



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA  
DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



1  
**MAPEO DE PERIODOS PARA UNA DEFORMACIÓN  
 $\mu$ -CONSTANTE DE CURVAS ELÍPTICAS**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**FRANCISCO JESUS FLORES VIVAS**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. MIGUEL ANGEL DE LA ROSA CASTILLO**

**CUNDUACÁN, TABASCO, MÉXICO.**

**ABRIL DE 2023**



**UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO**  
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

18 de abril de 2023

**LIC. FRANCISCO JESÚS FLORES VIVAS  
PASANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
PRESENTE**

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**MAPEO DE PERIODOS PARA UNA DEFORMACIÓN  $\mu$ -CONSTANTE DE CURVAS ELÍPTICAS**", en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin mas por el momento, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE.**



DIVISION ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL  
DIRECTORA**

C.c.p.- Archivo

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

4

### Carta de Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada, **“MAPEO DE PERIODOS PARA UNA DEFORMACIÓN  $\mu$ -CONSTANTE DE CURVAS ELÍPTICAS”**, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 18 días del mes de abril del año 2023.

Autoriza



# Índice general

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Agradecimientos</b>                                        | <b>III</b> |
| <b>Introducción</b>                                           | <b>v</b>   |
| <b>1. Preliminares</b>                                        | <b>1</b>   |
| 1.1. Superficies de Riemann . . . . .                         | 1          |
| 1.2. 2-variedades reales . . . . .                            | 3          |
| 1.3. Ejemplos de superficies de Riemann . . . . .             | 4          |
| 1.4. Curvas algebraicas proyectivas . . . . .                 | 7          |
| 1.5. Superficies de Riemann hiperelípticas . . . . .          | 10         |
| 1.6. Formas diferenciales sobre superficies . . . . .         | 13         |
| 1.7. Cohomología de de Rham para una superficie . . . . .     | 16         |
| 1.8. Fibración de Milnor . . . . .                            | 18         |
| 1.9. Haces vectoriales complejos y holomorfos . . . . .       | 21         |
| 1.10. Deformaciones $\mu$ -constantes . . . . .               | 23         |
| <b>2. Retícula de Brieskorn y conexión</b>                    | <b>29</b>  |
| 2.1. Conexión de Gauss-Manin en $(\mathbb{C}^2, 0)$ . . . . . | 29         |
| 2.2. Espectro para un germen de curva plana . . . . .         | 35         |
| 2.3. Retícula de Brieskorn y residuos de Leray . . . . .      | 36         |
| 2.3.1. Residuo de Leray . . . . .                             | 36         |
| 2.3.2. Ciclos evanescentes . . . . .                          | 38         |
| 2.3.3. Monodromía clásica . . . . .                           | 43         |
| 2.3.4. Haz (co)-homológico de Milnor . . . . .                | 44         |
| 2.3.5. Secciones Elementales y Geométricas . . . . .          | 45         |

II

## ÍNDICE GENERAL

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3.6. Retícula de Brieskorn vía secciones geométricas . . . . | 47        |
| <b>3. Mapeo de periodos</b>                                    | <b>55</b> |
| 3.1. Pegado de fibraciones de Milnor . . . . .                 | 56        |
| 3.2. Fibración cohomológica . . . . .                          | 60        |
| 3.3. Mapeo de periodos . . . . .                               | 61        |
| <b>4. Conclusiones</b>                                         | <b>75</b> |
| <b>A. Topología</b>                                            | <b>77</b> |
| A.1. Homología singular . . . . .                              | 77        |
| A.2. Fibraciones . . . . .                                     | 79        |
| <b>B. Geometría compleja</b>                                   | <b>83</b> |
| B.1. Gavillas . . . . .                                        | 83        |
| B.2. Grassmanianas . . . . .                                   | 85        |

## Agradecimientos

---

*Al final, llegan los agradecimientos. Al final de cada lucha, al final de cada proyecto, al final de cada logro que se obtiene en la vida. Ha llegado el momento de agradecer.*

Hay personas que han sido, de una u otra manera, apoyo en la conclusión de este proyecto de tesis, apoyo moral, emocional o intelectual. Personas que han sido de mucha importancia para llegar a este momento. Bueno, mi Dios no es una persona, pero es a quién primero quiero agradecer por darme vida, salud y una pequeña porción de conocimiento. Sin Dios, soy nada.

Seguidamente, agradezco a toda mi familia, que son una de las piezas fundamentales en mi vida, en especial a mi padre Francisco Flores C. que se llena de orgullo al saber que su hijo obtendrá un grado académico más. Así mismo, a mis hermas María Magdalena Flores Vivas y Céfora Flores Vivas, que también estoy seguro se alegran y enorgullecen de su hermano.

Otra de las piezas fundamentales en mi vida, es la novia que ya hace algunos añitos está alentándome cuando decaigo, apoyándome, regañándome cuando me pongo flojo, en cualquier momento ahí está conmigo. Gracias Marcela Guadalupe Morales Alvarez por convertirte en uno de los motivos para lograr realizar este proyecto en mi vida.

También quiero agradecer a mi asesor, ya que él ha puesto mucho en la realización de este proyecto. Principalmente, su paciencia y tiempo para compartir sus conocimientos conmigo. Así mismo, con sus palabras que me ha alentado a seguir creciendo en este camino de las matemáticas. ¡Muchas gracias estimado Doctor Miguel Angel de la Rosa Castillo!

Por último, quiero agradecer el apoyo económico por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) a través de la beca No. 774698 para cursar la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

IV

## AGRADECIMIENTOS

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Introducción

La teoría de singularidades tiene una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo, su uso en la teoría de sistemas dinámicos. Dentro de la matemática pura, se aprecia su interacción con las geometrías algebraica y compleja; álgebra conmutativa; y la topología algebraica. Una línea de interés en este contexto, es la teoría de singularidades de funciones suaves, que podemos interpretar en cierto sentido como una generalización del análisis de funciones cerca de sus máximos y mínimos, lo que uno puede abordar asumiendo una estructura de diferenciabilidad para la función o familia de funciones de interés, [Arnol'd et al.-1985], [Arnol'd et al.-2012]. Existe un enfoque de esta teoría que se centra en aspectos algebraicos y complejo-analíticos, con el cual, en el presente proyecto, se analizará el comportamiento de deformaciones de curvas elípticas bajo ciertas condiciones.

En la teoría de singularidades de funciones suaves, un objeto matemático en el que se aprecia una amplia interacción entre análisis complejo y geometría algebraica clásica, es la retícula de Brieskorn asociada a un germen de función analítica  $f$  definida sobre un dominio en  $\mathbb{C}^{n+1}$  cuyos puntos críticos son aislados.

Existen múltiples invariantes de interés asociados a  $f$  cerca de un punto crítico aislado. Supongamos que  $f$  tiene punto crítico aislado en  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , uno de estos invariantes es el álgebra de Milnor dada por el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\mathcal{O}_f$ , formado al cocientar el anillo de series convergentes (gérmenes) alrededor del  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ , con el ideal  $J_f$  que está generado por las derivadas parciales de  $f$ , [Arnol'd et al.-2012]. La dimensión de  $\mathcal{O}_f$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial es llamada el número de Milnor,  $\mu := \mu(f, 0)$ . Otro invariante es la retícula de Brieskorn  $H_0''$  la cual es un  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ -módulo de formas diferenciales holomorfas que permite recuperar, salvo un cociente, al álgebra de Milnor, [Kulikov-1998].

Vía la retícula de Brieskorn se puede construir un invariante discreto asociado a  $f$  con respecto al punto crítico  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ , el cual es llamado el

## VI

## INTRODUCCIÓN

espectro de la singularidad,  $sp(f)$ , el cual consiste de  $\mu$  números racionales contando multiplicidades, las cuales miden la dimensión como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de las piezas asociadas a una graduación del álgebra de Milnor usando la  $V^\bullet$ -filtración, [Kulikov-1998], [Arnol'd et al.-2012]. A través de este invariante, es posible describir el comportamiento de  $f$  dentro de una familia de hipersuperficies  $\{F_\lambda\}$  parametrizada por un espacio  $M$  de parámetros  $\lambda$  tales que  $\mu(F_\lambda) = \mu(f)$ , es decir, el número de Milnor se mantiene constante bajo deformación. A esta familia la llamaremos deformación  $\mu$ -constante de  $f$ .

En este trabajo de tesis, nos enfocaremos en el análisis del mapeo de periodos determinado por la retícula de Brieskorn y que está asociado a una deformación  $\mu$ -constante para el caso de curvas elípticas simples (ver [Kulikov-1998], pág. 160).

Este trabajo se divide en 3 capítulos y 2 apéndices. En el capítulo 1 se exponen algunos conceptos básicos que ayudarán al lector a entender el capítulo 3, a decir: Superficies de Riemann, Curvas planas afines suaves, Curvas planas proyectivas suaves (resultados importantes para que una curva sea superficie de Riemann), Superficies de Riemann hiperelípticas (construcción de tales superficies), Cohomología de de Rham para superficies de Riemann, Fibración de Milnor, Haces vectoriales, Deformaciones  $\mu(f)$ -constantes para un germen de función holomorfa  $f$ , entre otras. Para una lectura amena, es recomendable estar familiarizado con las nociones siguientes: filtraciones de módulos, espacios graduados, suma directa, producto tensorial y algunos conocimientos de análisis complejo que se usan en el transcurso de este escrito.

En el capítulo 2 se construye, para un germen  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , la retícula de Brieskorn  $\mathcal{H}^{(0)}$  como un módulo cociente de 2-formas holomorfas; una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal llamada la conexión de Gauss-Manin definida sobre el “módulo localización”  $\mathcal{M} := \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ , la cual es una manera de derivar 2-formas; la  $V^\bullet$ -filtración sobre  $\mathcal{M}$ ; la  $F^\bullet$ -filtración de Hodge sobre un espacio  $\mathcal{C}$  para construir el espectro de la singularidad  $sp(f)$ ; el haz homológico y cohomológico de Milnor inducidos por la fibración de Milnor; el homomorfismo monodromía sobre los 1-grupo de cohomología (homología) de las fibras del haz cohomológico; residuos de Leray de 2-formas holomorfas y sus secciones geométricas asociadas para describir la retícula de Brieskorn de manera analítica, usando expansiones asintóticas de periodos de integrales, enfoque de A. N. Varchenko.

Los objetos mencionados anteriormente que se desarrollan en este capítulo 2, son fundamentales para la descripción del objeto principal de estudio de este trabajo, el mapeo de periodos, a través de la estructura diferenciable

## VII

que induce la conexión de Gauss-Manin en la localización de la retícula de Brieskorn y la  $V^\bullet$ -filtración de Malgrange-Kashiwara.

En el capítulo 3, antes de describir el mapeo de periodos asociado a una deformación  $\mu$ -constante de un germen con singularidad aislada  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , daremos algunas definiciones y resultados necesarios. Veremos también la manera en que se pegan todos los objetos que se construyeron en el capítulo 2 pero ahora considerando cada elemento de una familia  $F_\lambda$  de gérmenes (deformación de  $f$ ) y ensamblarlos para formar un solo objeto. Por último, se describe un algoritmo para determinar dicho mapeo de periodos y se trabaja un ejemplo en específico: el mapeo de periodos para una familia de curvas elípticas simples.

Un hecho importante que debemos mencionar, es que en el proceso de construcción del mapeo de periodos, se encuentra que las imágenes de éste determinan soluciones de la **ecuación hipergeométrica de Gauss**

$$z(z-1)\partial^2 f(z) + ((\theta + \rho + 1)z - \tau)\partial f(z) + \theta\rho u(a) = 0,$$

para ciertos valores de  $\theta, \rho, \tau \in \mathbb{C}$ , la cual tiene una gran importancia en varias áreas de las matemáticas (ver [Saito & Takayama-2013], pág. 16).

El apéndice A se divide en dos secciones. En la primera sección se da la construcción y definición de los grupos de homología singular sobre un anillo  $R$  para un espacio topológico  $M$ . En la segunda sección se definen las fibraciones y fibraciones localmente triviales entre variedades suaves (o espacios topológicos), con algunos resultados sobre éstas.

Por último, en el apéndice B se da un pequeño desarrollo sobre la definición de gavillas y se concluye con unos ejemplos importantes.

VIII

## INTRODUCCIÓN

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados necesarios para desarrollar y entender los capítulos posteriores, en específico el capítulo 3. Trataremos temas tales como: superficies de Riemann, curvas planas, curvas proyectivas, superficies de Riemann hiperelípticas, cohomología de de Rham sobre superficies de Riemann, fibración de Milnor; haces vectoriales, deformaciones  $\mu(f)$ -constantes para un germen  $f$ , entre otras. Es recomendable para el lector estudiar los temas aquí presentados, si no está familiarizado con alguno de ellos.

### 1.1. Superficies de Riemann

En esta sección damos la definición formal de una superficie de Riemann. Los resultados dados son obtenidos de [Danilov & Shokurov-2013] y [Miranda-1995].

**Definición 1.1.1.** Sea  $M$  un espacio topológico.

1. Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $M$  y de  $\mathbb{C}^n$ , respectivamente. Una **carta compleja** sobre  $M$  (o simplemente una **carta**) es un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ .
2. Un **atlas** de  $M$  es una colección de cartas  $\mathcal{A} := \{\phi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha} \mid \forall \alpha \in I\}$ ,  $I \subset \mathbb{N}$ , con la propiedad  $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ .

Dada  $\phi : U \rightarrow V$  una carta compleja sobre un espacio topológico  $M$ , a cualquier punto  $p \in U$  le corresponde una única  $n$ -tupla de números complejos  $\phi(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$ . A  $(z_1(p), \dots, z_n(p))$  se le llama *coordenadas complejas* sobre  $U$ .

**Definición 1.1.2.** Dos cartas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  y  $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$  se dirán **analíticas compatibles** siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  ó si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , el mapeo

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \quad (\text{ver figura 1.1})$$

sea holomorfo,  $\forall \alpha, \beta \in I$ .

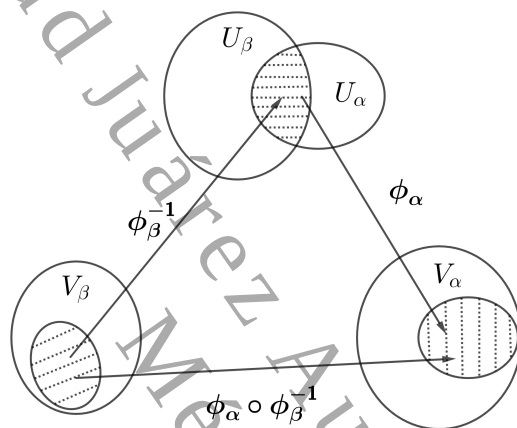


Figura 1.1: Composición de cartas.

**Definición 1.1.3.** Sea  $M$  un espacio topológico.

1. Decimos que un atlas  $\mathcal{A}$  de  $M$  es **analítico** si cualesquiera dos cartas de  $\mathcal{A}$  son analíticas compatibles.
2. Un espacio topológico Hausdorff  $M$ , equipado con un atlas analítico  $\mathcal{A}$ , es llamado **variedad compleja**.

**Definición 1.1.4.** Dos atlas analíticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son **compatibles**, si cualquier carta de  $\mathcal{A}$  es analítica compatible con cualquier carta de  $\mathcal{B}$ .

Se tiene la siguiente equivalencia a la definición anterior:

**Proposición 1.1.1.** (ver [Danilov & Shokurov-2013], pág. 17) Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  atlas analíticos. Entonces,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son compatibles  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  es un atlas analítico.

## 1.2. 2-VARIEDADES REALES

3

La unión de todas las cartas analíticas compatibles sobre  $M$  es un atlas maximal, es llamado *estructura analítica compleja* sobre  $M$ .

Elamaremos *dimensión* de una carta  $\phi : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha}$  al número  $n_\alpha$ . Para una variedad compleja conexa  $M$  la dimensión de las cartas de sus atlas no cambia. Así, para una variedad compleja conexa  $M$ , la dimensión de una de sus cartas (cualquiera) es llamada la *dimensión* de  $M$ .

**Definición 1.1.5.** Una **superficie de Riemann** es una variedad analítica compleja conexa  $M$  de dimensión 1.

## 1.2. 2-variedades reales

En esta sección describimos las 2-variedades reales y su relación con superficies de Riemann. Además, se enuncia un resultado que clasifica las superficies de Riemann a través del género topológico. Los resultados pueden ser consultados en [Miranda-1995].

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico.

1. Una **carta  $n$  dimensional real** sobre  $X$  es un homeomorfismo  $\phi : U \longrightarrow V$ , con  $U \subset X$  y  $V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos.
2. Dos cartas  $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$  y  $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$  se dicen ser  **$C^\infty$ -compatibles** si

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$$

es un  $C^\infty$ -difeomorfismo, esto es, existe su inversa y, tanto  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$  como su inversa, tienen derivadas parciales de todos los órdenes en cualquier punto.

3. Un  **$C^\infty$ -atlas** de  $X$  es una colección de cartas sobre  $X$  que son compatibles por pares y la unión de sus dominios cubren el espacio  $X$ .
4. Dos atlas sobre  $X$  son **equivalentes**, si la unión de ellos es un  $C^\infty$ -atlas.
5. Una **estructura  $C^\infty$ -diferenciable** sobre  $X$  es una clase de equivalencia de  $C^\infty$ -atlas.
6. Una  **$C^\infty$ -variedad real** es un espacio topológico  $M$  Hausdorff segundo contable con una estructura  $C^\infty$ -diferenciable.

Dado que los mapeos holomorfos en una variable compleja  $z = x + iy$  son  $C^\infty$ -diferenciables en las variables  $x$  y  $y$ , se tiene que una superficie de Riemann es una  $C^\infty$ -variedad real de dimensión dos (*2-variedad*).

**Proposición 1.2.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 6) *Cualquier superficie de Riemann es una  $C^\infty$ -variedad real 2-dimensional orientable y conexa por trayectorias. Así, cualquier superficie de Riemann compacta es difeomorfa a una esfera con  $g$  asas, para algún entero no negativo  $g$ .*

Así, cuando  $g = 0$ , tenemos una esfera sin asas y la superficie es topológicamente una esfera. Si  $g = 1$ , tenemos una esfera con 1 asa, es decir, un toro o topológicamente equivalente a  $S^1 \times S^1$ . Para  $g \geq 2$ , la superficie se obtiene uniendo  $g$  asas a la 2-esfera.

**Definición 1.2.2.** *El entero  $g$  es llamado el género topológico de una superficie de Riemann compacta.*

El género topológico de una superficie de Riemann compacta es un invariante fundamental.

### 1.3. Ejemplos de superficies de Riemann

Esta sección se utiliza para dar algunos ejemplos variados e importantes de superficies de Riemann. Los resultados pueden ser consultados en [Miranda-1995].

#### 1. Línea proyectiva

Sean  $z, w \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ ,  $z = (z_0, z_1)$ ,  $w = (w_0, w_1)$  y  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Decimos que  $z$  está relacionado con  $w$  ( $z \sim w$ ) siempre que  $z = \lambda w$ .

**Definición 1.3.1.** *La línea proyectiva compleja se define como el espacio cociente  $(\mathbb{C}^2 - \{0\})/\sim$ , el cual denotaremos como  $\mathbb{CP}^1$  y sus clases de equivalencia como  $(z_0 : z_1)$ .*

Entonces, un punto en  $\mathbb{CP}^1$  corresponde a una línea, sin el origen, generada por algún  $z \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ . Los puntos  $(z_0 : z_1)$  de  $\mathbb{CP}^1$  son llamadas *coordenadas homogéneas*.

Definimos  $U_0 = \{(z_0 : z_1) : z_0 \neq 0\}$  y  $U_1 = \{(z_0 : z_1) : z_1 \neq 0\}$ .

## 1.3. EJEMPLOS DE SUPERFICIES DE RIEMANN

5

Notemos que cualquier punto  $(z_0 : z_1)$  del espacio proyectivo  $\mathbb{CP}^1$  cumple que  $(z_0 : z_1) \neq 0$ , esto es, existe  $0 \leq k \leq 1$  tal que  $z_k \neq 0$ , de lo cual se tiene que  $(z_0 : z_1) \in U_k$ . Así, los abiertos  $U_0$  y  $U_1$  cubren al espacio  $\mathbb{CP}^1$ .

Definamos los homeomorfismos  $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  dados por  $\phi_0(z_0 : z_1) = \frac{z_1}{z_0}$  y  $\phi_1(z_0 : z_1) = \frac{z_0}{z_1}$ . Los homeomorfismos  $\phi_0$  y  $\phi_1$  están bien definidos, ya que si  $(z_0 : z_1) = (z'_0 : z'_1) \in U_0$ , entonces existe un complejo  $\lambda \neq 0$  tal que  $(z'_0, z'_1) = \lambda(z_0, z_1) \Leftrightarrow z'_0 = \lambda z_0$  y  $z'_1 = \lambda z_1$ . Entonces,  $\phi_0(z'_0 : z'_1) = \frac{z'_1}{z'_0} = \frac{\lambda z_1}{\lambda z_0} = \frac{z_1}{z_0} = \phi_0(z_0 : z_1)$ . De manera análoga se tiene que  $\phi_1(z'_0 : z'_1) = \phi_1(z_0 : z_1)$ , para toda  $(z_0, z_1) \in U_1$ .

Las funciones  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son biyectivas, ya que sus inversas están dadas por  $\phi_0^{-1}(w) = (1 : w)$  y  $\phi_1^{-1}(w) = (w : 1)$ , respectivamente.

Notemos que cualquier punto  $(z : w) \in U_0 \cap U_1$  es tal que  $z, w \neq 0$ . Entonces,  $\phi_k(U_0 \cap U_1) \subset \mathbb{C} - \{0\}$ . Así, tenemos que la composición  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  está dada por  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(s) = \phi_1(\phi_0^{-1}(s)) = \phi_1(1 : s) = \frac{1}{s}$ ,  $s \neq 0$ , la cual es holomorfa.

**Proposición 1.3.1.**  $\mathbb{CP}^1$  es Hausdorff.

*Dem.*  $U_0$  y  $U_1$  son Hausdorff. Así, si tomamos  $p, q \in U_0$  (o  $U_1$ ), podemos separar  $p$  y  $q$  por abiertos disjuntos. Si  $p \in U_0 - U_1$  y  $q \in U_1 - U_0$ , entonces  $p = (1 : 0)$  y  $q = (0 : 1)$ , los cuales son separados por los abiertos  $\phi_0^{-1}(D_1(0))$  y  $\phi_1^{-1}(D_1(0))$ , respectivamente. Por lo cual,  $\mathbb{CP}^1$  es Hausdorff.  $\square$

Hasta ahora, tenemos que  $\mathbb{CP}^1$  es un espacio topológico conexo y Hausdorff de dimensión 1 con un atlas analítico dado por las cartas  $\phi_0$  y  $\phi_1$ . Por lo tanto,  $\mathbb{CP}^1$  es una superficie de Riemann.

## 2. Gráficas de funciones holomorfas

Sea  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa sobre un subconjunto  $V \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo. La gráfica de  $g$  está dada por

$$X := \{(z, g(z)) : z \in V\}.$$

A  $X$  se le hereda la topología de subespacio dada por  $\mathbb{C}^2$ . Sea  $\pi : X \rightarrow V$ , la proyección dada por  $\pi(z, g(z)) = z$ , la cual es homeomorfismo con inversa  $\pi^{-1}(z) = (z, g(z))$ . Así,  $\pi$  es una carta compleja sobre  $X$ , es decir, determina un atlas analítico de  $X$  dado por esta única carta compleja. Más aún,  $X$  es Hausdorff (porque  $\mathbb{C}^2$  es Hausdorff).

y, como  $V$  es conexo y  $\pi$  es continua,  $\pi^{-1}(V) = X$ , también es conexo. Por lo tanto,  $X$  tiene estructura de superficie de Riemann.

### 3. Curvas planas afines suaves

Sea  $f \in \mathbb{C}[z, w]$  un polinomio. El conjunto de puntos  $C := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$  es llamado el *lugar de ceros de  $f$* . Por el teorema de la función implícita se tiene que el lugar de ceros de un polinomio  $f \in \mathbb{C}[z, w]$  puede ser descrito localmente como una gráfica, y por lo tanto, localmente es una superficie de Riemann.

**Teorema 1.3.1.** (de la función implícita) (ver [Miranda-1995], pág. 10) Sea  $C$  el lugar de ceros del polinomio  $f \in \mathbb{C}[z, w]$ . Si  $(z_0, w_0) \in C$  cumple que  $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$ , entonces existe una función holomorfa  $g$  definida en una vecindad  $V$  de  $z_0$ , tal que  $C$  es la gráfica de  $g$  cerca de  $(z_0, w_0)$ . Es decir,  $C = \{(z, g(z)) : z \in V\}$ . Más aún,  $g' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial w}}$ , cerca de  $z_0$ .

Notar que si  $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$ , entonces se puede aplicar el teorema 1.3.1 en la variable  $z$  para ver a  $C$  localmente como una gráfica.

#### Definición 1.3.2.

- 1) Una **curva plana afín** es el lugar de ceros  $C$  de algún polinomio  $f \in \mathbb{C}[z, w]$ .
- 2) Dado  $p \in C$ , decimos que  $f$  es **no singular** en  $p$ , si  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$  o  $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ .
- 3) Decimos que  $C$  es **no singular o suave** si  $f$  es no singular en cualquier punto  $p \in C$ .

Dada una curva plana afín suave  $C$  definida por un polinomio  $f \in \mathbb{C}[z, w]$ , se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$  o  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ , para todo  $p = (z_0, w_0) \in C$ . Por el teorema de la función implícita, existe una función holomorfa  $g_p$  en una vecindad  $U_p$  de  $p$  tal que  $C$  es la gráfica de  $g_p$ .

Análogamente como se hizo con gráficas, podemos considerar las proyecciones  $\pi_z^p : U \rightarrow \mathbb{C}$  o  $\pi_w^p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$  que son homeomorfismos de  $U_p$  en su imagen, para todo  $p \in C$ . Por lo que, los dominios  $U_p$  de las proyecciones cubren a la curva  $C$ . Así, tenemos un atlas para  $C$ ,  $\mathcal{A} := \{\pi_z^p, \pi_w^p : p \in C\}$ . Veamos que  $\mathcal{A}$  es analítico.

## 1.4. CURVAS ALGEBRAICAS PROYECTIVAS

7

Si las dos cartas tomadas en  $\mathcal{A}$  se obtienen usando la proyección en la variable  $z$ , es decir,  $\pi_z^p$  y  $\pi_z^q$ , y sus dominios  $U_p, U_q$  se intercan, entonces  $\pi_z^p \circ (\pi_z^q)^{-1} = Id$ , la cual es holomorfa. Un resultado análogo se tiene si ambas cartas se obtienen de la proyección en la variable  $w$ .

Tomamos ahora dos cartas  $\pi_z^p, \pi_w^q$  y un punto  $p' = (z_0, w_0)$  en la intersección de sus dominios. Sabemos que cerca de  $p'$ ,  $C$  es localmente la gráfica de una función holomorfa  $g$ . Entonces,  $(\pi_z^p)^{-1}(z) = (z, g(z))$ . Por lo cual,  $\pi_w^q \circ (\pi_z^p)^{-1}(z) = \pi_w^q(z, g(z)) = g(z)$  es holomorfa. Por lo tanto, el atlas de  $C$  dado por las proyecciones es un atlas analítico.

Se puede demostrar que la curva  $C$  es conexa, por lo cual se enuncia el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.2.** (ver [Miranda-1995], pág. 11) Si  $f \in \mathbb{C}[z, w]$  es un polinomio irreducible, entonces  $C$  es conexa. Por lo tanto, si  $f$  es no singular e irreducible, entonces  $C$  es una superficie de Riemann.

En el caso de que  $f$  sea irreducible, decimos que  $C$  es una *curva plana afín irreducible*.

**Ejemplo 1.3.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 12) Sea  $h \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio que no es un cuadrado perfecto. Entonces, el polinomio  $f(z, w) = w^2 - h(z)$  es irreducible. Más aún, si  $h$  tiene raíces distintas,  $f$  es no singular. Por lo cual, la curva plana afín irreducible asociada a  $f$  es una superficie de Riemann.

## 1.4. Curvas algebraicas proyectivas

Las curvas algebraicas en el plano proyectivo dadas por polinomios homogéneos  $F(x, y, z)$ , bajo ciertas condiciones de suavidad e irreducibilidad, son superficies de Riemann con la propiedad de ser compactas. Esto es tratado en la presente sección y se dará un resultado importante que nos permite calcular el género topológico de dichas superficies.

Los resultados dados en esta sección son obtenidos de [Miranda-1995].

Sean  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ , decimos que  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$  están relacionados, y escribimos  $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ , si y solo si  $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

**Definición 1.4.1.** El plano proyectivo, denotado como  $\mathbb{CP}^2$ , es definido como el espacio cociente  $(\mathbb{C}^3 - \{0\}) / \sim$ .

El plano proyectivo es dotado con la topología cociente a través de la función proyección entre  $\mathbb{C}^3 - \{0\}$  y  $\mathbb{CP}^2$ .

Los elementos  $(x : y : z)$  de  $\mathbb{CP}^2$  son llamados *coordenadas homogéneas*. Las coordenadas homogéneas dependen de los representantes, sin embargo, siempre están bien definidas salvo representantes.

De la misma manera a como se hizo para  $\mathbb{CP}^1$ , se definen los abiertos

$$U_0 = \{(x : y : z) \mid x \neq 0\}, \quad U_1 = \{(x : y : z) \mid y \neq 0\} \\ \text{y } U_2 = \{(x : y : z) \mid z \neq 0\}.$$

Los cuales forman una cubierta abierta para  $\mathbb{CP}^2$ . También se tienen funciones:

$$\phi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad \phi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{y} \quad \phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

dadas por:

$$\phi_0(x : y : z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad \phi_1(x : y : z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) \quad \text{y} \quad \phi_2(x : y : z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Cuyas inversas están dadas por:

$$\phi_0^{-1}(a, b) = (1 : a : b), \quad \phi_1^{-1}(a, b) = (a : 1 : b) \quad \text{y} \quad \phi_2^{-1}(a, b) = (a : b : 1).$$

Éstas funciones definen cartas coordenadas para  $\mathbb{CP}^2$ .

Más aún,  $\mathbb{CP}^2$  es compacto.

**Definición 1.4.2.** Sea  $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  un polinomio. Se dirá que  $f$  es **homogéneo de grado  $d$**  si

$$f(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_n).$$

Notemos que si  $h := z_0^{m_1} \dots z_j^{m_j} \dots z_n^{m_n} \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  es un monomio homogéneo de grado  $d$ , esto es,

$$(\lambda z_0)^{m_1} \dots (\lambda z_j)^{m_j} \dots (\lambda z_n)^{m_n} = \lambda^d (z_0^{m_1} \dots z_j^{m_j} \dots z_n^{m_n}), \quad d = \sum_{j=0}^n m_j,$$

se tiene que:

$$\frac{\partial h}{\partial z_j} = m_j (z_0^{m_1} \dots z_j^{m_j-1} \dots z_n^{m_n}), \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

## 1.4. CURVAS ALGEBRAICAS PROYECTIVAS

9

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{d} \sum_{j=0}^n z_j \frac{\partial h}{\partial z_j} &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^n z_j m_j (z_0^{m_1} \cdots z_j^{m_j-1} \cdots z_n^{m_n}) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^n m_j (z_0^{m_1} \cdots z_j^{m_j} \cdots z_n^{m_n}) \\
 &= \frac{1}{d} \left( \sum_{j=0}^n m_j \right) (z_0^{m_1} \cdots z_j^{m_j} \cdots z_n^{m_n}) \\
 &= h.
 \end{aligned}$$

En general, cualquier polinomio  $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  homogéneo de grado  $d$  (todos sus términos tienen grado  $d$ ) cumple la identidad

$$f = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

la cual es llamada *fórmula de Euler*.

Sea  $F(x, y, z)$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ . No tiene sentido pensar en evaluar  $F$  en un punto  $(x : y : z)$  del plano proyectivo, ya que  $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$  es el mismo punto que  $(x : y : z)$  en  $\mathbb{CP}^2$  y en general

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z) \neq F(x, y, z).$$

Sin embargo, esto cobra sentido siempre que  $F(x, y, z) = 0$ . En esta manera, definimos  $X := \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$  el *lugar de ceros* de  $F$ .

**Definición 1.4.3.** Una **curva plana proyectiva** es el lugar de ceros de algún polinomio  $F$  homogéneo, no constante, en el plano proyectivo  $\mathbb{CP}^2$ .

Notemos que si  $(x : y : z) \in U_0$  ( $x \neq 0$ ), se tiene que  $(x : y : z) = (1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x})$ . Más aún, si  $(x : y : z) \in X$ ,  $F(x, y, z) = 0$ . Así, a través del mapeo  $\phi_0$ , se tiene que:

$$X_0 := X \cap U_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : F(1, a, b) = 0\},$$

la cual es una curva plana afín descrita por el polinomio  $f(a, b) := F(1, a, b)$ . De una manera análoga se tiene que:

$$X_1 := X \cap U_1 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : F(a, 1, b) = 0\}$$

y

$$X_2 := X \cap U_2 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : F(a, b, 1) = 0\}$$

son curvas planas afines.

**Definición 1.4.4.** Un polinomio homogéneo  $F(x, y, z)$  es **no singular**, si el sistema de ecuaciones:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

no tiene solución en  $\mathbb{CP}^2$ .

**Lema 1.4.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 15) Supongamos que  $F(x, y, z)$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ . Entonces,  $F$  es no singular si y solo si  $X_0, X_1$  y  $X_2$  son curvas planas afines suaves en  $\mathbb{C}^2$ .

Aceptaremos el hecho de que cualquier polinomio homogéneo no singular  $F$  es irreducible, para notar que los conjuntos  $X_0, X_1$  y  $X_2$  son curvas planas afines suaves e irreducibles. Por lo tanto, según el teorema 1.3.2, son superficies de Riemann.

**Proposición 1.4.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 16) Sea  $F(x, y, z)$  un polinomio homogéneo no singular. Entonces, el lugar de ceros  $X$  de  $F$  es una superficie de Riemann compacta.

**Definición 1.4.5.** Las curvas descritas en la proposición anterior son llamadas **curvas planas proyectivas suaves**.

El siguiente resultado nos permite calcular el género topológico de una curva plana proyectiva suave a partir del grado del polinomio homogéneo que la define.

**Proposición 1.4.2.** (ver [Miranda-1995], pág. 69) Sean  $F$  un polinomio homogéneo no singular de grado  $d$  y  $X$  la curva proyectiva suave asociada a  $F$ . Entonces, el género  $g$  de  $X$  está dado por la ecuación  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

## 1.5. Superficies de Riemann hiperelípticas

Esta sección está basada en [Miranda-1995] y [Zoladek-2006].

Antes de dar la construcción de una superficie de Riemann hiperelíptica, necesitamos definir el pegado de superficies de Riemann.

Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Supongamos que existe un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  son abiertos. Tomemos  $Z = \{\{x\}, \{y\}, \{u, \phi(u)\} : x \in X - U, y \in Y - V, u \in U\}$  y definamos el mapeo  $\pi : X \sqcup Y \rightarrow Z$  dado por:

## 1.5. SUPERFICIES DE RIEMANN HIPERELÍPTICAS

11

$$\pi(z) = \begin{cases} \{z\} & \text{si } z \in X - U, \\ \{z\} & \text{si } z \in Y - V, \\ \{z, \phi(z)\} & \text{si } z \in U. \end{cases}$$

**Definición 1.5.1.**  $Z$ , con la topología cociente, es llamado el **pegado de  $X$  con  $Y$  a lo largo de  $U$  y  $V$  vía  $\phi$** , el cual denotamos como  $Z = X \sqcup Y / \phi$ .

**Ejemplo 1.5.1.** Tomemos  $X = Y = \mathbb{C}$ ,  $U = V = \mathbb{C} - \{0\}$  y  $\phi(z) = \frac{1}{z}$ . El pegado  $Z = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C} / \phi$  es  $Z = \{\{0\}, \{0\}, \{z, \frac{1}{z}\}\}$ .

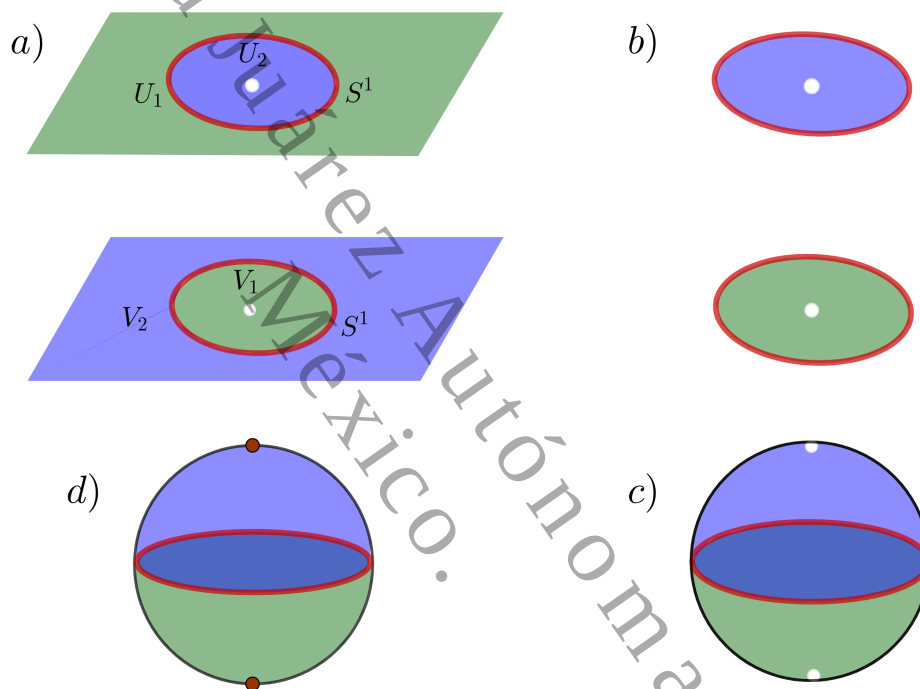


Figura 1.2: Esfera de Riemann por pegado.

En una manera más explícita, hagamos  $U = U_1 \cup U_2 \cup S^1$ , donde  $U_1$  es el exterior de  $S^1$  y  $U_2$  es el interior de  $S^1$  (sin el origen). Análogamente, hacemos  $V = V_1 \cup V_2 \cup S^1$ , con  $V_1$  el interior de  $S^1$  (sin el origen) y  $V_2$  el exterior de  $S^1$ . Así, a través de  $\phi$  estamos identificando  $U_1$  con  $V_1$ ,  $U_2$  con  $V_2$  y  $S^1$  consigo mismo. Por último, pegamos los ceros de cada copia de  $\mathbb{C}$  para obtener la esfera de Riemann  $Z$  (ver figura 1.2).

La siguiente proposición nos dice que el pegado de superficies de Riemann nos da una superficie de Riemann. Además, nos permite construir las superficies de Riemann hiperelípticas.

**Proposición 1.5.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 60) Sean  $X$  y  $Y$  superficies de Riemann. Supongamos que existe un isomorfismo  $\phi: U \rightarrow V$ , con  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  abiertos no vacíos. Entonces, existe una estructura compleja sobre el pegado  $Z = X \sqcup Y / \phi$  tal que las inclusiones naturales de  $X$  y  $Y$  en  $Z$  son holomorfas. En particular, si  $Z$  es Hausdorff,  $Z$  es una superficie de Riemann.

Consideremos  $h(x)$  un polinomio de grado  $2g + \epsilon + 1$  ( $\epsilon = 0, 1$ ) y con raíces distintas. Tomemos la curva plana afín  $X$  definida por la ecuación  $y^2 = h(x)$  y consideremos a  $U := \{(x, y) \in X : x \neq 0\}$  subconjunto abierto de  $X$ .

Ahora bien, consideremos el polinomio homogenizado de  $h$  dado por  $k(z) = z^{2g+2}h(\frac{1}{z})$ . Dado que  $h$  tiene raíces distintas,  $k$  también tiene raíces distintas. Tomemos la curva plana afín  $Y$  definida por la ecuación  $w^2 = k(z)$  y consideremos a  $V := \{(z, w) \in Y : z \neq 0\}$  subconjunto abierto de  $Y$ .

Definamos el isomorfismo  $\phi: U \rightarrow V$  dado por  $\phi(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}})$ .

**Lema 1.5.1.** (ver [Miranda-1995], pág. 60) Sean  $X = Y = \mathbb{C}^2$  y  $\phi$  dado como en el párrafo anterior. Entonces, el pegado  $Z = X \sqcup Y / \phi$  es una superficie de Riemann compacta de género  $g$ .

**Definición 1.5.2.** Las superficies de Riemann compactas dadas por el lema anterior son llamadas **superficies de Riemann hiperelípticas**.

En el caso particular que  $h$  tenga tres raíces distintas, es decir  $\epsilon = 0$  y  $g = 1$ , la superficie de Riemann (toro complejo) es llamada *elíptica*.

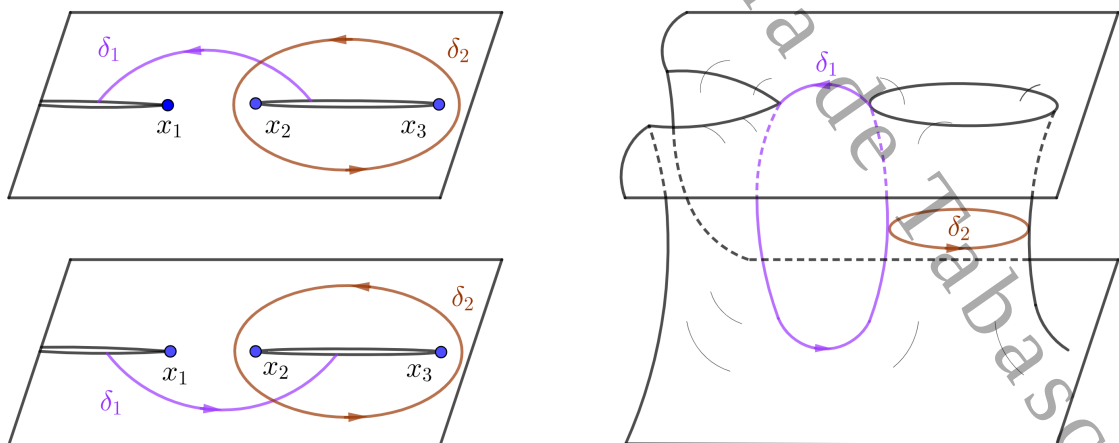


Figura 1.3: Superficie de Riemann  $V_t$ .

## 1.6. FORMAS DIFERENCIALES SOBRE SUPERFICIES

13

**Ejemplo 1.5.2.** Sea  $f(x, y) = y^2 + x^3 - x$ . Las fibras  $V_t = \{(x, y) : f(x, y) = t\}$  son superficies de Riemann de la función  $y = \sqrt{t + x - x^3}$ , la cual generalmente tienen tres puntos de ramificación, digamos  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . La figura 1.3 muestra la superficie de Riemann que se obtiene.

## 1.6. Formas diferenciales sobre superficies de Riemann

Los resultados dados en esta sección son obtenidos de [Danilov & Shokurov-2013].

En esta sección daremos la definición de 0, 1, 2-formas holomorfas sobre superficies de Riemann para poder definir los grupos de cohomología de de Rham.

Sea  $S$  una superficie de Riemann. Un mapeo diferenciable  $h : S \rightarrow \mathbb{C}$  será referido como una *función diferenciable* sobre  $S$ <sup>1</sup>. El conjunto

$$\mathcal{O}(S) := \{h : S \rightarrow \mathbb{C} \mid h \text{ es una función diferenciable sobre } S\}$$

es una  $\mathbb{C}$ -álgebra. Una *derivación* sobre  $\mathcal{O}(S)$  en un punto  $p \in S$  es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal  $D : \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface la regla de Leibniz, esto es:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g).$$

El conjunto  $T_p(S) := \{D : \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathbb{C} \mid D \text{ es una derivación}\}$  es un espacio vectorial complejo con las operaciones suma y producto por escalar usuales y es llamado el *espacio tangente a  $S$  en  $p$* .

Sea  $z = x + iy$  las coordenadas locales para el punto  $p \in S$ . Las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$  de la función  $f \in \mathcal{O}(S)$  son derivaciones denotadas como  $\frac{\partial}{\partial x}(p)$  y  $\frac{\partial}{\partial y}(p)$ . Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) - i \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + i \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

<sup>1</sup>Aquí,  $h$  se considera como un mapeo diferenciable con respecto a las estructuras de variedades diferenciables de  $S$  y  $\mathbb{C}$ .

**Lema 1.6.1.** (ver [Danilov & Shokurov-2013], pág. 45) Los vectores  $\frac{\partial}{\partial x}(p)$  y  $\frac{\partial}{\partial y}(p)$  (resp.  $\frac{\partial}{\partial z}(p)$  y  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p)$ ) definen una base para el espacio tangente  $T_p(S)$ . Así,  $\dim_{\mathbb{C}} T_p(S) = 2$ .

Sea

$$\Lambda(S) := \{\omega : \bigcup T_p(S) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \omega \text{ es lineal sobre cualquier espacio } T_p(S)\}.$$

$\Lambda(S)$  es llamado el conjunto de 1-formas diferenciales y sus elementos  $\omega \in \Lambda(S)$  son llamados 1-formas diferenciales.

Dado un vector tagente  $a\frac{\partial}{\partial x}(p) + b\frac{\partial}{\partial y}(p)$  (resp.  $a\frac{\partial}{\partial z}(p) + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p)$ ), definimos los mapeos  $dx$  y  $dy$  como  $dx\left(a\frac{\partial}{\partial x}(p) + \frac{\partial}{\partial y}(p)b\right) = a$  y  $dy\left(a\frac{\partial}{\partial x}(p) + \frac{\partial}{\partial y}(p)b\right) = b$  (resp.  $dz = dx + idy$  y  $d\bar{z} = dx - idy$ ). Estos mapeos nos permiten escribir cualquier 1-forma en representación local dadas por el siguiente lema.

**Lema 1.6.2.** (ver [Danilov & Shokurov-2013], pág. 45) Cualquier 1-forma diferencial  $\omega$  sobre  $S$  puede ser escrita localmente como

$$\omega|_U = fdz + gd\bar{z} = (f + g)dx + (f - g)idy,$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones complejas sobre algún abierto  $U$  de  $S$  y  $z = x + iy$  sus coordenadas locales en  $U$ .

Ahora bien, una 1-forma diferencial  $\omega|_U = fdz + gd\bar{z}$  se dirá *diferenciable*, si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables para cualquier  $U$ . Denotemos por  $A^1$  el conjunto de 1-formas diferenciables, el cual es un espacio vectorial sobre  $S$ .

Por otro lado, sean  $A^{1,0} = \{\omega \in A^1 : \omega = fdz\}$  y  $A^{0,1} = \{\omega \in A^1 : \omega = fd\bar{z}\}$ .  $A^{1,0}$  y  $A^{0,1}$  son subespacios vectoriales complejos de  $A^1$  tales que  $A^1 = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$ .

Análogamente, para  $k > 1$ , definimos el conjunto de  $k$ -formas diferenciales como las secciones  $\omega : S \rightarrow A^k(S)$ , donde

$$A^k(S) := \left\{ \omega : p \mapsto \omega_p : \prod_{\ell=1}^k T_p(S) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \omega_p \text{ es multilineal } \forall p \in S \right\}.$$

El *producto tensorial*  $\otimes : A^1 \times A^1 \longrightarrow \mathbb{C}$  de 1-formas diferenciales está dado por  $\otimes(\omega_1, \omega_2) = \omega_1(t_1) \cdot \omega_2(t_2)$ , donde  $(t_1, t_2) \in T_p(S) \times T_p(S)$ .

Tenemos que, localmente, cualquier forma diferencial  $\omega$  puede ser escrita como una combinación lineal de productos tensoriales de los elementos  $dz$  y

## 1.6. FORMAS DIFERENCIALES SOBRE SUPERFICIES

15

 $d\bar{z}$ .

Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son 1-formas diferenciales, definimos el *producto exterior* de éstas como la 2-forma diferencial

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{2} (\omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1).$$

**Observación 1.6.1.** Sean  $\omega_1, \omega_2$  1-formas diferenciales. Se tiene que:

1.  $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$ .
2.  $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ .
3. En particular, del inciso 2, se tiene que:

$$d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z} \quad y \quad dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0.$$

En nuestro caso, como una superficie de Riemann es 2-dimensional como variedad diferenciable,  $A^k = 0$ , para  $k > 2$ . Además, por definición  $A^0 = \mathcal{V}(S)$ . Ahora, dado que  $dz = dx + idy$  y  $d\bar{z} = dx - idy$ , se tiene que

$$\begin{aligned} dz \wedge d\bar{z} &= (dx + idy) \wedge (dx - idy) \\ &= \frac{1}{2} ((dx + idy) \otimes (dx - idy) - (dx - idy) \otimes (dx + idy)) \\ &= \frac{1}{2} (dx dx - idxdy + idydx + dydy - dx dx - idxdy + idydx - dydy) \\ &= \frac{1}{2} (-2idxdy + 2idydx) \\ &= -i (dx dy - dy dx) \\ &= -i (dx \otimes dy - dy \otimes dx) \\ &= -i dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Entonces, cualquier 2-forma tiene una representación en coordenadas locales dada por  $\omega = f dz \wedge d\bar{z} = -i f dx \wedge dy$ . De esta manera, se tiene que dadas dos 1-formas en coordenadas locales,  $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$  y  $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ , su producto exterior está dado por

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge (f_2 dz + g_2 d\bar{z}) \\ &= \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

## 1.7. Cohomología de de Rham para una superficie de Riemann

En esta sección se definirá la derivada exterior de formas diferenciales para poder construir los grupos de cohomología de de Rham sobre una superficie de Riemann. Los resultados dados en esta sección son obtenidos de [Danilov & Shokurov-2013].

Sea  $S$  una superficie de Riemann. Vamos a definir un mapeo  $\mathbb{C}$ -lineal  $d : A^l \longrightarrow A^{l+1}$  llamado la *derivada exterior* y mapeos  $\partial, \bar{\partial} : A^l \longrightarrow A^{l+1}$ . Para tal caso, primero definimos  $d : A^0 \longrightarrow A^1$  como

$$df := \partial f + \bar{\partial} f,$$

donde

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} dz \text{ y } \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Ahora, definimos los mapeos  $\partial, \bar{\partial} : A^1 \longrightarrow A^2$  como

$$\partial(fdz + gd\bar{z}) := \partial f \wedge dz + \partial g \wedge d\bar{z} = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$$

y

$$\bar{\partial}(fdz + gd\bar{z}) := \bar{\partial} f \wedge dz + \bar{\partial} g \wedge d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

Así,  $d : A^1 \longrightarrow A^2$  es tal que

$$\begin{aligned} d(fdz + gd\bar{z}) &:= \partial(fdz + gd\bar{z}) + \bar{\partial}(fdz + gd\bar{z}) \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Es posible definir  $d, \partial, \bar{\partial} : A^l \longrightarrow A^{l+1}$  para  $l \geq 2$ . Sin embargo, dado que en una superficie de Riemann el conjunto  $A^k = 0$ , para  $k \geq 3$ , estos mapeos son triviales, es decir,  $d, \partial, \bar{\partial} = 0$ .

**Observación 1.7.1.** Si  $f \in \mathcal{V}(s)$ , entonces se tiene lo siguiente:

$$1. \partial^2 = 0, \text{ ya que } \partial(\partial(f)) = \partial\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dz = 0.$$

## 1.7. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM PARA UNA SUPERFICIE

17

2.  $\bar{\partial}^2 = 0$ , ya que  $\bar{\partial}(\bar{\partial}(f)) = \bar{\partial}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$ .

3.  $\partial \circ \bar{\partial} = -\bar{\partial} \circ \partial$ , ya que

$$\begin{aligned}\partial(\bar{\partial}(f)) &= \partial\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} d\bar{z} \wedge dz \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} d\bar{z} \wedge dz \\ &= -\bar{\partial}\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \\ &= -\bar{\partial}(\partial(f)).\end{aligned}$$

4.  $d^2 = 0$ , ya que

$$\begin{aligned}d(d(f)) &= d(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) \\ &= \partial(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) + \bar{\partial}(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) \\ &= \partial^2(f) + \partial(\bar{\partial}(f)) + \bar{\partial}(\partial(f)) + \bar{\partial}^2(f) \\ &= \partial(\bar{\partial}(f)) - \partial(\bar{\partial}(f)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Una  $k$ -forma diferencial  $\omega \in A^k$  es llamada *cerrada* siempre que  $d\omega = 0$ . Diremos que  $\omega$  es *exacta* siempre que  $\omega = d\tau$ , para alguna  $(k-1)$ -forma diferencial  $\tau$ .

**Notación 1.7.1.** El conjunto de  $k$ -formas diferenciales cerradas es denotado por  $Z_d^k(S)$ . Así mismo,  $B_d^k(S)$  denota el conjunto de  $k$ -formas diferenciales exactas.

Notemos que si  $\omega \in B_d^k(S)$ , entonces  $\omega = d\tau$ . Así,  $d\omega = d(d\tau) = d^2(\tau) = 0$ . Por lo cual,  $\omega \in Z_d^k(S)$ . Tenemos entonces que  $B_d^k(S) \subset Z_d^k(S)$ .

**Definición 1.7.1.** El  $k$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham es el cociente

$$H_{DR}^k(S) = H_d^k(S, \mathbb{C}) := \frac{Z_d^k(S)}{B_d^k(S)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Para una superficie de Riemann compacta, la siguiente proposición nos permite calcular la dimensión del 1-grupo de cohomología de de Rham a partir del género de la superficie.

**Proposición 1.7.1.** (ver [Danilov & Shokurov-2013], pág. 51) Para una superficie de Riemann compacta  $S$  de género  $g$  se tiene que:

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{DR}^1(S) = 2g.$$

## 1.8. Fibración de Milnor

La definición del haz de Milnor o fibración de Milnor que damos en esta sección, es usando el enfoque de Arnold–Varchenko–Gusein-Zade en su libro [Arnol'd et al.-2012]. Esta definición también puede ser consultada en los textos [Zoladek-2006], [Arnol'd et al.-1998] y [Wall-2004]. Pues bien, tenemos las siguientes definiciones:

**Definición 1.8.1.** Sea  $\pi : E \rightarrow B$  una función suave entre variedades suaves  $E$  y  $B$ , con  $\dim E = m$  y  $\dim B = n$ .

1. Diremos que  $\pi$  es **propia** si para todo compacto  $K \subset B$  se tiene que,  $\pi^{-1}(K)$  es compacto en  $E$ .
2. Se dirá que  $\pi$  es una **sumersión** en  $p \in E$  siempre que la matriz de derivadas parciales  $D\pi : T_p E \rightarrow T_{\pi(p)} B$  tenga rango  $n$ , es decir,  $\text{rank}[D\pi] = \dim T_{\pi(p)} B = \dim B$ .

El siguiente teorema (de la fibración de Ehresman) muestra condiciones suficientes para que un mapeo entre variedades sea una fibración suave localmente trivial (ver apéndice A sección A.1). Este teorema nos ayuda a construir la fibración de Milnor asociada a un germen  $f$ .

**Teorema 1.8.1.** (ver [Wall-2004], pág. 132) (**Teorema de la fibración de Ehresmann**) Si  $E$  es una variedad y  $\pi : E \rightarrow B$  es un mapeo tal que  $E$  es compacta, más generalmente,  $\pi$  es propio y tanto  $\pi$  como  $\pi|_E$  son submersiones, entonces  $\pi$  es una fibración suave localmente trivial.

A partir de esta sección, una fibración suave localmente trivial será referida solamente como una fibración.

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de curva plana con singularidad aislada en el origen. Para  $f$  se puede elegir un buen representante que consiste

## 1.8. FIBRACIÓN DE MILNOR

19

en restringir dominio y rango, lo cual permite obtener una fibración suave localmente trivial que, como veremos más adelante, será la base para construir otros objetos que son el objetivo del presente manuscrito.

Denotemos por  $B_\epsilon$  la bola en  $\mathbb{C}^2$  centrada en el origen de radio  $\epsilon$  con frontera  $\partial B_\epsilon = S_\epsilon$ . De igual manera,  $D_\eta$  denota la bola en  $\mathbb{C}$  centrada en el origen y de radio  $\eta$  con  $\partial D_\eta = S_\eta$ . Además, sea  $D_\eta^* := D_\eta - \{0\}$ .

**Lema 1.8.1.** (ver [Wall-2004], pág. 109) Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, la curva  $C = f^{-1}(0)$  no es tangente a  $S_\epsilon$ .

**Teorema 1.8.2.** (ver [Wall-2004], pág. 134) Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño podemos encontrar  $\eta_0$  tal que  $\eta_0 > \eta$  y el mapeo

$$f_1 := f|_{B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)} : B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*) \longrightarrow D_\eta^*$$

es la proyección de una fibración suave.

*Dem.* Sea  $K$  un conjunto compacto de  $D_\eta^*$ , esto es, dada una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $K$ , existe una subcubierta finita, digamos  $K = \bigcup_{s=1}^r U_s = \bigcup_{s=1}^r \left( \bigcup_{t \in U_s} \{t\} \right)$ .

Ahora, las fibras  $f_1^{-1}(t)$ , para todo  $t \in D_\eta^*$ , son cerradas y acotadas en  $B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ . Así, por el teorema de Heine-Borel,  $f_1^{-1}(t)$  son compactas, entonces

$$f_1^{-1}(K) = f_1^{-1} \left( \bigcup_{s=1}^r \left( \bigcup_{t \in U_s} \{t\} \right) \right) = \bigcup_{s=1}^r \left( \bigcup_{t \in U_s} f_1^{-1}(t) \right),$$

es compacto, por lo cual  $f_1$  es propia.

Veamos que  $f_1$  y su restricción a  $S_\epsilon \cup f^{-1}(D_\eta^*)$  son subersiones:

- Como  $f$  tiene singularidad aislada en el origen,  $df_1(z, w) = 0$  si y solo si  $(z, w) = (0, 0)$ . Por lo cual,  $df_1 : T_p(B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)) \longrightarrow T_{\pi(p)}D_\eta^*$  tiene rango 1, para todo  $p \in B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$ . Entonces,  $f_1$  es una submersión en  $p \in B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$ .
- Para cualquier punto de  $S_\epsilon \cap f^{-1}(0)$ ,  $f|_{S_\epsilon}$  es submersión si y solo si  $f^{-1}(0)$  no es tangente a  $S_\epsilon$ , lo cual se cumple para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, de acuerdo con el lema 1.8.1. Así, la restricción de  $f$  sobre alguna vecindad  $V$  de  $S_\epsilon \cup f^{-1}(0)$  en  $S_\epsilon$  es también una submersión. Tomando  $\eta_0$  suficientemente pequeño  $S_\epsilon \cup f^{-1}(D_{\eta_0}^*)$  esta contenida en  $V$ . Por lo tanto,  $f|_{S_\epsilon \cup f^{-1}(D_{\eta_0}^*)}$  es submersión.

Hemos demostrado entonces que  $f_1$  es propia y tanto  $f_1$  como su restricción a  $S_\epsilon \cup f^{-1}(D_\eta^*)$  son subersiones. Usando el teorema de la fibración de Ehresmann 1.8.1, se concluye que  $f_1$  es una fibración suave localmente trivial.  $\square$

Ahora bien, del teorema 1.8.2, se tiene que  $f_1$  es una fibración suave localmente trivial. Entonces, para todo  $x \in D_\eta^*$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  y un difeomorfismo  $\Phi : A \rightarrow F \times U$ ,  $A = f_1^{-1}(U)$ , el cual hace conmutativo el siguiente digrama

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ f_1^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad} & F \times U \\ f_1^{-1} \swarrow & & \searrow \text{proy}_2 \\ & U & \end{array}$$

Más aún, como  $D_\eta^*$  es conexa, por la proposición A.2.2, todas fibras de  $f_1$  son difeomorfas entre sí. Por lo cual,  $F$  es única salvo difeomorfismo.

$F$  es llamada la *fibra de Milnor*.

**Ejemplo 1.8.1.** Sea  $f = y^2 - x^3$ . Las fibras de  $f$  se ven como en la figura 1.4.

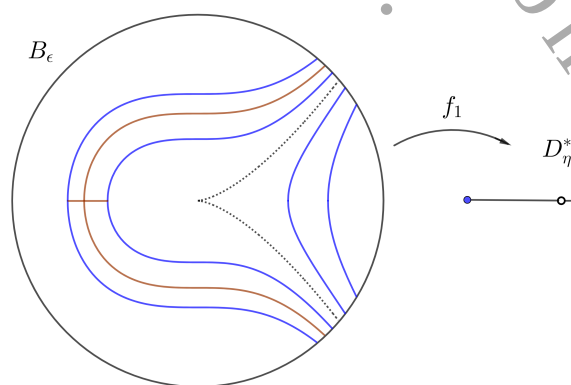


Figura 1.4: Fibración asociada a la cúspide.

En el caso cuando  $f$  es un germen de polinomio tal que  $f$  se factoriza como  $f = f_1 \cdots f_r$  y no tiene factores repetidos, estos es,  $f_i \neq f_j$  para  $i \neq j$ .

## 1.9. HACES VECTORIALES COMPLEJOS Y HOLOMORFOS 21

Denotaremos como  $C$  la curva plana afín generada por  $f$  y  $C_1, \dots, C_r$  las curvas generadas por  $f_1, \dots, f_r$ , respectivamente. Notemos que  $C = \bigcup_{j=1}^r C_j$ .

**Definición 1.8.2.** Las ramas de la curva  $C$  son las curvas  $C_1, \dots, C_r$ . En este caso  $C$  tiene  $r$  ramas.

Para un germen de polinomio  $f$ , sean  $C$  y  $F$ , su curva y fibra de Milnor (fibra asociada a su fibración de Milnor). Sea  $r$  el número de ramas de  $C$ .

**Proposición 1.8.1.** (ver [Wall-2004], pág. 139)  $F$  es una superficie compacta, conexa, orientable y  $r$  componentes acotadas.

## 1.9. Haces vectoriales complejos y holomorfos

Los resultados de la presente sección se pueden consultar en [Griffiths & Harris-1978, pág. 66].

Sea  $M$  una variedad diferenciable.

**Definición 1.9.1.** Un  $C^\infty$ -haz vectorial complejo, de rango  $k$  sobre  $M$ , es una familia  $\{E_x\}_{x \in M}$  de espacios vectoriales complejos parametrizada por  $M$ , junto con una estructura de variedad  $C^\infty$ -diferenciable sobre  $E = \bigcup_{x \in M} E_x$  tal que:

1. El mapeo proyección  $\pi : E \rightarrow M$ , dado por  $\pi(E_x) = x$ , es  $C^\infty$ .
2. Para cualquier  $x_0 \in M$ , existe una vecindad  $U$  de  $x_0$  y un difeomorfismo  $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ , induce un  $\mathbb{C}$ -isomorfismo entre los espacios vectoriales  $E_x$  y  $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ , para cualquier  $x \in U$ .  $\phi_U$  es llamada la trivialización de  $E$  sobre  $U$ .

Un  $C^\infty$ -haz vectorial complejo de rango  $k$  sobre  $M$  lo denotamos simplemente por  $E \xrightarrow{\pi} M$ . El conjunto  $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$  es llamado la fibra de  $\pi$  sobre  $x$  y su dimensión es llamada el rango de  $E$ .

Al conjunto de transformaciones lineales invertibles sobre  $\mathbb{C}^k$  (matrices invertibles de  $k \times k$ ) lo denotaremos por  $GL_k$ .

Notemos que:

- Dado un haz vectorial complejo  $E$ , cualquier par de trivializaciones  $\phi_U, \phi_V$  determinan las llamadas *funciones de transición* dadas por:

$$\begin{aligned} g_{UV} : U \cap V &\longrightarrow GL_k \\ x &\longrightarrow (\phi_U \circ \phi_V^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k}. \end{aligned}$$

Las funciones de transición son  $C^\infty$  y cumplen las siguientes propiedades:

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) = id, \quad \forall x \in U \cap V, \quad (1.1)$$

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VW}(x) \cdot g_{WU}(x) = id, \quad \forall x \in U \cap V \cap W. \quad (1.2)$$

- Así mismo, dada una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  de  $M$  y funciones de clase  $C^\infty$ ,  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_k$ , que satisfacen las identidades dadas anteriormente, entonces existe un único haz vectorial complejo  $E \rightarrow M$  con funciones de transición  $\{g_{\alpha\beta}\}$ : si el haz vectorial  $E$  es visto como un conjunto de puntos  $E = \{p_x\}_{x \in M}$ , dado que para todo  $x \in M = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$  existe  $\beta$  tal que  $x \in U_\beta$  y un difeomorfismo  $\phi_{U_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$  que toma  $p_x \cong \{x\} \times \mathbb{C}^k$ , entonces  $E$  debe ser la unión

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \times \mathbb{C}^k)$$

con puntos  $(x, \lambda) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ .

### Definición 1.9.2.

1. Un **subhaz**  $F \subset E$  de un haz  $E$  es una colección  $\{F_x \subset E_x\}_{x \in M}$  de subespacios de los espacios vectoriales  $E_x$ , tales que  $F = \bigcup_{x \in M} F_x \subset E$  es una subvariedad de  $E$ .
2. Una **sección** de un haz vectorial  $E \xrightarrow{\pi} M$  sobre  $U \subset M$  es un mapeo  $\sigma : U \longrightarrow E$  el cual es  $C^\infty$  y satisface  $\sigma(x) \in E_x, \forall x \in U$ .

Consideremos ahora a  $M$  una variedad compleja.

### Definición 1.9.3.

1. Diremos que un  $C^\infty$ -haz vectorial complejo  $E \xrightarrow{\pi} M$  es un **haz vectorial holomorfo**, si  $E$  tiene estructura de variedad compleja, tal que para cada  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  y una trivialización

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k$$

que es un mapeo biholomorfo de variedades complejas. Estas trivializaciones son llamadas **trivializaciones holomorfas**.

1.10. DEFORMACIONES  $\mu$ -CONSTANTES

23

2. Un **subhaz holomorfo** de un haz holomorfo  $E$ , es un subhaz  $F \subset E$  que tiene estructura de subvariedad compleja de  $E$ .

Notemos que si  $\{\phi_\alpha : \pi(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}_{\alpha \in I}$  son trivializaciones holomorfas, entonces las funciones de transición para  $E$  relativas a  $\{\phi_\alpha\}$  son holomorfas. Así mismo, dados mapeos holomorfos  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_k$  que cumplen las propiedades 1.1 y 1.2, entonces podemos construir un haz vectorial holomorfo  $E \xrightarrow{\pi} M$  con funciones de transición  $g_{\alpha\beta}$ .

1.10. Deformaciones  $\mu$ -constantes

Sea  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función holomorfa con singularidad aislada en 0. Consideremos el anillo de gérmenes en 0,  $\mathcal{O}_{D,0}$ , en la bola de Milnor suficientemente pequeña  $D$ , dada por la fibración de Milnor asociada a  $f$ , ver teorema 1.8.2.

Queremos considerar a  $f$  como parte de una familia de gérmenes  $F_\lambda$ , parametrizada por un conjunto  $T \subset \mathbb{C}^k$ , en la cual cada germen tiene el mismo número de Milnor que el de  $f$ .

**Definición 1.10.1.**

1. Sea  $J_f := \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_j} : j = 0, \dots, n \right\rangle$  el ideal generado por las derivadas parciales de  $f$ . Definimos el **álgebra de Milnor** como el anillo cociente

$$\frac{\mathcal{O}_{D,z}}{J_f}.$$

Al cual denotaremos simplemente por  $\mathcal{O}_f$ .

2. El **número de Milnor** de  $f$  en 0, denotado como  $\mu(f)$ , se define como la dimensión del álgebra de Milnor como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, es decir,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{D,0}}{J_f}.$$

Pedir que  $f$  tenga singularidad aislada en 0 es equivalente a pedir que  $\mu(f) < \infty$  (ver [Francisco-2021], pág. 30)

**Definición 1.10.2.** Sean  $f, g : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  gérmenes en 0. Se dirá que  $f$  y  $g$  son  **$R$ -equivalentes**,  $f \sim_R g$ , si existe un biholomorfismo germen

$h : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  para el cual, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & & \\ \downarrow h & \searrow g & \\ \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

es conmutativo y  $h(0) = 0$ .

Ahora, si pedimos que dos gérmenes  $f$  y  $g$  tengan singularidad aislada en 0, entonces  $\mu(f)$  y  $\mu(g)$  son finitos. Más aún, si  $f$  y  $g$  son  $R$ -equivalentes,  $\mathcal{O}_f \cong \mathcal{O}_g$  (ver [Francisco-2021], pág. 34). De donde se sigue que  $\mu(f) = \mu(g)$ , es decir, bajo  $R$ -equivalencia el número de Milnor es constante.

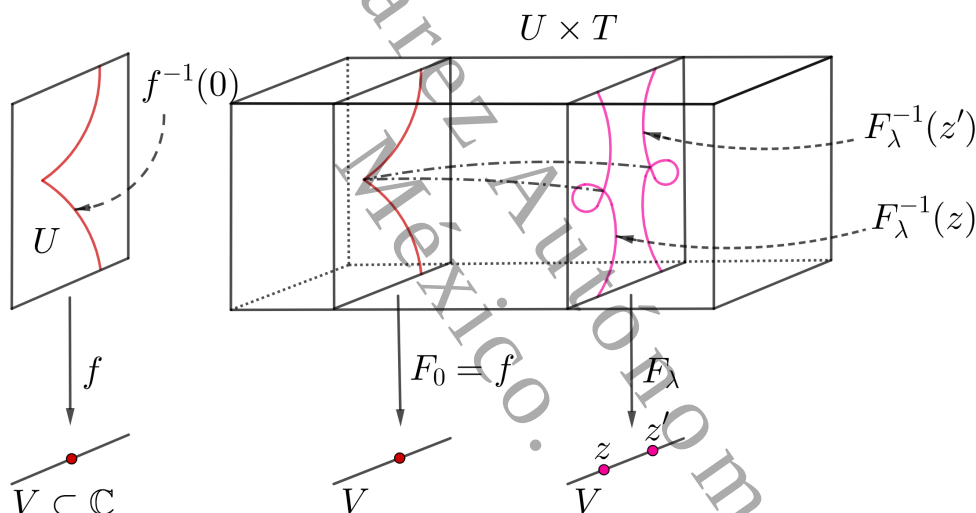


Figura 1.5: Deformación para una hipersuperficie singular  $f$ .

### Definición 1.10.3.

1. Una **deformación** del germen  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  con base en  $T \subset \mathbb{C}^k$ , es un germen en 0 de una función  $F : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , con la propiedad de que  $F(z, 0) = f(z)$ , donde  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$  y  $0 \in T \subset \mathbb{C}^k$  (ver figura 1.5).

Una deformación de  $f$  la denotaremos simplemente como  $F_\lambda$ , con  $\lambda \in T \subset \mathbb{C}^k$ .

2. Una deformación  $F_\lambda$  se dice ser  **$\mu$ -constante** siempre que  $\mu(F_\lambda) = \mu(f)$ , para toda  $\lambda \in T \subset \mathbb{C}^k$ .

1.10. DEFORMACIONES  $\mu$ -CONSTANTES

25

**Definición 1.10.4.** Sea  $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  un polinomio. Se dirá que  $f$  es **casihomogéneo** de tipo  $w = (w_0, \dots, w_n)$  y grado  $d$  si

$$f(\lambda^{w_0} z_0, \dots, \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

A continuación, siguiendo [Kulikov-1998], pág. 148, se describe un método para encontrar una deformación  $\mu$ -constante para  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  casihomogéneo de tipo  $w = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^{n+1}$  y grado  $d = 1$ :

**Algoritmo 1.10.1.  $\mu(f)$ -deformación: Kulikov**

- a) Sea  $x^l = x_0^{l_0} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$  un monomio. Consideremos el orden monomial pesado  $\nu(x^l) := \sum_{j=0}^n w_j l_j$ .
- b) Calculemos una base monomial  $\mathcal{B} = \{\mathbf{m}_i : i = 1, \dots, \mu(f)\}$  para el álgebra de Milnor  $\mathcal{O}_f$ .
- c) Supongamos que  $\nu(m_1) \leq \nu(m_2) \leq \dots \leq \nu(m_{\mu(f)})$  y definamos  $k := \min\{i = 1, \dots, \mu(f) : \nu(m_i) > 1\}$ . Entonces, una deformación  $\mu$ -constante para  $f$  está dada por

$$F_\lambda^\mu(x) := f(x) + \sum_{j=k}^{\mu(f)} \lambda_j \mathbf{m}_j, \quad \lambda = (\lambda_k, \dots, \lambda_{\mu(f)}) \in \mathbb{C}^{\mu(f)-k}. \quad (1.3)$$

Ahora, siguiendo [Hertling-2002-2], se describe otro método para encontrar una deformación  $\mu$ -constante para  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  casihomogéneo de tipo  $w = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  y grado  $d = 1$ , con  $0 < w_j \leq \frac{1}{2}$ . Antes, definimos

$$\sum_{i=1}^{\mu(f)} t^{\alpha_i+1} := \prod_{i=1}^n \frac{t - t^{w_i}}{t^{w_i} - 1},$$

los *números espectrales* de  $f$ , los cuales son tal que  $\alpha_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 1, \dots, \mu(f)$ , y  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{\mu(f)}$ , ver [Hertling-2002-2], págs. 121 y 122.

**Algoritmo 1.10.2.  $\mu(f)$ -deformación: Hertling**

- a') Sea  $x^l = x_0^{l_0} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$  un monomio. Consideremos el orden monomial pesado  $\nu(x^l) := \sum_{j=0}^n w_j l_j$ .
- b') Calculemos una base monomial  $\mathcal{B} = \{\mathbf{m}_i : i = 1, \dots, \mu(f)\}$  para el álgebra de Milnor  $\mathcal{O}_f$ , tales que  $\nu(m_i) = \alpha_i - \alpha_1$ .

c') Supongamos que  $\nu(m_1) \leq \nu(m_2) \leq \dots \leq \nu(m_{\mu(f)})$ . Definamos, para  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , a  $\nu(\lambda_i) = 1 - \nu(m_i)$  y  $k := \min\{i = 1, \dots, \mu(f) : \nu(m_i) \geq 1\}$ . Entonces, una deformación  $\mu$ -constante para  $f$  está dada por

$$F_{\tilde{\lambda}}^{\mu}(x) := f(x) + \sum_{j=k}^{\mu(f)} \lambda_j m_j, \quad \lambda = (\lambda_k, \dots, \lambda_{\mu(f)}) \in \mathbb{C}^{\mu(f)-k}. \quad (1.4)$$

**Ejemplo 1.10.1.** Usando algoritmo 1.10.1.

Consideremos al polinomio  $f = x^3 + y^7 + z^2$  casihomogéneo de tipo  $w = (\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2})$ . Una base para álgebra de Milnor  $\mathcal{O}_f$  está dada por:

$$\mathcal{B} = \{1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3, y^4, xy^4, y^5, xy^5\}.$$

Los órdenes para cada monomio de  $\mathcal{B}$  son:

| $m_j:$      | 1 | $x$           | $y$           | $xy$            | $y^2$         | $xy^2$          | $y^3$         | $xy^3$          | $y^4$         | $xy^4$          | $y^5$         | $xy^5$             |
|-------------|---|---------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|--------------------|
| $\nu(m_j):$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{13}{21}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{16}{21}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{19}{21}$ | $\frac{5}{7}$ | $1 + \frac{1}{21}$ |

Notemos que casi todos los elementos de  $\mathcal{B}$  tienen orden menor que 1, salvo el monomio  $xy^5$  que tiene orden  $1 + \frac{1}{21}$ . Así, una  $\mu(f)$ -deformación para  $f = x^3 + y^7 + z^2$  está dada por:

$$F_{\lambda}(x, y, z) = f + \lambda xy^5 = x^3 + y^7 + z^2 + \lambda xy^5, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Ejemplo 1.10.2.** Usando algoritmo 1.10.2.

Consideremos a  $f = x^4 + y^4$  polinomio casihomogéneo de tipo  $w = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . Notemos que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$ . Así,

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x^3, y^3 \rangle}.$$

Una base para  $\mathcal{O}_f$  es  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, y, y^2, xy, xy^2, x^2y, x^2y^2\}$ . En la siguiente tabla presentamos los órdenes pesados para cada monomio de la base  $\mathcal{O}_f$ :

| $m_j:$      | 1 | $x$           | $y$           | $xy$          | $x^2$         | $y^2$         | $xy^2$        | $x^2y$        | $x^2y^2$ |
|-------------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|
| $\nu(m_j):$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1        |

Los números espectrales para  $f$  son:

$$sp(f) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \alpha_3 = -\frac{1}{4}, \alpha_4 = 0, \\ \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = \frac{1}{4}, \alpha_8 = \frac{1}{4}, \alpha_9 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

1.10. DEFORMACIONES  $\mu$ -CONSTANTES

27

De donde podemos observar que  $\nu(m_j) = \alpha_j - \alpha_1$ ,  $j = 1, \dots, 9$ , en efecto:

$$\begin{aligned}\nu(1) &= 0 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_1 - \alpha_1, \\ \nu(x) &= \nu(y) = \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{2,3} - \alpha_1, \\ \nu(xy) &= \nu(x^2) = \nu(y^2) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{4,5,6} - \alpha_1, \\ \nu(xy^2) &= \nu(x^2y) = \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{7,8} - \alpha_1, \\ \nu(x^2y^2) &= 1 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_9 - \alpha_1.\end{aligned}$$

Notemos que el único monomio que tiene orden pesado mayor igual que uno es  $x^2y^2$ . Por lo cual, una  $\mu(f)$ -deformación para  $f = x^4 + y^4$  es

$$F_\lambda^\mu(x, y) = f + \lambda x^2 y^2 = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2,$$

con base  $T = \mathbb{C} - \{-2, 2\}$ .

28

## *CAPÍTULO 1. PRELIMINARES*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Capítulo 2

# Retícula de Brieskorn y conexión de Gauss-Manin en $(\mathbb{C}^2, 0)$

En este segundo capítulo, para un germen  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  casi-homogéneo con singularidad aislada en 0, definimos la retícula de Brieskorn  $\mathcal{H}^{(0)}$ , primero como un cociente de módulos de 2-formas holomorfas y sobre este espacio damos de forma explícita la conexión de Gauss-Manin,  $\partial_t$  (una manera de “derivar” secciones). La conexión  $\partial_t$  permite descomponer  $\mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$  en espacios propios y definir la  $V^\bullet$ -filtración y la  $V^{>\bullet}$ -filtración que nos servirán para describir el mapeo de periodos, ver capítulo 3. Definimos también el espectro asociado a  $f$ ,  $sp(f)$ , usando la filtración de Hodge  $F^\bullet$  inducida en el módulo de Milnor.

Finalmente, se determinará la retícula de Brieskorn analíticamente, usando secciones de residuos de Leray sobre 2-formas holomorfas y el operador monodromía sobre el primer grupo de cohomología de las fibras asociadas a la fibración de Milnor.

## 2.1. Conexión de Gauss-Manin en $(\mathbb{C}^2, 0)$

Los resultados presentados en esta sección son establecidos siguiendo la tesis [Francisco-2021], la cual está basada en [Kulikov-1998].

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de curva plana compleja, con singularidad aislada en 0, casi-homogéneo de grado  $d = 1$  y consideremos su fibración de Milnor dada por el teorema 1.8.2. A través de los submódulos  $df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ ,  $df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^1$  de  $\Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2$ , consideremos los cocientes:

## 30 CAPÍTULO 2. RETÍCULA DE BRIESKORN Y CONEXIÓN

1.  $\mathcal{H}^{(0)} := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}$ , la retícula de Brieskorn.
2.  $'\mathcal{H}^{(0)} := \frac{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}$ .
3.  $\Omega_f := \frac{\mathcal{H}^{(0)}}{'\mathcal{H}^{(0)}} \simeq \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}$ , el módulo Jacobiano.

Para  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  casihomogéneo con singularidad aislada, es posible obtener una base con representantes monomiales para el álgebra de Milnor  $\mathcal{O}_f$ , digamos  $\mathcal{B} := \{z_0^k z_1^l + J_f : (k, l) \in \Lambda \subset \mathbb{N}_+^2, |\Lambda| = \mu(f)\}$ . La base  $\mathcal{B}$  induce, usando el lema de Nakayama, una base para la retícula de Brieskorn

$$\mathcal{B} := \{[z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1] : (k, l) \in \Lambda \subset \mathbb{N}_+^2, |\Lambda| = \mu(f)\},$$

donde  $[z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1] = z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ .

Sean  $K := \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$  y  $M := K\langle e_1, \dots, e_{\mu(f)} \rangle$ , donde  $e_1, \dots, e_{\mu(f)}$  son los básicos de  $\mathcal{B}$ , como en el párrafo anterior.

**Definición 2.1.1.** (ver [Kulikov-1998], pág. 20) Una **conexión meromorfa** en el  $K$ -espacio vectorial  $M$  es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal  $D = \nabla_{\frac{d}{dt}} : M \longrightarrow M$  que satisface la regla de Leibniz

$$D(gm) = \frac{dg}{dt}m + gD(m), \quad \forall g \in \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}], m \in M.$$

Sea  $\mathbb{B} = \mathcal{O}_{D,0} = \mathbb{C}\{t\}$ . Entonces,  $K = \mathbb{B}[t^{-1}]$ .

**Observación 2.1.1.** Los elementos de  $K \cong \frac{\mathbb{B}[s]}{(ts-1)}$ ,  $t \in \mathbb{B} - \{0\}$  son de la forma:  $[g(s)] = g(s) + (ts - 1)$ , donde

$$g(s) = g_0 + g_1 s + \dots + g_l s^l, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

es un polinomio en la variable  $s$ , es decir,  $g(s) \in \mathbb{B}[s]$ , con coeficientes  $g_0, g_1, \dots, g_l$  series de Taylor en  $t$ .

A continuación, definimos qué es una conexión en un par de  $\mathbb{B}$ -módulos  $E$  y  $F$ , con  $E \subset F$ .

**Definición 2.1.2.** Sean  $E$  y  $F$ , con  $E \subset F$ ,  $\mathbb{B}$ -módulos. Una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal

$$D : E \longrightarrow F$$

que cumple la regla de Leibniz, es llamada una **conexión del par**  $(E, F)$ .

2.1. CONEXIÓN DE GAUSS-MANIN EN  $(\mathbb{C}^2, 0)$ 

31

Sea  $D : E \longrightarrow F$  una conexión para el par de  $\mathbb{B}$ -módulos  $(E, F)$ . Consideremos los  $\mathbb{B}$ -módulos  $E$  y  $F$  para obtener sus localizaciones respectivas:

$$S^{-1}E = E \otimes_{\mathbb{B}} S^{-1}\mathbb{B} \text{ y } S^{-1}F = F \otimes_{\mathbb{B}} S^{-1}\mathbb{B},$$

donde  $S = \{t^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  es un sistema multiplicativo. Esto es,

$$S^{-1}E = E \otimes_{\mathbb{B}} K \text{ y } S^{-1}F = F \otimes_{\mathbb{B}} K.$$

**Lema 2.1.1.** (ver [Kulikov-1998], pág. 20) Sea  $D : E \longrightarrow F$  una conexión para el par de  $\mathbb{B}$ -módulos  $(E, F)$ . Supongamos que  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{E}{F} < \infty$ . Entonces,  $S^{-1}E = S^{-1}F$ . Más aún, si definimos  $M := S^{-1}E = S^{-1}F$ , entonces el operador  $D$  se extiende a  $M$  de tal manera que  $\forall s \in E$  y  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D\left(s \otimes \frac{1}{t^k}\right) = D(s) \otimes \frac{1}{t^k} - s \otimes \frac{k}{t^{k+1}}.$$

Esto es,  $D : M \longrightarrow M$  es una conexión meromorfa.

**Definición 2.1.3.** La conexión de Gauss-Manin en  $'\mathcal{H}^{(0)}$  está dada por el mapeo:

$$\begin{aligned} \partial_t : \quad & '\mathcal{H}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \\ & [df \wedge (Adz_0 + Bdz_1)] \longmapsto [d(Adz_0 + Bdz_1)], \end{aligned}$$

donde  $d$  es la derivada exterior, es decir,

$$d(Adz_0 + Bdz_1) = \left( \frac{\partial B}{\partial z_0} - \frac{\partial A}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1.$$

Explícitamente, de la definición anterior,

$$\partial_t([df \wedge (Adz_0 + Bdz_1)]) = \left( \frac{\partial B}{\partial z_0} - \frac{\partial A}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}.$$

Sean  $E := '\mathcal{H}^{(0)}$  y  $F := \mathcal{H}^{(0)}$ .  $E$  y  $F$  son  $\mathbb{B}$ -módulos. Como  $\frac{F}{E} \simeq \mathcal{O}_f$  y  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f = \mu(f) < \infty$ , entonces por el lema 2.1.1 se sigue que

$$\partial_t : '\mathcal{H}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)}$$

se extiende a una conexión meromorfa en  $\mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ . Esto es,

$$\partial_t : \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$$

## 32 CAPÍTULO 2. RETÍCULA DE BRIESKORN Y CONEXIÓN

es una conexión meromorfa llamada *la conexión de Gauss-Manin* para el germen de curva plana  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  con singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

Tenemos definido el operador  $\partial_t$  en  $'\mathcal{H}^{(0)}$ . La cuestión ahora es, ¿cómo calcular  $\partial_t$  en elementos de  $\mathcal{H}^{(0)}$  usando  $\partial_t$  como está definida en  $'\mathcal{H}^{(0)}$ ? Veamos:

Sea  $v \in \mathcal{H}^{(0)}$ . Luego,

$$v = a(z_0, z_1)dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} = adz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Pero,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \ni f$  (nuestro germen) cumple la identidad de Euler, es decir,  $f = z_0 w_0 f_0 + z_1 w_1 f_1$ ,  $w_0, w_1$  los exponentes de  $f$ . De lo cual,

$$\begin{aligned} f \cdot v &= f \cdot (adz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}) \\ &= (z_0 w_0 f_0 + z_1 w_1 f_1)adz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \\ &= (z_0 w_0 f_0 a + z_1 w_1 f_1 a)dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \\ &= \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ -z_1 w_1 a & z_0 w_0 a \end{vmatrix} dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \\ &= df \wedge \eta + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}, \text{ donde } \eta = (-w_1 z_1 a)dz_0 + (w_0 z_0 a)dz_1 \in \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1. \end{aligned}$$

Esto es,

$$f \cdot v = df \wedge \eta + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} = [df \wedge \eta] \in '\mathcal{H}^{(0)}.$$

Podemos entonces aplicar  $\partial_t$  a  $[df \wedge \eta]$  obteniendo:

$$\partial_t([df \wedge \eta]) = [d(\eta)] = [d((-w_1 z_1 a)dz_0 + (w_0 z_0 a)dz_1)].$$

Como,

$$\begin{aligned} d(\eta) &= d((-w_1 z_1 a)dz_0 + (w_0 z_0 a)dz_1) \\ &= \left( \frac{\partial(w_0 z_0 a(z_0, z_1))}{\partial z_0} + \frac{\partial(w_1 z_1 a(z_0, z_1))}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1. \end{aligned}$$

Obtenemos que:

$$\partial_t([df \wedge \eta]) = \left[ \left( \frac{\partial(w_0 z_0 a(z_0, z_1))}{\partial z_0} + \frac{\partial(w_1 z_1 a(z_0, z_1))}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1 \right]. \quad (2.1)$$

Ahora bien,

$$\partial_t(fv) = \partial_t(t \cdot v) = t' \cdot v + t \cdot \partial_t(v) = v + t \cdot \partial_t(v)$$

2.1. CONEXIÓN DE GAUSS-MANIN EN  $(\mathbb{C}^2, 0)$ 

33

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t(v) &= -\frac{1}{t} \cdot v + \frac{1}{t} \cdot \partial_t(t \cdot v) \Rightarrow \partial_t(v) = -\frac{1}{f} \cdot v + \frac{1}{f} \cdot \partial_t(t \cdot v) \\ &\Rightarrow \partial_t(v) = -\frac{1}{f} \cdot v + \frac{1}{f} \cdot [d(\eta)], \quad \forall v \in \mathcal{H}^{(0)}. \end{aligned}$$

Por tanto, definimos la *conexión de Gauss-Manin*  $\partial_t$  en  $\mathcal{H}^{(0)}$  como:

$$\partial_t(v) = \frac{-v + [d(\eta)]}{f}, \quad \forall v \in \mathcal{H}^{(0)}.$$

Notemos que en especial, para los básicos de  $\mathcal{H}^{(0)}$

$$v = [z^m dz] = z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$$

se tiene que  $f \cdot v = df \wedge \eta + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ , con

$$\eta = (w_1 z_1 z_0^k z_1^l) dz_0 + (w_0 z_0 z_0^k z_1^l) dz_1.$$

Además,

$$\begin{aligned} d(\eta) &= \left( \frac{\partial(w_0 z_0 z_0^k z_1^l)}{\partial z_0} + \frac{\partial(w_1 z_1 z_0^k z_1^l)}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1 \\ &= \left( \frac{\partial(w_0 z_0^{k+1} z_1^l)}{\partial z_0} + \frac{\partial(w_1 z_0^k z_1^{l+1})}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1 \\ &= ((k+1)w_0 z_0^k z_1^l + (l+1)w_1 z_0^k z_1^l) dz_0 \wedge dz_1 \\ &= ((k+1)w_0 + (l+1)w_1) z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1 \\ &= ((k+1)w_0 + (l+1)w_1) z^m dz, \\ \Rightarrow d(\eta) &= ((k+1)w_0 + (l+1)w_1) z^m dz. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por lo tanto, usando la ecuación 2.2 tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \partial_t([z^m dz]) &= \frac{-[z^m dz] + [d(\eta)]}{f} \\ &= \frac{-[z^m dz] + [((k+1)w_0 + (l+1)w_1) z^m dz]}{f} \\ &= \frac{(-1 + (k+1)w_0 + (l+1)w_1) [z^m dz]}{f}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\partial_t([z^m dz]) = \frac{a(m)[z^m dz]}{f},$$

donde  $a(m) = (k+1)w_0 + (l+1)w_1 - 1$ .

**Proposición 2.1.1.** *Para un germen de singularidad aislada en 0,  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  casihomogéneo de grado 1 y exponentes  $w_1, w_2$ , el operador*

$$\cdot t \circ \partial_t : \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}],$$

*tiene a  $\mathcal{B} = \{[z^m dz] : m \in \Lambda\}$  como base de eigenvectores con valores propios asociados de acuerdo a la siguiente relación:*

$$\cdot t \circ \partial_t([z^m dz]) = a(m)[z^m dz],$$

*donde  $[z^m dz] = z_0^k z_1^l dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ ,  $m = (k, l)$  y  $\cdot t$  es solo multiplicar por  $t = f$ .*

**Notación 2.1.1.**

1.  $e_m := [z^m dz]$ , con  $[z^m dz] \in \mathcal{B} = \{[z^m dz] : m \in \Lambda\}$ .

2.  $\mathcal{M} := \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$

Dado  $e_m = z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \in \mathcal{B}$  y  $a(m)$  su valor propio asociado, consideramos los espacios  $C_{a(m)}$  generados por  $e_m$ , los cuales nos permiten definir nuevos espacios  $C_{a(m)+k} := \mathbb{C} \cdot t^k \cdot e_m$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Los espacios  $C_{a(m)+k}$ , a su vez, permiten descomponer a  $\mathcal{M}$  como

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{a(m)} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_{a(m)+k}.$$

Por lo cual, cada elemento  $s \in \mathcal{M}$  se ve de la forma  $s = \sum_{a(m), k} s_{a(m)+k}$ , con  $s_{a(m)+k} \in C_{a(m)+k}$ .

Definimos los subespacios de  $\mathcal{M}$ :

$$V^\beta := \bigoplus_{\beta \leq a(m)+k} C_{a(m)+k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y

$$V^{>\beta} := \bigoplus_{\beta < a(m)+k} C_{a(m)+k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Los conjuntos  $V^\beta$  y  $V^{>\beta}$  definen filtraciones

$$\dots \subseteq V^{\beta+1} \subseteq V^\beta \subseteq V^{\beta-1} \subseteq \dots \quad \text{y} \quad \dots \subseteq V^{>\beta+1} \subseteq V^{>\beta} \subseteq V^{>\beta-1} \subseteq \dots$$

sobre  $\mathcal{M}$ , llamadas  $V^\bullet$ -filtración y  $V^{>\bullet}$ -filtración, respectivamente.

## 2.2. Espectro para un germen de curva plana

Otro de los invariantes asociados a un germen de función analítica  $f$  es el espectro,  $sp(f)$ . Esta sección es entonces dedicada a definir  $sp(f)$ , usando la filtración de Hodge.

Tomando  $n = 1$ , sea  $\Lambda$  como en la proposición 2.1.1. Para  $p = 0, 1$ , considérese

$$\begin{aligned}\Lambda_p &:= \{m \in \Lambda : n - p - 1 < a(m) \leq n - p\} \\ &= \{m \in \Lambda : -p < a(m) \leq 1 - p\}, \\ \Lambda_{\geq 0} &:= \Lambda_0 \cup \Lambda_1.\end{aligned}$$

Ahora bien, definimos  $\eta_m := \partial_t^{1-p}[e_m]$ , para cada  $m \in \Lambda$ . Por lo tanto, por definición, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 2.2.1.** Si  $m \in \Lambda_p$ , entonces  $\eta_m \in C_{\alpha(m)} := \partial_t^{1-p}\mathcal{C}_{\alpha(m)}$ , con  $-1 < \alpha(m) \leq 0$  y  $\alpha(m) = a(m) - (1 - p)$ .

**Definición 2.2.1.** Definimos  $\mathcal{C} := \bigoplus_{m \in \Lambda} \mathbb{C} \cdot \eta_m$  y  $F^p\mathcal{C} := \bigoplus_{m \in \Lambda_{\geq p}} \mathbb{C} \cdot \eta_m$ .

Los espacios  $F^p\mathcal{C}$  satisfacen  $F^{p+1}\mathcal{C} \subset F^p\mathcal{C}$ , y por lo tanto, determinan una filtración sobre  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = F^0\mathcal{C} \supset F^1\mathcal{C} \supset F^2\mathcal{C} = \{0\},$$

la cual es llamada la “ $F^\bullet$ -filtración de Hodge”.

El siguiente lema nos da una relación entre la  $F^\bullet$ -filtración de Hodge y la  $V^\bullet$ -filtración que nos ayuda a definir el espectro.

**Lema 2.2.2.**

$$\bigoplus_{-1 < \alpha(m) \leq 0} Gr_F^p C_{\alpha(m)} \cong \bigoplus_{m \in \Lambda_p} \mathbb{C} \cdot [z^m] = \bigoplus_{-1 < \alpha(m) \leq 0} Gr_V^{\alpha(m)+1-p} \mathcal{O}_f.$$

*Dem.* Directamente, a partir de la definición de la filtración de Hodge y del hecho

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{J_f} \simeq \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1} \simeq \frac{\frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}}{\frac{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}} = \frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\mathcal{H}^{(0)}},$$

se puede obtener la demostración, la cual se puede consultar en [Francisco-2021, pág. 93] (cf. [Kulikov-1998, pág. 116] para ver un resultado más general).  $\square$

En general, el espectro de  $f$ , se define con la filtración de Hodge, ver [Kulikov-1998, pág. 116]. La siguiente, es una forma alternativa para dicha definición, en la que se usa el lema 2.2.2, y consiste en basarse en el enfoque de A.N. Varchenko a través de expansiones asintóticas de periodos de integrales (ver [Arnol'd et al.-2012]):

**Definición 2.2.2.** *El espectro de  $f$  está dado por:*

$$sp(f) := \{ \alpha(m) + (1 - p) : Gr_V^{\alpha+1-p} \mathcal{O}_f \neq 0, m \in \Lambda_p, p = 0, 1 \}.$$

Asimismo, la multiplicidad de cada  $\beta \in sp(f)$  es  $d_\beta := \dim_{\mathbb{C}} (Gr_V^\beta \mathcal{O}_f)$ .

Una propiedad muy importante del espectro es la siguiente, para una demostración, ver [Kulikov-1998, pág. 118] y [Hertling-2002, pág. 172].

**Proposición 2.2.1.** *Para un germen casihomogéneo de singularidad aislada de curva plana  $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , los números espectrales  $\beta \in sp(f)$  satisfacen las siguientes propiedades:*

- i) Si  $d_\beta \neq 0$  entonces  $-1 < \beta < 1$ . Esto es,  $sp(f) \subset (-1, 1)$ .
- ii) Propiedad de simetría en las multiplicidades:  $d_{-\beta} = d_\beta$ .
- iii) Para cada  $i = 1, \dots, \mu(f)$ :  $\beta_i = -\beta_{\mu+1-i}$ , con  $\beta_i \in sp(f)$ .

## 2.3. Retícula de Brieskorn y residuos de Leray

Presentamos en esta sección, la manera analítica de describir la retícula de Brieskorn usando residuos de Leray y el operador monodromía.

### 2.3.1. Residuo de Leray

Para los resultados presentados en este apartado, seguiremos [Weber-1998] y [Weber-2005] (cf. [Zoladek-2006, pág. 123]). Sea  $W$  una hipersuperficie no singular en  $\mathbb{C}^2$  dada por

$$W = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : h(z_0, z_1) = 0\},$$

donde  $h$  es una función holomorfa y su diferencial satisface la condición  $dh(z) \neq 0, \forall z \in W$ . Por otra parte, consideremos una 2-forma holomorfa con un polo simple (a lo más de orden 1) a lo largo de  $W$ ,  $\tilde{\omega} \in \Omega^2(\mathbb{C}^2 \setminus W)$ .

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

37

Esto es, la forma diferencial, que se obtiene al multiplicar  $\tilde{\omega}$  por  $h$ ,  $h \cdot \tilde{\omega}$ , es holomorfa en el germen  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Entonces, se tiene el siguiente resultado, que es una generalización del “lema de división de de Rham” para el caso de singularidades aisladas (ver [de-Rham-1954], [KSaito-1976], y cf. [Kulikov-1998, pág. 18]).

**Proposición 2.3.1.** *Si  $\tilde{\omega}$  es cerrada (esto es,  $d\tilde{\omega} = 0$ ), entonces existe una representación local (en coordenadas locales) para  $\tilde{\omega}$  dada por*

$$\tilde{\omega} = \frac{dh}{h} \wedge \eta + \theta,$$

donde  $\eta$  y  $\theta$  son 1-forma y 2-forma holomorfas en  $V$ , respectivamente. Además, la clase  $[\eta]$  está bien definida en  $H^1(V, \mathbb{C})$ .

**Definición 2.3.1.** *El residuo de Leray de la forma  $\tilde{\omega}$ , denotado  $\text{Res } \tilde{\omega}$ , es la 1-forma  $\eta$  de la proposición anterior.*

**Ejemplo 2.3.1.** *Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de singularidad aislada de curva plana. La diferencial de  $F := f - t$ ,  $t \in \mathbb{C}$ , es*

$$df = f_{x_0} dx_0 + f_{x_1} dx_1,$$

donde  $f_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ,  $0 \leq k \leq 1$ .

Supongamos que  $f_{x_1} \neq 0$ . Entonces,

$$dx_1 = \frac{1}{f_{x_1}} f_{x_1} dx_1 + \frac{1}{f_{x_1}} (f_{x_0} dx_0 - f_{x_0} dx_0) = \frac{1}{f_{x_1}} (df - f_{x_0} dx_0).$$

Consideremos la 2-forma  $\omega = \frac{1}{F} dx_0 \wedge dx_1$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{F} dx_0 \wedge dx_1 \\ &= \frac{1}{F} dx_0 \wedge \left( \frac{1}{f_{x_1}} (df - f_{x_0} dx_0) \right) \\ &= -\frac{1}{F} \left( \frac{1}{f_{x_1}} (df - f_{x_0} dx_0) \right) \wedge dx_0 \\ &= -\frac{1}{F} \left( \frac{1}{f_{x_1}} df \right) \wedge dx_0 + \frac{1}{F} \left( \frac{1}{f_{x_1}} f_{x_0} dx_0 \right) \wedge dx_0 \\ &= \frac{df}{F} \frac{(-1)}{f_{x_1}} \wedge dx_0 \\ &= \frac{df}{F} \wedge \left( -\frac{1}{f_{x_1}} \right) dx_0. \end{aligned}$$

Así, el residuo de Leray de la 2-forma  $\omega$  es

$$\text{Res } \omega = -\frac{1}{f_{x_1}} dx_0.$$

En una forma análoga, cuando  $f_{x_0} \neq 0$  se tiene que

$$\text{Res } \omega = \frac{1}{f_{x_0}} dx_1.$$

**Ejemplo 2.3.2.** Sean  $f = y^2 - x^3 - t$ ,  $t \in \mathbb{C} - \{0\}$  constante, y  $\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy$ . Notemos que

$$df = -3x^2 dx + 2y dy = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0.$$

- Si  $x \neq 0$ , entonces  $f_x = -3x^2 \neq 0$ . Entonces

$$\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy = \frac{df}{f} \wedge \left( -\frac{1}{3x^2} \right) dy.$$

$$\text{Así, } \text{Res } \omega = -\frac{1}{3x^2} dy$$

- Si  $y \neq 0$ , entonces  $f_y = 2y \neq 0$ . Entonces

$$\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy = \frac{df}{f} \wedge \left( -\frac{1}{2y} \right) dx.$$

$$\text{Así, } \text{Res } \omega = -\frac{1}{2y} dx.$$

### 2.3.2. Ciclos evanescentes

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una vecindad  $U \subset \mathbb{C}^2$  de  $w_*$ .

**Definición 2.3.2.** El punto  $w_*$  es un punto crítico no degenerado si y solo si las derivadas parciales de  $f$  satisfacen

$$\frac{\partial f(z_0, z_1)}{\partial z_j}(w_*) = 0, \quad j = 0, 1$$

y el determinante de la matriz Hessiana evaluada en  $w_*$ ,  $\det(\text{Hess} f(w_*))$ , es distinto de cero.

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

39

**Teorema 2.3.1 (Lema de Morse, ver [Zoladek-2006], pág. 4).** Si  $z_0$  es un punto crítico no degenerado de la función  $f$ , entonces existe un cambio de coordenadas holomorfas  $z = \phi(w)$ ,  $w = (w_1, w_2)$  con  $\phi(0) = z_0$ , tal que  $f$  es  $R$ -equivalente a un polinomio cuadrático:

$$f(\phi(w)) = f(z_0) + w_1^2 + w_2^2.$$

Usando el lema de Morse podemos investigar las superficies de nivel de una función holomorfa en una vecindad del punto crítico no degenerado. Sea  $g(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  con superficies de nivel  $V_t = \{(z_1, z_2) : g(z_1, z_2) = t\}$ . Notemos que  $g(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{t - z_1^2}$ . Por lo cual,  $V_t$  es la superficie de Riemann de la función  $\sqrt{t - z_1^2}$ , como se hizo en la sección 1.5.

- Para  $t = 0$ , se tiene  $z_2 = \pm iz_1$ . Por lo cual, la superficie  $V_0$  consta de dos líneas complejas que se intersectan en 0. Topológicamente,  $V_0$  es difeomorfa a un cono (ver figura 2.1).

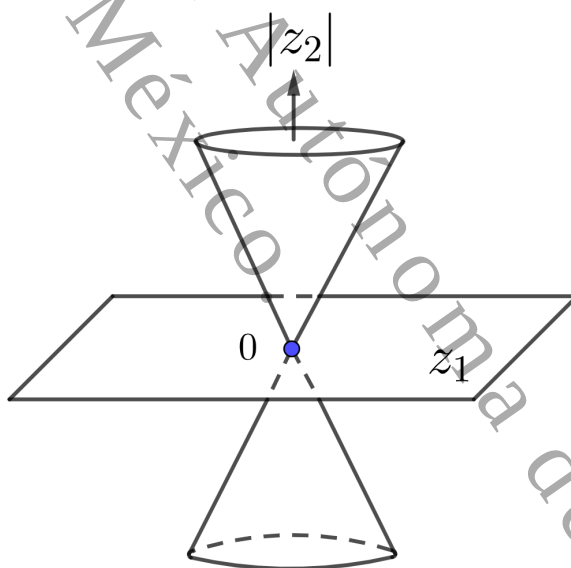


Figura 2.1: Superficie  $V_0$ .

- Si  $t \neq 0$ , entonces la superficie tiene dos puntos de ramificación,  $z_2 = \pm\sqrt{t}$ . Cuando la variable  $z_1$  varía, girando una vez alrededor de un punto de ramificación, llegamos a la otra hoja de la superficie. En cambio, si  $z_1$  varía girando una vez alrededor de ambos puntos de ramificación, entonces llegamos al mismo lugar. Para obtener la superficie, primero

## CAPÍTULO 2. RETÍCULA DE BRIESKORN Y CONEXIÓN

tomamos dos copias del plano complejo cortando sobre el segmento que une los puntos  $\pm\sqrt{t}$ , luego giramos la hoja superior alrededor de la línea que une los puntos  $\pm\sqrt{t}$  y finalmente pegamos los planos sobre la línea de corte (ver figura 2.2).

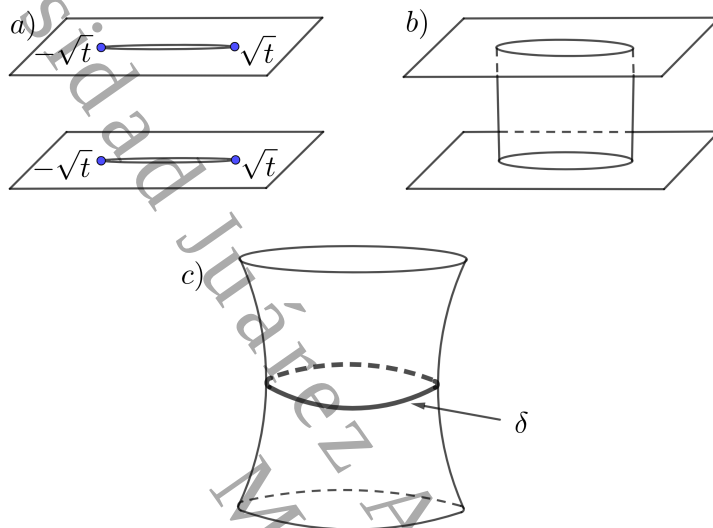


Figura 2.2: Superficie  $V_t$ .

**Proposición 2.3.2.** (ver [Zoladek-2006], pág. 4) El ciclo cerrado  $\delta$ , en la figura 2.2 inciso c), genera el 1-grupo de homología de  $V_t$ .

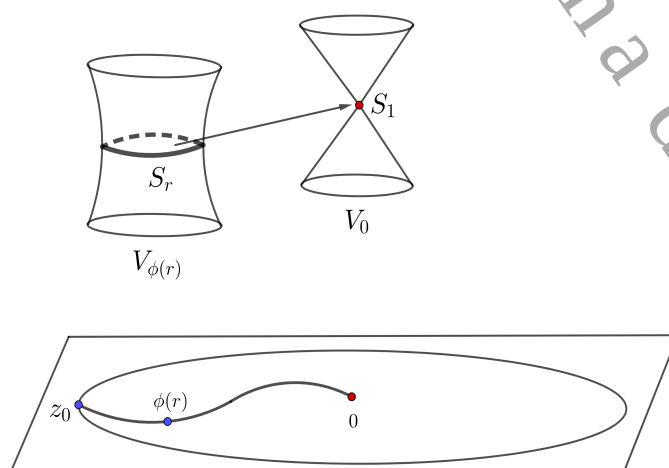


Figura 2.3: Ciclo evanescente sobre  $V_t$ .

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

41

Consideremos a  $U$  una vecindad de 0,  $z' \in U$  y  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  una trayectoria que conecta a 0 con  $z'$  ( $\phi(0) = 0$  y  $\phi(1) = z'$ ). En  $V_{\phi(r)}$  consideramos la circunferencia  $S_r := \sqrt{\phi(r) - 0} S^1$ ,  $S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} : z_1^2 + z_2^2 = 1 \text{ y } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0\}$ . Las circunferencias  $S_r \subset V_{\phi(r)}$  degeneran al punto  $t = 0$  (ver figura 2.3).

**Definición 2.3.3.** La clase de homología  $\delta$  definida por la esfera  $S_1$  es llamado **ciclo evanescente**.

**Proposición 2.3.3** (Topología de los conjuntos de nivel, ver [Zoladek-2006]). Si  $t \neq 0$ , entonces la superficie  $V_t$  es difeomorfa al haz tangente a la esfera unidad en  $\mathbb{R}^2$ ,  $TS^1$ . Además, la sección cero  $\delta$  de este haz genera el primer grupo de homología de  $V_t$ .

*Dem.* Sea  $t \neq 0$ .  $V_t$  es el conjunto de puntos que cumplen  $z_1^2 + z_2^2 = t$ . Sean  $z_1 = u_1 + iv_1$ ,  $z_2 = u_2 + iv_2$ ,  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$ .

Si  $\operatorname{Im} t = 0$  y  $t > 0$  se tiene que  $z_1^2 + z_2^2 = t$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (u_1 + iv_1)^2 + (u_2 + iv_2)^2 \\ &\Rightarrow u_1^2 + 2iu_1v_1 - v_1^2 + u_2^2 + 2iu_2v_2 - v_2^2 = t \\ &\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 - v_2^2 + 2i(u_1v_1 + u_2v_2) = t \\ &\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = t + v_1^2 + v_2^2 \text{ y } u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \\ &\Rightarrow \|u\|^2 = t + \|v\|^2 \text{ y } \langle u, v \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|u\| = \sqrt{t + \|v\|^2} \text{ y } \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así,  $u$  y  $v$  son ortogonales. Por lo cual,  $\frac{u}{\|u\|} = \frac{u}{\sqrt{t + \|v\|^2}} \in S^1$  es ortogonal a  $v$ . Definimos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_1 : V_t &\longrightarrow TS^1 \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{u}{\sqrt{t + \|v\|^2}}, v \right). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $t = |t|e^{i\theta}$ , con  $\arg(t) = \theta \neq 0$ . En este caso, consideramos a

$$\begin{aligned} \phi_2 : V_t &\longrightarrow TS^1 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left( e^{\frac{i\theta}{2}} z_1, e^{\frac{i\theta}{2}} z_2 \right). \end{aligned}$$

□

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de función holomorfa con singularidad aislada en 0.

**Lema 2.3.1.** (ver [Zoladek-2006], pág. 58) *Existe una perturbación de Morse de  $f$ ,  $\tilde{f} := f + \epsilon L$ , con  $L$  una transformación lineal, tal que  $\tilde{f}$  solo tiene puntos críticos no degenerados con valores críticos distintos.*

Por el lema anterior, podemos considerar una perturbación de Morse de  $f$ ,  $\tilde{f} := f + \epsilon L$ , cuyos puntos críticos sean todos de Morse, los cuales los denotaremos por  $z_1, \dots, z_{\mu(f)}$  y sus valores críticos  $t_1, \dots, t_{\mu(f)}$ . A continuación se elige  $t' \neq t_1, \dots, t_{\mu(f)}$  y consideramos trayectorias  $\phi_i : [1, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ , tales que  $\phi_i(0) = t_i$ ,  $\phi_i(1) = t'$ , con  $i = 1, \dots, \mu(f)$ , y  $\phi_i$  no interseca a  $\phi_k$ , para  $i \neq k$  (ver figura 2.4).

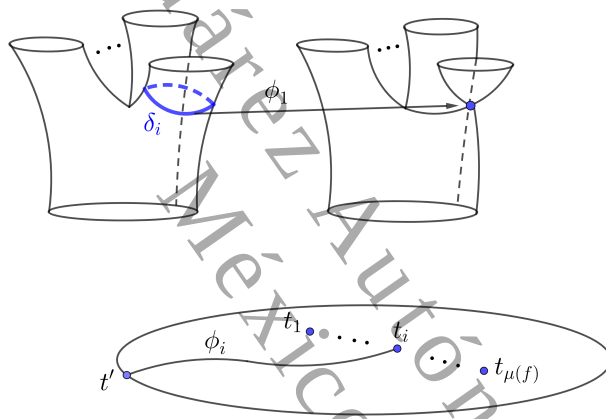


Figura 2.4: Trayectorias  $\phi_i$ .

Sea  $B_\epsilon \subset \mathbb{C}^2$  la bola de Milnor como en el teorema 1.8.2.

**Proposición 2.3.4.** (ver [Zoladek-2006], pág. 62) *Denotemos por  $V_{t'} := f^{-1}(t') \cap B_\epsilon$  y  $\tilde{V}_{t'} := \tilde{f}^{-1}(t') \cap B_\epsilon$ . Entonces,  $H_1(V_{t'}, \mathbb{C}) \simeq H_1(\tilde{V}_{t'}, \mathbb{C})$ .*

Usando el lema de Morse, existe una vecindad  $U_i$  del punto crítico  $z_i$  en la cual  $\tilde{f}$  se puede ver como:

$$\tilde{f}(x, y) = t_i + x^2 + y^2.$$

Para  $r$  cercano a 0, definimos los ciclos  $S_i(r) = \sqrt{\phi_i(r) - t_i} S^1 \subset V_{\phi(r)}$ , donde  $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1 \text{ y } \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} y = 0\}$ . Por la propiedad cubriente de homotopías (ver [Zoladek-2006], pág. 56), podemos prolongar las esferas  $S_i(r) \subset V_{\phi(r)}$  sobre la trayectoria  $\phi_i(t)$ , de la cual en particular se tiene un ciclo dado por  $S_i(1)$  (ver [Zoladek-2006], pág. 62 y cf. [Arnol'd et al.-2012] pág. 31).

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

43

**Definición 2.3.4.** Las clases de homología  $\delta_i = \delta_{\phi_i} \in H_1(V_{t'}, \mathbb{C})$  definidas por las esferas  $S_i(1)$  son llamadas **sistema distinguido de ciclos evanescentes** (ver figura 2.4).

**Proposición 2.3.5 (Teorema de Milnor, ver [Zoladek-2006], pág. 63).** El sistema distinguido de ciclos evanescentes forman una base de  $H_1(\tilde{V}_{t'}, \mathbb{C})$ .

### 2.3.3. Monodromía clásica

Consideremos ahora una trayectoria cerrada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D_\eta^*$ , con  $\gamma(0) = \gamma(1) = t'$  para algún  $t' \in S_\eta := \partial D_\eta^*$  fijo, que recorre la circunferencia de radio  $\eta$  en sentido contrario a las manecillas del reloj. Consideremos:

1. La fibra  $V_{t'} = V_{\gamma(0)} = V_{\gamma(1)}$ .
2.  $\tilde{\Gamma} : V_{t'} \times [0, 1] \rightarrow D_\eta^*$  dada por  $\tilde{\Gamma}(z_0, s) = \gamma(s)$ .
3.  $\tilde{\Gamma}_0 : V_{t'} \times [0, 1] \rightarrow B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$  dada por  $\tilde{\Gamma}_0(z_0, 0) = z_0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V_{t'} \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}_0} & B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*) \\
 \downarrow & \nearrow \Gamma & \downarrow f_1 \\
 V_{t'} \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}} & D_\eta^*
 \end{array}$$

Cuadro 2.1: Monodromía  $\Gamma$

Las funciones  $\tilde{\Gamma}$  y  $\tilde{\Gamma}_0$  son tales que:

$$f_1(\tilde{\Gamma}_0(z_0, 0)) = f_1(z_0) = t' = \gamma(0) = \tilde{\Gamma}(z_0, 0).$$

Por la propiedad cubriente de homotopía,  $\gamma$  genera una familia de difeomorfismos  $\Gamma_s : V_{t'} \rightarrow B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$  (ver cuadro 2.1:  $\Gamma : [0, 1] \times V_{t'} \rightarrow B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$ ) tal que:

1.  $\Gamma_0 = id : V_{t'} \rightarrow V_{t'}$ ,
2.  $\Gamma_s(V_{t'}) \subset V_{\gamma(s)}$ ,

3.  $\Gamma_s|_{\partial V_{t'}}$  es compatible con la estructura de producto cartesiano, es decir,  $\Gamma_s(t', z_0) = (\gamma(s), z_0) \in D_\epsilon^* \times \partial V_{t'}$ .

Por la propiedad 3 de los difeomorfismos  $\Gamma_t$  tenemos que

$$\Gamma_0(t', z_0) = (\gamma(0), z_0) = (t', z_0) = (\gamma(1), z_0) = \Gamma_1(t', z_0).$$

Así, podemos considerar que  $\Gamma_1$  es la identidad sobre la frontera de la fibra  $V_{t'}$ .

### Definición 2.3.5.

- El difeomorfismo  $h_\gamma := \Gamma_1 : V_{t'} \rightarrow V_{t'}$  es llamado el **difeomorfismo monodromía inducido por el ciclo  $\gamma$** .
- El homomorfismo  $h_\gamma^* : H^1(V_{t'}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(V_{t'}, \mathbb{C})$  es llamado la **monodromía clásica cohomológica de la singularidad  $f$** .
- Similarmente,  $h_{*,\gamma} : H^1(V_{t'}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(V_{t'}, \mathbb{C})$  es llamado la **monodromía clásica homológica de la singularidad  $f$** .

### 2.3.4. Haz (co)-homológico de Milnor

Tomemos  $f$  con singularidad aislada en el cero y le asociamos su fibración de Milnor  $f : B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*) \rightarrow D_\eta^*$ , ver sección 1.8.

Para cada  $t \in D_\eta^*$ , denotamos por  $V_t = f^{-1}(t)$  la fibra de  $f$  en  $t$ .

**Proposición 2.3.6.** (ver [Lee-2007], pág. 182) Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo suave entre variedades suaves. Si  $c \in N$  es un valor regular de  $\phi$ , entonces  $V_c := \phi^{-1}(c)$  es una subvariedad encajada y cerrada de  $M$  cuya codimensión ( $\text{codm}(V_c) := \dim(M) - \dim(V_c)$ ) es igual a la dimensión de  $N$ . Esto es,  $\text{codm}(V_c) = \dim(M) - \dim(V_c) = \dim(N)$ .

**Proposición 2.3.7.** (ver [Milnor-1968], pág. 5) Sean  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio no constante con singularidad aislada en 0 y  $f_1 : B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*) \rightarrow D_\eta^*$  su fibración de Milnor asociada. Entonces, las fibras  $V_t$  son del mismo tipo de homotopía que un  $\mu(f)$ -bouquet<sup>1</sup>  $\bigvee_{i=1}^{\mu(f)} S_i^1$  de 1-esferas.

<sup>1</sup>Una suma cuña de espacios topológicos  $\{X_i\}_{i \in I}$  con puntos bases  $(p_i)_{i \in I}$ , está definida por  $\bigvee_{i \in I} X_i := \coprod_{i \in I} X_i / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación  $p_i \sim p_j, \forall i, j \in I$ .

En particular, una suma cuña de  $n$  esferas de dimensión 1 es llamado  $n$ -bouquet de 1-esferas.

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

45

Ahora bien, las curvas de nivel  $V_t$  para  $f$ , son 1-variedades complejas con frontera regular, para todo  $t \in D_\eta^*$ , con  $D_\eta^*$  suficientemente pequeño. Podemos tomar  $H^1(V_t, \mathbb{C})$  y  $H_1(V_t, \mathbb{C})$ , los 1-ésimos grupos de cohomología y homología para  $V_t$ , respectivamente.

Consideremos los haces vectoriales holomorfos (ver sección 1.9)  $\underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H^1(V_t, \mathbb{C})$  y  $\underline{H} = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H_1(V_t, \mathbb{C})$ .

**Definición 2.3.6.** (ver [Zoladek-2006], págs. 140-141) El haz  $\underline{H}$ , con fibras  $H_t = H_1(V_t, \mathbb{C})$ , es llamado el **haz homológico de Milnor**. Análogamente, el haz vectorial  $\underline{H}^*$ , con fibras  $H_t^* = H^1(V_t, \mathbb{C})$ , es llamado el **haz cohomológico de Milnor**.

**Proposición 2.3.8 (Dualidad de Poincaré,** ver [Danilov & Shokurov-2013], pág. 44).

$$H_1(V_t, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(H^1(V_t, \mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^1(V_t, \mathbb{C}).$$

La proposición anterior nos dice que, el dual del 1-ésimo grupo de homología (grupo de homomorfismos  $\sigma : H_1(V_t, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ) es el 1-ésimo grupo de cohomología sobre la fibra  $V_t$ .

## 2.3.5. Secciones Elementales y Geométricas

Sean  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2$  una 2-forma holomorfa en una vecindad del 0 y  $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Denotemos por  $[\eta_t]$  la clase de cohomología de la 1-forma residuo de Leray de  $\omega$  en  $H^1(V_t, \mathbb{C})$ .

**Definición 2.3.7.** (ver [Zoladek-2006], pág. 144)

1. La familia de clases de cohomología  $[\eta_t]$  definen una sección  $s[\omega] : t \mapsto [\eta_t]$  del haz de cohomología de Milnor y es llamada **sección geométrica correspondiente a la forma  $\omega$** , la cual es denotada por  $s[\omega]$ .
2. La sección  $s[\omega]$  induce una función analítica multivaluada con valores en ciclos evanescentes  $\sigma(t)$  dada por:

$$\langle s[\omega], \sigma(t) \rangle = \int_{\sigma} \eta.$$

El apareamiento  $\langle s[\omega], \sigma(t) \rangle$  tiene una expansión de la forma

$$\int_{\sigma} \eta = \sum_{\alpha} a_{\alpha} t^{\alpha}, \quad (2.3)$$

la cual, para cada  $\alpha$ , determina una clase de cohomología  $A_{\alpha}^{\omega}(t) \in H^1(V_t, \mathbb{C})$ . En efecto, notemos que el mapeo

$$\langle A_{\alpha}^{\omega}, \bullet \rangle : H_1(V_t, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(t) \longmapsto \langle A_{\alpha}^{\omega}, \sigma(t) \rangle = a_{\alpha}$$

es una funcional lineal, es decir,  $\langle A_{\alpha}^{\omega}, \bullet \rangle \in \text{Hom}(H_1(V_t, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong H^1(V_t, \mathbb{C})$  que se corresponde con una sección del haz cohomológico de Milnor,

$$A_{\alpha}^{\omega} : D_{\eta}^* \longrightarrow \underline{H}^*, \quad t \longmapsto \langle A_{\alpha}^{\omega}, \bullet \rangle.$$

De esta manera, se tiene que la expansión dada en (2.3) determina una sección

$$A_{\alpha}^{\omega} : D_{\eta}^* \longrightarrow \underline{H}^*, \quad t \longmapsto \langle A_{\alpha}^{\omega}, \bullet \rangle.$$

Por lo tanto, se tiene que la sección  $s[\omega]$  tiene la siguiente forma “asintótica” explícita:

$$s[\omega] = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{\omega} t^{\alpha}.$$

Denotemos por  $\underline{H}_{\lambda_{\alpha}}^*$  el haz vectorial tal que, para  $t \in \Delta^*$ , su fibra es el eigenspacio propio para la transformación de monodromía  $T$ .

De forma general, para recuperar esta construcción, tenemos que dada una sección  $A_{\alpha} : D_{\eta}^* \longrightarrow \underline{H}_{\lambda_{\alpha}}^*$ , definimos la *sección elemental* asociada (monovaluada)

$$s(A_{\alpha}, \alpha) : t \in D_{\eta}^* \longmapsto t^{\alpha} A_{\alpha}(t).$$

**Teorema 2.3.2.** (ver [Zoladek-2006], pág. 125) Sean  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\mu(f)}$  1-ciclos evanescentes en la superficie  $V_t$ , los cuales forman una base para  $H_1(V_t, \mathbb{C})$ . Consideremos  $\omega$  una 2-forma holomorfa y  $\eta$  su residuo de Leray en  $V_t$ . Entonces,

$$I_j(t) := \langle s[\omega], \delta_j(t) \rangle = \int_{\delta_j} \eta = \sum_{\alpha > -1} a_{j,\alpha} t^{\alpha},$$

donde  $a_{j,\alpha} \in \mathbb{C}$  y  $\lambda_{\alpha} := e^{-2\pi i \alpha}$ .

La serie converge para  $|t| < 1$  y  $\arg(t)$  en algún sector circular fijo.

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

47

Se tiene que, para cada  $t \in D_\eta^*$ , las fibras del haz cohomológico son  $H^1(V_t, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\mu$ . Por otra parte, la monodromía  $h_\gamma^*$  sobre  $H^1(V_t, \mathbb{C})$  es semi-simple (diagonalizable) y sus valores propios asociados tienen la forma  $e^{-2\pi i \alpha}$ , donde  $\alpha \in sp(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu\} \subset \mathbb{Q}$  (ver [Hertling-2002-2], pág. 121). Por otro lado, por el lema 2.2.1, para cada básico  $\eta_{m_j}$ ,  $j = 1, \dots, \mu(f)$ , del espacio  $\mathcal{C}$ , existe un número racional  $\alpha(m_j) \in (-1, 0]$  tal que  $e^{-2\pi i \alpha(m_j)} = e^{-2\pi i \alpha_j}$ , para algún  $\alpha_j \in sp(f)$ . De esta manera, tenemos  $\mu(f)$ -números racionales  $-1 < \beta_1, \dots, \beta_{\mu(f)} < 0$ , los cuales generan progresiones aritméticas:

$$\mathbf{L}_j = \{\beta_j + k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad j = 1, \dots, \mu(f).$$

Ahora bien, dados  $\lambda_\alpha = e^{-2\pi i \alpha} = e^{-2\pi i \beta}$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbf{L} := \bigcup_{j=1}^{\mu(f)} \mathbf{L}_j$ , se tiene que  $H_{\lambda_\alpha}^1 = H_{\lambda_\beta}^1$ , con  $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$ . Además, para cada  $\alpha \in \mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned} H^1(V_t, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha} &= H_{\lambda_\alpha}^1 \\ &\cong \{A_\alpha : D_\eta^* \rightarrow \underline{\mathbf{H}}^*, \quad t \mapsto \langle A_\alpha(t), \bullet \rangle\} \\ &\subset \text{Hom}(H_1(V_t, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ &= H^1(V_t, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Es así como llegamos a la definición de los *espacios de secciones elementales*. En efecto, sea  $C^\alpha$  el espacio generado por las secciones  $s(A_\alpha, \alpha)$ , variando  $\alpha$  y las secciones  $A \in H_{\lambda_\alpha}^1$ .

## 2.3.6. Retícula de Brieskorn vía secciones geométricas

Asumimos que  $f$  es un germen de singularidad aislada casihomogénea como antes, con pesos  $w = (w_0, w_1)$ . Sean  $\mathcal{B} = \{[x^\beta] : x^\beta = x_0^{\beta_0} x_1^{\beta_1}, \beta \in I\}$  y  $\mathcal{B} = \{[x^\beta dx] : \beta \in I\}$  bases del álgebra de Milnor y la retícula de Brieskorn, respectivamente. Definimos  $\nu(x^\beta dx) := w_0(\beta_0 + 1) + w_1(\beta_1 + 1) - 1$  (para cualquier monomio  $x^\beta$  en general).

**Lema 2.3.2.** (ver [Varčenko-1982], pág. 495) Sea  $\omega_\beta := x^\beta dx_0 \wedge dx_1$  una 2-forma monomial, con  $[x^\beta] \in \mathcal{B}$ . Entonces, para todo  $t \in D_\eta^*$  se tiene que

$$s[\omega_\beta](t) = t^{\nu_1(x^\beta)} A_{0, \nu_1(x^\beta)}^{\omega_\beta}(t).$$

Sean  $C_{\alpha(m)} := \tilde{\partial}_t^{n-p} \mathcal{C}_{\alpha(m)}$ , donde  $\alpha(m)$  es el valor propio del operador  $t \cdot \partial_t$  respecto al vector propio  $z^m$  (básico de  $\mathcal{O}_f$ ),  $-1 < \alpha(m) \leq 0$ ,  $\alpha(m) =$

$a(m) = (n - p)$ ,  $n = 1$  y  $p = 0, 1$ . Usando el lema 2.3.2, si  $\alpha \in \mathbf{L}_j$ , entonces cada  $C_{\beta_j}$  se puede ver como un subespacio de  $C^\alpha$  tomando secciones vía el mapeo inyectivo:

$$s[\bullet] : \begin{array}{ccc} C_{\beta_j} & \hookrightarrow & C^\alpha \\ [\omega_{\beta_j}] & \mapsto & s[\omega_{\beta_j}], \end{array}$$

donde  $e^{-2\pi i a(m)} = \lambda_\alpha := e^{-2\pi i \alpha}$ .

Recordemos que  $\alpha(m) \in \mathbb{Q}$ .

Por lo tanto, si definimos  $\mathbf{I}_\alpha = \{\beta_j : -1 < \beta_j \leq 0, \lambda_{\beta_j} = \lambda_\alpha\}$  y  $C_\alpha = \bigoplus_{\beta_j \in \mathbf{I}_\alpha} C_{\beta_j}$ , entonces se tiene un isomorfismo de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales

$$s_\alpha := \bigoplus_{\beta_j \in \mathbf{I}_\alpha} s_j[\bullet] : C_\alpha \longrightarrow C^\alpha, \quad [\omega_{\beta_j}] \mapsto s[\omega_{\beta_j}]. \quad (2.4)$$

Ahora bien, se tienen  $\mathbb{C}$ -isomorfismos (ver [Hertling-2002-2], pág. 123)

$$\psi_\alpha : C^\alpha \longrightarrow H_{\lambda_\alpha}^1, \quad s(A_\alpha, \alpha) \mapsto A_\alpha. \quad (2.5)$$

En tal caso, escribiremos  $\mathcal{C}_\alpha$  haciendo referencia al espacio  $C^\alpha$ .

**Teorema 2.3.3.** (ver [Hertling-2002-2])

$$\mathcal{H}^{(0)} \cong H_0'' := \left\langle s[\omega]_0 = \sum t^\alpha A_\alpha^\omega : [\omega] \in \mathcal{H}^{(0)} \right\rangle,$$

donde  $s[\omega]_0$  es el germen de  $s[\omega]$  en el cero.

Usando los isomorfismos en (2.4) y (2.5) se obtiene una base para cada espacio  $H_{\lambda_\alpha}^1$  cuyos elementos se eligen de acuerdo con los siguientes criterios: sea  $a(m) \in sp(f)$ ,

- a) si  $a(m)$  tiene multiplicidad  $d$  (aparece  $d$  veces), entonces existen  $A_1, \dots, A_d$  los cuales forman parte de una base para  $H_{\lambda_{a(m)}}^1$ .
- b) si  $a(m), a(m) + 1, \dots, a(m) + (r - 1) \in sp(f)$ , entonces  $e^{-2\pi i(a(m)+l)} = \lambda_{a(m)}$  ( $l = 0, \dots, r$ ) y existen  $A_1, A_2, \dots, A_r$  los cuales forman parte de una base para  $H_{\lambda_{a(m)}}^1$ .

Una base para  $H_{\lambda_{a(m)}}^1$  se encuentra usando los básicos de los incisos a) y b) anteriores.

Sea  $\pi : \underline{H}^* \longrightarrow D_\eta^*$  el mapeo proyección del haz cohomológico de Milnor.

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

49

**Lema 2.3.3.** (ver [Zoladek-2006], pág. 147) Las clases  $A_\alpha(t) \in H^1(V_t, \mathbb{C})$  definen secciones horizontales con respecto a la conexión de Gauss-Manin, esto es, pertenecen al kernel de  $\partial_t$ . Más aún, las clases  $A_\alpha(t) \in H^1(V_t, \mathbb{C})$  pertenecen a los espacios propios del operador monodromía, correspondientes a los valores propios  $\{\lambda_\alpha := e^{-2\pi i \alpha}\}$ .

*Dem.* Primero, recordemos que  $\langle A_\alpha, \sigma(t) \rangle = a_\alpha \equiv \text{const.}$  Entonces,  $\partial_t A_\alpha(\sigma) = 0$ . De donde se sigue que  $A_\alpha(\sigma) \in \ker \partial_t$ .

Recordemos también que la monodromía actúa sobre las fibras del haz homológico y el haz cohomológico. Supongamos que  $M$  es la matriz asociada a la monodromía homológica  $h_{*,\gamma}$  en una base  $\{\delta_j\}$  de ciclos sobre  $\underline{H}$  y sea  $M_{ch}$  la matriz asociada a la monodromía cohomológica  $h_\gamma^*$  en la base dual  $\{\delta_j^*\}$ . Dado que los ciclos duales cumplen que  $\langle \delta_j^*, \delta_j \rangle \equiv \text{const.}$ , se sigue que  $M * \cdot M_{ch} = I \Rightarrow M_{ch} = (M^*)^{-1} = (M^T)^{-1}$ .

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 \langle M_{ch}(s[\omega]), \cdot \rangle &= \langle (M^T)^{-1}(s[\omega]), \cdot \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} t^{\alpha} (M^T)^{-1} A_{\alpha,k} \\
 &= \sum_{\alpha} (te^{2\pi i})^{\alpha} (M^T)^{-1} (M^T) A_{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha} (te^{2\pi i})^{\alpha} (M^T)^{-1} (M^T) A_{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha} t^{\alpha} e^{2\pi i \alpha} A_{\alpha} \\
 &\Rightarrow M_{ch}(A_{\alpha}) = (e^{-2\pi i \alpha})^{-1} A_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

□

La regla de Leibniz para  $\partial_t$  también es válida en  $H_0''$ , es decir,

$$\partial_t(g(t) \cdot \sigma) = g'(t) \cdot \sigma + g(t) \cdot \partial_t \sigma.$$

Dado que las secciones  $A_{\alpha}^{\omega}(t)$  son horizontales, es decir,  $\partial A_{\alpha}^{\omega}(t) = 0$ , aplicando la regla de Leibniz a secciones elementales  $t^{\alpha} A_{\alpha}^{\omega}(t)$  obtenemos la siguiente fórmula:

$$\partial_t(t^{\alpha} \cdot A_{\alpha}^{\omega}(t)) = \alpha t^{\alpha-1} A_{\alpha}^{\omega}(t). \quad (2.6)$$

Notemos que

$$\partial_t(t(\sigma)) - t(\partial_t(\sigma)) = (t' \cdot \sigma + t\partial_t(\sigma)) - t(\partial_t(\sigma)) = 1 \cdot \sigma = \sigma,$$

para toda sección  $\sigma \in H^1(V_t, \mathbb{C})$ . Por lo cual,

$$[\partial_t, t] := \partial_t \circ t - t \circ \partial_t = id. \quad (2.7)$$

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , la cual es una función de Morse. Notemos que

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x, y \rangle} \simeq \mathbb{C}\langle 1 \rangle \Rightarrow \mu(f) = 1.$$

Entonces, tenemos un ciclo evanescente (el cual vimos en la subsección 2.3.2, figura 2.2). Además, el único número espectral está dado por

$$\alpha = \frac{1}{2}(0 + 1) + \frac{1}{2}(0 + 1) - 1 = 0.$$

Así, la monodromía tiene un valor propio dado por  $\lambda_0 = e^{-2\pi i(0)} = 1$ . Esto quiere decir, que la matriz asociada a la monodromía es la identidad. Por lo cual, la acción de la monodromía  $h_{\gamma,*} : H_1(V_t, \mathbb{C}) \rightarrow H_1(V_t, \mathbb{C})$  está dada por  $h_{\gamma,*}(\delta(t)) = \delta(t)$ .

Varios objetos asociados a  $f$  con singularidad aislada, tales como número de Milnor, números espectrales y el operador monodromía, pueden ser calculados usando SINGULAR de la siguiente manera:

```
$ singular;
SINGULAR                                     / Development
A Computer Algebra System for Polynomial Computations / version 4.0.2
                                                0<
by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann \ Feb 2015
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern \

> LIB "spectrum.lib";
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/spectrum.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
> LIB "mondromy.lib";
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/mondromy.lib (4.0.1.0,Sep_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/linalg.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/general.lib (4.0.0.1,Jan_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/poly.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/inout.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/elim.lib (4.0.0.1,Jan_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/matrix.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/nctools.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/random.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/sing.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/primdec.lib (4.0.2.0,Apr_2015)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/absfact.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/triang.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
```

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

51

```
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/ring.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
> ring R=0, (x,y), ds;
> poly f=x2+y2;
> milnor(f);
1
> spectrumnd(f);
[1]:
_[1]=0
[2]:
1
> matrix M=monodromyB(f);
> print(M);
1
>
```

**Ejemplo 2.3.4.** Consideremos la curva elíptica cúspide  $f(x, y) = y^2 - x^3$ .

Denotemos por  $f_1$  la fibración de Milnor asociada a  $f$ , cuyas fibras están dadas por  $C_t := \{(x, y) : y^2 - x^3 = t, t \neq 0\}$ .

Notemos que las parciales  $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$  se anulan al mismo tiempo si y solo si  $x = y = 0$ . Por lo cual, el único punto singular de  $f$  es  $(0, 0)$  y así  $f(0, 0) = 0$  es el único valor no regular de  $f_1$ . Por la proposición 2.3.6, las fibras  $C_t$  son de codimensión compleja  $2 - 1 = 1$ , esto es,  $\dim_{\mathbb{C}}(C_t) = 2 - \text{codim}_{\mathbb{C}}(C_t) = 1$ . Las fibras  $C_t$  son 2-variedades reales con frontera regular.

Por otro lado, el álgebra de Milnor para  $f$  es

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle -3x^2, 2y \rangle} = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x^2, y \rangle} \cong \mathbb{C}\langle 1, x \rangle \Rightarrow \mu(f) = 2.$$

Usando la proposición 2.3.7, obtenemos que las fibras son del mismo tipo de homotopía que un buqué  $S^1 \vee S^1$ . Esto es, las fibras son toros (sin un punto) de género 1 (ver figura 2.5).

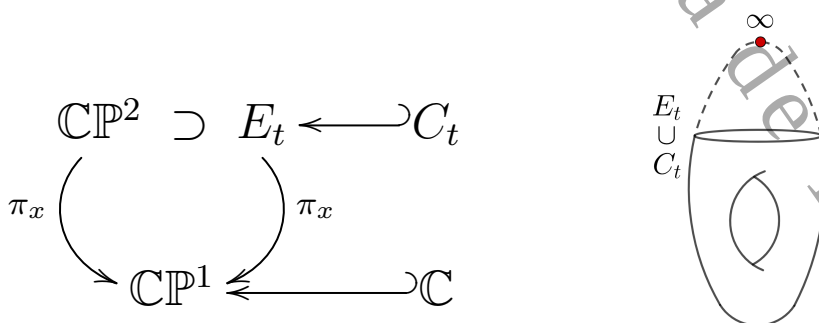


Figura 2.5: Curva Elíptica Cúspide.

Las fibras  $C_t$  son curvas en el plano afín  $\mathbb{C}^2$ . Como  $f$  no es homogéneo, para poder ver  $C_t \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$  en el plano proyectivo como una curva  $E_t$ , hacemos

que el polinomio  $f - t$  sea homogéneo para obtener un polinomio  $F$  de grado 3 como sigue:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &:= z^3 \left( f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - t \right) \\ &= z^3 \left( \frac{y^2}{z^2} - \frac{x^3}{z^3} - t \right) \\ &= zy^2 - x^3 - z^3 t. \end{aligned}$$

$E_t := \{(x : y : z) \mid F(x : y : z) = 0\}$  es una variedad proyectiva (compleja) 1-dimensional.

Ahora, para recuperar  $C_t$  de  $E_t$ , recordemos que en la sección 1.4 consideramos el abierto  $U_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$  de  $\mathbb{CP}^2$ , el cual cumple

$$E_t \cap U_2 \cong \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y, 1) = f(x, y) - t = 0\} = C_t.$$

Por otro lado, consideremos a  $\gamma = e^{2\pi i \theta}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , la circunferencia unitaria en  $\mathbb{C}$ . Sea  $h_\gamma$  el homomorfismo de monodromía asociado a  $f$  inducido por la circunferencia  $\gamma$  (ver figura 2.6).

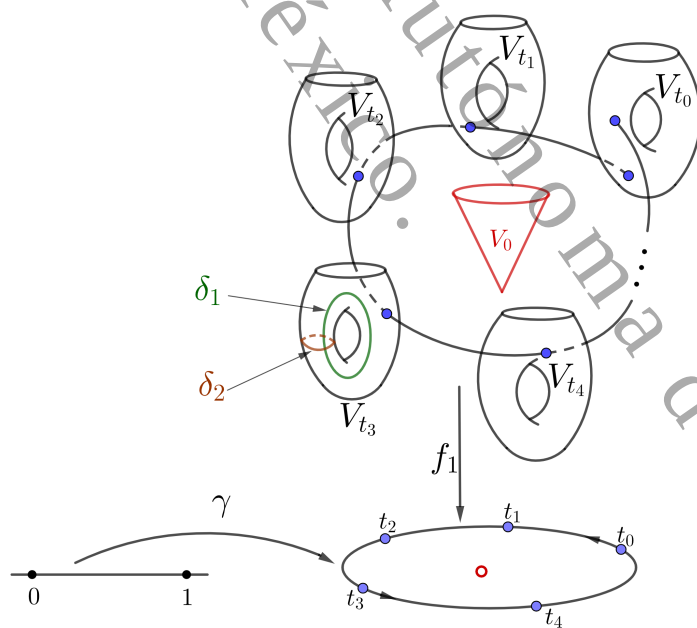


Figura 2.6: Acción del difeomorfismo monodromía  $h$  en las fibras de  $f_1$ .

Como  $\mu(f) = 2$ , se sigue que  $H^1(C_t, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2 \cong H_1(C_t, \mathbb{C})$ . Entonces,

$$H^1(C_t, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \langle [\eta_1], [\eta_2] \rangle \quad \text{y} \quad H_1(C_t, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \langle [\delta_1], [\delta_2] \rangle,$$

## 2.3. RETÍCULA DE BRIESKORN Y RESIDUOS DE LERAY

53

donde  $\eta_1, \eta_2$  son 1-formas y  $\delta_1, \delta_2$  son ciclos en la superficie  $V_{\gamma(s)}$  (ver figura 2.7).

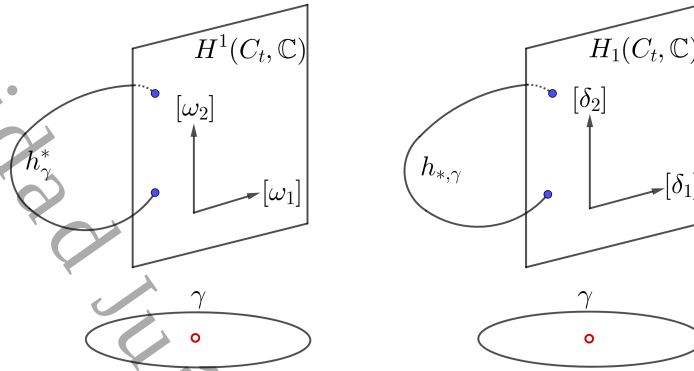


Figura 2.7: Monodromía comohológica  $h_\gamma^*$  y homológica  $h_{*, \gamma}$  de  $f_1$ .

Podemos tomar 2-formas monomiales  $\omega_1 = dx \wedge dy$  y  $\omega_2 = xdx \wedge dy$  los cuales vienen de la base  $\{1, x\}$  de  $\mathcal{O}_f$  y son tales que:  $[Res \omega_1] = [-\frac{1}{3x^2}]$  y  $[Res \omega_2] = [-\frac{x}{2y}]$  forman una base para  $H^1(C_t, \mathbb{C})$  (ver [Zoladek-2006], pág. 133).

Los números espectrales de  $f$  son  $sp(f) = \{-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$ , por lo cual, los valores propios de la monodromía son  $\lambda_1 = e^{-2\pi i(-\frac{1}{6})}$  y  $\lambda_2 = e^{-2\pi i(\frac{1}{6})}$ .

Por el lema 2.3.2:

$$s[\omega_1] = t^{\nu(\omega_1)} A_{\nu(\omega_1)}^{\omega_1}(t) = t^{-\frac{1}{6}} A_{-\frac{1}{6}}^{\omega_1}(t) \quad y \quad s[\omega_2] = t^{\nu(\omega_2)} A_{\nu(\omega_2)}^{\omega_2}(t) = t^{\frac{1}{6}} A_{\frac{1}{6}}^{\omega_2}(t)$$

son las secciones elementales. Observemos que:

$$A_{-\frac{1}{6}}^{\omega_1}(t) : H_1(V_t, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad y \quad A_{\frac{1}{6}}^{\omega_2}(t) : H_1(V_t, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

son transformaciones lineales dadas por

$$\langle A_{-\frac{1}{6}}^{\omega_1}(t), \delta_j \rangle = a_j \quad y \quad \langle A_{\frac{1}{6}}^{\omega_2}(t), \delta_j \rangle = b_j, \quad a_j, b_j \in \mathbb{C}, \quad j=1, 2.$$

Es decir,  $A_{-\frac{1}{6}}^{\omega_1}(t), A_{\frac{1}{6}}^{\omega_2}(t) \in (H_1(V_t, \mathbb{C}))^*$ .

Por el teorema 2.3.2, cualquier 2-forma  $\omega$  con residuo de Leray  $Res \omega = \eta$  cumple que

$$\langle s[\omega], \delta_j \rangle = \int_{\delta_j} \omega = a_j t^{-\frac{1}{6}} + b_j t^{\frac{1}{6}}, \quad j = 1, 2.$$

## 54 CAPÍTULO 2. RETÍCULA DE BRIESKORN Y CONEXIÓN

En particular:

$$\langle s[\omega_1], \delta_j \rangle = \int_{\delta_j} \omega_1 = a_j t^{-\frac{1}{6}} \quad y \quad \langle s[\omega_2], \delta_j \rangle = \int_{\delta_j} \omega_2 = b_j t^{\frac{1}{6}}.$$

Usando SINGULAR:

```
$ singular;
SINGULAR                                     / Development
A Computer Algebra System for Polynomial Computations / version 4.0.2
                                                O<

by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann \ Feb 2015
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern \

> LIB "spectrum.lib";
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/spectrum.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
> LIB "monodromy.lib";
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/monodromy.lib (4.0.1.0,Sep_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/linalg.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/general.lib (4.0.0.1,Jan_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/poly.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/inout.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/elim.lib (4.0.0.1,Jan_2014)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/matrix.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/nctools.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/random.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/sing.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/primdec.lib (4.0.2.0,Apr_2015)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/absfact.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/triang.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
// ** loaded /usr/bin/./share/singular/LIB/ring.lib (4.0.0.0,Jun_2013)
> ring R=0, (x,y), ds;
> poly f=y2-x3;
> milnor(f);
2
> spectrumnd(f);
[1]:
_[1]=-1/6
_[2]=1/6
[2]:
1,1 // Multiplicidad de los números espectrales.
> matrix M=monodromyB(f);
> print(M);
7/6, 0,
0, 5/6
>
```

Primero mandamos a llamar las librerías **LIB “spectrum.lib”** para calcular el espectro y **LIB “monodromy.lib”** para la monodromía.

Seguidamente declaramos: el anillo  $R$  (de característica 0 como los complejos) en las variables  $x$ ,  $y$ ; el orden monomial  $ds$ ; y el polinomio  $f$  de interés.

Así, los comandos **milnor(f)**, **spectrumnd(f)** y **monodromyB(f)** nos calculan el número de Milnor, los números espectrales y el operador monodromía asociados a  $f$ , respectivamente.

## Capítulo 3

# Mapecto de periodos

Recordemos que para un germen de singularidad aislada casihomogéneo de curva plana  $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  se tienen los siguientes objetos, como se vieron en las secciones del capítulo anterior:

- La retícula de Brieskorn  $H_0''$ .
- El espacio de localización  $\mathcal{M} := H_0'' \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ .
- La conexión de Gauss-Manin  $\partial_t$ .
- El operador multiplicación por  $t$ .
- Las filtraciones  $V^\bullet$  y  $V^{>\bullet}$ .
- El haz homológico  $\underline{H} = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H_1(V_t, \mathbb{C})$ .
- El haz cohomológico  $\underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H^1(V_t, \mathbb{C})$ .
- Los espacios propios de la transformación de Monodromía que son isomorfos al espacio de secciones elementales:  $H_{\lambda_\alpha}^1 \cong C_\alpha$ .

En este capítulo presentamos primero la manera de pegar las fibraciones de Milnor para una deformación  $\mu$ -constante  $F_\lambda$  y, con esto, los objetos correspondientes que se desarrollaron en el capítulo anterior, tales como:  $\mathcal{M}(\lambda)$ ,  $V^\bullet(\lambda)$ ,  $V^{>\bullet}(\lambda)$ ,  $\underline{H}(\lambda)$ ,  $\underline{H}^*(\lambda)$ ,  $H_{\lambda_\alpha}^1(\lambda)$ ,  $C_\alpha(\lambda)$ ,  $H_0''(\lambda)$ , etc. Una tarea que nos interesa es “pegar” dichos objetos para formar familias unificadas.

Después de esto, describimos el algoritmo para el mapeo de periodos y damos un ejemplo explícito.

El presente capítulo es basado en el cap. *III* de [Kulikov-1998].

### 3.1. Pegado de fibraciones de Milnor

Un primer paso que es la base de los “pegados subsecuentes” y que a continuación se muestra, es cómo conseguir un *buen representante* de la deformación  $F_\lambda$  de  $f$  y relacionarlo con la fibración de Milnor.

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de singularidad aislada en 0. Consideremos  $F_\lambda$  una deformación de  $f$  parametrizada por  $Y \subset \mathbb{C}^k$ .

Supongamos que

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \quad \chi &\longrightarrow S \times Y \\ (x, \lambda) &\longmapsto (F_\lambda(x), \lambda) \end{aligned}$$

es un *buen representante* de la deformación para la hipersuperficie  $(f^{-1}(0), 0)$ , donde  $S = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$ ,  $Y = \{\lambda \in \mathbb{C}^k : |\lambda| < \delta'\}$  y  $\chi = \{(x, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times Y : |x| < \epsilon, |F_\lambda(x)| < \delta\}$  (ver [Looijenga-1984]).

**Teorema 3.1.1.** (Varchenko A. N., ver [Kulikov-1998], pág. 132) *El espectro es invariante bajo una deformación de singularidad aislada de hipersuperficie con número de Milnor constante (deformación  $\mu(f)$ -constante).*

A continuación, se muestra una manera de conseguir un *buen representante* de una deformación de  $f$ .

Se quiere considerar o analizar los objetos correspondientes para las singularidades de una deformación  $\mu(f)$ -constante  $F_\lambda$  de  $f$  y “pegarlos” para formar una familia unificada.

Ahora bien, sea  $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $t = F(x, \lambda) =: F_\lambda(x)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  una deformación  $\mu(f)$ -constante para la singularidad  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  con espacio base  $Y = \mathbb{C}^k$  suave. Tenemos por lo tanto, una familia  $k$ -paramétrica de gérmenes de singularidad aislada de funciones holomorfas dadas por:

$$\begin{aligned} F_\lambda : \quad (\mathbb{C}^2 \times \{\lambda\}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, \lambda) &\longmapsto F_\lambda(x), \end{aligned}$$

con número de Milnor  $\mu(F_\lambda) = \mu(f)$  constante para toda  $y$  en una vecindad  $S \subset \mathbb{C}^k$  del 0, donde  $F(x, 0) = F_0(x) = f(x)$  (esto es, tenemos a  $f$  inmersa en una familia  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}^k}$ ).

## 3.1. PEGADO DE FIBRACIONES DE MILNOR

57

Ahora bien,  $(0, \lambda)$  es una singularidad aislada para  $F_\lambda$ . Por lo tanto, por el teorema de la fibración de Milnor, para cada  $\lambda \in S \subset \mathbb{C}^k$  existen  $\eta(\lambda), \epsilon(\lambda) > 0$  (los cuales se eligen por separado) tales que el germen de singularidad aislada  $F_\lambda$ ,  $\lambda$  fija, tiene una fibración de Milnor asociada

$$F_\lambda := F_\lambda|_{X(\lambda)} : X(\lambda) \longrightarrow D_\eta^*,$$

en la bola de Milnor  $X(\lambda) := B_{\epsilon(\lambda)} \cap F_\lambda^{-1}(D_\eta^*)$  y  $B_\epsilon(\lambda) \subset \mathbb{C}^2 \times \{\lambda\}$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el mismo disco agujereado  $D_\eta^*$  independientemente de  $\lambda \in S$ , esto es, para toda fibración de Milnor.

Cada  $F_\lambda$  tiene sus objetos correspondientes:  $\mathcal{M}(\lambda), V^\beta(\lambda), V^{>\beta}(\lambda), \underline{H}(\lambda), \underline{H}^*(\lambda), H_\alpha^1(\lambda), C_\alpha(\lambda)$ , etc, en el disco  $D_\eta^*$ .

Una tarea fundamental es pegar las variedades  $X(\lambda)$  (y en general, los espacios  $\underline{H}$ , etc) para formar una fibración (o bien, haces vectoriales) uniforme sobre  $D_\eta^* \times S \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$ . Veamos lo que enmarca el pegado de fibraciones de Milnor.

Bien, considérese la fibración de Milnor de cada germen  $F_\lambda$ , eligiendo  $\eta := \eta(\lambda)$  (por lo anterior, que sea el mismo) y  $\epsilon := \epsilon(\lambda)$ , dependiente de  $\lambda$ , suficientemente pequeños. En estos términos preservamos la siguiente notación:

- $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq \epsilon\}$ ,
- $D_\eta^* = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \eta, t \neq 0\}$ ,
- $T_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C}^k : |\lambda| \leq \delta\}$ .

A continuación, se precisa en qué sentido pegaremos las fibraciones de Milnor de cada  $F_\lambda$ , salvo homotopía (o bien desde un enfoque cohomológico, si se consideran los espacios  $H(\lambda)$ ). Para comenzar, se tienen las siguientes observaciones:

- Las fibras de  $F_\lambda$  las denotemos por  $X_t(\lambda) := \{x : F_\lambda(x) = t\}$ . Se elige  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $\epsilon' \in (0, \epsilon)$ , la frontera  $\partial B_{\epsilon'}$  interseca transversalmente a la hipersuperficie  $X_0(\lambda)$  y 0 es el único punto singular de  $f$  en  $B_{\epsilon'}$ .
- Elegimos  $\eta > 0$  y  $\delta > 0$  tales que:
  1. para cualquier  $\lambda_0 \in D_\delta$ , la función  $F_{\lambda_0}$  no tiene puntos críticos en  $B_\epsilon$  distintos del 0, lo cual es posible debido a que  $F_{\lambda_0}$  es un germen de singularidad aislada de curva plana.

2. para cada  $\lambda_0 \in D_\delta$  y  $t \in D_\eta^*$ , la esfera  $S_\epsilon$  interseca transversalmente a la hipersuperficie  $X_t(\lambda_0) = F_{\lambda_0}^{-1}(t)$ , es decir, para cualquier punto  $x \in S_\epsilon \cap F_{\lambda_0}^{-1}(t)$  los vectores tangentes de  $S_\epsilon$  y  $F_{\lambda_0}^{-1}(t)$  en  $x$  generan  $\mathbb{C}^2$  (ver figura 3.1).

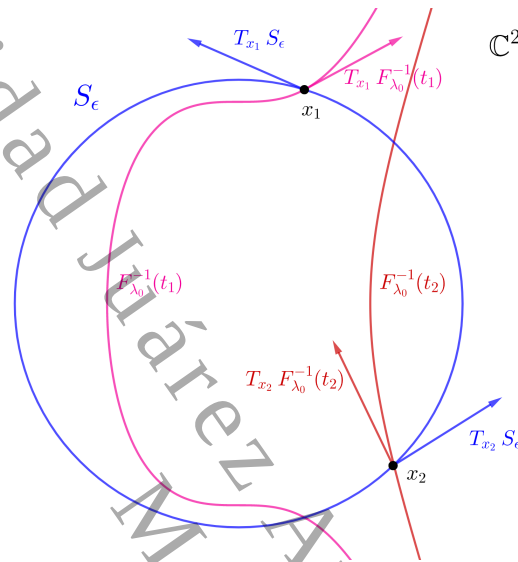


Figura 3.1

Aquí,  $0 < \epsilon \ll 1$  no depende de  $\lambda_0$ , i.e.,  $S_\epsilon \pitchfork F_{\lambda_0}^{-1}(t)$  para todo  $\lambda_0 \in T_\delta$  y para todo  $t \in D_\eta^*$ .

3. Definimos  $\chi = F^{-1}(D_\eta^* \times T_\delta) \cap (B_\epsilon \times T_\delta)$ . Tenemos que

$$B_\epsilon \times T_\delta = \bigsqcup_{\lambda \in T_\delta} B_\epsilon \times \{\lambda\}.$$

4. Para el mapeo holomorfo

$$F : \chi \longrightarrow D_\eta^* \times T_\delta. \quad (3.1)$$

tenemos una fibración  $C^\infty$  localmente trivial sobre  $D_{\eta\lambda_0}^* \times T_\delta$

$$F' : \chi^* \longrightarrow D_\eta^* \times T_\delta.$$

Por lo tanto, tenemos la familia de fibraciones

$$F_\lambda : \chi(\lambda) \longrightarrow D_{\eta\lambda_0}^* \times \{\lambda\}, \quad (3.2)$$

donde  $\chi(\lambda) := F^{-1}(t, \lambda) = \bigsqcup_{\lambda \in T_\delta} F_\lambda^{-1}(t)$  (ver figura 3.2).

## 3.1. PEGADO DE FIBRACIONES DE MILNOR

59

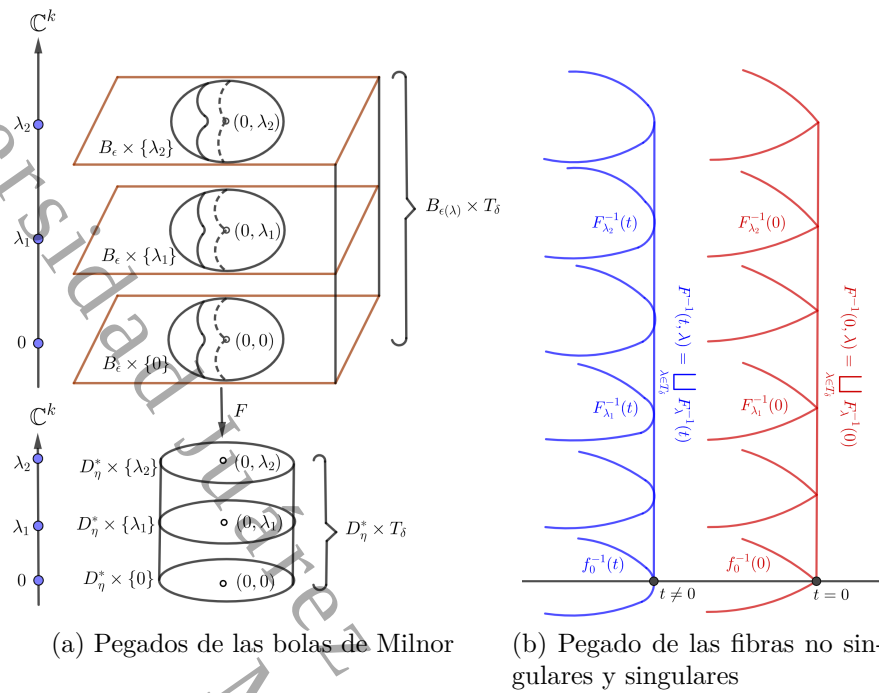


Figura 3.2

Finalmente, para construir la fibration de Milnor  $X(\lambda) \rightarrow D_\eta^*$  del germen de singularidad aislada  $F_\lambda : (\mathbb{C}^2 \times \{\lambda\}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , por el teorema de la fibration de Milnor, tomamos  $0 < \delta(\lambda) < \epsilon(\lambda) < 1$  y consideramos la restriccion de  $F$  a

$$F^{-1}(D_{\eta(\lambda)}^* \times \{\lambda\}) \cap (B_{\epsilon(\lambda)} \times \{\lambda\}) \cap \chi(\lambda) \subset \chi(\lambda),$$

esto es,

$$F_1 : F^{-1}(D_{\eta(\lambda)}^* \times \{\lambda\}) \cap (B_{\epsilon(\lambda)} \times \{\lambda\}) \cap \chi(\lambda) \rightarrow D_{\eta(\lambda)}^* \times \{y\} \rightarrow D_{\eta(\lambda)}^*.$$

Así, recuperamos un buen representante para el germen de singularidad aislada  $F_\lambda : (\mathbb{C}^2 \times \{\lambda\}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , para todo  $\lambda \in T_\delta$ .

Para cada  $t \in D_\eta^*$ ,  $\lambda \in T_\delta$  definimos

$$X_t(\lambda) = F_\lambda^{-1}(t), \quad \chi_t(\lambda) = F^{-1}(t, \lambda).$$

Lo anterior se puede resumir en el siguiente resultado (cf. [Looijenga-1984]).

**Proposición 3.1.1.** *Existe un buen representante*

$$\begin{aligned}\tilde{F}: \quad \chi &\longrightarrow D \times \mathbf{T} \\ (x, \lambda) &\longmapsto (F_\lambda(x), \lambda)\end{aligned}$$

de la deformación para la hipersuperficie  $(f^{-1}(0), 0)$ , donde

$$D = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \eta\}, \quad \mathbf{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}^k : |\lambda| < \delta\},$$

$$\chi = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \times Y : |x| < \epsilon, |F_\lambda(x)| < \delta\},$$

con  $\eta, \delta, \epsilon > 0$  suficientemente pequeños.

**Teorema 3.1.2.** (ver [Kulikov-1998], pág. 141) *Se tienen encajes de fibras  $X_t(\lambda) \subset \chi_t(\lambda)$  que son equivalencias homotópicas. En particular, se tiene que los grupos de homología y cohomología de las fibras  $X_t(\lambda)$  y  $\chi_t(\lambda)$  son isomorfos.*

**Observación 3.1.1.** La proposición 3.1.1 permite “pegar” las fibraciones de Milnor de cada germen de singularidad aislada dado por los mapeos holomorfos  $F_\lambda$ , ya que del teorema anterior se sigue que desde el punto de vista homotópico, y por ende, (co)-homológico, se puede considerar a  $F$ , dado en la ecuación 3.1, como una familia de fibraciones de Milnor  $\{X(\lambda) \rightarrow D_\eta^*\}$  (variando holomórficamente) de las singularidades aisladas  $F_\lambda$ .

## 3.2. Fibración cohomológica

Usando la fibración  $C^\infty$  localmente trivial  $F_1 : \chi^* \rightarrow D_{\eta_\lambda}^* \times T_\delta$  construida en la sección anterior, podemos definir una fibración cohomológica sobre  $D_{\eta_\lambda}^* \times T_\delta$ . En efecto,

$$\underline{\mathcal{H}}^* := \bigsqcup_{(t, \lambda) \in D_{\eta_\lambda}^* \times T_\delta} H^1(\chi_{t, \lambda}, \mathbb{C}),$$

donde  $\chi_{t, \lambda} = F^{-1}(t, \lambda)$  es la fibra del mapeo  $F$ , de acuerdo con el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \chi_t(\lambda) & \subset & \chi(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow F \\ & & D_{\eta(\lambda)}^* \times \{\lambda\} \\ & & \downarrow \\ & & D_{\eta(\lambda)}^* \end{array} \quad \in$$

### 3.3. MAPEO DE PERIODOS

61

Por el teorema 3.1, como las fibras  $X_t(\lambda)$  y  $\chi_t(\lambda)$  son homotópicas equivalentes, se sigue que

$$H^1(\chi_{t,\lambda}, \mathbb{C}) \cong H^1(X_t(\lambda), \mathbb{C}),$$

para toda  $\lambda \in T_\delta$ ,  $t \in D_{\eta_\lambda}^*$ . Luego,  $\underline{H}^*|_{D_{\eta_\lambda}^* \times \{\lambda\}} \cong \underline{H}^*(\lambda)$ .

Aquí,  $\underline{H}^*(\lambda) = \bigsqcup_{t \in D_{\eta(\lambda)}^*} H^1(X_t(\lambda), \mathbb{C})$  es la fibración cohomológica para la singularidad  $F_\lambda$ .

Análogamente se construye el fibrado vectorial holomorfo en homología

$$\underline{H} := \bigsqcup_{(t,\lambda) \in D_{\eta_\lambda}^* \times T_\delta} H_1(\chi_{t,\lambda}, \mathbb{C}),$$

tal que  $\underline{H}|_{D_{\eta_\lambda}^* \times \{\lambda\}} \cong \underline{H}(\lambda)$ .

De lo anterior, por la observación 3.1.1 tenemos el “pegado” de los haces vectoriales en (co)homología de Milnor asociados con cada germen  $F_\lambda$ .

### 3.3. Mapeo de periodos

En esta sección daremos algunos resultados necesarios para poder presentar el algoritmo que describe la manera de dar el objeto de estudio de este trabajo, el mapeo de periodos para una deformación  $\mu(f)$ -constante de un germen de función holomorfa  $f$  con singularidad aislada en el origen. Como ejemplo en específico, desarrollaremos el mapeo de periodos para la familia de curvas elípticas simples  $z^2 - yx(y - x)(y - ax)$  (ver [Kulikov-1998] pág. 159-163).

Sea  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germen de curva plana casihomogénea con singularidad aislada. Supongamos que  $F_\lambda$  es la deformación  $\mu$ -constante para  $f$  con base  $Y \subset \mathbb{C}^k$ , con buen representante como en la sección 3.1.

Ahora bien, se tiene el hecho de que existe una identificación canónica  $\iota_\lambda : \mathcal{M}(\lambda) \approx \mathcal{M}(\lambda_0)$ , variando los puntos de  $\lambda \in \mathbf{T}_\delta$ , y asumiendo que  $\lambda_0$  es un punto “base” elegido, ver [Kulikov-1998, pág. 152]. Asimismo, podemos asumir que “los objetos  $C_\beta$ ,  $\mathcal{V}^\beta$ ,  $\mathcal{V}^{>-1}$  son canónicamente isomorfos” (ver [Hertling-2002-2]), lo que nos permite considerar espacios fijos, salvo isomorfismo:

$$C_\beta := C_\beta(\lambda_0), \mathcal{V}^\beta := \mathcal{V}^\beta(\lambda_0), \mathcal{V}^{>-1} := \mathcal{V}^{>-1}(\lambda_0) \text{ y } \mathcal{M} := \mathcal{M}(\lambda_0).$$

Así, sin perder generalidad, para cada  $\lambda \in \mathbf{T}_\delta$ , consideramos la retícula de Brieskorn inmersa en  $\mathcal{M}$ :

$$H_0''(\lambda) \subset \mathcal{M}(\lambda) \approx \iota_\lambda(\mathcal{M}(\lambda)) = \mathcal{M}$$

asociada al germen  $F_\lambda$ . De esta manera obtenemos una familia de retículas  $\{H_0''(\lambda) \subset \mathcal{M}\}_{\lambda \in \mathbf{T}_\delta \subset \mathbb{C}^k}$ .

**Proposición 3.3.1.**  $\partial_t^2 t^2 = \frac{3}{4}id$  y  $\partial_t^2 t = \frac{3}{2}\partial_t$  en  $C_\alpha$ .

*Demostración.* Por la ecuación 2.7 sabemos que  $\partial_t t = id + t\partial_t$ , entonces:

1.  $(\partial_t t)^2 = (id + t\partial_t)(id + t\partial_t)$ . Aplicando esto a una sección elemental  $t^\alpha A_\alpha(t) \in C_\alpha$  obtenemos

$$\begin{aligned} (\partial_t t)^2 (t^\alpha A_\alpha(t)) &= (id + t\partial_t)((id + t\partial_t)(t^\alpha A_\alpha(t))) \\ &= (id + t\partial_t)(id(t^\alpha A_\alpha(t)) + t\partial_t(t^\alpha A_\alpha(t))) \\ &= (id + t\partial_t)(t^\alpha A_\alpha(t) + \alpha t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= (id + t\partial_t)((\alpha + 1)t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= (\alpha + 1)(id + t\partial_t)(t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= (\alpha + 1)^2 t^\alpha A_\alpha(t). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\partial_t t)^2 = (\alpha + 1)^2 id \text{ en } C_\alpha.$$

2. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 t^2 &= \partial_t(\partial_t(t(t))) \\ &= \partial_t((\partial_t t)(t)) \\ &= \partial_t((id + t\partial_t)(t)) \\ &= \partial_t(t + t\partial_t t) \\ &= \partial_t t + \partial_t t \partial_t t \\ &= \partial_t t + (t\partial_t)^2. \end{aligned}$$

Usando el inciso 1 y lo anterior en secciones elementales  $t^\alpha A_\alpha(t) \in C_\alpha$  obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t^2 t^2 (t^\alpha A_\alpha(t)) &= (\partial_t t + (t\partial_t)^2)(t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= \partial_t t(t^\alpha A_\alpha(t)) + (\partial_t t)^2(t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= \partial_t(t^{\alpha+1} A_\alpha(t)) + (\alpha + 1)^2 id(t^\alpha A_\alpha(t)) \\ &= (\alpha + 1)t^\alpha A_\alpha(t) + (\alpha + 1)^2 t^\alpha A_\alpha(t) \\ &= ((\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2)t^\alpha A_\alpha(t). \end{aligned}$$

Entonces,  $\partial_t^2 t^2 = ((\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2)id$  en  $C_\alpha$ .

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

63

3. Se tiene que,  $\partial_t^2 t = \partial_t (\partial_t t) = \partial_t (id + t\partial_t)$ . Aplicando esto a secciones elementales  $t^\alpha A_\alpha(t) \in C_\alpha$ ,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 t (t^\alpha A_\alpha(t)) &= \partial_t (id + t\partial_t) (t^\alpha A_\alpha(t)) \\
 &= \partial_t (id (t^\alpha A_\alpha(t)) + t\partial_t (t^\alpha A_\alpha(t))) \\
 &= \partial_t (t^\alpha A_\alpha(t) + t (\alpha t^{\alpha-1} A_\alpha(t))) \\
 &= \partial_t (t^\alpha A_\alpha(t) + \alpha t^\alpha A_\alpha(t)) \\
 &= \partial_t (t^\alpha A_\alpha(t)) + \partial_t (\alpha t^\alpha A_\alpha(t)) \\
 &= \alpha t^{\alpha-1} A_\alpha(t) + \alpha^2 t^{\alpha-1} A_\alpha(t) \\
 &= (\alpha + \alpha^2) t^{\alpha-1} A_\alpha(t) \\
 &= \frac{\alpha + \alpha^2}{\alpha} \alpha t^{\alpha-1} A_\alpha(t) \\
 &= (\alpha + 1) \partial_t (t^\alpha A_\alpha(t)).
 \end{aligned}$$

Entonces,  $\partial_t^2 t = (\alpha + 1) \partial_t$  en  $C_\alpha$ .

□

Supongamos que  $f$  es casihomogéneo de grado 1 con pesos  $w = (w_0, w_1)$ . Consideremos las 2-formas holomorfas

$$\omega = x^k dx = x_0^{k_0} x_1^{k_1} dx_0 \wedge dx_1$$

y definamos

$$\nu(\omega) = \alpha(k) - 1 = w_0(k_0 + 1) + w_1(k_1 + 1) - 1.$$

**Lema 3.3.1.** (ver [Kulikov-1998], pág. 148) Las secciones geométricas  $s[\omega]$  son homogéneas, es decir,  $s[\omega] =: s(\omega, \nu(\omega)) \in C_{\nu(\omega)}$ .

**Teorema 3.3.1.** (ver [Kulikov-1998], pág. 147) Sea  $F(x, \lambda)$  una deformación  $\mu$ -constante de la singularidad  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $\lambda \in T_\delta \subset \mathbb{C}^k$ , y  $\omega = g(x, \lambda) dx_0 \wedge dx_1$  una 2-forma holomorfa. Si  $\omega$  no depende de  $\lambda$ , entonces

$$\partial_\lambda s[\omega] = -\partial_t s \left[ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \omega \right] \quad (3.3)$$

y

$$\partial_{\lambda_i} s(\omega, \alpha) = -\partial_t s \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda} \omega, \alpha + 1 \right). \quad (3.4)$$

**Lema 3.3.2.** (ver [Kulikov-1998], pág. 148) Sea  $\omega = x^k dx$  y  $M = x^l = x_0^{l_0} x_1^{l_1}$  un monomio de grado  $\nu(M) = w_0 l_0 + w_1 l_1 =: b(M) + 1$ . Entonces,  $s[M\omega] = s(M\omega, \nu(M\omega))$ , donde  $\nu(M\omega) = \nu(M) + \nu(\omega) = b(M) + 1 + \nu(\omega)$ .

Recordemos que una deformación  $\mu(f)$ -constante para  $f$  está dada por

$$F_\lambda(x) = f(x) + \sum_{i=k}^{\mu(f)} \lambda_i x^{l_i},$$

donde  $\{x^{l_i} : i = 1, \dots, \mu(f)\}$  forman una base de  $\mathcal{O}_f$  y  $\nu(x^{l_i}) \geq 1$ , para todo  $i \geq k \geq 1$ .

Podemos aplicar el colorario 3.3.1 a las formas monomiales  $\omega = x^k dx$  y los monomios  $x^{l_i}$  de la deformación  $\mu(f)$ -constante  $F_\lambda$  obteniendo la ecuación:

$$\partial_\lambda s(\omega, \alpha)(\lambda) = -\partial_t s(x^{l_i} \omega, \alpha + 1)(\lambda).$$

Iterando la ecuación anterior obtenemos que:

$$\partial_\lambda^j s(\omega, \alpha)(\lambda) = (-1)^j \partial_t^j s((x^{l_i})^j \omega, \alpha + j)(\lambda). \quad (3.5)$$

**Proposición 3.3.2.** (ver [Kulikov-1998], pág. 149) Sea  $f$  un germen casi-homogéneo. Consideremos la deformación  $\mu(f)$ -constante de  $f$  dada en la ecuación 1.3 y las formas monomiales  $\omega = x^k dx$ . Entonces, para las secciones geométricas  $s[\omega]$  se tiene una descomposición en serie de Taylor de la forma

$$s(\omega, \alpha)(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{N}_+^2} (-\partial_t)^{|j|} s((x^{l_i})^j \omega)(0) \frac{\lambda^j}{j!},$$

donde  $|j| = j_0 + j_1$  y  $j! = j_0! j_1!$ .

**Lema 3.3.3.** (ver [Kulikov-1998], pág. 153)

$$\mathcal{V}^0 \approx \mathcal{V}^0(\lambda) \subset H_0''(\lambda) \approx H_0''(\lambda_0) \subset \mathcal{V}^{>-1}.$$

Del lema anterior se sigue que  $\frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0} \subset \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0}$ .

En nuestro caso, trabajaremos sobre el espacio  $\mathcal{V} := \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0}$ .

**Lema 3.3.4.** (ver [Kulikov-1998], pág. 153)

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(\lambda_0)}{\mathcal{V}^0} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0(\lambda)} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0} = \frac{1}{2}(\mu - \mu_1),$$

donde  $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}} C_n$ .

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

65

Por el lema 3.3.3 se tienen los encajamientos lineales (inducidos por los isomorfismos  $\iota_\lambda: \frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0(\lambda)} \hookrightarrow \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0}$ ). Además, del lema 3.3.4, si  $k_0 = \frac{1}{2}(\mu - \mu_1)$ , salvo un isomorfismo, los cocientes de la forma  $\frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0(\lambda)}$  permiten considerar la variedad Grassmaniana  $\Pi' := \text{Grass}(k_0, \mathcal{V})$  de  $k_0$ -subespacios de  $V$ . En este sentido  $\Pi'$  es llamado el “espacio de periodos” para la familia de deformación  $\mu$ -constante  $F_\lambda$ .

**Definición 3.3.1.** El mapeo de periodos asociado con la deformación  $f_\lambda$  con base  $Y \subset \mathbb{C}^k$  de la singularidad  $f$  es definido como

$$\begin{aligned} \Phi: Y &\longrightarrow \Pi' \\ \lambda &\longmapsto \frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0(y)} \approx \frac{H_0''(\lambda_0)}{\mathcal{V}^0(\lambda_0)}. \end{aligned}$$

Es posible encontrar un espacio  $\Pi \subset \Pi'$  que también contiene todas las retículas. Para ello, consideremos ahora a  $sp(f) \subset (-1, 1)$  el conjunto de números espectrales asociado a la singularidad  $f$ . Sean

$$\alpha_1 := \min\{\alpha \in sp(f)\} \text{ y } \alpha_\mu := \max\{\alpha \in sp(f)\}.$$

**Lema 3.3.5.** (ver [Kulikov-1998], pág. 153)

$$\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^{>\alpha_\mu-1} \subset H_0''(\lambda) \subset \mathcal{V}^{\alpha_1} \subset \mathcal{V}^{>-1}.$$

Por el lema anterior, si  $k_1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(\lambda_0)}{\mathcal{V}^{>\beta_0-1}(\lambda_0)}$ , entonces podemos considerar la Grassmaniana  $\Pi := \text{Grass}\left(k_1, \frac{\mathcal{V}^{\alpha_1}}{\mathcal{V}^{>\beta_0-1}}\right) \subset \Pi'$ , que contiene todas las retículas.

Entonces, para calcular el mapeo de periodos  $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \Pi$  seguimos el siguiente proceso:

1. Calcular  $sp(f)$  y considerar  $\alpha_1 := \min\{\alpha \in sp(f)\}$ ,  $\alpha_\mu := \max\{\alpha \in sp(f)\}$ .
2. Considerar el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V := \frac{\mathcal{V}^{\alpha_1}}{\mathcal{V}^{>\alpha_\mu-1}} = \bigoplus_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_\mu-1} C_\alpha$ .
3. Dado  $\lambda \in T_\delta$ , considerar 2-formas  $\omega_1(\lambda), \omega_2(\lambda), \dots, \omega_\mu(\lambda)$  y sus secciones geométricas correspondientes  $s[\omega_1(\lambda)], s[\omega_2(\lambda)], \dots, s[\omega_\mu(\lambda)]$  tales que

$$\frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^0} = \langle s[\omega_1(\lambda)], s[\omega_2(\lambda)], \dots, s[\omega_\mu(\lambda)] \rangle.$$

4. Encontrar ecuaciones diferenciales tales que las funciones vectoriales  $s[\omega_j](\lambda)$  sean sus soluciones y, resolviendo dichas ecuaciones, obtener las funciones vectoriales  $s[\omega_j](\lambda)$ .
5. Si se tienen las formas diferenciales como en el punto 4), entonces las coordenadas de Plücker asociadas a los puntos que corresponden a los espacios cociente  $\frac{H_0''(\lambda)}{\mathcal{V}^{>\beta_1}(\lambda)}$  como puntos en  $\Pi$ , se deben expresar como funciones de  $\lambda \in \mathbf{T}_\delta$ , lo cual determinará una fórmula explícita para el mapeo de periodos.

**Proposición 3.3.3.** (ver [Kulikov-1998], pág. 120) Sea  $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$  casi-homogéneo de tipo  $(w_0, w_1)$ . Supongamos que  $\{m_l := x_0^{l_0} x_1^{l_1} : l = 1, \dots, \mu(f)\}$  es una base para el álgebra de Milnor, entonces  $\{\omega_l := m_l dx_0 dx_1 : l = 1, \dots, \mu(f)\}$  forman una base para  $H_0''$  y además, los números espectrales de  $f$  están dados por

$$\nu(\omega_l) = w_0(l_0 + 1) + w_1(l_1 + 1) - 1, \quad l = 1, \dots, \mu(f). \quad (3.6)$$

**Observación 3.3.1.** Consideremos una familia de gérmenes de singularidad definida por

$$f_a(x, y, z) = z^2 - yx(y - x)(y - ax) = z^2 - g_a(x, y), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Los elementos de esta familia se conocen como singularidades elípticas simples.

Notemos que si  $x = 1$ , entonces recuperamos la familia de curvas elípticas en su forma normal de Legendre:

$$h_a(x, y, z) = z^2 - y(y - 1)(y - a) = z^2 - g'_a(x, y), \quad a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}.$$

Por otro lado, recordemos del ejemplo 1.10.2 que una deformación  $\mu(f)$ -constante para el germen  $f = x^4 + y^4$  está dada por

$$F_\lambda(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2.$$

**Lema 3.3.6.** (ver [Kulikov-1998], pág. 160)  $f_a$  es  $R$ -equivalente a  $F_\lambda(x, y)$  para  $\lambda = 4a - 2$ .

El mapeo de periodos para la familia de curvas elípticas simples  $f_a$  será el mapeo de periodos para la deformación  $\mu(f)$ -constante  $F_\lambda$ .

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

67

**Ejemplo 3.3.1.** Vimos también en el ejemplo 1.10.2 que una base para el álgebra de Milnor de  $F_\lambda$  es

$$\mathcal{B} = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, xy^2, x^2y, x^2y^2\},$$

la cual nos induce una base para la retícula de Brieskorn dada por:

$$\mathcal{B}' = \{x^k y^l dx \wedge dy : 0 \leq k, l \leq 2\} = \{x^k y^l \omega_0 : 0 \leq k, l \leq 2, \omega_0 := dx \wedge dy\}.$$

Usando la ecuación (3.6), los números espectrales de  $f$  son:

$$\begin{aligned} sp(f) &= \left\{ \nu(x^k y^l \omega_0) = \frac{1}{4}(k+1) + \frac{1}{4}(l+1) - 1 : x^k y^l \omega_0 \in \mathcal{B}' \right\} \\ &= \left\{ \frac{(k+1) + (l+1) - 4}{4} : 0 \leq k, l \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Denotemos por  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{4}$ ,  $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ ,  $\alpha_7 = \alpha_8 = \frac{1}{4}$  y  $\alpha_9 = \frac{1}{2}$  los números espectrales ordenados de menor a mayor. Entonces, el mínimo y máximo número espectral son:  $\alpha_1 := -\frac{1}{2}$  y  $\alpha_9 = \frac{1}{2}$ . Sean  $\beta_i^k := \alpha_i - k$  y  $\gamma_i^k := \alpha_i + k$ , con  $i = 1, \dots, 9$  y  $k \in \mathbb{N}$  (ver figura 3.3).

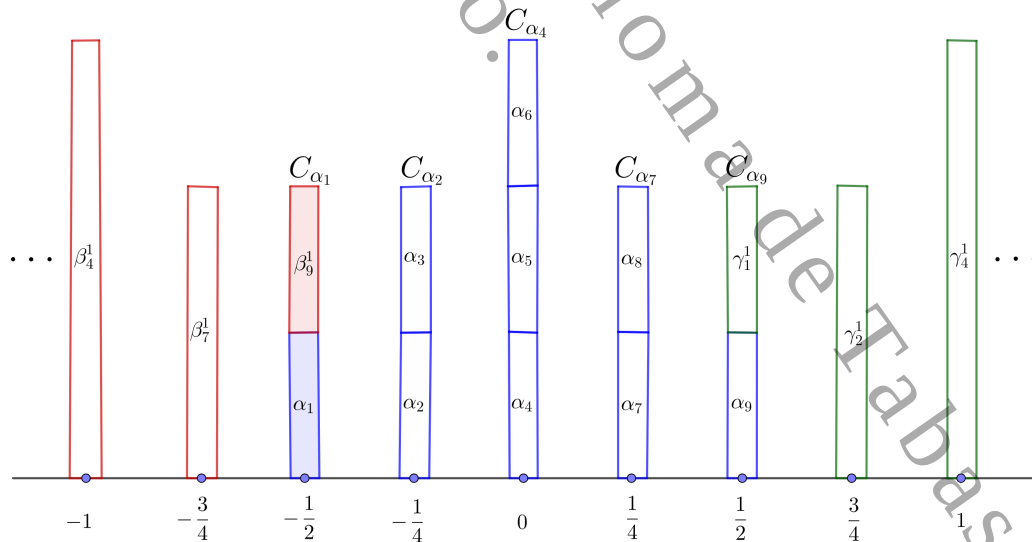


Figura 3.3: Números espectrales de  $f$  (Diagramas de C. Hertling, cf. [Hertling-2002])

## CAPÍTULO 3. MAPEO DE PERIODOS

Notemos que en este caso  $\alpha_9 - 1 = -\frac{1}{2} = \alpha_1$ , es decir,  $\alpha_1$  y  $\alpha_9 - 1$  coinciden (y no hay algún otro número espectral entre ellos). Por lo cual,

$$\begin{aligned} V &= \frac{V^{\alpha_1}}{V^{>\alpha_\mu-1}} = \frac{V^{-\frac{1}{2}}}{V^{>-\frac{1}{2}}} = C_{-\frac{1}{2}}. \\ \Rightarrow \dim V &= \dim C_{-\frac{1}{2}} = 2 \\ \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(\lambda)}{V^{>-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} V = 1. \end{aligned}$$

Del lema 3.3.5 tenemos

$$V^{>-\frac{1}{2}} \subset H_0''(\lambda) \subset V^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Como  $\dim V = 1$  y usando la ecuación anterior 3.7 obtenemos que

$$H_0''(\lambda) = \mathbb{C} \cdot s[\omega_0](\lambda) \oplus V^{>-\frac{1}{2}}, \quad \omega_0 = dx \wedge dy.$$

Tenemos entonces que  $\text{Grass}(1, V) = \Pi \cong \mathbb{CP}^1$ .

El mapeo de periodos para  $f_\lambda = x^4 + y^4 \lambda x^2 y^2$  es:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} - \{-2, 2\} &\longrightarrow \Pi \\ \lambda &\longmapsto [\mathbb{C} \cdot s[\omega_0](\lambda)] \in \frac{H_0''(\lambda)}{V^{>-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Como el número espectral  $-\frac{1}{2}$  es de multiplicidad  $d = 1$  y es tal que  $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \in sp(f)$ , se tiene que  $H_{-1}^1 = \mathbb{C} \langle A_1, A_2 \rangle$ . Por lo cual,

$$C_{-\frac{1}{2}} = \mathbb{C} \left\langle t^{-\frac{1}{2}} A_1(t), t^{-\frac{1}{2}} A_2(t) \right\rangle (\lambda).$$

Sean  $e_1 := t^{-\frac{1}{2}} A_1(t)$  y  $e_2 := t^{-\frac{1}{2}} A_2(t)$ . Dado que  $s[\omega_0](\lambda) \in C_{-\frac{1}{2}}$ , se tiene que

$$s[\omega_0] = I_1(\lambda)e_1 + I_2(\lambda)e_2,$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son funciones holomorfas multivaluadas sobre  $\mathbb{C} - \{-2, 2\}$ .

Por lo tanto, el mapeo de periodos está dado por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} - \{-2, 2\} &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ \lambda &\longmapsto (I_1(\lambda) : I_2(\lambda)). \end{aligned}$$

Para determinar la función vectorial  $s[\omega_0](\lambda)$  debemos encontrar ecuaciones diferenciales tales que  $s[\omega_0](\lambda)$  sean soluciones de éstas. Para esto, notemos que:

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

69

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2) = x^2 y^2.$$

Notemos que  $s[\omega_0]$  es homogénea, ya que por el lema 3.3.1

$$s[\omega_0] = s(\omega_0, \nu(\omega_0)) \in C_{\nu(\omega_0)}.$$

En este caso,  $\nu(\omega_0) = \nu(dx \wedge dy) = \frac{1}{4}(0+1) + \frac{1}{4}(0+1) - 1 = -\frac{1}{2}$ . Así  $s[\omega_0] \in C_{-\frac{1}{2}}$ .

En general, para una 2-forma monomial

$$\omega = (x^2 y^2)^i dx \wedge dy = x^{2i} y^{2i} dx \wedge dy$$

se tiene que

$$\nu(\omega) = \frac{1}{4}(2i+1) + \frac{1}{4}(2i+1) - \frac{2}{2} = \frac{2i+1}{2} - \frac{2}{2} = i - \frac{1}{2},$$

de donde se sigue que  $s[(x^2 y^2)^i dx \wedge dy] \in C_{i-\frac{1}{2}}$ .

Por otro lado,  $\partial_t^i : C_\alpha \rightarrow C_{\alpha-i}$ . Entonces,

$$\partial_t^i \left( s[(x^2 y^2)^i dx \wedge dy] \right) \in C_{i-\frac{1}{2}-i} = C_{-\frac{1}{2}},$$

para todo  $i \geq 0$ .

Por la proposición 3.3.2, las secciones geométricas  $s[\omega_0](\lambda)$  tienen una expansión alrededor del cero de la forma:

$$s[\omega_0](\lambda) = \sum_{i \geq 0} (-\partial_t)^i s[(x^2 y^2)^i \omega_0](0) \frac{\lambda^i}{i!},$$

donde  $(-\partial_t)^i s[(x^2 y^2)^i \omega_0](0) \in C_{-\frac{1}{2}}$ , para toda  $i \geq 0$ . Entonces, las secciones geométricas  $s[\omega_0]$  son homogéneas, esto es  $s[\omega_0](\lambda) = s(\omega_0, \nu(dx \wedge dy)) = s(\omega, -\frac{1}{2}) \in C_{-\frac{1}{2}}$ . Podemos entonces aplicar la ecuación 3.5 para obtener:

$$\partial_\lambda s(\omega_0, \alpha) = -\partial_t s[x^2 y^2 \omega_0] \quad y \quad \partial_\lambda^2 s(\omega_0, \alpha) = \partial_t^2 s[(x^2 y^2)^2 \omega_0] \quad (3.8)$$

Recordemos que  $H_0''(\lambda) \approx \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df_\lambda \wedge d\mathcal{O}}$ . Entonces,

$$df_\lambda \wedge dg = (f_{\lambda,x} \cdot g_y - f_{\lambda,y} \cdot g_x) \omega_0 = 0 \in H_0''(\lambda),$$

para toda función holomorfa  $g$ . En particular, apliquemos esto para las funciones  $g = x^5 y$  y  $h = xy^5$ . Veamos:

70

## CAPÍTULO 3. MAPEO DE PERIODOS

$$1. F_{\lambda,x} = 4x^3 + 2\lambda xy^2 \text{ y } F_{\lambda,y} = 4y^3 + 2\lambda x^2 y;$$

$$2. g_x = 5x^4 y \text{ y } g_y = x^5;$$

$$3. h_x = y^5 \text{ y } h_y = 5xy^4.$$

Así,

$$\begin{aligned} & (F_{\lambda,x} \cdot g_y - F_{\lambda,y} \cdot g_x) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (4x^8 + 2\lambda x^6 y^2 - 20x^4 y^4 - 10\lambda x^6 y^2) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (4x^8 - 20x^4 y^4 - 8\lambda x^6 y^2) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^8 - 5x^4 y^4 - 2\lambda x^6 y^2) \omega_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} & (F_{\lambda,x} \cdot h_y - F_{\lambda,y} \cdot h_x) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (20x^4 y^4 + 10\lambda x^2 - 4y^8 - 2\lambda x^2 y^6) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (20x^4 y^4 + 8\lambda x^2 y^6 - 4y^8) \omega_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & (5x^4 y^4 + 2\lambda x^2 y^6 - x^8) \omega_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Restándole la ecuación 3.10 a 3.9 llegamos a:

$$(x^8 + y^8 - 10x^4 y^4 - 2\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4)) \omega_0. \quad (3.11)$$

Dado que

$$x^8 + y^8 - 10x^4 y^4 = x^8 + y^8 + 2x^4 y^4 - 12x^4 y^4 = (x^4 + y^4)^2 - 12x^4 y^4,$$

la ecuación 3.11 se convierte en

$$\left[ (x^4 + y^4)^2 - 12x^4 y^4 - 2\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4) \right] \omega_0 = 0,$$

o bien,

$$\left[ ((x^4 + y^4)^2 + 2\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4) + \lambda^2 x^4 y^4) - 4\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4) - (12 + \lambda^2) x^4 y^4 \right] \omega_0 = 0. \quad (3.12)$$

Ahora, usando

$$F_\lambda - \lambda x^2 y^2 = x^4 + y^4 \text{ y } F_\lambda^2 = (x^4 + y^4)^2 + 2\lambda(x^4 + y^4)x^2 y^2 + \lambda^2 x^4 y^4$$

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

71

en la ecuación 3.12, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & [F_\lambda^2 - 4\lambda x^2 y^2 (F_\lambda - \lambda x^2 y^2) - (12 + \lambda^2)x^4 y^4] \omega_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & [F_\lambda^2 - 4\lambda x^2 y^2 F_\lambda + 4\lambda^2 x^4 y^4 - (12 + \lambda^2)x^4 y^4] \omega_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & [F_\lambda^2 - (12 - 3\lambda^2)x^4 y^4 - 4\lambda x^2 y^2 F_\lambda] \omega_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & F_\lambda^2 \omega_0 - (12 - 3\lambda^2)x^4 y^4 \omega_0 - 4\lambda x^2 y^2 F_\lambda \omega_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^4 y^4 \omega_0 - \frac{F_\lambda^2}{(12 - 3\lambda^2)} \omega_0 + \frac{4\lambda F_\lambda}{(12 - 3\lambda^2)} x^2 y^2 \omega_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^4 y^4 \omega_0 - \left( \frac{F_\lambda^2}{(12 - 3\lambda^2)} \omega_0 - \frac{4\lambda F_\lambda}{(12 - 3\lambda^2)} x^2 y^2 \omega_0 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Esto es,

$$x^4 y^4 \omega_0 = \frac{F_\lambda^2}{(12 - 3\lambda^2)} \omega_0 - \frac{4\lambda F_\lambda}{(12 - 3\lambda^2)} x^2 y^2 \omega_0 \quad (\text{mód } df_\lambda \wedge d\mathcal{O}). \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ecuación 3.13 en 3.8 y por la linealidad de los mapeos  $\partial_t$ ,  $s[\cdot]$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda^2 s[\omega_0](\lambda) &= \partial_t^2 s[x^4 y^4 \omega_0](\lambda) \\
 &= \partial_t^2 s \left[ \frac{1}{(12 - 3\lambda^2)} F_\lambda^2 \omega_0 - \frac{4\lambda}{(12 - 3\lambda^2)} F_\lambda x^2 y^2 \omega_0 \right] (\lambda) \\
 &\quad \{ \text{tomando } F_\lambda = t \} \\
 &= \frac{1}{(12 - 3\lambda^2)} \partial_t^2 t^2 s[\omega_0](\lambda) - \frac{4\lambda}{(12 - 3\lambda^2)} \partial_t^2 t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda) \\
 &\quad \left\{ \text{sustituyendo } \partial_t^2 t^2 = \frac{3}{4} id, \partial_t^2 t = \frac{3}{2} \partial_t \right\} \\
 &= \frac{1}{3(4 - \lambda^2)} \frac{3}{4} id(s[\omega_0](\lambda)) - \frac{4\lambda}{3(4 - \lambda^2)} \frac{3}{2} \partial_t (s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda)) \\
 &= \frac{3}{4} \frac{1}{3(4 - \lambda^2)} s[\omega_0](\lambda) - \frac{3}{2} \frac{4\lambda}{3(4 - \lambda^2)} \partial_t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{(4 - \lambda^2)} s[\omega_0](\lambda) + \frac{2\lambda}{(4 - \lambda^2)} (-\partial_t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda)) \\
 &\quad \{ \text{sustituyendo } \partial_\lambda s[\omega_0](\lambda) = -\partial_t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda) \} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{(4 - \lambda^2)} s[\omega_0](\lambda) + \frac{2\lambda}{(4 - \lambda^2)} \partial_\lambda s[\omega_0](\lambda) \\
 \Rightarrow & (4 - \lambda^2) \partial_\lambda^2 s[\omega_0](\lambda) = \frac{1}{4} s[\omega_0](\lambda) + 2\lambda \partial_\lambda s[\omega_0](\lambda)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -(4 - \lambda^2)\partial_\lambda^2 s[\omega_0](\lambda) + 2\lambda\partial_\lambda s[\omega_0](\lambda) + \frac{1}{4}s[\omega_0](\lambda) = 0. \quad (3.14)$$

Recordemos que  $\lambda = 4a - 2$ , entonces

$$\partial_\lambda = 4\partial_a \quad y \quad 4 - \lambda^2 = 4 - (4a - 2)^2 = 4 - 16a^2 + 16a - 4 = -16a(a - 1).$$

Definiendo  $s[\omega_0](\lambda) = s[\omega_0](4a - 2) =: u(a)$ , la ecuación 3.14 se convierte en:

$$\begin{aligned} & -(-16a(a - 1))16\partial_a^2 u(a) + 2(4a - 2)4\partial_a u(a) + \frac{1}{4}u(a) = 0 \\ & \Rightarrow 2^8 a(a - 1)\partial_a^2 u(a) + 2^4(2a - 1)\partial_a u(a) + \frac{1}{2^2}u(a) = 0 \\ & \Rightarrow a(a - 1)\partial_a^2 u(a) + \frac{1}{2^4}(2a - 1)\partial_a u(a) + \frac{1}{2^{10}}u(a) = 0 \\ & \Rightarrow a(a - 1)\partial_a^2 u(a) + \left(\frac{1}{2^3}a - \frac{1}{2^4}\right)\partial_a u(a) + \frac{1}{2^{10}}u(a) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo cual, las funciones vectoriales  $s[\omega_0](\lambda) = s[\omega_0](4a - 2) = u(a)$  son soluciones de la ecuación diferencial 3.15 anterior.

**Observación 3.3.2.** Por la proposición 3.3.1 sabemos que sobre  $C_\alpha$  se cumplen las igualdades  $\partial_t^2 t^2 = ((\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2)id$  y  $\partial_t^2 t = (\alpha + 1)\partial_t$ .

Como  $s[\omega_0] \in C_{-\frac{1}{2}}$  y  $s[x^2 y^2 \omega_0] \in C_{\frac{1}{2}}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 t^2 (s[\omega_0]) &= \left( \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right) + \left( -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right) id(s[\omega_0]) \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) s[\omega_0] \\ &= \frac{3}{4} s[\omega_0] \end{aligned}$$

y

$$\partial_t^2 t (s[x^2 y^2 \omega_0]) = \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right) \partial_t s[x^2 y^2 \omega_0] = \frac{3}{2} \partial_t s[x^2 y^2 \omega_0].$$

## 3.3. MAPEO DE PERIODOS

73

**Observación 3.3.3.** La ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden 3.15 encontrada para determinar las funciones vectoriales  $s[\omega_0](\lambda)$ , es un caso particular de la ecuación hipergeométrica de Gauss (ver [Saito & Takayama-2013], pág. 16) dada por

$$z(z-1)\partial^2 f(z) + ((\theta + \rho + 1)z - \tau)\partial f(z) + \theta\rho f(z) = 0. \quad (3.16)$$

En efecto, al comparar nuestra ecuación 3.15 con la hipergeométrica de Gauss general 3.16 obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \theta + \rho + 1 = \frac{1}{2^3} \\ \tau = \frac{1}{2^4} \\ \theta\rho = \frac{1}{2^{10}}. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que en nuestro caso:

$$\theta = \frac{-14 + \sqrt{195}}{32}, \rho = \frac{-14 - \sqrt{195}}{32} \text{ y } \tau = \frac{1}{2^4}$$

ó

$$\theta = \frac{-14 - \sqrt{195}}{32}, \rho = \frac{-14 + \sqrt{195}}{32} \text{ y } \tau = \frac{1}{2^4}.$$

74

### *CAPÍTULO 3. MAPEO DE PERIODOS*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Capítulo 4

# Conclusiones

Se trabajó con un germen  $f$  de singularidad aislada de hipersuperficie casihomogéneo en dos variables complejas, con algunos resultados que se pueden generalizar a  $(n+1)$ -variables complejas.

A partir de una base con representantes monomiales de  $\mathcal{O}_f$ , usando el lema de Nakayama, se indujo una base para la retícula de Brieskorn, con representantes dados por formas diferenciales.

Aprovechando que  $f$  cumple la identidad de Euler (por ser casihomogéneo), usando un enfoque algebraico, se definió de manera explícita la conexión de Gauss-Manin para el caso de dos variables complejas, la cual nos permitió descomponer el espacio de localización de la retícula de Brieskorn  $\mathcal{M} = \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$  en espacios propios  $C_{a(m)}$  del operador  $t\partial_t$ . A su vez, estos espacios nos permitieron definir la  $V^\bullet$ -filtración ( $V^{>\bullet}$ -filtración) de submódulos de  $\mathcal{M}$ . Todo lo anterior de manera algebraica. Así mismo, estos espacios se pudieron describir analíticamente, en el lenguaje de secciones geométricas del haz cohomológico de Milnor y el operador monodromía, asociados a la fibración de Milnor del germen  $f$ . Estos mismos objetos se tienen para una deformación  $\mu(f)$ -constante del germen  $f$ .

Se definió también el espectro  $sp(f) = \{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{\mu(f)}\}$  para el caso casihomogéneo, el cual es un invariante discreto del germen  $f$  que ayudó, vía la retícula de Brieskorn, para considerar los espacios  $V^{\alpha_1}$ ,  $V^{>\beta_1}$  ( $\alpha_1 = \min\{\alpha \in sp(f)\}$  y  $\beta_1 = \max\{\alpha \in sp(f)\} - 1$ ) y definir el mapeo de periodos sobre el cociente  $\frac{V^{\alpha_1}}{V^{>\beta_1}}$ .

Se dió un ejemplo de la definición y construcción del mapeo de periodos (comparar con el enfoque dado por la construcción de Brieskorn y Knörrer en [Brieskorn & Knörrer-2012] para el caso de curvas elípticas simples), para la familia de curvas elípticas simples  $f_a(x, y, z) = z^2 - yx(y-x)(y-ax)$  ( $a \neq 0, 1$ ) usando la R-equivalencia con la deformación  $F_\lambda(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$ .

( $\lambda = 4a - 2$ ) del germen  $f = x^4 + y^4$ . Concluimos que el mapeo de periodos es analítico multivaluado, lo cual nos dice que bajo una deformación  $\mu(f)$ -constante del germen  $f$ , los objetos invariantes asociados a  $f$  (y por tanto, a la familia de curvas elípticas simples) varían de manera analítica. Más aún, en el proceso de construcción del mapeo de periodos, se resuelve un caso particular de la ecuación hipergeométrica de Gauss, la cual tiene una gran importancia, ya que aparece en varias áreas de las matemáticas, tales como: geometría algebraica; teoría de números; combinatoria; y física matemática, además que cualquier ecuación con tres puntos singulares regulares puede escribirse como una hipergeométrica (ver [Saito & Takayama-2013], pág. 16).

## Apéndice A

# Topología

### A.1. Homología singular

Sean  $v_0, v_1, \dots, v_l$   $(l+1)$ -puntos de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $v_0, v_1, \dots, v_l$  están en *posición general* siempre que no estén contenidos en un hiperplano de dimensión  $l-1$ .

**Definición A.1.1.** Sean  $v_0, v_1, \dots, v_l$   $(l+1)$ -puntos de  $\mathbb{R}^n$  en posición general. Un  $l$ -simplejo es el conjunto convexo generado por los puntos  $v_0, v_1, \dots, v_l$  (ver figura A.1), es decir,

$$[v_0, v_1, \dots, v_l] := \left\{ \sum_{i=0}^l a_i v_i : a_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^l a_i = 1 \right\}.$$

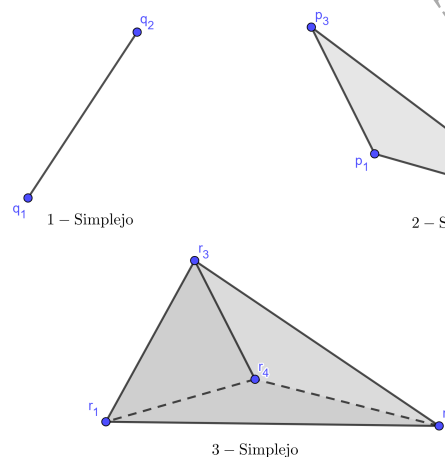


Figura A.1: Simplejos.

Las *caras* de un  $l$ -simplejo  $\Delta_l := [v_0, v_1, \dots, v_l]$  son los  $k$ -simplejos generados por  $k$ -puntos del conjunto  $\{v_0, v_1, \dots, v_l\}$ ,  $k < l$ . Las *fronteras* de  $\Delta_l$  son las caras dadas por los  $(l-1)$ -simplejos de  $\Delta_l$ . Esto es, la  $i$ -ésima frontera de  $\Delta_l$  es  $\partial_i \Delta_l := [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_l]$ , donde  $\hat{v}_i$  significa que el punto  $v_i$  fue eliminado.

**Definición A.1.2.** La frontera del simplejo  $\Delta_l$  es el operador dado por

$$\partial \Delta_l = \sum_{i=0}^l (-1)^i \partial_i \Delta_l.$$

Los simplejos se pueden generalizar a espacios topológicos en general, como se muestra a continuación.

**Definición A.1.3.** Sean  $M$  un espacio topológico y  $\Delta_l$  un  $l$ -simplejo en  $\mathbb{R}^n$ . Un  $l$ -simplejo singular es una función continua  $\sigma : \Delta_l \rightarrow M$  (ver figura A.2).

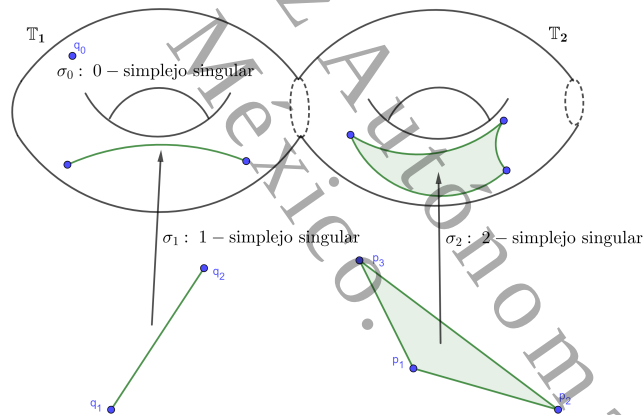


Figura A.2: Simplejos singulares.

Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad. El grupo de  $l$ -cadenas de  $M$  con coeficientes en  $R$  está dado por

$$C_l(M) := C_l(M, R) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \sigma_i : \alpha_i \in R \text{ y } \sigma_i \text{ es un } l\text{-simplejo singular} \right\}.$$

Así como definimos la frontera para un simplejo, para un  $l$ -simplejo singular  $\sigma : \Delta_l \rightarrow M$  definimos su frontera como

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^l (-1)^i \sigma|_{\partial_i \Delta_l},$$

## A.2. FIBRACIONES

79

el cual es un  $(l-1)$ -simplejo. El operador frontera se generaliza linealmente al grupo de  $l$ -cadenas  $C_l(M)$ .

**Definición A.1.4.** Sea  $M$  un espacio topológico. El **operador frontera** para  $l$ -cadenas está dado por el homomorfismo

$$\partial := \partial_l : C_l(M) \longrightarrow C_{l-1}(M), \text{ dado por } \partial_l \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \partial \sigma_i.$$

Una  $l$ -cadena  $c$  es llamada *ciclo* siempre que  $\partial c = 0$ , y se dirá *frontera* si  $c = \partial d$ , con  $d$  una  $(l+1)$ -cadena.

Sean  $Z_l(M)$  el conjunto de  $l$ -ciclos y  $B_l(M)$  el conjunto de  $l$ -fronteras.

Como el homomorfismo  $\partial$  cumple que  $\partial \circ \partial = 0$ , si  $c$  es una frontera, es decir,  $c = \partial d$ , entonces  $\partial c = \partial(\partial d) = 0$ . Esto es  $B_l(M) \subset Z_l(M)$ .

**Definición A.1.5.** El  $l$ -ésimo grupo de homología singular de  $M$  es el grupo cociente

$$H_l(M) = H_l(M, \mathbb{R}) = \frac{Z_l(M)}{B_l(M)} = \frac{\ker \partial}{\operatorname{im} \partial}.$$

Las clases de homología son denotadas como  $[c]$ . Diremos que dos ciclos  $c_1, c_2 \in Z_l(M)$  son *homólogos* si  $[c_1 - c_2] = 0$ , es decir, si  $(c_1 - c_2) \in B_l(M)$ .

## A.2. Fibraciones

**Definición A.2.1.** Sean  $E, B$  dos espacios topológicos o variedades. Una **fibración** es una función continua  $\pi : E \longrightarrow B$ .

$E$  es llamado el *espacio total*,  $B$  es llamado el *espacio base* y  $\pi^{-1}(b)$  son llamadas las *fibras* sobre  $b$  ( $\forall b \in B$ ).

**Ejemplo A.2.1.** *Fibración producto.*

Sean  $X$  y  $Y$  cualesquiera dos espacios. La función proyección

$$\operatorname{proy}_1 : X \times Y \longrightarrow X, \text{ dada por } (x, y) \longmapsto x,$$

es continua. Por lo cual,  $\operatorname{proy}_1$  es una fibración con fibras  $\operatorname{proy}_1^{-1}(x) = \{x\} \times Y$ .

En una manera análoga, se tiene que  $\operatorname{proy}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ , dada por  $(x, y) \longmapsto y$ , es una fibración con fibras  $\operatorname{proy}_2^{-1}(y) = X \times \{y\}$ .

**Definición A.2.2.** Sean  $\pi : E \rightarrow B$  y  $\pi' : E' \rightarrow B'$  dos fibraciones. A un par de funciones  $f : E \rightarrow E'$  y  $g : B \rightarrow B'$  las llamaremos **función fibra**, siempre que el digrama de la derecha sea conmutativo, esto es,  $\pi' \circ f = g \circ \pi$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

Por simplicidad, una función fibra la denotaremos por  $(f, g) : \pi \rightarrow \pi'$ . En el caso de tener  $B = B'$  y  $g = id_B$ , la función fibra será denotada simplemente como  $f : \pi \rightarrow \pi'$ .

**Observación A.2.1.** Sean  $\pi : E \rightarrow B$ ,  $\pi' : E' \rightarrow B'$  y  $\pi'' : E'' \rightarrow B''$  tres fibraciones.

1. No es difícil ver que  $(id_E, id_B) : \pi \rightarrow \pi$  es una función fibra.
2. Sean  $(f_1, g_1) : \pi \rightarrow \pi'$  y  $(f_2, g_2) : \pi' \rightarrow \pi''$  dos funciones fibra. Entonces, la composición

$$(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) = (f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) : \pi \rightarrow \pi''$$

es una función fibra. En efecto, el digrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f_1} & E' & \xrightarrow{f_2} & E'' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' \\ B & \xrightarrow{g_1} & B' & \xrightarrow{g_2} & B'' \end{array}$$

es conmutativo en la izquierda y en la derecha, ésto es  $g_1 \circ \pi = \pi' \circ f_1$  y  $\pi'' \circ f_2 = g_2 \circ \pi'$

$$\Rightarrow g_2 \circ g_1 \circ \pi = g_2 \circ \pi' \circ f_1 \text{ y } \pi'' \circ f_2 \circ f_1 = g_2 \circ \pi' \circ f_1$$

$$\Rightarrow (g_2 \circ g_1) \circ \pi = \pi'' \circ (f_2 \circ f_1).$$

Por lo cual, el digrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f_2 \circ f_1} & E'' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi'' \\ B & \xrightarrow{g_2 \circ g_1} & B'' \end{array}$$

es conmutativo.

## A.2. FIBRACIONES

81

**Definición A.2.3.** Dos fibraciones  $\pi : E \rightarrow B$  y  $\pi' : E' \rightarrow B'$  se dirán ser **equivalentes** si existe un homeomorfismo fibra, esto es, una función fibra continua  $(f, g) : \pi \rightarrow \pi'$  ( $f$  y  $g$  son continuas) con inversa  $(f, g)^{-1} = (f^{-1}, g^{-1}) : \pi' \rightarrow \pi$  también continua ( $f^{-1}$  y  $g^{-1}$  continuas), las cuales cumplen que:

$$(f^{-1}, g^{-1}) \circ (f, g) = (f^{-1} \circ f, g^{-1} \circ g) = (id_E, id_B) = id_\pi$$

y

$$(f, g) \circ (f^{-1}, g^{-1}) = (f \circ f^{-1}, g \circ g^{-1}) = (id_{E'}, id_{B'}) = id_{\pi'}.$$

**Lema A.2.1.** Sean  $\pi : E \rightarrow B$  y  $\pi' : E' \rightarrow B'$  fibraciones equivalentes a través del homeomorfismo fibra  $(f, g) : \pi \rightarrow \pi'$ . Entonces,  $f$  mapea las fibras sobre  $b$  en las fibras sobre  $g(b)$ , esto es,  $f(\pi^{-1}(b)) = (\pi')^{-1}(g(b))$ , para toda  $b \in B$ . Por lo cual,  $\pi^{-1}(b)$  y  $(\pi')^{-1}(g(b))$  son fibras homeomorfas.

*Demostración.* Demostremos por doble contención que

$$f(\pi^{-1}(b)) = (\pi')^{-1}(g(b)).$$

⊂) Si  $x \in f(\pi^{-1}(b))$ , entonces existe  $e \in \pi^{-1}(b)$  tal que  $x = f(e)$ .

$$\Rightarrow x = f(e) \text{ y } \pi(e) = b \Rightarrow \pi'(x) = \pi'(f(e)) \text{ y } g(\pi(e)) = g(b).$$

Por la conmutatividad del diagrama se sigue que

$$\pi'(f(e)) = g(\pi(e)) \Rightarrow \pi'(x) = g(b) \Rightarrow x \in (\pi')^{-1}(g(b)).$$

⊃) Si  $x \in (\pi')^{-1}(g(b))$ , entonces  $\pi'(x) = g(b)$ . Ahora, dado que  $f^{-1}, g^{-1}$  existen y  $x \in E'$  se tiene que

$$\Rightarrow \exists! e \in E \ni f(e) = x \Rightarrow g(b) = \pi'(x) = \pi'(f(e)) = g(\pi(e))$$

$$\Rightarrow b = \pi(e) \Rightarrow e \in \pi^{-1}(b), x = f(e) \Rightarrow x = f(e) \in f(\pi^{-1}(b)).$$

Ahora, como  $(f, g)$  es homeomorfismo fibra,  $f$  es homeomorfismo. Entonces, la restricción de  $f|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \rightarrow (\pi')^{-1}(g(b))$  también es homeomorfismo.  $\square$

**Definición A.2.4.** Una fibración  $\pi : E \rightarrow B$  es llamada **trivial** si es equivalente a una fibración producto, esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & B' \times F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{proy}_{B'} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

es conmutativo, con  $f$  y  $g$  homeomorfismos.

En el caso de que  $B = B'$  y  $g = id_B$ , diremos que  $\pi$  es equivalente sobre  $B$  a la fibration producto  $proy_{B'}$ .

**Proposición A.2.1.** Si  $\pi : E \rightarrow B$  es una fibration trivial, todas sus fibras son homeomorfas entre sí.

*Demostración.* Como  $\pi$  es trivial, existe un homeomorfismo fibra  $(f, g) : \pi \rightarrow proy_{B'}$ . Sean  $b, c \in B$ . Por el lema A.2.1,

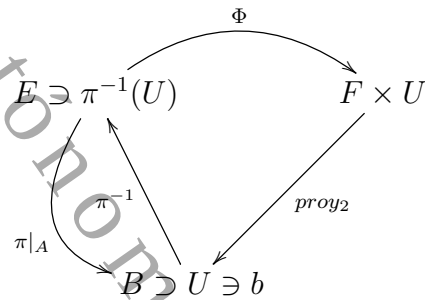
$$\pi^{-1}(b) \cong (proy_{B'})^{-1}(g(b)) = \{g(b)\} \times F \cong \{d\} \times F, \quad \forall d \in B'.$$

En particular,  $\{g(b)\} \times F \cong \{g(c)\} \times F = (proy_{B'})^{-1}(g(c)) \cong \pi^{-1}(c)$ . De donde se tiene que

$$\pi^{-1}(b) \cong \pi^{-1}(c), \quad \forall b, c \in B.$$

□

**Definición A.2.5.** Sea  $\pi : E \rightarrow B$  una fibration. Diremos que  $\pi$  es **localmente trivial**, si cualquier punto  $b \in B$  tiene una vecindad  $U$  para la cual, existe un homeomorfismo fibra  $\Phi : A \rightarrow F \times U$ ,  $A = \pi^{-1}(U)$ , el cual hace conmutativo el diagrama de la derecha. Dicho de otra manera, la fibration  $\pi|_A$  es equivalente sobre  $U$  a una fibration producto  $proy_U$ .



En una fibration trivial o localmente trivial, el espacio  $F$  (del producto  $F \times U$ ) es llamado la *fibra* (o el *espacio de fibras*) de  $\pi$ .

**Proposición A.2.2.** Sea  $\pi : E \rightarrow B$  una fibration localmente trivial. Si  $B$  es conexa, entonces  $\pi^{-1}(b) \cong \pi^{-1}(p)$ , para toda  $b, p \in B$ .

## Apéndice B

# Geometría compleja

### B.1. Gavillas

Esta sección puede ser consultada en [Eisenbud & Harris-2006].

Sea  $X$  un espacio topológico.

**Definición B.1.1.** Decimos que  $\mathcal{F}$  es una **pregavilla** sobre  $X$  si:

1. A cada abierto  $U$  de  $X$  se le asigna un conjunto  $\mathcal{F}(U)$ .
2. Para cada par de abiertos  $U \subset V$  de  $X$ , existe un mapeo restricción

$$\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U),$$

el cual cumple las siguientes propiedades;

- $\text{res}_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ,
- Para todo abierto  $U \subset V \subset W$  de  $X$ ,  $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$ .

Los elementos  $f \in \mathcal{F}(U)$  son llamados *secciones de  $\mathcal{F}$  sobre  $U$*  y los elementos de  $\mathcal{F}(X)$  son llamados *secciones globales*.

**Definición B.1.2.** Una pregavilla  $\mathcal{F}$  (de conjuntos, grupos abelianos, anillos, módulos, e.t.c) sobre  $X$  es llamada **gavilla** si cumple el axioma de gavilla, esto es, para cualquier cubierta abierta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de un conjunto abierto  $U$  de  $X$  y cualquier colección de elementos  $\{f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  que tiene la propiedad de que para todo  $\alpha, \beta \in A$   $\text{res}_{U, U_\alpha \cap U_\beta} f_\alpha = \text{res}_{U, U_\alpha \cap U_\beta} f_\beta$ , entonces existe un único elemento  $f \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $\text{res}_{U, U_\alpha} f = \text{res}_{U, U_\alpha} f_\alpha$ , para todo  $\alpha \in A$ .

Existe otra manera de describir una gavilla, la cual es a través de sus fibras (tallos).

**Definición B.1.3.** Sea  $\mathcal{F}$  cualquier pregavilla.

1. Sean  $U, V$  abiertos de  $X$  y  $f \in \mathcal{F}(U)$ ,  $g \in \mathcal{F}(V)$  secciones. Diremos que  $f$  y  $g$  se relacionan,  $f \sim g$ , si y solo si existe un abierto  $W \subset X$  tal que:  $W \subset U \cap V$  y  $\text{res}_{U,W} f = \text{res}_{V,W} g$ .
2. Sea  $x \in X$ . Denotemos por  $U_x$  cualquier vecindad abierta de  $x$ . Definimos la **fibra** (o **tallo**) de  $\mathcal{F}$  en  $x$ , denotada por  $\mathcal{F}_x$ , como el límite directo de grupos  $\mathcal{F}(U_x)$  sobre todas las vecindades abiertas  $U_x \subset X$  de  $x$ , esto es,

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U_x \subset X} \mathcal{F}(U_x) = \left( \bigsqcup_{U_x \subset X} \mathcal{F}(U_x) \right) / \sim.$$

Las clases en el cociente  $\mathcal{F}_x = \left( \bigsqcup_{U_x \subset X} \mathcal{F}(U_x) \right) / \sim$  son denotadas como  $(U, f)$ .

Dado cualquier  $x \in X$  se tiene un mapeo que va de  $\mathcal{F}(U)$  a  $\mathcal{F}_x$ , el cual toma una sección  $f \in \mathcal{F}(U)$  y le asocia una clase de equivalencia  $(U, f)$ ; esta clase es denotada por  $f_x$ .

Consideremos a  $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ .  $\tilde{\mathcal{F}}$  es un espacio topológico, tomando como base para los abiertos a los conjuntos de la forma

$$\nu(U, f) := \{f_x : x \in U\},$$

donde  $U \subset X$  es abierto y  $f$  es una sección fija sobre  $U$ .

Se tiene que el mapeo  $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ , dado por  $\pi(s_x) = x$ , es continuo. Además, para cualquier abierto  $U \subset X$  y  $f \in \mathcal{F}(U)$  el mapeo  $\sigma : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$  dado por  $\sigma(x) = f_x$  es una *sección continua* de  $\pi$  sobre  $U$ , esto es,  $\sigma$  es continua y  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ .

**Definición B.1.4.** Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  gavillas sobre  $X$ . Un **morfismo de gavillas**  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una colección de mapeos  $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ , con  $U \subset X$  abierto, tales que para cualquier inclusión  $V \subset U$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

## B.2. GRASSMANIANAS

85

es conmutativo.

Un morfismo de gavillas  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induce un mapeo entre fibras  $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ , para cualquier  $x \in X$ .

**Proposición B.1.1.** (ver [Eisenbud & Harris-2006], pág. 15) Sea  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morfismo de gavillas. Entonces,  $\phi(U)$  es biyectivo para todo abierto  $U \subset X$  si y solo si  $\phi_x$  es biyectivo para toda  $x \in X$ .

**Definición B.1.5.** Sea  $\mathcal{F}$  una pregavilla. Definimos la **gavillificación** de  $\mathcal{F}$  como la única gavilla  $\mathcal{F}'$  y un morfismo de pregavillas  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  tal que, para todo  $x \in X$  el mapeo  $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x$  es un isomorfismo.

**Proposición B.1.2.** (ver [Eisenbud & Harris-2006], pág. 16) Consideremos a  $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$  como un espacio topológico, dado como antes. Entonces, la gavillificación  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$  es la gavilla de secciones del mapeo natural  $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ .

Ejemplos importantes:

- La gavilla de funciones holomorfas,  $\mathcal{O}_D$ , sobre el disco  $D \subset \mathbb{C}$  (1-variedad compleja), cuyas fibras  $\mathcal{O}_D$  en  $x$  es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en  $x$ .
- La gavilla más sencilla de asociar a un espacio topológico  $X$ , es la gavilla de funciones localmente constante con valores en  $K$ , esto es, una gavilla  $\mathcal{K}$  que a cada subconjunto abierto  $U$  de  $X$  le asocia el conjunto de funciones localmente constantes,  $\mathcal{K}(U)$ , que van de  $U$  a  $K$ . En especial:

dado un germen con singularidad aislada en el cero  $f$ , le asociamos su fibración de Milnor  $f_1 : X' \rightarrow D_\eta^*$ ,  $X' := B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$ .  $f_1$ , la cual define un haz vectorial  $\underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H^1(V_t, \mathbb{C})$  o bien, una gavilla de

funciones localmente constante  $R_{f*}^1 \mathbb{C}_{X'}$ , esto es,

$$\underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in D_\eta^*} H^1(V_t, \mathbb{C}) = R_{f*}^1 \mathbb{C}_{X'}.$$

## B.2. Grassmanianas

Esta sección puede ser consultada en [Griffiths & Harris-1978].

**Definición B.2.1.** Sean  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión  $m$  y  $k \leq m$ . Definimos la  **$k$ -Grassmaniana** sobre  $V$  como:

$$\text{Grass}(k, V) := \{W < V : \dim W = k\}.$$

Cualquier espacio vectorial complejo de dimensión  $n$  es isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ . Denotamos a  $\text{Grass}(k, \mathbb{C})$  por  $\text{Grass}(k, n)$ . Cualquier elemento  $\Lambda \in \text{Grass}(k, n)$  es un hiperplano de dimensión  $k$ , el cual es generado por  $k$ -vectores linealmente independientes  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}) \in \mathbb{C}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Así,  $\Lambda$  puede ser identificado con la matriz de rango  $k$  que tiene como fila los vectores  $v_i$ , esto es,

$$\Lambda \mapsto \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix}.$$

Así mismo, dada una matriz  $A$  de rango  $k$ , le asociamos el elemento  $\Lambda \in \text{Grass}(k, n)$  generado por los  $k$ -vectores filas linealmente independientes de  $A$ . Sin embargo, para que esta asociación sea inyectiva, pedimos que dos matrices  $A$  y  $A'$  representen el mismo espacio  $\Lambda \in \text{Grass}(k, n)$  si y solo si  $A = BA'$ , con  $B \in GL_k$ .

Para darle estructura de variedad compleja a  $\text{Grass}(k, n)$ , necesitamos definir abiertos  $U_I$  que cubran a  $\text{Grass}(k, n)$  y, sobre estos, definir cartas  $\phi_I : U_I \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , que sean analíticas compatibles entre ellas. Para tal caso:

- Sean  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  y  $V_{I^c} = \text{span}\{e_j : j \notin I\}$  el  $(n - k)$  plano de  $\mathbb{C}^n$ .
- Sea  $U_I = \{\Lambda \in \text{Grass}(k, n) : \Lambda \cap V_{I^c} = \{0\}\}$ .

**Proposición B.2.1.** (ver [Griffiths & Harris-1978], pág. 193) Cualquier hiperplano  $\Lambda \in U_I$  tiene una única representación matricial  $\Lambda^I$  cuyo  $I$ -ésimo menor de  $k \times k$  es la matriz identidad. En especial, para  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ , se tiene una matriz de la forma:

$$\Lambda^I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Así mismo, cualquier matriz de la forma anterior, representa un hiperplano  $\Lambda \in U_I$ .

## B.2. GRASSMANIANAS

87

Recordemos que si  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , entonces  $I^0 = \{j \in \{1, \dots, n\} : j \notin I\}$ . Tomando las  $n(n-k)$  entradas del  $I^0$ -ésimo menor, de tamaño  $n(n-k)$  de la matriz  $\Lambda^I$ , nos da una biyección

$$\phi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{n(n-k)}.$$

**Proposición B.2.2.** (ver [Griffiths & Harris-1978], pág. 194)  $Grass(k, V)$  es una variedad compleja.

**Ejemplo B.2.1.** Tomamos  $V = \mathbb{C}^{n+1}$  y  $k = 1$ . En este caso,

$$Grass(1, \mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{CP}^n.$$

88

*APÉNDICE B. GEOMETRÍA COMPLEJA*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Bibliografía

---

- [Arnol'd et al.-1985] Arnol'd, V. I., Varchenko, A. N., & Gusein-Zade, S. M. (1985). *Singularities of differentiable maps 1* Birkhäuser. Basel/Stuttgart.
- [Arnol'd et al.-1998] Arnol'd, V. I., Goryunov, V. V., Lyashko, O. V., & Vasil'Ev, V. A. (2012). *Singularity theory I* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [Arnol'd et al.-2012] Arnol'd, V. I., Varchenko, A. N., & Gusein-Zade, S. M. (2012). *Singularities of Differentiable Maps: Volume II Monodromy and Asymptotic Integrals* (Vol. 83). Springer Science & Business Media.
- [Brieskorn & Knörrer-2012] E. Brieskorn, H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Translated by J. Stillwell, Modern Birkhäuser Classics, Springer Science & Business Media, 2012, Reprint of 1986 ed.
- [Danilov & Shokurov-2013] Danilov, V. I., & Shokurov, V. V. (2013). *Algebraic Geometry I: Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.
- [de-Rham-1954] de Rham, G. (1954). Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. *Comment. Math. Helv.*, 28(1), 346–352.
- [Eisenbud & Harris-2006] Eisenbud, D., & Harris, J. (2006). *The geometry of schemes* (Vol. 197). Springer Science & Business Media.
- [Francisco-2021] Francisco J. Flores-Vivas, (2021). Aspectos analítico algebraicos del poliedro de Newton [Tesis de Licenciatura]. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [Griffiths & Harris-1978] Griffiths, P., & Harris, J. (1978). *Principles of algebraic geometry* (Vol. 19, No. 8). New York: Wiley.

- [Hertling-2002] Hertling, C. (2002). Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities (Vol. 151). Cambridge University Press.
- [Hertling-2002-2] Hertling, C. (2002). Generic Torelli for semiquasihomogeneous singularities. Trends in Singularities, 115-140.
- [KSaito-1976] Saito, K. (1976). On a generalization of de Rham lemma. In Annales de l'institut Fourier (Vol. 26, No. 2, pp. 165-170).
- [Kulikov-1998] Kulikov, V. S. (1998). Mixed Hodge structures and singularities (Vol. 132). Cambridge University Press.
- [Lee-2007] Lee, J. M. (2007). Introduction to Smooth Manifolds. Changes.
- [Looijenga-1984] Looijenga, E. (1984). Isolated singular points on complete intersections (No. 77). Cambridge University Press.
- [Milnor-1968] John Milnor (1968). Singular points of complex hypersurfaces. Princeton University Press and the University of Tokyo Press.
- [Miranda-1995] Miranda, R. (1995). Algebraic curves and Riemann surfaces (Vol. 5). American Mathematical Soc.
- [Saito & Takayama-2013] Saito, M., Sturmfels, B., & Takayama, N. (2013). Gröbner deformations of hypergeometric differential equations (Vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [Varčenko-1982] Varčenko, A. N. (1982). Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 18(3), 469.
- [Wall-2004] C.T.C Wall (2004). Singular Points of planes Curves. Cambridge University Press.
- [Weber-1998] Weber, A. (1998). Leray residue for singular varieties. Banach Center Publications, 44(1), 247-256.
- [Weber-2005] Weber, A. (2005). Residue forms on singular hypersurfaces. Michigan Mathematical Journal, 53(3), 553-569.
- [Zoladek-2006] Zoladek, H. (2006). The monodromy group (Vol. 67). Springer Science & Business Media.

# Francisco Jesús Flores Vivas.pdf

 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

## Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:579938952

Fecha de entrega

17 abr 2026, 3:40 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

17 abr 2026, 3:49 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Francisco Jesús Flores Vivas.pdf

Tamaño del archivo

4.1 MB

101 páginas

21.273 palabras

109.211 caracteres

# 7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Coincidencias menores (menos de 8 palabras)
- Abstract

## Fuentes principales

- 7%  Fuentes de Internet
- 0%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**  
1561 caracteres sospechosos en N.º de páginas  
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

## Fuentes principales

|    |                                                                                                                                 |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7% |  Fuentes de Internet                           |
| 0% |  Publicaciones                                 |
| 0% |  Trabajos entregados (trabajos del estudiante) |

## Fuentes principales

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

|    |             |                                                                                   |     |
|----|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1  | Internet    | documat.unirioja.es                                                               | 5%  |
| 2  | Internet    | arxiv.org                                                                         | <1% |
| 3  | Internet    | 123dok.net                                                                        | <1% |
| 4  | Internet    | hdl.handle.net                                                                    | <1% |
| 5  | Internet    | math.uni.lu                                                                       | <1% |
| 6  | Internet    | www.labsoftware.com                                                               | <1% |
| 7  | Publicación | "A Singular Introduction to Commutative Algebra", Springer Science and Busines... | <1% |
| 8  | Internet    | blackwillow.giznet.com                                                            | <1% |
| 9  | Internet    | 1library.co                                                                       | <1% |
| 10 | Internet    | www.stjornarradid.is                                                              | <1% |
| 11 | Internet    | www.mathematik.uni-kl.de                                                          | <1% |