

Dinámica de los polinomios cuadráticos

Gamaliel Blé González *

Universidad "Juárez" Autónoma de Tabasco, DACB

Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México

A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928

En estas notas presentaremos los diferentes comportamientos dinámicos que observamos al iterar la familia de polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$.

In these notes we will present the different dynamic behaviors that we observed when iterating family of quadratic polynomials $P_c(z) = z^2 + c$.

Palabras clave: Conjunto de Mandelbrot, Conjunto de Julia.

Keywords: Mandelbrot set, Julia set.

1. Introducción

Uno de los problemas principales en el sistema dinámico generado por una función continua f , es mostrar la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$, obtenida a partir de una condición inicial z_0 y definida recursivamente como $z_n = f(z_{n-1})$. Nuestro interés es mostrar bajo que condiciones existe el límite de esta sucesión, cuales son los obstáculos que impiden la convergencia y como es el conjunto de condiciones iniciales para las que existe el límite.

Notemos que si la sucesión $\{z_n\}$ tiene un límite L entonces L es un punto fijo de f , porque

$$\begin{aligned} f(L) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = L. \end{aligned}$$

De aquí, si la función es un polinomio P , uno de los primeros conjuntos de interés es el conjunto de puntos fijos de P , ya que los posibles límites de las diferentes sucesiones $\{z_n\}$ los encontraremos en este conjunto. Además, si P es de grado d entonces tenemos a lo más d puntos fijos y por lo tanto a lo más d candidatos.

Otro conjunto importante en nuestro estudio, son los puntos periódicos de P ya que si en lugar de tomar toda la sucesión $\{z_n\}$ tomamos la subsucesión generada por los múltiplos de k , para un k fijo, es decir, la subsucesión $\{z_{kn}\}$, entonces cuando ésta converja, por el argumento anterior, lo hará en un punto periódico de periodo l , donde $l|k$.

2. Clasificación de órbitas periódicas

Definición 2.1. Un punto $z \in \mathbb{C}$, es un punto periódico de P de periodo k si $P^k(z) = z$ y $P^j(z) \neq z$ para $j < k$, donde P^k denota la composición de P consigo mismo k veces.

* gble@ujat.mx

Dado $z \in \mathbb{C}$ al conjunto

$$\mathcal{O}_P(z) = \{w \in \mathbb{C} : w = P^k(z) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

se le llama *órbita* de z bajo P . En el caso que z es periódico este conjunto es finito y se le llama *órbita periódica*. Muchas veces es difícil resolver la ecuación de la definición anterior para encontrar los puntos periódicos de P o aún localizándolos resulta complicado describir el comportamiento dinámico de P , por lo que muchas veces es necesario escoger un polinomio Q que sea más sencillo, en cierto sentido, y que guarde las propiedades de P .

Definición 2.2. Dado P y Q polinomios, se dice que son topológicamente (analíticamente) conjugados en el abierto U , si existe un homeomorfismo (bi-holomorfismo) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\varphi \circ P(z) = Q \circ \varphi(z)$ para $z \in U$, es decir, que el siguiente diagrama conmute,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ U & \longrightarrow & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ & Q & \\ \varphi(U) & \longrightarrow & \varphi(U) \end{array}$$

Observemos que si P y Q son dos polinomios topológicamente conjugados y z es un punto fijo de P entonces $\varphi(z)$ es un punto fijo de Q , ya que $Q(\varphi(z)) = \varphi(P(z)) = \varphi(z)$. De hecho, aplicando inducción sobre n se puede mostrar que esto también es cierto para los puntos periódicos de P en U .

Proposición 2.1. Para cada polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, existe $c \in \mathbb{C}$, tal que P y $P_c(z) = z^2 + c$ son analíticamente conjugados. De hecho, la conjugación φ es un bi-holomorfismo del plano, una función afín de la forma $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

Demostración

Sea $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, $P_c(z) = z^2 + c$ y $\varphi(z) = az + b$, con $a_0, a_1, a_2, a, b, c \in \mathbb{C}$, tales que $aa_2 \neq 0$.

Queremos probar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ & P_c & \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \varphi \circ P(z) &= P_c \circ \varphi(z) \\ \varphi(a_0 + a_1z + a_2z^2) &= [\varphi(z)]^2 + c \\ a(a_0 + a_1z + a_2z^2) + b &= [az + b]^2 + c \\ aa_0 + b + aa_1z + aa_2z^2 &= a^2z^2 + 2abz + b^2 + c. \end{aligned}$$

De aquí se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} aa_0 + b &= b^2 + c \\ aa_1 &= 2ab \\ aa_2 &= a^2. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que: $a = a_2$, $b = \frac{a_1}{2}$, y $c = a_0a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2}$.

Esta proposición nos muestra que el estudio dinámico de los polinomios cuadráticos lo podemos reducir a los polinomios de la forma P_c , con la ventaja que estos últimos están parametrizados por el campo \mathbb{C} . Por ello, encontrar los puntos fijos de P se reduce a encontrar los puntos fijos de P_c , es decir, las raíces del polinomio $z^2 - z + c$. Resolviendo se obtiene que los puntos fijos de P_c son

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

los cuales son dos, salvo el caso $c = \frac{1}{4}$, donde P_c tiene a $\frac{1}{2}$ como único punto fijo.

Definición 2.3. Sea z un punto periódico de P de periodo k con multiplicador $\lambda = DP^k(z)$; donde $DP^k(z)$ denota la derivada compleja de P^k en z .

1. z es atractor si $|\lambda| < 1$, si $\lambda = 0$ diremos que z es super-atractor,
2. z es repulsor si $|\lambda| > 1$, y
3. z es indiferente si $|\lambda| = 1$.

Observemos que si $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ es una órbita periódica de P , usando la regla de la cadena, se puede mostrar que la derivada $DP^k(z_j)$ no depende de la j ; en consecuencia la definición anterior tiene sentido para órbitas periódicas.

Ejemplo 2.1. El punto fijo $z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$ de P_c es:

1. atractor si $c \in (\frac{-3}{4}, \frac{1}{4}) \setminus \{0\}$ y super-atractor cuando $c = 0$,
2. indiferente si $c = \frac{1}{4}$ o $c = \frac{-3}{4}$ y
3. repulsor si $c < \frac{-3}{4}$ o $c > \frac{1}{4}$.

Para mostrar la importancia que tiene esta clasificación de los puntos periódicos enunciaremos sin demostración algunos teoremas que pueden ser revisados en [1, 2].

2.1 Atractores y Repulsores

Teorema 2.1 (Koenigs-1884) Sea f una función con un punto fijo en z_0 y cuyo multiplicador es λ . Si $0 < |\lambda| < 1$ o $|\lambda| > 1$ entonces existen U, V vecindades de z_0 y de 0 respectivamente y un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue analíticamente la función f a la función $g(z) = \lambda z$. Además, esta conjugación es única, módulo la multiplicación por un escalar real.

Este teorema nos dice que cerca de los puntos fijos atractores o repulsores las funciones se comportan como multiplicación por λ . En particular, si z_0 es atractor, en una vecindad de z_0 todo se acerca a z_0 .

Este teorema también es válido para órbitas periódicas atractoras o repulsoras de periodo k , ya que lo único que se tiene que hacer para mostrarlo es sustituir f por f^k .

2.2 Super-atractores

Teorema 2.2 (Böttcher-1904) Sea f una función analítica en z_0 y con un punto fijo super-tractor en z_0 . Si $f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$, con $a_p \neq 0$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y 0 respectivamente y un bi-holomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ tal que conjugua $f(z)$ a $g(z) = z^p$. Esta conjugación es única módulo la multiplicación por una raíz $(p - 1)$ -ésima de la unidad.

De igual manera, que en el teorema de Koenigs, este teorema es válido para órbitas super-atractoras.

2.3 Indiferente

Si una función analítica f en z_0 tiene un punto fijo en z_0 con multiplicador λ de módulo uno, entonces pueden ocurrir dos cosas, que exista una vecindad U de z_0 donde f sea conjugada a la rotación λz o que no exista tal vecindad; si ocurre el primer caso, decimos que f es *linearizable* en z_0 .

Cuando λ es una raíz de la unidad, es fácil mostrar que f no es linearizable. Sin embargo, cuando $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ y θ es irracional, el problema de linearización ha resultado ser complicado y antes de dar los resultados que se han obtenidos, será necesario dar algunas definiciones.

Notemos que si $t \in [0, 1)$, entonces lo podemos desarrollar en fracciones continuas y obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} := [a_1, \dots, a_n]$$

que converge a t . A $\frac{p_n}{q_n}$, se le llama n -ésima reducida o n -ésima aproximación a t . De hecho, la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es de números enteros no negativos y se obtiene usando el algoritmo de la división [10]. En general, se puede obtener la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y salvo a_0 todos son enteros no negativos. Además, la sucesión es finita cuando t es racional e infinita para t irracional.

Definición 2.4. Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ es de tipo *acotado* si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

Definición 2.5. Sea $t \in \mathbb{R}$, t es diofantino de exponente k si existe $C > 0$, tal que

$$|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^k} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Proposición 2.2. Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tal que $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. t es de tipo acotado si y sólo si t es diofantino de exponente dos.

Este resultado nos dice que los números reales peor aproximados por racionales son los de tipo acotado. En particular, la razón áurea $t = [1, 1, 1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es un número de tipo acotado y de hecho, todos los números algebraicos son de este tipo y casi todo número real es diofantino [10].

Teorema 2.3 (Siegel-1942) Sea f una función analítica en z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ y $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$. Si θ es diofantino entonces f es linearizable en z_0 .

Al dominio maximal de linearización Δ de f se le llama *disco de Siegel* y a θ se le llama número de rotación de f en Δ .

A partir de este teorema, se tiene la siguiente clasificación de los puntos indiferentes en términos de θ .

Definición 2.6. Sea f una función analítica en z_0 tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. z_0 es :

1. Parabólico si θ es racional.
2. Siegel si f es linearizable en una vecindad de z_0 .
3. Kremer si θ es irracional y f no es linearizable en z_0 .

Teorema 2.4 (Brjuno-1965) Sea f una función analítica en z_0 tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Si $\frac{p_n}{q_n} \dots$ denota la n -ésima aproximación a θ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

entonces f es linearizable en z_0 .

Yoccoz demostró en 1998 que para la familia de polinomios cuadráticos, la condición de Brjuno es necesaria para tener linearización [22, 3], pero en general no se tiene una condición necesaria.

3. Conjuntos de Julia y conjuntos de Fatou

Para definir el conjunto de Julia y de Fatou de un polinomio es importante observar que si P es un polinomio de grado d entonces el infinito es un punto fijo super-atractor y además por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde P es analíticamente conjugado a la función z^d . En consecuencia, la órbita de todos los puntos $z \in U$ converge al infinito.

Definimos el *dominio de atracción del infinito*

$$A_P(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty\},$$

el conjunto de Julia lleno de P

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_P(z) \text{ es acotada} \}$$

el conjunto de Julia J_P de P es la frontera de K_P y el conjunto de Fatou F_P es la unión de $A_P(\infty)$ y el interior de K_P .

Como el conjunto $A_P(\infty)$ es abierto, el conjunto F_P resulta ser abierto. Por otro parte, el conjunto K_P es compacto y directamente del principio del máximo obtenemos que las componentes del interior de K_P son simplemente conexas. Además, para el caso cuando P es un polinomio se tienen los siguientes resultados de P. Fatou y G. Julia, los cuales pueden ser consultados en [2, 1]).

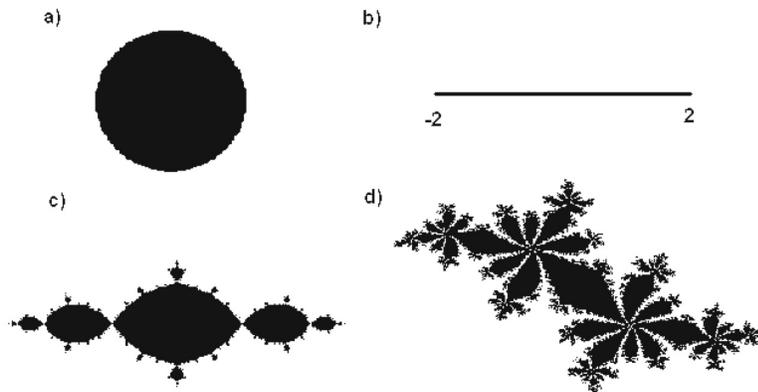


Figura 1. Conjuntos de Julia lleno K_c para: a) $c=0$, b) $c=-2$, c) $c=-1$ y d) $c=-0.36+0.62i$

Propiedades:

1. El conjunto J_P es compacto, perfecto y diferente del vacío.
2. Los conjuntos J_P y F_P son completamente invariantes, es decir, $P^{-1}(J_P) = P(J_P) = J_P$ y de igual manera para F_P .
3. Si f denota la k -ésima iterada de P para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir $f = P^k$, entonces $J_P = J_f$ y $F_P = F_f$.
4. Si $z \in J_P$ entonces el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} P^{-n}(z)$ es denso en J_P .
5. Sea z un punto periódico de periodo k de P .
 - a) Si z es atractor entonces $z \in F_P$

b) Si z es repulsor entonces $z \in J_P$

6. Los puntos periódicos repulsores de P son un conjunto denso en J_P .

7. El conjunto K_P es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico de P es acotada.

Teorema 3.1 (Sullivan-1985) Sea P un polinomio y U una componente de F_P . Entonces existe $l \geq 0$ tal que $P^l(U)$ es periódica, es decir, $P^{l+k}(U) = P^l(U)$, para alguna k .

Definición 3.1. El *dominio de atracción* $A_P(w)$ de un punto fijo atractor w es el conjunto

$$A_P(w) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w\}$$

En el caso que $\zeta = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ es una órbita atractora de periodo k , entonces z_j es un punto fijo de P^k para cada $j = 1, \dots, k$ y el dominio de atracción de ζ es la unión de los dominios de atracción $A_{P^k}(z_j)$ de cada z_j con respecto a P^k , es decir,

$$A_P(\zeta) = \cup_{j=1}^k A_{P^k}(z_j).$$

El dominio inmediato de atracción del ciclo ζ denotado por $A^*(\zeta)$ es la unión de las k componentes de $A_P(\zeta)$ que contienen al ciclo.

Teorema 3.2. Si z_0 es un punto periódico atractor de P , entonces el dominio inmediato de atracción $A^*(z_0)$ contiene al menos un punto crítico.

4. Familia cuadrática

En esta sección vamos a presentar algunos de los resultados más importantes obtenidos en las últimas décadas para la familia cuadrática.

Denotemos por $K_c = K_{P_c}$ y $J_c = J_{P_c}$, directamente de las propiedades enunciadas en la sección anterior tenemos:

Corolario 4.1. El conjunto J_c es conexo, si sólo si, la órbita del cero es acotada.

Corolario 4.2. El conjunto J_c es un conjunto de Cantor, si y sólo si, la órbita de cero converge a infinito, es decir, $0 \in A_c(\infty)$.

Definimos el conjunto de Mandelbrot M como,

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_c(0) \text{ es acotada}\}$$

Observemos que si $c = 0$ entonces J_c es la circunferencia unitaria centrada en cero y por lo tanto es conexo. De aquí tenemos que M es diferente del vacío, pero nos gustaría tener más propiedades de M y mostrar la relación de este conjunto con la dinámica de P_c .

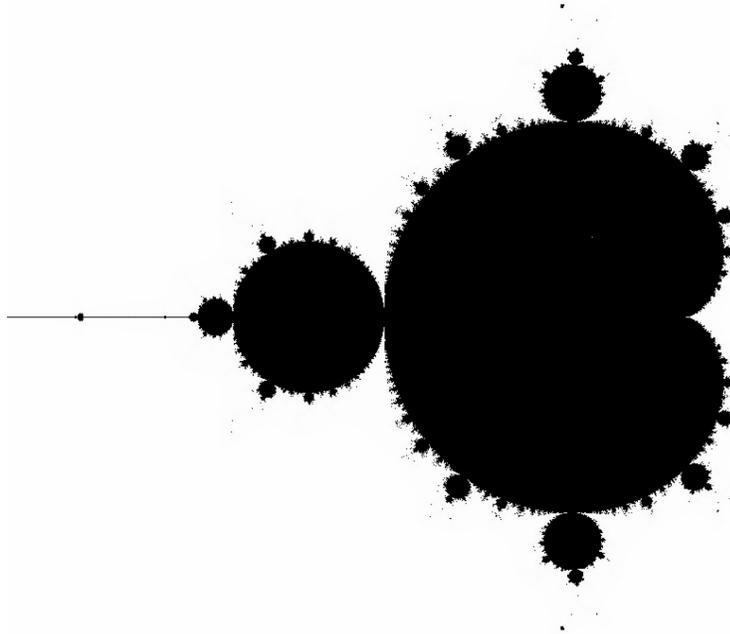


Figura 2. Conjunto de Mandelbrot

Proposición 4.1. Sea $R = \max\{2, |c|\}$. Si $|z| > R$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty$$

Demostración Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| > R$. Para mostrar que la sucesión $\{z_n\}$ converge a infinito, basta con mostrar que la sucesión $|z_n|$ es estrictamente creciente. Veamos en primer lugar que $|P(z_0)| > |z_0|$, es decir, que

$$\left| \frac{p(z_0)}{z_0} \right| > 1$$

$$\left| \frac{p(z_0)}{z_0} \right| = \left| \frac{z_0^2 + c}{z_0} \right| \geq |z_0| - \left| \frac{c}{z_0} \right| > |z_0| - 1 > 1$$

De aquí tenemos por inducción sobre n que $|z_{n+1}| > |z_n|$ y en consecuencia el resultado.

Observación 4.1. Si $|c| > 2$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = \infty$$

Porque cero es enviado en c y $|P_c(c)| = |c^2 + c| > |c|$, por el resultado anterior la órbita de $c^2 + c$ converge a infinito, en consecuencia la órbita de cero también converge a infinito.

Corolario 4.3. El conjunto M está contenido en el disco

$$\overline{D_2(0)} = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}.$$

Además, Douady y Hubbard demostraron en 1982 el siguiente resultado [6],

Teorema 4.1 (Douady-Hubbard) El conjunto M es conexo, compacto y lleno. Donde lleno significa que $\hat{\mathbb{C}} \setminus M$ es simplemente conexo.

y ese mismo año postularon la siguiente conjetura, la cual permanece sin resolver.

Conjeture (MLC) El conjunto M es localmente conexo

Para darnos una idea de la complejidad de la frontera de M , Shishikura mostró en 1992 que la dimensión de Hausdorff de ésta es dos [18]. Sin embargo, este resultado no descartó la posibilidad de **MLC** y para entender una de las implicaciones de esta conjetura introduciremos el concepto de hiperbolicidad.

Definición 4.1. Un polinomio P es hiperbólico si

$$\overline{\mathcal{O}_P(\Omega_P)} \cap J_P = \emptyset,$$

donde Ω_P denota el conjunto de puntos críticos de P .

En el caso que $c \notin M$ la órbita del punto crítico se va a infinito y por lo tanto P_c es hiperbólico, pero que podemos decir de los parámetros que están en M . Por el teorema 3.2 tenemos que los polinomios P_c tienen a lo más una órbita atractora y además, el polinomio P_c tiene una órbita atractora si y sólo si P_c es hiperbólico.

Denotemos por

$$\begin{aligned} H(M) &= \{c \in M : P_c \text{ es hiperbólico} \} \\ &= \{c \in M : P_c \text{ tiene una órbita atractora} \} \end{aligned}$$

Por el teorema de la función implícita tenemos que el conjunto $H(M)$ es abierto y la conjetura de Fatou sobre la densidad de las componentes hiperbólicas se puede traducir para el caso de la familia cuadrática en la siguiente conjetura:

Conjeture (H) $Int(M) = H(M)$

Douady y Hubbard en [6] demostraron que la conjetura **MLC** implica la conjetura **H** y esto hizo que muchos de los trabajos en sistemas dinámicos complejos, de las últimas dos décadas, se orientarán en la búsqueda de una solución para la conjetura **MLC**.

5. componentes hiperbólicas

En esta sección nos detendremos a estudiar las componentes hiperbólicas con el fin de mostrar los avances en la demostración de **MLC**.

En primer lugar notemos que en los puntos del interior de M , se tiene conexidad local y por lo tanto los puntos importantes son los que se encuentran en la frontera de M . Denotemos por W_0 a la componente principal de M , definida como,

$$W_0 = \{c \in M : P_c \text{ tiene un punto fijo atractor} \}$$

Para identificar el conjunto W_0 , recordemos que P_c tiene dos puntos fijos, los cuales denotaremos por α_c y β_c ; ellos satisfacen,

$$\begin{aligned} z^2 - z + c &= (z - \alpha_c)(z - \beta_c) \\ &= z^2 - (\alpha_c + \beta_c)z + \alpha_c\beta_c. \end{aligned}$$

Así $\alpha_c + \beta_c = 1$ y $\alpha_c\beta_c = c$. Como $P'_c(z) = 2z$ tenemos que,

$$|P'_c(\alpha_c)| + |P'_c(\beta_c)| = 2\alpha_c + 2\beta_c = 2(\alpha_c + \beta_c) = 2.$$

Esta desigualdad nos muestra nuevamente que solamente uno de los puntos α_c o β_c es atractor. Digamos que α_c es dicho punto, entonces

$$|P'_c(\alpha_c)| = 2|\alpha_c| < 1 \Leftrightarrow |\alpha_c| < 1/2,$$

como α_c es punto fijo de P_c tenemos que

$$\alpha_c^2 + c = \alpha_c \quad \Rightarrow \quad c = \alpha_c - \alpha_c^2. \quad (1)$$

Así el conjunto de parámetros c para los cuales P_c tiene un punto fijo atractor es la imagen del disco $\{\alpha_c : |\alpha_c| < 1/2\}$ bajo la función $z \mapsto z - z^2$. Esta función la podemos ver como la composición $f \circ g \circ h$, donde $h(z) = z - 1/2$, $g(z) = z^2$ y $f(z) = 1/4 - z$, y el conjunto de parámetros c para los cuales se tiene un punto fijo atractor, resulta ser el interior de la cardioide mostrada en la figura 3. De aquí podemos observar que la

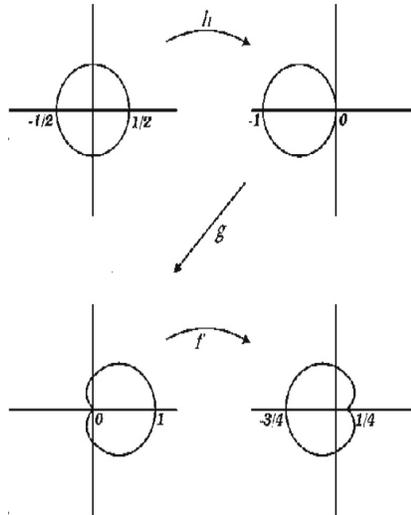


Figura 3. Imagen de S^1 bajo $f \circ g \circ h$, donde $h(z) = z - 1/2$, $g(z) = z^2$ y $f(z) = 1/4 - z$.

función $\rho_{W_0} : W_0 \rightarrow \mathbb{D}$ que a c lo envía en $DP_c(\alpha_c)$ es un bi-holomorfismo y de hecho

Douady y Hubbard mostraron que si un valor de $c \in \text{Int}(M)$ es hiperbólico, es decir, P_c tiene una órbita periódica atractora de periodo k , entonces toda la componente $W \subset \text{Int}(M)$ es hiperbólica, para todo $c_1 \in W$, P_{c_1} tiene una órbita periódica atractora $\{z_1, \dots, z_k\}$ y la función $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$ que a c_1 lo envía en $DP_{c_1}^k(z_k)$ resulta ser un bi-holomorfismo que puede extenderse continuamente a la frontera [4]. La extensión de este isomorfismo ρ_W a la frontera nos proporciona una parametrización de la frontera de W ; en el caso de W_0 podemos parametrizar la cardioide por la función

$$\gamma_{W_0}(t) = \frac{e^{2\pi it}}{2} - \left(\frac{e^{2\pi it}}{2} \right)^2, \quad t \in [0, 1].$$

En este caso decimos que el parámetro $c = \rho_W^{-1}(e^{2\pi it})$ tiene *argumento interno* t . En 1992, Yoccoz demostró **MLC** para todos los parámetros que se encuentran en la frontera de una componente hiperbólica de M [9].

6. Rayos externos

El polinomio P_c tiene un punto fijo super-atractor en el infinito y por el teorema de Böttcher existe una vecindad U del infinito donde el polinomio P_c es analíticamente conjugado a la función z^2 . Denotemos por ϕ_c al bi-holomorfismo que realiza la conjugación, deja fijo al infinito y es tangente a la identidad en el infinito. Si U es el conjunto maximal donde ϕ_c conjuga a z^2 entonces tenemos dos casos:

1. Cuando $c \in M$, $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_c$ y
2. cuando $c \notin M$ entonces U es una vecindad del infinito que contiene al valor crítico c .

A partir del bi-holomorfismo ϕ_c se puede definir la función

$$\begin{aligned} \Phi_M : \hat{\mathbb{C}} \setminus M &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}} \\ c &\mapsto \phi_c(c) \end{aligned}$$

Douady y Hubbard demostraron que esta función es un bi-holomorfismo y por el teorema de Carathéodory (veáse [15]), el bi-holomorfismo Φ_M , (o ϕ_c) se extiende continuamente a la frontera de M (a J_c) si sólo si, la frontera de M , (J_c) es localmente conexo. De aquí obtenemos que la conjetura **MLC** sería cierta si se demuestra que Φ_M se extiende continuamente a la frontera de M .

Para entender el comportamiento de Φ_M en la frontera vamos a definir los rayos externos a M y a J_c .

Si $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces el rayo externo a M de ángulo θ es el conjunto

$$R_M(\theta) = \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, 1 < r < \infty\}).$$

Si el $\lim_{r \rightarrow 1} R_M(\theta) = c$, se dice que el rayo de ángulo θ aterriza en c y que c tiene a θ como argumento externo. Esta definición, también es válida para los conjuntos de Julia conexos, si sustituimos a Φ_M por ϕ_c .

Teorema 6.1. (Douady-Hubbard-1982) Sea c un parámetro en la frontera de una componente hiperbólica W y con ángulo interno $t \in \mathbb{T}$.

1. Si t es racional y $c \neq 1/4$ entonces c tiene dos argumentos externos, es decir, hay dos ángulos θ_1, θ_2 tales que los rayos externos $R_M(\theta_i)$ aterrizan en c , para $i = 1, 2$. Además, los rayos $R_c(\theta_i)$ aterrizan en la raíz de la componente del interior de K_c que contiene a c y son adyacentes a ésta.
2. Si t es irracional entonces existe un único ángulo θ tal que $R_M(\theta)$ aterrizan en c .

Douady y Hubbard demostraron también que todos los rayos externos de ángulo racional θ aterrizan a la frontera de M y de hecho ellos mostraron que si θ es periódico bajo la función $2t$ entonces $R_M(\theta)$ aterrizan en un parámetro c parabólico (P_c tiene una órbita parabólica) y en caso contrario $R_M(\theta)$ aterrizan en un parámetro de Misiurewicz c , (el punto crítico de P_c es pre-periódico).

Además de los parámetros considerados por Douady-Hubbard, Yoccoz demostró en [9] que se tiene conexidad local en todos los parámetros finitamente renormalizables (véase [15] para la definición) y en estos últimos años se han destacado los trabajos de Lyubich [12, 13] quien ha establecido condiciones que garantizan la conexidad local en parámetros infinitamente renormalizables.

7. Conexidad local de los conjuntos de Julia

En la búsqueda de una demostración de la conjetura MLC, se ha demostrado la conexidad local de los conjuntos de Julia J_c , para casi todo $c \in \mathbb{C}$. Douady-Hubbard demostraron la conexidad local de los conjuntos de Julia de polinomios hiperbólicos, de polinomios con una órbita parabólica o con el punto crítico pre-periódico (de Misiurewicz) [6]. Además, Douady mostró los primeros ejemplos de conjuntos de Julia que no son localmente conexo: Los Julias de polinomios cuadráticos con un punto de Kremer o con un disco de Siegel Δ para el cual el punto crítico no está en la frontera de Δ [5, 8]. En lo que concierne a polinomios cuadráticos con disco de Siegel, en 1994 Petersen mostró que si el número de rotación es de tipo acotado entonces el conjunto de Julia es localmente conexo y de medida de Lebesgue cero [16]. En el 2004, Petersen y Zakeri generalizaron este resultado para aquellos polinomios cuadráticos con discos de Siegel, cuyo número de rotación $\theta = [a_1, a_2, \dots]$ satisface que la sucesión $\{\log(a_n)\}$ crece del orden \sqrt{n} , [17]. En 1998 Levi y Van Strien demostraron la conexidad local para todos los parámetros reales en M [14]. Sin embargo, aún existen parámetros c en la frontera de M donde se desconoce la conexidad local de J_c y la conexidad local de M en c .

Por otro lado, en 1992, Shishikura demostró que existe un conjunto residual de parámetros c en la frontera de M para los cuales J_c tiene dimensión de Hausdorff dos, pero hasta la fecha no se ha podido dar explícitamente uno de estos parámetros [18, 19]. Además, se conjetura la existencia de parámetros c en la familia cuadrática para los cuales el conjunto J_c tiene medida cero.

Estas notas son una breve introducción a la familia cuadrática y una invitación a estudiar los retos que existen en sistemas dinámicos.

Referencias

- [1] L. Carleson et T.W. Gamelin, Complex Dynamics, Springer-Verlag, 1993.
- [2] A.F. Beardon, Iteration of rational functions, Springer-Verlag, 1991.

- [3] A.D. Brjuno, *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*, Dokl. Akad. Nauk USSR **165**, (1965), 987-989.
- [4] A. Douady, *Systèmes Dynamiques Holomorphes*, Séminaire Bourbaki, 35^e année # **599**, Astérisque 105-106 (1982), 39-63.
- [5] A. Douady, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, Séminaire Bourbaki, 1986-87, Présentation No.**677**, Astérisque 152-153, (1987), 151-172.
- [6] A. Douady, J.H. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes I et II*, Pub.Math. d'Orsay 84-02 et 85-02, (1984-85).
- [7] P. Fatou, *Mémoire sur les équations fonctionnelles* Bull.S.M.F **47** (1919), 161-271: **48** (1920), 33-94 et 208-314.
- [8] M. Herman, *Are there critical points on the boundaries of a Siegel disk?*, Comm. Math. Phys. **99**, (1985), 593-612.
- [9] J.H. Hubbard, *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz*, In "Topological Methods in Modern Mathematics. A Symposium in Honor of John Milnor's 60 th. Birthday", Publish or Perish, 1993, 467-511.
- [10] G.H. Hardy y E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979.
- [11] P. Fatou, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* J. Math.Pures Appl. (7a. serie) **4** (1918), 47-245.
- [12] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials. I-II* Acta Math **178**, (1997), 185-297.
- [13] M. Lyubich, *Feigenbaum-Couillet-Tresser universality and Milnor's Hairness conjecture*, Ann. of Math. **149**, (1999), 319-420.
- [14] G. Levin et S.van Strien, *Local connectivity of the Julia Set on Real Polynomials*, Ann. of Math **147**, (1998), 471-541.
- [15] C.T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Princenton University Press, 1994.
- [16] C.L. Petersen, *Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation*, Act. Math. **177**, (1996), 163-224.
- [17] C.L. Petersen y S. Zakeri, *On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk*,
- [18] M. Shishikura, *The boundary of the Mandelbrot set has Hausdorff dimension two*. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992). Astrisque No. **222** (1994), 7, 389-405.
- [19] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Ann. of Math. **147**, (1998), 225-267.
- [20] C.L. Siegel, *Iteration of Analytic functions*, Annals of Maths., **43**, 1942, 607-612.
- [21] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, solution of the Fatou-Julia problem on the wandering domains*, Ann. of Math. **122**, (1985), 401-418.
- [22] J.-C. Yoccoz, *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, \mathbf{0})$* , C.R. Acad. Sci. Paris, **306**, 1988, 55-58.