



Método de superoperadores para fenómenos de interacción entre fotones y átomos

R. Simón Falcón

¹Programas de Mecatrónica, Universidad Politécnica del Centro,
Carretera Villahermosa-Teapa, Km. 22.5, Tumbulushal, Centro, Tabasco, C.P. 86290

rsimon@updc.edu.mx

Recibido: 02 marzo 2015. Aceptado: 23 julio 2015. Publicado: 01 septiembre 2015.

Resumen. En este trabajo se resuelve la ecuación maestra que gobierna la dinámica de la interacción entre un campo electromagnético cuantizado y un átomo de dos niveles en el régimen dispersivo en una cavidad con pérdidas. Tales pérdidas se deben a la interacción del sistema con su medio ambiente. El problema se resuelve usando una técnica de superoperadores. Se muestra que es posible recobrar información del sistema aún para un número reducido de fotones en la cavidad. Se presentan colapsos y revivimientos que dependen del grado de disipación en la cavidad, lo que determina el nivel de interacción entre el átomo y el campo.

I. Introducción

La Óptica Cuántica actualmente es una de las ramas de la física que en los últimos años ha tenido un acelerado desarrollo gracias al progreso de técnicas teórico-experimentales que permiten crear y detectar un fotón, así como estudiar un átomo dentro de una *cavidad*, por ejemplo [10]. Este trabajo está dedicado íntegramente al análisis de sistemas en cavidades, lo que recae en el centro de uno de los temas clásicos en Óptica Cuántica: La *electrodinámica cuántica de cavidades*, más conocida como CQED, por sus siglas en inglés. En este contexto se describe el mecanismo de interacción entre átomos y fotones en cavidades, y se trata de esclarecer los detalles del enredo entre estos subsistemas. Los procesos básicos de interacción entre estas partículas ha sido uno de los temas más importantes en el área de la Óptica Cuántica desde su nacimiento a principios de los años sesenta, paralelamente a la invención del láser. En específico, la teoría acerca de un átomo acoplado a un campo de radiación de un sólo modo en una cavidad fue desarrollada con éxito por los científicos estadounidenses E. D. Jaynes y F. W. Cummings en 1963 [3], seguido de una serie de artículos relacionados a ello. La aparición de estos artículos abrió camino hacia una ola de publicaciones acerca de sistemas en cavidades cuánticas [6]. Ahora bien, cuando consideramos una *cavidad ideal*, es decir, sin pérdidas de energía puesto que no se considera el medio ambiente, los detalles de la interacción tienden a esclarecerse un poco más (por ser un modelo ideal); pero cuando se considera una *cavidad real*, es decir, con disipación debido a la interacción del campo de la cavidad con el medio a través de las paredes (espejos), la descripción de la dinámica se complica debido a que la *ecuación maestra* que describe el problema no tiene solución trivial. El problema de la dinámica entre un átomo de dos niveles interactuando con un campo cuantizado en el límite dispersivo en una *cavidad disipante* ha sido tratado exactamente por Peixoto-Nemes [4]. En este trabajo se definen *superoperadores* y se aplican estos a la solución de la *ecuación maestra* que describe tal problema, lo que conduce a una solución directa y analítica.

II. Modelo de Jaynes-Cummings y la aproximación dispersiva

En esta sección se describe la interacción entre un campo de radiación monomodo cuantizado y un átomo de dos niveles con un sólo electrón, i. e, la interacción átomo-campo. Puesto que consideramos solamente dos niveles, tendremos sólo dos estados atómicos. Se denotará con e al nivel excitado y con g al nivel fundamental. Supondremos además que el sistema átomo-campo se encuentra en una cavidad ideal.

En muchos problemas físicos sobre sistemas compuestos por dos subsistemas en interacción -como en el presente caso-, es posible considerar el hamiltoniano (la energía del sistema) como la suma de dos contribuciones, normalmente la de un hamiltoniano de partes independientes y otro asociado a sus interacciones. Bajo esta consideración, la interacción del campo cuantizado con el átomo puede ser descrito por el siguiente hamiltoniano –en términos de operadores- como

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_{AF} , \quad (1)$$

donde \hat{H}_F y \hat{H}_A son las energías del campo y del átomo en estado libre, respectivamente; es decir, en ausencia de interacciones, mientras que \hat{H}_{AF} es el hamiltoniano que representa la interacción. Es bien sabido que la energía del campo cuantizado está dada por

$$\hat{H}_F = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) , \quad (2)$$

siendo ω_0 la frecuencia de oscilación del modo del campo; \hat{a}^\dagger y \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación de fotones. El hamiltoniano del átomo libre está dado por

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \hat{\sigma}_z , \quad (3)$$

donde ω_{eg} es la frecuencia de transición atómica entre los dos niveles. Se observa que la matriz de Pauli $\hat{\sigma}_z$ nos define el hamiltoniano del átomo en estado libre. Finalmente, el hamiltoniano de la interacción está dado por

$$\hat{H}_{AF} = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ \right) . \quad (4)$$

El término $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-$ describe el proceso en el cual el átomo realiza la transición del estado excitado al estado base y se crea un fotón, en tanto que el término $\hat{a} \hat{\sigma}_+$ describe el proceso inverso, i. e, corresponde a la excitación del átomo y se da la absorción de un fotón. Por lo tanto, la energía es conservada en ambos procesos, se conserva el número de fotones. Por otro lado, es evidente que la diferencia de energía entre los niveles del átomo y del campo es pequeña para que pueda haber intercambio de energía. El coeficiente $\hbar\Omega$ es la constante de interacción, siendo Ω la frecuencia de Rabi, que mide el acoplamiento entre el átomo y el campo. Entonces, el hamiltoniano completo de la ecuación (1) puede ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ \right) , \quad (5)$$

lo que se conoce como el *Modelo de Jaynes-Cummings* (MJC) [11]. Esta forma del hamiltoniano describe el mecanismo de interacción (absorción y emisión) entre un átomo de dos niveles y un campo cuantizado de un solo modo. Las matrices de Spin que aparecen en esta expresión son operadores atómicos y están dadas por

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Ahora derivamos la condición de validez de la aproximación dispersiva para este modelo. Se deduce el hamiltoniano efectivo para el caso *no resonante*, esto es, para el caso en que las frecuencias átomo-campo son considerablemente diferentes. Para esto, definimos la *desintonía* como $\delta = \omega_{eg} - \omega_0$, que mide el defasamiento entre los dos subsistemas. El límite dispersivo es alcanzado cuando \hat{H}_{AF} puede ser considerado como una perturbación pequeña en el sentido de que

$$\delta \gg \sqrt{\bar{n}}\Omega, \quad (7)$$

donde \bar{n} es el número promedio de fotones en el campo. Estamos en el caso no resonante y además el sistema está lejos de la resonancia (en resonancia $\delta = 0$). Tenemos entonces un defasamiento grande, llamado “límite dispersivo”. Así que aquí la desintonía δ es mucho más grande Ω , se alcanza este límite y se obtiene así un hamiltoniano efectivo de interacción [4], dado por

$$\hat{H}_I^{eff} = \chi \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z, \quad (8)$$

donde $\chi = \Omega^2/\delta$ será la constante de interacción, en tanto que la matriz $\hat{\sigma}_z$ está dada en la ecuación (6). En esta aproximación los estados tienden a *desacoplarse*, la intensidad del campo disminuye por lo que ya no logra provocar excitaciones en el átomo, y por consiguiente no hay intercambio de energía pero continúa habiendo dinámica en el sistema, es decir, hay oscilación dipolar en el átomo debido al campo. Este hamiltoniano efectivo describe tal dinámica dispersiva.

III. Modelo del problema

Como se mencionó anteriormente, para el planteamiento del problema consideramos una “cavidad no ideal”. En la cavidad se tendrá un átomo de dos niveles interactuando con el único modo del campo cuántico, donde también será considerado el medio ambiente que envuelve a la cavidad. El campo monomodo es excitado por este medio, acción que genera las pérdidas de energía. El problema consiste básicamente en resolver el modelo de Jaynes-Cummings para el límite dispersivo en presencia de disipación. Es obvio que el átomo contiene un número mayor de niveles o estados, pero sólo se toman dos de estos al considerar que la frecuencia entre estos niveles es comparable a la frecuencia del campo, tal que este le pueda producir excitaciones; los demás niveles son entonces despreciados. Pueden ser los niveles de las capas superiores, los que estén menos ligados al núcleo atómico (en la práctica se trabaja con átomos de Rubidio).

En la descripción de interacción y en la aproximación dispersiva, la *ecuación maestra* que gobierna la dinámica de un átomo de dos niveles acoplado con un campo electromagnético cuantizado en una cavidad con pérdidas de fotones es

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{\gamma}\hat{\rho}, \quad (9)$$

donde $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ es la matriz de densidad del sistema y

$$\hat{\gamma}\hat{\rho} = 2\gamma\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+ - \gamma\hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho} - \gamma\hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}, \quad (10)$$

siendo γ la razón de decaimiento de la cavidad. Si prescindimos del segundo término de la ecuación (9), se tiene la ecuación de *Von Neumann*, la cual es más general que la ecuación de Schrödinger puesto que está expresada en términos de la matriz de densidad la cual describe el sistema total, lo que por lo tanto puede dar información estadística del sistema. $\hat{\rho}$ también es conocida como operador estadístico y representa un ensemble, este nos permite además hacer la descripción más general conocida de un sistema cuántico. El segundo término de la ecuación (9) es el *operador de las pérdidas* que describe la disipación y corresponde a un campo de vacío, i. e., al medio ambiente a temperatura cero; dicho de otra manera, el número promedio de fotones del *reservorio* o baño térmico es cero. El intercambio de energía entre el campo de la cavidad y el medio está dado por este término. Tenemos entonces dos términos que, bajo el razonamiento anterior, podemos considerar como elementos que describen las *pérdidas* y *ganancias*. Tales pérdidas de energía de la cavidad se deben a la interacción del campo monomodo con el medio. Este medio es considerado, en principio, como un conjunto muy grande de osciladores cuánticos, que además se encuentra a una temperatura

T. Al darse la interacción se encuentra que el campo interno pierde fotones, este se disipa debido a la interacción con las paredes de la cavidad, las cuales consideramos que pueden ser espejos parcialmente transmisores. Esto lo podemos imaginar como si se alcanzara un equilibrio térmico [5]. Ahora bien, si suponemos que la temperatura T del reservorio es cero (en el que los osciladores se encuentran en estado base), se tiene un campo de radiación que corresponde al vacío (debido este a las fluctuaciones del vacío), el cual también produce pérdidas. Este campo es real y fluctuante. En este caso, el medio consiste de un conjunto de modos en los cuales no hay fotones, por lo que es más probable que se dé una transferencia de fotones de la cavidad hacia el medio a través de las paredes, y en esta situación, el fotón que se va ya no regresa. De esta manera se producen las pérdidas de energía. Los espejos también pueden absorber energía del campo y aumentar así su temperatura, lo que se traduce entonces en una constante disipación en la cavidad. El modo de esta cavidad viene entonces funcionando como una fuente que es arrastrada por el medio.

Como estamos en el límite dispersivo del MJC, en el cual la dinámica está dada por el hamiltoniano efectivo de la ecuación (8), se tiene que al tomar $\hbar = 1$ y considerar este hamiltoniano, la ecuación (9) adquiere la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\hat{H}_I^{eff}, \rho] + \hat{\gamma}\rho. \quad (11)$$

IV. Solución. Técnica de superoperadores

Ahora nos enfocamos a la solución de la ecuación de movimiento del sistema dada por la ecuación (11). Para esto, definimos los *superoperadores* [1,8]

$$\hat{L}\rho = -\hat{\Gamma}a^+a\rho - \rho\hat{\Gamma}^+a^+a \quad (12)$$

y

$$\hat{J}\rho = 2\gamma a\rho a^+, \quad (13)$$

donde $\hat{\Gamma}^+$ es el adjunto de $\hat{\Gamma}$, dado este por

$$\hat{\Gamma} = \gamma\hat{I}_A + i\chi\hat{\sigma}_z, \quad (14)$$

con

$$\hat{I}_A = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|. \quad (15)$$

Se observa que (15) está expresada en términos de los proyectores formados por los vectores de estado del átomo $|e\rangle$ y $|g\rangle$, que corresponden a los estados excitado y base respectivamente. Estos están dados por

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Se les denomina superoperadores debido a su acción sobre la matriz de densidad. Estos tienen la propiedad de actuar por la derecha y por la izquierda de la matriz de densidad al mismo tiempo como puede verse. Difieren de los operadores convencionales en que estos últimos actúan solo a la derecha de ρ .

Al sustituir el hamiltoniano efectivo dado por (8) en la ecuación (11) y considerando (10), se obtiene fácilmente que

$$\frac{d\rho}{dt} = (\hat{L} + \hat{J})\rho. \quad (17)$$

Tenemos una ecuación diferencial, por lo que es preciso imponer una condición inicial. Suponemos que inicialmente el vector de estado del átomo está dado por el *estado puro*

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle), \quad (18)$$

y que el estado del campo es un *estado coherente* $|\alpha\rangle$ [7], el cual puede escribirse en una base de estados de número como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (19)$$

donde α es un número complejo. Podemos entonces considerar que la función de onda inicial total del sistema está dada por la expresión

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_A\rangle |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) |\alpha\rangle. \quad (20)$$

El factor $1/\sqrt{2}$ dado en (18) es la constante de normalización y representa la probabilidad de que el átomo se encuentre ya sea en el estado excitado o en el estado base. Se observa que la suma del cuadrado de ambos coeficientes da uno, la probabilidad total como es evidente.

La solución a la ecuación (17), sujeta a la condición inicial (20) es

$$\rho(t) = e^{(\hat{L} + \hat{J})t} \rho(0), \quad (21)$$

donde $\rho(0)$ es la matriz de densidad inicial, la cual describe un estado inicial puro o un estado inicial *mezclado* del sistema total, como el representado en la ecuación (20).

En vista de que \hat{L} y \hat{J} son dos operadores que no conmutan, no podemos expresar la exponencial de (21) como un producto de exponenciales elevadas a la potencia del término correspondiente, por lo que proponemos la factorización

$$\rho(t) = e^{\hat{L}t} e^{\hat{f}(t)\hat{J}} \rho(0). \quad (22)$$

Ahora nos enfocamos al cálculo de la función $\hat{f}(t)$ para la cual se cumpla la ecuación (22). Tomando las derivadas de (21) y (22) con respecto a t se obtiene, respectivamente, que

$$\frac{d\rho}{dt} = (\hat{L} + \hat{J})\rho, \quad (23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \hat{L}\rho + \frac{d\hat{f}}{dt} e^{\hat{L}t} \hat{J} e^{-\hat{L}t} \rho, \quad (24)$$

donde continuamos escribiendo $\hat{\rho}$ en lugar de $\rho(t)$, esto solo para abreviar. Igualando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\hat{J}\hat{\rho} = \frac{d\hat{f}}{dt} e^{\hat{L}t} \hat{J} e^{-\hat{L}t} \hat{\rho}. \quad (25)$$

En general se sabe que si \hat{L} y \hat{J} son dos operadores fijos que no conmutan, y si t es un parámetro [2], entonces

$$e^{\hat{L}t} \hat{J} e^{-\hat{L}t} = \hat{J} + t[\hat{L}, \hat{J}] + \frac{t^2}{2!} [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]] + \frac{t^3}{3!} [\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]]] + \dots \quad (26)$$

Es fácil mostrar que

$$[\hat{L}, \hat{J}] \hat{\rho} = \hat{S}_\Gamma \hat{J} \hat{\rho}, \quad (27)$$

donde el superoperador \hat{S}_Γ es definido como

$$\hat{S}_\Gamma \hat{\rho} = \hat{\Gamma} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\Gamma}^+. \quad (28)$$

Al hacer la analogía $\hat{\rho} \rightarrow t$, podemos aplicar (27) a (26), y obtenemos

$$[\hat{L}, \hat{J}] t = \hat{S}_\Gamma \hat{J} t, \quad (29)$$

$$[\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]] \frac{t^2}{2!} = \frac{t^2}{2!} \hat{J} \hat{S}_\Gamma^2, \quad (30)$$

$$[\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]]] \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{3!} \hat{J} \hat{S}_\Gamma^3, \quad (31)$$

etc., así que por lo tanto (26) toma la forma

$$\begin{aligned} e^{\hat{L}t} \hat{J} e^{-\hat{L}t} &= \hat{J} + \hat{S}_\Gamma \hat{J} t + \frac{t^2}{2!} \hat{J} \hat{S}_\Gamma^2 + \frac{t^3}{3!} \hat{J} \hat{S}_\Gamma^3 + \dots \\ &= \hat{J} \left(1 + \hat{S}_\Gamma t + \frac{t^2}{2!} \hat{S}_\Gamma^2 + \frac{t^3}{3!} \hat{S}_\Gamma^3 + \dots \right) \\ &= \hat{J} e^{\hat{S}_\Gamma \hat{J} t}. \end{aligned} \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (25) obtenemos

$$\hat{J} \hat{\rho} = \frac{d\hat{\rho}}{dt} \hat{J} e^{\hat{S}_\Gamma t} \hat{\rho}, \quad (33)$$

y de esta ecuación se deduce fácilmente que

$$\hat{f}(t) = -\frac{e^{-\hat{S}_\Gamma t}}{\hat{S}_\Gamma} + c. \quad (34)$$

Evaluando en $t = 0$, se obtiene la constante $c = 1/\hat{S}_\Gamma$, por lo que la ecuación (34) se expresa como

$$\hat{f}(t) = \frac{1 - e^{-\hat{S}_\Gamma t}}{\hat{S}_\Gamma}. \quad (35)$$

Finalmente, tenemos entonces completamente definida la matriz de densidad por

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{L}t} e^{\hat{J}t} \hat{\rho}(0). \quad (36)$$

Así, $\hat{f}(t)$ es un superoperador atómico y operará solo sobre estados atómicos, en tanto que \hat{J} actuará solo sobre estados de campo.

Este tipo de solución para $\hat{\rho}$ conduce a expresiones simples que permiten obtener información importante acerca del sistema. Por ejemplo, si consideramos el estado inicial dado por la ecuación (20), la matriz de densidad inicial se escribe como

$$\hat{\rho}(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (37)$$

Ahora necesitamos operar esta matriz inicial con el exponente de los superoperadores dado en la ecuación (36). Entonces, al aplicar el exponencial $e^{\hat{J}t}$ sobre $\hat{\rho}(0)$ en su forma de *serie de Maclaurin* tenemos

$$e^{\hat{J}t} \hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^n |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \hat{J}^n |\alpha\rangle\langle\alpha|}{n!}, \quad (38)$$

esto debido a que, como se mencionó anteriormente, \hat{f} y \hat{J} son superoperadores de átomo y de campo, respectivamente. Bajo un poco de álgebra se muestra que

$$\hat{f}^n |\psi_A\rangle\langle\psi_A| = \frac{\left(1 - e^{-(\xi + \xi^*)t}\right)^n}{(\xi + \xi^*)^n} \hat{I}_A + \frac{(1 - e^{-2\xi t})^n}{(2\xi)^n} |e\rangle\langle g| + \frac{(1 - e^{-2\xi^* t})^n}{(2\xi^*)^n} |g\rangle\langle e|, \quad (39)$$

con $\xi = \gamma + i\chi$ y $r = 1/2$. Por otro lado, es bien sabido que

$$\hat{J}^n = (2\gamma)^n |\alpha\rangle\langle\alpha|^{2n} |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (40)$$

Considerando (39) y (40), (38) puede escribirse como

$$e^{\hat{J}t} \hat{\rho}(0) = re^b \hat{I}_A |\alpha\rangle\langle\alpha| + re^c |e\rangle\langle g| |\alpha\rangle\langle\alpha| + re^d |g\rangle\langle e| |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (41)$$

donde

$$b = \left(1 - e^{-(\xi + \xi^*)t}\right) |\alpha|^2, \quad (42)$$

$$c = \frac{(1 - e^{-2\xi t}) \gamma |\alpha|^2}{\xi}, \quad (43)$$

$$d = \frac{(1 - e^{-2\xi^* t}) \gamma |\alpha|^2}{\xi^*}. \quad (44)$$

Al sustituir (41) en (36) se tiene

$$\hat{\rho}(t) = re^b e^{Lt} \hat{I}_A |\alpha\rangle\langle\alpha| + re^c e^{Lt} |e\rangle\langle g| |\alpha\rangle\langle\alpha| + re^d e^{Lt} |g\rangle\langle e| |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (45)$$

lo que representa una suma de matrices, y al simplificar esta se obtiene finalmente la matriz de densidad del sistema

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} re^b e^{-\xi t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi^* t} & re^c e^{-\xi t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi^* t} \\ re^d e^{-\xi^* t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi t} & re^b e^{-\xi^* t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi t} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

donde se usó el hecho de que e^{Lt} aplicado sobre alguna matriz, como por ejemplo $\rho_i(0)$, se tiene que

$$e^{Lt} \rho_i(0) = e^{-\Gamma t} \rho_i(0) e^{-\Gamma^+ t}, \quad (47)$$

siendo

$$e^{-\Gamma t} = \begin{pmatrix} e^{-\xi t} & 0 \\ 0 & e^{-\xi^* t} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

La matriz de densidad total, dada por (46) describe la evolución temporal del sistema y permite extraer información de la dinámica entre el átomo y el campo de la cavidad, como se verá en la siguiente sección.

V. Resultados

Un primer e importante resultado ha sido la obtención de la matriz de densidad dada por la ecuación (46). Ahora calculamos el valor promedio de la observable $\hat{\sigma}_x$, es decir, el dipolo eléctrico ($\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$) mediante la ecuación fundamental de la mecánica cuántica

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = Tr[\hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_x] = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_x | m \rangle, \quad (49)$$

siendo $\{|m\rangle\}$ una base arbitraria consistente de un conjunto completo de estados ortonormales. Al realizar este cálculo se obtiene la función

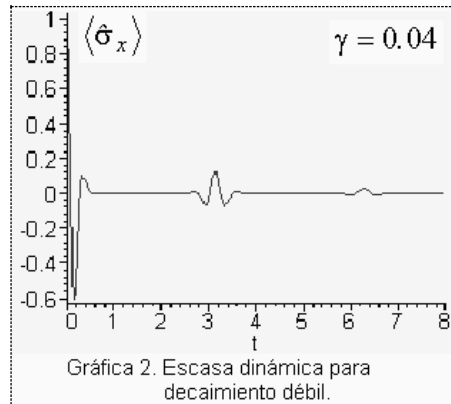
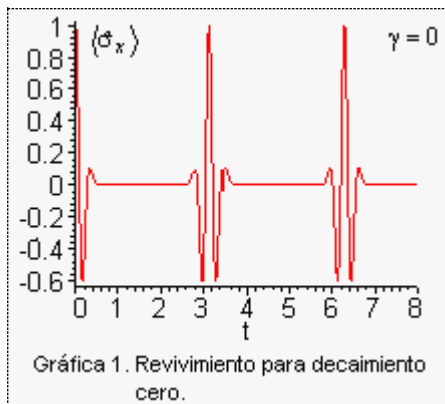
$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = e^{[(\gamma\theta-1)+e^{-2\gamma t} \cos(2\chi t)] \alpha^2} \cos\left\{ \alpha^2 [\gamma\beta - e^{-2\gamma t} \sin(2\chi t)] \right\}, \quad (50)$$

donde

$$\theta = \frac{\gamma + \chi e^{-2\gamma t} \sin(2\chi t) - \gamma e^{-2\gamma t} \cos(2\chi t)}{\gamma^2 + \chi^2}, \quad (51)$$

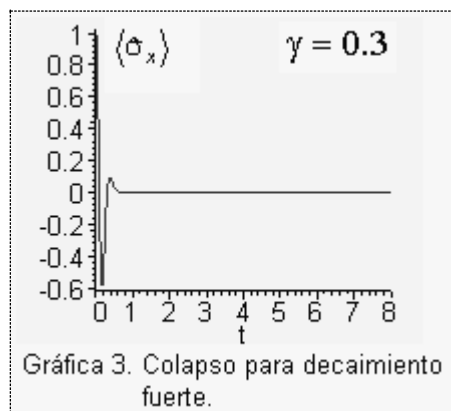
$$\beta = \frac{\gamma e^{-2\gamma t} \sin(2\chi t) + \chi e^{-2\gamma t} \cos(2\chi t) - \chi}{\gamma^2 + \chi^2}. \quad (52)$$

El objeto de calcular el valor esperado del operador $\hat{\sigma}_x$ sobre el ensemble átomo-campo especificado por $\hat{\rho}$, ha sido con el fin de obtener información acerca de la evolución temporal del sistema en presencia de disipación, y como puede verse, se ha obtenido una función sencilla que proporciona tal información. Esta ecuación depende exclusivamente de los parámetros involucrados en la descripción del sistema: $(\alpha, \gamma, \chi, t)$. Ahora graficamos esta función para diferentes grados de decaimientos.



Se obtuvieron estos comportamientos tomando como constantes a α y a χ , con valores respectivos de 3 y 1, en tanto que el intervalo temporal es $t = [0,8]$. Estas gráficas muestran resultados muy importantes. El promedio nos da la probabilidad de encontrar al átomo ya sea en el estado excitado o en el estado base, es decir, se mide la *polarización atómica* u orientación dipolar. En la gráfica 1 se observa que para decaimiento cero, en lo cual no hay pérdidas de energía, se tiene un *revivimiento*, por lo que no se *pierde información*. En esta situación el átomo siente más intensamente la presencia del campo ya que se tiene el máximo *acoplamiento*, lo que le provoca *oscilación dipolar*, es decir, hay mayor dinámica. Se tiene entonces una manera de reobtener información del sistema dado que no hay disminución en las amplitudes de cada resurgimiento. El factor exponencial dado en (50) actúa como un modulador que determina la envolvente de las oscilaciones las cuales son de tipo cosenoidal. Puesto que no hay disipación de fotones continuada habiendo conservación de la energía, como si no se estuviera considerando el medio ambiente. Además se obtiene información sobre el estado inicial del campo de la cavidad, contenida esta inicialmente en la matriz de densidad (46). Sucede que durante el proceso de la evolución no disipativa, el campo coherente no se conserva coherente sino que se divide en dos componentes que rotan en sentidos opuestos, y al superponerse, se originan los revivimientos; en tanto que el átomo continúa oscilando.

En la gráfica 2 se tiene la evolución para una disipación débil ($\gamma = 0.04$). Sin embargo, se observa que en presencia de este decaimiento, comienza a haber poca respuesta por parte del ensemble ya que los estados del átomo y el campo tienden a *desacoplarse*, la interacción empieza a morir al disiparse la energía que es la causante de los revivimientos, la cual es absorbida por el medio. En este caso hay escasa oscilación dipolar en el átomo y la dinámica tiende al *colapso*, como es evidente.



Finalmente, en la gráfica 3 se muestra la evolución para un decaimiento más fuerte. Por disipación fuerte queremos decir que el número promedio de fotones en el campo *decrece* significativamente para el tiempo del primer *resurgimiento*, y viceversa. Se observa que no se presentan revivimientos, contrariamente, hay *colapso* total en las oscilaciones. En esta situación la energía del campo se disipa a través de las paredes

de la cavidad por lo que el átomo no sufre oscilación, estos subsistemas se desacoplan y por lo tanto no hay más dinámica. El átomo puede entonces quedar en cualquiera de sus dos estados. Por otro lado, en el transcurso de la evolución disipativa el campo coherente tampoco se mantiene coherente, de igual forma se divide, pero al disiparse su energía se llega a un colapso y la interacción se anula. Esto es como tener un sistema abierto en el que su energía decae rápidamente. Las paredes de la cavidad juegan un papel importante puesto que permiten tener un control de la entrada y salida de energía, el flujo depende de la constante de transmisión de los espejos que forman las paredes. En la práctica se utilizan espejos de muy alta calidad.

VI. Conclusiones

Como se mostró en el desarrollo de este trabajo, el problema de la interacción dispersiva entre el campo EM cuantizado y el átomo de dos niveles para una cavidad real se resolvió usando la técnica de superoperadores, lo que muestra que la técnica funciona adecuadamente. Con este trabajo se contribuye a esclarecer un poco más los detalles del *enredamiento* entre el átomo y el campo al mostrar que aún en el límite dispersivo, donde se tiene un número reducido de fotones, es posible revivir las oscilaciones.

Es importante mencionar que se utilizó como laboratorio el modelo de Jaynes-Cummings en la aproximación dispersiva en una cavidad disipativa a temperatura por varias razones. En primera porque es el modelo que describe la dinámica de la interacción, en segunda porque se puede obtener una solución analítica y porque además es posible hacer pruebas experimentales de la actual predicción.

Finalmente, podemos concluir mencionando que las pérdidas sí afectan al sistema en la cavidad ya que al disiparse la energía se pierde información acerca del campo y de su interacción con el átomo, por lo que no es conveniente tener disipación pero es muy importante saber de que manera esta afecta al sistema. No siempre es indeseable tener disipación, de hecho conviene casi siempre puesto que a través de ella es posible obtener información acerca de la dinámica que pueda existir en la cavidad. Hasta ahora ha sido imposible extraer información de un *sistema cerrado* como puede ser una cavidad. Para trabajo inmediato se usará este método de solución para medir la función de onda de un campo electromagnético desconocido en la cavidad.

Referencias

- [1] H. Moya-Cessa, J. A. Roversi, S. M. Dutra and Vidiella-Barranco, *Phys. Rev. A* **60**, 4029 (1999).
- [2] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of the Radiation*, (Wiley, New York, 1973).
- [3] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [4] J. G. Peixoto de Faria and M. C. Names, *Phys. Rev. A* **59**, 3918 (1999).
- [5] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, 1991.
- [6] P. R. Berman, *Cavity Quantum Electrodynamics*, Academic Press, 1994.
- [7] P. Meystre, *Elements of Quantum Optics*, Springer, Third Ed., 1998.
- [8] I. Ricárdez Vargas, *Solución de la interacción no resonante entre un campo cuantizado y un átomo de dos niveles en presencia de pérdidas*, Tesis de Maestría, INAOE, México, 2002.
- [9] S. Hacyan, R. Jáuregui and R. L. Peña, *ELAF: New Perspectives on Quantum Mechanics*, AIP, México, 1998.
- [10] S. M. Chumakov and A. B. Klimov, *Métodos Algebraicos en Óptica Cuántica*, Uni. de Guadalajara, México, 1999.
- [11] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [12] S. M. Barnett and P. M. Redmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Clarendon Press, 1997.
- [13] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, 1994.
- [14] L. G. Lutterbach and L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2547 (1997).