

Sistema depredador presa con respuesta funcional Crowley-Martin

Kathy Erika Peralta Parra *

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

Gamaliel Blé González **

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

En este trabajo se calculan los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales tipo Gause con una respuesta funcional del tipo Crowley-Martin.

In this paper

Palabras clave: Depredador presa, respuesta funcional Crowley-Martin, bifurcación

Keywords: Prey depredator, functional response Crowley-Martin, bifurcation.

1. Introducción

Una de las características más notables de la vida en nuestro planeta es la gran diversidad de aspectos y hábitos que tienen los organismos que la componen.

En la tierra existe un conjunto de factores selectivos que han influido enormemente en la evolución de los seres que la habitan. Por esta razón ninguna especie puede vivir aislada de las otras, ni de los individuos de su misma especie. Lo anterior da origen a un sinnúmero de relaciones entre los distintos organismos que coexisten en unidades integradas y las cuales reciben el nombre de comunidades bióticas.

La selección natural (lucha en donde sobrevive el que tiene características más apropiadas para las circunstancias) ha conducido al establecimiento de grupos de especies que coexisten con un mínimo de competencia y explotándose al mismo tiempo unos a otros para sobrevivir. El resultado de estas luchas entre organismos ha originado las relaciones depredador-presa. La depredación comprende el uso de una especie llamada presa como alimento, por parte de otra llamada depredador.

De este modo una de las tareas de la Ecología es el desarrollo de una teoría que permita comprender la organización de las comunidades. Lo que significa entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacción, o bien conocer la relación entre los mecanismos de interacción de las especies y el comportamiento en el tamaño de población a lo largo del tiempo. Es por eso que a través de numerosos estudios y observaciones, los ecólogos han ido afinando sus teorías para explicarse el fenómeno de la biodiversidad.

Para estudiar estos comportamientos la ecología se ha apoyado del uso de modelos matemáticos que permiten simular la evolución en el tamaño de una población y la

***Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** marioarley83@hotmail.com

****Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** gble@ujat.mx

interacción con otras, a lo largo del tiempo, variando la tasa de reproducción, de captura y de mortalidad, entre otras.

Uno de los modelos que ha sido la base para las propuestas actuales en sistemas depredador presa es el modelo de Lotka Volterra.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon_1 x - \alpha xy, \\ \dot{y} &= -\varepsilon_2 y + \beta xy.\end{aligned}\tag{1}$$

Este sistema modela el comportamiento de la población presa x ante la presencia de una población depredadora y . Suponiendo que la población presa en ausencia de la población depredadora crece exponencialmente y que la población depredadora en ausencia de la presa decrece exponencialmente. En general un modelo depredador-presa tipo Lotka-Volterra con densidad de la presa x y densidad del depredador y , es cualquier sistema cuadrático de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 = F(x, y), \\ \dot{y} &= b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 = G(x, y).\end{aligned}$$

Estos modelos han sido estudiados en las últimas décadas, gracias a la riqueza que se tiene desde el punto de vista dinámico y porque constituyen una base para la modelación del crecimiento de poblaciones.

La debilidad de esta familia es que no se considera una cota en el consumo que hace el depredador de la presa, ni el control del beneficio que recibe el depredador al consumirla. Quien introduce como elemento importante de los modelos matemáticos, la cantidad de presa devorada por el depredador por unidad de tiempo, es Holling, a esta cantidad le da el nombre de respuesta funcional y da lugar al nacimiento de una nueva generación de modelos (tipo Gause), los cuales tienen la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r(x) - f(x)y, \\ \dot{y} &= (g(x) - \mu)y.\end{aligned}\tag{2}$$

En este sistema (2), $r(x)$ representa el comportamiento de la presa en ausencia del depredador. A la función $g(x)$ se le llama *respuesta numérica* y mide el beneficio que obtiene el depredador de su presa, μ es la tasa de mortalidad del depredador y la función $f(x)$, es la *respuesta funcional*, representa la cantidad de presas que devora cada depredador por unidad de tiempo.

En este trabajo se presenta el análisis de la dinámica local de un modelo depredador presa que considera una respuesta funcional tipo Crowley-Martin y se hace un análisis numérico de las bifurcaciones que se observan al mover algunos parámetros del modelo.

2. Explicación del sistema de ecuaciones asociado al modelo

Si en el sistema depredador presa (2) se considera $r(x)$ de tipo logístico y una respuesta funcional,

$$f(x, z) = \frac{axy}{(1+bx)(1+cy)}.$$

tipo Crowley-Martin, la cual supone que los depredadores tienen un límite de saciedad y que hay interferencia entre ellos, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ay}{(1+bx)(1+cy)} \right) x, \\ \dot{y} &= \left(\frac{\gamma ax}{(1+bx)(1+cy)} - D \right) y. \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí se tiene que:

x es la población presa.

y es la población depredadora.

α es la tasa intrínseca de crecimiento de la población x .

k es la capacidad del medio, es decir, es el límite hasta donde puede crecer la población x .

a y b son parámetros que miden los efectos de la tasa de captura y el tiempo de manejo respectivamente sobre la tasa de ingestión.

c es una medida del efecto de la interferencia entre los depredadores sobre la tasa de captura

D es la tasa de mortalidad de z .

γ mide el beneficio que recibe el depredador al comerse a su presa x .

En el sistema (3) el número de parámetros puede disminuirse al realizar las siguientes sustituciones;

$$bx = X, \quad cy = Z, \quad bk = K, \quad \frac{a}{c} = \beta, \quad \frac{a\gamma}{b} = \delta.$$

De este modo obtenemos el sistema (4):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left(\alpha \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{\beta Z}{(1+X)(1+Z)} \right) X, \\ \dot{Z} &= \left(\frac{\delta X}{(1+X)(1+Z)} - D \right) Z. \end{aligned} \quad (4)$$

De aquí en adelante vamos a analizar la dinámica del sistema (4).

3. Puntos de Equilibrio

Para comprender la dinámica del sistema calcularemos los puntos de equilibrio del sistema 4. Para ello hacemos $\dot{X} = 0$ y $\dot{Z} = 0$. Las soluciones triviales del sistema son $(0, 0)$ y $(K, 0)$. Sin embargo, es posible detectar otras soluciones, haciendo un análisis del comportamiento de las isoclinas del sistema.

3.1 Determinación de las isoclinas para la primera ecuación del sistema

Para determinar la existencia de otro punto de equilibrio analizaremos las intersecciones de las curvas definidas por (5) y (6).

$$Z = \frac{\alpha(1 - \frac{X}{K})(1+X)}{\beta - \alpha(1 - \frac{X}{K})(1+X)} \quad (5)$$

y

$$Z = \left(\frac{\delta X}{(1+X)D} - 1 \right). \quad (6)$$

Para hacer el análisis de la primera ecuación, observamos que Z de (5) puede escribirse como una composición de dos funciones $Z = F(G(X))$, donde

$$F(Y) = \frac{Y}{\beta - Y}, \quad (7)$$

y

$$G(X) = \alpha(1 - \frac{X}{K})(1+X). \quad (8)$$

Observemos que:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} F(Y) = -1 \text{ y } \lim_{Y \rightarrow \beta^-} F(Y) = \infty.$$

Por lo que las asíntotas de $F(Y)$ están en $Z = -1$ y $Y = \beta$. Por otro lado si,

$$X_0 = \frac{K-1}{2}.$$

Como

$$G(0) = \alpha,$$

$$\dot{G}(X_0) = 0,$$

$$\ddot{G}(X_0) = \frac{-2\alpha}{K} < 0,$$

G tiene un máximo en X_0 . El arreglo de curvas determinadas por las funciones en (7) y (8) se muestran en las figuras 1 y 2, respectivamente.

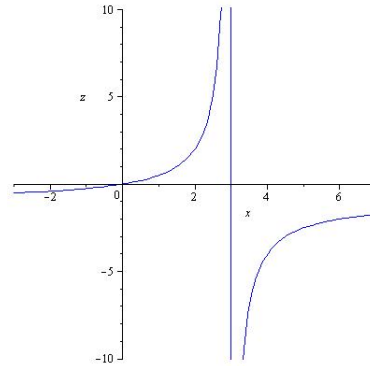


Figura 1. Gráfica de $F(Y)$.

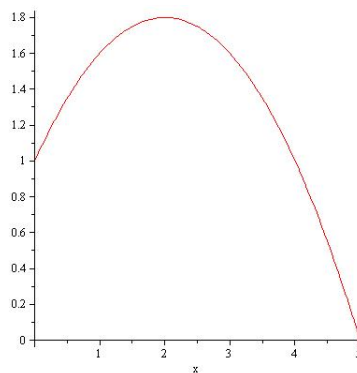


Figura 2. Gráfica de $G(X)$.

Por comodidad llamaremos Y_{max} al valor crítico de G , esto es,

$$Y_{max} = G\left(\frac{K-1}{2}\right) = \frac{\alpha(K+1)^2}{4K}.$$

Para comprender el comportamiento de la composición de estas dos funciones, hacemos la comparación entre Y_{max} y la asíntota que pasa por β de la función (7) para esto dividiremos el análisis en tres casos.

Caso 1 Si $Y_{max} < \beta$, entonces la gráfica que resulta de $F \circ G$ se muestra en la figura 3.

Caso 2 Si $Y_{max} = \beta$ entonces la gráfica que resulta de $F \circ G$ es la que se muestra en la figura 4.

Caso 3 Cuando $Y_{max} > \beta$ se tienen dos subcasos.

- 3a** Si $\alpha > \beta$ la gráfica de la composición tiene un arreglo como se muestra en la figura 5.
- 3b** Si $\alpha < \beta$ la gráfica de la composición tiene un arreglo como se muestra en la figura 6.

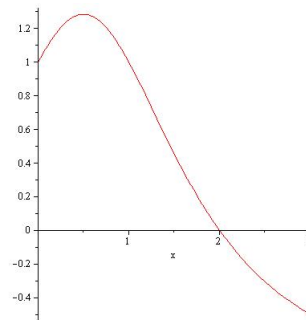


Figura 3. Caso 1: $Y_{max} < \beta$.

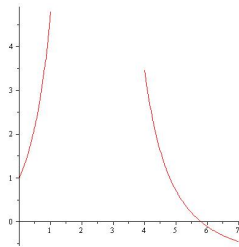


Figura 4. Caso 2: $Y_{max} = \beta$.

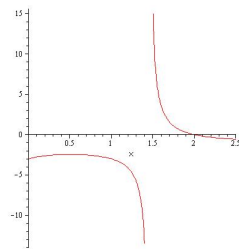


Figura 5. Caso 3a: $\alpha > \beta$.

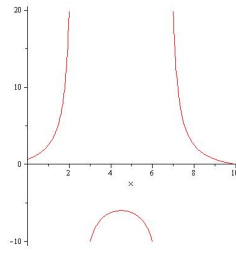


Figura 6. Caso 3b: $\alpha < \beta$.

3.2 Determinación de las isoclinas de la segunda ecuación del sistema

Para determinar las isoclinas, observemos que en la ecuación (6), $Z = 0$ si,

$$\frac{\delta X}{(1+X)D} = 1 \Rightarrow \frac{1+X}{X} = \frac{\delta}{D} \Rightarrow X = \frac{D}{\delta - D}.$$

Por otro lado, como;

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta X}{(1+X)D} - 1 \right) = \frac{\delta - D}{D},$$

tenemos que la asíntota horizontal pasa por el punto $\frac{\delta - D}{D}$ y la asíntota vertical está en $X = -1$. De aquí tenemos que si $\delta - D < 0$ las ramas de la hipérbola no entran en el primer cuadrante y por lo tanto no estamos interesados en el caso $\delta < D$.

Por otro lado la función (6) es monótona creciente ya que,

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\delta}{D} \left(\frac{1}{X+1} \right)^2 > 0.$$

Así cuando $\delta > D$ una rama de la hipérbola entra al primer cuadrante como se muestra en la figura 7.

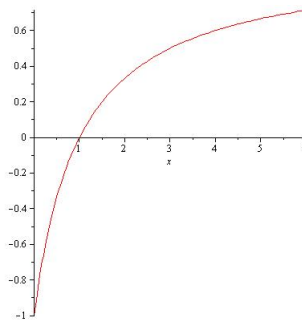


Figura 7. Curva de interés, cuando $\delta > D$

Del análisis de las configuraciones de curvas que se obtienen de las ecuaciones (5) y (6) se concluye que hay al menos un punto de equilibrio en el cuadrante positivo, cuando $\frac{D}{\delta-D} < K$ y $\delta - D > 0$.

En resumen tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Si $\frac{D}{\delta-D} < K$ y $\delta - D > 0$, entonces el sistema (4) tiene al menos un punto de equilibrio no trivial en el cuadrante positivo.

En general podemos tener hasta cinco puntos de equilibrio de los cuales dos son triviales.

4. Cálculo numérico de puntos de equilibrio no triviales

En esta sección mostraremos numéricamente que existen valores de los parámetros donde es posible obtener más de un punto de equilibrio no trivial. Para los cálculos nos apoyaremos de MAPLE.

Para comprender mejor el sistema (4) y hacer su análisis fijaremos 5 parámetros y variaremos uno de ellos. En las siguientes secciones daremos los resultados obtenidos en MAPLE al hacer estas variaciones y en particular mostraremos los parámetros donde existen cambios en el número de puntos de equilibrio.

4.1 Variación de los parámetros δ y D

En esta sección los parámetros que vamos a variar son δ y D . Al variar cualquiera de estos parámetros vamos a calcular numéricamente los diferentes puntos de equilibrio.

4.1.1 Variación del parámetro δ .

Fijemos el valor de los siguientes parámetros.

$\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y dejemos libre el parámetro δ . Al variar los valores de δ y hacer los cálculos con MAPLE se obtiene lo siguiente:

- Si $\delta \in (0, 0.8)$ entonces no hay puntos de equilibrio más que los triviales y si $\delta \in (0.8, 4.49)$ existe un punto de equilibrio no trivial.
- Si $\delta \cong 4.49624$ existe una intersección donde las curvas son tangentes por lo que se tienen dos puntos de equilibrio no triviales pero si $\delta \in (4.49624, 7.55659)$ existen tres puntos de equilibrio no triviales.
- Si $\delta \cong 7.55659$ nuevamente existe una intersección donde las curvas son tangentes y hay dos puntos de equilibrio no triviales, si $\delta > 7.55659$ entonces se tiene un solo punto de equilibrio no trivial.

Observemos que el parámetro δ mide la eficiencia total del aprovechamiento de la presa, en términos de la producción de biomasa de la presa α , la tasa de conversión γ y la saciación del depredador b . Así que cuando δ crece pasamos de tres a un punto de equilibrio.

4.1.2 Variación del parámetro D .

Ahora fijamos el valor de los siguientes parámetros:
 $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 0.9$. Al variar el parámetro D y realizar los cálculos con MAPLE se obtiene que:

- Si $D \in (0, 0.13233)$ solo hay un punto de equilibrio no trivial.
 Si $D \cong 0.13233$ existe una intersección donde las curvas son tangentes y se tienen dos puntos de equilibrio como los que se muestran en la figura 11. Pero si $D \in (0.13233, 0.224079587)$ se tienen tres puntos de equilibrio no triviales.
- Si $D \cong 0.224079587$ se tiene, nuevamente una intersección donde las curvas son tangentes y se tienen dos puntos de equilibrio no triviales como se muestra en la la figura 9. Si $D \in (0.224079587, 1.61)$ nuevamente hay un punto de equilibrio no trivial.

Fijando los parámetros $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y variando δ ó bien si fijamos $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 0.9$ y variamos D , las configuraciones que se tienen corresponden al **caso 1** con todos sus posibles puntos de equilibrio las figuras se muestran en: 8, 9, 10, 11 y 12.

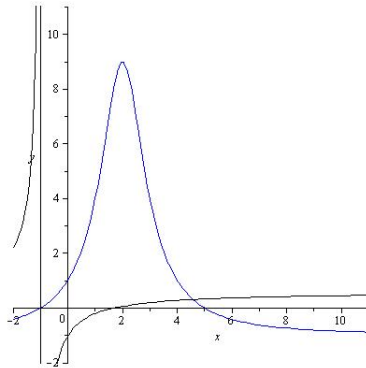


Figura 8. Caso 1, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y $\delta = 0.8$.

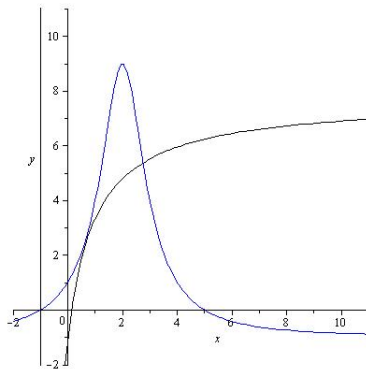


Figura 9. Caso 1, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$, $\delta = 4.49624$.

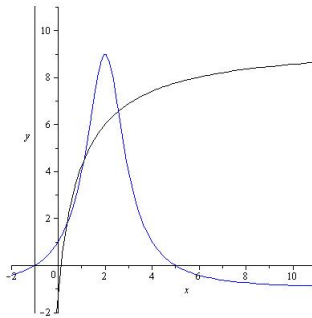


Figura 10. Caso 1, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y $\delta = 5$

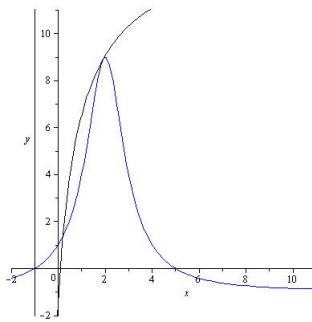


Figura 11. Caso 1, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y $\delta = 7.55659$.

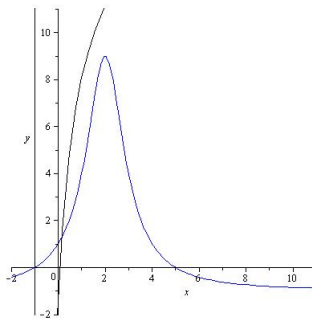


Figura 12. Caso 1, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 0.9$ y $\delta > 7.55659$.

Para obtener las configuraciones, de los otros casos es necesario elegir los valores de β , K , D y α de tal manera que se cumplan las condiciones citadas en la sección 3.1. Como las condiciones no dependen de δ , ni del parámetro D , al mover alguno de estos nos mantenemos en la configuración que se eligió.

En las diferentes configuraciones correspondientes al **caso 2** tomamos $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y variamos D obteniendo los arreglos de curvas mostrados en las figuras 13, 14 y 15. De igual manera podemos fijar $\beta = 1.8$, $K = 5$, $D = 0.5$, $\alpha = 1$ y

variar δ obteniendo tres arreglos semejantes a los anteriores.

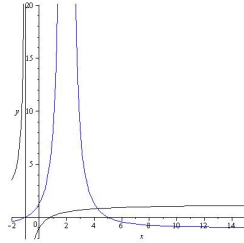


Figura 13. Caso 2, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D = 0.8889$

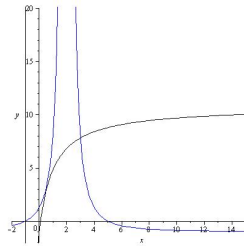


Figura 14. Caso 2, con $\beta = 1.8$, $kK = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D = 0.1667$

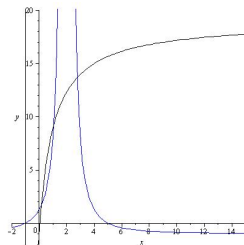


Figura 15. Caso 2, con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D < 0.6667$.

Para el **caso 3a)** fijamos $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 3$ y variamos D . En este caso se tiene un punto de equilibrio no trivial independientemente del valor de δ o D . Dicha configuración se muestra en la figura 16:

Por último para el **caso 3b)** fijamos $\beta = 1.8$, $K = 8$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y variamos D . Ó bien fijamos $\beta = 1.8$, $K = 8$, $D = 0.5$, $\alpha = 1$ y variamos δ . Las configuraciones de curvas que se obtienen las podemos observar en las figuras 17, 18 y 19.

Notese que en el **caso 2** y el **Caso 3b** a diferencia del **Caso 1** una vez que tenemos tres puntos de equilibrio ya no disminuyen.

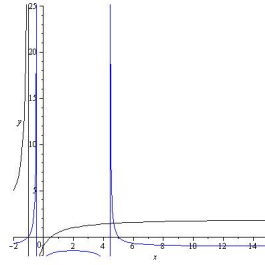


Figura 16. Caso 3a con $\beta = 1.8$, $K = 5$, $\delta = 2$, $\alpha = 3$ y $D = 0.7$.

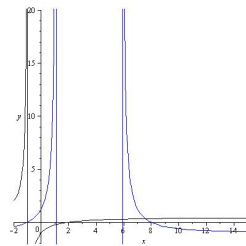


Figura 17. Una intersección en el caso 3b donde $\beta = 1.8$, $K = 8$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D = 0.8126$.

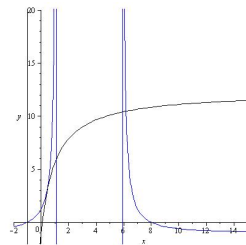


Figura 18. Dos intersecciones en el Caso 3b con $\beta = 1.8$, $K = 8$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D = 0.1493$.

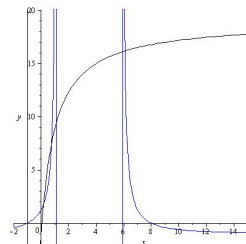


Figura 19. Tres intersecciones en el caso 3b siendo $\beta = 1.8$, $K = 8$, $\delta = 2$, $\alpha = 1$ y $D = 0.13$.

5. Dinámica local de puntos de equilibrio

Para comprender la dinámica local de los puntos de equilibrio, nos apoyaremos en el teorema de Hartman-Grobman por lo que es importante calcular la matriz

Jacobiana del sistema (4). Denotemos por

$$A_{CM}(X, Z) = \begin{pmatrix} \alpha \frac{(K-2X)}{K} - \frac{\beta Z}{(1+X)^2(1+Z)} & \frac{-\beta X}{(1+X)(1+Z)^2} \\ \frac{\delta Z}{(1+X)^2(1+Z)} & \frac{\delta X}{(1+X)(1+Z)^2} - D \end{pmatrix}.$$

A la matriz jacobiana del sistema (4).

5.1 Puntos de equilibrio cuando $\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} < \beta$

Para tener el **caso 1** los parámetros fijos que utilizamos son: $\alpha = 0.9$, $K = 5$, $\beta = 1.8$ y $\delta = 2$ mientras que D varia.

Para ver la dinámica local cuando hay más de un punto de equilibrio no trivial mostraremos un acercamiento del retrato fase en cada punto de equilibrio, y llamaremos p_1 , p_2 y p_3 según la cercanía con el eje $(0,0)$ es decir el más cercano al $(0,0)$ será p_1 .

▪ *Análisis del caso 1) con un solo punto no trivial*

Con $D = 1.25$.

El único punto no trivial que tenemos es:

1. $p_1 = (4.5723, 0.31287)$.

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} -0.7598 & -0.8569 \\ 0.0154 & -0.2979 \end{pmatrix},$$

los valores propios en este caso son $\lambda_1 = -0.7294$ y $\lambda_2 = -0.3284$, por lo tanto el punto **(4.5723,0.3129) es un nodo estable**.

Recordemos que los puntos de equilibrio triviales $(0,0)$ y $(k,0)$ son puntos silla, el retrato fase para este caso se muestra en la figura 20.

▪ *Análisis del caso 1) con dos puntos no triviales*

Tomemos $D = 0.2224$ y denotemos a los puntos de equilibrio por p_1 y p_2

1. $p_1 = (0.6397, 2.5084)$ y

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.1911 & -0.0571 \\ 0.5311 & -0.1590 \end{pmatrix},$$

los valores propios de $A_{CM}(p_1)$ son $\lambda_1 = 0.0331$ y $\lambda_2 = 0.0011$. Como los valores propios son casi cero y estamos en el caso donde existe una tangencia de curvas tenemos que p_1 **es un punto degenerado**.

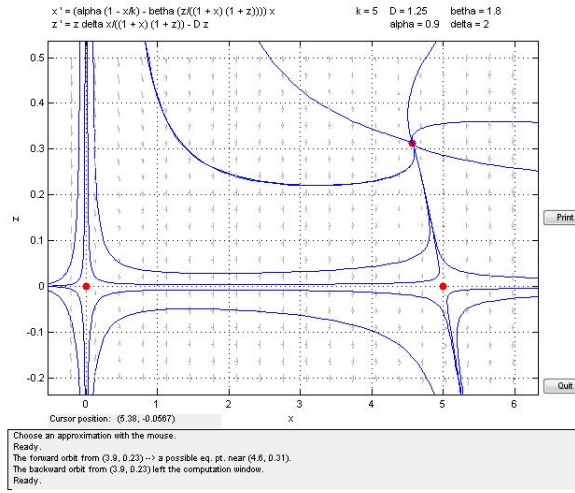


Figura 20. Dinámica de $p_1 = (4.5723, 0.3129)$

2. $p_2 = (2.7216, 5.5762)$ y

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} -0.1899 & -0.0304 \\ 0.1224 & -0.1885 \end{pmatrix},$$

los valores propios de $A_{CM}(p_2)$ son $\lambda_1 = -0.1893 + 0.0610i$ y $\lambda_2 = -0.1893 - 0.0610i$, por lo que p_2 es un foco estable.

El retrato fase correspondiente lo podemos observar en la figura 21.

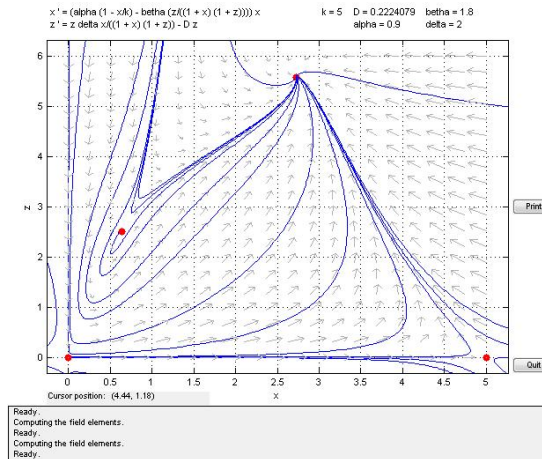


Figura 21. Dinámica de $p_1 = (0.6397, 2.5084)$, $p_2 = (2.7216, 5.5762)$ y los puntos triviales $(0, 0)$ y $(5, 0)$

▪ *Análisis del caso 1) con tres puntos no triviales*

Para tener tres puntos de equilibrio tomemos $D = 0.15$ y denotemos los puntos de equilibrio por p_1 , p_2 y p_3 .

1. $p_1 = (0.2192, 1.3974)$

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.1153 & 0.0563 \\ 0.7842 & 0.0874 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.0139 + 0.1841i$ y $\lambda_2 = 0.0139 - 0.1841i$. De aquí tenemos que p_1 es un **foco inestable**.

2. $p_2 = (1.5, 7)$ y

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} 0.108 & -0.0169 \\ 0.28 & -0.1313 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.0863$ y $\lambda_2 = -0.1095$ por lo tanto p_2 es un **punto silla**.

3. Por último $p_3 = (2.2808, 8.2693)$ y

$$A_{CM}(p_3) = \begin{pmatrix} -0.0703 & -0.0146 \\ 0.1658 & -0.1338 \end{pmatrix},$$

siendo $\lambda_1 = -0.1020 + 0.0375i$ y $\lambda_2 = -0.1020 - 0.0375i$ sus valores propios, por lo tanto p_3 es un **foco estable**.

La dinámica general la podemos observar en la figura 22.

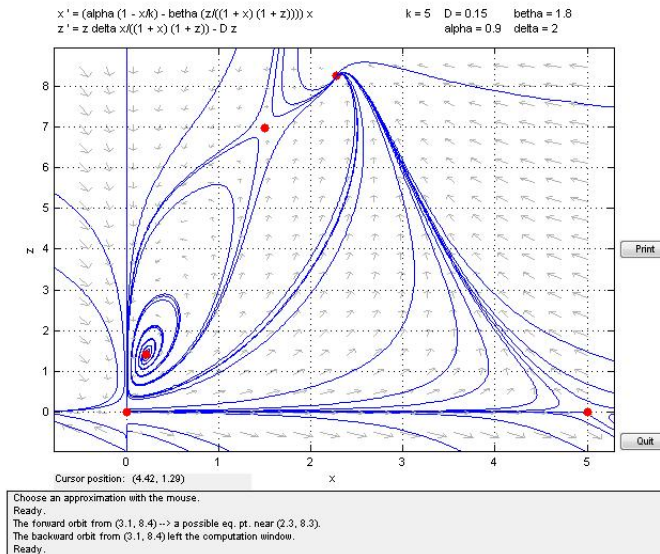


Figura 22. Dinámica de $p_1 = (0.2192, 1.3974)$, $p_2 = (1.5, 7)$ y $p_3 = (2.2808, 8.2693)$.

▪ *Análisis del caso 1) con dos puntos de equilibrio*

Recordemos que en el **caso 1** existen dos valores del parámetro D donde se obtienen dos puntos de equilibrio no triviales (vease la sección 2.3.1).

Tomemos $D = 0,13233$ y denotemos por p_1 y p_2 los puntos de equilibrio.

1. $p_1 = (0.1815, 1.3219)$ y la matriz jacobiana es

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.1006 & -0.0513 \\ 3.0817 & -0.2847 \end{pmatrix},$$

tiene como valores propios a:

$\lambda_1 = -0.0920 + 0.3478i$ y $\lambda_2 = -0.0920 - 0.3478i$, por lo cual p_1 es un **foco estable**.

2. $p_2 = (1.9082, 8.9165)$ su respectiva matriz es:

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} 0.0217 & -0.0120 \\ 0.8033 & -0.4496 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.0002$ y $\lambda_2 = -0.4281$, además estamos en el caso donde existe una tangencia de curvas por lo tanto p_2 es un **punto degenerado**.

La dinámica general para este caso la podemos observar en la figura 23.

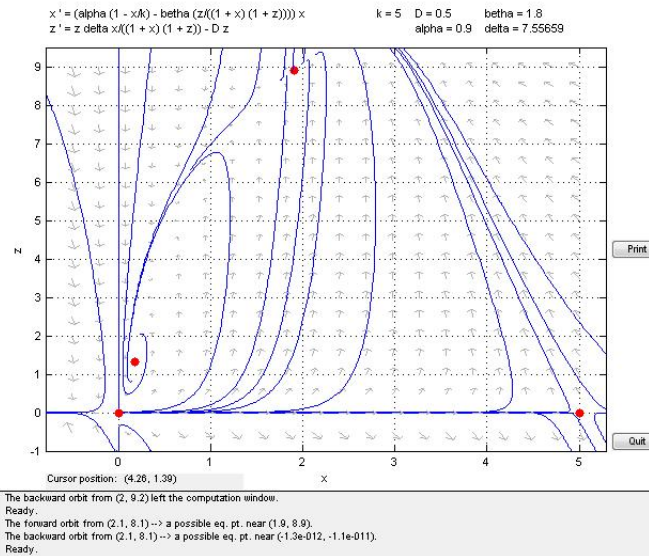


Figura 23. Dinámica del caso 1 con dos puntos de equilibrio $p_1 = (0.1815, 1.3219)$ y $p_2 = (1.9082, 8.9165)$

- *Análisis del caso 1) con un punto de equilibrio como en la configuración de la figura 12.*

Denotamos por p_1 el punto de equilibrio

$p_1 = (0.16741, 1.2944)$ y

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.0946 & -0.0490 \\ 3.3117 & -0.2821 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.0937 + 0.3562i$ y $\lambda_2 = -0.0937 - 0.3562i$. La dinámica de $p_1 = (0.1674, 1.2944)$ la podemos observar en la figura 24.

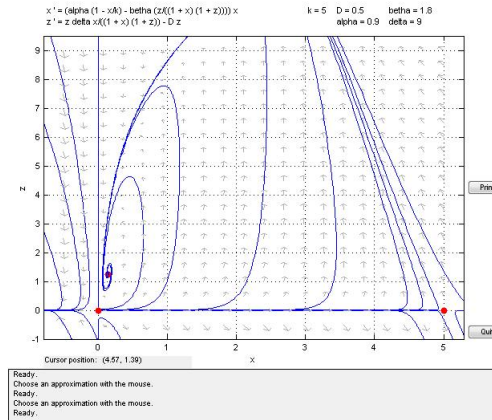


Figura 24. Dinámica de $p_1 = (0.1674, 1.2944)$

Ya que $\beta = \frac{a}{c}$, la condición

$$\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} < \beta$$

es equivalente a

$$\frac{\alpha(bk+1)^2}{4bk} < \frac{a}{c}. \tag{9}$$

Por otro lado,

$$bk < bk+1 < (bk+1)^2.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{4} < \frac{(bk+1)^2}{4bk}.$$

Por lo tanto, para que sea válida la desigualdad (9), α (la tasa intrínseca de la población X) debe ser pequeña comparada con $\frac{a}{c}$ que es la tasa de captura sobre el efecto de la interferencia.

5.2 Puntos de equilibrio cuando $\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} = \beta$

En el caso 2 los parámetros fijos que utilizamos son: $\alpha = 1$, $K = 5$, $\beta = 1.8$ y $\delta = 2$ mientras que D varia.

▪ *Análisis del caso 2) con un sólo punto no trivial*

En este caso el valor del parámetro $D = 0.8889$. Con este valor obtenemos sólo un punto de equilibrio no trivial p_1 .

$p_1 = (4.2242, 0.8193)$, su matriz jacobiana asociada está dada por:

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} -0.7194 & -0.4397 \\ 0.0330 & -0.4003 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.6643$ y $\lambda_2 = -0.4553$, por lo tanto podemos decir que p_1 es un nodo estable.

La dinámica de $p_1 = (4.2242, 0.8193)$ con los puntos de equilibrio triviales la podemos observar en la figura 25

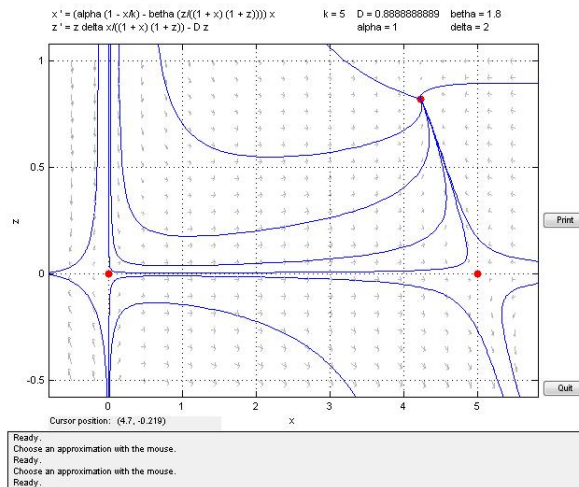


Figura 25. Dinámica completa del caso 2.

▪ *Análisis del caso 2) con dos puntos de equilibrio no triviales*

Sea $D = 0.16667$ donde los puntos de equilibrio p_1 y p_2 con su respectiva matriz y valores propios son:

1. $p_1 = (0.5001, 3.0005)$, con

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.2000 & -0.0375 \\ 0.6666 & -0.1250 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.07512$ y $\lambda_2 = -0.0001$. Como los dos valores propios son casi cero y estamos en el caso donde existe una tangencia de curvas p_1 es un **punto degenerado**.

$$2. p_2 = (3, 8),$$

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.0167 \\ 0.1111 & -0.1148 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.2866$ y $\lambda_2 = -0.1615$. Por lo que p_2 es un **nodo estable**.

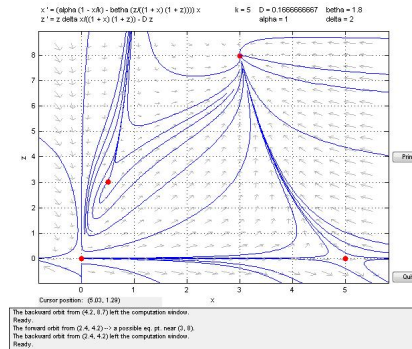


Figura 26. Dinámica completa del caso 2

▪ *Análisis del caso 2) con tres puntos no triviales*

Para esta situación tomamos $D = 0.10$ y denotamos los puntos de equilibrio por p_1 , p_2 y p_3 .

$$1. p_1 = (0.1552, 1.6345),$$

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.0974 & -0.0342 \\ 0.93545 & -0.0620 \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1 = 0.0177 + 0.16001i$ y $\lambda_2 = 0.0177 - 0.1600i$. Es decir p_1 es un **foco inestable**.

$$2. p_2 = (1.0661, 9.3201)$$

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} 0.19278 & -0.0087 \\ 0.4231 & -0.0903 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.1791$ y $\lambda_2 = -0.0766$. Por lo tanto p_2 es un **punto silla**.

$$3. \text{ Por último } p_3 = (2.7821, 13.712),$$

$$A_{CM}(p_3) = \begin{pmatrix} -0.2301 & -0.0061 \\ 0.1301 & -0.0932 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.2240$ y $\lambda_2 = -0.0993$. Por lo tanto, p_3 es un **nodo estable**.

La dinámica general la podemos observar en la figura 27.

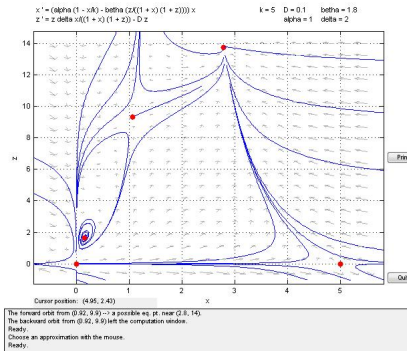


Figura 27. Dinámica de los tres puntos no triviales del caso 2.

Ya que $\beta = \frac{a}{c}$, la condición

$$\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} = \beta$$

es equivalente a

$$\frac{\alpha(bk+1)^2}{4bk} = \frac{a}{c}. \quad (10)$$

Por lo tanto, para que sea válida la igualdad (10), α (la tasa intrínseca de la población X) multiplicada por $\frac{(bk+1)^2}{4bk}$ lo cual es mayor que $\frac{1}{4}$ debe ser igual que $\frac{a}{c}$ que es la tasa de captura sobre el efecto de la interferencia.

5.3 Puntos de equilibrio para $\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} > \beta$

En esta subsección tenemos dos casos particulares que es tomando en cuenta las desigualdades $\alpha > \beta$ y $\alpha < \beta$.

Recordemos que **el caso 3a en que** $\alpha > \beta$ solo existe un punto de equilibrio no trivial. Para esta caso los valores que se dieron a los parámetros fijos son:

$\beta = 1,8, K = 5, \delta = 2, \alpha = 3$, una de las variaciones en D y con la que hace el análisis es $D = 0,7$.

El punto encontrado es $p_1 = (4,697, 1,3556)$ y su matriz jacobiana es

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} -2.6683 & -0.2675 \\ 0.3546 & -0.4028 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -2,6641$ y $\lambda_2 = -0,40703$ por lo tanto podemos concluir que p_1 es un **nodo estable**.

Para el **caso 3b en que** $\alpha < \beta$ los parámetros fijos que utilizamos son: $\alpha = 1, K = 8, \beta = 1.8$ y $\delta = 2$ y el parámetro que se varia es D .

▪ *Análisis del caso 3b con un solo punto no trivial*

Este caso lo tenemos si $D = 0.8127$. El punto de equilibrio no trivial que obtenemos lo denotamos por p_1 .

$p_1 = (6.2424, 7.6192)$, su matriz está dada por:

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} -0.5909 & -0.0209 \\ 0.0337 & -0.1768 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.5892$ y $\lambda_2 = -0.1785$, por lo tanto podemos decir que p_1 **es un nodo estable**. La dinámica del **caso 3b** con un punto de equilibrio no trivial la podemos observar en la figura 28.

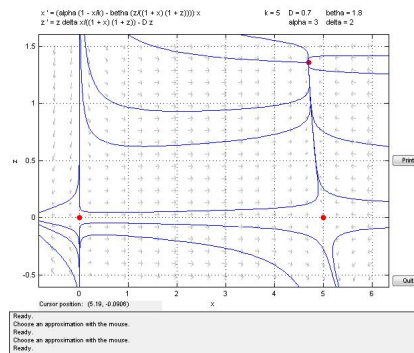


Figura 28. Dinámica del caso 3b con un solo punto no trivial $p_1 = (6.2424, 7.6192)$.

▪ *Análisis del caso 3b con dos puntos no triviales*

Si $D = 0.1494$, los puntos de equilibrio que obtenemos son;

1. $p_1 = (0.41774, 2.9449)$,

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.2271 & -0.0341 \\ 0.7428 & -0.1115 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.1156$ y $\lambda_2 = -0.0002$ además estamos en el caso donde existe una tangencia de curvas por lo que p_1 **es un punto degenerado**.

2. $p_2 = (6.1646, 10.5195)$,

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} -0.5732 & -0.0117 \\ 0.0356 & -0.1364 \end{pmatrix},$$

y sus valores propios son $\lambda_1 = -0.5722$ y $\lambda_2 = -0.1374$, por lo que p_2 **es un nodo estable**.

La dinámica de estos puntos más los triviales la podemos observar en la figura 29.

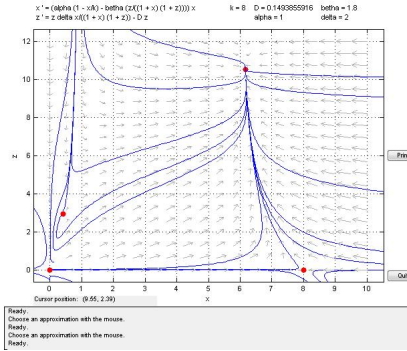


Figura 29. Dinámica del caso 3b con dos puntos de equilibrio no triviales.

▪ *Análisis del caso 3b con tres puntos no triviales*

Este caso se tiene si $D = 0.10$. Los puntos de equilibrio p_1 , p_2 y p_3 son:

1. $p_1 = (0.1561, 1.701)$

$$A_{CM}(p_1) = \begin{pmatrix} 0.1129 & -0.0333 \\ 0.9423 & -0.0629 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.0246 + 0.1538i$ y $\lambda_2 = 0.02496 - 0.1538i$ Es decir p_1 es un foco inestable.

2. $p_2 = (0.7577, 7.6214)$

$$A_{CM}(p_2) = \begin{pmatrix} 0.2955 & -0.0104 \\ 0.5723 & -0.0884 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = 0.2793$ y $\lambda_2 = -0.0722$, por lo tanto p_2 es un punto silla.

3. Por último $p_3 = (6.0862, 16.1776)$,

$$A_{CM}(p_3) = \begin{pmatrix} -0.5553 & -0.0052 \\ 0.0375 & -0.0942 \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = -0.5549$ y $\lambda_2 = -0.0946$, por lo tanto p_3 es un nodo estable. La dinámica general la podemos observar en la figura 30.

Ya que $\beta = \frac{a}{c}$, la condición

$$\frac{\alpha(K+1)^2}{4K} > \beta$$

es equivalente a

$$\frac{\alpha(bk+1)^2}{4bk} > \frac{a}{c}. \quad (11)$$

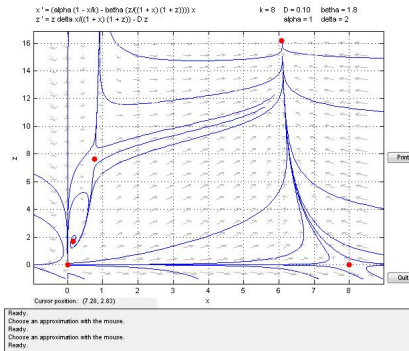


Figura 30. Dinámica de $p_1 = (0.1561, 1.701)$, $p_2 = (0.75769, 7.6214)$ y $p_3 = (2.2808, 8.2693)$.

Ademas recordemos que,

$$\frac{1}{4} < \frac{(bk + 1)^2}{4bk}.$$

Y para que sea válida la desigualdad (11), puede ocurrir que α (la tasa intrínseca de la población X) debe ser grande comparada con $\frac{a}{c}$ que es la tasa de captura sobre el efecto de la interferencia ó bien en su caso puede ocurrir que α (la tasa intrínseca de la población X) sea pequeña comparada con $\frac{a}{c}$ que es la tasa de captura sobre el efecto de la interferencia siempre y cuando $\frac{(bk+1)^2}{4bk}$ sea igual o más grande que $\frac{a}{c}$.

Referencias

- [1] CLUP (1985); *introduzione all'ecologie delle popolazioni*. M. Gatto.
- [2] C.S. Holling (1959) The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly t, *Canad, Entomol.* 91,293-320.
- [3] Antony J. Tromba (1998), and Jerrold E Marsden; *Calculo vrctorial*. Pretince-Hall.
- [4] Y Kuang, (2002) *Basic propeties of mathematical population models*, Preprint.
- [5] J.D. Murray (1993). *Mathematical biologi*, Springer-Verlag.
- [6] L. Perko (1991), *Diferential equations and dinamical systems*, Springer-Verlag.