



**UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO**  
**DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS**

**ESTUDIO SOBRE LA VALIDEZ DEL  
PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA EN LA  
MECÁNICA CUÁNTICA**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**M.C. CON ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS**

PRESENTA

**JUAN ANTONIO CAÑAS PALOMEQUE**

DIRECTORES

**DR. JORGE ALEJANDRO BERNAL ARROYO**

**DR. JOSÉ ALBERTO MARTÍN RUIZ**

Cunduacán, Tab.

Julio 2023



DIRECCIÓN

División  
 Académica  
 de Ciencias  
 Básicas



07 de julio de 2023

**LIC. JUAN ANTONIO CAÑAS PALOMEQUE  
 PASANTE DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
 CON ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS  
 PRESENTE.**

Por medio de la presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"Estudio sobre la validez del Principio de Equivalencia en la Mecánica Cuántica"**, en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL y obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Nanociencias.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE.

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL  
 DIRECTORA**



DIVISION ACADÉMICA DE  
 CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo

DIR'DRA.HPV//JP'DRA.EAM/jkal

## CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "Estudio sobre la validez del Principio de Equivalencia en la Mecánica Cuántica", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 26 días del mes de Julio del año 2023.

AUTORIZO



---

Juan Antonio Cañas Palomeque  
182A17001

## Agradecimientos

Agradezco al Dr. Jorge Alejandro Bernal Arroyo por el valioso tiempo que ha dedicado a la realización y revisión de este trabajo, por las horas conversando sobre éste y un sin fin de temas más; y, sobre todo, por la amistad que me ha brindado. Gracias al Dr. José Alberto Martín Ruiz, por sus valiosas ideas, comentarios, correcciones, consejos y, en general, por imbuir este trabajo con todo aquello que admiro de él. Gracias a ambos por su paciencia, sé que el camino se hizo demasiado largo...

1 Deseo también expresar mi gratitud al comité de revisores, quienes con sus comentarios y críticas me exhortaron a mejorar este trabajo. A la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, por ser el espacio que hizo posible llegar a escribir estas líneas. Gracias a Conacyt por toda la ayuda brindada.

Agradezco a mis padres, por estar ahí, por tratar de entender, y por todo lo que han tratado de hacer por mi. A Guillermo, mi hermano, a tu manera has aportado una parte vital a este trabajo. Gracias a mis buenos alumnos, aunque sean pocos, por alentar mi necesidad de mejorar.

Gracias, a Yesi, por todo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. El Principio de Equivalencia Débil . . . . .	1
1.2. El Principio de Equivalencia de Einstein . . . . .	3
1.3. El Principio de Equivalencia en la Mecánica Cuántica . . . . .	4
1.4. Compatibilidad del Principio de Equivalencia con la Mecánica Cuántica . . . . .	5
<b>2. Emergencia del PED en la MC</b>	<b>8</b>
2.1. El límite clásico de la Mecánica Cuántica . . . . .	8
2.1.1. Propuestas de solución . . . . .	9
2.1.2. Formulación Matemática del Principio de Correspondencia . . . . .	11
2.1.3. El límite clásico de la caída libre . . . . .	13
2.2. Términos de corrección y el PE . . . . .	17
2.2.1. El papel de la masa en la densidad cuántica . . . . .	18
2.2.2. Estimación de los términos de corrección . . . . .	20
<b>3. Difracción de partículas en caída libre</b>	<b>23</b>
3.1. Difracción en el tiempo de Moshinsky . . . . .	23
3.1.1. Interpretación del efecto de difracción . . . . .	26
3.1.2. Graduación del efecto de difracción . . . . .	28
3.2. Caída libre difractada . . . . .	29
3.2.1. Haz monocromático . . . . .	30
3.2.2. Estado estacionario . . . . .	34
<b>Conclusión</b>	<b>38</b>
<b>A. El método de Albright</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

# Introducción

La tarea de explicar las interacciones físicas mediante un único esquema general tuvo su primer avance importante en el siglo XIX, con la Teoría electromagnética de Maxwell. Poco más de cien años después, en la década de 1970 alcanza su mayor auge, con el desarrollo del Modelo Estandar de Partículas Elementales. Este modelo permite explicar las interacciones fuertes y electrodébiles mediante estructuras de grupo en el marco de la Teoría Cuántica de Campos (TCC). Así pues, todas las interacciones de la naturaleza, con excepción de la gravedad son explicadas mediante la TCC [1].

Por otro lado, la Interacción Gravitacional fue explicada por Albert Einstein en su Teoría de la Relatividad General (TRG) publicada en 1915. En la TRG, Einstein postula que la gravedad es debida a deformaciones del espacio-tiempo ante la presencia de materia y energía [2]. Lo anterior le da un carácter puramente geométrico a la Interacción Gravitacional. La naturaleza geométrica de la gravedad entra en conflicto con la naturaleza cuántica del resto de interacciones.

La unificación de las cuatro interacciones fundamentales requiere entonces de una teoría que permita ya sea explicar los fenómenos cuánticos por medio de una teoría de campos que conserve las propiedades de la TRG, o bien, la formulación de una teoría de la gravedad compatible con la Mecánica Cuántica. Un antecedente de la primera opción es el intento fallido de explicar el comportamiento de electrones mediante una generalización de la TRG por parte de Einstein [3, 4]

Por otra parte, la cuantización de la gravedad ha generado todo un campo de estudio en física: la Gravedad Cuántica (GC). Pese a más de 40 años de esfuerzo, una teoría de GC completa no se ha formulado hasta la fecha. Si bien hay múltiples teorías que se apuntan como candidatos para resolver el problema de la GC, los problemas técnicos y conceptuales presentes no han sido completamente resueltos. Teorías como Cuerdas Cuánticas parecen resolver el problema pero generan interrogantes todavía más complicadas (véase, por ejemplo [5] para una discusión más completa de este tema).

Dadas las dificultades que una teoría GC conlleva, algunos autores (véase, por ejemplo la introducción de [6]) sugieren que los principios de la TRG y la Mecánica Cuántica no son compatibles, y por ello no es posible su formulación. Con incompatibilidad nos referimos a que los principios en los que se basa una teoría no se encuentran presentes en la otra. Aunque alejado de las líneas de ideas más populares, esta visión podría ayudar a dejar de lado teorías unificadoras para buscar teorías más generales, de las cuales la TRG y la Mecánica Cuántica sean casos particulares.

El Principio de Equivalencia de Einstein(PEE) establece que:

*En regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se*

*reducen a las de la relatividad especial; es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional por medio de experimentos locales<sup>1</sup>.*

Este principio es la base de toda teoría métrica de la gravedad, y en particular, de la Relatividad General [8]. Por lo anterior, determinar si este principio es válido en el marco de la Mecánica Cuántica representa un paso importante en el camino de determinar la compatibilidad entre ambas teorías.

¿Cómo determinar la validez del PEE en la Mecánica Cuántica? Debido a la abrumadora generalidad del PEE, esta pregunta no tiene una respuesta nada sencilla (si es que la tiene), por lo cual parece imposible estudiar la compatibilidad de las teorías por medio del PEE. Sin embargo Schiff conjeturó que si se satisface el Principio de Equivalencia Débil (PED), el cual establece que:

*El movimiento de partículas en caída libre es el mismo en un campo gravitacional y en un marco uniformemente acelerado, en regiones suficientemente pequeñas del espacio<sup>2</sup>;*

entonces también se satisface el PEE [9]. Por lo tanto, si la conjetura de Schiff es válida, el PED es un principio básico de la TRG y determinar su validez en la Mecánica Cuántica permitirá determinar la compatibilidad entre la TRG y la Mecánica Cuántica.

Independientemente de la validez del PED en la Mecánica Cuántica, la evidencia experimental indica que éste es válido en la Mecánica Clásica. Sin embargo, asumiendo que la Mecánica Cuántica debe dar lugar a la Mecánica Clásica mediante un límite clásico, dicho proceso debe indicar cómo emerge el PED en caso de no ser válido. En este trabajo se tratarán de probar dos hipótesis:

- I El PED no es válido en la Mecánica Cuántica y,
- II La Mecánica Cuántica explica la emergencia del PED.

En el primer capítulo, se presentarán algunos conceptos y resultados preliminares para el desarrollo del resto del texto. En el capítulo 2, se estudia el problema del límite clásico y su relación con la emergencia de la validez del PED. En el capítulo 3, estudiaremos la validez del PED en la Mecánica Cuántica mediante un análogo del experimento de caída libre de Galileo. Posteriormente presentamos un resumen de nuestras conclusiones.

<sup>1</sup>Siguiendo la formulación mostrada en la pagina 50 de [7].

<sup>2</sup>Véase la pagina 49 de [7]

---

# Capítulo 1

## Preliminares

---

### 1.1. El Principio de Equivalencia Débil

A finales del siglo XVI el profesor italiano Galileo Galilei probó experimentalmente, contradiciendo las creencias aristotélicas que predominaban en aquel entonces, que *en ausencia de fricción, dos objetos soltados simultáneamente llegan al suelo al mismo tiempo* [10]. Lo que Galileo estableció fue, en otras palabras, la universalidad de la caída libre: *Todos los cuerpos caen a la tierra con la misma aceleración*. El resultado anterior, como se mostrará a continuación, da lugar a uno de los principios fundamentales de la Teoría de la Relatividad General.

Considere primero el papel que la carga eléctrica tiene en la interacción electromagnética, para ello considere una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  en presencia de un campo eléctrico  $\mathcal{E}$ . La fuerza  $\mathbf{F}$  que experimenta la partícula es entonces  $\mathbf{F} = q\mathcal{E}$ . Usando la segunda ley de Newton se obtiene que la aceleración  $\mathbf{a}$  de la partícula es:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathcal{E}. \quad (1.1)$$

Suponga ahora el siguiente experimento: *Dos partículas, con cargas  $q_1$  y  $q_2$  y masas iguales son liberadas en presencia del campo  $\mathcal{E}$ , y se mide el tiempo que les toma recorrer una cierta distancia  $d$* . Usando la expresión (1.1) y algo de cinemática básica podemos deducir que a la partícula con mayor carga le tomará menor tiempo recorrer la distancia  $d$ . En resumen, este sencillo experimento permite comparar las cargas eléctricas de diferentes partículas. Se concluye entonces que la carga eléctrica determina la intensidad de la fuerza eléctrica, a mayor carga, mayor es la fuerza.

En el caso de la fuerza de gravedad, podemos asumir también que existe una carga gravitacional que denotaremos  $m_g$ , la cual es la responsable de determinar la interacción gravitacional. Sea  $\mathcal{G}$  un campo gravitacional presente en cierta región del espacio. Esperamos, en analogía con el campo eléctrico, que la fuerza que experimenta la partícula sea dada por  $\mathbf{F} = m_g\mathcal{G}$ . Por lo tanto, la aceleración causada sobre la partícula será:

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m}\mathcal{G}. \quad (1.2)$$

Si  $\mathcal{G}$  es el campo gravitacional de la tierra, el experimento se simplifica: *dos partículas, con cargas gravitacionales  $m_{g1}$  y  $m_{g2}$  se sueltan del reposo a una cierta altura, y se determina el tiempo que les toma llegar al suelo*. Este experimento es el mismo realizado por Galileo, al ser los tiempos de caída iguales para ambas partículas se debe cumplir que  $m_{g1} = m_{g2}$ . Más aún, si se considera que las masas de ambas partículas son distintas (dígase  $m_1$  y  $m_2$ ) entonces la universalidad de la caída

libre implica que:

$$\frac{m_{g1}}{m_1} = \frac{m_{g2}}{m_2}. \quad (1.3)$$

La ecuación anterior indica que la carga gravitacional y la masa inercial deben ser iguales<sup>1</sup> para cualquier cuerpo. Hay entonces una estrecha relación entre inercia y gravedad.

Con todo lo anterior estamos en condiciones de establecer el PED. Considere un campo gravitacional arbitrario  $\mathcal{G}(\mathbf{P})$ , donde  $\mathbf{P}$  es el punto en el que se está midiendo dicho campo. Sea  $m$  la masa (o carga gravitacional) de una partícula moviéndose en una vecindad de un punto  $\mathbf{P}_0$ , en dicha vecindad el campo puede desarrollarse en una serie de Taylor [11]:

$$\mathcal{G}(\mathbf{P}) = \mathcal{G}(\mathbf{P}_0) + (P_i - P_{0i}) \partial_i \mathcal{G}(\mathbf{P}_0) + \dots \quad (1.4)$$

Si la vecindad es suficientemente pequeña, entonces la serie puede cortarse hasta el primer término, lo cual significa que la partícula se mueve en un campo uniforme. Por lo tanto, la aceleración que experimenta es constante, como puede deducirse de (1.2).

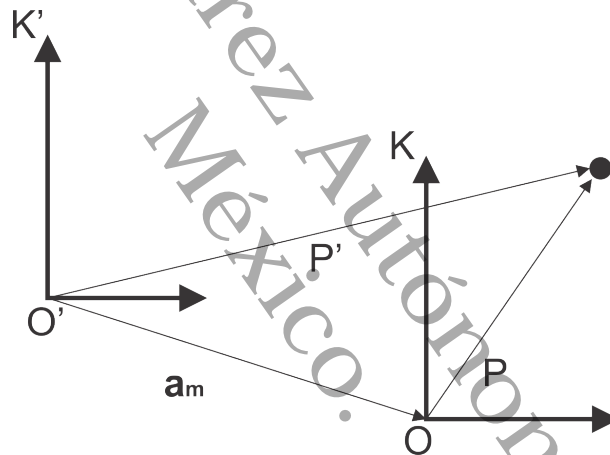


Figura 1.1: La figura muestra dos sistemas de referencia, moviéndose con aceleración relativa  $\mathbf{a}_m$ .

9 Considere ahora una partícula en reposo para un observador  $K$ , el cual se aleja de un segundo observador  $K'$  con una aceleración  $\mathbf{a}_m$  como se muestra en la figura (1.1). Evidentemente la partícula se mueve, con respecto a  $K'$ , con la misma aceleración  $\mathbf{a}_m$ . Si ahora asumimos que  $\mathbf{a}_m$  es igual a la aceleración producida por el campo gravitacional en la vecindad de  $\mathbf{P}_0$  entonces el movimiento de la partícula será exactamente igual en ambos casos. Por lo tanto, hemos llegado al:

5 11 **Principio 1** (Principio de equivalencia débil (PED)). *El movimiento de partículas en caída libre es el mismo en un campo gravitacional y en un marco uniformemente acelerado, en regiones suficientemente pequeñas del espacio.*

4 Cabe aclarar que se ha deducido el enunciado común del PED a partir de la igualdad entre las masas inercial y gravitacional. Sin embargo, eso no significa que este último sea más fundamental

<sup>1</sup>De hecho deben ser proporcionales, pero eligiendo las unidades adecuadas el factor de proporcionalidad puede hacerse igual a la unidad.

que la igualdad entre sistemas de referencia. Es sencillo probar que se puede deducir la igualdad entre masas partiendo desde este enunciado, es decir, se trata de dos aspectos lógicamente equivalentes. El PED suele formularse también sin apelar a la caída libre, estableciendo solamente la igualdad entre masa inercial y gravitacional.

Como se ha visto, el PED hace referencia al experimento gravitacional más sencillo que se puede realizar: observar el movimiento de una partícula libre. El principio establece que los resultados de dicho experimento son los mismos si se realiza en presencia de un campo gravitacional o en un marco uniformemente acelerado, siempre que el movimiento se lleve a cabo en una región suficientemente pequeña. Lo anterior indica que al realizar el experimento, no es posible concluir si nos encontramos en presencia de un campo o moviéndonos con aceleración uniforme. Ambas situaciones son indistinguibles, es decir, son equivalentes.

## 1.2. El Principio de Equivalencia de Einstein

La observación de objetos en caída libre no es el único experimento que podemos realizar, por lo cual ambos sistemas<sup>2</sup>  $K_g$  y  $K_a$  no son del todo indistinguibles. Sabiendo esto Einstein propuso una generalización del PED [12]:

**Principio 2 (Principio de Equivalencia de Einstein (PEE)).** *Las leyes físicas no gravitacionales con respecto a  $K_a$  no difieren de aquellas en  $K_g$ . No existe razón para suponer que los sistemas  $K_a$  y  $K_g$  difieren en alguna forma.*

Lo anterior se explica con el conocido experimento mental de Einstein: *Considere un experimentador que desconoce si se encuentra en  $K_a$  o  $K_g$ . Para tratar de averiguar en cual se encuentra, realiza un experimento que involucre física no gravitacional (por ejemplo, algún experimento electromagnético). Si el PEE es correcto, entonces el resultado del experimento no permitirá discernir en cual sistema se encuentra.*

Algunos aspectos del PEE deben precisarse<sup>3</sup>. En primer lugar, el experimento realizado debe ser local, es decir, debe realizarse en una región tan pequeña que las inhomogeneidades del campo gravitacional sean despreciables. Esto es necesario debido a que para regiones grandes, el campo gravitacional no puede considerarse homogéneo y entonces no es posible hallar un sistema acelerado que lo reproduzca. En segundo lugar, debe notarse que el PEE no es una consecuencia lógica del PED. El hecho de que una partícula libre se comporte igual en los sistemas  $K_g$  y en  $K_a$  no implica que lo haga también si está sujeta a un campo no gravitacional. Por lo anterior, establecer la validez del PED no basta para asegurar la del PEE. Sin embargo, el PEE si implica el PED, por lo cual una violación de éste constituiría una prueba de la invalidez del PEE [13].

Con respecto de lo anterior, en 1960 Leonard Shchiff [14] concluyó que los “experimentos cruciales” para verificar la validez del PEE son deducibles del PED y de la Relatividad Especial, lo cual le llevó a conjeturar<sup>4</sup> que *cualquier teoría completa y autoconsistente de la gravedad que*

<sup>2</sup>De aquí en adelante, llamaremos  $K_g$  al laboratorio en presencia del campo gravitacional y  $K_a$  al laboratorio moviéndose aceleradamente.

<sup>3</sup>Una discusión clara puede encontrarse en la página 3571 de [8].

<sup>4</sup>La conjetura explícitamente formulada no aparece en [14], mas sus conclusiones llevan a proponer la conjetura.

*incorpore el PED necesariamente incorpora el PEE.* Así pues, la conjetura de Schiff indica que probar la validez del PED es suficiente para asegurar que el PEE es válido. Más aún, dado que del PEE se sigue el que la gravedad sea un efecto geométrico, la validez de la conjetura implica que cualquier teoría que tenga el PED como fundamento también deberá dar a la gravedad un tratamiento geométrico.

Hasta donde sabemos, no se ha reportado en la literatura una prueba de la validez de la conjetura de Schiff. Sin embargo, existen varios argumentos que la hacen fuertemente plausible. Uno de ellos fue dado por Haugan [15]. En su artículo, Haugan concluye, usando el principio de conservación de la energía, que la existencia de efectos de ubicación o marcos preferenciales (los cuales no deberían presentarse si el PEE es correcto) pueden llevar a violaciones del PED.

En resumen, si el PED se viola entonces el PEE no es válido. Si la conjetura de Schiff es válida, la validez del PED asegura la validez del PEE. En lo sucesivo se considerará válida la conjetura de Schiff, por lo cual se considerará al PED como la base de la Teoría de la Relatividad General<sup>5</sup>.

### 1.3. El Principio de Equivalencia en la Mecánica Cuántica

Diversos experimentos [16, 17] han demostrado que el PED es válido con una precisión de hasta  $10^{-15}$  en el parámetro de Eötvös, el cual mide la diferencia entre los cocientes de las masas inercial y gravitacional de dos cuerpos. Algunos aspectos del PEE también han sido puestos a prueba con éxito considerable (Véase por ejemplo [18]).

Sin embargo, dichas pruebas constituyen experimentos clásicos, es decir, los modelos teóricos en que se basan sus diseños experimentales no involucran consideraciones Mecánico-Cuánticas. A mediados de la década de 1970, Colella, Overhauser y Werner (COW) iniciaron una serie de experimentos para determinar la influencia de la gravedad en fenómenos cuánticos [19, 20]. En dichos experimentos, un haz de neutrones se introduce en un interferómetro y se busca determinar el efecto inducido por la gravedad en el interferograma.

Dos conclusiones importantes se obtienen del experimento de COW. La primera de ellas es el hecho de que la masa inercial y la carga gravitacional son muy parecidos. Colella obtiene un valor de  $\sqrt{m_n m_{ng}} = 1.675(3) \times 10^{-27} \text{ kg}$  para el producto de las masas inercial ( $m_n$ ) y gravitacional ( $m_{ng}$ ) del neutrón, mientras que el valor actualmente aceptado es de  $m_n = 1.67492749804(95) \times 10^{-27} \text{ kg}$  [21]. Lo anterior se puede interpretar como una prueba de la validez del PED a nivel cuántico. No obstante, es válido asumir que la diferencia entre  $m_n$  y  $m_{ng}$  sea demasiado pequeña para ser detectada por ese experimento. Experimentos más precisos son necesarios para considerar que las masas inercial y gravitacional sean del todo iguales.

En segundo lugar, el experimento de COW representa una parte de la prueba de la validez del PED. El resto de la prueba, como señalan los autores, consiste en repetir el experimento en un sistema acelerado y en ausencia de gravedad. Dicho experimento fue realizado por Bonse y

<sup>5</sup>De hecho, cualquier teoría métrica de la gravedad tendrá como base el PED. Además, de ser válida la conjetura de Schiff, toda teoría completa y autoconsistente de la gravedad que involucre el PED debe ser una teoría métrica. Esta es una de las conclusiones alcanzadas por Thorne et al [8].

Wroblewski en 1983 [22]. El experimento muestra que, para aceleración menor que  $0.34 \text{ m/s}^2$ , las mediciones concuerdan muy bien con la predicción teórica para un campo gravitacional uniforme equivalente. Sin embargo, hay ciertos aspectos del experimento que merecen analizarse:

- I.- Para aceleraciones mayores a  $0.34 \text{ m/s}^2$  la nitidez del interferograma es prácticamente nula, por lo cual una comparación de los resultados con los del experimento de COW no es posible. Un estudio más detallado [23] muestra que el decaimiento del contraste es un efecto dinámico debido a la aceleración del sistema, por lo cual un experimento con aceleración mayor no es posible con la técnica usada.
- II.- Si bien el experimento parece demostrar la validez del PED, es posible que se deba a la poca aceleración. Suponga que, en el sistema acelerado, el cambio de fase tiene una contribución debida al hecho de estar en un sistema acelerado. Dicha contribución no necesariamente debe estar presente en el sistema en presencia de gravedad, a menos que el PED se satisfaga. Si dicha contribución variase con la aceleración del sistema, entonces es razonable esperar que para aceleraciones pequeñas ésta será también muy pequeña, lo cual explicaría la concordancia entre los resultados experimentales y los predichos para el experimento de COW.

Una prueba de que este tipo de contribuciones pudieron haberse omitido del cálculo es la siguiente: Los experimentos de COW y de Bonse utilizan funciones de onda estacionarias en el cálculo. Sin embargo, Penrose [24] afirma que las funciones de onda de una partícula en presencia de un campo gravitacional ( $\psi_{grav}$ ) y en un marco moviéndose con aceleración equivalente  $\mathbf{g}$  ( $\psi_{ac}$ ) están relacionadas por medio de un cambio de fase:

$$\psi_{ac} = e^{i \left( \frac{mt^3 g^2}{6} - mt \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \right)} \psi_{grav}. \quad (1.5)$$

Este cambio de fase no es tomado en cuenta por Bonse y Wroblewski. Aunque la forma del factor de fase en (1.5) implique una oscilación muy rápida, es posible que sean detectables. El factor  $g^2$  indica que el cambio de fase debido a este factor difiere en tres ordenes de magnitud entre el experimento de Bonse y Wroblewski y un experimento con aceleración igual a  $g$ .

Concluimos entonces que el experimento de COW, junto con el trabajo de Bonse y Wroblewski, no constituyen una prueba irrefutable de la validez del PEE en la Mecánica Cuántica. Para cerrar esta sección, vale la pena mencionar que el experimento de COW fue repetido por Werner et al. [25] con mayor precisión y un cálculo más refinado del resultado teórico. El resultado es una discrepancia del 0.8% entre teoría y experimento. En palabras de Werner “*Es tentador creer que la discrepancia de 0.8% entre teoría y experimento es real, y representa un efecto no-Newtoniano adicional*”.

## 1.4. Compatibilidad del Principio de Equivalencia con la Mecánica Cuántica

Hasta aquí se ha hablado del Principio de Equivalencia y de su papel como fundamento de la Teoría de la Relatividad General. Se ha discutido cómo el experimento de COW, considerado una de las pruebas fundamentales de la validez del PED en la Mecánica Cuántica, en realidad no representa evidencia innegable de ello. Por tanto, queda en duda si este principio está realmente

integrado en la teoría cuántica.

Estamos ahora en posición de formular una pregunta un tanto más fundamental: ¿Debe cumplirse el Principio de Equivalencia en la Mecánica Cuántica? El cuestionarnos esto resulta en un ejercicio filosófico interesante, pues nos permitirá analizar el problema de la validez desde perspectivas un tanto diferentes. Con el fin de tocar este tema es necesario formular el PED de una forma más precisa [26]:

**Principio 3 (Principio de Equivalencia Débil).** Si un cuerpo de prueba neutro es colocado en un evento inicial en el espacio-tiempo y se le da una velocidad inicial, entonces su trayectoria subsecuente será independiente de su estructura y composición interna.

En esta formulación, es importante señalar que un “cuerpo de prueba neutro” es un cuerpo eléctricamente neutro cuya autoenergía gravitacional es despreciable y que además es suficientemente pequeño para ignorar su acoplamiento con inhomogeneidades de campos externos. Es evidente que un cuerpo de prueba ideal es una partícula puntual neutra. En virtud de esta formulación podemos definir la caída libre como el movimiento en el espacio-tiempo de un cuerpo de prueba neutro libre. Si el espacio-tiempo es permeado<sup>6</sup> por un campo gravitacional uniforme, entonces se recupera el enunciado que se presentó en la primera sección.

El problema evidente al interpretar este enunciado en términos de la Mecánica Cuántica surge de la noción de trayectoria. Se sabe de la Mecánica Clásica que la trayectoria de una partícula se puede obtener a partir de su posición y velocidad inicial. En la Mecánica Cuántica, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg establece una cota en la precisión con la que pueden medirse simultáneamente un par de observables incompatibles [27]. Pero un par de observables incompatibles son la posición y el momento, por lo cual, éstas no pueden ser determinadas simultáneamente con toda precisión. Por lo anterior, se concluye que no es posible definir una trayectoria en la Mecánica Cuántica. Así, es necesario preguntarse, en contraste con el PED clásico ¿Los cuerpos de prueba neutros en la Mecánica Cuántica describen algún tipo de “trayectoria cuántica” independiente de su estructura y composición?

Habiendo tocado el tema de las trayectorias, estamos en posición de discutir uno de los principales problemas entre la Mecánica Cuántica y la TRG. De acuerdo a la TRG, las trayectorias de partículas libres son las geodésicas de la métrica del espacio-tiempo. Si  $g_{ab}$  es la métrica y  $\nabla_a$  el operador derivada asociado a ésta, entonces una partícula libre cuya cuadrivelocidad es  $u^a$  satisface la ecuación:

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \tag{1.6}$$

De conocerse las trayectorias de partículas libres es posible (al menos en principio) determinar la métrica del espacio-tiempo. En la práctica, la métrica es calculada de la ecuación de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci y  $R$  el escalar de Ricci. Aunque en la Mecánica Cuántica es posible definir un tensor de energía-momento

<sup>6</sup>Asumiremos que desconocemos el efecto de la gravedad sobre el espacio-tiempo, y la modelaremos como un campo.

## CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

(véase por ejemplo [28]), éste depende ya sea de potenciales macroscópicos o de aproximaciones semiclásicas. No es posible determinar una métrica por medio de (1.7) usando elementos puramente cuánticos. La opción de calcular la métrica usando las trayectorias de partículas libres tampoco es una opción. El principio de incertidumbre de Heisenberg no permite definir trayectorias. Lo anterior indica la imposibilidad de incorporar la Gravedad, al menos como la explica la Teoría de la Relatividad General, en el marco de la Mecánica Cuántica.

Lo discutido hasta aquí, es prueba del gran problema presente al conciliar la Mecánica Cuántica con el Principio de Equivalencia. Dado que el concepto de trayectoria se encuentra inevitablemente ligado a la formulación clásica de este principio, diversos autores (véase, por ejemplo, las referencias [29, 30, 31]) han propuesto reformulaciones del mismo, con el propósito de dejarlo a un lado. No es el propósito de este trabajo ahondar en los detalles de estas formulaciones, pero en síntesis, lo que puede concluirse es que no hay un consenso general de cuál es la reformulación correcta. Mayor investigación, tanto experimental como teórica es necesaria.

Llegados a este punto de la discusión, debemos hacer énfasis en un hecho fundamental. Si bien la validez del PEE en la Mecánica Cuántica representa un problema abierto, en el régimen clásico éste se acepta como válido. Si aceptamos que la Mecánica Clásica, como teoría menos precisa y con omisión de información, debe emerger de la Mecánica Cuántica a través de algún proceso de límite<sup>7</sup>, entonces dicha emergencia debe ofrecernos información sobre la validez del PEE.

En este trabajo indagaremos primero sobre la emergencia del PEE en el límite clásico. Proporcionaremos evidencia de que, a pesar de que es posible obtener el PEE mediante un proceso de límite, éste emerge en forma aproximada. Esta parte del trabajo se encuentra en el capítulo 2. Posteriormente, en el capítulo 3 analizaremos la validez del PEE por medio de un análogo cuántico del experimento básico de caída libre. Probaremos que la “caída” de una partícula cuántica depende de su masa, violando así el PED.

---

<sup>7</sup>No hablaremos en profundidad del problema del límite clásico. Un análisis amplio del tema se puede encontrar en la referencia [32] y en el segundo capítulo de [33].

## Capítulo 2

# Emergencia del Principio de Equivalencia Débil en la Mecánica Cuántica

## 2.1. El límite clásico de la Mecánica Cuántica

10  
21 La Teoría de la Relatividad Especial, formulada por Albert Einstein en 1905, permite explicar los fenómenos que ocurren a velocidades comparables con la de la luz. Representó una completa revolución en el conocimiento científico, pues socavó los fundamentos mismos de la Física y aún de la Filosofía. Pese a lo anterior, la Mecánica Clásica sigue siendo válida para explicar los sucesos que ocurren a velocidades bajas, es decir, los sucesos en la escala cotidiana de velocidades. Por consiguiente, se intuye que los resultados de la Relatividad Especial deben reducirse, en el límite apropiado, a los de la Mecánica Clásica. Como es bien sabido, dicho límite corresponde a  $v \ll c$ , donde  $v$  es la velocidad de los cuerpos involucrados y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Más aún, este límite permite dar una explicación simple del por qué una teoría es más general que la otra: *La Mecánica Clásica solo considera fenómenos a bajas velocidades, por lo cual no es necesario considerar en ella los efectos asociados a la naturaleza finita y constante de la velocidad de las interacciones* [34].

14 La relación entre la Relatividad Especial y la Mecánica Clásica permite ilustrar lo que debe entenderse como un límite clásico: *Al tener dos teorías A y B, de las cuales A es más general que B (en el sentido de que permite explicar un conjunto mayor de fenómenos), A debe reducirse a B al despreñar la información que no es considerada en ésta.*

29  
6  
3 El criterio descrito implica, en síntesis, que toda nueva teoría científica debe dar cuenta de los fenómenos explicados por sus teorías antecesoras. Por lo tanto, cabe esperar que, siendo la Mecánica Cuántica una teoría que describe los fenómenos a escalas atómicas, ésta debe dar lugar, en cierto límite, a la Mecánica Clásica, que describe los fenómenos a escalas cotidianas<sup>1</sup>. Sin embargo, la relación entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica es mucho más delicada que aquella entre esta última y la Relatividad Especial. Si bien no estamos en posición de discutir las diferencias entre ambas teorías<sup>2</sup>, vale la pena mencionar que éstas se encuentran en sus fundamentos mismos. Así, el problema de establecer una forma en que la Mecánica Cuántica dé lugar a la Mecánica Clásica es de interés tanto físico como filosófico.

<sup>1</sup>Aunque algunos autores difieren de esta línea de pensamiento, véase por ejemplo los trabajos de Penrose [24].

<sup>2</sup>Una excelente introducción al tema se puede encontrar en el capítulo 17 de [35]

### 2.1.1. Propuestas de solución

El problema del límite clásico de la Mecánica Cuántica data del origen mismo de la teoría. Siempre ha resultado complicado reconciliar los resultados clásicos de los predichos y explicados por la Teoría Cuántica. Diversos autores han propuesto soluciones al problema de entender como emerge la Mecánica Clásica de la Cuántica, entre las más destacadas de éstas están:

- **El límite de Planck:** La Ley de Radiación de Planck, deducida por Max Planck al suponer que la radiación se emite en paquetes [36], establece que la densidad espectral de energía emitida por un cuerpo negro a temperatura  $T$  es:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (2.1)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Dicha ley marcó el inicio del estudio de la Física Cuántica. Como cabría esperar, la densidad deducida por Planck es muy diferente de la predicha por la teoría electromagnética clásica, conocida como Ley de Radiación de Rayleigh-Jeans, que establece:

$$\rho_{cl}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T. \quad (2.2)$$

Es fácil probar que esta expresión puede obtenerse de la de Planck al tomar el límite  $h \rightarrow 0$ . Lo anterior se puede interpretar como una prueba de que la Física Clásica puede obtenerse de la física cuántica mediante la aproximación adecuada. El límite  $h \rightarrow 0$  se conoce en la literatura como el límite de Planck.

- **El Principio de Correspondencia de Bohr:** Con el fin de resolver el problema de la inestabilidad en el modelo atómico de Rutherford, Niels Bohr propuso que los electrones en el átomo se encuentran en estados en los que no emiten radiación [37]. Esto llevó a Bohr a establecer un principio que permitía calcular el espectro de emisión atómico. Dicho principio establece que “*para sistemas cuánticos con eigenestados discretos, el espectro de frecuencias cuántico coincide con el espectro clásico en el límite de números cuánticos grandes*” [38].

Para ilustrar el principio, considere la frecuencia de transición entre dos niveles de energía vecinos del átomo de hidrógeno:

$$\nu = \frac{me^4}{64\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]. \quad (2.3)$$

Para valores grandes de  $n$ , esta expresión toma la forma:

$$\nu = \frac{me^4}{32\pi^3\epsilon_0^2\hbar^3 n^3}. \quad (2.4)$$

Si consideramos la definición del radio de Bohr:

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}, \quad (2.5)$$

entonces la frecuencia de transición entre estados vecinos con niveles de energía muy grandes puede escribirse en la forma:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_n^3}}, \quad (2.6)$$

donde  $r_n = n^2 r_B$  es el radio de la órbita estacionaria. Esta expresión coincide con la de la frecuencia orbital de un electrón alrededor de un protón:

$$\nu_{cl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_n^3}}, \quad (2.7)$$

ilustrando la validez del Principio de Correspondencia. Debe mencionarse que, originalmente, el Principio de Correspondencia de Bohr fue empleado para calcular los espectros cuánticos mediante los clásicos [39], en una época en que no se contaba con las herramientas teóricas para determinar dichas cantidades.

- **El teorema de Ehrenfest:** En 1927, con la mecánica ondulatoria de Schrödinger ya formulada, Ehrenfest presenta un teorema que relaciona las observables físicas cuánticas con las variables clásicas [40]. El teorema establece que, para un sistema sujeto a un potencial  $V(\mathbf{x})$  se satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_i \rangle &= \frac{1}{m} \langle p_i \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_i \rangle &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}) \right\rangle, \end{aligned}$$

donde  $x_i$  y  $p_i$  son las observables de posición y momento en la  $i$ -ésima dirección. Estas relaciones son similares a las existentes entre la posición y el momento clásicos. Así, el Teorema de Ehrenfest parece indicar que los valores esperados de las observables siguen las mismas ecuaciones que las variables clásicas, por lo cual diversos autores consideran que este teorema permite realizar una descripción semiclásica del comportamiento cuántico. Sin embargo, puede probarse que lo anterior solo puede considerarse una aproximación para paquetes de onda con dispersión pequeña [41].

Más aún, dado que el potencial del oscilador armónico es par, resulta claro que:  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}) \rangle$ , dejando al Teorema de Ehrenfest como una simple afirmación de que  $0 = 0$ . El hecho de que este teorema falle al describir en forma semiclásica al oscilador armónico, indica que no puede ser considerado como una solución al problema del límite clásico.

- **La aproximación WKB:** Se trata de un método desarrollado en 1926 por Wentzel, Kramers y Brillouin que permite aproximar soluciones a ecuaciones lineales de segundo orden, entre las que se incluye la ecuación de Schrödinger [42]. El método permite estudiar sistemas con potenciales que varían lentamente comparados con la longitud de onda de de Broglie. La idea básica es suponer que la función de onda tiene la forma:

$$\psi_{WKB}(x) = e^{iS(x)/\hbar},$$

y al ingresar esto en la ecuación de Schrödinger se obtiene la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right)^2 + p^2(x) = 0, \quad (2.8)$$

donde  $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$  es el momento lineal. Proponiendo como solución la llamada *expansión WKB*  $\mathcal{S} = S + (\hbar/i)S_1 + (\hbar/i)^2 S_2 + \dots$  como solución se puede obtener la función WKB:

$$\psi_{WKB}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[ \pm \frac{i}{\hbar} \int p(x') dx' \right]. \quad (2.9)$$

Como puede notarse, esta función no está definida en los puntos de retorno clásico, en los cuales el momento es cero. Debe mencionarse también que hay sistemas para los cuales la aproximación WKB no puede aplicarse. Tal es el caso de las órbitas circulares en el átomo de hidrógeno, en las que el electrón no tiene componente de velocidad en la dirección radial [43]. Lo anterior indicaría que dichas órbitas no tienen un límite clásico, lo cual no es consistente con el sentido común.

En la literatura hay más propuestas de solución además de las arriba mencionadas, como son la función de Wigner [44] y la decoherencia cuántica [45]. Si bien cada propuesta por si misma representa un prometedor camino hacia la interpretación del límite clásico, ninguna representa una solución completa al problema<sup>3</sup>.

### 2.1.2. Formulación Matemática del Principio de Correspondencia

6 Antes del desarrollo de la Mecánica Matricial de Heisenberg, Born y Jordan, se gestó lo que se conoce como Mecánica Cuántica Antigua. Esta teoría surge como una forma de explicar los resultados experimentales a escalas atómicas, observados durante el primer cuarto del siglo XX, con base en los trabajos de Planck y Einstein sobre la cuantización. El Principio de Correspondencia de Bohr es formulado durante este periodo de generación de conocimiento, por lo cual carece de una formulación matemática precisa, en el marco de los desarrollos teóricos alcanzados en 1927 por Heisenberg y Schrödinger, haciéndolo inaplicable a la Mecánica Cuántica moderna. El mismo Heisenberg trabajó en una generalización del principio, la cual se conoce como el Principio de Correspondencia de Heisenberg [46]. Sin embargo, éste es sólo aplicable al estudio de la polarización de la luz.

Una parte importante del principio de correspondencia de Bohr es su contenido físico. En su versión original, Bohr comparaba la frecuencia cuántica con la clásica para una partícula describiendo un movimiento periódico. Consideramos que Bohr eligió estas cantidades debido a que, en términos meramente conceptuales, describen cantidades similares. Lo anterior es, a nuestro parecer, la forma correcta de abordar el problema: comparar cantidades que se encuentren definidas en ambos regímenes. En concordancia con lo anterior, Bernal y colaboradores [47] han propuesto un método para aplicar el principio de correspondencia de Bohr a la densidad de probabilidad de un sistema. Dicho método, que constituye una **Formulación Matemática del Principio de Correspondencia** (FMPC), permite comparar la densidad de probabilidad de un sistema cuántico con la de un sistema clásico análogo.

Una cantidad que puede formularse tanto en Mecánica Clásica como en Mecánica Cuántica es la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en un punto del espacio. Sean  $\rho_C$  y  $\rho_Q$  las densidades clásica y cuántica respectivamente, del Principio de Correspondencia de Bohr se esperaría, intuitivamente, que

$$\rho_Q \xrightarrow{n \gg 1} \rho_C, \quad (2.10)$$

indicando la emergencia del comportamiento clásico. Si bien es cierto que  $\rho_Q$  se aproxima, como un promedio local puntual, a  $\rho_C$  en el régimen de  $n \gg 1$  (véase por ejemplo [48]), no es posible

<sup>3</sup>Véase por ejemplo el artículo de Makowski [32] para una crítica concisa del Principio de Correspondencia de Bohr y la sección 2.1 de [33] para una breve discusión de cada propuesta.

obtenerla analíticamente aplicando directamente dicha aproximación.

En cambio, la FMPC permite obtener analíticamente  $\rho_C$  a partir de  $\rho_Q$ . Para ello, considere que las densidades pueden escribirse como expansiones de Fourier en la forma:

$$\rho_Q(x) = \int f_Q(p, n) e^{i \frac{px}{\hbar}}, \quad \rho_C(x) = \int f_C(p) e^{i \frac{px}{\hbar}}, \quad (2.11)$$

donde  $f_C$  y  $f_Q$  son las transformadas de Fourier de  $\rho_C$  y  $\rho_Q$  respectivamente. Lo que se propone es que considerar directamente el límite como en (2.10) no es correcto, en su lugar, el límite  $n \gg 1$  debe aplicarse a  $f_Q$ .

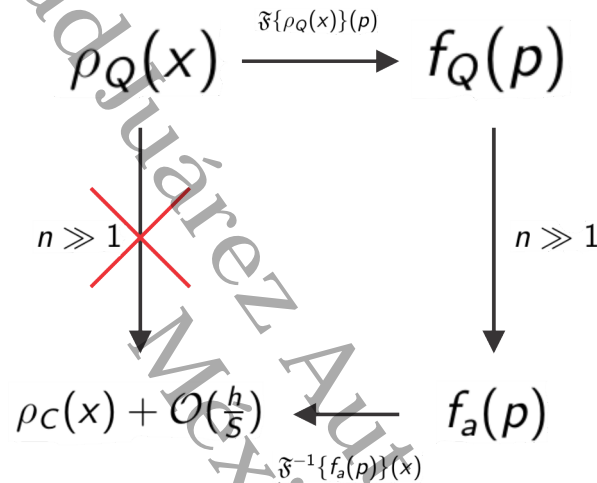


Figura 2.1: La figura muestra la forma correcta de aplicar el Principio de Correspondencia de Bohr para reducir la densidad de probabilidad cuántica a su análogo clásico. El límite  $n \gg 1$  no debe aplicarse a la densidad de probabilidad sino a su transformada de Fourier.

13

La aplicación del método es esquematizada en la figura 2.1. El comportamiento de  $f_Q$  en el límite  $n \gg 1$  se obtiene mediante una serie asintótica. El valor de  $n$  que corresponde a la energía clásica se calcula mediante el principio de correspondencia, igualando los valores de las energías clásica y cuántica. El resultado es una expresión en la forma:

$$f_Q(p, n) \stackrel{n \gg 1}{\approx} f_C(p) + \sum_i f^{(i)}(p, \hbar). \quad (2.12)$$

Una serie cuyo primer término coincide con  $f_C$  y donde los términos  $f^{(i)}$  pueden considerarse correcciones al coeficiente clásico que equivalen a efectos cuánticos residuales. Estos términos, para los casos estudiados, tienen como factores potencias del cociente entre la constante de Planck y la acción clásica.

En la literatura puede encontrarse la aplicación de este procedimiento a diversos sistemas. El pozo cuadrado infinito y el oscilador armónico son tratados en [47], las densidades se obtienen en forma analítica y las correcciones son de la forma mencionada. El problema de Kepler es discutido en [49], en donde se obtiene la densidad de probabilidad radial clásica. En un trabajo no publicado

31

se ha estudiado el comportamiento de un conjunto de osciladores acoplados<sup>4</sup>, se ha mostrado que su comportamiento tiende al de un oscilador clásico al aumentar la cantidad de osciladores. Más recientemente, se ha aplicado también al oscilador de Dirac [50], mostrando que es válido para la Mecánica Cuántica Relativista.

Debe notarse que, debido a que el procedimiento descrito involucra al número cuántico principal, éste solo es aplicable a sistemas periódicos. Esto, aunque es claramente una limitación, no ha impedido estudiar los interesantes sistemas que hemos mencionado antes. Una generalización es necesaria para considerar a la FMPC como una solución completa al problema del límite clásico.

Si bien la ilustración de la aplicación del método se deja hasta la siguiente sección, es importante discutir aquí las consecuencias que éste tiene a la solución del problema del límite clásico. Para hacerlo debemos fijarnos en la expresión (2.12). La consecuencia inmediata se obtiene al calcular la transformada de Fourier inversa. Dado que los términos  $f^{(i)}$  son pequeños, se recupera  $\rho_C$  como el primer término de una serie. Lo anterior indica que, para números cuánticos grandes, el sistema cuántico se distribuye en forma casi idéntica a la clásica.

Una característica importante de los términos de corrección es que no son nulos, lo cual es importante para la interpretación de este límite clásico. La expresión en (2.12), junto con el hecho anterior, revela que  $\rho_Q$  no es exactamente igual a  $\rho_C$ . De aquí la idea de asintoticidad: el comportamiento del sistema cuántico puede parecerse tanto como se quiera al del clásico, mas no pueden ser idénticos. El comportamiento cuántico tiende asintóticamente al comportamiento clásico.

La discusión anterior da pie a interpretar la aplicación de la FMPC como una solución al problema del límite clásico. El comportamiento clásico emerge al aumentar el número cuántico principal del sistema cuántico. El hecho de que los términos de corrección no sean nulos es lo que nos motivó a estudiar la caída libre mediante este procedimiento. Si los términos de corrección dependieran de la masa, podríamos interpretar que el PE emerge sólo en forma aproximada. La siguiente sección está dedicada a aplicar la FMPC a la caída libre y a estudiar su relación con el PE.

### 2.1.3. El límite clásico de la caída libre

Dedicaremos esta sección a aplicar la FMPC a una partícula en caída libre. Estableceremos además la conexión entre este sistema y la validez del PE, y presentaremos evidencia de la violación de éste. Como primer paso en esta tarea, debemos obtener las densidades de probabilidad clásica y cuántica.

El potencial asociado a la caída libre es el potencial lineal  $V = mgz$ , siendo  $z$  la altura,  $m$  la masa de la partícula y  $g$  la aceleración causada por la gravedad. Es sabido que la función de onda asociada a este potencial no es normalizable, por lo cual se suele colocar un “suelo”, es decir, una barrera de potencial infinita en  $z = 0$  [51, 52]. Lo anterior permite normalizar la función de onda y

<sup>4</sup>Dicho trabajo, titulado *Asymptotic quantum mechanics for  $N$  coupled oscillators*, fue presentado por A. C. Granda en el “VIII CONFERENCE ON QUANTUM FOUNDATIONS” y derivó de su tesis de grado.

CAPITULO 2. EMERGENCIA DEL PED EN LA MC

le da un carácter periódico al sistema. Así, estamos interesados en el potencial

$$V = \begin{cases} mgz, & \text{si } z \geq 0 \\ \infty, & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

En la literatura, se denomina a este sistema como un rebotador. Para un sistema clásico, la probabilidad de hallar una partícula en un intervalo  $dz$  se obtiene dividiendo el tiempo  $dt$ , que le toma recorrer  $dz$ , entre el tiempo total de recorrido  $\tau$ , esto es:

$$\rho_C dz = \frac{dt}{\tau} = \frac{dz}{v\tau}, \quad (2.14)$$

siendo  $v$  la velocidad de la partícula en  $dz$ . Si  $H$  es la altura máxima del rebotador, la probabilidad  $\rho_C$  de hallar la partícula en  $z$  puede obtenerse en forma sencilla como [53]:

$$\rho_C = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{H(H-z)}}, & \text{si } z \geq 0 \\ 0, & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

cuya transformada de Fourier es [33]:

$$f_C(p) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2pH}} e^{-i\frac{pH}{\hbar}} \left[ C\left(\sqrt{\frac{2pH}{\pi\hbar}}\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2pH}{\pi\hbar}}\right) \right], \quad (2.16)$$

donde las funciones  $C(x)$  y  $S(x)$  son las integrales de Fresnel.<sup>5</sup>

En el caso cuántico, el rebotador está descrito por la función de onda, la cual se obtiene de resolver la ecuación de Schrödinger sujeta al potencial (2.13). Estamos interesados en los eigenestados del rebotador, por lo cual hemos de eliminar la dependencia del tiempo en la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, los estados estacionarios del rebotador están descritos por las soluciones a la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + mgz\psi(z) = E\psi(z), \quad (2.17)$$

sujeta las condiciones de frontera adecuadas. La primera condición es debida a la superficie reflectiva, que implica que  $\psi(z) = 0$  para  $z \leq 0$ . La segunda condición es pedir que la función esté acotada, para lo cual se ha de cumplir que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 0$ . Entonces las funciones de onda asociadas a los eigenestados tienen la forma:

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l_g |Ai'(a_n)|}} Ai\left[\frac{1}{l_g}(z - H_n)\right], & \text{si } z \geq 0 \\ 0, & \text{si } z < 0 \end{cases}, \quad (2.18)$$

donde  $l_g = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2g}}$  es la longitud característica del sistema [52],  $Ai(x)$  es la función de Airy [55] y  $a_n$  es la  $n$ -ésima solución a  $Ai(a_n) = 0$ . La función de Airy tiene una cantidad infinita de soluciones

<sup>5</sup>Las integrales de Fresnel se definen cómo [54]:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt.$$

CAPITULO 2. EMERGENCIA DEL PED EN LA MC

$a_n$  negativas y se cumple también que  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Puede probarse que, para valores grandes de  $n$ , se satisface [56]:

$$a_n \approx - \left[ \frac{3\pi}{8} 4n \right]^{\frac{2}{3}}. \tag{2.19}$$

Entonces la aproximación de  $n$  grande, necesaria para aplicar la FMPC, equivale a considerar  $a_n$  grande. Los estados de energía están dados por  $E_n = -a_n l_g m g$ . Los eigenvalores de energía  $E_n$  nos permiten definir la cantidad  $H_n = \frac{E_n}{m g}$  que, por su relación con la energía y su papel en la función de onda, se denominan *eigenvalores de altura* y satisfacen  $H_n = -a_n l_g$ . La densidad de probabilidad se obtiene directamente de (2.18):

$$\rho_Q(z) \equiv |\psi(z)|^2 = \frac{1}{l_g Ai'^2(a_n)} Ai^2 \left[ \frac{1}{l_g} (z - H_n) \right], \quad z \geq 0, \tag{2.20}$$

y se anula para valores negativos de  $z$ . Para estudiar el comportamiento asintótico del sistema, es necesario calcular la transformada de Fourier  $f_Q(p)$ :

$$f_Q(p) = \frac{1}{l_g Ai'^2(a_n)} \int_0^\infty Ai^2 \left[ \frac{1}{l_g} (z - H_n) \right] e^{-\frac{ipz}{\hbar}} dz. \tag{2.21}$$

Un cálculo exacto de esta integral, hasta donde sabemos, no se encuentra reportado en la literatura. Si bien el comportamiento asintótico de (2.21) fue estudiado en un trabajo previo (puede encontrarse en [33]), esa aproximación no permite obtener información sobre los términos de corrección cuánticos. Aquí se presenta un cálculo alternativo basado en el método de Albright (véase el apéndice A para una introducción y un desarrollo explícito de las fórmulas que usaremos en adelante).

Primero realizamos el cambio de variable  $x = \frac{1}{l_g} (z - H_n)$  en la integral (2.21) y reemplazamos la función exponencial por su representación en serie de Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

obteniendo así la integral

$$f_Q(p) = \frac{e^{-i\frac{pH_n}{\hbar}}}{Ai'^2(a_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{pl_g}{\hbar}\right)^k}{k!} \int_{a_n}^{\infty} x^k Ai^2(x) dx, \tag{2.22}$$

Usando las expresiones (A.5) y (A.6), la transformada toma la forma:

$$f_Q(p) = \frac{e^{-i\frac{pH_n}{\hbar}}}{Ai'^2(a_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{pl_g}{\hbar}\right)^k}{k!} \left\{ \frac{(-a_n)^k Ai'^2(a_n)}{2k+1} [1 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2(2k-5)} (-a_n)^{-3}] + \Omega(a_n, k) \sum_{m=2} \omega_m(k) (-a_n)^{-3m} \right\}. \tag{2.23}$$

Antes de continuar, debemos hablar sobre el valor del número cuántico principal para un sistema clásico realista. Considere entonces una partícula cayendo desde una altura  $h$ , usando la

8

aproximación para los ceros de la función de Airy, dada en la ecuación (2.19), el valor de  $n$  puede estimarse como:

$$n \sim \frac{2}{3\pi} (h/l_g)^{3/2}. \tag{2.24}$$

Así, por ejemplo, para un átomo de Cesio se tiene que  $l_g = 0.226 \mu m$  y entonces, si es soltado desde una altura de  $1 mm$ , el número cuántico correspondiente es  $n \sim 62500$ . Para un átomo de sodio, mucho más ligero, la longitud característica es  $l_g = 0.727 \mu m$ , por lo cual se tendría  $n \sim 10000$ . Al considerar partículas más pesadas, el número cuántico principal aumentará, y también lo hará su capacidad de mostrar comportamiento clásico. El análisis anterior indica que, para sistemas cuyas dimensiones asemejan el de uno clásico (la altura máxima, por ejemplo), el número cuántico principal, y por lo tanto, el valor de  $a_n$ , es muy grande.

Debido al factor  $a_n^{-3}$ , los términos en la serie asintótica disminuyen en magnitud. Por lo tanto, en nuestra aproximación de sistemas que tienden al comportamiento clásico, podemos quedarnos solo con los dos primeros términos de la serie. Con lo anterior, y definiendo  $Q = \frac{pH_n}{h}$ , el comportamiento asintótico de la transformada de Fourier esta dado por:

$$f_a(p) = e^{-iQ} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iQ)^k}{k!(2k+1)} - \frac{1}{a_n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iQ)^k}{k!} \frac{k(k-1)(k-2)}{2(2k+1)(2k-5)} \right]. \tag{2.25}$$

Llamemos  $f_a^{(0)}$  y  $f_a^{(1)}$  al primer y segundo término respectivamente. Ambas series pueden calcularse en forma cerrada con ayuda de software. Para el primer término se tiene:

$$f_a^{(0)}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2Q}} e^{-iQ} \left[ C \left( \sqrt{\frac{2Q}{\pi}} \right) + iS \left( \sqrt{\frac{2Q}{\pi}} \right) \right]. \tag{2.26}$$

Y, dado que el valor de la energía cuántica debe tender al de la energía clásica, se debe tener que  $H_n = H$ , haciendo que este término sea idéntico a (2.16). Es decir, hemos probado que, a primer orden, el comportamiento del rebotador cuántico es idéntico al de su contraparte cuántica. La FMPC es aplicable al rebotador y permite obtener el límite clásico correcto.

El segundo término, que identificaremos como la primera corrección cuántica, también puede ser evaluado en forma cerrada. El primer término de corrección resulta ser:

$$f_a^{(1)}(p) = \frac{1}{96(-a_n)^3} \left[ \frac{8iQ^3 - 15}{\sqrt{iQ}} F(\sqrt{iQ}) - 2Q(2Q - 5i) + 15 \right], \tag{2.27}$$

donde  $F(x)$  es la función de Dawson<sup>6</sup>. Esta función es considerablemente más complicada que la obtenida para el primer término de la serie, de hecho su transformada inversa no puede evaluarse en forma cerrada. En la siguiente sección presentaremos evidencia de que la aportación de este término al valor total de la densidad de probabilidad es casi nulo.

<sup>6</sup>La función de Dawson es definida por medio de la integral [54]:

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

## 2.2. Términos de corrección y el Principio de Equivalencia

Hemos visto hasta aquí que las densidades de probabilidad clásica y cuántica son muy similares. *Grosso modo*, ambas describen el mismo concepto físico, el de la probabilidad de hallar a una partícula en un cierto lugar del espacio. Sin embargo, debe quedar claro que éstas son fundamentalmente diferentes. La primera queda determinada completamente si se conoce la trayectoria de la partícula. Por otro lado, la densidad cuántica depende de la función de onda, misma que depende del sistema en sí. No obstante, es posible establecer una relación entre las densidades de probabilidad clásica y cuántica por medio de la FMPC que hemos estudiado en la sección anterior. Por ende, podríamos concluir que la información sobre la trayectoria de una partícula emerge de la función de onda mediante el proceso de límite asintótico.

No obstante, el proceso de límite asintótico da lugar a términos de corrección que, pese a ser pequeños en magnitud, son generalmente no nulos. Lo anterior implica que la densidad cuántica, para  $n \gg 1$ , no es exactamente igual a su contraparte clásica. En virtud de la aparente emergencia de las trayectorias a partir de la función de onda, es necesario cuestionarnos: ¿Significa esto que las trayectorias obtenidas son aproximadas? ¿O se trata de trayectorias cuánticas diferentes por naturaleza a las clásicas?

Para ilustrar estas ideas, consideremos de nuevo la expresión (2.14) para la densidad de probabilidad clásica de encontrar a una partícula en un punto de su trayectoria

$$\rho_C dz = \frac{dz}{v\tau}$$

Es posible, de aquí, escribir la velocidad en la forma:

$$\dot{z} = \frac{1}{\tau} \rho_C^{-1}.$$

Considere ahora que, mediante el proceso de límite clásico, obtenemos algo similar a una trayectoria, cuya velocidad  $\dot{z}_Q$  estará dada por:

$$\dot{z}_Q = \frac{1}{\tau} \left( \rho_C + \mathcal{O} \left( \frac{\hbar}{S} \right) \right)^{-1}.$$

Debido a que los términos de corrección son muy pequeños en comparación a la densidad clásica, la expresión anterior implica:

$$\dot{z}_Q \approx \dot{z} \left( 1 - \frac{\mathcal{O} \left( \frac{\hbar}{S} \right)}{\rho_C} + \dots \right). \quad (2.28)$$

Esta expresión indica que la trayectoria emergente diferirá de la trayectoria clásica, tanto como grandes sean los términos de corrección. Resulta claro entonces que, debido a los términos de corrección, el proceso de límite asintótico no recupera del todo el comportamiento clásico.

El caso del rebotador es especialmente interesante debido a la relación entre este problema y el de la caída libre. En este caso, si asumimos que los términos de corrección dependen de la masa de la partícula, la expresión (2.28) indicaría que el proceso de límite asintótico hace emerger una trayectoria que viola el PED. Lo anterior evidenciaría que en la Mecánica Cuántica este principio

no es válido, emerge sólo parcialmente.

Nuestros esfuerzos se centrarán entonces en probar que los términos de corrección dependen de la masa de las partículas y que su magnitud es pequeña en comparación con la densidad clásica. Lo primero indicará que el PED no es válido en la Mecánica Cuántica, mientras que lo segundo indicará que el grado de violación es pequeño. Esto último es de especial relevancia, ya que explicará el por qué el PED es aparentemente válido en la Mecánica Clásica.

### 2.2.1. El papel de la masa en la densidad cuántica

Hemos de estudiar ahora la forma en que los términos de corrección dependen de la masa. No obstante, como veremos más detalladamente en la siguiente parte, el primer término de corrección, dado por la transformada inversa de (2.27), no puede obtenerse en forma cerrada. Mas, como veremos, no es necesario calcular explícitamente los términos de corrección para determinar que dependen de la masa.

Considere una función  $f$  tal que  $\frac{\partial}{\partial\beta}f \neq 0$ , es decir, depende de un parámetro  $\beta$ . Si  $f$  puede escribirse como la suma de dos funciones  $f_0$  y  $f_1$ , y se sabe que  $\frac{\partial}{\partial\beta}f_0 = 0$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial\beta}f_1 \neq 0$ . En nuestro caso, hemos visto que la densidad cuántica ( $f$ ) es igual a la densidad clásica ( $f_0$ ) más los términos de corrección ( $f_1$ ). Sabemos también que la densidad clásica no depende la masa. Por lo tanto, si la densidad cuántica depende de la masa, entonces los términos de corrección también lo hacen.

#### Caída libre sin barrera de potencial

Se probará primero que, aún en el caso de no introducir la barrera de potencial en el origen, la densidad de probabilidad es dependiente de la masa. La razón de esto es que se podría argumentar que la introducción de dicha barrera es el motivo de la aparición de la dependencia. En este caso, la solución a la ecuación de Schrödinger es similar a la mostrada en (2.18):

$$\psi_E = C_E Ai \left[ \frac{1}{l_g} \left( z - \frac{E}{mg} \right) \right], \quad (2.29)$$

con la diferencia que en este caso, los eigenvalores de energía forman un espectro continuo, y la constante de normalización  $C$  no puede calcularse debido a que la función de onda no es cuadrado integrable<sup>7</sup>. Sin embargo, una normalización puede obtenerse al considerar que las funciones de onda deben formar una base, por lo cual se debe satisfacer que

$$\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \delta(E - E'), \quad (2.30)$$

donde el producto escalar se define como:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \bar{\phi} \psi dz,$$

<sup>7</sup>Estas propiedades son análogas a las que presenta la función de onda de la partícula libre. Una discusión sobre el como este hecho indica que la gravedad es un efecto inercial aún en la Mecánica Cuántica puede encontrarse en [57].

12

y  $\delta(x)$  es la función Delta de Dirac. La sustitución de (2.29) en esta expresión indica que:

$$C_E = 1, \forall E. \tag{2.31}$$

Así, la densidad de probabilidad es simplemente:  $\rho_E = Ai^2 \left[ \frac{1}{l_g} \left( z - \frac{E}{mg} \right) \right]$ . Para estudiar la dependencia en la masa se calcula la derivada de esta cantidad con respecto de  $m$ , considerando que  $l_g$  es también una función de ésta. Un poco de álgebra muestra que la derivada toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial m} \rho_E = 2 \sqrt[3]{\frac{2g}{\hbar^2}} Ai(x) Ai'(x) \left( \frac{2}{3} \frac{z}{\sqrt[3]{m}} + \frac{1}{3} \frac{E}{m^{\frac{4}{3}}} \right), \tag{2.32}$$

con  $x = \frac{1}{l_g} \left( z - \frac{E}{mg} \right)$ . Puede notarse que no es posible que la derivada se anule. Para conocer el comportamiento de la función, se debe recordar que las funciones  $Ai$  y  $Ai'$  decrecen exponencialmente para valores positivos de la variable.

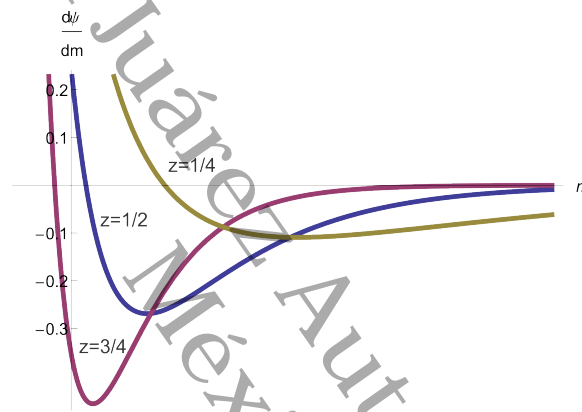


Figura 2.2: Se muestra un gráfico de la derivada de la función de onda para distintos valores de  $z$  (los valores en el gráfico significan que se ha igualado  $z$  a esa fracción del valor asignado a  $E$ ). Los valores de  $g$  y  $\hbar$  se han igualado a 1 por simplicidad.

44

Se concluye entonces que la densidad de probabilidad depende de la masa, como era de esperar. Resulta interesante observar lo que ocurre cuando la masa del sistema aumenta. La fig. 2.2 muestra que al aumentar la masa, el valor de la derivada tiende a cero, indicando que la dependencia desaparece. Lo anterior, como se verá en el resto del capítulo, parece indicar que el PED emerge al aumentar la masa, indicando también que es en ese régimen que el comportamiento clásico aparece.

### Caída libre con barrera de potencial

Se estudiará ahora la densidad de probabilidad de la caída libre como se vio en la sección 2.2.2. En este caso la densidad es dada por la ecuación (2.20):

$$\rho_Q(z) = \frac{1}{l_g |Ai'^2(-a_n)|} Ai^2 \left[ \frac{1}{l_g} (z - H_n) \right], \quad z > 0.$$

De nuevo, nos interesa estudiar la derivada de esta función. En este caso el cálculo es un poco más complicado pero con algo de álgebra puede obtenerse:

$$\frac{d}{dm} \rho_Q(z) = \frac{l'_g}{l_g^2 Ai'^2(-a_n)} \left\{ -Ai^2[\epsilon] - \frac{2H_n Ai^2[\epsilon] Ai''(-a_n)}{l_g Ai'(-a_n)} - 2\epsilon Ai[\epsilon] Ai'[\epsilon] \right\}, \tag{2.33}$$

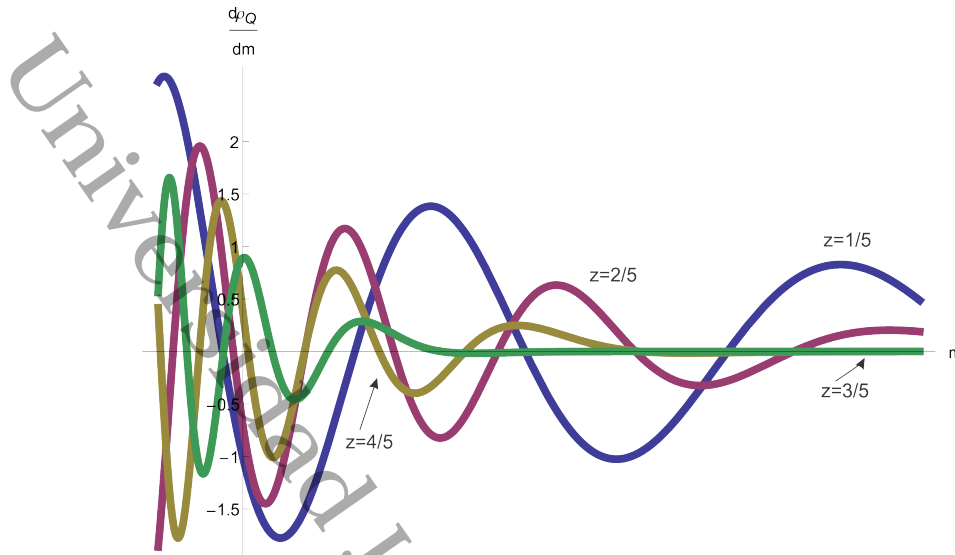


Figura 2.3: Se muestra un gráfico de la derivada de la densidad de probabilidad para distintos valores de  $z$  (los valores en el gráfico significan que se ha igualado  $z$  a esa fracción del valor asignado a  $H_n$ ). Los valores de  $g$  y  $\hbar$  se han igualado a 1 por simplicidad.

con  $l'_g = \frac{dl_g}{dm}$  y  $\epsilon = \frac{1}{l_g} (z - H_n)$ . Esta expresión se simplifica debido a que la ecuación de Airy indica que:

$$Ai''(-a_n) = -a_n Ai(-a_n) = 0, \tag{2.34}$$

con lo cual el segundo término se anula, quedando la derivada en la forma:

$$\frac{d}{dm} \rho_Q(z) = -\frac{l'_g Ai(\epsilon)}{l_g^2 Ai'^2(-a_n)} [Ai(\epsilon) + 2\epsilon Ai'(\epsilon)]. \tag{2.35}$$

Puede notarse que, como en el caso anterior, esta cantidad es distinta de cero, lo que prueba que la densidad de probabilidad depende de la masa. Una grafica como la de la figura 2.3 muestra que la dependencia disminuye al aumentar la masa del sistema, indicando, como en el caso anterior, la emergencia del comportamiento clásico.

Es claro entonces que la densidad de probabilidad depende de la masa. Mediante el estudio de la magnitud de los términos de corrección trataremos de determinar cuanto afecta realmente la masa a las mediciones hechas sobre el sistema.

### 2.2.2. Estimación de los términos de corrección

La primera evidencia sobre la baja magnitud de los términos de corrección viene de su contribución a la probabilidad total. Debemos recordar que las densidades de probabilidad  $\rho_Q$  y  $\rho_C$  son funciones normalizadas. Además hemos probado que, al menos para el rebotador, en el caso de números cuánticos grandes, se cumple que  $\rho_Q \sim \rho_C + \sum_i \rho_a^{(i)}$ . De lo anterior, es claro que la integral de la suma de los términos de corrección debe tender a cero a medida que la aproximación mejora. La contribución de los términos de corrección a la probabilidad total tiende a cero.

CAPITULO 2. EMERGENCIA DEL PED EN LA MC

Lo anterior no es del todo convincente, pues la integral de una función puede ser nula aún cuando la función toma valores grandes (considere el caso de  $\int_{-10^8}^{10^8} x^3 dx$ ). Por lo tanto, hemos de hacer un análisis a mayor detalle de, al menos, el primer término de corrección. Sin embargo, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, la transformada inversa de  $f_a^{(1)}$  no se encuentra en la literatura y no puede expresarse en términos de funciones conocidas.

Un cálculo numérico muestra que este término es muy pequeño en comparación con  $\rho_C$ , lo cual debería resultar claro dado el factor  $\frac{1}{a_n^3}$  que amortiza los valores de la función al aumentar  $n$ . No obstante, con el fin de ilustrar en forma más clara la forma en que este término varía, hemos de considerar los momentos de la distribución. El  $k$ -ésimo momento clásico de la posición es dado por:

$$\langle z^k \rangle^{(C)} = \int_0^H z^k \rho_C(z) dz = H^k \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(k+1)}{2\Gamma(k+\frac{3}{2})}. \tag{2.36}$$

Para  $k = 0$ , el momento coincide con el valor de normalización. Para  $k = 1$ , el momento es el valor esperado de la posición y es igual a  $\frac{2}{3}H$ . Con  $k = 2$ , al restar el cuadrado del valor esperado se obtiene la varianza de la posición que es  $\frac{4}{45}H^2$ .

Resulta ilustrativo comparar el resultado anterior con los momentos de la densidad cuántica, es decir, con el resultado de la integral:

$$\langle z^k \rangle^{(Q)} = \int_0^\infty z^k \rho_Q(z) dz. \tag{2.37}$$

La ya utilizada sustitución  $x = (z/l_g - a_n)$ , en combinación con el teorema del binomio resultan en la expresión:

$$\langle z^k \rangle^{(Q)} = \frac{l_g^k}{Ai'^2(-a_n)} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_n^{k-l} \int_{-a_n}^\infty x^l Ai^2(x) dx. \tag{2.38}$$

Para  $k = 0$ , obtenemos simplemente el valor de normalización. En el caso de  $k = 1$ , mediante integración directa se obtiene que el valor esperado cuántico es  $\frac{2}{3}H_n$ . Para  $k = 2$ , la suma de las integrales en (2.38) resulta ser  $\frac{8}{15}H_n^2$ ; además, al restar el cuadrado del valor esperado obtenemos la varianza de la posición en el régimen cuántico, que es igual a  $\frac{4}{45}H_n^2$ . En el régimen de  $n$  grandes,  $H_n$  debe coincidir con  $H$ , haciendo que los momentos cuánticos coincidan con los clásicos.

Si bien no nos ha sido posible escribir una expresión general para el  $k$ -ésimo momento de la distribución cuántica, estamos convencidos de que los resultados obtenidos para los primeros no resultan ser una coincidencia<sup>8</sup>. Establecemos entonces como una conjetura que el  $k$ -ésimo momento cuántico coincide con su contraparte clásica en el límite de  $n$  grande. Con esto en mente, el  $k$ -ésimo momento de la distribución asintótica cuántica es:

$$\langle z^k \rangle_n^a \sim \int_0^\infty z^k [\rho_a^{(0)}(z) + \rho_a^{(1)}(z)] dz = \langle z^k \rangle^{(0)} + \langle z^k \rangle^{(1)}, \tag{2.39}$$

donde  $\langle z^k \rangle^{(0)}$  y  $\langle z^k \rangle^{(1)}$  son los  $k$ -ésimos momentos del primer y segundo término de la serie asintótica respectivamente. Para valores grandes de  $n$ , el primer término tiende a  $\langle z^k \rangle^{(C)}$ , por lo cual, de aceptar

<sup>8</sup>Se han evaluado también los momentos hasta  $k = 12$ , y la coincidencia sigue manteniéndose. No se incluyen aquí los detalles de esas evaluaciones pues consideramos que estaríamos en la misma situación que al colocar sólo los dos primeros momentos.

CAPITULO 2. EMERGENCIA DEL PED EN LA MC

como válida la conjetura planteada, se tendrá que:

$$\langle z^k \rangle^{(1)} \xrightarrow{n \gg 1} 0, \tag{2.40}$$

para toda  $k$  entera positiva. Por lo tanto, para cualquier combinación lineal de los momentos se tendrá:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle z^k \rangle^{(1)} = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right] \rho^{(1)}(z) dz = 0, \tag{2.41}$$

usando la definición de los momentos. Dado que los valores de  $a_k$  son arbitrarios, podemos elegirlos de forma que al reacomodar el término entre corchetes tome la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k, \tag{2.42}$$

para cualquier función  $f$  y número  $a$ . Así, cuando el número cuántico principal del sistema aumenta, hemos probado que:

$$\int_0^{\infty} f(z) \rho^{(1)}(z) dz = 0, \tag{2.43}$$

para cualquier función  $f$ . Por lo tanto, se tiene que cumplir que  $\rho^{(1)}(z) = 0$ . Es decir, el término de corrección cuántico se anula al aumentar el número cuántico principal, quedando sólo el comportamiento clásico, como se quería probar.

Resulta necesario aclarar que esta prueba depende completamente de la validez de la conjetura sobre la igualdad de momentos, la cual esperamos lograr demostrar en un futuro cercano. Un argumento menos formal que no depende de la validez de la conjetura es el hecho de que  $\rho^{(1)}(z)$  es una distribución que no aporta a la densidad de probabilidad, dado que  $\langle z^0 \rangle^{(1)} = 0$ ; además está distribuida principalmente alrededor de 0, puesto que  $\langle z^1 \rangle^{(1)} = 0$ , y dado que  $\langle z^2 \rangle^{(1)} = 0$  podemos notar que además, la distribución no se “aleja” de su valor medio. En resumen, a medida que  $n$  se hace grande, la distribución tiene una contribución nula a la probabilidad, y además, su poca contribución se encuentra centrada en 0 y tiene varianza nula; es decir, será una especie de “pico” que se anula.

Contamos entonces con evidencia suficiente para aceptar que los términos de corrección cuánticos son insignificantes en comparación con el primer término de la serie asintótica. Por lo cual, el efecto de la masa irá decreciendo al aumentar el número cuántico principal, indicando que la violación al PE también se irá reduciendo. Esto, evidentemente, no significa que el PE sea válido, ya que dichos términos de corrección realmente no se hacen cero. La mecánica cuántica hace surgir una versión de la Mecánica Clásica en la que el PE es sólo aproximadamente válido.

## Capítulo 3

# Difracción de partículas en caída libre

En este capítulo, estudiaremos la validez del PEE usando un efecto transitorio descubierto por Marcos Moshinsky. Tomaremos como base el planteamiento original de Moshinsky para formular un análogo cuántico del experimento de caída libre de Galileo. La difracción de partículas en caída libre, como llamaremos al efecto, nos proporcionará información acerca de la validez del PEE. Presentaremos primero el caso de partículas libres cayendo subitamente, para después hablar sobre partículas atrapadas en un rebotador, como el mostrado en el capítulo anterior.

## 3.1. Difracción en el tiempo de Moshinsky

En un artículo de 1952, Marcos Moshinsky estudió el efecto de retirar un obturador que impide a un haz de partículas pasar a una determinada región [58]. Si el haz es descrito por la ecuación de Schrödinger, el efecto es análogo al de la difracción de Sommerfeld debido a una abertura. El cálculo original de Moshinsky implica la solución de un problema de valor inicial. Un enfoque moderno al problema, el cual consideraremos aquí, se basa en emplear el propagador de Feynman [59].

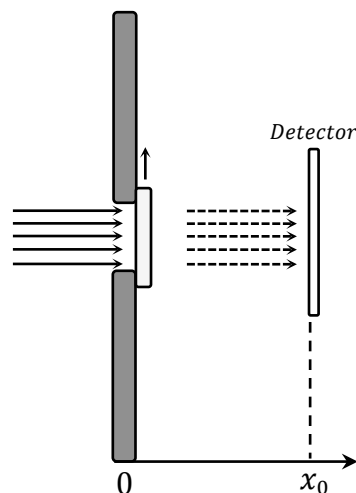


Figura 3.1: La figura muestra la geometría del problema del obturador.

Como se muestra en la figura 3.1, un haz monocromático de partículas con momento  $p = \hbar k$  incide perpendicularmente sobre un obturador perfectamente absorbente ubicado en  $x = 0$ . Al

CAPITULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

2

tiempo  $t = 0$  el obturador es removido, y se busca describir el perfil de densidad usando un detector a una distancia  $x = x_0$ . Dado que el haz incidente es monocromático y no puede penetrar en la región  $x > 0$ , la función de onda inicial será:

$$\psi(x, t = 0) = e^{ikx} H(-x), \tag{3.1}$$

donde  $H(x)$  es la función escalón de Heaviside. Es evidente que (3.1) no es un estado normalizado. Para hallar el estado tras un tiempo  $t$  se emplea el propagador de Feynman del sistema:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; x', t') \psi(x', t') dx'. \tag{3.2}$$

En este caso, para  $t > 0$  el obturador se habrá removido, por lo cual  $K(x, t; x', t')$  es el propagador de partícula libre [60]:

$$K(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \exp \left[ i \frac{m (x - x')^2}{2 \hbar (t - t')} \right], \tag{3.3}$$

y la función de onda se obtiene al sustituir el estado inicial (3.1) y el propagador (3.3), con  $t' = 0$ , en la integral (3.2), lo cual resulta en:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[ i \frac{m (x - x')^2}{2 \hbar t} + ikx' \right] dx'.$$

La evaluación de esta integral se logra completando cuadrados de  $x - x'$  en la exponencial y haciendo el cambio de variable:

$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left[ x' + \left( \frac{k \hbar t}{m} - x \right) \right],$$

con lo cual la integral se reduce a:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2i}} \exp \left[ ikx - i \frac{k^2 \hbar t}{2m} \right] \int_{-\infty}^{\xi} \exp \left[ i \frac{\pi}{2} \zeta^2 \right] d\zeta, \tag{3.4}$$

donde

$$\xi = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left( \frac{k \hbar t}{m} - x \right). \tag{3.5}$$

La integral en (3.4) puede escribirse en términos de las integrales de Fresnel  $C(\xi)$  y  $S(\xi)$  (figura 3.2) definidas como [54]:

$$\int_0^{\xi} \exp \left[ i \frac{\pi}{2} x^2 \right] dx = C(\xi) + iS(\xi). \tag{3.6}$$

Usando lo anterior y la integral Gaussiana normal, la función de onda un tiempo  $t$  tras abrir el obturador toma la forma final:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{i \left( kx - \frac{k^2 \hbar t}{2m} - \frac{\pi}{4} \right)} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\xi) \right] + i \left[ \frac{1}{2} + S(\xi) \right] \right\}, \tag{3.7}$$

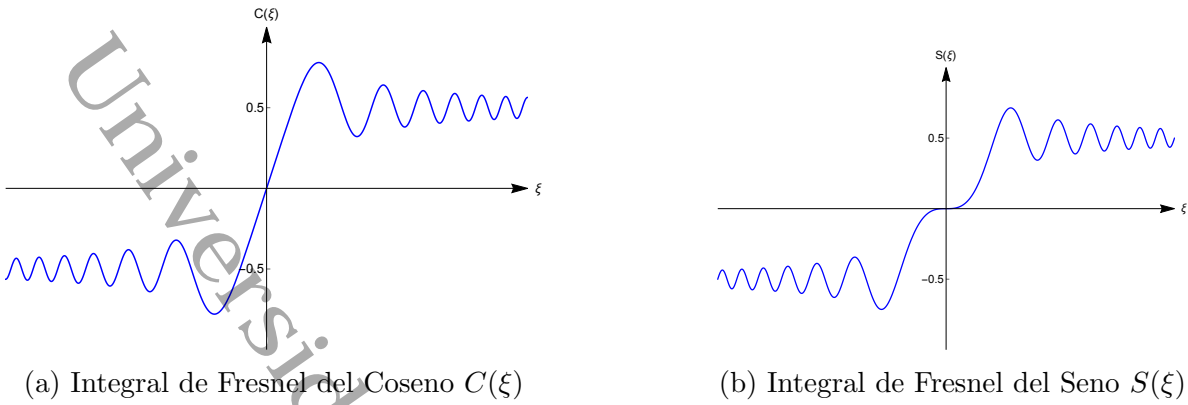
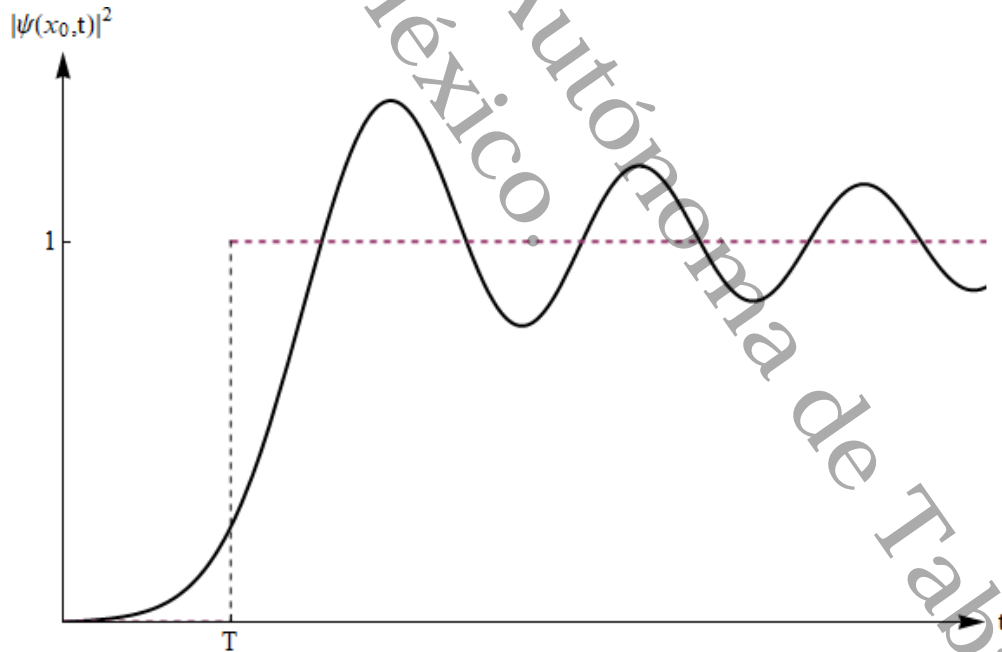


Figura 3.2: Se muestra el comportamiento de las funciones  $S$  y  $C$  de Fresnel.

y el perfil de densidad de probabilidad es simplemente:

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\xi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S(\xi) \right]^2 \right\}. \tag{3.8}$$

El perfil de densidad para una posición  $x = x_0$  es mostrado en la figura 3.3. Debe notarse que, para tiempos suficientemente grandes, el perfil coincide con el de un haz de partículas clásicas llegando a la pantalla. Se dice que se trata de un fenómeno transitorio. La figura es idéntica al



35

Figura 3.3: En la figura se muestra un gráfico del perfil de densidad del haz tras pasar por el obturador, dada por la expresión (3.8) (línea continua). La línea punteada representa el gráfico de la densidad clásica, en la cual un haz de partículas de momento  $p$  llega a  $x_0$  en un tiempo  $T = \frac{mx_0}{p}$ .

perfil de intensidad de un haz de luz difractado por una apertura rectangular en el régimen de Sommerfeld [61]. A diferencia del perfil de difracción óptica, en este caso el perfil no se observa

directamente sobre el detector. En la tercera sección de [62] se puede encontrar una discusión más amplia sobre la analogía entre la difracción en el tiempo y la difracción espacial que se estudia en óptica.

Es necesario mencionar que, en [58], Moshinsky obtuvo el cociente entre la corriente de probabilidad  $J(x, t)$  y la corriente estable  $J_0$ , obtenida al hacer  $t \rightarrow \infty$  en  $J(x, t)$ . Si bien el perfil de densidad y la corriente de probabilidad son cantidades diferentes, lo derivado por Moshinsky es que  $\frac{J(x, t)}{J_0}$  es idéntico a lo obtenido en (3.8)<sup>1</sup>, así:

$$\frac{J(x, t)}{J_0} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\xi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S(\xi) \right]^2 \right\} = |\psi(x, t)|^2. \quad (3.9)$$

Por otro lado, la expresión (3.8) se obtuvo mediante un cálculo exacto, mientras que Moshinsky derivó la corriente de probabilidad como una aproximación. Moshinsky señala que la expresión (3.9) se satisface si  $x_0 \gg \lambda$ , es decir, si la longitud de onda del haz es muy pequeña comparado con la distancia entre el obturador y el detector. Más aún, la corriente obtenida de (3.8) es:

$$J(x, t) = \frac{\hbar k}{2m} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\xi) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S(\xi) \right]^2 - \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t k^2}} \left[ \left( \frac{1}{2} + C(\xi) \right) \sin \left( \frac{\pi \xi^2}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + S(\xi) \right) \cos \left( \frac{\pi \xi^2}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Esta expresión se reduce a (3.9) si el segundo término es despreciable en comparación con el primero, un cálculo inmediato muestra que debe cumplirse:

$$\hbar \ll 2\pi E_c t = 2\pi S_c, \quad (3.11)$$

donde  $E_c$  es la energía cinética de las partículas y  $S_c$  es la acción clásica. Es claro que esta aproximación es válida para tiempos grandes, así como para partículas con masa grande o moviéndose a velocidades grandes. Con respecto a la aproximación de Moshinsky, puede probarse que para  $t \approx T$  se obtiene que  $x \gg 2\lambda$ , que es la aproximación usada originalmente. Lo anterior indica que la aproximación es válida aún para tiempos del orden del tiempo de llegada clásico. De la figura 3.3 se observa que el comportamiento cuasiondulatorio se da para  $t > T$ , por lo cual, la aproximación es válida en la región de interés.

### 3.1.1. Interpretación del efecto de difracción

Para poder interpretar la difracción en el tiempo es necesario estudiar antes la forma en que se interpretará la función (3.8), así como su equivalente para la corriente de probabilidad obtenidas al propagar el estado inicial. Debe tomarse en cuenta que la densidad de probabilidad (3.8) no es normalizable, por lo cual, no puede considerarse propiamente como una densidad de probabilidad. No obstante, debido al parecido entre la ecuación de Schrödinger para un potencial constante (como

<sup>1</sup>Debe recordarse que la corriente de probabilidad es dada por

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*],$$

donde  $\psi$  es la función de onda.

es el caso para partícula libre) y la ecuación de Helmholtz para una onda en un medio homogéneo<sup>2</sup> es posible establecer una analogía entre el movimiento de la partícula y la propagación de una onda electromagnética. Mas esta analogía no es solo un asunto de semejanza entre ecuaciones. Es bien sabido que la naturaleza probabilística de la teoría cuántica implica que los experimentos son de tipo estadístico, es decir, la teoría predice la probabilidad de que un experimento resulte en determinado modo y la verificación de la predicción se lleva a cabo repitiendo el experimento y comprobando que los resultados se den en proporción acorde a dicha predicción. Una forma de lograr esto es realizando experimentos con haces de partículas que emanan de una fuente.

Los experimentos que hemos discutido anteriormente (los experimentos COW [19, 20] y los de Bonse y Wroblewsky [22]) utilizan haces de neutrones. La primera observación del fenómeno de difracción en el tiempo fue realizada por medio de un experimento con haces de átomos de cesio [63], el cual llevó a Szriftgiser y colaboradores a diseñar un experimento para verificar dicho fenómeno a detalle [64], de nuevo utilizando un haz de átomos de cesio. Es claro entonces que la interpretación de la densidad de probabilidad como la intensidad de un haz es plausible, al menos en vista de esta analogía. La corriente de probabilidad puede interpretarse también como una corriente de partículas. Debe notarse que desde el principio del capítulo se ha usado esta interpretación al hablar del fenómeno de difracción en el tiempo. Más aún, Moshinsky ya hablaba de la función de onda inicial (3.1) como un haz de partículas libres.<sup>3</sup> En lo sucesivo se empleará esta analogía para discutir la interpretación de este fenómeno.

Estamos ahora en posición de interpretar el fenómeno de difracción. Considere primero el caso clásico, la densidad de probabilidad clásica es mostrada en la figura 3.3 con una línea punteada. La gráfica muestra que no es probable detectar partículas para tiempos menores a  $T$ , pero cuando  $t \geq T$  las partículas han llegado al detector y es seguro encontrarlas. En términos de la corriente de probabilidad la interpretación es similar, para  $t < T$  las partículas no atraviesan el detector aún, y para tiempos mayores todas las partículas lo atraviesan, por lo cual la corriente relativa es igual a uno. Para tiempos mayores a  $T$  el comportamiento no cambia, hay un “salto” entre el comportamiento inicial  $t < T$  y un comportamiento diferente pero estable  $t > T$ .

En el caso cuántico ocurre algo notablemente distinto. La línea continua en la figura 3.3 indica que el comportamiento de las partículas tras cruzar el obturador varía con el tiempo para un detector fijo a una distancia determinada. Dicha variación es semejante a lo que se obtendría al medir la intensidad de un haz difractado por una apertura rectangular a lo largo de uno de los

<sup>2</sup>En este caso la ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V) \right] \psi(x) = 0,$$

donde  $E$  es la energía del sistema y  $V$  es el potencial. Mientras que la ecuación de Helmholtz es:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right] E(x) = 0,$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda. Al hacer  $\frac{2m}{\hbar^2}(E - V) = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$  ambas ecuaciones son iguales, por lo cual es posible establecer una analogía entre la partícula cuántica y la onda electromagnética (Véase §1-D-2-b de [60] para una discusión más amplia de este tema.)

<sup>3</sup>Lo anterior no significa que sea imposible realizar experimentos con partículas individuales en el marco de la Mecánica Cuántica. Veanse las referencias [65, 66, 67] para algunos ejemplos de dicha clase de experimentos.

ejes [61]. Sin embargo, dicho perfil se obtiene directamente sobre la pantalla, mientras que el de Moshinsky requiere de mediciones sucesivas en el detector. Piense en estas mediciones sucesivas como si fuesen los fotogramas de una película, que al pasarlos uno tras otro, y solo así, nos permiten apreciar la variación de intensidad. El efecto de la apertura espacial es redistribuir la intensidad en la pantalla, mientras que la apertura temporal la redistribuye en el tiempo. Así, el obturador produce un efecto en el haz que va menguando hasta alcanzar un estado estacionario. Esta clase de efectos se conocen como fenómenos transitorios (Para un estudio detallado de estos efectos véase el artículo de del Campo et al [68]).

Cabe destacar el hecho de que el perfil de densidad es distinto de cero para todo  $t < T$ . En particular si  $t < \frac{x}{c}$ , con  $c$  la velocidad de la luz, la densidad es distinta de cero, lo cual indica que las partículas pueden moverse a velocidades superiores a la de la luz. Es claro que lo anterior es una contradicción a la Teoría de la Relatividad Especial. Esto fue notado por Moshinsky en [58], en donde sostiene que es debido a que la ecuación de Schrödinger no es una ecuación relativista. Puede probarse que si el sistema evoluciona de acuerdo a la ecuación de onda o la ecuación de Klein-Gordon, que son ecuaciones relativistas, entonces la función de onda es nula para  $0 \leq t < \frac{x}{c}$ . Se puede probar también que la evolución de acuerdo a la ecuación de Klein-Gordon se reduce a (3.8) al tomar el límite  $c \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en estos casos no aparecen efectos transitorios.

### 3.1.2. Graduación del efecto de difracción

Ahora es necesario encontrar una forma de determinar cuan grande es el fenómeno de difracción. Para ello es necesario considerar mediciones del perfil de densidad realizadas al variar la posición del detector y en un instante determinado (lo cual requiere repetir por completo el experimento cada vez que se aleje el detector.) El resultado de dichas mediciones es mostrado en la figura 3.4.

La distancia entre  $x_1$  y  $x_2$ , los dos valores más cercanos a  $x_0$  (la distancia que recorrería una partícula clásica en ese tiempo), es considerada por Moshinsky como un estimado de la amplitud del efecto de difracción [69]. Para determinar esta cantidad es necesario hallar los valores  $\xi_1$  y  $\xi_2$  que son soluciones a

$$|\psi(\xi_i(x_i, t))|^2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Estos valores pueden calcularse numéricamente resultando en  $\xi_1 = 1.6162$  y  $\xi_2 = 0.7780$ , su diferencia es:

$$\xi_1 - \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} (x_2 - x_1),$$

al sustituir los valores de  $\xi_i$  y usando el hecho de  $x_0 = \frac{\hbar k}{m} t$  se obtiene que la amplitud del efecto de difracción  $\Delta x$  es:

$$\Delta x = 0.85 \sqrt{\frac{\lambda x_0}{2}}, \quad (3.12)$$

donde  $\lambda = 2\pi/k$  es la longitud de onda de las partículas. Se observa de la figura 3.4, y de un análisis de valores posteriores de  $\xi$ , que  $\Delta x$  es la distancia más corta entre cualesquiera dos puntos en los que se alcance el valor clásico. Dado que  $x_0$  depende del tiempo al que se hagan las mediciones, concluimos que el parámetro que determina la amplitud del efecto es  $\lambda$ .

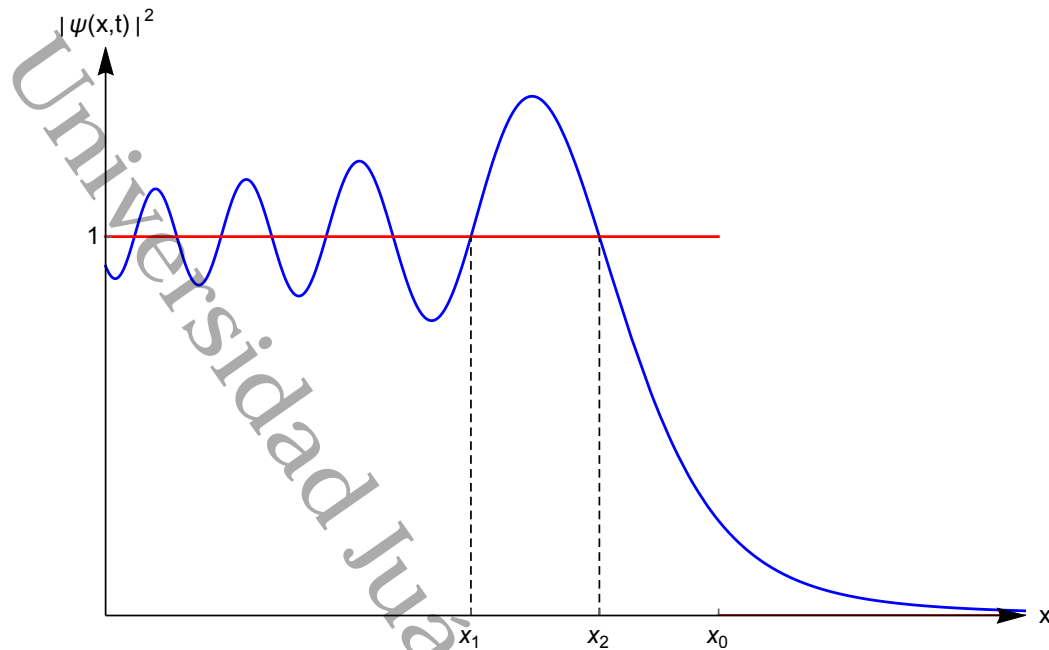


Figura 3.4: La figura muestra la gráfica (azul) de la densidad con respecto a la posición para un tiempo  $t$  fijo. La línea roja representa la densidad clásica.  $x_0$  es la distancia que una partícula clásica alcanzaría en ese tiempo.  $x_1$  y  $x_2$  son los valores más cercanos a  $x_0$  en los que se alcanza el valor clásico.

Otra forma de medir la amplitud del efecto es mediante la diferencia  $\Delta t$  entre  $t_1$  y  $t_2$ , los dos primeros instantes en los que se alcanza el valor clásico en la figura 3.3. Moshinsky deduce en [58] que, para  $x_0 \gg \lambda$ , se tiene:

$$\Delta t = 0.85 \sqrt{\frac{\pi T^2}{kx_0}} = 0.85 \sqrt{\frac{\lambda T^2}{2x_0}} \quad (3.13)$$

que es, de hecho, lo que se obtiene de  $\Delta t = \Delta x/v$ . De nuevo, el parámetro que determina la intensidad del efecto de difracción es  $\lambda$ . Así, partículas con menor longitud de onda son difractadas con menor intensidad que aquellas con mayor longitud de onda.

## 3.2. Caída libre difractada

Consideremos de nuevo al haz de partículas incidiendo sobre el obturador, pero ahora, la dirección del haz coincide con un campo gravitacional. Esto es, las partículas están cayendo (véase la figura 3.5), y el obturador evita que alcancen la región debajo de él. Al abrir el obturador las partículas son “liberadas”, imitando así el acto clásico de “soltarlas del reposo”. Por lo tanto, este experimento representa una analogía del experimento clásico de soltar un objeto desde una cierta altura y esperar a que llegue al “suelo”, siendo el detector quien hace este papel.

Sin embargo, de lo estudiado en la sección anterior, sabemos que esta caída estará asociada con un efecto transitorio de difracción en el tiempo. Podemos decir que la apertura del obturador difracta partículas en caída libre. En lo sucesivo, nos referiremos a este arreglo como “caída libre

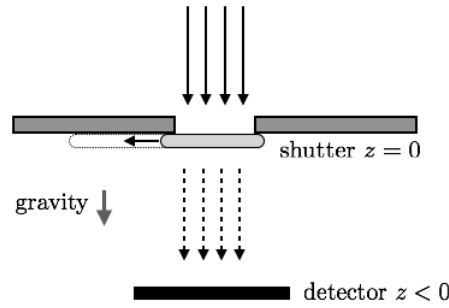


Figura 3.5: Se muestra la geometría del arreglo. La dirección del haz coincide con el campo gravitacional, haciendo que las partículas “caigan” hacia el detector.

9

difractada”. Es razonable esperar que el efecto dependa, de entre otros parámetros, de la masa de las partículas y de la gravedad. Por lo tanto, dado que la variación de la densidad alrededor del comportamiento clásico es dependiente de la masa, podemos interpretar el efecto de difracción como evidencia de la violación al PEE.

El estudio del efecto de difracción será dividido en dos partes. Primero estudiaremos el caso en que el haz incidente es monocromático, en analogía directa con el caso de Moshinsky. En seguida, estudiaremos el efecto cuando la partícula incidente se encuentre en un estado estacionario. Al final presentaremos algunas conclusiones. Los resultados aquí mostrados pueden encontrarse en [70]

### 3.2.1. Haz monocromático

Adoptaremos la geometría mostrada en la figura 3.5. En este escenario, el estado inicial toma la forma:

$$\psi(z, t = 0) = e^{-ikz} H(z) \tag{3.14}$$

para  $t > 0^4$ , las partículas están sujetas al potencial  $U_G(z) = mgz$ , por lo que el propagador toma la forma [71]:

$$K(z, t; z', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \delta z^2}{2 \delta t} - \frac{mg}{2} \delta t (z + z') - \frac{mg^2}{24} \delta t^3 \right] \right\}, \tag{3.15}$$

donde  $\delta t = t - t'$  y  $\delta z = z - z'$ . Al abrir el obturador, de acuerdo a la ecuación (3.2), el estado propagado estará dado por:

$$\psi(z, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[ -i \frac{mg^2}{24 \hbar} t^3 \right] \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m \delta z^2}{2t} - \frac{mgt}{2} (z + z') - \hbar k z' \right] \right\} dz'. \tag{3.16}$$

La expresión anterior puede evaluarse introduciendo la unidad,  $\exp(ikz) \exp(-ikz)$ , en el integrando, completando cuadrados en la exponencial y usando la igualdad  $p = mv$ , con  $v$  siendo

2

<sup>4</sup>De hecho, la función (3.14) representa una idealización en la que las partículas se encuentran libres mientras estén por encima del obturador. Si bien un estado como tal puede ser alcanzado, por ejemplo, por medio de un capacitor de placas paralelas; el arreglo experimental, de llevarse a cabo, se complicaría en gran medida.

la velocidad; con lo cual el estado propagado toma la forma:

$$\psi(z, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[ -ikz - i\frac{mg^2}{24\hbar}t^3 - i\frac{mgtz}{\hbar} - i\frac{m}{2\hbar t} \left( vt + \frac{gt^2}{2} \right)^2 \right] \cdot \int_0^\infty \exp \left\{ i\frac{m}{2\hbar t} \left( z - z' + vt + \frac{gt^2}{2} \right)^2 \right\} dz'. \quad (3.17)$$

Es necesario hacer un par de cambios de variable para simplificar la integral. Definimos la fase del estado propagado:

$$\gamma(z, t) = kz + \frac{mg^2}{24\hbar}t^3 + \frac{mgtz}{\hbar} + \frac{m}{2\hbar t} \left( vt + \frac{gt^2}{2} \right)^2, \quad (3.18)$$

y el argumento de la exponencial en el integrando como:

$$\zeta(z, z', t) = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left( z - z' + vt + \frac{gt^2}{2} \right). \quad (3.19)$$

Con lo cual, la integral toma la forma:

$$\psi(z, t) = \sqrt{\frac{1}{2i}} e^{-i\gamma(z,t)} \int_{-\infty}^\xi \exp \left\{ i\frac{\pi}{2} \zeta^2 \right\} d\zeta, \quad (3.20)$$

donde

$$\xi = \zeta(z, 0, t) = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar t}} \left( z + vt + \frac{gt^2}{2} \right). \quad (3.21)$$

El estado propagado toma entonces la forma:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{i\gamma(z,t) - i\frac{\pi}{4}} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\xi) \right] + i \left[ \frac{1}{2} + S(\xi) \right] \right\} \quad (3.22)$$

Es remarcable que la integral en (3.20) es idéntica a la que hemos obtenido en (3.4) para el propagador libre. El estado de propagación libre (3.7) puede obtenerse directamente de (3.20) por medio de la transformación de coordenadas:  $z' = z - \frac{1}{2}gt^2$ . La figura 3.6 muestra los perfiles de densidad clásico y cuántico en función del tiempo  $t$ . Debe notarse que ésta no es más que una traslación y un reescalado horizontal de la obtenida para el propagador libre.

Lo anterior es evidencia de una característica importante de estos dos sistemas: la validez del PEE. El sistema original de Moshinsky puede considerarse un sistema que, aunque se encuentre en presencia de un campo gravitacional, se encuentra moviéndose en forma acelerada. Así, el estado descrito por (3.7) es el estado en el sistema  $K_a$ , mientras que (3.22) representa el estado en el sistema  $K_g$ . Lo que hemos obtenido entonces es que el estado en  $K_a$  puede obtenerse a través de una transformación de coordenadas del estado en  $K_g$ <sup>5</sup>. Por lo tanto, no podemos discernir entre estos sistemas a través de este experimento, lo cual indica que en la difracción en el tiempo se cumple el PEE.

<sup>5</sup>Lo anterior no es del todo correcto, pues la fase de la función de onda no se transforma exactamente en esa forma, como vimos en (1.5). No obstante, para el proceso de medición podemos ignorar la fase, por lo cual podemos establecer esta igualdad entre estados.

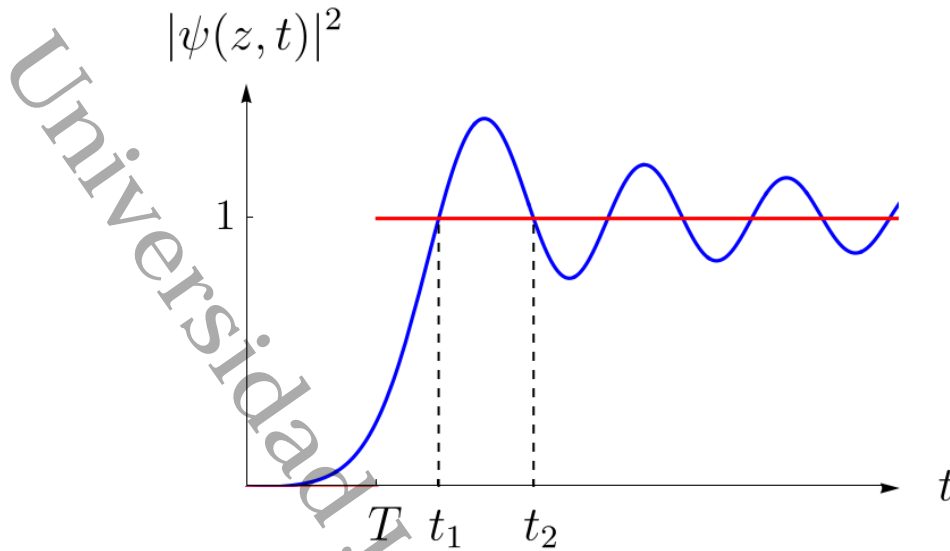


Figura 3.6: Se muestran las densidades clásica (rojo) y cuántica (azul) para la caída súbita como una función del tiempo  $t$  a una distancia  $z < 0$ .  $T$  representa el tiempo clásico que le tomaría a una partícula llegar a  $z$ .

Pese a la aparente validez del PEE en este sistema, desarrollaremos ahora una herramienta que nos permitirá concluir que el PED no se cumple. Para ello debemos analizar de nuevo la figura 3.5. Resulta claro que, pese a que no podemos determinar la trayectoria de las partículas, no podemos negar que éstas se han movido, desde arriba del obturador a la pantalla, debido al potencial gravitacional. El hecho de que las partículas describan un perfil como el mostrado en la figura 3.6 puede interpretarse como una característica normal y esperable de la mecánica cuántica (El que la teoría cuántica nos lleve a resultados “raros” ya no debe sorprendernos). Mas la posibilidad de que este efecto dependiese de la masa, siendo que el movimiento en sí es un efecto gravitacional, nos lleva a cuestionarnos sobre la validez del PED en este fenómeno de caída libre.

Como ya discutimos en la sección anterior, la intensidad del efecto de difracción puede cuantificarse por medio de la diferencia  $\Delta t$  entre los puntos  $t_1$  y  $t_2$  de la figura 3.6. Para el propagador libre, la amplitud del efecto está dada por las ecuaciones (3.12) y (3.13). Nos interesa ahora deducir el análogo a estas ecuaciones para la caída libre difractada. Como en el caso anterior, calculamos la diferencia entre los puntos de coincidencia con la densidad clásica, esto es:

$$\Delta\xi = \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_2}} \left( z + vt_2 + \frac{gt_2^2}{2} \right) - \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar t_1}} \left( z + vt_1 + \frac{gt_1^2}{2} \right). \quad (3.23)$$

Llamemos  $T$  al tiempo que le tomaría a una partícula clásica llegar a la pantalla. Asumiremos que las dimensiones del sistema son grandes comparadas con las escalas cuánticas, esto es:  $p|z| \gg \hbar$ . Lo anterior nos permite suponer que el efecto de difracción es pequeño, por lo cual  $\Delta t \ll T$  y a su vez  $t_1 \sim T$ . La expresión toma entonces la forma:

$$\Delta\xi = \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar(T + \Delta t)}} \left( z + v(T + \Delta t) + \frac{g(T + \Delta t)^2}{2} \right) - \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar T}} \left( z + vT + \frac{gT^2}{2} \right). \quad (3.24)$$

## CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

Podemos ahora expandir la expresión anterior en potencias de  $\Delta t$  y, dada nuestra suposición previa, quedarnos con el primer orden, quedando así la expresión:

$$\Delta\xi \approx \frac{\Delta t}{2T} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar T}} \left( |z| + vT + \frac{3}{2}gT^2 \right). \quad (3.25)$$

Podemos simplificar esta expresión aún más si consideramos la expresión para la distancia recorrida en caída libre  $z = -vt - \frac{1}{2}gt^2$  y la de la velocidad final de una partícula en movimiento acelerado uniforme  $v = -gT$ , con lo cual la expresión anterior toma la forma:

$$\Delta\xi \approx \frac{\Delta t}{T} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar T}} (2|z| - vT). \quad (3.26)$$

Si despejamos  $\Delta t$  y usamos la relación entre el momento y el número de onda llegamos a la expresión para la amplitud del efecto de difracción:

$$\Delta t \approx \Delta\xi \sqrt{\frac{\pi v T}{k(2|z| - vT)^2}} T, \quad (3.27)$$

donde debe recordarse que  $\Delta\xi = 0.85$ . Debe notarse que  $z$  es del orden de  $T^2$ , por lo cual  $\Delta t \rightarrow 0$  cuando  $T$  o  $z$  se hacen grandes. Esto debería esperarse al tratarse de un fenómeno transitorio: si la pantalla se aleja lo suficiente del obturador o si se deja pasar suficiente tiempo el efecto de difracción se disipará.

Es importante hacer notar que, debido a la presencia del número de onda, esta cantidad depende de la masa del sistema. Como hemos apuntado antes, la caída de las partículas es un efecto gravitacional, por lo cual, el hecho de que este efecto dependa de la masa es una clara violación al PED. No obstante, podemos notar que, dado que el número de onda  $k$  aumenta con la masa, la amplitud del efecto tiende a cero en el límite de masas grandes, evidenciando la emergencia del PED en el régimen macroscópico.

Como una muestra de la afirmación anterior, estimaremos  $\Delta t$  para diferentes sistemas. Consideramos primero un haz de neutrones térmicos con energía igual a 0.0253 eV ( $v \simeq 2200$  m/s) [72] y con la pantalla ubicada a  $|z| = 1$  m. La amplitud de la difracción (3.27) es:

$$\Delta t = 0.37 \times 10^{-8} \text{ s}, \quad \text{neutrones térmicos,}$$

lo cual es un intervalo de tiempo muy pequeño. Si en lugar de neutrones térmicos consideramos neutrones ultrafríos, cuya velocidad es  $v \simeq 2$  cm/s [73], encontramos que la amplitud de difracción resulta ser:

$$\Delta t = 6 \times 10^{-5} \text{ s}, \quad \text{neutrones ultrafríos,}$$

que es cuatro ordenes de magnitud mayor. Un orden de magnitud similar se obtiene si usamos átomos de cesio [74], cuya masa es  $m \simeq 2.2 \times 10^{-25}$  kg. En este caso se obtiene:

$$\Delta t = 0.5 \times 10^{-5} \text{ s}, \quad \text{átomos de cesio.}$$

Por lo anterior, podemos concluir que los neutrones ultrafríos y los átomos de cesio resultan ser candidatos potenciales para probar violaciones al PE mediante difracción en el tiempo.

Es importante destacar una característica interesante de  $\Delta t$ . Si bien se pueden derivar mecanismos para describir intervalos de tiempo en Mecánica Cuántica<sup>6</sup>, los cuales permiten estudiar el problema que estamos tratando, éstos resultan poco intuitivos (oscuros incluso) y sus valores mantienen la esencia probabilística del estado cuántico. La definición de  $\Delta t$ , por otro lado, involucra la observación de dos fenómenos bien definidos: la apertura del obturador y la llegada de las partículas a la pantalla. Debe hacerse énfasis en el hecho de que no se está definiendo un *tiempo cuántico*,  $\Delta t$  es estrictamente un intervalo de tiempo de naturaleza clásica. La apertura del obturador, que inicia nuestro cronómetro, no constituye propiamente un proceso de medición; el efecto de éste se traduce en la entrada del propagador a la descripción del sistema. La llegada de las partículas a la pantalla, por otro lado, si constituye un proceso de medición, pero al marcar el final de nuestro intervalo de tiempo realmente no estamos interesados en el estado posterior de las partículas, mismo que se verá alterado. Concluimos entonces que el proceso de medir  $\Delta t$  no constituye una pérdida de información que afecte a la determinación del mismo.

### 3.2.2. Estado estacionario

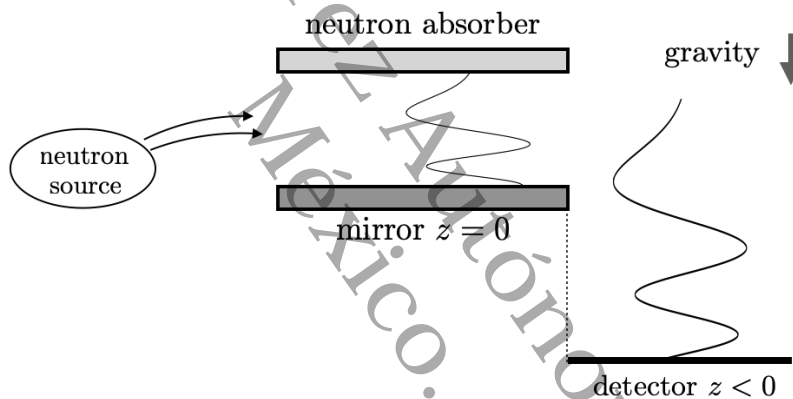


Figura 3.7: Se presenta el esquema del arreglo experimental para medir el efecto que planteamos en esta subsección. Las partículas adquieren primero un estado de rebotador cuántico, y posteriormente dicho estado es difractado mediante la apertura de un obturador.

Consideramos ahora un arreglo como el mostrado en la figura 3.7, que representa una variación al arreglo de difracción de un haz monocromático. Aquí, el estado inicial a difractar es el de un rebotador cuántico como el estudiado en el capítulo anterior, mismo que se obtiene en la primera parte del arreglo. Posteriormente, el espejo se retira, emulando la apertura del obturador y difractando el estado de rebotador en el tiempo. Es necesario comentar que esta configuración es inspirada principalmente en la empleada por Nesvizhevsky para observar por primera vez los estados estacionarios del rebotador [73]. Lo anterior, adelantamos, nos da evidencia de lo posible que es obtener experimentalmente los resultados que mostraremos a continuación.

<sup>6</sup>Están, por ejemplo, las distribuciones de tiempo de llegada [75, 76] que se definen en términos de la corriente de probabilidad. También puede definirse un operador de reloj cuántico en términos de los cambios de fase en la función de onda [77]. Bajo esa perspectiva, el tiempo de vuelo se define como el valor esperado del operador.

CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

En este caso, el estado inicial está dado por la ecuación (2.18), mientras que el propagador es, como en la situación anterior, el de caída libre (ecuación (3.15)). El estado propagado se obtiene al evaluar la expresión:

$$\psi_n(z, t) = \sqrt{\frac{ml_g}{2\pi\hbar t}} \int_{a_n}^{\infty} dx \frac{Ai(x)}{Ai'(a_n)} \exp \left\{ i \frac{m}{2\hbar t} \left( z - H_n + \frac{1}{2}gt^2 - l_g x \right)^2 \right\}, \quad (3.28)$$

donde  $x = \frac{1}{l_g}(z - H_n)$  es la expresión que usamos en el capítulo anterior para simplificar la integral de la transformada de Fourier (2.21). Sin embargo, no hemos logrado evaluar esta expresión en forma analítica, por lo cual no nos ha sido posible escribir una expresión para el estado propagado. No obstante, confiamos en los cálculos numéricos para lograr visualizar la densidad de probabilidad posterior a la apertura del obturador y obtener así algunas conclusiones.

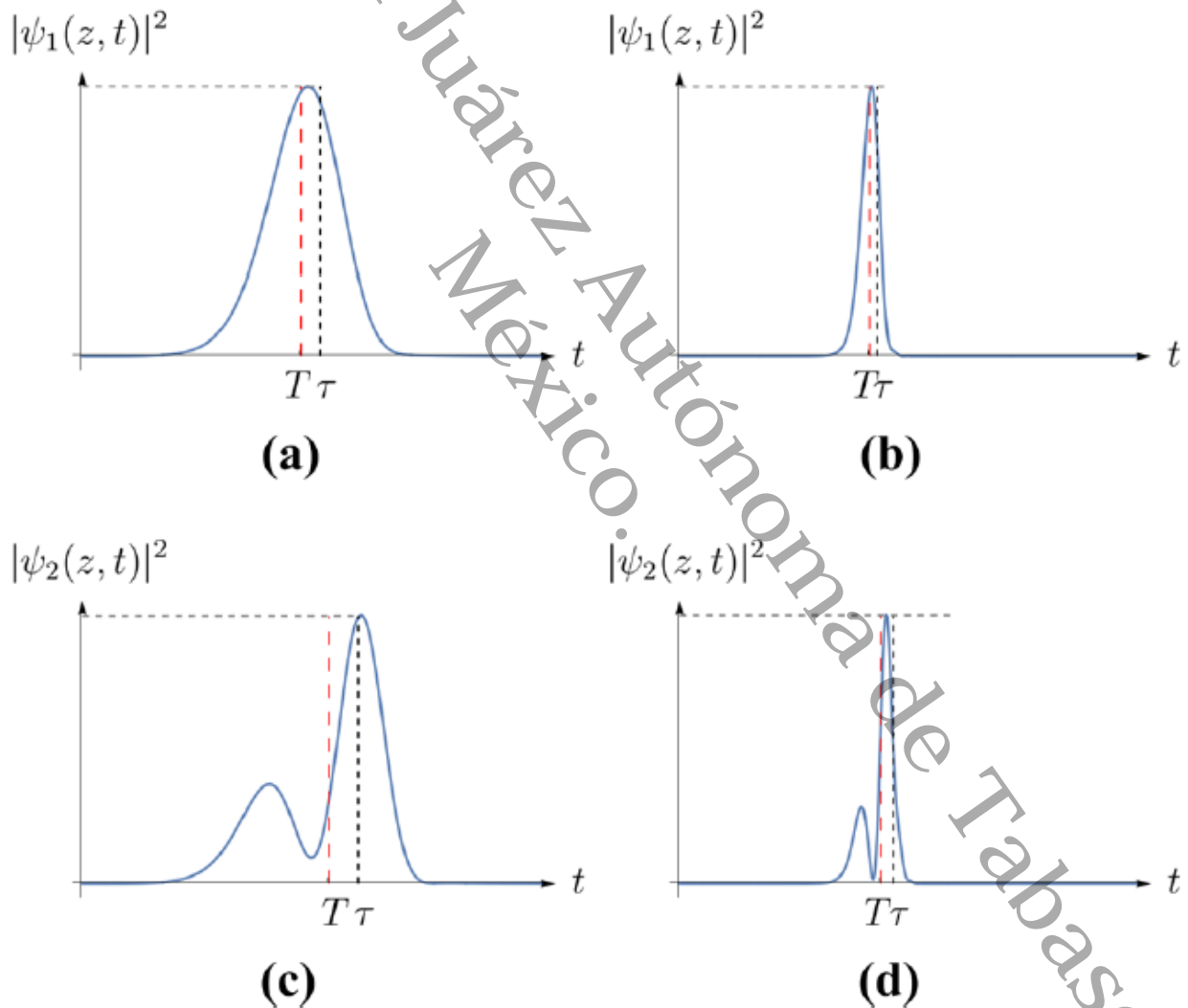


Figura 3.8: Se muestran las gráficas de las densidades de probabilidad cuánticas para el estado base ( $n = 1$  en la parte superior) y el primer estado excitado ( $n = 2$  en la parte inferior), para masas pequeñas (a la izquierda) y grandes(a la derecha).

## CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

En la figura 3.8 presentamos las gráficas obtenidas al evaluar numéricamente la expresión (3.28), para diferentes valores de la masa y la energía, como una función del tiempo  $t$  a una distancia fija  $z < 0$ . La diferencia más evidente entre el perfil de densidad mostrado en la figura 3.8 y el obtenido en el caso anterior, del haz monocromático, es la normalización. Este hecho no debería sorprendernos pues, en contraste con el haz monocromático, aquí se ha propagado un estado estacionario, el cual está propiamente normalizado (recordemos la discusión sobre la interpretación del efecto de difracción presentada en la sección 3.1.1).

Como es bien sabido, la cantidad de nodos intermedios de un estado cuántico acotado, está regida por su nivel de excitación sobre el estado base. Resulta interesante, como podemos ver en la figura 3.8, que la propagación del estado mantiene inalterada la cantidad de nodos del estado inicial. Pareciera que, al abrir el obturador, el perfil de densidad empieza a caer, tal cual es, y dicha caída se ve reflejada en el tiempo.

En la figura 3.8 se muestran los valores de tiempo  $\tau$  y  $T$ . Estos representan el tiempo que le tomaría a una partícula llegar a la pantalla si fuese soltada desde el punto de retorno clásico, en el caso de  $\tau$ , o desde el valor esperado de la posición, para  $T$ . Dichos tiempos de caída son dados por:

$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\frac{2}{g}(|z| + H_n)}, \\ T &= \sqrt{\frac{2}{g}\left(|z| + \frac{2}{3}H_n\right)}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Resulta claro que  $T < \tau$ , lo cual interpretamos como una medida de la diferencia entre el comportamiento clásico y el cuántico. De la figura podemos notar que el estado propagado está centrado principalmente alrededor de  $T$ , lo cual es de esperar. Sin embargo, al aumentar la masa del sistema, figuras 3.8 (b) y (d), podemos observar que ambos tiempos tienden a coincidir. Más aún, si la masa es suficientemente grande, resulta claro que, para estados no muy lejos del estado base, el valor de  $H_n$  tenderá a cero (dado que  $l_g$  tiende a cero). Por lo anterior, queda claro que al aumentar la masa de las partículas, el tiempo de caída se reducirá al tiempo de vuelo clásico  $t_{Cl} = \sqrt{2|z|/g}$  de una partícula soltada desde el obturador.

Así, contamos con evidencia de que el comportamiento clásico emerge de la mecánica cuántica al considerar masas grandes. Podemos, en analogía con la definición de la amplitud del efecto de difracción, estimar el retraso entre el tiempo de caída clásico y el cuántico, esto es:

$$\delta t = \frac{T - t_{Cl}}{t_{Cl}} = \frac{h_n}{3|z|}.\tag{3.30}$$

El cuadro 3.1 muestra el valor de este retraso para neutrones y átomos de cesio, así como para moléculas grandes de Carbono. Podemos notar como, para objetos más pesados, la diferencia decrece, aproximando el comportamiento clásico.

Hemos probado entonces, al menos en forma cualitativa, que el comportamiento clásico (y con ello la validez del PED) emerge al aumentar la masa del sistema. Es posible mostrar, en forma analítica, que  $T \sim \tau$  en el límite de masas grandes, sin embargo, dicha deducción requiere de un análisis que emplea el método de *descenso más rápido*. Por cuestiones de espacio y congruencia,

## CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

$n$	Neutrones	Cesio	$C_{60}$	$C_{176}$
1	$4.6 \times 10^{-6}$ s	$4.77 \times 10^{-7}$ s	$5.72 \times 10^{-8}$ s	$2.06 \times 10^{-8}$ s
2	$8 \times 10^{-6}$ s	$3.1 \times 10^{-7}$ s	$1 \times 10^{-7}$ s	$3.61 \times 10^{-8}$ s

Cuadro 3.1: Retraso en el tiempo de caída de sistemas cuánticos preparados en estados cuánticos gravitacionales.

hemos decidido omitir un estudio de dicho tema en este trabajo. Instamos al lector interesado en dicha deducción a mirar el capítulo III de [70].

La violación al PED de este sistema resulta evidente de nuestra discusión sobre el papel de la masa en los tiempos de caída. Es claro, al observar las figuras 3.6 y 3.8, que la diferencia entre los estados propagados va más allá de una simple transformación de coordenadas, como ocurría con el caso anterior. Esto es, este sistema viola el PEE. Vemos entonces que la introducción de la superficie reflectante introduce una modificación fundamental al sistema.

En resumen, en el sistema mostrado en la sección 3.2.1 se viola el PED, más se cumple el PEE. En 3.2.2 mostramos un sistema en el que se violan tanto el PED como el PEE. Pese a sus diferencias, en ambos sistemas las violaciones tienden a anularse al aumentar la masa del sistema. Concluimos entonces que el incremento de la masa del sistema hace emerger la validez del PED y el PEE en la caída libre difractada.

# Conclusión

11 En este trabajo hemos intentado aportar una pequeña pieza en la solución de la pregunta: ¿Es válido el Principio de Equivalencia de Einstein en la Mecánica Cuántica?. Con ese fin, hemos analizado el comportamiento de sistemas cuánticos análogos a la caída libre. En el primer capítulo hemos tratado de resumir, a grandes rasgos, el estado del arte. Presentamos los conceptos que usamos en capítulos posteriores para evaluar la validez del Principio de Equivalencia, así como los principales trabajos previos en esa dirección. Mostramos que a pesar de los grandes esfuerzos, tanto teóricos como experimentales, no es posible declarar sin dejo de dudas que el Principio de Equivalencia se cumple en el régimen cuántico.

12 En el segundo capítulo estudiamos el *rebotador cuántico*. Mostramos que se presenta una violación al Principio de Equivalencia debido a que la masa afecta al como cae la partícula. Analizamos el comportamiento del sistema, en el régimen de números cuánticos grandes, mediante una Formulación Matemática del Principio de Correspondencia de Bohr. El estudio nos permitió mostrar que en dicho régimen: 1) el comportamiento clásico se recupera: la densidad de probabilidad cuántica se reduce a su contraparte clásica, más términos de corrección que dependen de la masa; y 2) la dependencia de la masa se hace insignificante, mas no desaparece por completo, indicando que el Principio de Equivalencia emerge como una aproximación en el régimen de números cuánticos grandes.

En el tercer capítulo analizamos un análogo cuántico del experimento de caída libre de Galileo, que consiste en la *difracción en el tiempo* de una partícula en caída libre. Probamos que el perfil de densidad y la amplitud del efecto de difracción dependen de la masa de las partículas. Observamos además que el tiempo de caída difiere del valor clásico, haciéndose dependiente de la masa, indicando así una violación al Principio de Equivalencia Débil. Presentamos evidencia de que, en función del estado inicial de las partículas, se pueden observar violaciones al Principio de Equivalencia de Einstein. Mostramos que, al aumentar la masa de las partículas, se recuperan tanto el perfil de densidad como el tiempo de caída clásico, indicando la emergencia del Principio de Equivalencia como una aproximación en el régimen de masas grandes.

Es necesario, sin embargo, indicar que los resultados en este trabajo se han obtenido en el régimen no relativista. Un estudio relativista, tanto del rebotador como de la caída libre difractada, podría aportar nueva evidencia que refuerce nuestros resultados. Por otra parte, consideramos que un estudio experimental de la caída libre difractada puede llevarse a cabo con los recursos suficientes, lo cual representaría un complemento importante al trabajo aquí presentado. Más aún, un análisis cuantitativo del comportamiento de los términos de corrección cuánticos, podría permitirnos diseñar experimentos sensibles a observar los resultados planteados en este

### CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE PARTÍCULAS EN CAÍDA LIBRE

trabajo. Estos detalles se encuentran bajo análisis y forman parte de propuestas de trabajos a futuro.

En síntesis, hemos obtenido evidencia de que, en general, el Principio de Equivalencia de Einstein no se cumple en la Mecánica Cuántica. Hemos observado que el comportamiento clásico se obtiene, aproximadamente, al considerar ya sea la masa de las partículas o el número cuántico principal grande en comparación con las dimensiones del sistema. Llegamos a la conclusión de que, de aceptarse la hipótesis de que la Mecánica Clásica es una pieza emergente de la Mecánica Cuántica, el Principio de Equivalencia de Einstein no es en general válido.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Apéndice A

## El método de Albright

El método de Albright es un método planteado originalmente por J.R. Albright[78], el cual permite escribir las integrales de productos como combinaciones lineales de las funciones y sus derivadas. Se ilustra el uso del método para calcular la integral de  $Ai^2(x)$ . Observe que:

$$\frac{d}{dx}(xAi^2(x)) = Ai^2(x) + 2xAi(x)Ai'(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx}(Ai'^2(x)) = 2xAi(x)Ai'(x),$$

entonces:

$$Ai^2(x) = \frac{d}{dx}(xAi^2(x) - Ai'^2(x))$$

Integrando se obtiene que:

$$\int Ai^2(x)dx = xAi^2(x) - Ai'^2(x)$$

En [56] puede encontrarse una tabla con algunas integrales de utilidad. En particular, si  $y$  es cualquier combinación lineal de funciones de Airy, entonces se cumple que:

$$\int x^n y^2 dx = \frac{1}{2n+1} [nx^{n-1}y'y - x^n y'^2 + x^{n+1}y^2 - n(n-1) \int x^{n-2}y'y dx], \quad (A.1)$$

y a su vez se cumple que:

$$\int x^n y'y dx = \frac{1}{2} \left( x^n y^2 - n \int x^{n-1} y^2 dx \right). \quad (A.2)$$

Usando (A.2) en la integral de (A.1), se obtiene:

$$\int x^n y^2 dx = \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{1}{2} x^{n-2} y^2 (2x^3 - n(n-1)) + nx^{n-1} y y' - x^n y'^2 + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) \int x^{n-3} y^2 dx \right]. \quad (A.3)$$

La expresión anterior puede simplificarse considerablemente en el caso en que  $y(x) = Ai(x)$ . Si  $a$  es cualquier cero de  $Ai$  y se considera la integral impropia desde  $a$  hasta  $\infty$  se obtiene:

$$\int_a^\infty x^n Ai^2(x) dx = \frac{a^n Ai'^2(a)}{2n+1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(2n+1)} \int_a^\infty x^{n-3} Ai'^2(x) dx. \quad (A.4)$$

## APENDICE A. EL METODO DE ALBRIGHT

Una aplicación de (A.3) en la expresión anterior da como resultado:

$$\int_a^\infty x^n Ai^2(x) dx = \frac{a^n Ai^2(a)}{2n+1} \left[ 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(2n-5)} a^{-3} \right] + \frac{n!}{4(n-6)!(2n+1)(2n-5)} \int_a^\infty x^{n-6} Ai^2(x) dx. \quad (A.5)$$

La expresión (A.3) puede seguirse utilizando para bajar aún más la potencia del integrando. Es posible notar que en cada iteración se obtendrá una expresión en que la potencia de  $a$  se reducirá en 3 unidades. Es decir, la integral toma la forma

$$\int_a^\infty x^n Ai^2(x) dx = \Omega(a, n) \left( 1 + \sum_{m=1} \omega_m(n) a^{-3m} \right), \quad (A.6)$$

que es una suma de potencias de  $a^{-3}$ .

# Bibliografía

---

- [1] Ne'eman, Y. *Beyond the Standard Model: Will it be the Theory of Everything?* In Sidharth, B. G. (ed.) *A Century of Ideas*, chap. 28 (SPRINGER, 2008). Sec 3.
- [2] Misner, C., Thorne, K. & Wheeler, J. *Gravitation* (W. H Freeman and Company, 1973). Sec 17.1.
- [3] Cropper, W. H. *Great Physicists* (OXFORD University Press, 2001). Pag 224-225.
- [4] Bergia, S. *Attempts at Unified Field Theories (1919-1955)*. In Earman, J., Janssen, M. & Norton, J. D. (eds.) *The attraction of gravity. New studies in the History of General Relativity*, 274–301 (Birkhäuser, 1993).
- [5] Butterfield, J. & Isham, C. *Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity*. In Callender, C. & Huggett, N. (eds.) *Physics Meets Philosophy at the Planck Scale*, chap. 2 (Cambridge university press, 2004).
- [6] Accioly, A. & Paszko, R. *Quantum mechanics versus equivalence principle*. *Physical Review D* **78** (2008).
- [7] Carroll, S. M. *Spacetime and geometry* (Addison Wesley, 2004).
- [8] Thorne, K. S., Lee, D. L. & Lightman, A. P. *Foundations for a theory of gravitacion theories*. *Physical Review D* **7** (1973).
- [9] Lightman, A. P. & Lee, D. L. *Restricted Proof that the Weak Equivalence Principle Implies the Einstein Equivalence Principle*. *Phys. Rev. D* **8**, 364–376 (1973).
- [10] Cropper, W. H. *Great Physicists* (OXFORD University Press, 2001).- Pag 5-6,14-17.
- [11] Marsden, J. E. & Tromba, A. J. *Cálculo vectorial* (Addison-Wesley iberoamericana, 1991), 3 edn. Cap 4.1.
- [12] Jammer, M. *The concept of Mass in Contemporary Physics and Philosophy* (Princeton University Press, 2000). Pag 104-105.
- [13] Di Casola, E., Liberati, S. & Sonego, S. *Nonequivalence of equivalence principles*. *Am. J. Phys.* **83** (2015). Sec III.
- [14] Schiff, L. I. *On Experimental Tests of the General Theory of Relativity*. *American Journal of Physics* **28** (1960).

- [15] Haugan, M. P. *Energy conservation and the principle of equivalence*. Annals of Physics **118**, 156 – 186 (1979).
- [16] v. Eötvös, R., Pekár, D. & Fekete, E. *Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität*. Annalen der Physik **373**, 11–66.
- [17] Touboul, P. *et al.* *MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle*. Phys. Rev. Lett. **119**, 231101 (2017).
- [18] Amorim, A. *et al.* *Test of the Einstein Equivalence Principle near the Galactic Center Supermassive Black Hole*. Phys. Rev. Lett. **122**, 101102 (2019).
- [19] Colella, R., Overhauser, A. W. & Werner, S. A. *Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference*. Phys. Rev. Lett. **34**, 1472–1474 (1975).
- [20] Staudenmann, J. L., Werner, S. A., Colella, R. & Overhauser, A. W. *Gravity and inertia in quantum mechanics*. Phys. Rev. A **21**, 1419–1438 (1980).
- [21] Tiesinga, E., Mohr, P. J., Newell, D. B. & Taylor, B. N. *The 2018 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants*. National Institute of Standards and Technology (Web version 8.0, 2019). URL <http://physics.nist.gov/constants>.
- [22] Bonse, U. & Wroblewski, T. *Measurement of Neutron Quantum Interference in Noninertial Frames*. Phys. Rev. Lett. **51**, 1401–1404 (1983).
- [23] Bonse, U. & Wroblewski, T. *Dynamical diffraction effects in noninertial neutron interferometry*. Phys. Rev. D **30**, 1214–1217 (1984).
- [24] Penrose, R. *On the Gravitization of Quantum Mechanics 1: Quantum State Reduction*. Foundations of Physics **44**, 565–567 (2014).
- [25] *Neutron interference induced by gravity: New results and interpretations*. Physica B+C **151**, 22 – 35 (1988).
- [26] Will, C. M. *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, 2018), 2nd edition edn. Pag. 16-17.
- [27] Griffiths, D. J. *Introduction to quantum mechanics* (Prentice Hall, 1995). Pag. 108-110.
- [28] Maranganti, R. & Sharma, P. *Revisiting quantum notions of stress*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **466**, 2097–2116 (2010).
- [29] Rosi, G. *et al.* *Quantum test of the equivalence principle for atoms in coherent superposition of internal energy states*. Nature Communications **8**, 15529 (2017).
- [30] Anastopoulos, C. & Hu, B. L. *Equivalence principle for quantum systems: dephasing and phase shift of free-falling particles*. Class. Quantum Grav **35** (2018).
- [31] Zych, M. & Brukner, Č. *Quantum formulation of the Einstein equivalence principle*. Nature Physics **14**, 1027–1031 (2018).

- [32] Makowski, A. J. *A brief survey of various formulations of the correspondence principle*. European Journal of Physics **27**, 1133–1139 (2006).
- [33] Cañas Palomeque, J. A. *La caída libre cuántica* (2019). Gr Tesis, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [34] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics* (Addison Wesley, 1965), 2da edn.
- [35] Bromley, D. & Greiner, W. *Quantum Mechanics: An Introduction*. Physics and Astronomy (Springer Berlin Heidelberg, 2000).
- [36] Planck, M. *On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum*. Verh. Deut. Phys. Ges **2**, 202–204 (1900).
- [37] Hoyer, U. (ed.). *work in atomic physics (1912-1917)*, vol. 2 of *Niels Bohr Collected Works*, 433–461 (1981). Pag 434.
- [38] Liboff, R. L. *Bohr correspondence principle for large quantum numbers*. Foundations of Physics **5**, 271–293 (1975).
- [39] Liu, H. *The correspondence principle and the founding of the atomic quantum theory*. The Physics Teacher **33**, 396–398 (1995).
- [40] Ehrenfest, P. *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik **45**, 455–457 (1927).
- [41] Peres, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods*, vol. 72 of *Fundamental Theories of Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2002). Sec 10.2.
- [42] Kramers, H. A. *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung*. Z. Angew. Phys. **39**, 828–840 (1926).
- [43] Sen, D. & Sengupta, S. *A Critique of the Classical Limit Problem of Quantum Mechanics*. Found Phys Lett **19**, 403–421 (2006).
- [44] Wigner, E. *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*. Phys. Rev. **40**, 749–759 (1932).
- [45] Zeh, H. D. *On the interpretation of measurement in quantum theory*. Found. Phys. **1**, 69–76 (1970).
- [46] Kramers, H. A. & Heisenberg, W. *über die streuung von strahlung durch atome*. Zeitschrift für Physik **31**, 681–708 (1925).
- [47] Bernal, J., Martín-Ruiz, A. & García-Melgarejo, J. C. *A Simple Mathematical Formulation of the Correspondence Principle*. Journal of Modern Physics **4**, 108–112 (2013).
- [48] Robinett, R. W. *Quantum and classical probability distributions for position and momentum*. Am. J. Phys. **63**, 823 (1998).

- [49] Martín-Ruiz, A., Bernal, J., Frank, A. & Carbajal-Dominguez, A. *The Classical Limit of the Quantum Kepler Problem*. *Journal of Modern Physics* **4** (2013).
- [50] Hernández, K. G., Aguilar, S. E. & Bernal, J. *Extension of the correspondence principle in relativistic quantum mechanics*. arXiv (2019). 1907.05842.
- [51] Gibbs, R. L. *The quantum bouncer*. *American Journal of Physics* **43**, 25–28 (1975).
- [52] Langhoff, P. *Schrödinger Particle in a Gravitational Well*. *American Journal of Physics* **39**, 954–957 (1971).
- [53] Robinett, R. W. *Visualizing classical and quantum probability densities for momentum using variations on familiar one-dimensional potentials*. *European Journal of Physics* **23**, 165–174 (2002).
- [54] Abramowitz, M. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Dover Publications, Inc., USA, 1974). Sec 7.3.
- [55] Airy, G. B. *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic*. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **6**, 379–401 (1838).
- [56] Olivier Vallee, M. S. *Airy Functions and Applications to Physics* (Imperial College Press, 2010), 2nd edn. URL <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=10C4D3395273E53B896C74C57C8166C1>.
- [57] Ishihara, T. *Observing the dynamics of a particle in a wedge potential from the quantum and the classical perspective* (2003). URL <https://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/documents/Quantum%20Mechanics/Miscellaneous%20Essays/Quantum%20Bouncer/E1.%20Tomoko%20Thesis.pdf>. Gr Tesis, Reed College.
- [58] Moshinsky, M. *Diffraction in Time*. *Phys. Rev.* **88**, 625–631 (1952).
- [59] Godoy, S. *Diffraction in time: Fraunhofer and Fresnel dispersion by a slit*. *Phys. Rev. A* **65**, 042111 (2002).
- [60] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. *Quantum Mechanics* (Wiley-Interscience publication, 1977). 329-336.
- [61] Hecht, E. *Optics, Global Edition* (Pearson Higher Education, 2017), 5 edn. Sec. 10.3.6.
- [62] Brukner, Č. & Zeilinger, A. *Diffraction of matter waves in space and in time*. *Phys. Rev. A* **56**, 3804–3824 (1997).
- [63] Steane, A., Szriftgiser, P., Desbiolles, P. & Dalibard, J. *Phase Modulation of Atomic de Broglie Waves*. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4972–4975 (1995).
- [64] Szriftgiser, P., Guéry-Odelin, D., Arndt, M. & Dalibard, J. *Atomic Wave Diffraction and Interference Using Temporal Slits*. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4–7 (1996).
- [65] Schmidt, T., Haug, R. J., Klitzing, K. v., Förster, A. & Lüth, H. *Spectroscopy of the Single-Particle States of a Quantum-Dot Molecule*. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1544–1547 (1997).

- [66] Ratschbacher, L., Zipkes, C., Sias, C. & KÄhl, M. *Controlling chemical reactions of a single particle*. Nature Physics **8**, 649–652 (2012).
- [67] Haller, E. *et al.* *Single-atom imaging of fermions in a quantum-gas microscope*. Nature Physics **11**, 738–742 (2015).
- [68] del Campo, A., García-Calderón, G. & Muga, J. *Quantum transients*. Physics Reports **476**, 1 – 50 (2009).
- [69] Moshinsky, M. *Diffraction in time and the time–energy uncertainty relation*. American Journal of Physics **44**, 1037–1042 (1976).
- [70] Cañas, J. A., Bernal, J. & Martín-Ruiz, A. *Testing the equivalence principle with time-diffracted free-falling quantum particles*. The European Physical Journal Plus **137** (2022). URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03051-5>.
- [71] Feynman, R. & Hibbs, A. *Quantum Mechanics and path integrals*. International series in pure and applied physics (McGraw-Hill).
- [72] Emrich, W. *Chapter 5 - Basic Nuclear Structure and Processes*. In Emrich, W. (ed.) *Principles of Nuclear Rocket Propulsion*, 55–80 (Butterworth-Heinemann, 2016). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128044742000059>.
- [73] Nesvizhevsky, V. V. *et al.* *Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field*. Nature **415**, 297–299 (2002). URL <https://doi.org/10.1038/415297a>.
- [74] Aminoff, C. G. *et al.* *Cesium atoms bouncing in a stable gravitational cavity*. Phys. Rev. Lett. **71**, 3083–3086 (1993). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.3083>.
- [75] Leavens, C. *Arrival time distributions*. Physics Letters A **178**, 27–32 (1993).
- [76] Muga, J., Brouard, S. & Macias, D. *Time of Arrival in Quantum Mechanics*. Annals of Physics **240**, 351–366 (1995).
- [77] Peres, A. *Measurement of time by quantum clocks*. American Journal of Physics **48**, 552–557 (1980).
- [78] Albright, J. R. *Integrals of products of Airy functions*. Journal of Physics A: Mathematical and General **10**, 485–490 (1977). URL <https://doi.org/10.1088/0305-4470/10/4/011>.

# Juan Antonio Cañas Palomeque.pdf

 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

## Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:579931829

Fecha de entrega

17 abr 2026, 3:40 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

17 abr 2026, 3:46 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Juan Antonio Cañas Palomeque.pdf

Tamaño del archivo

2.2 MB

53 páginas

14.772 palabras

97.626 caracteres




# 6% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Filtrado desde el informe


- ▶ Bibliografía
- ▶ Texto citado
- ▶ Abstract

## Fuentes principales

- 6%  Fuentes de Internet
- 0%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**  
213 caracteres sospechosos en N.º de páginas  
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

## Fuentes principales

- 6% Fuentes de Internet
- 0% Publicaciones
- 0% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Fuentes principales

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	Internet	ri.ujat.mx	<1%
2	Internet	documentop.com	<1%
3	Internet	dokumen.pub	<1%
4	Internet	pdfcookie.com	<1%
5	Internet	docplayer.es	<1%
6	Internet	espanol.libretexts.org	<1%
7	Internet	idoc.pub	<1%
8	Internet	qdoc.tips	<1%
9	Internet	doku.pub	<1%
10	Internet	www.coursehero.com	<1%
11	Internet	encuentros3cantos.blogspot.com	<1%

12	Internet	issuu.com	<1%
13	Internet	ri.ues.edu.sv	<1%
14	Internet	docta.ucm.es	<1%
15	Internet	archivos.ujat.mx	<1%
16	Internet	digital.cic.gba.gob.ar	<1%
17	Internet	cienciaergosum.uaemex.mx	<1%
18	Internet	es.wikipedia.org	<1%
19	Internet	files01.core.ac.uk	<1%
20	Internet	archive.org	<1%
21	Internet	ilustrados.com	<1%
22	Publicación	Özlem Tuğfe Demir, Emil Björnson. "A New Polar-Domain Dictionary Design for th...	<1%
23	Internet	repositori.uib.es	<1%
24	Internet	prezi.com	<1%
25	Internet	www.almaobservatory.org	<1%

26	Internet	www.cec.uchile.cl	<1%
27	Internet	doczz.es	<1%
28	Internet	eprints.ucm.es	<1%
29	Internet	hemerotecadigital.uanl.mx	<1%
30	Internet	petalofucsia.blogia.com	<1%
31	Internet	recercat.cat	<1%
32	Internet	wiki2.org	<1%
33	Internet	www.arxiv-vanity.com	<1%
34	Internet	www.mdpi.com	<1%
35	Publicación	Patricia Batista Grau. "Desarrollo de nanoestructuras de ZnO mediante anodizad...	<1%
36	Internet	campus.almagro.ort.edu.ar	<1%
37	Internet	de.slideshare.net	<1%
38	Internet	gold.dallasnews.com	<1%
39	Internet	hdl.handle.net	<1%

40	Internet	obelix.fisica.unlp.edu.ar	<1%
41	Internet	www.colibri.udelar.edu.uy	<1%
42	Internet	www.esfm.ipn.mx	<1%
43	Internet	www.grafiati.com	<1%
44	Internet	www.lajpe.org	<1%
45	Internet	www.oalib.com	<1%
46	Internet	www.researchgate.net	<1%