Artículo Invitado

Representaciones estocásticas de ecuaciones semilineales y exponentes críticos de explosión *

Ekaterina T. Kolkovska †
Área de Probabilidad y Estadística, Centro de Investigación en Matemáticas
José Alfredo López-Mimbela ‡
Área de Probabilidad y Estadística, Centro de Investigación en Matemáticas
Aroldo Pérez Pérez §
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

Se reseñan varias técnicas probabilísticas desarrolladas en una serie de trabajos para investigar exponentes críticos de explosión para ecuaciones semilineales del prototipo $\partial u(t,x)/\partial t = Au(t,x) + u^{\beta}(t,x)$, $u(0,x) = f(x)$, donde A es el generador infinitesimal de un proceso fuerte de Markov en un espacio localmente compacto S, $\beta > 1$ y $f : S \to [0,+\infty)$ es medible y acotada.

We review two probabilistic representations of reaction-diffusion equations of the form $\partial u(t,x)/\partial t = Au(t,x) + u^{\beta}(t,x)$, $u(0,x) = f(x)$, where A is the infinitesimal generator of a strong Markov process on a locally compact space S, $\beta > 1$ and $f : S \to [0,+\infty)$ is bounded and measurable. One of the approaches yields a representation in terms of expectation functionals of a related branching particle systems; the other one uses the Feynman-Kac formula. We also show how these representations can be used to investigate critical exponents for blow up of semilinear equations and systems.

Palabras clave: proceso de ramificación markoviano, ecuación semilineal parcial, soluciones globales y no globales, fórmula de Feynman-Kac, exponente crítico.
Keywords: Branching Markov processes, partial semilinear equation, global and non-global solutions, Feynman-Kac formula, critical exponent.

1. Introducción

En este trabajo se presentan algunos métodos probabilísticos para investigar propiedades de explosión en tiempo finito de ecuaciones semilineales de la forma

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = Au_t + Vu_t^{\beta}, \quad u_0 = f, \tag{1}$$

donde A es el generador infinitesimal de un proceso de Markov fuerte con espacio de estados localmente compacto S, $V > 0$ y $\beta > 1$ son constantes, y la condición

*Recibido el 11/jun/2007 y aceptado el 10/jul/2007

†**Dirección postal**: Apartado Postal 402, 36000 Guanajuato, México. **Correo electrónico**: todorova@cimat.mx

‡**Dirección postal**: Apartado Postal 402, 36000 Guanajuato, México. **Correo electrónico**: jalfredo@cimat.mx

§**Dirección postal**: Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico**: aroldo.perez@dacb.ujat.mx

inicial $f : S \to [0, +\infty)$ es medible y acotada. Ecuaciones de reacción difusión del prototipo (1) aparecen en varios campos de aplicación y han sido investigadas intensamente en las últimas décadas debido a la rica estructura matemática asociada con sus comportamientos cualitativos; ver [5, 28, 31].

Es bien sabido [30] que bajo hipótesis apropiadas, existe un número real extendido $T_f > 0$ tal que (1) tiene solución única u en $S \times [0, T_f)$ dada por

$$u_t(x) = e^{tA} f(x) + V \int_0^t e^{sA} u_{t-s}^{\beta}(x)\, ds,$$

la cual es acotada en $S \times [0, T]$ para cualquier $0 < T < T_f$, y si $T_f < \infty$, entonces $\|u_t\|_\infty \to +\infty$ cuando $t \uparrow T_f$. En caso de que $T_f = +\infty$ diremos que u es solución global de (1), mientras que si $T_f < +\infty$, diremos que u explota en tiempo finito, o que u es no global.

En un artículo seminal [14] Fujita reveló, inicialmente para el caso $S = \mathbb{R}^d$ (donde $\mathbb{R}^d$ es el espacio euclidiano d-dimensional), $A = \Delta := \sum_{i=1}^d \partial^2/\partial x_i^2$ y $V = 1$, que la dimensión espacial d y el exponente β en la parte no lineal de la ecuación juegan un papel crucial en el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (1). Sus resultados establecen que si $d(\beta-1)/2 > 1$, la ecuación (1) admite soluciones positivas globales y no globales, mientras que si $0 < d(\beta-1)/2 < 1$, entonces (1) no tiene soluciones positivas globales no triviales. El caso $d(\beta-1) = 2$ fue investigado más tarde por Hayakawa [15] y por Aronson y Weinberger [2], quienes probaron que también en este caso (1) no admite soluciones globales no triviales. En este sentido, el número $\beta - 1$ es el exponente crítico de explosión de la ecuación investigada por Fujita.

La contraparte probabilística de los resultados de Fujita vio su origen no mucho después de la publicación de [14]. En [27] Nagasawa y Sirao dieron a conocer un enfoque probabilístico que les permitió re-descubrir los resultados de Fujita en el caso de exponentes enteros $\beta \geq 2$, y de un generador A de una migración markoviana en un espacio compacto. Desde entonces, diversas extensiones y variantes de los resultados de Fujita han sido exploradas por muchos investigadores, ver [3, 12, 19, 31, 38] para exposiciones panorámicas recientes de esta área de investigación.

Nuestro objetivo en estas notas es hacer una revisión de resultados representativos de dicha contraparte probabilística, y de algunos de sus ulteriores desarrollos. Nuestras fuentes principales son la serie de trabajos [7, 8, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 37].

El enfoque que expondremos aquí se basa en dos tipos de representaciones probabilísticas de las soluciones de (1). Una de dichas representaciones, la cual se presenta en la sección 3, emplea procesos de ramificación markovianos como ingrediente principal, característica que restringe su ámbito a ecuaciones semilineales con exponentes enteros $\beta \geq 2$ en las no-linealidades. No obstante, mediante tal representación es posible comprender de manera intuitiva y transparente porqué ocurre explosión de soluciones de la ecuación (1) bajo ciertas configuraciones de sus parámetros. Más aún, considerando sistemas ramificadas multitipo, se puede extender fácilmente el análisis a sistemas de ecuaciones.

La otra representación de (1) se basa en la fórmula de Feynman-Kac. A grandes rasgos, este procedimiento consiste en construir subsoluciones positivas de (1), para lo cual la representación de Feynman-Kac es idónea, y en determinar condiciones para que tales subsoluciones crezcan a infinito uniformemente en conjuntos acotados. En el caso de la ecuación (1), la forma del término de reacción junto con el crecimiento uniforme de subsoluciones, implican explosión en tiempo finito de (1).

Con el fin de que nuestra presentación sea razonablemente autocontenida, en la sección 2 y en secciones subsecuentes introducimos información básica, tomada de la literatura, referente a procesos de ramificación markovianos, descomposición de Lévy-Itô, fórmula de Feynman-Kac, puentes α-estables y autosimilaridad de densidades estables.

La sección 3 contiene la representación de (1) como funcional de media de una población ramificada, que vale para exponentes enteros $\beta \geq 2$, y de la cual se deducen, en las secciones 4 y 5, condiciones suficientes para globalidad y no globalidad de soluciones positivas.

La sección 6 contiene extensiones de algunas resultados de secciones precedentes al caso de sistemas de ecuaciones semilineales.

En la sección 7 se da una condición de no existencia de soluciones globales para una ecuación semilineal sobre un dominio abierto, con valor en la frontera de Dirichlet, y se propone una interpretación probabilística de tal condición.

Un ejemplo de ecuación de reacción-difusión no autónoma, donde el operador de difusión es un generador de un proceso aditivo, es discutido en la sección 8, donde además se estudia con algo de detalle el caso especial del generador autosimilar $L(t) = k(t)\Delta_\alpha$.

La sección 9 introduce la representación de Feynman-Kac de (1), así como la prueba de explosión en dimensiones subcríticas de la ecuación (10) abajo. Finalmente, en la sección 10, se comenta sobre la aplicación de la representación de Feynman-Kac para investigar exponentes críticos de explosión de una ecuación con el generador del proceso gamma.

Cabe mencionar que los resultados que presentamos no necesariamente se dan en su mayor generalidad. Más bien, hemos seleccionado aquellos casos y ejemplos que faciliten una exposición sucinta, pero transparente, de los métodos.

2. Procesos de ramificación markovianos

Comencemos definiendo los procesos de ramificación que emplearemos en las representaciones de soluciones de (1). Se remite al lector a la trilogía [16] para una presentación completa y detallada de este tópico.

Sea S un espacio topológico de Hausdorff, el cual es localmente compacto y segundo numerable. Denotemos por $\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$ al espacio de medidas de contar finitas en S, dotado de la topología de convergencia vaga. Escribimos $\mathrm{supp}(\mu)$ para denotar el soporte de $\mu \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$. El espacio de funciones acotadas Borel medibles $f : S \to \mathbb{R}_+$ (donde $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$) será denotado por $\mathcal{B}(S)$. Si E es un espacio topológico, $\mathcal{B}(E)$ denotará también a la σ-álgebra de Borel en E.

A cada $f \in \mathcal{B}(S)$ asociamos una nueva función medible $\hat{f} : \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S) \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$\hat{f}(\mu) = \prod_{x \in \operatorname{supp}(\mu)} f(x), \;\; \mu \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S).$$

Sea $\pi(x, B)$ una función definida en $S \times \mathcal{B}(\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S))$ que posee las siguientes propiedades:

$$\pi(\cdot, B) \;\text{ es } \mathcal{B}(S)\text{-medible para cada } B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)), \tag{1}$$

$$\pi(x, \cdot) \;\text{ es una probabilidad en } \mathcal{B}(\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)) \text{ para cada } x \in S, \tag{2}$$

$$\pi(x, \mathcal{N}_{[1]}) = 0 \text{ para todo } x \in S, \tag{3}$$

donde $\mathcal{N}_{[n]} \subset \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$ consiste de las medidas que tienen exactamente n átomos, $n = 1, 2, \ldots$.

Denotemos por $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ igualdad en distribución y sea † un punto externo a S. Dados un proceso fuerte de Markov $W =: \{W_t, \; t \geq 0\}$ con valores en S, y una función medible y acotada $V : S \to (0, \infty)$, existe un único proceso de Markov $X := \{X_t, \; t \geq 0\}$ con espacio de estados $\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$ cuyas trayectorias son continuas por la derecha con límites por la izquierda en todo punto $t > 0$, y tal que

$$\mathbb{E}_\mu[\hat{f}(X_t)] = \prod_{x \in \operatorname{supp}(\mu)} \mathbb{E}_x[\hat{f}(X_t)], \;\; f \in \mathcal{B}(S), \;\; \mu \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S), \tag{4}$$

$$\{X_t, \; t < T, \} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{Y_t, \; t < T\}, \tag{5}$$

donde $Y := \{Y_t, \; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov en $S \cup \{\dagger\}$ cuyo tiempo de vida es T, tiene a † como su punto terminal, y cumple

$$\mathbb{P}_x[Y_t \in B] = \mathbb{E}_x[e^{-\int_0^t V(W_s)\, ds}, W_t \in B], \quad x \in S, \; B \in \mathcal{B}(S).$$

Más aún, para todo $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[e^{-\lambda T}, \; X_T \in B \,|\, X_{T^-}] = \mathbb{E}_x[e^{-\lambda T} \,|\, X_{T^-}]\, \pi(X_{T^-}, B) \;\; \text{c.s. en } \{T < \infty\} \tag{6}$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S))$ y $x \in S$. Aquí $\mathbb{E}_\mu$ y $\mathbb{P}_\mu$ denotan, respectivamente, esperanza condicional y probabilidad condicional dado que $X_0 = \mu$. En caso de que $\mu = \delta_x$ escribimos solamente $\mathbb{E}_x$ y $\mathbb{P}_x$.

El proceso X así construido es denominado un “proceso de ramificación de Markov” [16]. La propiedad (5) es usualmente aludida como la propiedad de ramificación de X. El proceso $\{Y_t, t \geq 0\}$ en (5) es la parte de no-ramificación de X, y la función π con las propiedades (1)-(3) y (6) es la ley de ramificación de X.

Cuando $X_0 = \delta_x$ y $V > 0$ es constante, el proceso X describe la evolución de una población en S cuya evolución espacio-temporal puede describirse intuitivamente de la siguiente forma. Inicialmente (i.e., al tiempo $t = 0$) hay un individuo en el lugar x el cual migra según el proceso W. Después de un tiempo de vida con distribución exponencial de parámetro V el individuo se ramifica, dando origen a una descendencia con distribución π. Los nuevos individuos evolucionan independientemente siguiendo las mismas reglas. La medida aleatoria X_t representa el estado de la población en el instante $t \geq 0$.

3. Representación de soluciones

Las soluciones positivas de la ecuación

$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = Au_t(x) + Vu_t^\beta(x), \quad t > 0, \quad u_0(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

admiten una representación como funcionales de media del proceso X definido en la sección 2. Para obtener dicha representación tomamos una función constante $V(x) \equiv V > 0$, un proceso S-valuado $\{W_t,\ t \geq 0\}$, el cual es de Markov, conservativo, con generador infinitesimal A y semigrupo $\{T_t,\ t \geq 0\}$ dado por

$$T_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(W_t)] = \int f(y)\, q_t(x, dy), \quad t \geq 0,\ x \in S,\ f \in \mathcal{B}_b(S),$$

donde $\{q_t(x, dy),\ t > 0\}$ es una familia de probabilidades de transición de $\{W_t\ t \geq 0\}$ y $\mathcal{B}_b(S)$ denota al subespacio de $\mathcal{B}(S)$ de funciones acotadas. La ley de ramificación está dada por $\pi(x, d\mu) = \delta_{\beta\delta_x}(d\mu)$, $x \in S$, donde $\beta \geq 2$ es un entero fijo. Para $f \in \mathcal{B}(S)$ definimos

$$w_t(\mu) \;=\; \mathbb{E}_\mu \left[e^{S_t} \hat{f}(X_t) \right], \quad \mu \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S),\ t \geq 0, \tag{2}$$

donde S_t denota al "tiempo de ocupación ponderado"

$$S_t = V \int_0^t \int_S X_s(dx)\, ds = V \int_0^t N_s\, ds. \quad t \geq 0, \tag{3}$$

siendo N_t el número de individuos presentes en la población en el instante t. Cuando $V = 1$ y $X_0 = \delta_z$, la variable aleatoria S_t coincide con la longitud del árbol de descendencia del individuo δ_z hasta el tiempo t.

Teorema 1. Sea

$$u_t(x) := \mathbb{E}_x \left[e^{S_t} \hat{f}(X_t) \right], \quad t \geq 0, \quad x \in S. \tag{4}$$

Entonces u_t es la solución del problema de Cauchy

$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = Au_t(x) + Vu_t^\beta(x), \qquad u_0 = f, \quad f \in \mathcal{B}(S). \tag{5}$$

Prueba. Sea $X_0 = \mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ el estado inicial de la población ramificada. Entonces el tiempo de la primera ramificación σ tiene distribución exponencial de parámetro nV. De la ley de probabilidad total se sigue que

$$w_t(\mu) = e^{-nVt}\mathbb{E}_\mu \left[e^{S_t}\, \hat{f}(X_t) \,\middle|\, \sigma > t \right] + \int_0^t nVe^{-nVs}\mathbb{E}_\mu \left[e^{S_t} \hat{f}(X_t) \,\middle|\, \sigma = s \right] ds.$$

Dado que $\sigma \geq s$, la evolución de la población hasta el tiempo s sigue una migración aleatoria originada por los movimientos de partículas. Por tanto, el tiempo de ocupación S_s es igual a $\int_0^s nV dr = nVs$. Notando que una partícula dada lleva a cabo la primera ramificación con probabilidad $1/n$, se sigue que

$$\begin{aligned} w_t(\mu) &= e^{-nVt} e^{\int_0^t nV\, dr} \prod_{i=1}^n T_t f(x_i) \\ &\quad + V \sum_{i=1}^n \int_0^t e^{-nVs} e^{\int_0^s nV\, dr} T_s \left(\int w_{t-s}(\nu) \pi^{(\cdot)}(d\nu) \right)(x_i) \prod_{l=1, l\neq i}^n T_t w_{t-s}(x_l)\, ds, \end{aligned}$$

donde $\pi^{(z)}(d\nu) = \delta_{\beta\delta_z}(d\nu)$, $z \in S$. Por consiguiente,

$$w_t(\mu) = \prod_{i=1}^{n} T_t f(x_i) + V \sum_{i=1}^{n} \int_0^t T_s \left(\int w_{t-s}(\nu) \pi^{(\cdot)}(d\nu) \right)(x_i) \prod_{l=1, l\neq i}^{n} T_t w_{t-s}(x_l)\, ds.$$

Poniendo $\mu = \delta_x$ y $u_t(x) := w_t(\delta_x)$ resulta

$$u_t(x) = T_t f(x) + V \int_0^t T_s \left(u_{t-s}^{\beta} \right)(x)\, ds, \quad x \in S, \quad t \geq 0,$$

que es la forma integral de (5). ■

4. Existencia de soluciones globales

Para cada función medible $v : \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S) \to \mathbb{R}_+$ y cada medida $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$ definimos el núcleo $\mathbf{\Psi}$ por

$$\int_{\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)} v(\nu)\, \mathbf{\Psi}(\mu, ds\, d\nu) = V \sum_{i=1}^{n} T_s \left(\int v(\nu)\, \pi^{(\cdot)}(d\nu) \right)(x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} T_s v(x_l)\, ds.$$

Nótese que $\mathbf{\Psi}(\mu, ds\, d\nu)$ representa una dinámica poblacional en la cual la "población inicial" μ es transformada en una nueva población, ν, mediante una ramificación en el instante s del individuo δ_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$. Los demás individuos δ_{x_l}, $l \neq i$, no se ramifican en el intervalo $(0, s]$, pero sufren movimientos independientes según el semigrupo $\{T_r, r \geq 0\}$.

Sean w_t y u_t las funciones definidas por (2) y (4), respectivamente. Entonces $\hat{u}_t = w_t$, $t \geq 0$, y para cualquier $f \in \mathcal{B}(S)$,

$$\hat{u}_t(\mu) \;=\; \widehat{T_t f}(\mu) + \int_0^t \int_{\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(\mathbb{R}^d)} \hat{u}_{t-s}(\nu)\, \mathbf{\Psi}(\mu, ds\, d\nu).$$

Sustituyendo la expresión de $\hat{u}_t$ en las integrales del lado derecho de la igualdad anterior resulta

$$\hat{u}_t(\mu) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \mu), \;\; \mu \,\in\, \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S), \;\; t \,\geq\, 0, \tag{1}$$

donde $u_0(t, \mu) = \widehat{T_t f}(\mu)$ y

$$u_{k+1}(t, \mu) = \int_0^t \int_{\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(\mathbb{R}^d)} u_k(t-s, \nu)\, \mathbf{\Psi}(\mu, ds\, d\nu), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Nótese que

$$u_k(t, \mu) = \mathbb{E}_\mu \left[e^{S_t} \hat{f}(X_t);\, \kappa_t = k \right], \quad k = 0, 1, \ldots,$$

donde κ_t denota el número de ramificaciones ocurridas hasta el tiempo t. Luego, si $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$,

$$\begin{aligned} u_1(t, \mu) &= V \int_0^t \sum_{i=1}^{n} T_s \left(\int \widehat{T_{t-s} f}(\nu) \pi^{(\cdot)}(d\nu) \right)(x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} T_s \widehat{T_{t-s} f}(x_l) \\ &\leq V n \prod_{l=1}^{n} T_t f(x_l) \int_0^t \left(\sup_{z \in S} T_s f(z) \right)^{\beta - 1} ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\widehat{T_r f}(\delta_z) = T_r f(z)$, $z \in S$, $t \geq 0$. Debido a lo anterior,

$$u_1(t,\mu) \leq Vn\widehat{T_t f}(\mu) \int_0^t \left(\sup_{z\in S} T_s f(z) \right)^{\beta-1} ds, \qquad \mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \quad t \geq 0.$$

Usando inducción matemática es fácil verificar que para cualesquier $k \geq 1$, $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ y $t \geq 0$,

$$u_k(t,\mu) \leq \frac{V^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n + i(\beta-1)) \left[\int_0^t \left(\sup_{z\in S} T_s f(z) \right)^{\beta-1} ds \right]^k \widehat{T_t f}(\mu). \tag{2}$$

La desigualdad anterior junto con (1) da el siguiente teorema.

Teorema 2. La solución $u_t(x)$ de la ecuación (5) cumple

$$u_t(x) \;\leq\; T_t f(x) \left(1 + \sum_{k=1}^\infty v_k(t) \right), \; x \in S, \; t \geq 0,$$

donde

$$v_k(t) \;=\; \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1 + i(\beta-1))}{k!} \left[V \int_0^t \left(\sup_{z\in S} T_s f(z) \right)^{\beta-1} ds \right]^k.$$

En particular, para cualquier $f \in \mathcal{B}(S)$ que cumpla

$$(\beta-1)V \int_0^\infty \left(\sup_{z\in S} T_s f(z) \right)^{\beta-1} ds < 1, \tag{3}$$

la correspondiente solución de (5) es global y satisface

$$u_t(x) \leq \text{Const.}\, T_t f(x), \; x \in S, \; t \geq 0.$$

Prueba. La aseveración se sigue directamente de (1), (2) y el hecho de que $\sum_{k=1}^\infty v_k(t) < \infty$ uniformemente en $t \geq 0$ debido a (3). ■

5. Explosión en tiempo finito

Lema 1. Sea $K > 0$, y sea

$$\tilde{w}_t(\mu) := \mathbb{E}_\mu \left[e^{S_t} K^{N_t} \right], \quad t \geq 0,$$

donde $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S)$ y S_t, N_t están dados por (3). Entonces

$$\tilde{w}_t(\mu) = K^n \left[1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\prod_{i=1}^k (n + (i-1)(\beta-1)) \right) \frac{\left(VtK^{\beta-1}\right)^k}{k!} \right], \; n = 1, 2, \ldots .$$

En particular, $\tilde{w}_t(\delta_x) = \infty$ para cualquier $x \in S$ con tal de que $K \geq \left(\frac{1}{Vt(\beta-1)} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Prueba. Nótese que tanto S_t como N_t son independientes de la variable espacial. Luego, si $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, entonces

$$\tilde{w}_t(\mu) = \mathbb{E}\left[e^{S_t^{(n)}} K^{N_t^{(n)}}\right] =: \tilde{u}_t(n),$$

donde $S_t^{(n)}$ y $N_t^{(n)}$ denotan, respectivamente, las magnitudes S_t y N_t correspondientes a una población inicial constituida por $n \geq 1$ individuos. Condicionando igual que antes en el tiempo de la primera ramificación da

$$\mathbb{E}\left[e^{S_t^{(n)}} K^{N_t^{(n)}}\right] = e^{-nVt} e^{nVt} K^n + V \int_0^t ds\, e^{-nVs} e^{nVs} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{S_{t-s}^{(n+\beta-1)}} K^{N_{t-s}^{(n+\beta-1)}}\right],$$

o sea

$$\tilde{u}_t(n) = K^n + nV \int_0^t \tilde{u}_s(n+\beta-1)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Iterando recursivamente (1) se encuentra que $\tilde{u}_t(n)$ admite el desarrollo

$$\tilde{u}_t(n) = u_t^{(0)}(n) + u_t^{(1)}(n) + \cdots , \tag{2}$$

donde $u_t^{(0)}(n) = K^n$ y $u_t^{(k+1)}(n) = nV \int_0^t u_s^{(k)}(n+\beta-1)\, ds,\ n \geq 1$. Consecuentemente,

$$\tilde{u}_t(n) = K^n \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} (n + (i-1)(\beta-1))\right) \frac{\left(VtK^{\beta-1}\right)^k}{k!}\right],\ n = 1, 2, \ldots .$$

Tomando $n = 1$ en la expresión de arriba y usando que $\beta \geq 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{S_t} K^{N_t}\right] &\geq K \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta-1)^{k-1}(k-1)! \frac{\left(VtK^{\beta-1}\right)^k}{k!}\right] \\ &= K \left[1 + VtK^{\beta-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(Vt(\beta-1)K^{\beta-1}\right)^{k-1}}{k}\right]. \end{aligned}$$

El lado derecho de la última igualdad es infinito para $K \geq \left(\frac{1}{Vt(\beta-1)}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$. ■

Nótese que $u_t(\cdot) = \tilde{w}_t(\delta_\cdot)$ si $A = 0$ y $f(x) \equiv K > 0$. De hecho

$$h_t \equiv \mathbb{E}\left[e^{S_t} f^{N_t}\right] = f + V \int_0^t h_r^{\beta}\, dr, \quad t \geq 0,$$

es la solución de

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} = V h_t^{\beta}, \quad h_0 = f,$$

la cual explota en $t_0 = V(\beta-1)^{-1} K^{1-\beta}$ siempre que $K := f(x) > 0$. De este modo, en ausencia de movimientos de partículas la ecuación (5) explota en tiempo finito siempre que $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$.

Lema 2. Sea $\mathcal{T} \equiv \{\mathcal{T}_t,\ t \geq 0\}$ el árbol de descendencia de un ancestro δ_x, y sea $f \in \mathcal{B}(S)$. Para cualquier realización τ de $\mathcal{T}$ y $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[\hat{f}(X_t) \,|\, \mathcal{T}_t = \tau_t] \;\geq\; (T_t f(x))^{N_t^{\tau_t}},$$

donde $N_t^{\tau_t}$ denota al número de individuos en la cúspide de τ_t.

Prueba. Usaremos inducción matemática en el número de aristas de τ_t. Si τ_t consiste únicamente de una arista, entonces $N_t^{\tau_t} = 1$ y

$$\mathbb{E}_x\left[\widehat{f}(X_t)\Big|\mathcal{T}_t=\tau_t\right] = \int f(y)\,q_t(x,dy) = (T_t f(x))^{N_t^{\tau_t}},$$

donde $q_t(x,dy)$, $t\geq 0$, son los núcleos de transición de los procesos de migración de las partículas. Si τ_t posee dos o más aristas, denotemos por $t_1<t$ a la longitud de la arista que contiene a la raíz, y sean $\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(\beta)}$ los sub-árboles de τ_t que emergen del primer punto de ramificación de τ_t. Entonces tenemos $N_t^{\tau_t} = N_{t-t_1}^{\tau_{t-t_1}^{(1)}}+\cdots+N_{t-t_1}^{\tau_{t-t_1}^{(\beta)}}$ y usando la propiedad de ramificación, la hipótesis de inducción y la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\widehat{f}(X_t)\Big|\mathcal{T}_t=\tau_t\right]\\
&=\int \mathbb{E}_z\left[\widehat{f}(X_{t-t_1})\Big|\mathcal{T}_{t-t_1}=\tau_{t-t_1}^{(1)}\right]\cdots\mathbb{E}_z\left[\widehat{f}(X_{t-t_1})\Big|\mathcal{T}_{t-t_1}=\tau_{t-t_1}^{(\beta)}\right]q_{t_1}(x,dz)\\
&\geq\int (T_{t-t_1}f(z))^{N_{t-t_1}^{\tau_{t-t_1}^{(1)}}}\cdots(T_{t-t_1}f(z))^{N_{t-t_1}^{\tau_{t-t_1}^{(\beta)}}}\,q_{t_1}(x,dz)\\
&=\int (T_{t-t_1}f(z))^{N_t^{\tau_t}}\,q_{t_1}(x,dz)\\
&\geq (T_t f(x))^{N_t^{\tau_t}}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3. Sea $u_t(x)$, $t\geq 0$, $x\in S$ la solución de la ecuación semilineal (5) con $u_0\geq 0$ medible y acotada. Si para algunos $t>0$ y $x\in S$ se cumple

$$T_t u_0(x)\geq (Vt(\beta-1))^{-1/(\beta-1)},$$

entonces u explota en tiempo finito en el punto x.

Prueba. Del teorema 1 sabemos que $u_t(x)=\mathbb{E}_x[e^{S_t}\hat{f}(X_t)]$, donde

$$\mathbb{E}_x[e^{S_t}\hat{f}(X_t)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[e^{S_t}\hat{f}(X_t)\,|\,\mathcal{T}_t]] = \mathbb{E}_x[e^{S_t}\mathbb{E}_x[\hat{f}(X_t)\,|\,\mathcal{T}_t]].$$

La demostración termina aplicando los lemas 1 y 2. ■

6. Soluciones globales y explosión en tiempo finito de sistemas de ecuaciones

En esta sección damos extensiones de los teoremas 2 y 5 al caso de sistemas de ecuaciones. Para simplificar la exposición nos restringiremos a sistemas de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_t}{\partial t}&=A_1u_t+V_1u_t^{\beta_{11}}v_t^{\beta_{12}},\ t>0,\quad u_0=f,\\
\frac{\partial v_t}{\partial t}&=A_2v_t+V_2u_t^{\beta_{21}}v_t^{\beta_{22}},\ t>0,\quad v_0=g,
\end{aligned}\qquad(1)$$

donde A_i es el generador de un proceso fuerte de Markov en S con semigrupo de transición $\{T_t^i,\ t\geq 0\}$, $V_i>0$, $\beta_{ij}\in\{1,2,\ldots\}$ son constantes, $i,j=1,2$, y $f,g\in\mathcal{B}(S)$.

Tanto la representación probabilística de (1), como sus propiedades de explosión, se obtienen de forma similar al caso univariado, empleando una población ramificada bi-tipo en lugar de la población monotipo que usamos previamente. Para ser precisos, consideremos una población en S, consistente de individuos de los tipos 1 y 2. Un individuo de tipo i vive un tiempo exponencial de parámetro V_i durante el cual se mueve según un movimiento markoviano de generador A_i. Al término de su vida dicho individuo se ramifica dando origen a una población constituida por β_{i1} descendientes de tipo 1 y β_{i2} descendientes de 2. Los nuevos individuos aparecen en el lugar donde la partícula madre se ramificó y evolucionan independientemente de la misma manera.

Denotaremos por X_t a la configuración en el tiempo $t \geq 0$ de la población bi-tipo descrita arriba. Nótese que X_t toma valores en el espacio $\mathcal{N}_{\mathsf{f}}(S \times \{1,2\})$ de medidas de contar finitas en $S \times \{1,2\}$, donde la primera coordenada de un punto $(x,i) \in S \times \{1,2\}$ representa la posición, y la segunda el tipo de un individuo $\delta_{(x,i)}$. En este caso

$$S_t = V_1 \int_0^t N_{s,1}\, ds + V_2 \int_0^t N_{s,2}\, ds, \quad t \geq 0,$$

representa la longitud (ponderada) del árbol de descendencia del ancestro, donde $N_{t,i}$ es el número de individuos de tipo i en X_t. Definimos $N_t := N_{t,1} + N_{t,2}$, $t \geq 0$.

Teorema 4. Sea (u_t, v_t) la solución del sistema semilineal (1), y sea $\varphi : S \times \{1,2\} \to \mathbb{R}_+$ definida por $\varphi(x,1) = f(x)$, $\varphi(x,2) = g(x)$. Entonces (u_t, v_t) admite la representación

$$u_t(x) = \mathbb{E}_{\delta_{(x,1)}}\left[e^{S_t}\hat{\varphi}\,(X_t)\right], \quad v_t(x) = \mathbb{E}_{\delta_{(x,2)}}\left[e^{S_t}\hat{\varphi}\,(X_t)\right], \quad t \geq 0,\ x \in S. \tag{2}$$

Más aún, si φ está acotada por 1, entonces la solución de (1) cumple

$$u_t(x) \leq T_t^1 f(x)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\right),$$

$$v_t(x) \leq T_t^2 g(x)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\right),$$

donde

$$v_k(t) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1 + i(\beta^* - 1))}{k!}\left[V \int_0^t \left(\sup_{z \in S} T_s\varphi(z)\right)^{\beta_* - 1} ds\right]^k,$$

con $V = V_1 \vee V_2$, $\beta_* = (\beta_{11} + \beta_{12}) \wedge (\beta_{21} + \beta_{22})$, y $\beta^* = (\beta_{11} + \beta_{12}) \vee (\beta_{21} + \beta_{22})$. En particular, si φ está acotada por 1 y cumple

$$(\beta^* - 1)V \int_0^\infty \left(\sup_{z \in S} T_s\varphi(z)\right)^{\beta_* - 1} ds < 1, \tag{3}$$

entonces la solución de (1) es global.

La demostración de (2) es similar a la del teorema 1 y aparece en [20].

Denotemos por $\mathbb{E}_{[n,m]}$ a la esperanza cuando la población bi-tipo inicial consiste de n individuos de tipo 1 y m individuos de tipo 2. Ponemos $\beta_1 := \beta_{11} + \beta_{12}$, $\beta_2 := \beta_{21} + \beta_{22}$, y definimos

$$u_t^{[n,m]}(K) := \mathbb{E}_{[n,m]}[e^{S_t} K^{N_t}], \quad t \geq 0, \quad K \geq 0, \quad n, m \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Lema 3. Sea $V_* := V_1 \wedge V_2$. Para cualquier $t \geq 0$, $K \geq 0$, y $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$,

$$u_t^{[n,m]}(K) \geq K^{n+m} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(V_* t)^l}{l!} \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)\in\{1,2\}^l} K^{\theta_l(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)} \prod_{i=1}^{l} \left(\eta_{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (\beta_{\gamma_j\gamma_i} - \delta_{\gamma_j\gamma_i}) \right) \right], \tag{4}$$

donde $\theta_l(\gamma_1, \ldots, \gamma_l) = (l - \sum_{i=1}^{l}(\gamma_i - 1))(\beta_1 - 1) + \sum_{i=1}^{l}(\gamma_i - 1)(\beta_2 - 1)$, $\eta_1 = n$ y $\eta_2 = m$.

La prueba de (4) sigue los mismos pasos que la demostración del lema 1 y no la desarrollaremos aquí.

Corolario 1. Supóngase que $2 \leq \beta_1 \leq \beta_2$.

(a) Si $\beta_1 = \beta_2$ o $\beta_{11} \geq 2$, entonces $\mathbb{E}_{[1,0]}[e^{S_t} K^{N_t}] = \infty$ para $K \geq ct^{-\frac{1}{\beta_1 - 1}}$, $t > 0$.

(b) Si $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$, entonces $\mathbb{E}_{[1,0]}[e^{S_t} K^{N_t}] = \infty$ para $K \geq c' t^{-\frac{2}{\beta_{12}+\beta_{21}-2}}$, $t > 0$.

Aquí c y c' son constantes que pueden depender de β_{ij} y $V_* := V_1 \wedge V_2$ pero no de t.

Prueba. Si $\beta_1 = \beta_2$ considérese una población monotipo con tiempos de vida exponenciales de parámetro V_* y tamaños de descendencia $\beta := \beta_1$. La primera aseveración en (a) se sigue entonces de los resultados de la sección 5. Para demostrar la segunda afirmación en (a) nos basaremos en el lema 3. Efectivamente, basta considerar en el lado derecho de (4) sólo aquellos términos $K^{\theta_l(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)} \prod_{i=1}^{l}(\eta_{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{i-1}(\beta_{\gamma_j\gamma_i} - \delta_{\gamma_j\gamma_i}))$ para los cuales $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ es de la forma $(1, \ldots, 1)$. El lema 3 implica que

$$u_t^{[n,m]}(K) \geq K^{n+m} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{l} (n + (i-1)(\beta_{11} - 1)) \frac{(V_* t K^{\beta_1 - 1})^l}{l!} \right].$$

Por tanto, si $t > 0$ y $K \geq (V_* t(\beta_{11} - 1))^{-\frac{1}{(\beta_1 - 1)}}$ entonces $(V_* t K^{\beta_1 - 1})^l \geq \frac{1}{(\beta_{11}-1)^l}$ y por consiguiente

$$\prod_{i=1}^{l} (n + (i-1)(\beta_{11} - 1)) \frac{(V_* t K^{\beta_1 - 1})^l}{l!} \geq \frac{1}{l!} \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{n}{\beta_{11} - 1} + i - 1 \right) \geq \frac{n}{\beta_{11} - 1} \frac{1}{l}.$$

Se sigue que para cualesquier $t > 0$ y $K \geq (V_* t(\beta_{11} - 1))^{-\frac{1}{\beta_1 - 1}}$, $u_t^{[n,m]}(K) = \infty$ para todo $n \geq 1$ y $m \geq 0$. La demostración de (b) es similar. ∎

Finalizamos esta sección con una extensión del teorema 3 a sistemas de ecuaciones que fue probada en [25]. Debido a que ignoramos si es válida una versión multivariada del lema 2 en la generalidad de nuestro marco, en el siguiente teorema nos restringimos al caso especial de $S = \mathbb{R}^d$ y suponemos que el proceso de movimiento de las partículas de tipo i posee densidades de transición $\{q_t^i(x, y),\ t > 0\}$, donde $q_t^i(x, y) = q_t^i(x - y)$ y $q_t^i(\cdot)$ es unimodal y simétrica, $i = 1, 2$.

Teorema 5. Suponer que para cualquier bola $B \subset \mathbb{R}^d$ centrada en el origen, el número $K := \inf_{0 \le r \le t} \mathbb{P}\left[W_r^1 + W_{t-r}^2 \in B\right]$ cumple las condiciones del corolario 1 (a) o (b), donde $\{W_t^1,\ t \ge 0\}$ y $\{W_t^2,\ t \ge 0\}$ denotan procesos independientes $\mathbb{R}^d$ de generadores A_1 y A_2 respectivamente, con $W_0^1 = W_0^2 = 0$. Si las densidades de transición $\{q_t^i,\ t \ge 0\}$ de $\{W_t^i,\ t \ge 0\}$ cumplen

(a) $q_t^i(x,y) = q_t^i(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, y $q_t^i(\cdot)$ es simétrica y unimodal,

(b) $q_t^i(\cdot)$ es continua y satisface $q_t^i(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$

para $i = 1, 2$ y cualquier $t > 0$, entonces la solución del sistema (1) explota en tiempo finito para todos los valores iniciales (f, g) que cumplan

$$f(x) \ge k_1\, 1_B(x), \quad g(x) \ge k_2\, 1_{B'}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

para algunas constantes $k_1, k_2 > 0$ y bolas $B, B' \subset \mathbb{R}^d$.

7. Explosión en tiempo finito del problema de Dirichlet

En esta sección nos interesan condiciones para explosión en tiempo finito del problema con valor en la frontera de Dirichlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V u^\beta,\ t > 0, \qquad u(0,x) = f(x),\ x \in G, \qquad u|_{\partial G} \equiv 0, \tag{1}$$

donde $G \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio acotado. Sea $B \equiv \{B_t,\ t \ge 0\}$ un movimiento browniano en $\mathbb{R}^d$ con parámetro de varianza 2. Denotemos por $\{T_t,\ t \ge 0\}$ al semigrupo en $L_2(G)$ fuertemente continuo, correspondiente al proceso B matado en $\tau := \inf\{t > 0 | B_t \in \partial G\}$. Supóngase que G es regular en el sentido de que B le pega al complemento de G inmediatamente después del tiempo 0 cuando inicia desde cualquier punto de ∂G. Entonces se puede probar [10] que el semigrupo $\{T_t,\ t \ge 0\}$ es fuertemente continuo en el espacio $C_0(G)$ de funciones continuas en G que se anulan en ∂G.

Sean $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \subset C_0(G)$ y $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \le \cdots$ las soluciones no triviales del problema de valores propios

$$\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0,\ x \in G, \qquad \varphi(x) = 0,\ x \in \partial G,$$

donde cada función φ_n está normalizada de forma que $\|\varphi_n\|_2 = 1$ (aquí $\|\cdot\|_p$ denota la norma en L_p). Es bien sabido que el autovalor λ_0 tiene multiplicidad uno y que la función φ_0 es estrictamente positiva en G. Más aún, para todo $t > 0$ y cualquier $f \in C_0(G)$,

$$T_t f(x) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) \int_G f(y)\varphi_n(y)\, dy,\ t > 0, \quad x \in G. \tag{2}$$

Diremos que $\{T_t,\ t \ge 0\}$ es intrínsecamente ultracontractivo (IUC) si para todo $t > 0$ existe constante positiva c_t tal que

$$|T_t f(x)| \le c_t \|f\|_2 \varphi_0(x), \quad x \in G, \quad f \in C_0(G). \tag{3}$$

Se sabe [11] que si G obedece condiciones de cono tanto exterior como interior, entonces G es regular y $\{T_t,\ t \geq 0\}$ es IUC. En [4] se demuestra que la propiedad IUC se cumple para una extensa clase de dominios G.

El siguiente teorema se demuestra en [24], donde $V > 0$ y $\beta > 1$ son constantes.

Teorema 6. Supóngase que $\{T_t,\ t \geq 0\}$ es IUC y sea $f \in C_0(G)$ no negativa. Si

$$\langle f, \varphi_0 \rangle_{L_2} > \left(\frac{\lambda_0}{V} \right)^{1/(\beta-1)} \|\varphi_0\|_1, \tag{4}$$

entonces la solución $u(t,x)$ de (1) explota en tiempo finito.

Una manera de interpretar probabilísticamente la explosión en tiempo finito de (1) es como sigue. Sea

$$Q_t g(x) = e^{\lambda_0 t} \varphi_0^{-1}(x) T_t(g\varphi_0)(x),\ x \in G,\ g \in C_b(G).$$

Entonces $\{Q_t,\ t \geq 0\}$ es un semigrupo de contracciones $C_b(G)$ el cual es fuertemente continuo y tiene a $\varphi_0^2(x)\,dx$ como su (única) medida invariante. De hecho, para cualquier $g \in C_b(G)$ y $f \equiv g\varphi_0$,

$$\sup_{x\in G} |Q_t g(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-(\lambda_n - \lambda_0)t} \right) \sup_{x \in G} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_0(x)} \right| |\langle f, \varphi_n \rangle|$$

debido a (2), y la serie en la última desigualdad tiende a 0 cuando $t \downarrow 0$ en virtud de que $\{T_t,\ t \geq 0\}$ es IUC. El generador H de $\{Q_t,\ t \geq 0\}$ está dado por

$$Hg = \varphi_0^{-1}(\Delta^G + \lambda_0)(g\varphi_0),\ g \in \mathrm{Dom}(H) := \{g \in C_b(G) : g\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(\Delta^G)\},$$

donde Δ^G es el generador del movimiento browniano matado. Debido a que Δ^G es autoadjunto, se sigue que $\int Hg(x)\varphi(x)_0^2\,dx = 0$ para cada $g \in \mathrm{Dom}(H)$, que da la Q_t-invariancia de $\varphi^2(x)\,dx$. Escribiendo $\mathbb{E}[g] := \int g(x)\varphi_0^2(x)\,dx$, se concluye que $\mathbb{E}[Q_t g] = \mathbb{E}[g]$, $t \geq 0$, $g \in C_b(G)$.

Sean

$$w(t,x) = e^{\lambda_0 t} \frac{u(t,x)}{\varphi_0(x)} \quad \text{y} \quad z(t,x) = e^{-\lambda_0 t}\varphi_0(x), \quad x \in G,\ t \geq 0, \tag{5}$$

donde

$$u(t) = T_t f + V \int_0^t T_s u(t-s)^\beta\,ds, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

es la solución de (1). Multiplicando ambos lados de (6) por $\varphi_0^{-1}(x)e^{\lambda_0 t}$ da

$$w(t,x) = Q_t g(x) + V \int_0^t Q_s w(t-s,\cdot)^\beta z(t-s,\cdot)^{\beta-1}(x)\,ds,\ x \in G,\ t \geq 0. \tag{7}$$

Si $\beta > 1$ es entero, la solución de la ecuación (7) admite una representación como funcional de media de un proceso de ramificación, análoga a las representaciones dadas en los teoremas 1 y 4. En efecto, considérese una población bi-tipo en G, de tipos 1 y 2, cuyos individuos evolucionan independientemente de la siguiente forma. Una partícula de tipo 1 vive un tiempo exponencial de media $1/V$ durante el cual migra según el semigrupo $\{Q_t,\ t \geq 0\}$. Al final de su vida ésta se ramifica, procreando β descendientes del tipo 1 y $\beta - 1$ descendientes del tipo 2, todos naciendo en el lugar de muerte de su progenitora. Las partículas del tipo 2 desarrollan movimientos brownianos matados independientes y no se ramifican. Para $i = 1, 2$, sea $X^x_{t,i}$ la población de partículas de tipo i al tiempo t, iniciando con un ancestro de tipo 1 en la posición $x \in G$. Entonces la solución $w(t, x)$ de (7) está dada por

$$w(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{S^x_t} \prod_{z \in \mathrm{supp}(X^x_{t,1})} g(z) \prod_{z \in \mathrm{supp}(X^x_{t,2})} \varphi_0(z) \right], \quad t \geq 0, \quad x \in G, \tag{8}$$

donde $V^{-1} S^x_t =: \int_0^t \int X^x_{s,i}(dy)\, ds$ representa la longitud hasta el tiempo t del árbol de descendencia de un ancestro tipo 1. Como $\varphi_0^2(x)\, dx$ es la medida invariante de $\{Q_t,\ t \geq 0\}$, si φ_0 decae suficientemente rápido cerca de ∂G, y además los puntos $x \in G$ donde $g(x) \equiv f(x)/\varphi_0(x)$ es grande están en regiones a las que $\varphi_0^2(x)\, dx$ asigna poca masa (equivalentemente, si $\langle f, \varphi_0 \rangle$ es pequeño), entonces el decaimiento de $\prod_{z \in \mathrm{supp} X^x_{t,2}} \varphi_0(z)$ cuando $t \to \infty$ es capaz de contrarrestar la contribución del factor $e^{S^x_t} \prod_{z \in \mathrm{supp} X^x_{t,1}} g(z)$ a la esperanza en (8), evitando así explosión en tiempo finito de $w(t)$, y por tanto de $u(t)$.

8. Explosión y estabilidad de una ecuación semilineal con un generador dependiente del tiempo

En esta sección consideramos el problema de Cauchy semilineal no autónomo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t} &= L(t) u\,(t,x) + \gamma u^{\beta}\,(t,x)\,, \quad t > s \geq 0, \\ u\,(s,x) &= \varphi\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\gamma > 0$ y $\beta > 1$ son constantes, $0 \leq \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (donde $C_0(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^d$ que se anulan en el infinito) y $L(t)$, $t \geq 0$, son generadores de Lévy de la forma

$$\begin{aligned} L\,(t)\, f\,(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,(t,x)\, \frac{\partial^2 f\,(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i\,(t,x)\, \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_i} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(f\,(x+y) - f\,(x) - \frac{\langle y, \nabla f\,(x) \rangle}{1 + |y|^2} \right) \mu\,(t,x,dy)\,,\ f \in \mathrm{Dom}(L(t)),\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí $a : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to S^+_d$ es acotada y continua, S^+_d es el espacio de matrices reales $d \times d$, simétricas y no-negativas definidas, $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es acotada y medible, y $\mu\,(t,x,\cdot)$ es una medida de Lévy tal que $\int_\Gamma |y|^2 (1 + |y|^2)^{-1} \mu(t,x,dy)$ es acotada y continua en (t,x) para todo conjunto de Borel $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Sea $\{U(t,s)\}_{t \geq s \geq 0}$ el sistema de evolución generado por $\{L(t)\}_{t \geq 0}$. Un resultado estándar [30] es que para cada valor inicial no trivial φ existe un número $T_\varphi \in (0, \infty]$ tal que (1) tiene una solución única u dada por

$$u\,(t,x) = U\,(t,s)\,\varphi\,(x) + \gamma \int_s^t U\,(t,r)\, u^{\beta}\,(r,x)\; dr, \quad T_\varphi > t \geq s, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

la cual es acotada en $[s,T]\times\mathbb{R}^d$ para todo $0\le s\le T<T_\varphi$ y si $T_\varphi<\infty$, entonces $\|u(t,\cdot)\|_\infty\to\infty$ cuando $t\uparrow T_\varphi$. Igual que antes, cuando $T_\varphi=\infty$ se dice que u es una solución global y cuando $T_\varphi<\infty$ se dice que u explota en tiempo finito o que u es no global.

Recuérdese que, bajo nuestras hipótesis, el sistema de evolución $\{U(t,s)\}_{t\ge s\ge 0}$ está dado por

$$U(t,s)\,\varphi(x)=\int\varphi(y)\,P(s,x,t,dy)\,,\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

donde $\{P(s,x,t,dy)\}_{t\ge s\ge 0}$ son las probabilidaded de transición del proceso markoviano $X\equiv\{X(t)\}_{t\ge 0}$ que resuelve el problema de la martingala para $\{L(t)\}_{t\ge 0}$ [33]. Sea $C_0\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ el espacio de funciones continuas en $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ que se anulan en infinito, y sea $\{Y(t)\}_{t\ge 0}$ el proceso de Markov homogéneo en $[0,\infty)$ con probabilidades de transición

$$P(t,r,\Gamma)=\delta_{r-t}(\Gamma)\,,\quad \Gamma\in\mathcal{B}([0,\infty))\,,\quad t,\ r\ge 0.$$

El semigrupo $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ en $C_0\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ dado por

$$(T(t)\,g)(r,x)=\begin{cases} U(r,r-t)\,g(r-t,x)\,, & 0\le t<r,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ U(r,0)\,g(0,x)\,, & 0\le r\le t,\end{cases}$$

es un semigrupo fuertemente continuo de contracciones que preservan positividad. Su generador infinitesimal A es conservativo y, por lo tanto, el proceso de Markov correspondiente $Z=\{Z(t)\}_{t\ge 0}\equiv\{(Y(t),X(t))\}_{t\ge 0}$ es fuerte de Markov en $S:=[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Así, las soluciones positivas del problema semilineal

$$\frac{\partial}{\partial t}w(t,z)=Aw(t,z)+\gamma w^\beta(t,z)\,,\qquad w(s,z)=\varphi(z)\,,\quad t>s\ge 0,\quad z\in S,$$

admiten la representación dada en la sección 3, a saber

$$w(t,z)=E\left[e^{S_{t-s}}\hat{\varphi}(X^z(t-s))\right],\quad t\ge s\ge 0,\ z\in S,\tag{3}$$

donde $\{X^z(t),\ t\ge 0\}$ es un proceso de ramificación en S con tiempos de vida exponenciales, número de ramificaciones β, movimientos de partículas con generador A e iniciando con un individuo δ_z, $z\in S$. Procediendo como antes se obtienen los siguientes resultados (ver [21]).

Teorema 7. Sea $\{U(t,s)\}_{t\ge s\ge 0}$ el sistema de evolución generado por $\{L(t)\}_{t\ge 0}$, y sea $\beta\ge 2$ un entero. Si para algún $x\in\mathbb{R}^d$ y $t>s\ge 0$ se cumple

$$(\beta-1)\,\gamma\,(t-s)\,(U(t,s)\,\varphi(x))^{\beta-1}\ge 1,\tag{4}$$

entonces la solución de (1) explota en tiempo finito.

Teorema 8. Sea $\{U(t,s)\}_{t\ge s\ge 0}$ el sistema de evolución generado por $\{L(t)\}_{t\ge 0}$. Sean $\varphi\ge 0$, $\beta>1$ y $s\ge 0$ tales que

$$(\beta-1)\,\gamma\int_s^\infty\|U(t,s)\,\varphi\|_\infty^{\beta-1}\,dt<1.\tag{5}$$

Entonces la solución de (1) es global y cumple

$$u(t,x) \leq \frac{U(t,s)\varphi(x)}{\left[1-(\beta-1)\gamma\int_s^t \|U(r,s)\varphi\|_\infty^{\beta-1}\,dr\right]^{\frac{1}{\beta-1}}}, \qquad t \geq s,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

En caso de $\beta \geq 2$ entero, los teoremas 7 y 8 se siguen de razonamientos análogos a los de las secciones 4 y 5. El caso $\beta \in (1,\infty)$ del teorema 8 se demuestra en [21] adaptando el método empleado en [39].

8.1 El caso $L(t) = k(t)\Delta_\alpha$

Supongamos que $L(t) = k(t)\Delta_\alpha$, $t \geq 0$, donde $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es continua y no idénticamente cero y Δ_α es la potencia fraccionaria $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ del Laplaciano, $0 < \alpha \leq 2$. El operador Δ_α es el generador infinitesimal del movimiento α-estable esféricamente simétrico d-dimensional, el cual denotaremos por $W := \{W_s,\ s \geq 0\}$; el caso $\alpha = 2$ corresponde al movimiento browniano en $\mathbb{R}^d$ con parámetro de varianza 2.

W es un proceso fuerte de Markov que posee una familia de densidades de transición $p(t,x,y) \equiv p(t,y-x) \equiv p_t(y-x)$, $t > 0$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, las cuales son continuas, estrictamente positivas y radialmente simétricas. El correspondiente semigrupo de operadores lineales $\{S(t),\ t \geq 0\}$ tiene como generador a Δ_α y está dado por

$$S(t)\varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(W_t)|\, W_0 = x] \equiv \mathbb{E}_x[\varphi(W_t)] = \int p(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es medible y acotada. Las densidades estables poseen las siguientes propiedades [35].

Lema 4. Para cualesquier $s,t > 0$ y $x,y \in \mathbb{R}^d$, se cumple

i) $p(ts,x) = t^{-\frac{d}{\alpha}}p\left(s,t^{-\frac{1}{\alpha}}x\right)$,

ii) $p(t,x) \leq p(t,y)$ si $|x| \geq |y|$,

iii) $p(t,x) \geq \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{d}{\alpha}} p(s,x)$ cuando $t \geq s$,

iv) $p\left(t,\frac{1}{\tau}(x-y)\right) \geq p(t,x)\,p(t,y)$ si $p(t,0) \leq 1$ y $\tau \geq 2$.

A la propiedad i) del lema anterior se le llama propiedad de escala (o propiedad de autosimilaridad) de las densidades estables.

8.1.1 Explosión en tiempo finito

Consideremos la ecuación semilineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= k(t)\Delta_\alpha u(t,x) + \gamma u^\beta(t,x), \quad t > s \geq 0, \\ u(s,x) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{6}$$

donde γ, β y φ son como en (1). El sistema de evolución asociado a la familia $\{k(t)\Delta_\alpha\}_{t\geq 0}$ es

$$U(t,s)\varphi(x) = S(K(t,s))\varphi(x), \tag{7}$$

donde

$$K(t,s) := \int_s^t k(r)\,dr, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{8}$$

Denotemos por $B_r(x)$ a la bola abierta en $\mathbb{R}^d$ de radio $r > 0$ con centro en $x \in \mathbb{R}^d$; escribiremos $B_r \equiv B_r(0)$.

Sea $t_0 > 0$ tal que $K(t_0, 0) = \int_0^{t_0} k(r)\ dr \equiv \varepsilon > 0$. Usando (7) y las propiedades i) y ii) del lemma 4, es fácil probar que si $x \in B_{(K(t,0))^{\frac{1}{\alpha}}}$, $z \in \partial B_2$ y t es suficientemente grande, entonces

$$(\beta-1)\gamma t\,(U(t,0)\varphi(x))^{\beta-1} \geq (\beta-1)\gamma t\left(p(1,z)\int_{B_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}}\varphi(y)\,dy\right)^{\beta-1} K^{-\frac{d(\beta-1)}{\alpha}}(t,0),$$

lo cual implica (4) siempre que el miembro derecho de la desigualdad anterior sea mayor que 1. Por tanto, se cumple lo siguiente.

Lema 5. Supongamos que $\beta \geq 2$ es un entero, y que para algunos $t > t_0$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $z \in \partial B_2$ se verifica

$$K^{\frac{d(\beta-1)}{\alpha}}(t,0) < (\beta-1)\gamma t\left(p(1,z)\int_{B_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}(x)}\varphi(y)\,dy\right)^{\beta-1}.$$

Entonces la solución de (6) explota en tiempo finito.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del lema anterior.

Proposicón 1. a). Si $0 \leq \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ no es idénticamente cero y $\int_0^\infty k(r)\,dr < \infty$, entonces la solución mild de (6) explota en tiempo finito para todo $\alpha \in (0,2]$ y todos los enteros $d \geq 1$, $\beta \geq 2$.

b). Sea $\beta \geq 2$ entero. Si existen constantes $C > 0$ y $\rho > 0$ tales que

$$0 < K(t,0) \leq Ct^\rho$$

para todo t suficientemente grande, y la condición inicial $0 \leq \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ no es idénticamente cero, entonces $d < \alpha/(\rho(\beta-1))$ implica explosión en tiempo finito de la solución de (6).

Nótese que en el caso $k \equiv 1$, el criterio de explosión dado por la proposición 1.b se reduce al conocido resultado de que la solución de (6) explota en tiempo finito cuando $d < \alpha/(\beta-1)$ y $\varphi \geq 0$ no es idénticamente cero (véase por ejemplo [27]).

8.1.2 Existencia de soluciones globales

Consideremos de nuevo el problema (6), pero con $\beta > 1$ no necesariamente entero.

Proposicón 2. Si

$$\int_0^\infty K^{-\frac{d(\beta-1)}{\alpha}}(t,0)\,dt \equiv M < \infty \tag{9}$$

y

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,dy\right)^{\beta-1} < \frac{1}{(\beta-1)\,\gamma p^{\beta-1}(1,0)\,M}, \tag{10}$$

entonces la solución de (6) es global.

Prueba. Usando (7) y la propiedad de escala de las densidades estables puede demostrarse que

$$(\beta-1)\,\gamma\int_0^\infty \|U(t,0)\,\varphi\|_\infty^{\beta-1}\,dt \le (\beta-1)\,\gamma p^{\beta-1}(1,0)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\,dy\right)^{\beta-1} M.$$

Así, (9) y (10) implican (5). Una aplicación del teorema 8 finaliza la prueba. ∎

Corolario 2. Supóngase que la condición (9) se cumple, y sea $\delta > 0$ tal que

$$\delta^{\beta-1} < \left[(\beta-1)\,\gamma p^{\beta-1}(1,0)\,M\right]^{-1}.$$

Si existe $l > 0$ tal que

$$0 \le \varphi(x) \le \delta p(l,x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

entonces la solución de (6) es global.

Similarmente a la proposición 2, puede probarse lo siguiente.

Proposicón 3. Si existen $l > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} M_l &\equiv \int_0^\infty (l + K(t,0))^{-\frac{d(\beta-1)}{\alpha}}\,dt < \infty,\\ \delta^{\beta-1} &< \left[(\beta-1)\,\gamma p^{\beta-1}(1,0)\,M_l\right]^{-1},\\ 0 \le \varphi(x) &\le \delta p(l,x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{11}$$

entoces la solución mild de (6) es global.

Corolario 3. Supóngase que $ct^\rho \le K(t,0)$ para ciertas constantes positivas c, ρ, y todo $t \ge 0$. Si φ cumple (11) y

$$\frac{d\rho(\beta-1)}{\alpha} > 1,$$

entonces la solución mild de (6) es global.

Cuando $k \equiv 1$ y $d(\beta-1) > \alpha$, el corolario 3 se reduce al bien conocido resultado de que la solución de (6) es global si para algún $l > 0$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño,

$$0 \le \varphi(x) \le \delta p(l,x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

(véase [27]).

Observación. Las proposiciones 2 y 3 siguen valiéndose si en lugar del operador Δ_α en (6) consideramos el operador

$$\Delta_{\alpha,b} \equiv \Delta_\alpha + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$ y $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$. Ver [21].

Finalizamos esta sección recalcando que el factor $k(t)$ es capaz de modificar la difusividad de los movimientos de partículas hasta alterar drásticamente el comportamiento de explosión de la ecuación (6). Para el caso especial de k considerado aquí, la integrabilidad de k excluye la existencia de soluciones globales, independientemente de la dimensión del espacio y el exponente de estabilidad α. Intuitivamente, en este caso el comportamiento de explosión de la ecuación (6) es similar al de

$$\frac{du(t)}{dt} = u^\beta(t), \quad u(0) > 0.$$

Similarmente, si $\int_0^t k(s)\,ds \sim t^\rho$ cuando $t \to \infty$ con $\rho > 0$, entonces el comportamiento de explosión de (6) es análogo al de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\frac{\alpha}{\rho}} u + \gamma u^\beta, \quad u(0,\cdot) \gneqq 0.$$

Así, de nuevo heurísticamente, en el caso $\rho > 0$ es el exponente de estabilidad el que resulta alterado. Ya que tal exponente determina la mobilidad de los movimientos estables, el factor $k(t)$ puede disminuir o aumentar la difusividad del movimiento, de acuerdo a si $0 < \rho < 1$ o $\rho > 1$.

8.2 El caso $L\,(t) = 2^{-1} \sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}\,(t)\, \partial^2/\partial x_i \partial x_j$

Suponiendo de nuevo que $k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es continua y no idénticamente cero y definiendo $K\,(t,s)$, $t \geq s \geq 0$ como en (8), de la proposición 1 se sigue inmediátamente que, para $\beta \geq 2$ entero, la solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t} &= \frac{k\,(t)}{2} \Delta u\,(t,x) + \gamma u^\beta\,(t,x)\,, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u\,(0,x) &= \varphi\,(x)\,, \end{aligned}$$

explota en tiempo finito si $0 < K\,(t,0) \leq \text{Const}\cdot t$ para t suficientemente grande, $d = 1$, $\beta = 2$ y la condición inicial $0 \leq \varphi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ no es idénticamente cero. Para dimensiones $d \geq 2$ y $\beta > 1$ no necesariamente entero daremos enseguida un resultado de globalidad. Recordemos que S_d^+ denota al espacio de matrices reales $d \times d$, simétricas y no-negativas definidas.

Proposicón 4. Sea $k : [s,\infty) \to S_d^+$ continua y tal que $\lambda\,|\theta|^2 \leq \langle \theta, k\,(t)\,\theta \rangle \leq \Lambda\,|\theta|^2$, donde $t \geq s \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}^d$ y $0 < \lambda < \Lambda < \infty$. Sea u la solución del problema semilineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}\,(t)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\,(t,x) + \gamma u^\beta\,(t,x)\,, \quad t > s \geq 0, \\ u\,(s,x) &= \varphi\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$, $\beta > 1$, $d \geq 2$, y $0 \leq \varphi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$. Si $\frac{(d-1)(\beta-1)}{2} > 1$ y $\varphi(x) \leq \delta\left(1+|x|\right)^{-d+1}$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, entonces u es global.

Un bosquejo de la prueba de la proposición anterior se da a continuación. Sea

$$K(t,s) = \left(K_{ij}(t,s)\right)_{1\leq i,j\leq d}, \ 0 \leq s \leq t,$$

donde $K_{ij}(t,s) := \int_s^t k_{i,j}(r)\,dr$, $i,j = 1,\ldots,d$. Para $0 \leq s < t$ y $x, y \in \mathbb{R}^d$ definimos

$$p(s,x,t,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\left(\det K(t,s)\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle y-x, K^{-1}(t,s)(y-x)\right\rangle\right].$$

Entonces

$$P(s,x,t,\Gamma) := \int_\Gamma p(s,x,t,y)\,dy, \quad 0 \leq s < t, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

es una probabilidad de transición y $v(t,x) \equiv U(t,s)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,P(s,x,t,dy)$ resuelve la ecuación homogénea

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}(t)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(t,x), \qquad v(s,x) = \varphi(x).$$

(Véase [34]). Usando que $p(s,x,t,y) \leq \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \widetilde{p}(t-s,y-x)$, donde

$$\widetilde{p}(t-s,y-x) = \frac{1}{\left(2\pi\Lambda(t-s)\right)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{|y-x|^2}{2\Lambda(t-s)}\right],$$

la continuidad de $(t,s) \mapsto U(t,s)\varphi$, $\varphi \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$, y el hecho de que para cada $t \geq s \geq 0$, $U(t,s)$ es un operador lineal acotado positivo-preservante, implican que

$$\int_s^\infty \left\|U(t,s)\varphi\right\|_\infty^{\beta-1} dt \leq \ M\delta^{\beta-1}$$

para alguna constante $M > 0$. De aquí se obtiene (5) eligiendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

9. Representación de Feynman-Kac y aplicación al caso Δ_α

Sea $\{W(t),\ t \geq 0\}$ el proceso esféricamente simétrico α-estable en $\mathbb{R}^d$. Es bien conocido [32] que si $\alpha < 2$, existe una medida aleatoria de Poisson $N(dt,dx)$ sobre $([0,\infty) \times (\mathbb{R}^d - \{0\}))$ con medida de intensidad $dt\,\nu(dx)$, donde

$$\nu(dx) = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma((\alpha+d)/2)}{\pi^{d/2}\Gamma(1-\alpha/2)\|x\|^{\alpha+d}}\,dx,$$

tal que para todo $t \geq 0$ se cumple la descomposición de Lévy-Itô

$$W(t) = \int_{|x|<1} x\widetilde{N}(t,dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx),$$

siendo $\widetilde{N}(t,dx)$ la medida aleatoria de Poisson compensada $\widetilde{N}(t,B) = N(t,B) - t\nu(B)$, $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En lo sucesivo denotaremos con P_x a la distribución de $\{x + W_t,\ t \geq 0\}$, y con E_x a la esperanza con respecto a P_x, $x \in \mathbb{R}^d$.

9.1 Fórmulas de Feynman-Kac

Sea $T > 0$. Consideremos la ecuación lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= \Delta_\alpha v(t,x) + k(t,x)v(t,x) \quad 0 < t \leq T, \\ v_0(x) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

donde φ y $k(t,x)$ son funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}^d$ y $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, respectivamente. Es bien sabido que en el marco clásico $\alpha = 2$, $k(t,x) \equiv k(x)$, la solución de (1) está dada por la fórmula de Feynman-Kac. Sin embargo, no es común encontrar en la literatura la fórmula correspondiente a la ecuación de arriba. Por tal motivo, en esta sección probaremos que la solución de (1) admite la representación de Feynman-Kac

$$v(t,y) = E_y \left[\varphi(W_t) \exp \int_0^t k(t-s, W_s)\, ds \right], \quad (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Para probar (2) usamos la fórmula de integración por partes y obtenemos

$$\begin{aligned} d\left[v(t-s,W_s) \exp \int_0^s k(t-r,W_r)\, dr \right] = {} & v(t-s,W_s)k(t-s,W_s) \\ & \exp\left\{ \int_0^s k(t-r,W_r)\, dr \right\} ds \\ & + \exp\left\{ \int_0^s k(t-r,W_r)\, dr \right\} dv(t-s,W_s). \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la formula de Itô para el último término (ver por ejemplo [1]), lo cual da

$$\begin{aligned} & d\left[v(t-s,W_s) \exp \int_0^s k(t-r,W_r)\, dr \right] \\ & = \exp\left\{ \int_0^s k(t-r,W_{r-})\, dr \right\} \left\{ v(t-s,W_{s-})k(t-s,W_{s-})\, ds - \frac{d}{ds} v(t-s,W_{s-}) \right. \\ & \quad + \int_{|x|<1} \left[v(t-s,W_{s-}+x) - v(t-s,W_{s-}) \right] \widetilde{N}(ds,dx) \\ & \quad + \int_{|x|\geq 1} \left[v(t-s,W_{s-}+x) - v(t-s,W_{s-}) \right] N(ds,dx) \\ & \quad \left. + \int_{|x|<1} \left[v(t-s,W_{s-}+x) - v(t-s,W_{s-}) \quad - \sum_i x_i \frac{d}{dx_i} v(t-s,W_{s-}) \right] \nu(dx)\, ds \right\}. \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0,t]$ y tomando esperanza respecto a P_y resulta

$$\begin{aligned}
& E_y\left[\varphi(W_t)\exp\left\{\int_0^t k(t-s,W_s)\,ds\right\}\right] - v_t(y) \\
&= E_y\int_0^t \exp\left\{\int_0^s k(t-r,W_{r-})\,dr\right\}\left\{v(t-s,W_{s-})k(t-s,W_{s-}) - \frac{d}{ds}v(t-s,W_{s-})\right. \\
&\quad + \int_{|x|<1}\left[v(t-s,W_{s-}+x) - v(t-s,W_{s-}) - \sum_i x_i\frac{d}{dx_i}v(t-s,W_{s-})\right]\nu(dx) \\
&\quad \left. + \int_{|x|\geq 1}[v(t-s,W_{s-}+x) - v(t-s,W_{s-})\nu(dx)]\right\}ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la igualdad $\widetilde{N}(ds,dx) = N(ds,dx) - ds\,\nu(dx)$ y el hecho que las integrales estocásticas respecto a $\widetilde{N}(ds,dx)$ son martingalas, por lo que tienen esperanza 0. Esto prueba (2).

Empleando la simetría y positividad de las densidades estables deduciremos a continuación una variante de (2) que es más útil para nuestros propósitos.

Para $t>0$ fijo consideremos el proceso de Lévy $\{W_s,\ 0\leq s\leq t\}$. Sabemos que $\{W_s,\ 0\leq s\leq t\}$ tiene densidades de transición simétricas y estrictamente positivas. Para $x\in\mathbb{R}^d$ denotemos con P_x^t a la distribución de $\{x+W_s,\ 0\leq s\leq t\}$ en el espacio de Skorokhod $D([0,t],\mathbb{R}^d)$, donde $D([0,t],\mathbb{R}^d)$ está dotado de su filtración canónica $\{\mathcal{F}_s\}_{0\leq s\leq t}$. Los resultados en la siguiente proposición aparecen en [36].

Proposicón 5. Sea $t>0$ fijo.

a) Para cualesquier $x,y\in\mathbb{R}^d$ existe una única medida de probabilidad $P_{x,y}^t$ en $D([0,t],\mathbb{R}^d)$ tal que, si $s\in[0,t)$ y $A\in\mathcal{F}_s$, entonces

$$P_{x,y}^t(A) = \frac{1}{p(t,x,y)}E_x^t\left[p(t-s,W_s,y)1_A\right], \tag{3}$$

donde E_x^t denota esperanza respecto a P_x^t.

b) Se cumple

$$P_{x,y}^t[W_t=y]=1. \tag{4}$$

c) $y\to P_{x,y}^t$ es una probabilidad condicional regular de P_x^t, dado que $\{W_t=y\}$.

d) (Reversibilidad de $P_{x,y}^t$). La imagen de $P_{x,y}^t$ bajo el mapeo $\omega(\cdot)\mapsto\omega(t-\cdot)$ es $P_{y,x}^t$.

Prueba. Sean $x,y\in\mathbb{R}^d$. Está claro que (3) determina una única medida de probabilidad $P_{x,y}^t$ sobre $\mathcal{F}_t$, por lo que, para demostrar a) es suficiente probar la existencia de $P_{x,y}^t$. Primero probaremos que $\{p(t-s,W_s,y),\ s\in[0,t)\}$, es una $\mathcal{F}_s$-martingala.

En efecto, para $0 \leq s < r < t$ y $A \in \mathcal{F}_s$, tenemos

$$\begin{aligned} E_x^t \left[1_A p(t-r, W_r, y) \right] &= E_x^t \left[1_A E_{W_s} \left(p(t-r, W_r, y) \right) \right] \\ &= E_x^t \left[1_A \int p(t-r, z, y) p(r-s, W_s, z)\, dz \right] \\ &= E_x^t \left[1_A p(t-s, W_s, y) \right], \end{aligned}$$

donde usamos la propiedad de Markov y la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Del teorema de consistencia de Kolmogorov (ver por ejemplo [9]), se sigue que existe una única medida de probabilidad $\widetilde{P}_{x,y}^t$ sobre $D([0,t), R^d)$ tal que

$$\widetilde{P}_{x,y}^t(A) = \frac{1}{p(t,x,y)} E_x^t \left[1_A p(t-s, W_s, y) \right], \quad s \in [0,t), \quad A \in \mathcal{F}_s.$$

Escribiendo $\widetilde{E}_{x,y}^t$ para la esperanza respecto a $\widetilde{P}_{x,y}^t$, se sigue que para $t > r > s \geq 0$ y $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_{x,y}^t \left[\frac{1}{p(t-r, W_r, y)} 1_A \right] &= \frac{1}{p(t,x,y)} E_x^t \left[\frac{p(t-r, W_r, y)}{p(t-r, W_r, y)} 1_A \right] \\ &= \frac{1}{p(t,x,y)} E_x^t \left[\frac{p(t-s, W_s, y)}{p(t-s, W_s, y)} 1_A \right] \\ &= \widetilde{E}_{x,y}^t \left[\frac{1}{p(t-s, W_s, y)} 1_A \right], \end{aligned}$$

implicando que $\left\{ p^{-1}(t-s, W_s, y),\, 0 \leq s < t \right\}$ es una martingala no negativa bajo $\widetilde{P}_{x,y}^t$. Del teorema de convergencia de martingalas, se sigue que $p^{-1}(t-s, W_s, y)$ converge $\widetilde{P}_{x,y}^t$-casi seguramente a un límite finito cuando $s \to t$, y por lo tanto $W_s \to y$ cuando $s \to t$. Entonces tenemos que $\widetilde{P}_{x,y}^t$ esta concentrada sobre $D([0,t], R^d)$ y podemos definir $P_{x,y}^t$ como la restricción de $\widetilde{P}_{x,y}^t$ a $D([0,t], R^d)$. Esto prueba a) y b).

Sea $0 \leq s < t$ y $A \in \mathcal{F}_s$. Por la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} E_x^t \left[1_{W_t \in B}\, 1_A \right] &= \int_B E_x^t \left[p(t-s, W_s, y) 1_A \right] dy \\ &= \int_B p(t,x,y) P_{x,y}^t(A)\, dy \\ &= E_x^t \left[1_{\{W_t \in B\}} E_{x,W_t}^t(A) \right]. \end{aligned}$$

El inciso c) se sigue para todo $A \in \mathcal{F}_t$ por un argumento de clases monótonas. El inciso d) se cumple debido a la simetría de las densidades estables y a la igualdad

$$P_{x,y}^t \left[W_{s_1} \in dz_1, \ldots, W_{s_n} \in dz_n \right] = \frac{p(s_1, x, z_1) p(s_2 - s_1, z_1, z_2) \cdots p(t - s_n, z_n, y)}{p(t,x,y)}\, dz_1 \cdots dz_n.$$

■

La proposición 5 permite obtener una forma alternativa de la representación de

Feynman-Kac (2), la cual será de utilidad más adelante. De la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} v(t,y) &= E_y\left[\varphi(W_t)E^t_{y,W_t}\exp\left\{\int_0^t k(t-s,W_s)\,ds\right\}\right] \\ &= \int \varphi(x)p(t,y,x)E^t_{y,x}\exp\left\{\int_0^t k(t-s,W_s)\,ds\right\}\,dx \\ &= \int \varphi(x)p(t,x,y)E^t_{x,y}\exp\left\{\int_0^t k(s,W_s)\,ds\right\}\,dx \\ &= \int E_x\left[\exp\left\{\int_0^t k(s,W_s)\,ds\right\}\middle| W_t=y\right]\varphi(x)p(t,x,y)\,dx, \end{aligned}$$

donde usamos la simetría de $p(t,x,y)$ y la proposición 5.d. Por lo tanto,

$$v(t,y) = \int E_x\left[\exp\left\{\int_0^t k(s,W_s)\,ds\right\}\middle| W_t=y\right]\varphi(x)p(t,x,y)\,dx. \tag{5}$$

9.2 Cotas de puentes y semigrupos

Recordemos que B_r denota a la bola en $\mathbb{R}^d$ con radio $r>0$ centrada en el origen. Los siguientes dos lemas aparecen en [7]. Por completitud incluimos aquí sus demostraciones.

Lema 6. Existe una constante $c>0$ tal que para cualesquier $t\geq 2$, $y\in B_{t^{1/\alpha}}$, $x\in B_1$ y $s\in[1,t/2]$, se cumple

$$P_x\left\{W_s\in B_{s^{1/\alpha}}\,|\,W_t=y\right\} \;\geq\; c. \tag{6}$$

Prueba. Del lemma 4.i tenemos que para todo $s\in[1,t/2]$,

$$\begin{aligned} &\int_{B_{s^{1/\alpha}}}\frac{p_s(z-x)p_{t-s}(y-z)}{p_t(y-x)}\,dz \\ &= \int_{B_{s^{1/\alpha}}}\frac{s^{-d/\alpha}p_1(s^{-1/\alpha}(z-x))(t-s)^{-d/\alpha}p_1((t-s)^{-1/\alpha}(y-z))}{t^{-d/\alpha}p_1(t^{-1/\alpha}(y-x))}\,dz \\ &\geq \frac{s^{-d/\alpha}(t-s)^{-d/\alpha}}{t^{-d/\alpha}}\cdot\frac{\left(\inf_{w\in B_2}p_1(w)\right)^2}{p_1(0)}\int_{B_{s^{1/\alpha}}}dz \\ &\geq s^{-d/\alpha}\mathrm{Vol}(B_{s^{1/\alpha}})\frac{\left(\inf_{w\in B_2}p_1(w)\right)^2}{2p_1(0)}, \end{aligned}$$

lo cual prueba (6). ∎

Lema 7. Sea

$$f_t(y) := S_t\varphi(y) = \mathbb{E}_y\left[\varphi(W_t)\right], \tag{7}$$

donde $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ es medible y acotada. Para todo $t\geq 1$ tenemos

$$f_t(y) \;\geq\; c_0 t^{-d/\alpha}\mathbf{1}_{B_1}(t^{-1/\alpha}y)\int_{B_1}\varphi(x)\,dx \tag{8}$$

para alguna constante $c_0>0$.

Prueba. Sea $y \in B_{t^{1/\alpha}}$. Entonces $t^{-1/\alpha}y \in B_1$, y por la autosimilaridad de W tenemos

$$\begin{aligned}
f_t(y) &= \mathbb{E}_0\left[\varphi(W_t + y)\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\varphi\left(t^{1/\alpha}(W_1 + t^{-1/\alpha}y)\right)\right] \\
&\geq \int_{B_1} p_1(x - t^{-1/\alpha}y)\varphi(t^{1/\alpha}x)\,dx \\
&\geq \left(\inf_{x\in B_2} p_1(x)\right)\int_{B_1}\varphi(t^{1/\alpha}x)\,dx \\
&= c_0 t^{-d/\alpha}\int_{B_{t^{1/\alpha}}}\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

El argumento de arriba también demuestra que para t suficientemente grande y φ tal que $0 < \int \varphi(x)\,dx < \infty$, se cumple

$$f_t(y) \;\geq\; c_0' t^{-d/\alpha}\mathbf{1}_{B_1}(t^{-1/\alpha}y) \tag{9}$$

para algún $c_0' > 0$. ■

9.3 Subsoluciones vía la representación de Feynman-Kac

Sea w la solución de la ecuación semilineal

$$\frac{\partial w_t}{\partial t}(y) = \Delta_\alpha w_t(y) + \gamma w_t^{1+\beta}(y), \qquad w_0(y) = \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}^d, \tag{10}$$

donde $\gamma, \beta > 0$ y $\varphi \geq 0$ es medible, acotada y mayor que cero en un conjunto de volumen positivo. Debido a la fórmula de Feynman-Kac (2) tenemos que w_t admite la representación

$$w_t(y) = E_y\left[\varphi(W_t)\exp\int_0^t \gamma w_{t-s}^\beta(W_s)\,ds\right]$$

y por tanto,

$$w_t(y) \geq E_y\left[\varphi(W_t)\right] = f_t(y), \quad t \geq 0,$$

de modo que f_t es una subsolución de (10), es decir, $w_0 = f_0$ y $w_t \geq f_t$ para todo $t > 0$. Por linealidad obtenemos el lema siguiente.

Lema 8. Sea $\varphi \geq 0$ acotada y medible. Si u_t, v_t, respectivamente, son soluciones de

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(y) = \Delta_\alpha u_t(y) + \zeta_t(y)u_t(y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_t}{\partial t}(y) = \Delta_\alpha v_t(y) + \xi_t(y)v_t(y),$$

con $u_0 \geq v_0$ y $\zeta_t \geq \xi_t$, entonces $u_t \geq v_t$.

En lo siguiente vamos a usar el hecho (que se deriva del lema 8) que si u_t es subsolución de (10), entonces toda solución de

$$\frac{\partial v_t}{\partial t}(y) = \Delta_\alpha v_t(y) + \gamma u_t^\beta(y)v_t(y), \qquad v_0 = \varphi,$$

es una subsolución de (10).

Sea g_t la solución de

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \Delta_\alpha g_t + \gamma g_t f_t^\beta, \quad g_0 = \varphi,$$

donde f_t está definido en (7). Debido a que f_t es subsolución de (10), g_t es también una subsolución de (10).

Proposicón 6. Sea $d < \alpha/\beta$. Si $t \to \infty$, entonces g_t crece hacia ∞ uniformemente en la bola unitaria, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{x\in B_1} g_t(x) = \infty.$$

Prueba. De acuerdo a la representación de Feynman-Kac (10),

$$g_t(y) = \int \varphi(x)\, p_t(y-x)\, \mathbb{E}_x\left[\exp \int_0^t \gamma f_s(W_s)^\beta \, ds \middle| W_t = y\right] dx.$$

Usando (8) y la desigualdad de Jensen se sigue que, para $y \in B_{t^{1/\alpha}}$,

$$\begin{aligned} g_t(y) &\geq \int \varphi(x)\, p_t(y-x)\, \mathbb{E}_x\left[\exp \int_1^{t/2} c_1 s^{-\beta d/\alpha} \mathbf{1}_{B_{s^{1/\alpha}}}(W_s)\, ds \middle| W_t = y\right] dx \\ &\geq \int \varphi(x)\, p_t(y-x) \exp\left(c_2 \int_1^{t/2} s^{-\beta d/\alpha} P_x \left\{W_s \in B_{s^{1/\alpha}} \middle| W_t = y\right\} ds\right) dx \\ &\geq c_3 t^{-d/\alpha} \exp\left(c_4 \int_1^{t/2} s^{-\beta d/\alpha} ds\right), \end{aligned} \tag{11}$$

donde hemos usado los lemas 6 y 4 para obtener la última desigualdad, y donde c_i, $i = 1, 2, 3, 4$, son constantes positivas. El resultado se sigue de la condición $d < \alpha/\beta$. ∎

9.4 Explosión en dimensiones subcríticas

Teorema 9. Sea $d < \alpha/\beta$. Toda solución positiva no trivial de (10) es no global.

Prueba. Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ acotada, medible y positiva sobre un conjunto de medida de Lebesgue positiva. En virtud de que $w_t \geq g_t$, de la proposición 6 se sigue que

$$K(t) := \inf_{x\in B_1} w_t(x) \to \infty \quad \text{si} \quad t \to \infty, \tag{12}$$

lo cual es suficiente para garantizar explosión en tiempo finito según un argumento debido a Kobayashi, Sirao y Tanaka [17]; ver también [7]. De hecho, poniendo $u_t := w_{t+t_0}$ con $t_0 > 0$, se sigue que

$$u_t(x) = \int p_t(y-x) u_0(y)\, dy + \int_0^t ds \int p_{t-s}(y-x) u_s(y)^{1+\beta}\, dy. \tag{13}$$

Notando que

$$\zeta := \min_{x\in B_1} \min_{0\leq s\leq 1} P_x \left\{W_s \in B_1\right\} > 0,$$

se sigue de (13) que, para todo $t \in [0,1]$,

$$\min_{x\in B_1} u_t(x) \;\geq\; \zeta K(t_0) + \zeta \int_0^t \left(\min_{y\in B_1} u_s(y)\right)^{1+\beta} ds. \tag{14}$$

Debido a (12) podemos elegir t_0 tan grande que el tiempo de explosión de la ecuación

$$v(t) = \zeta K(t_0) + \zeta \int_0^t v(s)^{1+\beta}\, ds \tag{15}$$

sea menor que 1. Entonces tendremos $\min_{x\in B_1} u_1(x) \geq v(1) = \infty$, lo cual prueba la no globalidad de w_t. ■

Observación Mediante una segunda aplicación de la fórmula de Feynman-Kac, en [7] se demuestra que la subsolución h_t de (10) dada por

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} = \Delta_\alpha h_t + \gamma g_t^\beta h_t, \quad h_0 = \varphi,$$

donde g_t es la subsolución de (10) construida en la sección anterior, es tal que

$$\inf_{x\in B_1} h_t(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

aun si $d = \alpha/\beta$. De esta forma se prueba en [7] que (10) no tiene soluciones positivas globales no triviales si $d \leq \alpha/\beta$.

10. Explosión y estabilidad de una ecuación semilineal con el generador Γ

En la sección precedente se empleó la fórmula de Feynman-Kac (5) para demostrar que la subsolución g_t de (10) crece uniformemente a infinito en la bola unitaria. Un resultado crucial para la implementación de (5) son los lemas 6 y 7, los cuales proporcionan minorantes respectivamente del puente y del semigrupo asociados al proceso α-estable, y en las que son esenciales la autosimilaridad y la simetría del proceso α-estable.

En esta última sección describiremos brevemente otra aplicación de la representación de Feynman-Kac, esta vez para investigar exponentes críticos de la ecuación semilineal

$$\frac{\partial w_t}{\partial t} = \Gamma w_t + \nu t^\sigma w_t^{1+\beta}, \quad w_0(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

donde ν, σ, β son constantes positivas, φ es una función no negativa y Γ es el operador pseudodiferencial

$$\Gamma f(x) = \int_0^\infty (f(x+y) - f(x))\, \frac{e^{-y}}{y}\, dy,$$

i.e. Γ es el generador infinitesimal del proceso gamma estándar, al cual denotaremos por $X^\Gamma \equiv \{X_t^\Gamma,\ t \geq 0\}$.

Recordemos que el proceso gamma pertenece a una familia especial de procesos de Lévy llamados subordinadores (ver [6] o [32]), los cuales son procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ no gaussianos puros, cuya medida de Lévy κ es tal que $\kappa((-\infty,0)) = 0$ y $\int_{(0,1]} x\,\kappa(dx) < \infty$. En particular las funciones muestrales $t \mapsto X_t^\Gamma(\omega)$ son casi seguramente monótonas crecientes, y las probabilidades de transición $\mathbb{P}[X_t^\Gamma \in dy | X_s^\Gamma = x]$ tienen soporte en $[x,\infty)$ para todo $x \geq 0$.

En contraste con los procesos α-estables, los subordinadores no son en general autosimilares o simétricos, ni sus comportamientos dependen de la dimensión espacial. Estas circunstancias dificultan llevar a cabo el método empleado en la sección precedente, el cual depende sustancialmente de la simetría y autosimilaridad de las distribuciones gaussianas y estables. A nuestro favor tenemos que, en el caso especial del proceso gamma, se conocen explícitamente sus densidades de transición y además se sabe que sus puentes tienen distribución beta. Junto con las cotas de [29] para las medianas de distribuciones beta, esto permite obtener minorantes para el puente del subordinador gamma y así derivar condiciones de explosión de (16) de forma análoga a como se hizo en la sección 9 para el caso del generador α-estable; ver [22].

Como ejemplo de los resultados que se derivan de este enfoque, supongamos que la condición inicial $\varphi \geq 0$ en (16) es medible y acotada. Entonces toda condición inicial que cumpla

$$c_1 x^{-a_1} \leq \varphi(x), \quad x > x_0$$

para algunas constantes positivas x_0, c_1, a_1, con $a_1\beta < 1+\sigma$, produce una solución no global de (16). Por otro lado, si φ cumple

$$\varphi(x) \leq c_2 x^{-a_2}, \quad x > x_0,$$

donde x_0, c_2, a_2 son números positivos y $a_2\beta > 1+\sigma$, entonces la solución w_t de (16) es global y cumple

$$0 \leq w_t(x) \leq C t^{-a_2}, \quad x \geq 0,$$

para alguna constante $C > 0$. En el caso particular de $\sigma = 0$ con $\varphi(x) \sim_{x\to\infty} cx^{-a}$ para algunas constantes $c > 0$ y $a > 0$, resulta explosión en tiempo finito de w_t siempre que $a\beta < 1$, mientras que si $a\beta > 1$, (16) admite soluciones globales. Por tanto, si $\sigma = 0$ y para algún $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{x\to\infty} x^{-\varepsilon+1/\beta}\varphi(x) > 0,$$

la solución de (16) explota en tiempo finito, mientras que si

$$\liminf_{x\to\infty} x^{\varepsilon+1/\beta}\varphi(x) = 0,$$

la solución de (16) es global. Estos y otros resultados concernientes a la explosión de (16) se prueban en [22].

Referencias

[1] Applebaum, David. Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 93. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Adv. in Math.* **30** (1978), no. 1, 33–76.

[3] Bandle, Catherine and Brunner, Hermann. Blowup in diffusion equations: A Survey. *J. Comput. Appl. Math.* **97** (1998), no. 1-2, 3–22.

[4] Bañuelos, R. Ultracontractivity for Dirichlet Laplacians. *J. Funct. Analysis* Vol. 100 (1991), 181-206.

[5] Bebernes, J. and Eberly, D. *Mathematical problems from combustion theory*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] Bertoin, J. Subordinators: examples and applications, in: Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1997), in: *Lecture Notes in Math.* vol. 1717, Springer, Berlin, 1999, pp. 191.

[7] Birkner, M., López-Mimbela, J. A. and Walkonbinger, A. Blow-up of semilinear PDE's at the critical dimension. A probabilistic approach. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 2431-2442.

[8] Birkner, M., López-Mimbela, J. A. and Walkonbinger, A. Comparison results and steady states for the Fujita equation with fractional Laplacian. *Annales de L'Institute Henri Poincare - Analyse non Linéare* **22** (2005), 83-97.

[9] Chow Y.S. and Teicher, H. *Probability Theory*. Springer, 1988.

[10] Chung, Kai Lai and Zhao, Zhong Xin. From Brownian motion to Schrödinger's equation. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **312**. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[11] Davies, E. B., Simon, B. Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. *J. Funct. Analisys* Vol. 59 (1984), 335-395.

[12] Deng, Keng and Levine, Howard A. The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel. *J. Math. Anal. Appl.* **243** (2000), no. 1, 85–126.

[13] Ethier, S. and Kurtz, T. G. *Markov processes characterization and convergence*. John Wiley & Sons, 1986.

[14] Fujita, H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **13** (1966), 109-124.

[15] Hayakawa, K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 503–505.

[16] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S. Branching Markov processes I, II, III. *J. Math. Kyoto Univ.* Vol. 8 (1968), 233-278 and Vol. 9 (1969), 95-160.

[17] Kobayashi, K., Sirao, T. and Tanaka, H. On the growing up problem for semilinear heat equations. *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), no. 3, 407–424.

[18] Kolkovska, E.T., López-Mimbela, J.A. and Pérez, A. Blowup and life span bounds of the Fujita equation with a time-dependent generator. 2007 (enviado).

[19] Levine, H. The role of critical exponents in blow-up theorems. *SIAM Rev.* Vol. 32 (1990), 262-288.

[20] López-Mimbela, J. A. A probabilistic approach to existence of global solutions of a system of nonlinear differential equations. *Aportaciones Mat. Notas Investigación* **12**, 147–155, Soc. Mat. Mexicana, México, 1996.

[21] López-Mimbela J.A. and Pérez Pérez. A. Finite time blow up and stability of a semilinear equation with a time dependent Lévy generator. *Stoch. Models* 22 (2006), 735-752.

[22] López-Mimbela, J. A. and Privault, N. Blow-up and stability of semilinear PDEs with Gamma generators. *J. Math. Anal. Appl.* **307** (2005), 181-205.

[23] López-Mimbela, J. A. and Privault, N. Critical exponents for semilinear PDEs with bounded potentials, preprint (2005).

[24] López-Mimbela, J.A. and Torres-Rodríguez, A. Intrinsic ultracontractivity and blowup of a semilinear Dirichlet boundary value problem. *Aportaciones Mat. Notas Investigación* Vol. 14 (1998), 283-290.

[25] López-Mimbela, J. A. and Wakolbinger, A. Length of Galton-Watson trees and Bblow-up of semilinear systems. *J. Appl. Probab.* **35** (1998), 802-811.

[26] López-Mimbela, J. A. and Wakolbinger, A. A probabilistic proof of non-explosion of a non-linear PDE system. *J. Appl. Probab.* **37** (2000), no. 3, 635–641.

[27] Nagasawa, M. and Sirao, T. Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a non-linear integral equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 301-310.

[28] Pao, C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, New York, 1992.

[29] Payton, M.E., Young, L.J. and Young J.H. Bounds for the difference between median and mean of beta and negative binomial distributions. *Metrika* **36** (1989), 347354.

[30] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York 1983.

[31] Samarskii, Alexander A., Galaktionov, Victor A., Kurdyumov, Sergei P. and Mikhailov, Alexander P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, The Gruyter Expositions in Mathematics, 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[32] Sato, Ken-iti. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, 1999.

[33] Stroock, D. W. Diffusion processes associated with Lévy generators. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **32** (1975), 209-244.

[34] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., *Multidimensional Diffusion Processes,* Springer-Verlag, New York, 1979.

[35] Sugitani, S. On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations. *Osaka J. Math.* **12** (1975), 45-51.

[36] Sznitman, Alain-Sol. Brownian motion, obstacles and random media. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[37] Torres Rodríguez, Alejandro. Algunas aplicaciones de los procesos de Markov al estudio de la explosión de soluciones de una clase de ecuaciones semilineales. Tesis de Maestría, Universidad de Guanajuato, diciembre de 1997.

[38] Velázquez, J. J. L. Blow-up for semilinear parabolic equations. In "Recent advances in partial differential equation." M. A. Herrero and E. Zuazua (Eds.) Wiley, New York 1994.

[39] Weissler, F. B. Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat Eequation. *Israel J. Math.* **38** (1981), 29-40.