



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

PERTURBACIONES A LA ECUACIÓN DE LIÉNARD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN
MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A :
MANUEL FIDEL DOMÍNGUEZ AZUETA

DIRECTOR DE TESIS :

DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

CUNDUACÁN, TAB., MÉXICO.

AGOSTO, 2014

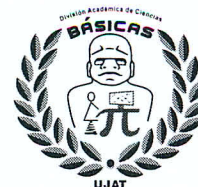


UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dirección



"2014, Conmemoración del 150 Aniversario de
la Gesta Heroica del 27 de Febrero de 1864"

12 de mayo de 2014

Lic. En Mat. Manuel Fidel Domínguez Azueta
Pasante del Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas
P r e s e n t e.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "Perturbaciones a la Ecuación de Liénard" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e.

Dr. Víctor Castellanos Vargas
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'VCV/Dr'GBG/emt

Miembro CUMEX desde 2008

Consortio de
Universidades
Mexicanas
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km. 1, Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6702

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "**Perturbaciones a la Ecuación de Liénard**", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con la que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 4 días del mes de Agosto del año 2014.

AUTORIZO

Manuel F. Domínguez
Manuel Fidel Domínguez Azueta
EL TESISTA

Agradecimientos

Agradezco a Dios a mis padres en especial a mi madre y a mis hermanos por su apoyo incondicional, igual agradezco a mis amigos por sus consejos y recomendaciones.

Agradezco el apoyo de mi asesor y sus recomendaciones para este trabajo. Así mismo, agradezco el apoyo recibido del CONACYT durante mis estudios de maestría y para la elaboración de este trabajo de tesis a través de una beca del proyecto CB-2012-01-181247.

Índice general

Agradecimientos	2
Introducción	5
1. Preliminares	8
1.1. Análisis Local	8
1.1.1. Teorema de existencia y unicidad	8
1.1.2. Linealización	10
1.1.3. Teorema de Hartman-Grobman	11
1.1.4. Formas Normales	12
1.2. Análisis Global	15
1.2.1. Estabilidad y Funciones de Liapunov	15
1.2.2. Sistemas Gradiente y Sistemas Hamiltoniano	19
1.2.3. Ciclos límite	28
1.2.4. Teorema de Poincaré - Bendixon en el Plano.	30
2. Órbitas periódicas	33
2.1. El Mapeo de Poincaré	33
2.2. Determinación de órbitas periódicas	38
2.2.1. Campos vectoriales lentos rápidos	38
2.2.2. Ciclos lentos-rápidos	42
3. Perturbación al sistema de Liénard	46
3.1. Definición del sistema de Liénard	46
3.2. Sistemas lento rápido	47
3.2.1. La integral de la divergencia lenta	49
3.3. Teorema principal	53
3.3.1. Análisis de los ciclos comunes y engañosos.	53
3.4. Demostración del teorema 3.3.1	57

*Índice general**4*

3.5. Cálculo numérico de las órbitas periódicas	61
4. Conclusión	63
Bibliografía	64

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Introducción

Uno de los problemas principales en sistemas dinámicos apareció por primera vez en la lista presentada por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas en el año de 1900. Actualmente se le conoce como el problema 16 de Hilbert y se tiene solo respuesta parcial del mismo [I2002]. Este problema se puede escribir de la siguiente manera: Dado el sistema polinomial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

donde P y Q son polinomios de grado n . Las preguntas son:

1. ¿Es acotado el número de ciclos límite del sistema (1)?
2. ¿Existe una cota $H(n)$ para el número de ciclos límite de (1)?
3. Cuánto vale la cota, $H(n) = ?$

En 1923 H. Dulac afirmó tener resuelta la pregunta 1, pero en 1981 se encontró que estaba incompleta la demostración, [D, I1991]. A mediados de los 50, Petrovskii y Landis publicaron una solución al problema 3, $H(n) \leq P_3(n)$, (es acotado por un polinomio de grado 3) (ver [PL1] [PL2]) a la cual Novikov e Ilyashenko le encontraron un error en los 60. En 1991 Ilyashenko y Ecalle (1992) respondieron afirmativamente de manera independiente a la pregunta 1 (ver [I1991] [E]).

A más de 100 años de que se presentó este problema, aún no se cuenta con una respuesta global. En 1998 Smale presentó una propuesta de sus problemas mas relevantes para las matemáticas y el propuso una lista de 16 donde el número 13 es una versión simplificada del problema 16 de Hilbert [S]. El propone el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\tag{2}$$

donde $F(x)$ es un polinomio y $F(0) = 0$. El problema es dar una cota para el número de ciclos límite en términos del grado de $F(x)$. Consideremos la ecuación diferencial de

segundo orden

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (3)$$

conocida como ecuación de Liénard, la cual se puede llevar a un sistema en el plano haciendo el cambio de variables $y = \dot{x} + F(x)$ y $f(x) = F'(x)$ donde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es un polinomio de grado $2n + 1$, y $g(x)$ un polinomio de grado m en la variable x ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Liénard, en 1928 [L1928] demostró que si $m = 1$ y $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es una función continua impar, la cual tiene una única raíz en $x = a$, y es monótona creciente para $x \geq a$, entonces el sistema (4) tiene un único ciclo límite. En 1973 Rychkov [R2005] demostró que si $m = 1$ y $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es un polinomio impar de grado 5, entonces (4) tiene a lo mas dos ciclos límite.

Posteriormente un trabajo relevante fue el de Lins, de Melo y Pugh en 1977 (ver [LMP]) quienes conjeturaron que cuando $g(x) = x$ en el sistema (4) se tiene como máximo $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ciclos límite, donde $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ significa el máximo entero $\frac{n-1}{2}$. También demostraron que la conjetura es cierta para $n = 3$.

Después de la pregunta de Smale se han tenido los siguientes avances:

1. En el 2007 Dumortier, Panazzolo y Roussarie [DPR], demostraron que la conjetura no es cierta para $n = 7$ y mencionaron que su demostración se puede extender para $n \geq 7$ impar.
2. En 2011 De Maesschalck y Dumortier [DM2011], demostraron que para $n \geq 6$ el sistema (2) tiene al menos $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$ ciclos límite.
3. En el 2012 Chengzhi Li y Jaume Llibre [CJ2012], probaron que la ecuación (2) de grado cuatro tiene a lo mas un ciclo límite, y el ciclo límite si existe es hiperbólico. Este resultado da una respuesta positiva a la conjetura de Lins, de Melo y Pugh (1977).

Como se puede observar, falta dar la cota para $n \geq 6$ y probar la conjetura de Lins, de Melo y Pugh [LMP] para un polinomio $F(x)$ de grado 5.

En este trabajo mostraremos un teorema en el cual se prueba que $n = 7$ no se cumple la conjetura de Lins, de Melo y Pugh [LMP], ya que la conjetura dice que a lo más se

deben presentar 3 ciclos límite, mientras que el teorema mencionado considera un sistema que presentan 4 ciclos límite (ver [DPR]).

En este trabajo el material se organiza como sigue:

En el Capítulo 1 se estudian los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en el plano y se menciona la teoría local y global para estos sistemas que será de gran importancia en el desarrollo de los capítulos posteriores. En el Capítulo 2 trabajamos con los teoremas que nos ayudan a encontrar y determinar órbitas periódicas y en el Capítulo 3 enunciamos el teorema que nos garantiza la existencia de 4 ciclos límite para un sistema polinomial de grado 7 y se da la demostración de este teorema. Al final del Capítulo 3 se muestra el cálculo numérico de los ciclos límite para el sistema polinomial considerado.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiamos los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en el plano, enunciándose para el teorema de existencia y unicidad, el teorema de Hartman-Grobman, formas normales, funciones de Liapunov, sistemas gradiente, el teorema de Poincaré-Bendixon y el Mapeo de Poincaré. El análisis se hace local y globalmente. Las definiciones y demostraciones de los teoremas que se dan en este capítulo se encuentran en [P].

1.1. Análisis Local

1.1.1. Teorema de existencia y unicidad

En esta sección, se establecen los principios fundamentales del teorema de existencia y unicidad para un sistema no lineal autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

bajo la hipótesis de que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El método clásico de Picard de las aproximaciones sucesivas se utiliza para probar este teorema. El método de aproximaciones sucesivas, no sólo nos permite establecer la existencia y la unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado a (1.1), sino que también nos permite establecer la continuidad y diferenciabilidad de la solución con respecto a las condiciones iniciales y parámetros. El método de aproximaciones sucesivas de Picard es una de las herramientas básicas utilizadas en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.1.1 Decimos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k si la función

tiene derivada continua hasta de orden k para toda $x \in \mathbb{R}$. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k si la función tiene todas sus derivadas parciales hasta de orden k , continuas.

Definición 1.1.2 Supongamos que $f \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación diferencial (1.1) sobre un intervalo I , si $x(t)$ es diferenciable en I y si para todo $t \in I$, $x(t) \in E$, entonces

$$x' = f(x(t)). \quad (1.2)$$

Donde $x_0 \in E$, $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

en un intervalo I , si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$.

Lema 1.1.1 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f \in C^1(E)$, entonces f es localmente Lipschitz en E . (Ver demostración en [P]).

Ahora podemos enunciar el teorema fundamental de existencia y unicidad para sistemas no lineales

Teorema 1.1.1 Teorema fundamental de existencia y unicidad. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y supongamos que $f \in C^1(E)$. Entonces existe $a > 0$, tal que, el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Observación 1.1.1 Exactamente el mismo método de la prueba demuestra que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución en un intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

1.1.2. Linealización

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.4)$$

Nos interesa determinar los puntos de equilibrio de (1.4) y describir el comportamiento cerca de sus puntos de equilibrio. Se demuestra que el comportamiento del sistema no lineal (1.4) para el punto de equilibrio hiperbólico x_0 se determina cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = A(x), \quad (1.5)$$

con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca del origen. Donde la función lineal $Ax = Df(x_0)x$ se llama la parte lineal de f en x_0 .

Definición 1.1.3 Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama un punto de equilibrio o punto crítico de (1.4) si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 se llama punto de equilibrio hiperbólico de (1.4) si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema lineal (1.5) con la matriz $A = Df(x_0)$ se llama linealización de (1.4) en x_0 .

Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de (1.4), entonces $f(0) = 0$, y por el teorema de Taylor,

$$f(x) = Df(x_0)x + H(x, 0),$$

de aquí se deduce que la función lineal $Df(x_0)x$ es una buena aproximación lineal a la función no lineal $f(x)$ cerca de $x_0 = 0$ y es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (1.4) cerca del punto $x = 0$, será aproximado el comportamiento de su linealización en $x = 0$.

Definición 1.1.4 El flujo de la ecuación diferencial. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ en su intervalo máximo $I(x_0)$. Entonces para todo $t \in I(x_0)$, se define a ϕ_t como

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

y se llama el flujo de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

Nótese que si x_0 es un punto de equilibrio de (1.4) y $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo de la ecuación diferencial ordinaria (1.4), entonces $\phi_t(x_0) = x_0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

x_0 se llama un punto fijo del flujo ϕ_t ; también se llama un cero, un punto crítico o un punto singular del campo vectorial $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se da ahora una clasificación de los puntos de equilibrio de (1.4) de acuerdo a los signos de la parte real de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$.

Definición 1.1.5 Un punto de equilibrio x_0 de (1.4) se llama un sumidero si todos los valores propios de la matriz de $Df(x_0)$ tiene parte real negativa, se le llama fuente si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva y es un silla si es punto de equilibrio hiperbólico (ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero) y $Df(x_0)$ tiene al menos un valor propio con una parte real positiva y por lo menos un valor propio con una parte real negativa.

Ejemplo 1.1.1 Vamos a clasificar todos los puntos de equilibrio del sistema no lineal (1.4) con

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Es claro que $f(x) = 0$ en $x = (1, 0)^T$ y $x = (-1, 0)^T$.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $x = (1, 0)^T$ es una fuente y $x = (-1, 0)^T$ es un silla.

1.1.3. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es otro resultado muy importante en la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.7)$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.8)$$

con $A = Df(x_0)$. Se supondrá que el punto de equilibrio x_0 ha sido trasladado al origen.

Definición 1.1.6 Dos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas, tales como (1.7) y (1.8) se dice que son topológicamente equivalentes en una zona del origen o de tener la misma estructura cualitativa cerca del origen si hay un homeomorfismo H , mapeo de un conjunto abierto U que contiene al origen en un conjunto abierto V que contiene al origen que asigna las trayectorias de (1.7) en U en las trayectorias de (1.8) en V y conserva su orientación en el tiempo, en el sentido de que si una trayectoria es dirigida desde x_1 a x_2 en U , entonces su imagen es dirigida a partir de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si el homeomorfismo preserva la parametrización en el tiempo, se dice entonces que los sistemas (1.7) y (1.8) son topológicamente conjugados en un entorno del origen.

De modo intuitivo el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son los "mismos" vistos de otra manera: permitiendo estirar, doblar o cortar y pegar.

Teorema 1.1.2 Teorema de Hartman-Grobman. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (1.7). Supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(x_0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H , en algún entorno U de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que transforma órbitas del flujo no lineal ϕ_t de (1.7) en órbitas del flujo lineal $e^{tDf(x_0)}$ de (1.8):

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

El homeomorfismo preserva el sentido de las órbitas y se puede elegir de forma que conserva la parametrización en el tiempo.

Hartman-Grobman afirma que es posible deformar de manera continua (alrededor del punto de equilibrio) las trayectorias del sistema no lineal en las trayectorias del sistema linealizado (vía el homeomorfismo).

1.1.4. Formas Normales

En esta sección veremos una teoría que se utiliza para la simplificación de un problema de bifurcación: la teoría de la forma normal. La idea básica es realizar transformaciones de coordenadas que hagan que la expresión analítica de una ecuación sea tan sencilla como sea posible; esta forma simplificada de la ecuación se llama forma normal. En términos generales, la forma normal de un sistema de ecuaciones diferenciales es el elemento más simple de una clase de equivalencia de sistemas diferenciales que poseen el mismo comportamiento cualitativo.

Sea

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.9)$$

$$\dot{x} = J(x) + F(x),$$

en donde J es la jacobiana de f y F consta de los términos de orden n de f . La idea es hacer un cambio de variable que permita ver al sistema (1.9) de forma más sencillo. Si x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico de (1.9), el teorema de Hartman-Grobman nos garantiza la existencia de un homeomorfismo h tal que conjuga a (1.9) con $\dot{x} = Jx$ en una vecindad de x_0 .

El problema ahora es encontrar la expresión "más sencilla" de (1.9) alrededor de un punto de equilibrio no hiperbólico.

Tomemos

$$x = y + h(y) \quad (1.10)$$

con

$$h(y) = 0(|y|^2) \text{ cuando } y \text{ tiende a } 0,$$

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + 0(|x|^3),$$

donde F_2 consta de los términos de orden 2 de f .

De la ecuación (1.10) tenemos

$$\dot{x} = \dot{y} + Dh \cdot \dot{y} = (I + Dh)\dot{y}$$

sustituyendo en (1.9)

$$\begin{aligned} (I + Dh)\dot{y} &= J[y + h(y)] + F_2(y + h(y)) + 0(|y|^3) \\ &= Jy + Jh(y) + F_2(y) + 0(|y|^3) \\ \dot{y} &= (I + Dh)^{-1}[Jy + Jh(y) + F_2(y) + 0(|y|^3)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Como

$$\begin{aligned}(I + Dh)^{-1} &= I - Dh(y) + 0(|y|^2) \\ \frac{1}{I + Dh} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-Dh)^k = I - Dh + 0(|y|^2).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.11)

$$\dot{y} = Jy + Jh(y) + F_2(y) - DhJy + 0(|y|^3).$$

Ejemplo 1.1.2 Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + ax_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + ex_1x_2 + x_1^3,\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde la Jacobiana del sistema (1.12) está dada como

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

Haciendo el cambio

$$\begin{aligned}x &= y + h(y) \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1y_1^2 + a_2y_1y_2 + a_3y_2^2 \\ b_1y_1^2 + b_2y_1y_2 + b_3y_2^2 \end{pmatrix} + \dots\end{aligned}\tag{1.14}$$

Por otro lado

$$\dot{y} = Jy + Jh(y) + F_2(y) - DhJy + 0(|y|^3)$$

donde

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1y_1^2 + b_2y_1y_2 + b_3y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1^2 \\ y_1^2 + ey_1y_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 2a_1y_1 + a_2y_2 & 2a_3y_2 + a_2y_1 \\ 2b_1y_1 + b_2y_2 & 2b_3y_2 + b_2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 + (b_1 + a)y_1^2 + (b_2 - 2a_1)y_1y_2 + (b_3 - a_2)y_2^2 \\ y_1^2 + (e - 2b_1)y_1y_2 - b_2y_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Si

$$\begin{aligned} b_1 &= -a, \\ b_2 &= 2a_1 = 0, \\ b_3 &= a_2 = 0, \end{aligned}$$

entonces

$$h \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1^2 \end{pmatrix}$$

esto nos lleva a la **forma normal**

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1^2 + (e + 2a)y_1y_2. \end{aligned}$$

1.2. Análisis Global

1.2.1. Estabilidad y Funciones de Liapunov

En esta sección se discute la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema lineal

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.17)$$

La estabilidad de cualquier punto de equilibrio x_0 hiperbólico de (1.17) se determina por los signos de los valores propios de λ_j de la matriz $Df(x_0)$. Un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , es asintóticamente estable si $Re(\lambda_j) < 0$ para $j = 1, \dots, n$ es decir si x_0 es un sumidero. Y un punto de equilibrio x_0 hiperbólico es inestable si se trata de una fuente o un silla. La estabilidad de un punto de equilibrio no hiperbólico suele ser mas difícil de determinar. Un método debido a Liapunov, que es muy útil para decir la estabilidad de los puntos de equilibrio no hiperbólicos se presenta en esta sección.

Definición 1.2.1 Sea ϕ_t el flujo de la ecuación diferencial (1.17) definida para toda $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (1.17) es estable si para toda $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V_\delta(x_0)$ y $t \geq 0$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

Se considera que el límite se satisface para toda x en una vecindad de x_0 , esto no implica que x_0 es estable hay ejemplos de ello. Se puede observar que a partir de los diagramas de fase que un nodo es estable o el foco de un sistema lineal en $\mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable; un nodo inestable o el foco o una silla de un sistema lineal en $\mathbb{R}^2$, es un punto de equilibrio inestable, y un centro de un sistema lineal en $\mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio estable, que no es asintóticamente estable.

De ello se desprende el teorema de la variedad estable y el teorema de Hartman-Grobman, que cualquier sumidero de (1.17) es asintóticamente estable y que cualquier fuente o silla de (1.17) es inestable. Por lo tanto, cualquier punto de equilibrio hiperbólico de (1.17) o es asintóticamente estable o inestable.

Teorema 1.2.1 Si x_0 es un sumidero del sistema no lineal (1.17) y $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$ para todos los valores propios λ_j de la matriz $Df(x_0)$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in V_\delta(x_0)$ el flujo $\phi_t(x)$ de (1.17) satisface

$$|\phi_t(x) - x_0| \leq \epsilon e^{-\alpha t}$$

para toda $t \geq 0$.

Donde los puntos de equilibrio hiperbólicos son asintóticamente estables o inestable, el único momento en que un punto de equilibrio x_0 de (1.17) puede ser estable pero no asintóticamente estable es cuando $Df(x_0)$ tiene un valor propio cero o un par de complejos conjugados, los valores propios imaginarios puros $\lambda_j = \pm ib$. De donde se deduce el siguiente teorema, probado en [HS] que todos los valores propios λ_j de $Df(x_0)$ debe satisfacer $\operatorname{Re}(\lambda_j \leq 0)$ si x_0 es estable.

Teorema 1.2.2 Si x_0 es un punto de equilibrio estable de (1.17) ningún valor propio de $Df(x_0)$ tiene parte real positiva.

Vemos que los puntos de equilibrio estables que no son asintóticamente estable sólo puede ocurrir en los puntos de equilibrio no hiperbólicos. Pero la pregunta de que si cuando un punto de equilibrio no hiperbólico es estable, asintóticamente estable o inestable es una cuestión delicada. El siguiente método, debido a Liapunov (1892 en su tesis doctoral), es muy útil para responder a esta pregunta.

Definición 1.2.2 Si $f \in C^1$, $V \in C^1(E)$, y ϕ_t es el flujo de la ecuación diferencial (1.17) para todo $x \in E$ la derivada de la función $V(x)$ a lo largo de la solución $\phi_t(x)$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x))|_{t=0} = DV(\phi_t(x))\phi'_t(x)|_{t=0}.$$

La última igualdad se deduce de la regla de la cadena. Si $\dot{V}$ es negativa en E entonces $V(x)$ decrece a lo largo de la solución $\phi_t(x_0)$ para $x_0 \in E$ en $t = 0$. Por otra parte, en $\mathbb{R}^2$, si $\dot{V} \leq 0$ con la igualdad sólo en $x = 0$, entonces para los C pequeñas positiva, la familia de curvas $V(x) = C$ constituye una familia de curvas cerradas que encierran el origen y las trayectorias de (1.17) cruzan estas curvas desde su exterior a su interior con el aumento de t , es decir, el origen de (1.17) es asintóticamente estable. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del siguiente teorema y se llama una función de Liapunov.

Teorema 1.2.3 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo x_0 . Supongamos que $f \in C^1(E)$ y que $f(x_0) = 0$. Supongamos, además, que existe una función real $V \in C^1(E)$ que satisface $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$.

Entonces

- (a).- Si $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in E$, x_0 es estable.
- (b).- Si $\dot{V}(x) < 0$ para toda $x \in V - \{x_0\}$, x_0 es asintóticamente estable.
- (c).- Si $\dot{V}(x) > 0$ para toda $x \in V - \{x_0\}$, x_0 es inestable.

Observación 1.2.1 Si $\dot{V}(x) = 0$ para toda $x \in E$ entonces las trayectorias de (1.17) se encuentran en las superficies de $\mathbb{R}^n$ o curvas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$V(x) = c.$$

Ejemplo 1.2.1 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3. \end{aligned} \tag{1.18}$$

El origen $x_0 = (0, 0)^T$ es un punto de equilibrio no hiperbólico de este sistema. En efecto

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & -3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$V(x) = x_1^4 + x_2^4,$$

es una función de Liapunov y

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3(-x_2^3) + 4x_2^3(x_1^3)$$

$$\dot{V}(x) = 0.$$

Por lo tanto las curvas solución se encuentran en las curvas cerradas $x_1^4 + x_2^4 = c^2$ que dan la vuelta al origen. El origen es por tanto un punto de equilibrio estable de este sistema que no es asintóticamente estable. Nótese que $Df(0) = 0$ para este ejemplo, es decir, $Df(0)$ tiene dos valores propios cero.

Ejemplo 1.2.2 Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_2 + x_2x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2.$$

El origen $(0, 0, 0)^T$ es un punto de equilibrio para este sistema y

$$Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $Df(0)$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, es decir $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio no hiperbólico. Por lo tanto, se utiliza el método de Liapunov. Una función de la forma

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2$$

con las constantes positivas c_1 , c_2 y c_3 por lo general vale la pena intentarlo, al menos cuando el sistema contiene algunos términos lineales. Calculando $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)x_1x_2x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1x_2.$$

Por tanto, si $c_2 = 2c_1$ y $c_3 = c_1 > 0$ se tiene que $V(x) > 0$ para toda $x \neq 0$ y $\dot{V}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y por lo tanto, según el teorema 1.2.3, $x = 0$ es estable. Por otra parte, la elección de $c_1 = c_3 = 1$ y $c_2 = 2$, vemos que las trayectorias de este sistema radican en los elipsoides $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = c^2$. Hemos comentado anteriormente que todos los sumideros son asintóticamente estable. Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, no todos los puntos de equilibrio asintóticamente estables son sumideros. Por supuesto, un punto de equilibrio hiperbólico es asintóticamente estable si se trata de un sumidero.

Ejemplo 1.2.3 Consideremos la siguiente modificación del sistema del ejemplo 1.2.2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3.\end{aligned}$$

La función de Liapunov del ejemplo 1.2.2,

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

satisface $V(x) > 0$ y

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0$$

para $x \neq 0$. Por lo tanto, por el teorema 1.2.3, el origen es asintóticamente estable, pero no es un sumidero donde los valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ no tienen parte real negativa.

1.2.2. Sistemas Gradiente y Sistemas Hamiltoniano

A continuación se estudian los sistemas Hamiltoniano donde es fácil encontrar una función de Liapunov

Definición 1.2.3 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y sea $H \in C^2(E)$, donde $H = H(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{1.19}$$

donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \text{ y } \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T,$$

se llama un sistema hamiltoniano con n grados de libertad en E . Los grados de libertad son el número de coordenadas libres con que se describe un sistema.

Ejemplo 1.2.4 La función hamiltoniana

$$H(x, y) = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)/2$$

es la función de energía para el péndulo esférico

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_1 = -x_1$$

$$\dot{y}_2 = -x_2,$$

este sistema es equivalente a el par de osciladores armónicos acoplados

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 0.$$

Todos los sistemas hamiltoniano son conservadores en el sentido de que la función hamiltoniana o la energía total $H(x, y)$ permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

Teorema 1.2.4 (Conservación de la energía). El total de energía $H(x, y)$ del sistema hamiltoniano (1.19) se mantiene constante a lo largo de las trayectorias de (1.19).

Demostración.

La derivada total de la función hamiltoniana $H(x, y)$ a lo largo de las trayectorias $x(t)$, $y(t)$ es

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Así, $H(x, y)$ es constante a lo largo de cualquier curva solución de (1.19) y las trayectorias de (1.19) se encuentran en la superficies de $H(x, y) = \text{constante}$.

A continuación se establecen algunos resultados muy específicos acerca de la naturaleza de los puntos críticos de los sistemas hamiltoniano con un grado de libertad. Tenga en cuenta que los puntos de equilibrio o puntos críticos del sistema (1.19) corresponden a los puntos críticos de la función hamiltoniana $H(x, y)$ donde $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el punto crítico en cuestión ha sido trasladado al origen.

Lema 1.2.1 *Si el origen es un foco del sistema hamiltoniano*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_y(x, y) \\ \dot{y} &= -H_x(x, y)\end{aligned}\tag{1.20}$$

entonces el origen no es un máximo local estricto o un mínimo local de la función hamiltoniana $H(x, y)$.

Definición 1.2.4 *Un punto crítico del sistema*

$$\dot{x} = f(x)$$

en el que $Df(x_0)$ no tiene valores propios cero se denomina un punto crítico no degenerado del sistema, de lo contrario, se denomina un punto crítico degenerado del sistema.

Note que cualquier punto crítico no degenerado de un sistema planar es punto crítico hiperbólico del sistema o un centro del sistema linealizado.

Teorema 1.2.5 *Cualquier punto crítico no degenerado de un sistema analítico hamiltoniano (1.20) es silla (topológicamente) o un centro; además, (x_0, y_0) es un silla (topológicamente) para (1.20) si esto es una silla de la función hamiltoniana $H(x, y)$ y un máximo local estricto o el mínimo de la función $H(x, y)$ es un centro para (1.20).*

Ver demostración en [P].

Sistema Newtoniano.

Un tipo particular de sistema hamiltoniano con un grado de libertad es el sistema de Newton con un grado de libertad,

$$\ddot{x} = f(x)$$

donde $f \in C_1(a, b)$. Esta ecuación diferencial se puede escribir como un sistema en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x).\end{aligned}\tag{1.21}$$

La energía total para este sistema $H(x, y) = T(y) + U(x)$, donde $T(y) = y^2/2$ es la energía cinética y

$$U(x) = -\int_{x_0}^0 f(s)ds$$

es la energía potencial. Con esta definición de $H(x, y)$ vemos que el sistema newtoniano (1.21) puede ser escrito como un sistema hamiltoniano. Se pueden establecer los hechos para el sistema newtoniano

$$\dot{x} = Ax,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} H_{yx}(0, 0) & H_{yy}(0, 0) \\ H_{xx}(0, 0) & -H_{xy}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

La energía total $H(x, y)$ para el sistema Newtoniano (1.21) me da una buena función de Liapunov para el sistema (1.21).

Teorema 1.2.6 *Los puntos críticos del sistema newtoniano (1.21) se encuentran todos en el eje x . El punto $(x_0, 0)$ es un punto crítico del sistema newtoniano (1.21) si y sólo si es un punto crítico de la función $U(x)$, es decir, un cero de la función $f(x)$. Si $(x_0, 0)$ es un máximo local estricto de la función analítica $U(x)$, esto es un silla para (1.21). Si $(x_0, 0)$ es el mínimo local estricto de la función analítica $U(x)$, es un centro de (1.21). Si $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión horizontal de la función $U(x)$, es una cúspide para el sistema (1.21). Y finalmente, el diagrama de fase de (1.21) es simétrico con respecto al eje x .*

Ver demostración en [P].

Ejemplo 1.2.5 *Se construirá el diagrama de fase para el péndulo no amortiguado*

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Esta ecuación diferencial se puede escribir como un sistema newtoniano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\operatorname{sen} x\end{aligned}\tag{1.22}$$

donde la energía potencial es

$$U(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t dt = 1 - \cos x.$$

Lo que se hace es encontrar los ceros del sistema (1.22) y linealizarlo para encontrar los puntos de equilibrio hiperbólicos y no hiperbólicos. Los puntos críticos de este sistema son de la forma $x = 2n\pi$ y $x = (2n+1)\pi$, $\forall n = \pm 0, 1, 2, \dots$. Donde el sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluando los puntos críticos en el sistema linealizado para $x_{2n} = 2n\pi$:

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

los valores propios para este caso son $\lambda_{1,2} = 0 \pm i$. Aquí se obtienen centros.

Y para $x_{2n+1} = (2n+1)\pi$:

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los valores propios para este caso son $\lambda_{1,2} = \pm 1$ donde esto son puntos sillar.

Entonces lo que se obtienen son puntos de equilibrio no hiperbólico para el primer caso e hiperbólico para el segundo caso.

La dinámica de los puntos de equilibrio hiperbólicos ya se conoce, lo que no se conoce es la dinámica de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, entonces lo que se hace a continuación es construir una función de Liapunov para conocer la dinámica de los puntos de equilibrio no hiperbólicos y así tener la dinámica global del sistema (1.22).

Una función de Liapunov para el sistema (1.22) es la siguiente

$$H(x, y) = T(y) + U(x) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x.$$

Derivando esta función

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, y) &= (y)\dot{y} + (\sin x)\dot{x} \\ \dot{H}(x, y) &= y(-\sin x) + (\sin x)(y) \\ \dot{H}(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Se comprueba que cumple con los requisitos de una función de Liapunov. Entonces se concluye que las trayectorias de (1.22) se encuentran en las curvas de $\mathbb{R}^2$ que se define como

$$H(x, y) = c.$$

La gráfica de la función $U(x)$ y el diagrama de fase para el péndulo no amortiguado, que se sigue a partir del teorema 1.2.6 se muestra en la figura 1.1. Observe que el origen en el diagrama de fase para el péndulo no amortiguado se muestra en la figura 1.1 corresponde a la posición de equilibrio estable del péndulo que cuelga hacia abajo. Los puntos críticos en $(\pm\pi, 0)$ corresponden a la posición de equilibrio inestable en el que el péndulo es hacia arriba. Las trayectorias cerca del origen son casi círculos y se aproxima por las curvas solución del péndulo lineal

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Las trayectorias cerradas que rodean el origen describen los movimientos habituales periódicos asociados con un péndulo donde el péndulo se balancea hacia adelante y hacia atrás. Las separatrices unen a las sillas en $(\pm\pi, 0)$ corresponden a movimientos con la energía total $H = 2$, en el caso que el péndulo se acerca a la posición inestable vertical cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Y las trayectorias fuera de los lazos de las separatrices, donde $H > 2$, corresponde a movimientos donde el péndulo se dirige a la parte superior.

Definición 1.2.5 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $V \in C^2(E)$. Un sistema de la forma

$$\dot{x} = -\text{grad}V(x) \tag{1.23}$$

donde

$$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T,$$

se llama un sistema gradiente en E .

Note que los puntos de equilibrio o los puntos críticos del sistema gradiente (1.23) corresponde a los puntos críticos de la función $V(x)$, donde el $\text{grad}V(x) = 0$. Los puntos

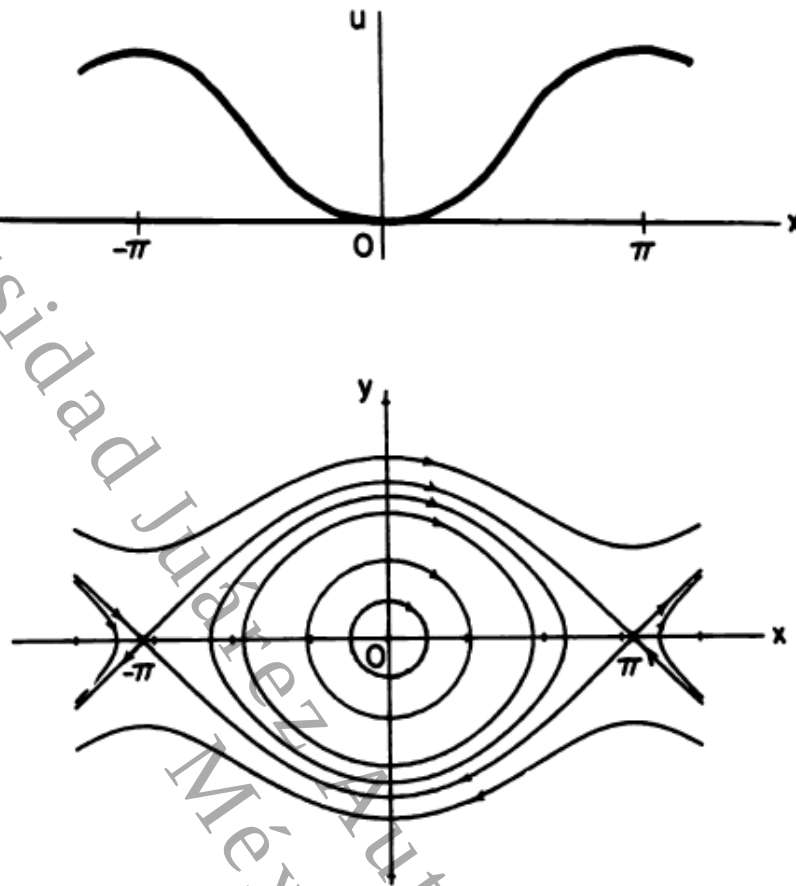


Figura 1.1: Retrato fase para el péndulo no amortiguado (1.22).

donde el $\text{grad}V(x) \neq 0$ se llaman puntos regulares de la función $V(x)$. En los puntos regulares de $V(x)$ el vector $\text{grad}V(x)$ es perpendicular a la superficie de nivel $V(x) = \text{constante}$ a través del punto.

Teorema 1.2.7 En los puntos regulares de la función $V(x)$, las trayectorias del sistema gradiente (1.23) cruzan las superficies de nivel $V(x) = \text{constante}$ ortogonalmente. Y los mínimos locales estrictos de la función $V(x)$ son los puntos de equilibrio asintóticamente estables de (1.23.)

Ver demostración en [P].

Ya que la linealización de (1.23) en cualquier punto crítico x_0 tiene una matriz

$$A = \left[\frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

que es simétrica, los valores propios de A son todos reales y A es diagonalizable con respecto a una base ortonormal.

Una vez más, para sistemas gradientes en el plano, podemos ser muy específicos sobre la naturaleza de los puntos críticos del sistema.

Teorema 1.2.8 *Cualquier punto crítico no degenerado de un sistema gradiente analítico (1.23) en $\mathbb{R}^2$ es silla o nodo; además, si (x_0, y_0) es un silla de la función $V(x, y)$ esto es un silla de (1.23) y si (x_0, y_0) es un máximo local estricto o mínimo de la función $V(x, y)$, es entonces respectivamente un nodo estable o inestable para (1.23).*

Ver demostración en [P].

Ejemplo 1.2.6 Sea $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$. El sistema gradiente (1.23) entonces tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x(x - 1)(x - 1/2) \\ \dot{y} &= -2y.\end{aligned}$$

Hay puntos críticos en $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ y $(1, 0)$. Se sigue del teorema 1.2.8 que $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son nodos estables y que $(1/2, 0)$ es un silla para este sistema. Las curvas de nivel de $V(x, y) = \text{constante}$ y las trayectorias de este sistema se muestran en la figura 1.2

Un último asunto, que muestra que hay una relación interesante entre el gradiente y sistemas hamiltoniano, se considera a continuación, solo se dan los detalles para sistemas planos.

Definición 1.2.6 Considere el sistema en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{1.24}$$

El sistema ortogonal a (1.24) es definido como el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Q(x, y) \\ \dot{y} &= -P(x, y).\end{aligned}\tag{1.25}$$

Claramente (1.24) y (1.25) tienen los mismos puntos críticos y puntos regulares, las trayectorias de (1.24) son ortogonales a las trayectorias de (1.25). Además los centros de (1.24) corresponden a los nodos de (1.25), Las sillas de (1.24) corresponden a los sillas de (1.25) y los focos de (1.24) corresponden a los focos de (1.25). También, si (1.24) es un

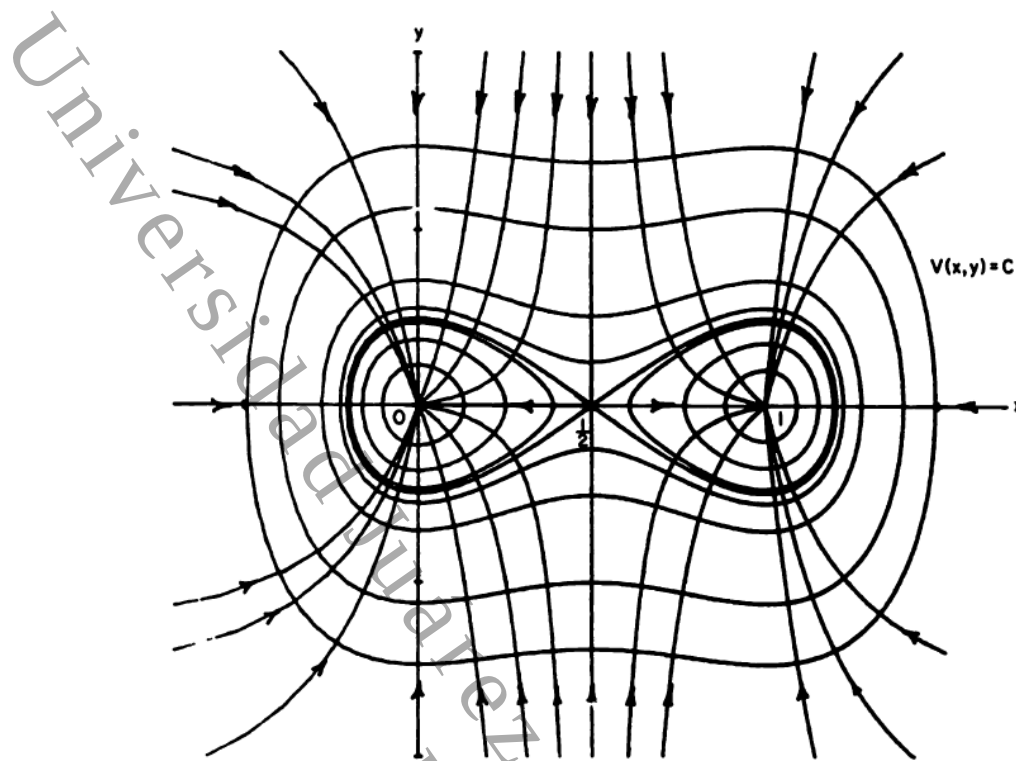


Figura 1.2: Las curvas de nivel $V(x, y) = \text{constante}$ (curvas cerradas) y las trayectorias del sistema de gradiente en el ejemplo 1.2.6.

sistema Hamiltoniano con

$$\begin{aligned} P &= H_y \\ Q &= -H_x, \end{aligned}$$

entonces (1.25) es un sistema gradiente y viceversa.

Teorema 1.2.9 *El sistema (1.24) es un sistema hamiltoniano si el sistema (1.25) ortogonal a (1.24) es un sistema gradiente.*

Ver demostración en [P].

En dimensiones más altas, tenemos esto si (1.19) es un sistema hamiltoniano con n grados de libertad, entonces el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.26)$$

ortogonal a (1.19) es un sistema gradiente en $\mathbb{R}^{2n}$ y las trayectorias del sistema gradiente (1.26) cruzan las superficies $H(x, y) = \text{constante}$, ortogonalmente. En el ejemplo 1.2.6, si tomamos $H(x, y) = V(x, y)$, entonces la figura 1.2 ilustra la ortogonalidad de las trayectorias de los flujos hamiltonino y el gradiente, el flujo hamiltoniano se arremolina en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

1.2.3. Ciclos límite

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.27)$$

con $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\phi_t(x)$ denota la solución a la ecuación diferencial (1.27), que al tiempo $t = 0$ pasa por x_0 definimos

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\},$$

y a esto le llamamos la trayectoria de (1.27) que pasa por x_0 .

Definición 1.2.7 Definimos la trayectoria positiva (véase la figura 1.3), a través del punto x_0 como

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0), t \geq 0\}$$

de forma similar se define la trayectoria negativa como

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0), t \leq 0\}.$$

Donde cualquier trayectoria $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

Definición 1.2.8 Un punto $p \in E$ es un punto ω -límite de la trayectoria $\phi_t(x)$ del sistema (1.27) si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ de tal manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = p.$$

De manera similar si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n}(x) = q,$$

y el punto $q \in E$, entonces el punto q se llama punto α -límite de la trayectoria $\phi_t(x)$ de (1.27).

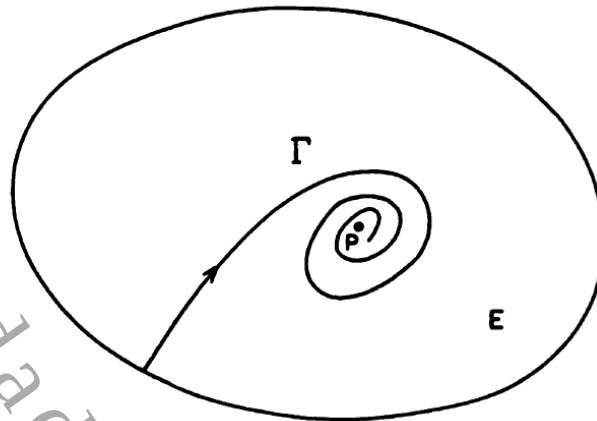


Figura 1.3: Una trayectoria de Γ en (1.27) que se aproxima al punto ω -límite $p \in E$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 1.2.9 El conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria Γ se llama el conjunto ω -límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$.

Definición 1.2.10 El conjunto de los puntos α -límite de una trayectoria Γ se denomina el conjunto α -límite de Γ y se denota por $\alpha(\Gamma)$.

Definición 1.2.11 El conjunto de todos los puntos límite de Γ , $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ se denomina el conjunto límite de Γ .

Definición 1.2.12 (Órbita periódica). Una órbita periódica Γ del sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.28)$$

es cualquier curva cerrada solución del sistema (1.28) que no es un punto de equilibrio del sistema (1.28).

Definición 1.2.13 Un subconjunto $E \in \mathbb{R}^2$ es llamado positivamente invariante (negativamente invariante) bajo el flujo ϕ si, para todo $p \in E$, la órbita positiva $\Gamma^+(p)$ (la órbita negativa $\Gamma^-(p)$) a través de p permanece en E , es decir $\Gamma^+(p) \subset E$.

Definición 1.2.14 (Ciclo límite). Un ciclo límite Γ de un sistema planar es una órbita periódica de (1.28) el cual es el α u ω -límite de alguna trayectoria de (1.28) que no sea Γ .

Definición 1.2.15 Si un ciclo Γ es el ω -límite de cualquier trayectoria en alguna vecindad de Γ , entonces Γ es llamado un ciclo ω -límite o un ciclo límite estable.

Definición 1.2.16 Si Γ es el α - ciclo límite de cualquier trayectoria en alguna vecindad de P ; entonces Γ es llamado un α - ciclo límite o ciclo límite inestable.

Definición 1.2.17 Si Γ es el ω - límite de una trayectoria que no es Γ y el α - límite de una trayectoria que no es Γ , entonces Γ es llamado un ciclo límite semi-estable.

Véase la figura 1.4.

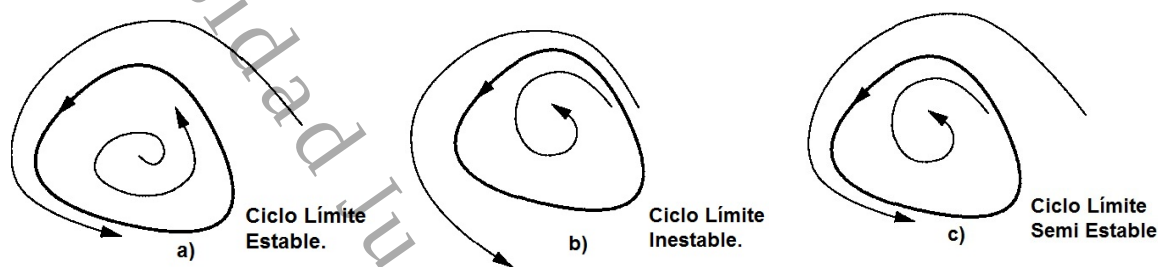


Figura 1.4: Ciclos límite a) Estable b) Inestable c) Semi estable.

1.2.4. Teorema de Poincaré - Bendixon en el Plano.

El teorema de Poincaré-Bendixon permite clasificar todos los posibles comportamientos en $\mathbb{R}^2$ para funciones de clase C^1 que tengan un número finito de puntos críticos, los cuales se pueden clasificar a groso modo en convergencia (divergencia) a puntos críticos u órbitas periódicas.

En la sección anterior, se definieron los conjuntos α y ω -límite de una trayectoria Γ . Para sistemas analíticos en el plano, con $x \in \mathbb{R}^2$ y el ω -límite de una trayectoria son objetos simples: el ω -límite establecido de cualquier trayectoria de dos dimensiones de un sistema analítico es o bien un punto crítico, una órbita periódica (ciclo) o un ciclo compuesto separatriz.

Teorema 1.2.10 Supongamos que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y que (1.27) tiene una trayectoria Γ con Γ^+ ; contenido en un subconjunto compacto F de E . Entonces el $\omega(\Gamma)$ es una de las siguientes:

1. un punto de equilibrio,
2. una órbita periódica,
3. o una gráfica.

Si $\omega(\Gamma)$ no contiene ningún punto crítico de (1.27), el $\omega(\Gamma)$ es una órbita periódica de (1.27).

Ver demostración en [P].

Ejemplo 1.2.7 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2)\end{aligned}\tag{1.29}$$

observe que el origen es el único punto fijo del sistema. Para ello debemos construir una región anular en la cual podamos aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson. Para ello calculamos la derivada de la función

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

a lo largo de las soluciones del sistema, así

$$\dot{V}(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2).$$

Por lo tanto $\dot{V}(x, y) \geq 0$ para $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$, y $\dot{V}(x, y) \leq 0$ para $x^2 + y^2 > 1$, cualquier solución que inicie en la región anular $\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1$ permanecerá en esta región anular para $t \geq 0$. Ya que el origen no está contenido en la cerradura de la región anular entonces es posible aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson. Por lo tanto existe al menos una órbita periódica en la región anular (ver figura 1.5).

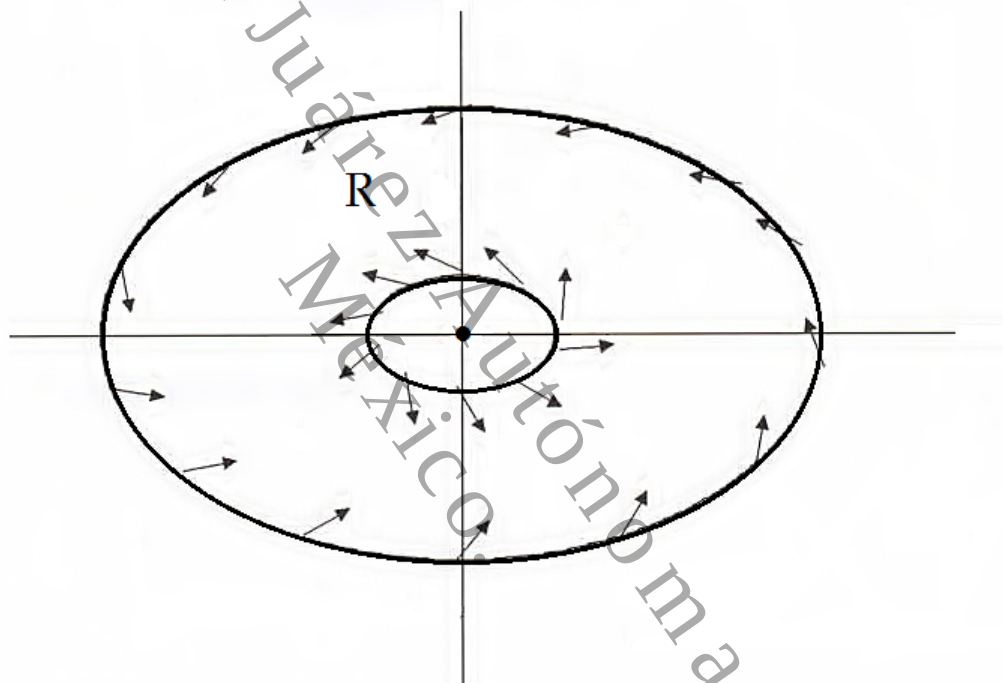


Figura 1.5: Región anular del ejemplo 1.2.7.

Capítulo 2

Órbitas periódicas

En este capítulo se dan herramientas importantes para obtener órbitas periódicas en el plano, así como también la estabilidad y la bifurcación de estas.

2.1. El Mapeo de Poincaré

Una de las herramientas básicas para el estudio de la estabilidad y bifurcaciones de las órbitas periódicas es la transformación de Poincaré o mapeo de primer retorno, definida por Henri Poincaré en 1881. La idea de la transformación de Poincaré es: Si Γ es una órbita periódica del sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

a través del punto de x_0 y Σ es un hiperplano perpendicular a Γ en x_0 , entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 , la solución de (2.1) a través de x en $t = 0$, $\phi_t(x)$, cruzará Σ de nuevo en un punto $P(x)$ cerca de x_0 , (ver figura 2.1). La aplicación $x \rightarrow P(x)$ se llama la transformación de Poincaré.

El mapeo de Poincaré también se puede definir cuando Σ es una superficie lisa, a través de un punto $x_0 \in \Gamma$, que no es tangente a Γ en x_0 . En este caso, la superficie Σ como se dice, cruza la curva Γ transversalmente en x_0 . El próximo teorema establece la existencia y continuidad de $P(x)$ del mapeo de Poincaré y de su primera derivada $DP(x)$.

Teorema 2.1.1 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^1(E)$. Supongamos que $\phi_t(x_0)$ es una solución periódica de (2.1) de periodo T y que el ciclo

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

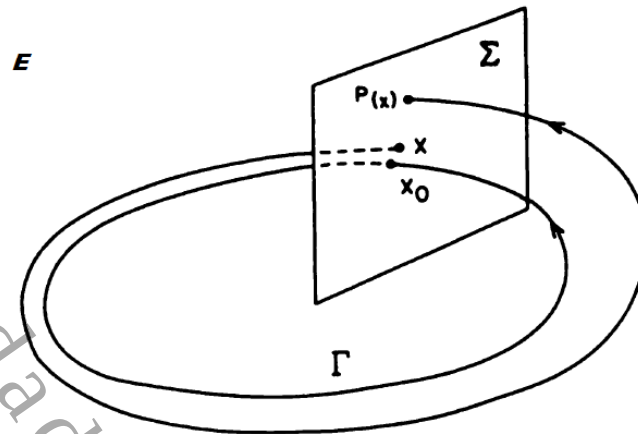


Figura 2.1: La aplicación de Poincaré.

se encuentra en E . Sea Σ el hiperplano ortogonal a Γ en x_0 ; es decir, que

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Existe un $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$, definida y continuamente diferenciable para $x \in V_\delta(x_0)$, tal que $\tau(x_0) = T$ y

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

para todo $x \in V_\delta(x_0)$ tal que $\Gamma(x_0) = T$ y $\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$ para todo $x \in V_\delta(x_0)$.

La demostración de este teorema se encuentra en [P].

Definición 2.1.1 Sea Γ , Σ , δ y $\tau(x)$ que se define como en el teorema 2.1.1. Entonces, para $x \in V_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la función

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$$

se llama la transformación de Poincaré para Γ en x_0 .

Ejemplo 2.1.1 El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

tiene un ciclo límite que está representado por $\gamma = (\cos(t), \sin(t))^T$. Si hacemos la transformación a coordenadas polares al sistema (2.2), se tiene

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

cuando $r = 1$ tenemos una órbita periódica que es representado por $\Gamma = (\cos(t), \sin(t))^T$.

El mapeo de Poincaré para Γ se puede encontrar por la solución del sistema escrito en coordenadas polares con la condición inicial $r(0) = r_0$ y $p(0) = p_0$. La primera ecuación puede resolverse ya sea como un ecuación diferencial separable o como una ecuación de Bernoulli. La solución es propuesta por

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{1/2}$$

y

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Si Σ es el rayo $\theta = \theta_0$ a través del origen, entonces Σ es perpendicular a Γ y la trayectoria a través del punto $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$ en $t = 0$, intersecta el rayo en $\theta = \theta_0$, nuevamente en el instante $t = 2\pi$, (ver figura 2.2). De ello se desprende que la transformación de Poincaré es propuesta por

$$P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{1/2}.$$

Claramente $P(1) = 1$ correspondiente al ciclo Γ y se ve que

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-3/2}$$

y que $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$.

A continuación citamos algunas de los resultados concretos para la transformación de Poincaré de los sistemas planos. Para los sistemas planos, si trasladamos el origen hasta el punto $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$, la línea normal Σ será una línea a través del origen (ver figura 2.3). El punto $0 \in \Gamma \cap \Sigma$ divide la línea Σ en dos segmentos abiertos Σ^+ y Σ^- donde Σ^+ se encuentra totalmente en el exterior de Γ . Sea s la distancia a lo largo de Σ con $s > 0$ para los puntos de Σ^+ y $s < 0$ para los puntos en Σ^- .

De acuerdo con el teorema 2.1.1, el mapeo de Poincaré $P(s)$ se define por $|s| < \delta$ y tenemos $P(0) = 0$. Con el fin de ver cómo la estabilidad del ciclo Γ está determinado por $P'(0)$, vamos a introducir la **función de desplazamiento**

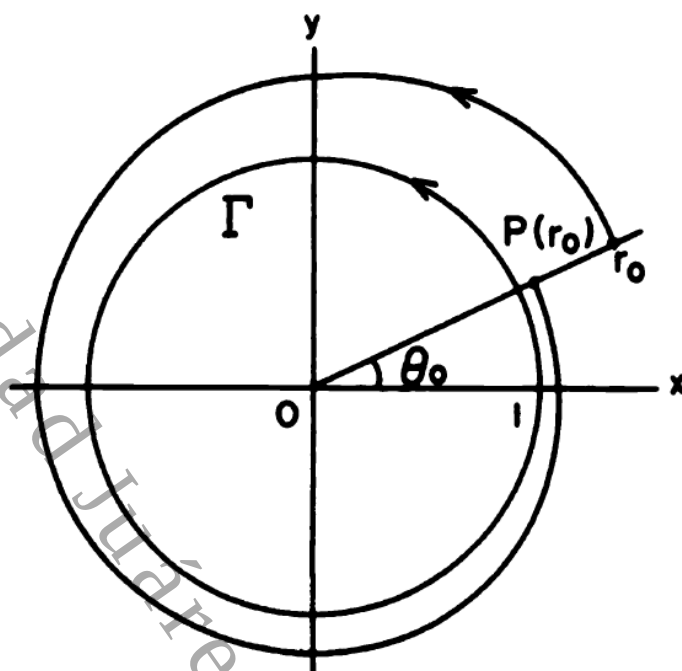


Figura 2.2: El mapeo de Poincaré para el sistema en el ejemplo 2.1.1.

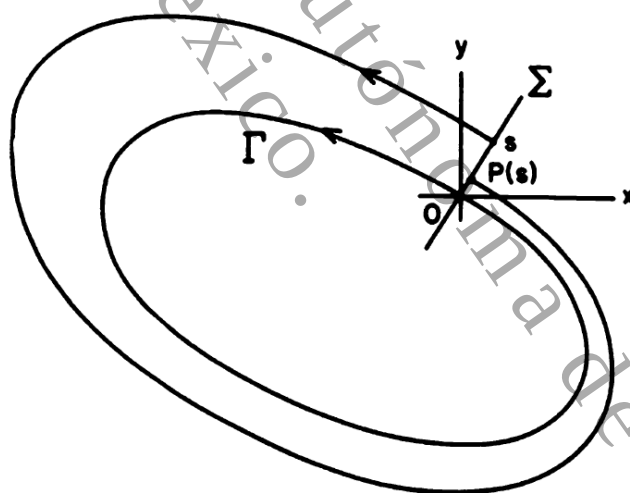


Figura 2.3: La línea recta Σ normal a Γ en 0.

11

$$d(s) = P(s) - s.$$

Entonces $d(0) = 0$ y $d'(s) = P'(s) - 1$, y se sigue del teorema del valor medio que para $|s| < \delta$

$$d(s) = d'(\sigma)s$$

para algunos σ entre 0 y s . Como $d(s)$ es continua, el signo de $d(s)$ será el mismo que el signo de $d'(0)$ para $|s|$ suficientemente pequeño mientras $d'(0) \neq 0$. Así, si $d'(0) < 0$ se sigue que $d(s) < 0$ para $s > 0$ y que $d(s) > 0$ para $s < 0$, es decir, el ciclo Γ es un ciclo límite estable o un ciclo w -límite (ver figura 2.3). Del mismo modo, si $d'(0) > 0$, entonces Γ es un ciclo límite inestable o un ciclo α -límite. Tenemos los resultados correspondientes que si $P(0) \neq 0$ y $P'(0) < 1$, entonces Γ es un ciclo límite estable y si $P(0) = 0$ y $P'(0) > 1$, entonces Γ es un ciclo límite inestable. Así, la estabilidad de Γ se determina por la derivada de la transformación de Poincaré.

En cuanto a esto, el teorema siguiente que da una fórmula para $P'(0)$ en términos de la $f(x)$ de lado derecho de (2.1), es muy útil (véase [A] p.118).

Teorema 2.1.2 Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que $f \in C^1(E)$. Sea $\gamma(t)$ una solución periódica de (2.1) de período T . Entonces la derivada del mapeo de Poincaré $P(s)$ a lo largo de la línea recta Σ normal a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$ en $x = 0$ está dada por

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt.$$

La demostración de este teorema se encuentra en [P].

Corolario 2.1.1 Bajo las hipótesis del teorema 2.1.2, la solución periódica de $\gamma(t)$ es un ciclo límite estable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$$

y es un ciclo límite inestable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Puede ser un ciclo límite estable, inestable o semi-estable o puede pertenecer a una banda continua de ciclos si esta cantidad es cero.

La demostración de este corolario se encuentra en [P].

Ejemplo 2.1.2 Para el ejemplo 2.1.1 tenemos $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$, $\nabla \cdot f(x, y) = 2 - 4x^2 - 4y^2$ y

$$\int_0^{2\pi} \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t) dt = -4\pi.$$

Por lo tanto, con $s = r - 1$, se sigue del teorema 2.1.2, que

$$P'(0) = e^{-4\pi}$$

que concuerda con el resultado encontrado en el ejemplo 2.1.1 por cálculo directo. Puesto que $P'(0) < 1$, el ciclo $\gamma(t)$ es un ciclo límite estable en este ejemplo.

Definición 2.1.2 Sea $P(s)$ la transformación de Poincaré para una Γ ciclo de un plano del sistema analítico (2.1) y sea

$$d(s) = P(s) - s$$

la función de desplazamiento. Entonces, si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ y } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

Γ se llama ciclo múltiple de multiplicidad k . Si $k = 1$ entonces Γ es llamado un ciclo límite simple.

Tomamos nota de que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \gamma(t), 0 \leq t \leq T\}$ es un ciclo límite simple de (2.1) si y sólo si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt \neq 0.$$

Se puede demostrar que si k es par entonces, Γ es un ciclo límite semi-estable y si k es impar, entonces Γ es un ciclo límite estable si $d^{(k)}(0) < 0$ y Γ es un ciclo límite inestable si $d^{(k)}(0) > 0$.

2.2. Determinación de órbitas periódicas

En esta sección trabajaremos con campos vectoriales que presentan bifurcaciones en las cuales es posible observar órbitas periódicas. Para detectar el número de órbitas periódicas que pueden presentarse haremos uso del concepto de lento-rápido, el cual definiremos con precisión en los siguientes apartados.

2.2.1. Campos vectoriales lentos rápidos

Sea M una dos variedad diferenciable, orientable y sin frontera. Sea $X_{\lambda, \epsilon}$ una familia de campos vectoriales diferenciables sobre M , definido para $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$ (para un determinado $\epsilon_1 > 0$) y para $\lambda \in \Lambda$, donde Λ es un subconjunto compacto del plano.

Definición 2.2.1 Un campo $X_{\lambda, \epsilon}$ es de tipo lento-rápido con parámetro singular $\epsilon > 0$, si existe una λ -familia de variedades diferenciables S_λ , formada por puntos singulares del campo $X_{0, \lambda}$.

Observemos que S_λ en general puede ser un subconjunto de los puntos críticos del campo $X_{0,\lambda}$ y que no necesariamente S_λ es conexo. De hecho el conjunto de puntos críticos $X_{0,\lambda}$ puede estar formado por diferentes componentes (curvas críticas). A estas curvas críticas se les llama **curvas lentas**.

Sobre una curva lenta la dinámica está determinada por la dirección de la otra componente del campo cuando $\epsilon > 0$, la cual induce una dirección de movimiento sobre la curva crítica; a esto se le conoce como la **dinámica lenta**.

Definición 2.2.2 Un punto $p \in S_\lambda$, punto crítico de $X_{0,\lambda}$, se denomina normalmente hiperbólico (que puede ser atractor o repulsor), si la parte lineal de $X_{0,\lambda}$ en p tiene un valor propio distinto de cero (respectivamente negativo o positivo). Si los dos valores propios tienen parte real cero decimos que p es un **punto de contacto**. En ese caso, se distingue entre un punto de contacto nilpotente (si $D(x_0, \lambda)$ en p es nilpotente) y un punto de contacto degenerado (si $D(x_0, \lambda)$ en p es cero).

Ejemplo 2.2.1 En el sistema de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} &= -\epsilon x,\end{aligned}\tag{2.3}$$

se tiene una curva crítica que contiene dos puntos de contacto y los otros puntos son normalmente hiperbólicos, (véase la figura 2.4).

Cuando $\epsilon = 0$, el sistema presenta una λ -familia de curvas críticas, determinadas por la ecuación

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

La parte lineal del sistema para $\epsilon = 0$, está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 - x^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto si $1 - x^2 \neq 0$, estamos en los puntos normalmente hiperbólicos y si $1 - x^2 = 0$, obtenemos los puntos de contacto. Resolviendo obtenemos que los puntos de contacto son ± 1 , donde -1 es un máximo y 1 es un mínimo. Estos puntos son nilpotentes de segundo orden, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si $\epsilon > 0$ obtenemos que la componente vertical del campo sobre la curva crítica apunta hacia abajo cuando $x > 0$ y hacia arriba cuando $x < 0$, por lo que el flujo lento apunta hacia abajo a la derecha de cero y hacia arriba a la izquierda de cero (véase la figura 2.5).

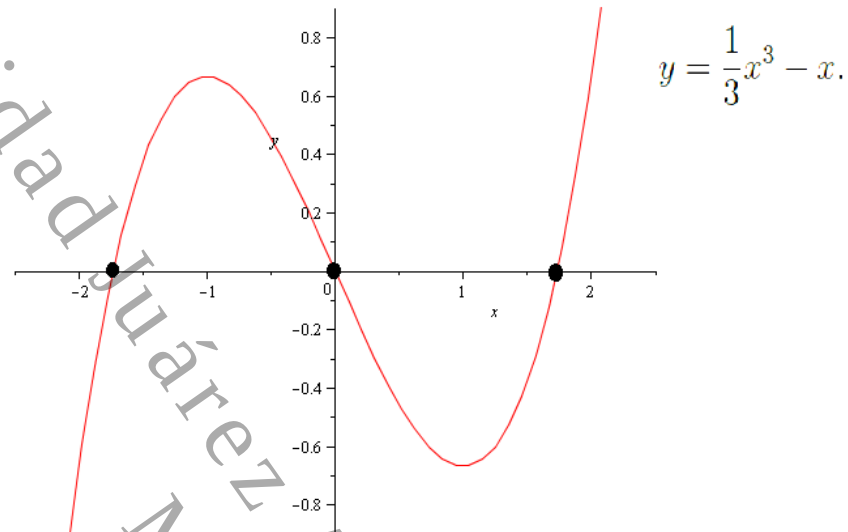


Figura 2.4: Curva crítica de la ecuación de Van der Pol.

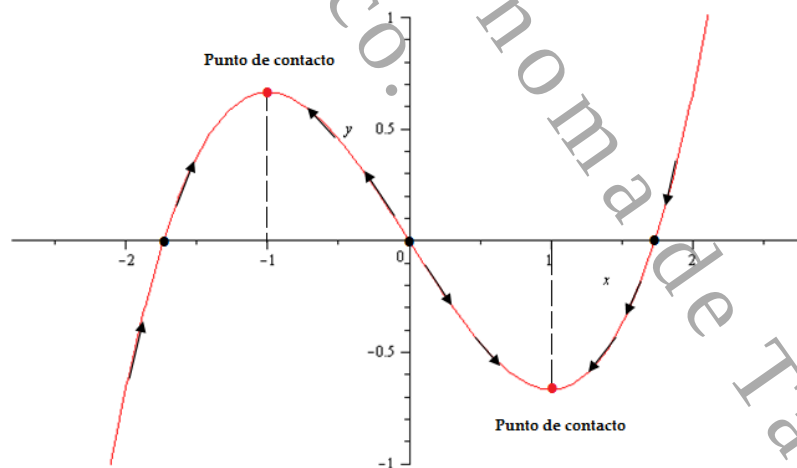


Figura 2.5: Dinámica lenta en la ecuación de Van der Pol.

Para el análisis de las dinámicas que se generan al variar el parámetro ϵ , es importante considerar la forma normal que presenta la ecuación diferencial alrededor de un punto de contacto nilpotente. Para ello citamos el siguiente resultado, el cual puede ser consultado en [MDR].

Proposición 2.2.1 Sea $X_{\epsilon,\lambda}$ un sistema lento rápido diferenciable sobre una superficie diferenciable M . Si p es un punto de contacto nilpotente para el parámetro $\lambda = \lambda_0$, entonces existe un cambio de coordenadas (x, y) , tal que $p = (0, 0)$ y módulo la multiplicación por una función diferenciable estrictamente positiva, el sistema $X_{\epsilon,\lambda}$ es C^∞ equivalente a la siguiente forma normal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f(x, \lambda) \\ \dot{y} &= \epsilon(g(x, \epsilon, \lambda) + (y - f(x, \lambda))h(x, y, \epsilon, \lambda)),\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde las funciones f , g y h son diferenciables en una vecindad de $(0, 0, 0, \lambda_0)$ y $f(0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda_0) = 0$.

En el caso de la ecuación de Van der Pol (2.3), haciendo el cambio de coordenadas $(X, Y) = (x - 1, y + \frac{2}{3})$, el cual nos traslada el punto de contacto $(1, -\frac{2}{3})$ al origen, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} &= -\epsilon(x - 1).\end{aligned}\tag{2.5}$$

En su forma normal corresponde a $f(x, \lambda) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $g(x, \epsilon, \lambda) = -(x - 1)$ y $h(x, y, \epsilon, \lambda) = 0$.

Definición 2.2.3 Un punto de contacto nilpotente de $X_{0,\lambda}$ es regular si

$$g(0, 0, \lambda_0) \neq 0.$$

Es de orden finito cuando existe un $n \geq 2$ (llamado el orden de la singularidad nilpotente) tal que

$$f(x, \lambda_0) = cx^n + \mathcal{O}(x^{n+1}), \text{ para } c \neq 0 \text{ y } x \text{ cerca de cero.}$$

Un punto de contacto nilpotente se llama singular cuando $g(0, 0, \lambda_0) = 0$.

Definición 2.2.4 Un punto de contacto nilpotente singular p tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, \lambda_0) \neq 0$, tiene índice ± 1 , si

$$\text{sign} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, \lambda_0) = \mp 1.$$

Por ejemplo en la ecuación de Van der Pol (2.5) obtenemos que el punto de contacto correspondiente al $(1, -\frac{2}{3})$ es regular. De la misma manera se obtiene que $(-1, \frac{2}{3})$ es un punto de contacto regular.

2.2.2. Ciclos lentos-rápidos

Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= \epsilon g(x, y),\end{aligned}\tag{2.6}$$

un sistema que depende de un parámetro ϵ . Cuando $\epsilon = 0$, la segunda ecuación es igual a cero por lo que el campo vectorial no tiene componente vertical. A esta ecuación se le llama *ecuación de capa*. En este sistema las *cero-clinas* vienen dadas por las raíces de $f(x, y) = 0$.

Definición 2.2.5 *Un ciclo lento-rápido de una ecuación de capa es una curva cerrada simple, unión de trayectorias regulares (arcos horizontales en el complemento de la curva lenta) y arcos en la curva lenta (arcos críticos). Además, la curva debe admitir una orientación compatible con la orientación natural de las órbitas rápidas y con la orientación de la dinámica lenta (ver figura 2.6).*

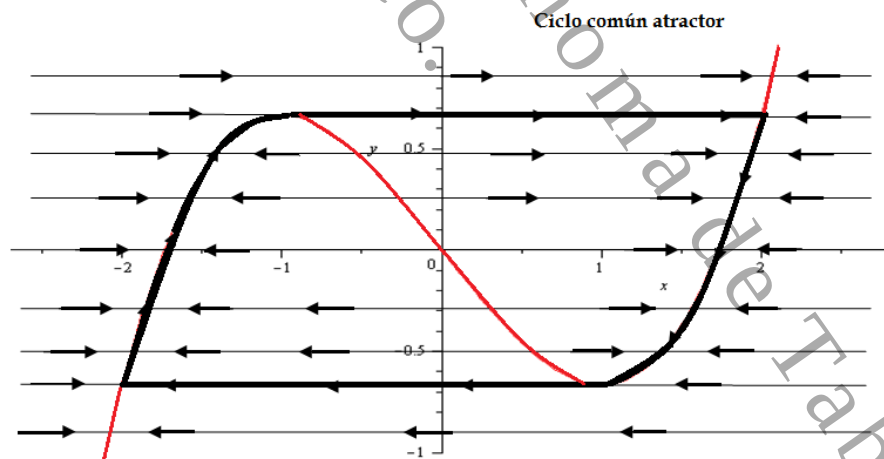


Figura 2.6: Ciclo lento-rápido para la ecuación de Van der Pol.

Definición 2.2.6 *Un ciclo lento-rápido de una ecuación de capa es común, si todos los arcos críticos son del mismo tipo. En particular, es **atractor/repulsor**, si puntos cerca de los arcos críticos son atraídos/rechazados (ver figuras 2.6, 2.7).*

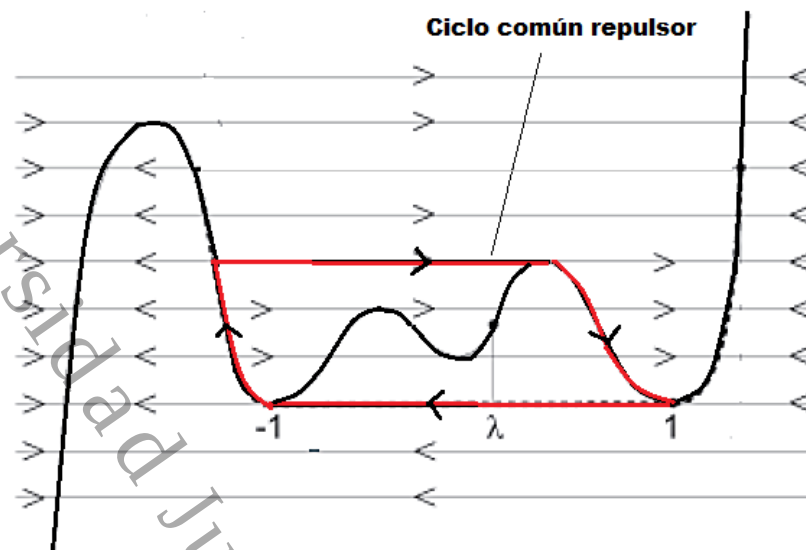


Figura 2.7: Ciclo lento-rápido común para la ecuación $\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = 0$.

Definición 2.2.7 Un ciclo lento-rápido que contiene arcos críticos de diferentes tipos, se denomina ciclo engañoso (ver figura 2.8).

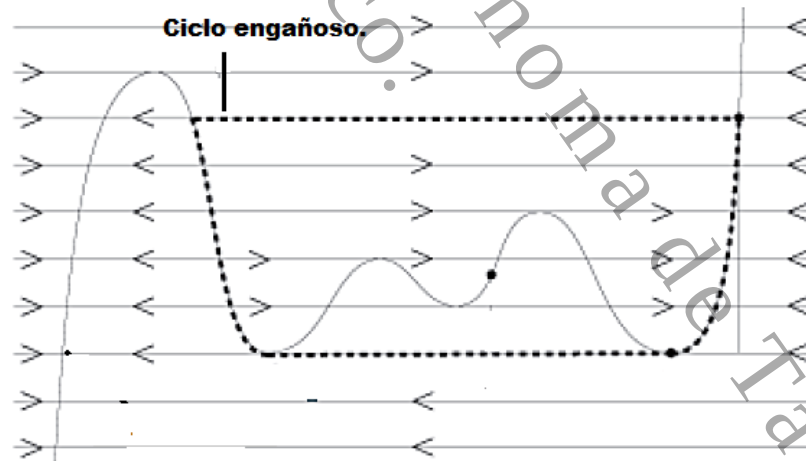


Figura 2.8: Ciclo engañoso para la ecuación $\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = 0$.

1

Definición 2.2.8 Un ciclo lento-rápido regular es un ciclo lento-rápido sin singularidades en los arcos lentos y tal que sus puntos de contacto son regulares.

A los segmentos lento-rápido del tipo engañoso rápido-rápido (véase la figura 2.11) y engañoso rápido-lento (véase la figura 2.10) se denominan segmentos lento-rápido de tipo engañoso, a pesar de que estos segmentos pueden ser parte de un ciclo común. A los segmentos lento-rápido que no son del tipo engañoso se les llama segmentos lento-rápido fuertemente común.

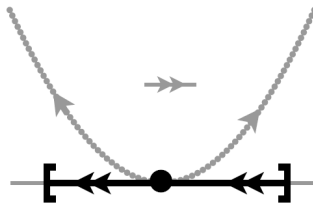


Figura 2.9: Segmento engañoso rápido-rápido

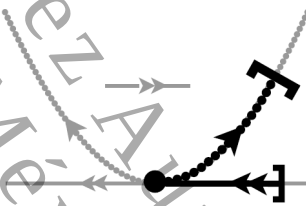


Figura 2.10: Segmento engañoso rápido-lento

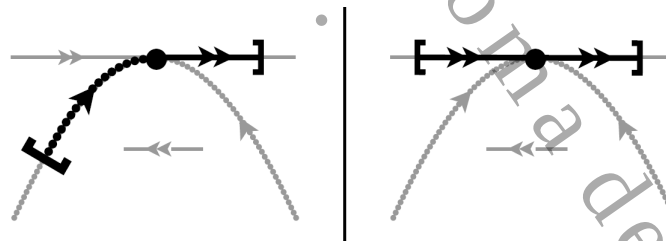


Figura 2.11: Segmento lento-rápido (salto) y rápido-rápido (embudo)

4

Definición 2.2.9 *Un ciclo lento-rápido fuertemente común es un ciclo lento-rápido común regular que solo contiene segmentos lento-rápido fuertemente común (y por ello carece de segmentos lento-rápido de tipo engañoso.)*

Para terminar esta sección, enunciamos el siguiente teorema que nos garantiza la existencia de órbitas periódicas a partir de un ciclo lento rápido fuertemente común. La demostración de este teorema puede ser consultada en [MDR].

Teorema 2.2.1 Si existe $\lambda_0 \in \Lambda$ y Γ un ciclo lento rápido fuertemente común del campo vectorial X_{ϵ, λ_0} , entonces existe un $\epsilon_0 \in (0, \epsilon_1]$, una vecindad $\Lambda_0 \subset \Lambda$ de λ_0 y una vecindad $\mathcal{T}$ de Γ de tal manera que para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ y $\lambda \in \Lambda_0$ el campo vectorial $X_{\epsilon, \lambda}$ tiene un único ciclo límite hiperbólico en $\mathcal{T}$. Además, este ciclo límite tiende a Γ en la métrica de Hausdorff, cuando (ϵ, λ) tiende a $(0, \lambda_0)$.

Corolario 2.2.1 El sistema de Van der Pol (2.3) tiene un único ciclo límite hiperbólico.

Demostración (Corolario 2.2.1). El ciclo lento rápido generado para la ecuación de Van der Pol del ejemplo 2.2.1 es un ciclo que contiene dos puntos de contacto regulares por lo que es un ciclo lento rápido fuertemente común (atractor). Del teorema 2.2.1 concluimos que el sistema tiene un único ciclo límite hiperbólico atractor (véase la figura 2.12).

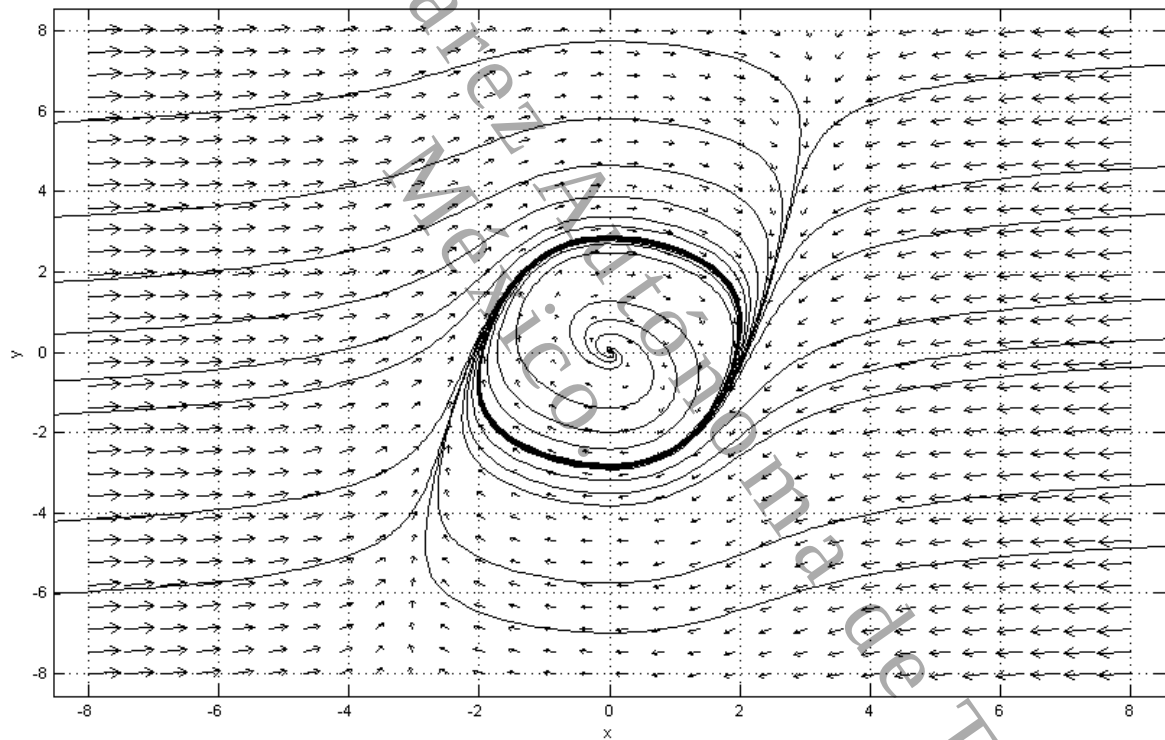


Figura 2.12: Ciclo límite hiperbólico atractor para el sistema de Van der Pol (2.3).

Capítulo 3

Perturbación al sistema de Liénard

En este capítulo mostraremos el resultado principal de este trabajo el cual consiste en demostrar que un sistema polinomial de grado 7 de la ecuación de Liénard presenta al menos 4 ciclos límite, contradiciendo a la conjetura de Lins Neto, de Melo y Pugh, [LMP].

3.1. Definición del sistema de Liénard

Sean f y g dos funciones polinomiales continuamente diferenciables en $\mathbb{R}$. A la ecuación diferencial de segundo grado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (3.1)$$

se le conoce como la ecuación de Liénard. Cuando $g(x) = x$ y f es un polinomio de grado $2n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene la ecuación

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0, \quad (3.2)$$

y se le conoce como la ecuación de Liénard clásica.

Haciendo el cambio de variables $y = \dot{x} + F(x)$ y $f(x) = F'(x)$ donde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, la ecuación (3.2) se transforma en el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde F es un polinomio de grado $2n + 1$. Al sistema (3.3) se le conoce como sistema clásico de Liénard [S]. El problema es dar una cota para el número de ciclos límites en

términos del grado del polinomio $F(x)$ para el sistema (3.3).

Si $\mathbf{L}$ es el campo vectorial definido por el sistema diferencial (3.3), observamos que para cualquier polinomio F , el campo vectorial $\mathbf{L}$ tiene un único punto crítico en el origen. Como cada ciclo límite u órbita periódica del sistema debe contener un punto crítico, tenemos que todos los ciclos límite deben encerrar al origen. Esto llevó a Lins, de Melo y Pugh (ver [LMP]) a trabajar el sistema como una perturbación del centro

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Así, el sistema resulta ser una perturbación de un campo vectorial hamiltoniano con hamiltoniano $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Se puede probar que a lo mas n ciclos límite se bifurcan del centro cuando se mueve el parámetro. Esta cota para el número de ciclos límite en la vecindad del campo vectorial hamiltoniano, llevó a los autores suponer que este número era válido de manera global. Es decir que cuando $F(x)$ es de grado $2n + 1$, el número de ciclos límite está acotado por n .

La conjetura es cierta para $n = 1$ y lo demostró Lins de Melo y Pugh [LMP], cuando $n = 2$, aun no se conoce la respuesta, es decir, para un polinomio de grado 5. También se sabe que para $n \geq 6$ la conjetura no es cierta. En este capítulo demostraremos que un sistema de grado 7 puede tener al menos cuatro ciclos límite, es decir que la conjetura es falsa para $n = 3$.

3.2. Sistemas lento rápido

Antes de trabajar de manera general con los sistemas de Liénard lento-rápido daremos algunas definiciones que nos serán de importancia.

Definición 3.2.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto crítico p_0 de f es **no degenerado** si $\det(H(f)(p_0)) \neq 0$, donde $H(f)$ es la matriz Hessiana de f .

Definición 3.2.2 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es **de Morse** si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Consideremos de manera general el sistema de Liénard lento-rápido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -\epsilon(x - \lambda),\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde F es una función de Morse. Si p_i , $i = 1, \dots, k$, son los puntos críticos de F , los puntos $(p_i, F(p_i))$ corresponden a puntos sobre la curva lenta de la ecuación de capa. Estos puntos, son puntos finales de arcos críticos que normalmente son hiperbólicos (atractor o repulsor), ya que F es de Morse (dos-variedad). Además a lo largo de cualquier subintervalo compacto de estos arcos se tiene una dos variedad central, transversa al plano $\epsilon = 0$. Esta dos variedad aparece porque el segundo valor propio es cero y estamos sobre una curva de puntos singulares.

Una condición necesaria para que una curva cerrada sea un ciclo lento-rápido es que pueda ser orientado de manera compatible con la dirección de las órbitas regulares del campo, fuera de la curva lenta y con la dirección del movimiento de la dinámica lenta sobre la curva lenta. En la figura 3.1, se muestra un ciclo lento rápido correspondiente al sistema (3.5).

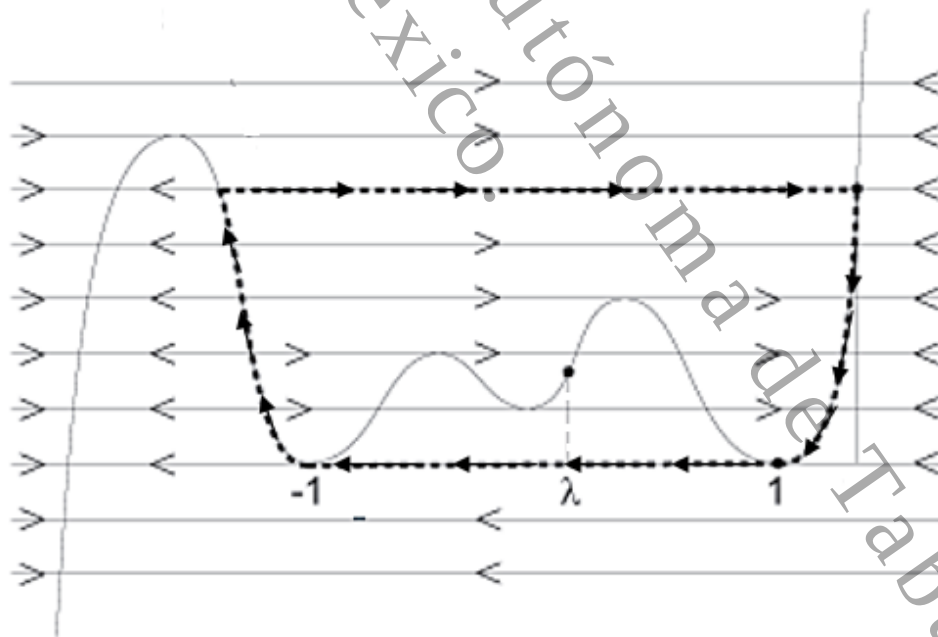


Figura 3.1: Ciclo lento rapido engañoso para el sistema de Liénard lento-rápido (3.5)

Un sistema genérico lento-rápido (3.5) corresponde a una función de Morse con distintos valores críticos ($F(p_i) \neq F(p_j)$ si $p_i \neq p_j$) tal que λ no es un punto crítico de F . De manera genérica, el polinomio F de grado $2n + 1$ tiene n máximos locales y n mínimos

locales por lo que el sistema (3.5) presenta de manera genérica a lo mas n ciclos lento-rápido común. En consecuencia, del teorema 2.2.1 tenemos que el sistema polinomial (3.5) presenta de manera genérica a los mas n ciclos límite, cuando el grado de F es $2n + 1$ y $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

Los ciclos engañosos aparecen, por ejemplo, cuando el punto singular está localizado en un punto crítico de la curva lenta o cuando dos valores extremos del mismo tipo de la curva lenta son iguales y están localizados en lados diferentes del punto singular. En el primer caso se tiene una bifurcación del tipo Van der Pol y puede producir múltiples ciclos engañosos los cuales generarán múltiples ciclos límite, [DR2001]. En el segundo caso se puede construir un ciclo engañoso el cual será perturbado en múltiples ciclos límite como lo establece el teorema 3.2.1, el cual enunciaremos posteriormente. Antes de ello daremos algunas definiciones y notación que será necesaria.

3.2.1. La integral de la divergencia lenta

Supongamos que $F(x)$ en la ecuación (3.5) es reemplazado por una familia de polinomios $F_{v,a}(x)$ con $(v, a) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ cerca de $(v_0, 0)$. Así, el sistema se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F_{v,a}(x), \\ \dot{y} &= -\epsilon(x - \lambda).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Llamamos a $L_{v,\lambda,a,\epsilon}$ la familia correspondiente de sistemas lentos-rápidos. Supongamos que $F_{v,0}$ tiene dos mínimos en el mismo nivel, es decir en ± 1 , y que

$$\frac{\partial (F_{0,a}(1) - F_{0,a}(-1))}{\partial a}\bigg|_{a=0} \neq 0.\tag{3.7}$$

Sea $\gamma_l(v)$ el arco crítico repulsor que comienza en $(-1, F_{v,0}(-1)) = (-1, 0)$ y $\gamma_r(v)$ el arco crítico atractor que llega en $(1, F_{v,0}(1)) = (1, 0)$, siguiendo la dirección de la dinámica lenta (véase la figura 3.1.) El arco crítico $\gamma_r(v)$ es parametrizado por $x \in (1, p'(v))$, donde $p'(v)$ es el siguiente punto crítico de $F_{v,0}$ a la derecha de 1 o es ∞ si no hay otro punto crítico. Supongamos que existe un intervalo $[m, M] \subset (1, p'(v_0))$, tal que para cada $x \in (m, M)$, y v cerca de v_0 la órbita regular $R(v, x)$ de la ecuación de capa $L_{v,\lambda,0,0}$, comienza en el punto $\gamma_l(v)$ y termina en $(x, F_{v,0}(x))$ con x - coordenada $\xi(v, x)$. Para cada $x \in [m, M]$ se tiene un ciclo engañoso $\Omega_x(v)$ el cual contiene una órbita regular en el nivel $\{y = F_{v,0}(x)\}$ (véase la figura 3.1).

Una herramienta esencial para estudiar las bifurcaciones del ciclo engañoso $\Omega_x(v)$, es

la **integral de la divergencia lenta**

$$I_{v,\lambda}(x) = \int_{\xi(v,x)}^{-1} \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds + \int_1^x \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds, \quad (3.8)$$

definida para $x \in [m, M]$ y (v, λ) cerca de $(v_0, 0)$. Esto denota la integral de la divergencia calculada en los puntos críticos del ciclo engañoso, e integrada sobre el tiempo lento. $I_{v,\lambda}(x)$ representa el límite, cuando ϵ tiende a 0, de $\epsilon \tilde{I}_{v,\lambda,\epsilon}(\gamma)$, donde $\tilde{I}_{v,\lambda,\epsilon}(\gamma)$ representa la integral de la divergencia a lo largo de los ciclos límite γ del sistema perturbado. Consideremos $\tilde{x} \in [m, M]$. Como $\tilde{x}$ no es punto crítico de $F_{v,0}(x)$, existe una vecindad de $\tilde{x}$, tal que $F_{v,0}(x)$ es un difeomorfismo y puede ser usado para parametrizar una sección transversa Σ a la órbita regular $R(v, \tilde{x})$.

Con esta notación estamos listos para enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 *Si la condición*

$$\left. \frac{\partial (F_{0,a}(1) - F_{0,a}(-1))}{\partial a} \right|_{a=0} \neq 0,$$

se cumple y para alguna $v_0 \in \mathbb{R}^p$, la λ -familia $I_{v_0,\lambda}(x)$, define una familia 1-paramétrica con una bifurcación en $(\bar{x}, \lambda_0)$, entonces para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existe una función continua $a(\epsilon)$ con $a(0) = 0$ de tal manera que la (λ, a) -familia $L_{v_0,\lambda,a,\epsilon}$ contiene un ciclo límite de multiplicidad 3 cerca de $\Omega_{\bar{x}}(v_0)$ para $a = a(\epsilon)$ y $\lambda = \lambda_0$. Tal ciclo se desdobra genéricamente en función de los parámetros $\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_0$ y $\tilde{a} = a - a(\epsilon)$.

Este teorema es un caso particular del teorema 2 de [DR2007], y es parte esencial de la demostración del teorema 3.3.1. Este resultado reduce el estudio de los ciclos límite que se bifurcan de un ciclo engañoso $\Omega_{\bar{x}}(v_0)$ al estudio de la bifurcación de los ceros de la familia de las integrales $I_{v,\lambda}(x) = I(v, \lambda, x)$, que simplemente llamamos la **integral de la divergencia lenta**.

Proposición 3.2.1 *Sea $F_{0,0}(x)$ una función par, $F_{v,0}(\xi(v, x)) = F_{v,0}$, $\xi_{0,x}(x) = -x$. En particular tenemos la siguiente relación que es válida para (v, λ) en una vecindad de $(0, 0)$,*

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(v, \lambda(v, x), x) = 0 \text{ si y sólo si } \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

Demostración.

Utilizando el hecho de que $\frac{F'_{0,0}(x)^2}{x^2}$ es una función par, se tiene que

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}(v, \lambda, x)|_{(v,\lambda)=(0,0)} = \int_{-x}^{-1} \frac{F'_{0,0}(s)^2}{s^2} ds + \int_1^x \frac{F'_{0,0}(s)^2}{s^2} ds = 2 \int_1^x \frac{F'_{0,0}(s)^2}{s^2} ds > 0 \quad (3.10)$$

para toda $x > 1$.

Para calcular las derivadas parciales con respecto a x , observemos que derivando parcialmente con respecto a x la relación $F_{v,0}(\xi(v, x)) = F_{v,0}$, $\xi_{0,x}(x) = -x$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{v,0}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{v,0}(\xi(v, x)) = \frac{\partial}{\partial x} F_{v,0}(\xi(v, x)) \frac{\partial}{\partial x} \xi(v, x).$$

Despejando

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(v, x) = \frac{F'_{v,0}(x)}{F'_{v,0}(\xi(v, x))}. \quad (3.11)$$

De la regla de la cadena tenemos que si una función $F(x)$ está definida mediante la siguiente integral

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

entonces $F'(x)$ está dada por

$$F'(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ya que

$$I_{v,\lambda}(x) = \int_{\xi(v,x)}^{-1} \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds + \int_1^x \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x}(v, \lambda, x) &= \left(\frac{F'_{v,0}(-1)^2}{-1 - \lambda} \right) (-1)' - \left(\frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))^2}{\xi(v, x) - \lambda} \right) (\xi(v, x))' \\ &+ \left(\frac{F'_{v,0}(x)^2}{x - \lambda} \right) (x)' - \left(\frac{F'_{v,0}(1)^2}{1 - \lambda} \right) (1)' \\ &= \left(\frac{F'_{v,0}(x)^2}{x - \lambda} \right) - \left(\frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))^2}{\xi(v, x) - \lambda} \right) (\xi(v, x))' \\ &= \frac{F'_{v,0}(x)^2}{x - \lambda} - \left(\frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))^2}{\xi(v, x) - \lambda} \right) \left(\frac{F'_{v,0}(x)}{F'_{v,0}(\xi(v, x))} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial I}{\partial x}(v, \lambda, x) = F'_{v,0}(x) \left(\frac{F'_{v,0}(x)}{x - \lambda} - \frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))}{\xi(v, x) - \lambda} \right). \quad (3.13)$$

Si

$$\frac{\partial I}{\partial x}(v, \lambda, x) = F'_{v,0}(x) \left(\frac{F'_{v,0}(x)}{x - \lambda} - \frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))}{\xi(v, x) - \lambda} \right) = 0,$$

entonces

$$\left(\frac{(\xi(v, x) - \lambda) F'_{v,0}(x) - (x - \lambda) F'_{v,0}(\xi(v, x))}{(x - \lambda)(\xi(v, x) - \lambda)} \right) = 0,$$

$$(\xi(v, x) - \lambda) F'_{v,0}(x) - (x - \lambda) F'_{v,0}(\xi(v, x)) = 0.$$

Así que, si

$$\lambda(v, x) = \frac{F'_{v,0}(\xi(v, x))x - F'_{v,0}(x)\xi(v, x)}{F'_{v,0}(\xi(v, x)) - F'_{v,0}(x)}, \quad (3.14)$$

entonces $\frac{\partial I}{\partial x}(v, \lambda(v, x), x) = 0$. Derivando (3.13) con respecto a x , tenemos que

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(v, \lambda(v, x), x) = -\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial \lambda}(v, \lambda(v, x)) \frac{\partial \lambda}{\partial x}(v, x),$$

donde $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial \lambda}(v, \lambda, x)$ está dada por

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial \lambda}(v, \lambda(v, x), x) = F'_{v,0}(x) \left(\frac{F'_{v,0}(x)}{(x - \lambda)^2} - \frac{F'_{v,0}(\xi)}{(\xi - \lambda)^2} \right).$$

En consecuencia $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial \lambda}(0, 0, x) = 2 \left(\frac{F'_{0,0}(x)}{x} \right)^2 > 0$ para $x > 1$ (bajo la hipótesis de que $F_{0,0}(x)$ es par).

En particular tenemos la siguiente relación que es válida para (v, λ) en una vecindad de $(0, 0)$,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(v, \lambda(v, x), x) = 0 \text{ si y sólo si } \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0. \quad (3.15)$$

3.3. Teorema principal

Para construir un sistema que pueda tener mas de tres ciclos límite, usaremos una familia de sistemas de parámetros lento-rápido y nos concentraremos en el análisis de una familia en particular.

En primer lugar, observemos que podemos introducir un coeficiente positivo ϵ en el término del lado derecho de la segunda ecuación del sistema (3.3), haciendo el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (x, \sqrt{\epsilon}y)$ y un reescalamiento en el tiempo $\tau = \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}$.

Supongamos además que el punto crítico no está fijo en el origen sino que depende de un parámetro λ , y que por lo tanto el punto crítico está en $(\lambda, F(\lambda))$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Además vamos a suponer que F depende de otros parámetros. Vamos a considerar una familia a tres parámetros $P_{c,e}(x) + ax$, $a \in \mathbb{R}$, $(c, e) \in \mathbb{R}^2$, donde

$$P_{c,e}(x) = (x^2 - 1)^2(ce x + 1)(x^2 + ex + \frac{1}{8}). \quad (3.16)$$

Para ϵ muy cercano a cero obtendremos el sistema de Liénard lento-rápido

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - P_{c,e}(x) - ax, \\ \dot{y} &= -\epsilon x + \epsilon \lambda, \end{aligned} \quad (3.17)$$

como una función de los parámetros $(c, e, \lambda, a, \epsilon) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, cerca de $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Para $\epsilon = 0$, tenemos una familia de ecuaciones de capas cuyas curvas críticas (también llamado curvas lentas) están dadas por $y = F_{c,e}(x) + ax$, (véase la figura 3.2). Podemos interpretar estas ecuaciones de capas límites como sistemas en la frontera del espacio de sistemas de Liénard.

3.3.1. Análisis de los ciclos comunes y engañosos.

En esta sección analizaremos los ciclos comunes y los ciclos engañosos que aparecen en el sistema de Liénard (3.17).

Notemos que como el polinomio $P_{c,e}(x)$ es mónico y de grado siete, la curva crítica presentará a lo mas tres máximos locales y tres mínimos locales por lo que la ecuación de capa ($\epsilon = 0$) presentará a lo más 3 ciclos comunes. En el caso que $a \neq 0$, el número de ciclos comunes es menor que tres. Mientras que para $a = 0$, se puede encontrar un ciclo

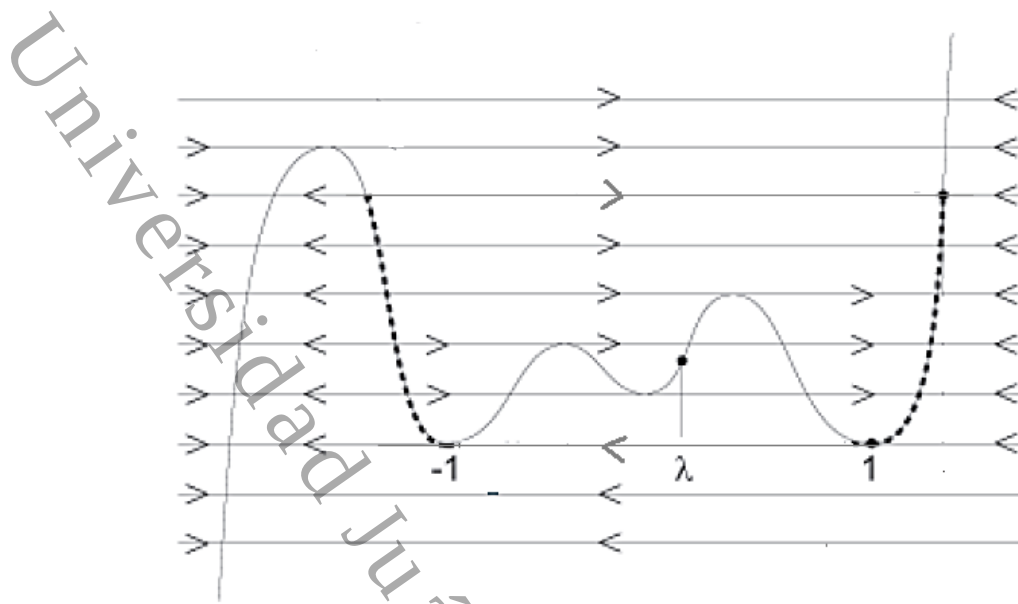


Figura 3.2: Curva lenta para el sistema de Liénard (3.17)

engañoso. Para construir este ciclo, observemos que $P_{c,e}(x)$, tiene un máximo global en el intervalo $[-1, 1]$, en el punto $\frac{1}{2}$, cuando $c > 0$ y $e > 0$ son lo suficientemente pequeños. El punto singular $s(\lambda) = (\lambda, P_{c,e}(\lambda))$, que es el único punto crítico del sistema cuando $\epsilon > 0$. Este punto separa a la curva lenta en dos partes; en el lado izquierdo, la dirección del campo vectorial sobre la curva es hacia arriba y del lado derecho la dirección del campo es hacia abajo. Esto nos permite construir el ciclo lento rápido, (véase la figura 3.2).

Como la función es estrictamente creciente en el intervalo $(1, \infty)$ tenemos que existe $m_0 > 1$, donde la función alcanza el valor máximo correspondiente a $P_{c,e}(\frac{1}{2})$, es decir, $P_{c,e}(m_0) = P_{c,e}(\frac{1}{2})$. Si tomamos $\bar{x} > m_0 > 1$, donde m_0 es la solución de la ecuación $P_{0,0}(x) = P_{0,0}(\frac{1}{2}) = \frac{27}{128}$, esto es, $\bar{x} > m_0 = \frac{1}{4}\sqrt{22}$, entonces la ecuación de capa de (3.17) tiene un ciclo engañoso $\Omega_{\bar{x}}(c, e)$, (véase la figura 3.3). Este ciclo engañoso contiene una trayectoria regular en el nivel $y = P_{c,e}(\bar{x})$ y dos mínimos locales en $(\pm 1, 0)$.

Para demostrar que se pueden generar tres ciclos límites hiperbólicos, enunciamos el siguiente teorema el cual es un resultado adicional al teorema 3.2.1 y puede ser consultado en [DPR].

Teorema 3.3.1 Sea $m_0 = \frac{\sqrt{22}}{4}$, la raíz más grande de $P_{0,0}(x) - \frac{27}{128}$. Si m y M son dos números reales tales que $m_0 < m < M$, entonces existen dos funciones analíticas $C(e, \bar{x})$, $\Lambda(e, \bar{x})$ definidas en $[0, e(m, M)] \times [m, M]$, donde $e(m, M)$ es pequeño, tal que si se toma cualquier valor fijo $(e, \bar{x}) \in [0, e(m, M)] \times [m, M]$, el sistema reducido $\tilde{\mathbf{L}}_{(\lambda, a, \epsilon)} = \mathbf{L}_{(C(e, \bar{x}), e, \lambda, a, \epsilon)}$, dependiendo de los parámetros (λ, a, ϵ) , tiene las siguientes propiedades

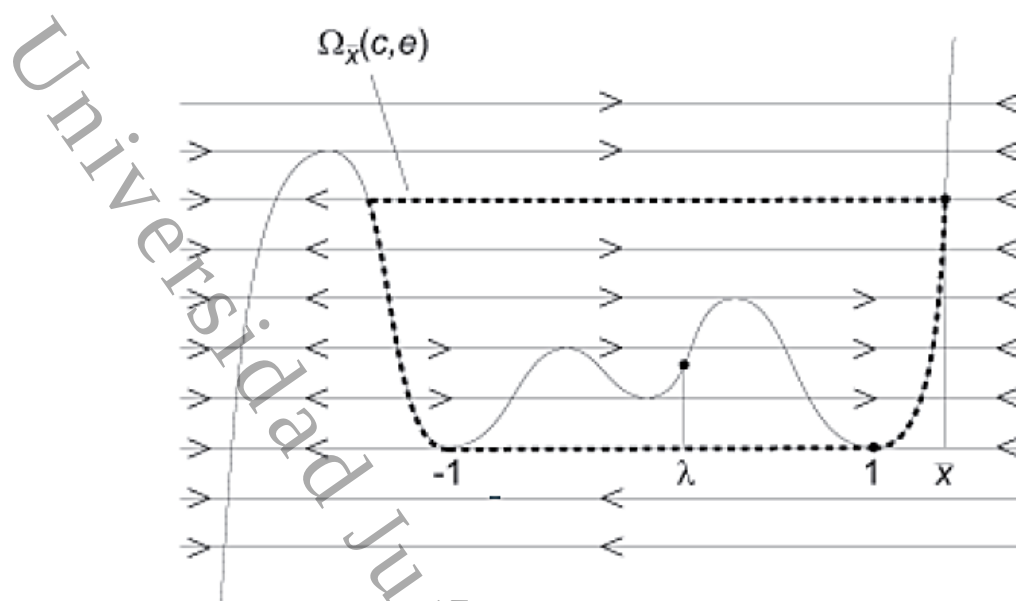


Figura 3.3: Ecuación de capa para $a = 0$, $c, e > 0$.

1. Existe una función continua $a(\epsilon)$ tal que $a(0) = 0$ y para cualquier valor fijo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, el campo vectorial asociado al sistema reducido $\tilde{\mathbf{L}}_{(\lambda, a, \epsilon)}$, definido para $\lambda = \Lambda(e, \bar{x})$ y $a = a(\epsilon)$, tiene un ciclo límite $\Gamma(\epsilon)$ de orden tres. Además, este ciclo límite $\Gamma(\epsilon)$ se desdobra genéricamente en tres ciclos límite hiperbólicos, para $\tilde{\lambda} = \lambda - \Lambda(e, \bar{x})$ y $\tilde{a} = a - a(\epsilon)$, suficientemente pequeños.
2. El ciclo $\Gamma(\epsilon)$ tiende a $\Omega_{\bar{x}}(C(e, \bar{x}), e)$ cuando ϵ tiende a 0 en la métrica de Hausdorff. Este ciclo engañoso está contenido en el interior de un anillo A que para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, el campo vectorial definido por el sistema reducido $\tilde{\mathbf{L}}(\lambda, a, \epsilon)$ es transversal a la frontera. Además, el campo apunta hacia adentro a lo largo de una componente de la frontera y hacia afuera a lo largo de la otra componente.

Antes de dar la idea general de la demostración del teorema 3.3.1, enunciaremos y demostraremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema principal. Existe un polinomio de grado 7 que asociado al sistema de Liénard (3.17) tiene al menos 4 ciclos límite.

Demostración: Aplicando el teorema 3.3.1 al sistema polinomial (3.17) obtenemos que existen dos funciones analíticas $c = C(e, \bar{x})$, y $\lambda = \Lambda(e, \bar{x})$ tal que el sistema tiene una región anular A donde se presentan 3 ciclos límite hiperbólicos. Además, el campo atraviesa transversalmente la frontera de esta región, en una frontera entra y en la otra sale, (véase la figura 3.5). Mas precisamente el inciso 1 del teorema 3.3.1 dice que para

$\epsilon > 0$ se tiene un ciclo límite de multiplicidad 3 el cual al perturbar valores de a y valores de λ se obtienen 3 ciclos límites hiperbólicos. Por otro lado el inciso 2 nos dice que este ciclo $\Gamma(\epsilon)$ tiende al ciclo engañoso $\Omega_{\bar{x}}(C(e, \bar{x}), e)$ cuando ϵ tiende a 0. Observemos que el sistema (3.17) tiene un único punto de equilibrio y se encuentra en $x = \lambda$ y $y = P_{c,e}(\lambda) + a\lambda$. Ya que la matriz jacobiana del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{dP(x)}{dx} - a & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

y $\frac{dP(x)}{dx}$ es positiva cuando la x está cercana a cero, obtenemos que para valores de $a > 0$ cercanos a cero, el punto crítico $(\lambda, P_{c,e}(\lambda) + a\lambda)$, es repulsor, porque la traza de la matriz jacobiana $\frac{dP(\lambda)}{dx} - a$ es mayor que cero, y el determinante es positivo, (véase la figura 3.4).

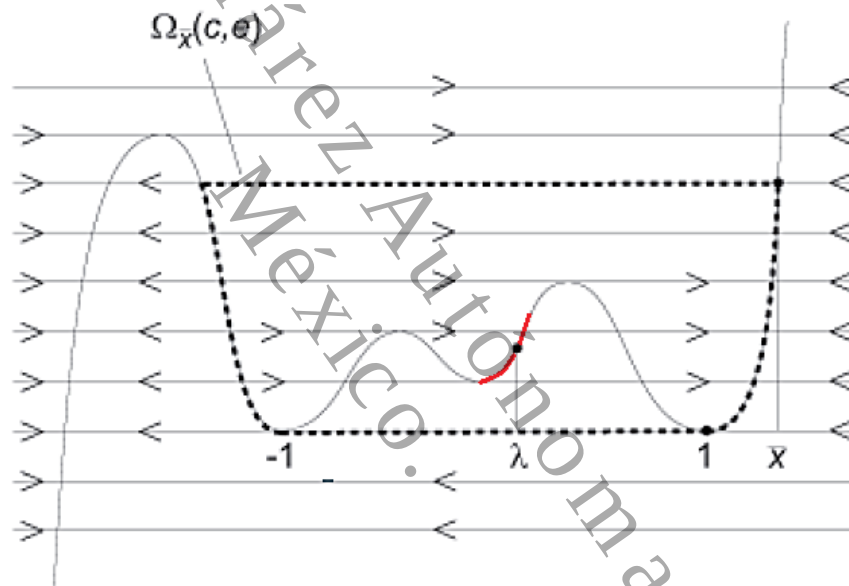


Figura 3.4: La parte sombreada de rojo, son valores que se deben tomar para que el punto crítico $(\lambda, P_{c,e}(\lambda) + a\lambda)$ sea repulsor.

Como la función $P_{c,e}(x)$ es creciente y positiva en el intervalo (m_0, ∞) , podemos elegir la región anular que nos proporciona el inciso 2 del teorema 3.3.1, de tal manera que en la frontera exterior el campo vectorial atraviese transversalmente hacia adentro y en consecuencia en la frontera interior atraviesa transversalmente hacia afuera, (véase la figura 3.5). Ya que el único punto de equilibrio $(\lambda, P_{c,e}(\lambda) + a\lambda)$ es una fuente para valores de $a > 0$ suficientemente cerca de cero, cualquier trayectoria que está dentro de la región acotada por el anillo A permanece en la región y por el teorema de Poincaré Bendixon su ω -límite es una órbita periódica. Generando así una cuarta órbita periódica para el sistema, obteniéndose la demostración del teorema.

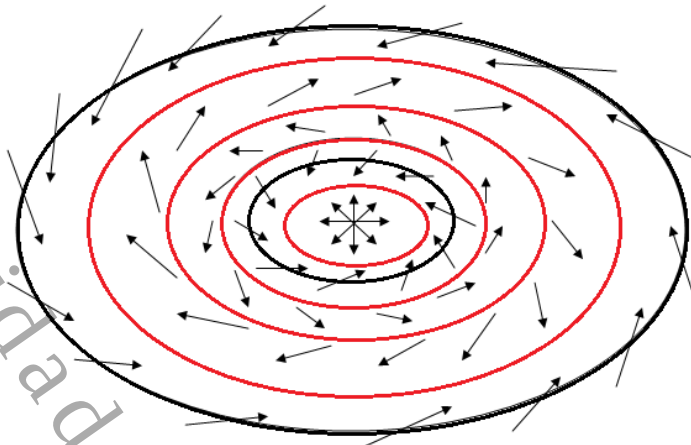


Figura 3.5: Región Anular con los 4 ciclos límite.

3.4. Demostración del teorema 3.3.1

La demostración del teorema 3.3.1 se basa en el teorema 3.2.1 por lo que nos concentraremos en verificar las hipótesis del teorema 3.2.1.

Consideremos la familia $F_{v,a}(x)$ con $v = (c, e) \in \mathbb{R}^2$, $F_{v,a}(x) = P(c, e, x) + ax$, donde $P(c, e, x)$ es la familia biparamétrica de polinomios

$$P(c, e, x) = (x^2 - 1)^2(ce x + 1)(x^2 + ex + \frac{1}{8}).$$

Observemos que $F_{v,a}$ es de grado 7 con un coeficiente positivo principal, siempre que $c \in \mathbb{R}^+$ y $e \in \mathbb{R}^+$. Para usar el teorema 3.2.1 debemos verificar la condición (3.7).

Como,

$$F_{v,a}(x) = (x^2 - 1)^2(ce x + 1)(x^2 + ex + \frac{1}{8}) - ax,$$

$$F_{0,a}(1) = -a \text{ y } F_{0,a}(-1) = a.$$

Así,

$$\frac{\partial (F_{0,a}(1) - F_{0,a}(-1))}{\partial a} \Big|_{a=0} = \frac{\partial (-2a)}{\partial a} \Big|_{a=0} = -2 \neq 0, \quad (3.18)$$

por lo que se cumple la condición (3.7).

Observemos que

$$F_{v,0}(x) = P(c, e, x)$$

y para $e = 0$ se obtiene un polinomio de grado 6

$$P(c, 0, x) = (x^2 - 1)^2 \left(x^2 + \frac{1}{8} \right),$$

el cual es par y por lo tanto simétrico con respecto al eje vertical; sus raíces son:

$$x = 1, x = -1, x = 1, x = -1, x = \frac{1}{4}i\sqrt{2}, x = -\frac{1}{4}i\sqrt{2}.$$

Derivando este polinomio de grado 6

$$DP(c, 0, x) = 6x^5 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{2}x,$$

obtenemos que sus puntos críticos son:

$$x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}, x = 1, x = -1.$$

De aquí obtenemos que la función $P(c, 0, x)$ tiene dos mínimos locales en ± 1 con el mismo valor crítico igual a cero, dos máximos locales en $\pm \frac{1}{2}$ con un valor crítico de $\frac{27}{128}$ y un mínimo local en cero con valor crítico $\frac{1}{8}$. Si tomamos a m_0 como la raíz más grande de la ecuación $P(0, 0, x) = P(0, 0, \pm \frac{1}{2}) = \frac{27}{128}$, entonces tomando $x \in (m_0, \infty)$ podemos construir un ciclo engañoso Ω_x el cual consiste en el arco lento que comienza en $(-1, 0)$ y termina en $P(0, 0, -x)$ de allí se sigue el segmento rápido que une $P(0, 0, -x)$ con $P(0, 0, x)$ luego el arco lento que une $P(0, 0, x)$ con $(1, 0)$ y se cierra en el segmento rápido que une $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, (véase la figura 3.6).

Para calcular la divergencia de este ciclo observamos que $v = (c, e) \in \mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned} F_{v,a} &= P(c, e, x) + ax \\ F'_{v,0} &= P'(c, e, x) \\ &= 4(x^2 - 1)(cex + 1)\left(x^2 + ex + \frac{1}{8}\right)x + \\ &\quad (x^2 - 1)^2 ce\left(x^2 + ex + \frac{1}{8}\right) + (x^2 - 1)^2 (cex + 1)(2x + e). \end{aligned}$$

$$I_{v,\lambda}(x) = \int_{\xi(v,x)}^{-1} \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds + \int_1^x \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds.$$

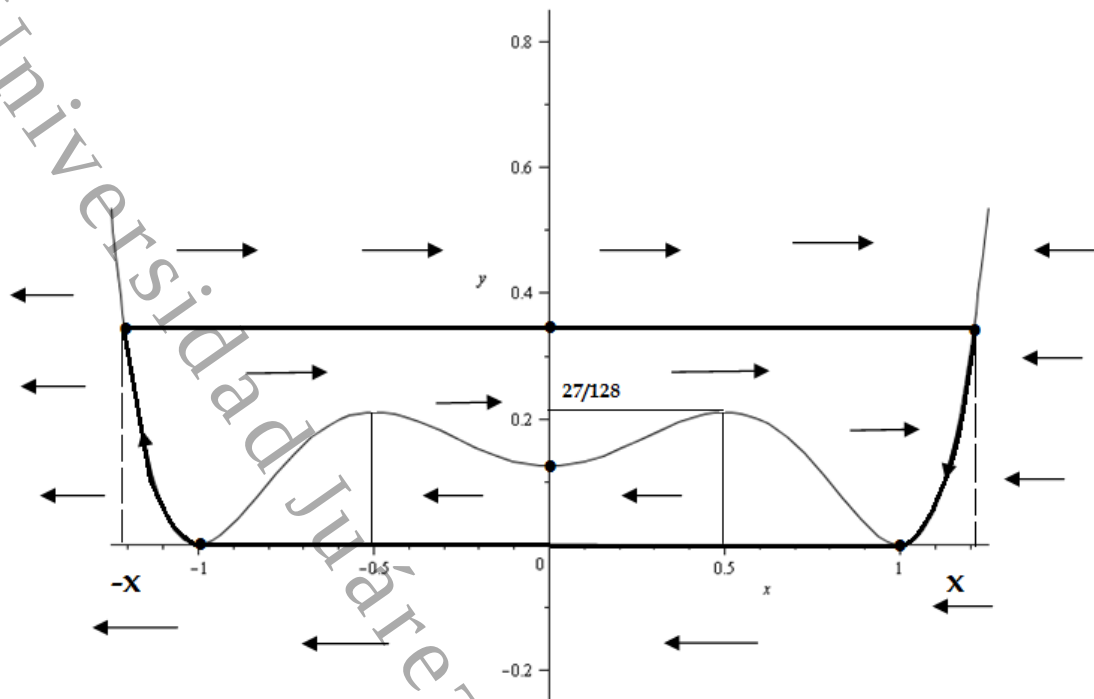


Figura 3.6: Ciclo engañoso Ω_x para $\dot{x} = y - (x^2 - 1)^2(x^2 + \frac{1}{8})$, $\dot{y} = 0$.

Por la simetría de la función tenemos que

$$I_{v,\lambda}(x) = \int_{-x}^{-1} \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds + \int_1^x \frac{F'_{v,0}(s)^2}{s - \lambda} ds = 0,$$

ya que sólo difiere la primera integral de la segunda por un signo menos.

Podemos perturbar el polinomio de tal manera que se mantengan los dos mínimos en ± 1 y con valor crítico en cero. Estas perturbaciones modificarán un poco la posición de los puntos críticos $p_1(c, e) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(e)$ y $p_2(c, e) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(e)$. Además, entre estos dos puntos se tendrá un mínimo cercano a cero (véase la figura 3.6).

Lo que el siguiente lema nos garantiza es que podemos mantener la integral de la divergencia lenta igual a cero en toda una familia de funciones.

Lema 3.4.1 Si $m, M \in \mathbb{R}$ con $m_0 < m < M$, entonces existen dos funciones analíticas $C(e, x)$, $\Lambda(e, x)$ para $(e, x) \in [0, e(m, M)] \times [m, M]$, donde $e(m, M) > 0$ es pequeña, en función de (m, M) , tal que:

1. $C(e, x)$ es estrictamente positiva para toda $e > 0$ lo suficientemente pequeña y $\Lambda(0, x) = 0$.
2. La integral de la divergencia lenta $I(c, e, x)$ está definida en una vecindad de $\{0\} \times$

$\{0\} \times [m, M]$, y las funciones C, Λ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$I(C(e, x), e, \Lambda(e, x), x) = 0 \quad y \quad \frac{\partial I}{\partial x}(C(e, x), e, \Lambda(e, x), x) = 0.$$

3. Se puede elegir a $e(m, M)$ de tal manera que

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(C(e, x), e, \Lambda(e, x), x) > 0$$

para toda $(e, x) \in (0, e(m, M)] \times [m, M]$.

La demostración de este resultado se puede consultar en [DPR].

Del lema 3.4.1 tenemos que $I(e, \Lambda, x) = 0$ y $\frac{\partial I}{\partial x}(e, \Lambda, x) = 0$ y en consecuencia cuando calculamos el desarrollo en serie de Taylor de I , obtenemos que este comienza con términos cuadráticos y tenemos el siguiente lema el cual nos muestra que la variación del parámetro λ en una vecindad de $\lambda = \Lambda(e, x)$, proporciona una bifurcación genérica de $I(c, e, \lambda, x)$, para todo $e > 0$ suficientemente pequeño.

Lema 3.4.2 Sea $\bar{x} > 1$ fijo y consideremos la función

$$J(e, \tilde{\lambda}, \tilde{x}) = I(C(e, \bar{x}), e, \Lambda(e, \bar{x}) + \tilde{\lambda}, \bar{x} + \tilde{x}),$$

donde $\Lambda(e, \bar{x})$ y $C(e, \bar{x})$ son las funciones definidas en el lema 3.4.1. Entonces, módulo una reparametrización y una división por una función distinta de cero, la $\tilde{\lambda}$ -familia $J(e, \tilde{\lambda}, \tilde{x})$ es igual a $\tilde{\lambda} + \tilde{x}^2$, para cada $e > 0$ fijo, lo suficientemente pequeño, es decir que esta familia produce una bifurcación del doble cero de $J(e, 0, 0)$.

La demostración de este resultado se puede consultar en [DPR].

De estos dos lemas y el teorema 3.2.1 concluimos la primera parte de la demostración del teorema 3.3.1, la cual nos garantiza la existencia de 3 ciclos límites hiperbólicos, los cuales son bifurcados a partir de este ciclo engañoso.

Por último como $ce > 0$, el infinito es repulsor (ver [LMP]) y uno puede encontrar un ciclo $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^2$ tan grande como se quiera, a lo largo del cual el campo vectorial $L(c, e, \lambda, a, \epsilon)$ está transversalmente entrando y por otro lado escribiendo la expansión $C(e, \bar{x}) = c(\bar{x}) + 0(e)$ se obtiene que

$$P(c, e, p_2(c, e)) - P(c, e, p_1(c, e))|_{c=C(e, \bar{x})} = \left(\frac{9}{16} + \frac{27}{128}c(\bar{x}) \right) e + 0(e^2). \quad (3.19)$$

Puesto que $c(\bar{x}) > 0$, se concluye que para toda $e > 0$ lo suficientemente pequeña, el valor del polinomio P en el máximo derecho interno es estrictamente mayor que su valor en el máximo local izquierdo (véase la figura 3.7).

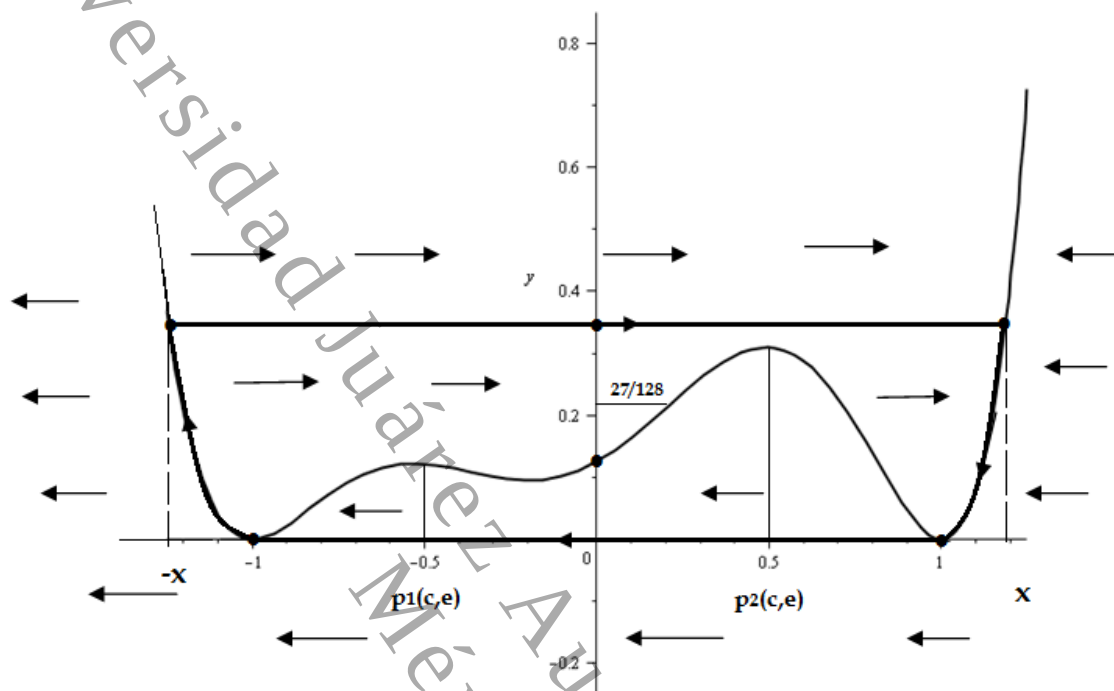


Figura 3.7: Ciclo engañoso Ω_x para $\dot{x} = y - (x^2 - 1)^2(cex + 1)(x^2 + ex + \frac{1}{8})$, $\dot{y} = 0$.

Como $p_1(C(e, \bar{x}), e) < \Lambda(e, \bar{x}) < p_2(C(e, \bar{x}), e)$, esto significa que también podemos encontrar una curva cerrada simple Γ_2 cerca del ciclo invariante de la ecuación de capa que pasa a través del punto crítico $(p_1, F_v(p_1))$, a lo largo del cual el campo vectorial transversalmente apunta hacia el centro del anillo. Sea A el dominio del anillo delimitado por $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (véase la figura 3.5). Claramente contiene el ciclo engañoso $\Omega_{\bar{x}}$ en su interior y con esto se concluye la demostración del teorema 3.3.1.

En la siguiente sección mostraremos algunos cálculos numéricos para obtener estos ciclos límite.

3.5. Cálculo numérico de las órbitas periódicas

En esta sección mostraremos los retratos fases correspondiente a algunos valores de los parámetros. Para las imágenes nos apoyamos de la rutina DEplot de MAPLE.

La figura 3.8 muestra un foco estable para el sistema (3.17) cuando los parámetros $c = 7$, $e = 0.51$, $\lambda = 0.4$, $a = 0$ y $\epsilon = 0.5$.

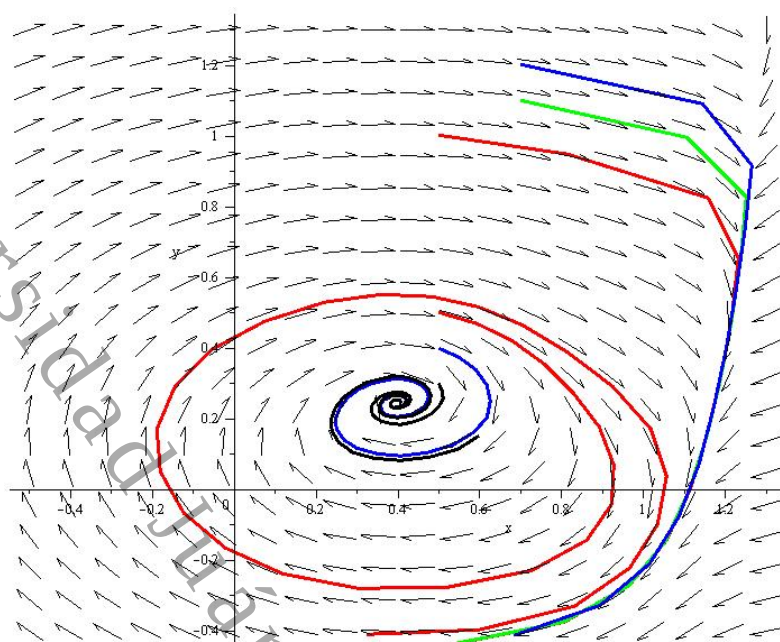


Figura 3.8: Retrato fase con un foco para el sistema (3.17).

La figura 3.9 muestra al menos 2 ciclos límite para el sistema (3.17) cuando los parámetros $c = 8.1$, $e = 0.051$, $\lambda = 0.5$, $a = 0.00002$ y $\epsilon = 0.5$.

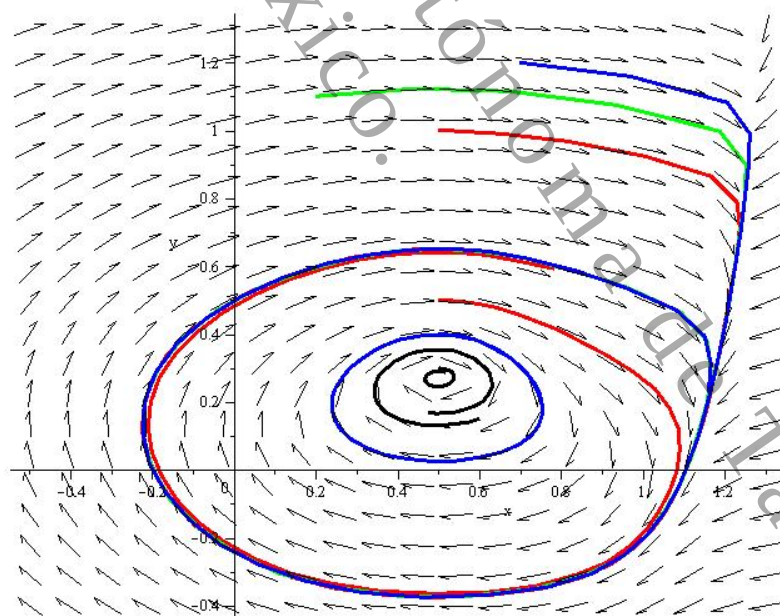


Figura 3.9: Retrato fase con al menos 2 ciclos límite para el sistema (3.17).

Capítulo 4

Conclusión

En este trabajo se analizó el sistema de Liénard y en particular se trabajó el caso polinomial de grado 7. Con respecto al sistema de Liénard, un trabajo relevante por mucho tiempo fue el de Lins, de Melo y Pugh publicado en 1977 (ver [LMP]) quienes conjeturaron que el sistema (4) tiene como máximo $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ciclos límite, donde $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ significa el máximo entero $\frac{n-1}{2}$. Ellos se basaron en su conjetura, en los resultados que obtuvieron para el caso $n = 3$.

Basado en el trabajo de Dumortier, Panazzolo y Roussarie publicado en 2007, [DPR] y utilizando como herramienta la teoría de ciclos lentos-rápidos hemos podido mostrar en este trabajo que la conjetura de Lins, Melo y Pugh no es cierta para el caso $n = 7$, ya que se muestra un ejemplo de un polinomio de grado 7 para el cual el sistema de Liénard tiene 4 ciclos límite, mientras que la conjetura establecía que un sistema polinomial de grado 7 debería tener a lo mas 3 ciclos límite.

A la fecha se han tenido importantes avances en el problema de determinar los ciclos límite para la ecuación de Liénard. En particular podemos mencionar que en 2011 De Maesschalck y Dumortier [DM2011], demostraron que para $n \geq 6$ el sistema (2) tiene al menos $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$ ciclos límite. Así mismo, en el 2012 Chengzhi Li y Jaume Llibre [CJ2012], probaron que la ecuación (2) de grado cuatro tiene a lo mas un ciclo límite, y el ciclo límite si existe es hiperbólico. Este resultado da una respuesta positiva a la conjetura de Lins, de Melo y Pugh (1977).

Por último, es importante mencionar que aún falta dar la cota para $n \geq 6$ y probar la conjetura de Lins, de Melo y Pugh [LMP] para un polinomio $F(x)$ de grado 5.

Bibliografía

- [A] A. A. Andronov, et al., Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [D] H. Dulac, Sur les cycles limite, Bull. Soc. Math France 51 (1923), 45 – 188.
- [DR2001] F. Dumortier, R. Roussarie, Multiple Canard Cycles in Generalized Liénard Equations, Journ. Diff. Equa. vol. 174, 1 – 29 (2001). MR1844521 (2002k:34076)
- [DR2007] F. Dumortier, R. Roussarie, Bifurcation of relaxation oscillations in dimension 2, to appear in Discr. and Cont. Dyn. Sys. (2007).
- [DPR] F. Dumortier, D. Panazzolo and R. Roussarie, More limit cycles than expected in Liénard systems, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1895 – 1904.
- [DM2011] F. Dumortier, R., P. De Maesschalck, Classical Liénard equations of degree $n \geq 6$ can have $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ limit cycles, Journ. Diff. Equations 250 (2011) 2162 – 2176 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039610004535>
- [E] J. Ecalle, Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac (French), Hermann, Paris, 1992. MR 97f:58104
- [HS] M.W. Hirsch and S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.
- [I1991] Y. Ilyashenko, Finiteness theorems for limit cycles, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. MR 92k:58221
- [I2002] Y. Ilyashenko (2002). Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 301 – 354.
- [L1928] A. Liénard, Étude des oscillations entretenues, Revue Générale de l'Électricité 23 (1928), 946 – 954.

- [LMP] A. Lins, W. de Melo and C.C. Pugh, On Liénard's Equation, Lecture Notes in Math **597**, Springer, Berlin, (1977), pp. 335 – 357.
- [MDR] P. De Maesschalck, F. Dumortier y R. Roussarie., Cyclicity of common slow - fast cycles, *Indagationes Mathematicae* 22 (2011) 165 – 206.
- [PL2] I. Petrovskii, E. Landis, On the number of limit cycles of the equation $dy = dx = P(x; y) = Q(x; y)$, where P and Q are polynomials of 2nd degree (Russian), *Mat. Sb. N.S.* 37(79) (1955), 209 – 250. MR 17:364d
- [PL1] I. Petrovskii, E. Landis, On the number of limit cycles of the equation $dy = dx = P(x; y) = Q(x; y)$, where P and Q are polynomials (Russian), *Mat. Sb. N.S.* 85 (1957), 149 – 168. MR 19:746c
- [P] L. Perko, (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer, New York.
- [R2005] R. Roussarie, Putting a boundary to the space of Liénard equations, to appear in *Discr. and Cont. Dyn. Sys.* (2005).
- [R1975] G. S. Rychkov, The maximum number of limit cycle of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$; $\dot{y} = -x$ is two, *Differentialnye Uravneniya* 11 (1975), 380 – 391.
- [S] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, Springer-Verlag, New York, Vol. 20, $n^\circ 2$, 7 – 15 (1998). MR1631413 (99H:01033)
- [CJ2012] C. Li, J. Llibre, Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four, *J. Differential Equations* 252 (2012) 3142-3162, www.elsevier.com/locate/jde.

Manuel Fidel Domínguez Azueta.pdf

 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:593596624

Fecha de entrega

21 may 2026, 2:58 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 may 2026, 3:05 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Manuel Fidel Domínguez Azueta.pdf

Tamaño del archivo

3.0 MB

67 páginas

13.793 palabras

71.138 caracteres

15% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Coincidencias menores (menos de 20 palabras)
- Abstract

Fuentes principales

- 15%  Fuentes de Internet
- 0%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
450 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Fuentes principales

- 15%  Fuentes de Internet
- 0%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Fuentes principales

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	Internet	
doczz.es		4%
2	Internet	
es.scribd.com		3%
3	Internet	
docplayer.es		2%
4	Internet	
revistas.ujat.mx		1%
5	Internet	
bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083		1%
6	Internet	
repositorio.unal.edu.co		<1%
7	Internet	
bindani.izt.uam.mx		<1%
8	Internet	
ipicyt.repositorioinstitucional.mx		<1%
9	Internet	
doi.org		<1%
10	Internet	
galia.fc.uaslp.mx		<1%
11	Internet	
www.ciencias.ula.ve		<1%

12	Internet	bdigital.unal.edu.co	<1%
13	Internet	uvadoc.uva.es	<1%
14	Internet	bibliotecadigital.udea.edu.co	<1%
15	Internet	jupiter.utm.mx	<1%
16	Internet	ri.ujat.mx	<1%
17	Internet	www.ams.org	<1%
18	Internet	www.coursehero.com	<1%