dos puntos críticos.

Al definir un orden parcial en la familia de polinomios de grado d , similar al usado por Tao Li en la familia cuadrática y cúbica, nos fue posible generalizar el teorema de monotonía de la entropía para dicha familia de grado d . Para la demostración empleamos los rayos externos y la conjugación de los polinomios de grado d en su conjunto de Julia, con la función multiplicación por d en la circunferencia unitaria, como en [L]. Este resultado es el teorema 3.4.19, el cual muestra que la entropía fundamental crece cuando nos movemos del centro de la componente principal hacia las puntas del lugar de conexidad, a través de los centros de componentes hiperbólicas.

En el capítulo cuatro se mostró el algoritmo propuesto por Thurston para calcular la entropía fundamental y los conceptos que se emplean en la demostración de la validez del mismo, como son marcas críticas y retratos críticos en el disco unitario. Además, se demostró que para la familia de polinomios (3.1), donde un punto crítico es fijo, el algoritmo se puede simplificar de modo que este último punto crítico puede ser ignorado. La prueba de este resultado se hizo analizando la dinámica de los polinomios en sus retratos críticos. Esta simplificación fue útil ya que permitió analizar la dinámica de los polinomios de grado d como polinomios unicríticos. Empleando las herramientas de gráficas y cuñas como en [Tz2] se demostró que la entropía fundamental es una función continua en la frontera del lugar de conexidad \mathcal{C} . Este resultado es relevante ya que la entropía fundamental tiene muchas variaciones en $\partial\mathcal{C}$, como se muestra en la gráfica 4.8, sin embargo el teorema 4.3.1 garantiza su continuidad.

Apéndice A

Matrices no negativas

En esta sección se muestran algunos resultados importantes sobre matrices no negativas, que se emplean para construir herramientas que nos permitirán calcular la entropía topológica para algunas funciones.

Lema A.0.1 *Sea $A = (a_{ik})$ una matriz de tamaño $p \times p$ de números reales no negativos. Entonces existen $\lambda \geq 0$ y un vector $x = (x_k)$ distinto de cero con $x_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, p$) tales que $Ax = \lambda x$ y $|\mu| \leq \lambda$, para cualquier otro valor propio μ de A .*

Intuitivamente, se puede ver la veracidad de este lema. Considere el caso de una matriz positiva A de 2×2 . La correspondiente transformación matricial mapea el primer cuadrante del plano adecuadamente en sí mismo, pues todas las componentes son positivas. Si repetidamente se permite a A actuar sobre las imágenes que se tienen, necesariamente convergen hacia algún rayo en el primer cuadrante. Un vector director para este rayo será un vector positivo x , que debe mapearse en algún múltiplo positivo de sí mismo (por decir, λ_1), pues A deja el rayo fijo. En otras palabras, $Ax = \lambda_1 x$, con x y λ_1 ambos positivos.

Demostración. Para algunos vectores distintos de cero x , $Ax \geq \lambda x$ para algún escalar λ . Cuando esto sucede, entonces $A(kx) \geq \lambda(kx)$ para toda $k > 0$; por tanto, solo es necesario considerar vectores unitarios x . A mapea al conjunto de todos los vectores unitarios en \mathbb{R}^n (la esfera unitaria) en un “elipsoide generalizado”. De este modo, conforme x varía sobre los vectores no negativos en esta esfera unitaria, habrá un valor máximo de λ tal que $Ax \geq \lambda x$. Denote este número mediante λ_1 y el correspondiente vector unitario mediante x_1 .

Ahora se demostrará que $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Si no es este el caso, entonces $Ax_1 > \lambda_1 x_1$

y al aplicar A nuevamente, se obtiene

$$A(Ax_1) > A(\lambda_1 x_1) = \lambda_1(Ax_1),$$

donde la desigualdad se conserva, pues A es positiva. Entonces $y = \frac{1}{\|Ax_1\|} Ax_1$ es un vector unitario que satisface $Ay > \lambda_1 y$, de modo que habrá algún $\lambda_2 > \lambda_1$ tal que $Ay \geq \lambda_2 y$. Esto contradice el hecho de que λ_1 era el valor máximo con esta propiedad. En consecuencia, se sigue que $Ax_1 = \lambda_1 x_1$; esto es: λ_1 es un eigenvalor de A .

Ahora bien, A es positiva y x_1 es positivo, de modo que $\lambda_1 x_1 = Ax_1 > 0$. Esto significa que $\lambda_1 > 0$ y $x_1 > 0$, lo que completa la demostración. ◀

Nos referiremos a λ , como el valor propio máximo de A . Una matriz A no negativa es reducible si existe una matriz de permutación P de tal manera que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} B & C \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

donde B y D son matrices cuadradas irreducibles de menor tamaño que A .

Lema A.0.2 *Para cualquier matriz no negativa A , existe una matriz de permutación P tal que*

$$P^t A P = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix},$$

donde cada block de la diagonal A_{kk} , $k = 1, \dots, r$ es irreducible.

Lema A.0.3 *Si A es una matriz no negativa con valor propio máximo λ . Si A es irreducible, entonces existe un entero positivo h tal que los valores propios de A con valor absoluto λ son*

$$\lambda, \lambda\omega, \dots, \lambda\omega^{h-1},$$

donde $\omega = e^{\frac{2\pi}{h}}$.

Equipamos el espacio de matrices de tamaño $n \times n$ con la norma dada por

$$\|A\| = \sum_{ik} |a_{ik}|.$$

El valor propio máximo está relacionado con esta norma de la siguiente manera.

Lema A.0.4 Sea A una matriz no negativa con valor propio máximo λ , entonces

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Sea $x = (x_k)$ el vector propio no negativo correspondiente al valor propio λ , de modo que

$$\lambda x_i = \sum_k a_{ik} x_k.$$

Si elegimos i tal que $x_i = \max x_k$, entonces obtenemos

$$\lambda \leq \sum_k a_{ik} \leq \|A\|.$$

Aplicando esta desigualdad a A^n , en lugar de A , se obtiene que $\lambda^n \leq \|A^n\|$ y por lo tanto,

$$\lambda \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea T una matriz no singular tal que $J = T^{-1}AT$ es la forma canónica de Jordan. Si $p > \lambda$, entonces $\frac{J^n}{p^n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto, también $\frac{A^n}{p^n} \rightarrow 0$. Así, $\|A^n\| < p^n$ para todo n grande y en consecuencia,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq p.$$

Como esto es para cualquier $p > \lambda$ se sigue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

◀

En esencia, el mismo argumento muestra que, para cualquier matriz A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \mu,$$

donde μ es el valor absoluto más grande de todos los valores propios de A .

El valor propio máximo también se puede caracterizar en términos de la traza.

Lema A.0.5 Sea A una matriz no negativa con valor propio máximo λ , entonces

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Si A es una matriz de tamaño $p \times p$, entonces $\text{tr } A^n \leq p\lambda^n$, y consecuentemente

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

Queda por demostrar la otra desigualdad.

Para ello, primero supongamos que A es irreducible. Por el lema A.0.3, los valores propios con valor absoluto λ son de la forma $\lambda, \lambda\omega, \dots, \lambda\omega^{h-1}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi}{h}}$. Si denotamos por $\lambda_{h+1}, \dots, \lambda_p$ a los valores propios restantes de A , entonces

$$\text{tr } A^n = \lambda^n + \lambda^n \omega^n + \dots + \lambda^n \omega^{(h-1)n} + \lambda_{h+1}^n + \dots + \lambda_p^n.$$

En particular si consideramos $n = kh$ un múltiplo de h , entonces, $\omega^n = 1$ y

$$\begin{aligned} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}} &= [h\lambda^n + \sum_{i=h+1}^p \lambda_i^n]^{\frac{1}{n}} \\ &= [h\lambda^n + \lambda^n \sum_{i=h+1}^p (\frac{\lambda_i}{\lambda})^n]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lambda [h + \sum_{i=h+1}^p (\frac{\lambda_i}{\lambda})^n]^{\frac{1}{n}} \\ &\rightarrow \lambda \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{A.1}$$

En el caso general, aplicamos el lema A.0.2. Para alguna k el bloque irreducible A_{kk} de la diagonal tiene el valor propio máximo λ . Como

$$\text{tr } A^n \geq \text{tr}(A_{kk})^n,$$

de (A.1) se sigue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(A^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

◀

Considerando el caso particular en el que cada elemento de la matriz A es 0 o 1. Una trayectoria de longitud n está definida como una sucesión finita $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$ tal que

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_{n+1}} \neq 0.$$

Entonces, $\|A^n\|$ es simplemente el número de trayectorias de longitud n , debido a que

$$\|A^n\| = \sum a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_{n+1}}.$$

Del mismo modo, $(A^n)_{ik}$ es el número de trayectorias de longitud n con $i_1 = i, i_{n+1} = k$.

Apéndice B

Rutinas Matlab para calcular la entropía fundamental

En este apartado se muestra la rutina en matlab empleada para calcular la entropía fundamental. La primera rutina aproxima el valor de la entropía si le damos como entrada el valor del argumento externo en el intervalo (0, 1).

```
function entropia=AlgoritmoThurston3(teta,d)
clearvars -except teta

teta=teta;          %%%Valor crítico
v1=(teta/3)+1/3;    %%%PC
v2=v1+1/3;
V0=[v1,v2];
V0=sort(V0);
%
iterador=teta;
Post=[];            %%%Guardar la órbita
separado=[];        %%%Guardar en que sector está
rep=1;              %%% rep es la distancia de la iteración
                    %%%hacia los puntos calculados de la órbita
i=1;
cero=1/2^(45);      %%%CERO

%*****
```

```

%%Construcción del conjunto postcritico etiquetado
%%%*****

while rep>cero && i<=10000    %% En este ciclo se genera el conjunto postcritico
a1=abs(iterador-V0(1));      %% Distancia de la iteración a la línea
a2=abs(iterador-V0(2));      %% de separacion
if V0(1)<iterador && iterador<V0(2)
separado=[separado,1];
elseif (a1<cero)|| (a2<cero)    %% Esta condición indica cuando
separado=[separado,0];          % la iteración pego en el crítico
else
separado=[separado,2];
end
Post=[Post,iterador];          %Guarda la iteración y el sector
iterador=d^i*(teta);          %%multiplica por d
iterador=mod(iterador,1);
norma1=abs(Post-iterador);
norma=sort(norma1);
rep=abs(norma(1));             %%Verifica si no se repite con alguno
i=i+1;                          %de los ya calculados
end
Q=min(norma1);                 %%Posición con la que se repite
repetido=find(norma1==Q);       %% la última iteración

x=1:i-1;
xx=[x;separado]; %Órbita etiquetada
S=nchoosek(x,2); % Base del EV
SS=zeros(length(S),4); %Para guardar la Imagen de la transformación

longitud1=length(x);
longitud2=nchoosek(longitud1,2);

%%%*****
%%Construcción de la transformación lineal
%%%*****

```

```
for k=1:longitud2
l1=S(k,1);
l2=S(k,2);
e1=xx(2,l1);
e2=xx(2,l2);
if (l2==longitud1)&&(repetido==longitud1) %%Eventual fijo
if e1*e2==2
SS(k,1)=1;
SS(k,2)=l1+1;
SS(k,3)=1;
SS(k,4)=longitud1;
else
SS(k,1)=l1+1;
SS(k,2)=longitud1;
end
end

if (l2==longitud1)&&(repetido<longitud1) %% eventual periódico
if e1*e2==2
SS(k,1)=1;      %% Si el par es separado
SS(k,2)=l1+1;
SS(k,3)=1;
SS(k,4)=repetido;
else
ordenado=[l1+1,repetido];    %% Ordenamos por que en
ordenado=sort(ordenado);    % de las entradas de cada
SS(k,1)=ordenado(1);        %% elemento de S la primera es menor
SS(k,2)=ordenado(2);
end
end

if (l2==longitud1)&&(repetido==1) % En este caso no hay separación
SS(k,1)=1;                % l2 coincide con el PC
SS(k,2)=l1+1;
end
```

```

if (l2~=longitud1)      %% El caso cuando la pareja l1, l2 no coincide
if e1*e2==2            %% con el último elemnto del postcrítico.
SS(k,1)=1;
SS(k,2)=l1+1;
SS(k,3)=1;
SS(k,4)=l2+1;
else
SS(k,1)=l1+1;
SS(k,2)=l2+1;
end
end

end

%%%%%*****
%%Construcción del Matriz A
%%%%%*****

A=zeros(longitud2,longitud2);
for n=1:longitud2      %% Construcción de la matriz A
for m=1:longitud2
if (SS(n,1)==S(m,1)&& SS(n,2)==S(m,2)) || (SS(n,1)==S(m,2)&& SS(n,2)==S(m,1))
A(n,m)=A(n,m)+1;
end

if (SS(n,3)==S(m,1)&& SS(n,4)==S(m,2)) || (SS(n,3)==S(m,2)&& SS(n,4)==S(m,1))
A(n,m)=A(n,m)+1;
end

end

end

entropia=max(abs(eig(A)));          \%%Radio espectral de A.
entropia=log(entropia);
end

```

La siguiente rutina fue empleada para generar la gráfica 4.8. Esta rutina genera parámetros de manera aleatoria en el intervalo $[0, 1]$ y usa la función anterior para calcular los valores de la entropía fundamental en cada parámetro.

```
tic
x=[];
for k=3:12      %Se generan parametros con denominador par
xx=[1/2^k:1/2^k:1-1/2^k];
cantidad1=(length(xx)+1)/2;
b1=randi(length(xx),1,cantidad1);
xx=xx(b1);
x=[x,xx];
x=unique(x);
end
clearvars xx
yy=[];
for k=3:12      %Se generan parametros con denominador impar
xx=[1/(2^k-1):1/(2^k-1):1-1/(2^k-1)];
cantidad1=length(xx);
b1=randi(length(xx),1,cantidad1);
xx=xx(b1);
yy=[yy,xx];
yy=unique(yy);
end
x=[x,yy]; %%Se guardan en un mismo vector

x=unique(x);
cantidad=2^12;
b=randi(length(x),1,cantidad); %Se toman 2^12 parámetros de manera
x=x(b);                       % aleatoria

x=sort(x);
x=unique(x);

longitud=length(x);
y=zeros(longitud,1);
```

```
for s=1:longitud
    y(s)=AlgoritmoThurston2(x(s));
end
plot(x,y,'b','markersize',.1)
xlabel('Argumento externo');
ylabel('Entropia');
toc
```

Bibliografía

- [B] A. Beardon. (1991). *Iteration of Rational Functions*. Springer Verlag, New York.
- [BC] Louis S. Block y William A. Coppel. (1992). *Dynamics in one dimension*. Lecture Notes in Mathematics, **1513**. Springer-Verlag, Berlin. MR1176513.
- [C] R. Clausius. (1865). *Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie*. Annalen der Physik und Chemie **125**: 351-400
- [CDH] D. Cvetkovic, M. Doob y H. Sachs. (1980). *Spectra of graphs*. Academic Press, USA.
- [CG] L. Carleson y T. Gamelin. (1993). *Complex Dynamics*. Springer Verlag, New York.
- [D] A. Douady. (1995). *Topological Entropy of Unimodal Maps*. Real and Complex Dynamics. 65-87.
- [D1] A. Douady. (1982). *Systèmes Dynamiques Holomorphes*. Séminaire Bourbaki, 35^e année. **599**, Astérisque 105-106, 39-63.
- [D2] A. Douady. (1984). *Algorithms for computing angles in the Mandelbrot set*. 48 rue Monseigneur le prince 74006 Paris France.
- [DH1] A. Douady y J. Hubbard. (1985). *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication Mathématiques d'Orsay. **84-02**, (1984); **85-04**.
- [DH2] A. Douady y J. Hubbard. (1985). *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **18**, (1985), 287-344.

- [G] Y. Gao. (2017). *On Thurston's core entropy algorithm*. To appear in Transactions of the AMS.
- [GB1] D. González y G. Ble. (2018). *Core entropy of polynomials with a critical point of maximal order*. To appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems.
- [GB2] D. González y G. Ble. (2018). *Optimization of Thurston's Core entropy Algorithm to polynomials with a critical point of maximal order*. Entropy.
- [Ha] P. Haïssinsky. (2000). *Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot*. The Mandelbrot set, theme and variations, 37-65, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [HJ] R. A. Horn y C. R. Johnson. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [K] A. Kaffl. (2007). *Trees and Kneading Sequences for Unicritical and Cubic Polynomials*. Ph.D. thesis, International University Bremen.
- [L] T. Li. (2007). *A monotonicity conjecture for the entropy of Hubbard trees*. Ph.D. thesis, Stony Brook University.
- [Ly] M. Lyubich. (1997). *Dynamics of quadratic polynomials, I-II*. Acta Mathematica. **178**, 185-297.
- [M1] John Milnor. *Periodic Orbits, External Rays and the Mandelbrot Set*. Geometrie Complexe et Systemes Dynamiques, Astérisque **261**, (2000) 277-333 [Stony Brook IMS Preprint 1999 3].
- [M2] J. Milnor. (2009). *Cubic polynomial maps with periodic critical orbit I*. Complex dynamics, 333-411.
- [M3] J. Milnor, J. Kiwi y A. Bonifant. (2010). *Errata for "Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, Part II: Escape regions"*. Conformal Geometry and Dynamics **14**,190-193.
- [McM] C. McMullen. (1994). *Complex Dynamics and Renormalization*. Annals of Math. Studies. **135**, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [MT] R. S. MacKay y C. Tresser. (1987). *Boundary of topological chaos for bimodal maps of the interval*, J. London Math. Soc. **2**(37), 164-189.

-
- [MiT] J. Milnor y C. Tresser, (2000). *On entropy and monotonicity for real cubic maps*, Commun. Math Phys. **209**, 123-178.
- [P] D. Pole. (2006). *Linear Algebra, A Modern Introduction (Second Edition)*. Thomson, Belmont, USA.
- [Po] A. Poirier. (2010). *Hubbard trees*. Fund. Math. 208, **no. 3**, 193-248.
- [R] A. Radulescu. (2007). *The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (1), 139-175.
- [Ro] P. Roesch. (2007). *Hyperbolic components of polynomials with a fixed critical point of maximal order*, Research partially. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **40**, 901-949.
- [T] W. Thurston. (2009). *On geometry and dynamics of iterated Rational Maps*. In D. Schleicher, *Complex Dynamiycs: families and friend*. 3-17.
- [Tz1] G. Tiozzo. (2013). *Entropy, dimensión and combinatorial moduli for one-dimensional dynamical systems*. Ph.D. thesis, Harvard University Cambridge, Massachusetts.
- [Tz2] G. Tiozzo. (2016). *Continuity of core entropy of quadratic polynomials*. Springer Verlag, Berlín Heidelberg.
- [Z] S. Zakeri. (2000). *Biaccessibility in quadratic Julia Sets*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 20, 1859-1883.