UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN Y LOS MOMENTOS DE ALGUNAS VARIABLES ALEATORIAS QUE APARECEN EN EL PROBLEMA DEL COLECCIONISTA DE CUPONES.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

AMAYRANI LEÓN GARCÍA

BAJO LA DIRECCIÓN DE:

DRA. ADDY MARGARITA BOLÍVAR CIMÉ

EN CODIRECCIÓN:

DR. AROLDO PÉREZ PÉREZ

CUNDUACAN, TABASCO, A: 8 DE ENERO DEL 2026

Declaración de Autoría y Originalidad

En la ciudad de Cunduacán, el día 17 del mes junio del año 2025, el que suscribe Lic. Amayrani León García alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas con número de matrícula 202A15003, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autora de la Tesis presentada para la obtención del grado de Maestra en Ciencias en Matemáticas Aplicadas y titulada “Estudio de la distribución y los momentos de algunas variables aleatorias que aparecen en el problema del coleccionista de cupones” dirigida por la Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé y Dr. Aroldo Pérez Pérez.

DECLARO QUE:

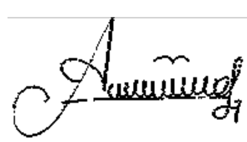
La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente

Villahermosa, Tabasco a 17 de junio del 2025.

Lic. Amayrani León García.

Pasante de la Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.



DIRECCIÓN

20 de junio de 2025

LIC. AMAYRANI LEÓN GARCÍA
EGRESADA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS APLICADAS
PRESENTE

Por medio del presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que, proceda a la impresión del trabajo titulado "**ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN Y LOS MOMENTOS DE ALGUNAS VARIABLES ALEATORIAS QUE APARECEN EN EL PROBLEMA DEL COLECCIONISTA DE CUPONES**" dirigido por la Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé y Dr. Aroldo Pérez Pérez; bajo la modalidad de titulación por Tesis.

La Comisión revisora conformada por la Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé, Dr. Aroldo Pérez Pérez, Dr. Edilberto Nájera Rangel, Dr. Fidel Ulín Montejo y Dr. Heliodoro Daniel Cruz Suárez aprobó el documento en virtud de reunir los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** y obtener el grado de *Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas*.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA

C.C.P.- Archivo.

*Dir´Dra.HPV/JP´Dra.EAM/jkal***

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 17 de junio del 2025.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTORA y AUTORES (RAS) en la producción, creación y/o realización de la obra denominada

ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN Y LOS MOMENTOS DE ALGUNAS VARIABLES ALEATORIAS QUE APARECEN EN EL PROBLEMA DEL COLECCIONISTA DE CUPONES.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES

Lic. Amayrani León G. Dra. Addy M. Bolívar Cimé y Dr. Aroldo Pérez P.

TESTIGOS

Dr. José Alberto Domínguez.

Lic. Victoria Chávez Ojeda

Índice general

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por la vida y por haberme otorgado la inteligencia, la paciencia y la perseverancia necesarias para concluir este trabajo satisfactoriamente. ¡Gracias, Dios, porque obras siempre a tiempo!

Asimismo, agradezco a mi familia, cuyo constante apoyo durante esta etapa de mi formación académica ha sido fundamental. Son mi mayor motivación para seguir adelante y alcanzar mis metas. ¡Los amo!

También, manifiesto mi sincero agradecimiento al Doctor en Ciencias José Alberto Domínguez, por motivarme a concluir mis estudios de maestría, por ser un apoyo constante a lo largo de este camino y por la confianza que ha depositado en mí. Aprecio infinitamente las palabras de aliento brindadas en los tiempos díficiles. ¡Es una bendición en mi vida!

Al Maestro en Ciencias Luis Yahir Meza, transmito mi gratitud por el apoyo brindado cuando lo necesitaba, gracias por tu generosidad. De igual manera extiendo mi reconocimiento a todos los docentes de la División Académica de Ciencias Básicas, quienes en su momento también me tendieron una mano amiga, nunca olvidaré este valioso gesto. ¡Se los agradezco de todo corazón!

A los doctores Addy Margarita Bolívar Cimé y Aroldo Pérez Pérez, quienes representan una gran inspiración para mí, les expreso mi más profundo agradecimiento, por el tiempo y dedicación con que me guiaron para alcanzar este objetivo, así como por su apoyo incondicional en todos los aspectos. Valoro sinceramente su amistad y el ánimo que me brindaron cuando estuve a punto de rendirme en la búsqueda de este sueño. ¡Que Dios los bendiga siempre!

Finalmente quiero agradecer a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco en donde obtuve las facilidades para estudiar mi posgrado en tiempos de pandemia; etapa en la que enfrenté grandes retos y adquirí valiosas estrategias de aprendizaje. Además quiero manifestar mi cordial agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo económico brindado, mismo que fue fundamental para la culminación de este proyecto y la obtención del grado académico.

Introducción

El problema del coleccionista de cupones (PCC) es un problema clásico de la probabilidad, específicamente del área de combinatoria. Este problema consiste en lo siguiente: existen N tipos diferentes de cupones, tales como tarjetas de béisbol, de lucha libre, etc. y se desea recolectarlos todos; los cupones se adquieren uno por uno en secuencia. Por simplicidad, denotaremos a la colección de cupones distintos por $H = \{1, 2, \ldots, N\}$, y por p_k denotaremos a la probabilidad de adquirir un cupón de tipo k, $k = 1, 2, \ldots, N$; obviamente, debe tenerse que $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$. Suponiendo independencia entre las adquisiciones (compras) de los cupones, este problema se modela por una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes, tales que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $P(X_n = k) = p_k$, $n = 1, 2, \ldots$.

El interés en este trabajo consiste en determinar la distribución y los momentos de algunas variables aleatorias relacionadas con el PCC, así como analizar algunos ejemplos de aplicación. Para esto, nuestras variables aleatorias de interés serán las siguientes:

1) La variable aleatoria Y_n que representa el número de cupones distintos adquiridos después de n adquisiciones.

2) La variable aleatoria T_{k,N_1} que representa el número de adquisiciones requeridas para garantizar que k tipos distintos de cupones de un conjunto $H_1 \subset H$ de tamaño N_1 sean adquiridos. En el caso en que $N_1 = N$ denotaremos a T_{k,N_1} por T_k.

Se obtendrán expresiones para el r-ésimo momento y la función generadora de momentos de Y_n. Para la variable aleatoria T_{k,N_1} se presenta una expresión para su esperanza. En el caso particular en el que $N_1 = N$ se obtienen expresiones para el r-ésimo momento y la función generadora de momentos de T_k. Cabe destacar que la fórmula obtenida para el r-ésimo momento de Y_n está en términos de sumas finitas, fáciles de calcular computacionalmente; mientras que la fórmula para el r-ésimo momento de T_k está en términos de expresiones recursivas, por lo que se puede implementar computacionalmente y calcular los momentos de cualquier orden.

El problema del coleccionista de cupones tiene aplicaciones en varias áreas de la ciencia, tales como ingeniería, computación, problemas de control de calidad, ecología, etc., ver [1], [6], [9] y [15]. En este trabajo estudiaremos un ejemplo de aplicación del PCC correspondiente al área de ecología, el cual consiste en el estudio de los sistemas huéspedes-parásitos. En específico consideraremos la parasitación de orugas (huéspedes) que se desarrolla mediante visitas sucesivas de avispas (parásitos). En cada visita una avispa ataca a una oruga en la que pone un huevo (parasitación), esto con el propósito de ampliar su capacidad de supervivencia. En el contexto del coleccionista de cupones, estas orugas representan a los distintos tipos de cupones, y es de interés conocer, por ejemplo, el número esperado de visitas requeridas para que todas las orugas sean parasitadas; así como también el número esperado de orugas parasitadas después de n visitas de las avispas.

Este trabajo de tesis se distribuye en tres capítulos. En el capítulo 1, se presentan algunas definiciones, conceptos y resultados de la teoría de probabilidad, tales como espacio de probabilidad, teorema de extensión, variables aleatorias, función generadora de momentos y el r-ésimo momento de una variable aleatoria. En el capítulo 2 se presentan la función masa de probabilidad y la función de distribución de Y_n, a partir de las cuales se obtienen expresiones para su r-ésimo momento y su función generadora de momentos. Se presenta una expresión para la esperanza de T_{k,N_1} y para el caso en que $N_1 = N$ se dan expresiones para el r-ésimo momento y la función generadora de momentos de T_k. En el capítulo 3 se presenta el problema de aplicación; primero bajo el supuesto de que las orugas tienen la misma probabilidad de ser parasitadas y después bajo el supuesto de que las orugas no necesariamente tienen la misma probabilidad de ser parasitadas.

Cabe mencionar que, como parte de los requisitos para la obtención del grado, los resultados que se obtuvieron durante la elaboración de esta tesis fueron publicados en una revista científica (ver [8]).

Capítulo 1

Preliminares sobre la probabilidad

El propósito de este capítulo es proporcionar algunos conceptos y resultados de la teoría de probabilidad que serán utilizados en el desarrollo de esta tesis. Las definiciones y resultados que se presentan a continuación se basan principalmente en [2] y [5].

1.1. Espacios de probabilidad

Iniciamos presentando los tres objetos matemáticos necesarios para construir un espacio de probabilidad. El primer objeto requerido para la definición de probabilidad es un conjunto no vacío Ω, donde a cada elemento de este conjunto se le conoce como resultado. El segundo objeto es una σ-álgebra cuya definición se menciona a continuación.

Definición 1.1.1. *Una σ-**álgebra** de un conjunto $\Omega \neq \emptyset$ es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω que satisface*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

ii) *Si* $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$.

iii) *Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observación 1.1.2. *A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama eventos, y se dice que un evento A ocurre si el resultado del experimento pertenece a A.*

Una colección S de subconjuntos, se dice ser disjunta por pares si $A \cap B = \emptyset$ para cada par de conjuntos distintos A y B de S. Esta terminología es usada en la definición del tercer y último objeto requerido en la definición de espacio de probabilidad que se presenta enseguida.

Definición 1.1.3. *Una **medida de probabilidad** P sobre una σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω es una función $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que*

i) $P(\Omega) = 1$.

ii) $P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *para cada colección disjunta por pares* $\{A_m, m = 1, 2, \ldots\}$ *de elementos de* $\mathcal{F}$.

Observación 1.1.4. *Debido a la propiedad ii) de la definición anterior, se dice que P es contablemente aditiva.*

Ahora bien, como ya conocemos todos los objetos, podemos construir el espacio de probabilidad que se define a continuación.

Definición 1.1.5. *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una tripleta* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *donde* Ω *es un conjunto no vacío,* $\mathcal{F}$ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω, *y* P *es una medida de probabilidad en* $\mathcal{F}$. *A* Ω *se le llama espacio muestral y a los elementos de* $\mathcal{F}$ *se les llama eventos.*

Enseguida, presentamos un ejemplo en el cual modelamos un experimento que consiste en realizar lanzamientos independientes de una moneda legal, los elementos del modelo serán precisamente los elementos del espacio de probabilidad anteriormente definidos.

Ejemplo 1.1.6. *Consideremos el experimento que consiste en n lanzamientos sucesivos de una moneda legal. Entonces*

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, w_n) : w_i \in \{\textit{águila, sol}\}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Por conveniencia, podemos identificar a águila por 0 *y sol por* 1. *Así*

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, w_n) : w_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Notemos que la cardinalidad de este espacio muestral es 2^n. *En este caso,* $\mathcal{F}$ *consiste de todos los subconjuntos de* Ω, *y la medida de probabilidad* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *se define como*

$$P(A) = \frac{\#A}{2^n}, \; A \in \mathcal{F},$$

donde $\#A$ *denota a la cardinalidad de* A. *Es fácil demostrar que* $\mathcal{F}$ *es efectivamente una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *y que* P *es una medida de probabilidad en* $\mathcal{F}$. *En general, se dice que el número* $P(A)$ *es la probabilidad de* A.

Si $0 \leq k \leq n$, *entonces para obtener* $\sum_{i=1}^{n} w_i = k$, *es necesario y suficiente que exactamente* k *de los* $w_i's$ *sean* 1. *Existen*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

resultados con esta propiedad. Por tanto

$$P\left(\left\{(w_1, \ldots, w_n) : \sum_{i=1}^{n} w_i = k\right\}\right) = \binom{n}{k} 2^{-n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

En la terminología de los lanzamientos de una moneda, este número es la probabilidad de obtener k *soles en* n *lanzamientos.*

El siguiente ejemplo aborda el ejemplo 1.1.6 de manera más amplia y general; da también una descripción de $P(A)$ para ciertos subconjuntos A del espacio muestral.

Ejemplo 1.1.7. *Consideramos ahora el experimento que consiste en realizar un número infinito de lanzamientos de una moneda legal. Entonces*

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots) : w_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

En este caso, Ω tiene un número infinito de elementos, por lo que no se puede utilizar el mismo procedimiento del ejemplo anterior para definir a P. Sin embargo, sabemos lo que queremos que sea $P(A)$ para ciertos subconjuntos A de Ω, para tener consistencia con el ejemplo anterior. Para cualquier conjunto A_k de vectores k-dimensionales de $0's$ y $1's$ queremos que

$$P(A_k) \equiv P(\{(w_1, w_2, \ldots) : (w_1, \ldots, w_k) \in A_k\}) = \frac{\#A_k}{2^k}.$$

Es frecuente que en un modelo probabilístico, los eventos de interés formen una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de Ω que no es una σ-álgebra. Como se requiere que se trabaje con σ-álgebras, en tales casos se reemplaza $\mathcal{E}$ por la colección más pequeña de subconjuntos que formen una σ-álgebra y que contenga a la colección $\mathcal{E}$, cuya existencia se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.8. *Sea $\mathcal{E}$ una colección de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω. Entonces existe una única σ-álgebra $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ tal que si $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{E}$ y $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra, entonces $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$; es decir $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$.*

Demostración. La unicidad es clara. Para demostrar la existencia definimos

$$\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{G},$$

donde la intersección es sobre todas las σ-álgebras $\mathcal{G}$ tales que $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{E}$. La prueba estará completa si se demuestra que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. Claramente $\emptyset \in \mathcal{F}$. Fijemos $A \in \mathcal{F}$ y sea $\mathcal{G}$ una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}$. Como $A \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es una $\sigma-$álgebra, $A^c \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra arbitraria que contiene a $\mathcal{E}$, se tiene que $A^c \in \mathcal{F}$. Ahora si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ y de nuevo $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}$, entonces $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, y como $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. Como de nuevo $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra arbitraria que contiene a $\mathcal{E}$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Tenemos así demostrado que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo complementos y bajo uniones numerables, y es, así, una σ-álgebra. ■

Definición 1.1.9. *A la σ-álgebra de la proposición anterior se le llama σ-álgebra **generada** por $\mathcal{E}$ y escribiremos $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.*

En general, si Ω es un espacio muestral, $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de interés de Ω, y queremos construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es natural tomar $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$ y comenzar por construir P especificando sus valores sobre $\mathcal{E}$.

1.2. Teorema de extensión

En esta sección mencionaremos algunas definiciones importantes que deben verificarse para que una medida pueda extenderse, como también el teorema que nos detalla de qué manera se realiza la extensión, y un ejemplo que describe este proceso.

Definición 1.2.1. *Un **álgebra** de subconjuntos de Ω es una colección de subconjuntos de Ω que tiene al $\emptyset$ como elemento y que es cerrada bajo complementos y bajo uniones por pares.*

Definición 1.2.2. *Una función R con valores reales, definida sobre un álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, se dice ser **finitamente aditiva** si $R(A \cup B) = R(A) + R(B)$ para cualquier par de conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{E}$. La función R se dice ser **contablemente aditiva** si*

$$R\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} R(A_n)$$

cuando $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión disjunta por pares de elementos de $\mathcal{E}$, cuya unión es también un elemento de $\mathcal{E}$.

La siguiente proposición establece una condición necesaria y suficiente para que una función con valores reales, R, sea contablemente aditiva sobre un álgebra $\mathcal{E}$. Una prueba de esto se encuentra en [5, Proposición 9, pág. 90].

Proposición 1.2.3. *Sea R una función no negativa y finitamente aditiva definida en un álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, tal que $R(\Omega) = 1$. Entonces R es contablemente aditiva si y sólo si $R(A_n) \to 0$ para cualquier sucesión decreciente $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{E}$ para la cual $\lim A_n = \emptyset$.*

La proposición anterior tiene útilidad para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 1.2.4. *Sea $\mathcal{E}$ un álgebra de subconjuntos de un espacio Ω y R una función no negativa y contablemente aditiva definida en $\mathcal{E}$ tal que $R(\Omega) = 1$. Entonces existe una única medida de probabilidad P definida en $\sigma(\mathcal{E})$ tal que $P(A) = R(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$.*

Una prueba de este teorema puede ser consultada en [5, Teorema 14, pág. 94]. Enseguida veamos el siguiente ejemplo que muestra como aplicar el teorema de extensión a una generalización del ejemplo 1.1.7 en la que se consideran monedas "sesgadas." Para el caso especial de una moneda legal, establece que realmente existe un espacio de probabilidad como el que se describió anteriormente en el ejemplo 1.1.7 para el experimento de lanzar una moneda legal un número infinito de veces.

Ejemplo 1.2.5. *Sea Ω el conjunto de sucesiones infinitas $w = (w_1, w_2, \ldots)$, donde cada $w_i \in \{0, 1\}$. Así Ω es el producto contable de copias del conjunto $\{0, 1\}$. Dotamos a Ω con la topología producto, donde a cada copia de $\{0, 1\}$ se le da la topología discreta. Como la topología producto de espacios compactos es compacta, Ω es un espacio topológico compacto. Sea $\mathcal{E}$ la colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\{w : (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in C_n \text{ para } C_n \subseteq \{0, 1\}^n\}. \tag{1.1}$$

Es fácil ver que $\mathcal{E}$ es un álgebra, y que todo conjunto en $\mathcal{E}$ es un conjunto cerrado. Como Ω es un conjunto compacto, se sigue que todos los elementos de $\mathcal{E}$ son compactos. Por la propiedad de la intersección finita de conjuntos compactos, si $A_1, A_2, \ldots$ es cualquier sucesión de elementos de $\mathcal{E}$ que decrecen al $\emptyset$, entonces $A_n = \emptyset$ para todo n suficientemente grande. Si R es una función no negativa y finitamente aditiva definida en $\mathcal{E}$, tal que $R(\Omega) = 1$, se sigue de la proposición 1.2.3 que R es contablemente aditiva. Por el teorema de extensión, *cualesquiera de tales R puede ser extendida a una medida de probabilidad sobre la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$. Construyamos pues, una función R definida en $\mathcal{E}$, no negativa y finitamente aditiva, tal que $R(\Omega) = 1$. El modelo de repetidos lanzamientos de una moneda legal es un caso especial. Sea $p_1, p_2, \ldots$ una sucesión de números reales en el intervalo $[0, 1]$. Para $C_n \subseteq \{0, 1\}^n$, sea*

$$R(\{w : (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in C_n\}) = \sum_{(w_1,\ldots,w_n)\in C_n} \prod_{m=1}^{n} p_m^{w_m}(1 - p_m)^{1-w_m}.$$

(En esta fórmula, $0^0 = 1$.) Existe una aparente ambigüedad en esta definición, que surge del hecho de que cualquier conjunto que pueda expresarse en la forma (1.1) puede también escribirse en la forma

$$\{w : (w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}) \in D_{n+1}\},$$

donde D_{n+1} es el conjunto de elementos de $\{0, 1\}^{n+1}$ cuyas primeras n coordenadas forman una sucesión de $0's$ y $1's$ que están en C_n. Sin embargo, se puede ver mediante un cálculo directo que tal ambigüedad no existe.

Si A y B son dos elementos disjuntos de $\mathcal{E}$, entonces pueden ser escritos en la forma (1.1) usando un valor común de n. La suma en la definición de R hace ahora que la aditividad finita de R sea clara.
El caso particular en que $p_n = 1/2$ para cada n da el espacio de probabilidad de infinitos lanzamientos de una moneda legal. Para el caso general, podemos pensar en un experimento en el que se lanza una moneda diferente en cada etapa, con p_n siendo la probabilidad de que el resultado del $n-$ésimo lanzamiento sea sol.

1.3. Variables aleatorias

A continuación presentamos algunas definiciones relacionadas con las variables aleatorias, así como algunos ejemplos, para lo cual nos basamos en [4] y [5]. En las aplicaciones las variables aleatorias representan lo que interesa medir en un experimento aleatorio.

Definición 1.3.1. *Un **espacio medible** es un par $(\Omega, \mathcal{F})$, donde Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.*

Notemos que si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, entonces $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio medible

Definición 1.3.2. *Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\Psi, \mathcal{G})$ espacios medibles. Una **función medible** de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(\Psi, \mathcal{G})$ es una función $X : \Omega \to \Psi$ tal que*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \text{ para cualquier } B \in \mathcal{G}.$$

*Cuando se adjunta una medida de probabilidad P al espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, de manera que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, a X se le llama **variable aleatoria** de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $(\Psi, \mathcal{G})$.*

Veremos ahora que si X es una variable aleatoria, entonces es posible trasladar P (medida de probabilidad definida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$) a un espacio medible $(\Psi, \mathcal{G})$, como se puede observar en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea X una variable aleatoria de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a un espacio medible $(\Psi, \mathcal{G})$. Para $B \in \mathcal{G}$ sea*

$$Q(B) = P\left(X^{-1}(B)\right).$$

Entonces $(\Psi, \mathcal{G}, Q)$ es un espacio de probabilidad.

Demostración. Como $X^{-1}(\Psi) = \Omega$, entonces $Q(\Psi) = 1$. Sea $B_1, B_2, \ldots$ una sucesión disjunta por pares de elementos de $\mathcal{G}$. Entonces

$$X^{-1}(B_m) \cap X^{-1}(B_n) = X^{-1}(B_m \cap B_n) = \emptyset,$$

cuando $m \neq n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(B_n). \end{aligned}$$

■

Definición 1.3.4. *A la medida de probabilidad Q de la proposición 1.3.3 se le llama la **distribución de la variable aleatoria** X y se dice ser inducida por X.*

Observación 1.3.5. *Notemos que toda distribución es una medida de probabilidad y que toda medida de probabilidad es una distribución (inducida por la función identidad), de manera que distribución y medida de probabilidad son términos esencialmente sinónimos que tienden a usarse en contextos algo diferentes.*

Enseguida presentamos el concepto de función de distribución, así como su relación con la distribución de la variable aleatoria X.

Definición 1.3.6. *Una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función de distribución** para $\mathbb{R}$ si cumple con las siguientes condiciones*

i) *F es creciente.*

ii) *F es continua por la derecha.*

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Denotemos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, es decir, a la σ-álgebra generada por la colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.3.7. *Sea Q una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Entonces la función $F(x) = Q((-\infty, x])$ es una **función de distribución**.*

La prueba de esta proposición puede ser consultada en [5, Proposición 3, pág. 26].

En particular, si X es una variable aleatoria de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ con distribución inducida Q, entonces a la función de distribución $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = Q\left((-\infty, x]\right) = P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right)$$

se le llama la **función de distribución** de la variable aleatoria X.

De aquí en adelante nos restringiremos solo a variables aleatorias con valores reales, es decir, a variables aleatorias de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al espacio medible $(\mathcal{B}, \mathbb{R})$. Más específicamente, nos enfocaremos a solamente dos tipos de variables aleatorias con valores reales, a saber, las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias absolutamente continuas.

Definición 1.3.8. *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con función de distribución F. Se dice que X es una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), si existe una función no negativa f que es cero casi en todas partes excepto en un número finito o infinito numerable de puntos, tal que*

$$F(x) = \sum_{u \le x} f(u).$$

*La función f, si existe, se llama **función masa de probabilidad** de X.*

Definición 1.3.9. *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con función de distribución F. Se dice que X es una **variable aleatoria absolutamente continua,** si existe una función no negativa f, tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

*Notemos que la f anterior no es única, ya que si la modificamos en un número finito o infinito numerable de puntos, las integrales anteriores no se alteran. Sin embargo, en la práctica, la elección de f está determinada por condiciones de continuidad. La función f se llama **función de densidad de probabilidad** de X.*

Consideramos importante para este trabajo recordar algunos ejemplos de distribuciones discretas, como la distribución de Bernoulli, geométrica, binomial y multinomial, las cuales se presentan a continuación.

Ejemplo 1.3.10. *Una variable aleatoria X tiene una **distribución de Bernoulli** con parámetro p, si su función masa de probabilidad es*

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \tag{1.2}$$

con $0 \le p \le 1$.

La variable aleatoria X, que solo toma los valores 0 y 1 puede interpretarse de la siguiente manera: $f(1)$ representa la probabilidad de un éxito; $f(0)$ representa la probabilidad de un fallo. Evidentemente, $f(0) = q \equiv 1 - p$; $f(1) = p$.

Ejemplo 1.3.11. *Una variable aleatoria X tiene una **distribución binomial** con parámetros n y p, si X tiene una distribución discreta para la cual la función masa de probabilidad es de la forma*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

donde n es un entero positivo y $0 \leq p \leq 1$.

Notemos que para cualquier ordenamiento de k éxitos y $n-k$ fracasos, la probabilidad es $p^k(1-p)^{n-k}$. Ahora, puesto que $\sum x_i = k$ si y solo si hay k unos y $n-k$ ceros, y el número total de formas posibles de ordenar k unos y $n-k$ ceros es $\binom{n}{k}$, entonces la probabilidad de k éxitos es exactamente $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$. Tenemos así que (1.3) representa la probabilidad de obtener x éxitos en una repetición independiente de n copias independientes de una variable aleatoria con distribución de Bernoulli.

Ejemplo 1.3.12. *Una variable aleatoria X tiene una **distribución geométrica** con parámetro p, si su función masa de probabilidad es*

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.4}$$

donde p es un número real $0 \leq p \leq 1$.

Ejemplo 1.3.13. *See dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_I$ tienen una **distribución multinomial** si su función de probabilidad conjunta está dada por*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_I) = \frac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_I^{x_I}, \tag{1.5}$$

donde $\sum_{i=1}^{I} x_i = N$ y $\sum_{i=1}^{I} p_i = 1$.

La función de probabilidad (1.5) puede obtenerse de la manera siguiente: supongamos que se asignan pelotas al azar a I cajas, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_I$, respectivamente. Sea x_i el número de pelotas asignado a la i-ésima caja. La probabilidad de asignar x_1 pelotas a la caja 1, luego x_2 pelotas a la caja 2, y así sucesivamente hasta x_I pelotas a la caja I es $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_I^{x_I}$. Este no es el único orden posible de asignar las pelotas. El número de maneras de asignar las pelotas es

$$\binom{N}{x_1}\binom{N-x_1}{x_2} \cdots \binom{N-x_1-\cdots-x_{I-1}}{x_I} = \frac{N!}{x_1! x_2! \cdots x_I!}.$$

Entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_I) = \frac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_I}.$$

1.4. Esperanza y varianza de una variable aletoria

Pasemos ahora a estudiar ciertas definiciones y ejemplos correspondientes a la esperanza y varianza de una variable aleatoria, ya que en general son una herramienta útil para obtener información de la variable aleatoria estudiada y su distribución. En este trabajo nos restringiremos únicamente a las variables aleatorias discretas y absolutamente continuas; y las definiciones que daremos fueron tomadas de [2], [4] y [13].

Definición 1.4.1. *Sea X una variable aleatoria.*

i) Si X es una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad $f(x)$, su ***valor esperado*** *es*

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \sum_x xP(X = x), \tag{1.6}$$

cuando la suma exista.

ii) Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, su ***valor esperado*** *es*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{1.7}$$

cuando la integral exista.

Ejemplo 1.4.2. *Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica. Entonces su función masa de probabilidad es*

$$f(x) = p(1-p)^{x-1},$$

donde $x = 1, 2, 3, \ldots$ y p es un número real con $0 \leq p \leq 1$. Del inciso i) de la definición 1.4.1 tenemos que su valor esperado está dado por

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xf(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}. \tag{1.8}$$

De lo anterior, es claro que el valor esperado de X es cero cuando p toma el valor 0 ó 1. Consideremos por tanto que $0 < p < 1$ y hagamos $q = 1 - p$. Tenemos así que $0 < q < 1$, y además $(q^x)' = x \cdot q^{x-1}$ es la derivada de q^x con respecto de q. En consecuencia,

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\,(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} (q^x)'.$$

Ahora bien, como $\sum_{x=0}^{\infty} q^x$ es una serie de potencias con radio de convergencia igual a 1, el inciso i) del [10, Teorema 2.40, pág. 75] garantiza que

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty} q^x\right)' = \sum_{x=1}^{\infty} (q^x)' = \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}. \tag{1.9}$$

En vista de que $\sum_{x=0}^{\infty} q^x$ es una serie geométrica que converge a $\frac{1}{1-q}$, deducimos de lo anterior que

$$\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = \left(\sum_{x=0}^{\infty} q^x\right)' = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{1.10}$$

Finalmente, por (1.8) y el hecho que $q = 1 - p$, obtenemos que

$$E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = p\left(\frac{1}{(1-(1-p))^2}\right) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \tag{1.11}$$

Por lo tanto,

$$E(X) = \begin{cases} 0, & si \quad p = 0, 1. \\ \dfrac{1}{p}, & si \quad 0 < p < 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.4.3. *Si X tiene una distribución binomial, su función masa de probabilidad está dada por (1.3), entonces su valor esperado está dado por*

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad (\textit{el primer sumando es } 0).$$

Usando la identidad $x\binom{n}{x} = n\binom{n-1}{x-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{n} n\binom{n-1}{x-1}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{y=0}^{n-1} n\binom{n-1}{y}p^{y+1}(1-p)^{n-(y+1)} \\ &= np\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}p^y(1-p)^{n-1-y} = np. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe al hecho de que en la penúltima igualdad la suma es 1, ya que es la suma de todos los valores de la función masa de probabilidad de una distribución binomial con parámetros $n-1$ y p.

La siguiente definición se presenta debido a que en ocasiones, el interés es conocer el valor esperado de una función de una variable aleatoria (composición de una función con una variable aleatoria).

Definición 1.4.4. *Sean X una variable aleatoria discreta o absolutamente continua y u una función tal que $u(X)$ es una variable aleatoria. Si f_X denota a su función masa de probabilidad (caso discreto) o función de densidad de probabilidad (caso absolutamente continuo), entonces el valor esperado (o media) de $u(X)$, denotado por $E(u(X))$, es*

$$E[u(X)] = \sum_{x\in X} u(x)f_X(x) \textit{ si } X \textit{ es discreta}$$

y

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)dx \textit{ si } X \textit{ es absolutamente continua,}$$

siempre que exista la suma (caso discreto) o la integral (caso absolutamente continuo).

A continuación enlistamos algunas propiedades básicas del valor esperado. En todos los casos se asume que las composiciones de las funciones involucradas con la variable aleatoria X son, a su vez, variables aleatorias cuyo valor esperado existe. Se asume también que $0\cdot\infty = 0$.

1) $E(k) = k$, si k es una constante.

2) Si k es una constante y $u(X)$ es una función de X, entonces $E[ku(X)] = kE[u(X)]$.

3) Si $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes y $u_1(X), u_2(X), \ldots, u_n(X)$ son funciones de X, entonces

$$E[k_1u_1(X) + k_2u_2(X) + \cdots + k_nu_n(X)] = k_1E[u_1(X)] + k_2E[u_2(X)] + \cdots + k_nE[u_n(X)].$$

Definición 1.4.5. *Sea X una variable aleatoria con media finita μ. Si $E\left(X^2\right)$ existe, entonces la* **varianza** *de X es*

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2].$$

Por las propiedades de la esperanza vistas anteriormente se sigue que

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2. \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.4.6. *Retomando el ejemplo 1.4.2, previamente vimos que $E(X) = \frac{1}{p}$. Para calcular $Var(X)$ primero calculamos $E(X^2)$. Por lo que*

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p\left(1-p\right)^{x-1}. \tag{1.14}$$

Notemos que el valor esperado de X^2 es cero si p toma el valor 0 ó 1. Asumamos por tanto que $0 < p < 1$.

Observemos que

$$\begin{aligned} x^2p\left(1-p\right)^{x-1} &= \left[x(x-1)+x\right]p(1-p)^{x-1} \\ &= px(x-1)(1-p)^{x-1} + xp(1-p)^{x-1} \\ &= p(1-p)x(x-1)(1-p)^{x-2} + xp(1-p)^{x-1}. \end{aligned}$$

De lo anterior y (1.14) se sigue que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty}\left[p(1-p)x(x-1)(1-p)^{x-2} + xp(1-p)^{x-1}\right] \\ &= p(1-p)\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} + \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ahora bien, si consideramos $q = 1-p$ tenemos que $(xq^{x-1})' = x(x-1)q^{x-2}$ es la primera derivada de xq^{x-1} con respecto de q. Además, al ser $0 < p < 1$, resulta que también $0 < q <$

1. *Como hicimos ver en (1.10), la serie de potencias* $\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}$ *es convergente, por lo que el inciso i) de [10, Teorema 2.40, pág. 75] garantiza que*

$$\left(\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}\right)' = \sum_{x=1}^{\infty} \left(xq^{x-1}\right)',$$

es decir, por (1.10),

$$\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)q^{x-2},$$

y entonces,

$$\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)q^{x-2}. \tag{1.16}$$

Luego, por (1.15) y (1.11) obtenemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= p(1-p)\left(\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}\right)' + \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} \\ &= p(1-p)\left(\frac{2}{(1-q)^3}\right) + \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

y como $q = 1-p$, *resulta*

$$E(X^2) = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Así que la varianza para X *cuando* $0 < p < 1$ *está dada por*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}. \tag{1.17}$$

Por lo tanto,

$$Var(X) = \begin{cases} 0, & si \quad p = 0, 1. \\ \dfrac{1-p}{p^2}, & si \quad 0 < p < 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

Ejemplo 1.4.7. *Retomando el ejemplo 1.4.3, previamente vimos que* $E(X) = np$. *Para calcular* $Var(X)$, *primero calculamos* $E(X^2)$. *Tenemos que*

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \tag{1.19}$$

Para realizar esta suma, primero debemos manipular el coeficiente binomial de manera similar a lo hecho para $E(X)$. *Escribimos*

$$x^2\binom{n}{x} = x\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} = xn\binom{n-1}{x-1}.$$

Sustituyendo esto en (1.19) *tenemos que*

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= n\sum_{x=1}^{n} x\binom{n-1}{x-1}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= n\sum_{y=0}^{n-1}(y+1)\binom{n-1}{y}p^{y+1}(1-p)^{n-1-y} \quad (\textit{tomando } y = x-1) \\
&= np\sum_{y=0}^{n-1} y\binom{n-1}{y}p^y(1-p)^{n-1-y} + np\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}p^y(1-p)^{n-1-y}.
\end{aligned}
$$

Ahora, es fácil ver que la primera suma de la parte derecha de la última igualdad es $(n-l)p$ *(ya que es la media de una binomial con parámetros* $n-1$ *y* p*), mientras que la segunda suma es igual a* 1 *(por ser la suma de todos los valores posibles de la función masa de probabilidad de una binomial con parámetros* $n-1$ *y* p*). Por lo tanto*

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np.$$

En consecuencia, la varianza de la variable aleatoria X *está dada por*

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p).$$

1.5. Función generadora de momentos y momento r-ésimo

Consideraremos ahora las esperanzas de potencias enteras y positivas de una variable aleatoria X, a saber, los momentos de X.

Definición 1.5.1. *Sea* X *una variable aleatoria discreta o absolutamente continua, con función de probabilidad o densidad* $f(x)$*. El* ***n-ésimo momento*** *de* X *suele designarse por* μ'_n *y es*

$$\mu'_n = E(X^n);$$

más especificamente, el n-ésimo momento se calcula mediante la fórmula

$$E(X^n) = \sum_x x^n f(x), \quad \text{si } X \text{ es discreta} \tag{1.20}$$

y con la fórmula

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx, \quad \text{si } X \text{ es absolutamente continua.}$$

Definición 1.5.2. *El* ***n-ésimo momento central con respecto a la media*** *de una variable aleatoria* X*, está definido por*

$$\mu_n \equiv E[(X-\mu_1')^n] = \sum_x (x-\mu_1')^n f(x)dx, \quad \text{si } X \text{ es discreta}$$

y por

$$\mu_n \equiv E[(X-\mu_1')^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1')^n f(x)dx, \quad \text{si } X \text{ es absolutamente continua.}$$

Observación 1.5.3. *Cada momento es una medida de cierta característica de los datos. Por ejemplo, se conoce (ver [12]) que el primer momento es la esperanza (o media), este momento es una medida de localización o centralización de los datos. El segundo momento central es la varianza, este momento es una medida de dispersión de los datos. El tercer momento central está relacionado con la asimetría de los datos, por lo que este momento es llamado medida de asimetría. El cuarto momento central está relacionado con la forma de las colas de la gráfica de frecuencias de los datos, es decir es una medida de curtosis. Es conocido también (ver teorema 2.3.11 de [2]) que si el soporte de la distribución es acotado, entonces el conjunto de todos los momentos determinan completamente a la distribución.*

Ejemplo 1.5.4. *Las distribuciones simétricas, como las que se muestran en la figura 1.1, tienen* $\mu_3 = 0$.

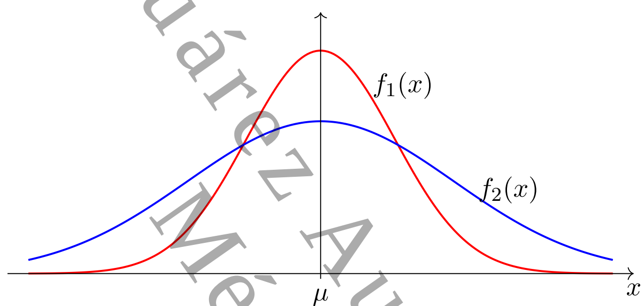


Figura 1.1: Distribuciones con asimetría nula.

Una curva cuya representación sea como la de $f_1(x)$ *de la figura 1.2 (ver [7]) se dice que es sesgada a la izquierda y puede verse que tiene el tercer momento central respecto a la media negativo; otra cuyo aspecto sea como el de la* $f_2(x)$*, se dice que es sesgada a la derecha y puede verse que tiene el tercer momento central respecto a la media positivo. La función de densidad* $f_3(x)$ *de la figura 1.2 tiene* $\mu_3 = 0$ *y dista mucho de ser simétrica, por lo que cuando el tercer momento central es cero no tenemos mucha información acerca de la forma de la densidad. Mediante un pequeño cambio de forma podría conseguirse que su tercer momento central fuese como quisiéramos, positivo o negativo.*

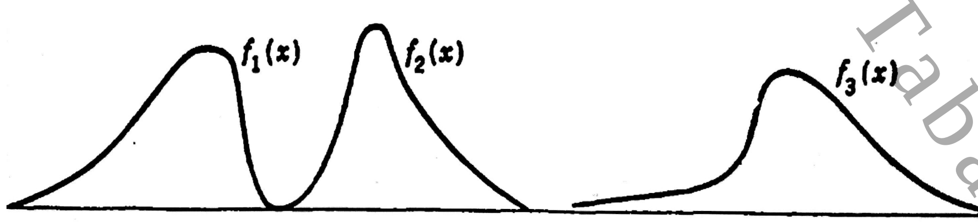


Figura 1.2: Funciones de densidad sesgadas y asimétricas.

Ahora bien, una forma alternativa de calcular los momentos de una variable aleatoria es usando su función generadora de momentos, la cual se define de la siguiente manera.

Definición 1.5.5. *Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad o densidad $f(x)$. La* ***función generadora de momentos*** *(f.g.m.) de X está dada por*

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right),$$

siempre que la esperanza exista para toda t en alguna vecindad de 0, es decir, si existe $h > 0$ tal que para todo $t \in (-h, h)$, $E(e^{tX})$ existe.

Más específicamente, podemos escribir la función generadora de momentos de X como

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x), \text{ si } X \text{ es discreta}$$

y

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, \text{ si } X \text{ es absolutamente continua.}$$

El siguiente teorema es muy importante para el cálculo de los momentos de una variable aleatoria X y será de utilidad en el siguiente capítulo.

Teorema 1.5.6. *Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t)$, entonces*

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0),$$

donde definimos

$$M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0}.$$

Es decir, el n-ésimo momento de X es igual a la n-ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en $t = 0$ (o su límite cuando $t \to 0$).

Demostración. Notemos que

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{tx}) f_X(x) dx = E\left[Xe^{tX}\right].$$

Para la validez de la segunda igualdad, ver por ejemplo, [10, pág. 114]. Entonces

$$\frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = E\left[Xe^{tX}\right]|_{t=0} = E[X].$$

Procediendo de manera análoga puede demostrarse que

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0} = E\left[X^n e^{tX}\right]|_{t=0} = E\left[X^n\right].$$

■

Ejemplo 1.5.7. *Usando el teorema 1.5.6 para el cálculo de momentos, calculemos la media y varianza de la distribución de Poisson de parámetro $a > 0$,*

$$f(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tenemos

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-a}a^x}{x!} = e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ae^t)^x}{x!} = e^{-a}e^{ae^t}.$$

Las dos primeras derivadas son

$$M_X^{(1)}(t) = e^{-a}ae^te^{ae^t} \quad y \quad M_X^{(2)}(t) = e^{-a}ae^te^{ae^t}(1+ae^t),$$

de donde

$$\mu_1' = M_X^{(1)}(0) = a, \quad y \quad \mu_2' = M_X^{(2)}(0) = a(1+a).$$

En consecuencia se tiene que

$$\sigma^2 \equiv Var(X) = a(1+a) - a^2 = a.$$

Capítulo 2

Problema del coleccionista de cupones

El problema del coleccionista de cupones (PCC) es un problema clásico de la probabilidad, específicamente, del área de combinatoria. Este problema consiste en lo siguiente: existen N tipos diferentes de cupones, tales como tarjetas de béisbol, de lucha libre, etc. y se desea recolectarlos todos; los cupones se adquieren uno por uno en secuencia. Por simplicidad, denotaremos a la colección de cupones distintos como $H = \{1, 2, \ldots, N\}$, y por p_k denotaremos a la probabilidad de adquirir un cupón de tipo k, $k = 1, 2, \ldots, N$; obviamente, debe tenerse que $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$. Suponiendo independencia entre las adquisiciones (compras) de los cupones, este problema se modela por una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes, tales que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $P(X_n = k) = p_k$, $n = 1, 2, \ldots$.
En este capítulo nuestro interés consiste en determinar la distribución y los momentos de algunas variables aleatorias relacionadas con el PCC, para lo cual nos apoyaremos en su mayoría en [15]. Además, proporcionaremos fórmulas propias para el cálculo de la función generadora de momentos y el r-ésimo momento de la variable aleatoria Y_n, que representa el número de cupones distintos obtenidos después de n adquisiciones, y de T_k, que representa el número de adquisiciones necesarias para obtener k cupones distintos de toda la colección de cupones.

2.1. Modelación

En esta sección, iniciamos describiendo los elementos del espacio de probabilidad que modela el experimento del problema del coleccionista de cupones (PCC), como se observa a continuación.

El espacio de probabilidad subyacente para el experimento aleatorio que se desarrolla en el PCC es $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde los elementos de Ω son todas las posibles secuencias de cupones adquiridos, es decir, $\Omega = H^{\mathbb{N}}$, equipado con su σ-álgebra producto $\mathcal{F}$ (véase el ejemplo 1.2.5 con $\{0, 1\}$ reemplazado por H). Para $i_1, i_2, \ldots, i_n \in H$ dados, P es tal que

$$P\left(\{\omega = i_1 i_2 \cdots i_n j_{n+1} j_{n+2} \cdots : j_k \in H, k > n\}\right) = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}.$$

La extensión de P a una medida de probabilidad definida en $\mathcal{F}$ se sigue por el teorema de extensión (teorema 1.2.4), en forma análoga al ejemplo 1.2.5.

Ahora bien, podemos describir esta situación mediante la sucesión de variables aleatorias

$$S_n = (S_{n1}, \dots S_{nN}), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

donde S_{ni} denota el número de cupones de tipo i conseguidos en n adquisiciones. De esta manera, si en n adquisiciones el cupón i se obtuvo s_i veces, $i = 1, 2, \dots, N$, entonces S_n toma el valor $(s_1, s_2, \dots, s_N)$.

La variable aleatoria S_n tiene una distribución multinomial con parámetros $n, p_1, p_2, \dots, p_N$, es decir, para cualesquiera enteros $s_1, s_2, \dots, s_N$, $0 \le s_i \le n$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_N = n$,

$$P(S_{n1} = s_1, S_{n2} = s_2, \dots, S_{nN} = s_N) = \frac{n!}{s_1! s_2! \cdots s_N!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_N^{s_N}. \tag{2.2}$$

La distribución marginal de S_n, para elementos distintos $i_1, i_2, \dots, i_h \in H$, está dada por

$$\begin{aligned} P(S_{ni_1} = s_{i_1}, S_{ni_2} = s_{i_2}, \dots, S_{ni_h} = s_{i_h}) &= \frac{n!}{s_{i_1}! s_{i_2}! \cdots s_{i_h}! (n - \sum_{j=1}^h s_{i_j})!} \\ &\quad \cdot p_{i_1}^{s_{i_1}} p_{i_2}^{s_{i_2}} \cdots p_{i_h}^{s_{i_h}} q_{i_1 i_2 \dots i_h}^{n - \sum_{j=1}^h s_{i_j}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

con $0 \le s_{i_j} \le n$, $j = 1, 2, \dots, h$, $s_{i_1} + s_{i_2} + \cdots + s_{i_h} \le n$, $q_{i_1 i_2 \dots i_h} = 1 - \sum_{j=1}^h p_{i_j}$.

Ésta es la probabilidad de que en n adquisiciones se ha conseguido s_{i_j} veces un cupón del tipo i_j, $j = 1, 2, \dots, h$, sin considerar al resto de los cupones.

En particular la componente S_{nh} de S_n tiene una distribución binomial con parámetros n, p_h,

$$P(S_{nh} = s) = \frac{n!}{s!(n-s)!} p_h^s q_h^{n-s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n,$$

donde $q_h = 1 - p_h = \sum_{i \neq h} p_i$. La variable S_{nh} representa el número de cupones de tipo h conseguidos en n adquisiciones, entonces $P(S_{nh} = s)$ es la probabilidad que en n adquisiciones se consiga s veces el cupón de tipo h. El valor esperado y la varianza de esta variable aleatoria son

$$E(S_{nh}) = np_h, \quad \mathrm{Var}(S_{nh}) = np_h(1 - p_h).$$

Sea $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^N$. Enfatizamos que el proceso $(S_n)_{n \ge 1}$ es la caminata aleatoria en Z_+^N con incrementos independientes que obedecen la siguiente ley:

$$S_{n+1} - S_n = e_k,$$

con probabilidad p_k.

Ejemplo 2.1.1. *Supongamos que la colección consiste de* $N = 3$ *tipos distintos de cupones, y que en* 5 *adquisiciones el coleccionista obtuvo* 2 *cupones de tipo* 1, 2 *cupones de tipo* 2, *y* 1 *cupón de tipo* 3, *entonces* $S_5 = (2, 2, 1)$. *Ahora, si en una adquisición más, el coleccionista obtuvo un cupón de tipo* 1, *entonces* $S_6 = (3, 2, 1)$ *y así* $S_6 - S_5 = (1, 0, 0) = e_1$ *con probabilidad* p_1. *Si el coleccionista obtuvo un cupón de tipo* 2, *entonces* $S_6 = (2, 3, 1)$ *y así* $S_6 - S_5 = (0, 1, 0) = e_2$ *con probabilidad* p_2. *Finalmente, si el coleccionista consiguió un cupón de tipo* 3, *entonces* $S_6 = (2, 2, 2)$ *y así* $S_6 - S_5 = (0, 0, 1) = e_3$ *con probabilidad* p_3.

Observación 2.1.2. *En este modelo la sucesión* $(S_n)_{n\geq 1}$ *es una cadena de Markov, y no es difícil dar una descripción precisa de sus probabilidades de transición, sin embargo no estudiaremos esta cadena de Markov directamente.*

2.2. Número de cupones distintos después de n adquisiciones (Y_n)

Denotaremos por Y_n a la variable aleatoria que representa el número de cupones distintos obtenidos después de n adquisiciones. Con el propósito de conocer el comportamiento y las propiedades de Y_n, presentamos su función masa de probabilidad, función de distribución y su función generadora de momentos.

En principio recordemos que, como el conjunto H es la colección de tipos de cupones distintos, entonces $|H| = N$. Ahora bien, para cualesquiera enteros no negativos m y n, con $m \leq n$ escribimos

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \quad y \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Para cualesquiera elementos distintos $j_1, j_2, \ldots, j_k \in H$, definimos a

$$p_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \equiv p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_k},$$

que representa la probabilidad de que en una adquisición se obtenga un cupón del tipo j_1, o $j_2, \ldots$ o j_k.

Enseguida presentamos el teorema que corresponde a la función masa de probabilidad de la variable aleatoria Y_n. Este teorema será de gran utilidad en el desarrollo de esta tesis, ya que nos permite conocer todas las probabilidades de la variable Y_n, así como diversas propiedades.

Teorema 2.2.1. *La función masa de probabilidad de la variable aleatoria* Y_n *es*

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) = & \sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\ldots j_k} - \binom{N-k+1}{N-k} \sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_{k-1}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\ldots j_{k-1}} \\ & + \binom{N-k+2}{N-k} \sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_{k-2}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\ldots j_{k-2}} - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{N-1}{N-k} \sum_{\{j\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_j, \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq \text{mín}\{N, n\}$. *Usando la notación* $p_A = \sum_{i\in A} p_i$ *para cualquier* $A \subset H$, *la expresión anterior se puede escribir de forma más compacta como*

$$P(Y_n = k) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k} (-1)^{k-|A|} \binom{N-|A|}{k-|A|} p^n_A, \quad \textit{para } 0 \leq k \leq \text{mín}\{N, n\}, \tag{2.4}$$

donde $|A|$ *denota la cardinalidad del conjunto* A.

Demostración. De la fórmula (2.3) y el principio general de inclusión y exclusión tenemos que

$$
\begin{aligned}
&P\left(\text{el conjunto de cupones distintos conseguidos en } n \text{ adquisiciones es } \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}\right)\\
&= \sum_{\substack{s_{j_1}+s_{j_2}+\ldots+s_{j_k}=n\\ s_{j_i}\geq 1\ \forall i=1,\ldots,k}} P\left(S_{nj_1}=s_{j_1}, S_{nj_2}=s_{j_2}, \ldots, S_{nj_k}=s_{j_k}\right)\\
&= \sum_{\substack{s_{j_1}+s_{j_2}+\ldots+s_{j_k}=n\\ s_{j_i}\geq 1\ \forall i=1,\ldots,k}} \frac{n!}{s_{j_1}!s_{j_2}!\cdots s_{j_k}!} p_{j_1}^{s_{j_1}} p_{j_2}^{s_{j_2}} \cdots p_{j_k}^{s_{j_k}}\\
&= \sum_{s_{j_1}+s_{j_2}+\ldots+s_{j_k}=n} \frac{n!}{s_{j_1}!s_{j_2}!\cdots s_{j_k}!} p_{j_1}^{s_{j_1}} p_{j_2}^{s_{j_2}} \cdots p_{j_k}^{s_{j_k}}\\
&\quad - \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\}\subset\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}\\ s_{i_1}+s_{i_2}+\ldots+s_{i_{k-1}}=n}} \frac{n!}{s_{i_1}!s_{i_2}!\cdots s_{i_{k-1}}!} p_{i_1}^{s_{i_1}} p_{i_2}^{s_{i_2}} \cdots p_{i_{k-1}}^{s_{i_{k-1}}}\\
&\quad + \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-2}\}\subset\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}\\ s_{i_1}+s_{i_2}+\ldots+s_{i_{k-2}}=n}} \frac{n!}{s_{i_1}!s_{i_2}!\cdots s_{i_{k-2}}!} p_{i_1}^{s_{i_1}} p_{i_2}^{s_{i_2}} \cdots p_{i_{k-2}}^{s_{i_{k-2}}}\\
&\quad - \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i\in\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} p_i^n\\
&= \left(p_{j_1}+p_{j_2}+\cdots+p_{j_k}\right)^n - \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\}\subset\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}}\\
&\quad + \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-2}\}\subset\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_{k-2}} - \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i\in\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} p_i^n,
\end{aligned}
$$

de lo cual se deduce que

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_n=k\right) = &\sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\cdots j_k} - \binom{N-k+1}{1} \sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_{k-1}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\cdots j_{k-1}}\\
&+ \binom{N-k+2}{2} \sum_{\{j_1,j_2,\ldots,j_{k-2}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{j_1 j_2\cdots j_{k-2}} - \cdots\\
&+ (-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1} \sum_{j\in\{1,2,\ldots,N\}} p_j^n. \quad (2.5)
\end{aligned}
$$

Como $p_A = \sum_{i\in A} p_i$ para cualquier $A \subset H$, la expresión (2.5) se puede reescribir en la forma (2.4). ■

Ahora presentamos el siguiente teorema relacionado con la función de distribución de la variable aleatoria Y_n. Este teorema será muy relevante en el siguiente capítulo ya que nos permite establecer vínculos entre la variable Y_n y otra variable involucrada en el PCC que se estudiará en la sección 2.3.

Teorema 2.2.2. *La función de distribución del número de cupones distintos después de n adquisiciones, es*

$$P(Y_n \leq k) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k} (-1)^{k-|A|} \binom{N-|A|-1}{k-|A|} p_A^n, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.6}$$

Demostración. A continuación, veamos que la expresión (2.6) es en efecto la función de distribución de Y_n, para lograrlo usaremos la expresión de la función masa de probabilidad (2.4). Tenemos que

$$\begin{aligned} P\left(Y_n \leq k\right) = \sum_{j=1}^{k} P\left(Y_n = j\right) &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{A\subset H, |A|\leq j} (-1)^{j-|A|} \binom{N-|A|}{j-|A|} p_A^n \\ &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k} \left(\sum_{j=|A|}^{k} (-1)^{j-|A|} \binom{N-|A|}{j-|A|} \right) p_A^n \\ &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k} \left(\sum_{i=0}^{k-|A|} (-1)^{i} \binom{N-|A|}{i} \right) p_A^n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Finalmente, usando la proposición A.0.1 en (2.7) se obtiene que

$$P\left(Y_n \leq k\right) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k} (-1)^{k-|A|} \binom{N-|A|-1}{k-|A|} p_A^n, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.8}$$

por lo que se cumple lo deseado. ■

Una prueba alternativa para el teorema 2.2.2 se realiza usando inducción matemática, como se presenta a continuación.

Demostración. (Usando inducción matemática). Primero veamos que la expresión (2.6) se cumple para $k = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{A\subset H, |A|\leq 1} (-1)^{1-|A|} \binom{N-|A|-1}{1-|A|} p_A^n &= \sum_{A\subset H, |A|=0} (-1)^{1} \binom{N-1}{1} p_\emptyset^n + \sum_{A\subset H, |A|=1} (-1)^{0} \binom{N-2}{0} p_A^n \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{N} (1)(1) p_i^n = \sum_{i=1}^{N} p_i^n. \end{aligned}$$

Usando la función masa de probabilidad de Y_n en su forma compacta (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leq 1) &= P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1)\\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq 0} (-1)^{0-|A|}\binom{N-|A|}{0-|A|}p_A^n + \sum_{A\subset H,|A|\leq 1}(-1)^{1-|A|}\binom{N-|A|}{1-|A|}p_A^n\\
&= \sum_{A\subset H,|A|=0}\binom{N}{0}p_\emptyset^n + \sum_{A\subset H,|A|=0}(-1)^1\binom{N}{1}p_\emptyset^n + \sum_{A\subset H,|A|=1}(-1)^0\binom{N-1}{0}p_A^n\\
&= 0 + 0 + \sum_{A\subset H}(1)(1)p_i^n\\
&= \sum_{i=1}^{N} p_i^n.
\end{aligned}$$

Por lo que la expresión (2.6) se cumple para $k=1$.

Ahora, supongamos que la función de distribución de Y_n se cumple para k, veamos que se cumple para $k+1$, es decir que

$$P(Y_n \leq k+1) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k+1}(-1)^{(k+1)-|A|}\binom{N-|A|-1}{k+1-|A|}p_A^n.$$

De nuevo, usando (2.4) y por propiedades de números combinatorios tenemos que

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leq k+1) &= P(Y_n \leq k) + P(Y_n = k+1)\\
&= \sum_{A\subset H,|A|\leq k}(-1)^{k-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|}p_A^n + \sum_{A\subset H,|A|\leq k+1}(-1)^{(k+1)-|A|}\binom{N-|A|}{(k+1)-|A|}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{k-s}\binom{N-s-1}{k-s}p_A^n + \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{(k+1)-s}\binom{N-s}{k+1-s}p_A^n + \sum_{|A|=k+1}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}\left[(-1)^{k-s}\binom{N-s-1}{k-s} + (-1)^{k+1-s}\binom{N-s}{k+1-s}\right]p_A^n + \sum_{|A|=k+1}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{k-s}\left[\binom{N-s-1}{k-s} - \binom{N-s}{k+1-s}\right]p_A^n + \sum_{|A|=k+1}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{k-s}\left[-\binom{N-s-1}{k+1-s}\right]p_A^n + \sum_{|A|=k+1}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{k+1-s}\binom{N-s-1}{k+1-s}p_A^n + \sum_{|A|=k+1}p_A^n\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{|A|=s}(-1)^{k+1-s}\binom{N-s-1}{k+1-s}p_A^n + \sum_{s=k+1,|A|=s}(-1)^{k+1-s}\binom{N-s-1}{k+1-s}p_A^n,
\end{aligned}$$

es decir,

$$P(Y_n \leq k+1) = \sum_{s=0}^{k+1}\sum_{|A|=s}(-1)^{k+1-s}\binom{N-s-1}{k+1-s}p_A^n = \sum_{|A|\leq k+1}(-1)^{(k+1)-|A|}\binom{N-|A|-1}{k+1-|A|}p_A^n.$$

Por lo tanto, la fórmula de la función de distribución de Y_n dada por la expresión (2.6) se cumple para toda k. ■

2.2.1. Esperanza y varianza de Y_n

A continuación, damos una manera alternativa a las encontradas en la literatura para el cálculo de la esperanza y varianza de Y_n.

Sea A_{ni} el evento de que hasta el n-ésimo tiempo el cupón i no ha sido obtenido. Definamos entonces las variables aleatorias siguientes

$$m_{N-k}^{[n]} = \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} 1_{A_{ni_1}\cap A_{ni_2}\cap\cdots\cap A_{ni_k}}, \quad k = 1,2,\ldots,N,$$

donde 1_B denota la función indicadora del evento B.

Notemos que $m_{N-1}^{[n]} = \sum_{i=1}^{N} 1_{A_{ni}}$ es el número de cupones que, hasta el tiempo n, no han sido obtenidos, es decir, $m_{N-1}^{[n]} = N - Y_n$ y que $P(A_{ni}) = (1-p_i)^n$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Luego, si $M_{N-k}^{[n]} = E\left(m_{N-k}^{[n]}\right)$, $k = 1,2,\ldots,N$, entonces la esperanza de Y_n está dada por la siguiente expresión

$$E(Y_n) = N - M_{N-1}^{[n]} = N - \sum_{i=1}^{N} E(1_{A_{ni}}) = N - \sum_{i=1}^{N} P(A_{ni}) = N - \sum_{i=1}^{N} (1-p_i)^n. \quad (2.9)$$

También, debido a que

$$Y_n^2 = \left(N - m_{N-1}^{[n]}\right)^2 = N^2 - 2Nm_{N-1}^{[n]} + \left(m_{N-1}^{[n]}\right)^2,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
E\left(Y_n^2\right) &= N^2 - 2NM_{N-1}^{[n]} + E\left[\left(m_{N-1}^{[n]}\right)^2\right] \\
&= N^2 - 2NM_{N-1}^{[n]} + E\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_{ni}} \sum_{i=1}^{N} 1_{A_{ni}}\right) \\
&= N^2 - 2NM_{N-1}^{[n]} + E\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{A_{ni}} + 2\sum_{\{i,j\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} 1_{A_{ni}\cap A_{nj}}\right) \\
&= N^2 - 2NM_{N-1}^{[n]} + M_{N-1}^{[n]} + 2M_{N-2}^{[n]} \\
&= 2M_{N-2}^{[n]} - (2N-1)M_{N-1}^{[n]} + N^2 \\
&= 2\sum_{1\le i<j\le N} (1-p_i-p_j)^n - (2N-1)\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + N^2.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$E\left(Y_n^2\right) = 2\sum_{1\le i<j\le N} (1-p_i-p_j)^n - (2N-1)\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + N^2. \quad (2.10)$$

Finalmente, como consecuencia de (2.9) y (2.10) se sigue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Y_n) &= E\left(Y_n^2\right) - \left[E\left(Y_n\right)\right]^2 \\
&= \left(2\sum_{1\le i<j\le N}(1-p_i-p_j)^n - (2N-1)\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + N^2\right) \\
&\quad - \left(N - \sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right)^2 \\
&= 2\sum_{1\le i<j\le N}(1-p_i-p_j)^n - 2N\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + \sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n \\
&\quad + N^2 - N^2 + 2N\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n - \left(\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right)^2 \\
&= 2\sum_{1\le i<j\le N}(1-p_i-p_j)^n + \left(\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right)\left(1-\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la varianza de Y_n es

$$\operatorname{Var}(Y_n) = 2\sum_{1\le i<j\le N}(1-p_i-p_j)^n + \left(\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right)\left(1-\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n\right). \tag{2.11}$$

2.2.2. Función generadora de momentos de Y_n

A continuación proporcionamos una expresión para la función generadora de momentos de la variable aleatoria Y_n, ya que mediante ésta se pueden obtener todos los momentos de la variable aleatoria de Y_n, en particular nos interesa obtener su primer y segundo momento.

Proposición 2.2.3. *La función generadora de momentos de la variable aleatoria Y_n está dada por*

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{tk}\left(1-e^t\right)^{N-k} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\ldots i_k}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2.12}$$

Demostración. De la definición de función generadora de momentos y usando (2.4), se sigue que

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) \equiv E\left(e^{tY_n}\right) &= \sum_{k=1}^{N} e^{tk} P\left(Y_n = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} e^{tk} \sum_{A\subset H, |A|\le k} (-1)^{k-|A|}\binom{N-|A|}{k-|A|} p_A^n \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\le N}\left(\sum_{k=|A|}^{N} e^{tk}(-1)^{k-|A|}\binom{N-|A|}{k-|A|}\right) p_A^n.
\end{aligned}$$

Ahora, si hacemos $i = k - |A|$ y aplicamos el teorema del binomio, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) &= \sum_{A\subset H, |A|\leq N} \left(\sum_{i=0}^{N-|A|} e^{t(i+|A|)}(-1)^i \binom{N-|A|}{i} \right) p_A^n \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq N} e^{t|A|} \left(\sum_{i=0}^{N-|A|} \left(-e^t\right)^i \binom{N-|A|}{i} \right) p_A^n \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq N} e^{t|A|} \left(1-e^t\right)^{N-|A|} p_A^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{A\subset H, |A|=k} e^{tk} \left(1-e^t\right)^{N-k} p_A^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} e^{tk} \left(1-e^t\right)^{N-k} p_{i_1 i_2\cdots i_k}^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} e^{tk} \left(1-e^t\right)^{N-k} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p_{i_1 i_2\cdots i_k}^n .
\end{aligned}$$

■

Ahora bien, para calcular la esperanza y varianza de Y_n, de acuerdo al teorema 1.5.6 calcularemos la primera y segunda derivada de la función generadora de momentos de Y_n. Para este fin, definimos a $h_k(t) = e^{tk}\left(1-e^t\right)^{N-k}$ y calculemos la primera y segunda derivada de h_k, como se muestra enseguida

$$h_k'(t) = ke^{tk}\left(1-e^t\right)^{N-k} - (N-k)e^{t(k+1)}\left(1-e^t\right)^{N-k-1}$$

y

$$\begin{aligned}
h_k''(t) = {} & k^2 e^{tk}\left(1-e^t\right)^{N-k} - (2k+1)(N-k)e^{t(k+1)}\left(1-e^t\right)^{N-k-1} \\
& + (N-k)(N-k-1)e^{t(k+2)}\left(1-e^t\right)^{N-k-2} .
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} h_k'(t) = \begin{cases} N & \text{si } k = N, \\ -1 & \text{si } k = N-1, \\ 0 & \text{si } k = 1,2,\ldots,N-2. \end{cases}$$

y

$$\lim_{t\to 0} h_k''(t) = \begin{cases} N^2 & \text{si } k = N, \\ 1-2N & \text{si } k = N-1, \\ 2 & \text{si } k = N-2, \\ 0 & \text{si } k = 1,2,\ldots,N-3. \end{cases}$$

Por lo tanto, el primer momento de Y_n está dado por

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \lim_{t\to 0} M'(t) \\ &= N \sum_{\{i_1,\ldots,i_N\}\subset\{1,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_N} - \sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-1}\}\subset\{1,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_{N-1}} \\ &= N - \sum_{i=1}^{N} (1-p_i)^n, \end{aligned}$$

y el segundo momento de Y_n está dado por

$$\begin{aligned} E\left(Y_n^2\right) &= \lim_{t\to 0} M''(t) \\ &= N^2 \sum_{\{i_1,\ldots,i_N\}\subset\{1,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_N} - (2N-1) \sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-1}\}\subset\{1,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_{N-1}} \\ &\quad +2 \sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-2}\}\subset\{1,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\cdots i_{N-2}} \\ &= N^2 - (2N-1)\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + 2\sum_{1\le i<j\le N}(1-p_i-p_j)^n. \end{aligned}$$

Observación 2.2.4. *Notemos que estas expresiones obtenidas para el primer y segundo momento de Y_n son las mismas que (2.9) y (2.10) vistas en la subsección anterior.*

2.2.3. Cálculo del r-ésimo momento de Y_n

A continuación proporcionamos el siguiente resultado que nos da una fórmula general para obtener los momentos de la variable aleatoria Y_n.

Proposición 2.2.5. *Para cualquier entero positivo r, el r-ésimo momento de la variable aleatoria Y_n está dado por*

$$E\left(Y_n^r\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=0}^{N-k}(-1)^i\binom{N-k}{i}(i+k)^r\right)\sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1 i_2\ldots i_k}. \tag{2.13}$$

Demostración. Por la definición de esperanza de una variable aleatoria discreta, utilizando la función masa de probabilidad de Y_n (véase (2.4)) se sigue que

$$\begin{aligned} E(Y_n^r) = \sum_{k=1}^{N} k^r P(Y_n = k) &= \sum_{k=1}^{N} k^r \sum_{A\subset H, |A|\le k} (-1)^{k-|A|}\binom{N-|A|}{k-|A|} p_A^n \\ &= \sum_{A\subset H,|A|\le N}\ \sum_{k=|A|}^{N} k^r (-1)^{k-|A|}\binom{N-|A|}{k-|A|} p_A^n. \end{aligned}$$

Tomando $i = k - |A|$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(Y_n^r) &= \sum_{A\subset H, |A|\leq N} \sum_{i=0}^{N-|A|} (i+|A|)^r (-1)^i \binom{N-|A|}{i} p_A^n \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq N} \sum_{i=0}^{N-|A|} (-1)^i (i+|A|)^r \binom{N-|A|}{i} p_A^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i (i+k)^r \binom{N-k}{i} p_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (i+k)^r \right) \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^n.
\end{aligned}
$$

■

En el siguiente corolario damos una expresión simplificada de (2.13), válida para r entre 1 y $N-1$.

Corolario 2.2.6. *Si $1 \leq r \leq N-1$, se tiene que el $r-$ ésimo momento de Y_n está dada por*

$$
E(Y_n^r) = \sum_{k=N-r}^{N} \left(\sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (i+k)^r \right) \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^n. \tag{2.14}
$$

A continuación presentamos un lema que será de utilidad para demostrar el corolario 2.2.6. Definamos

$$
R_{k,r} := \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (i+k)^r.
$$

Lema 2.2.7. *Sean k, N, r números enteros no negativos. Si $k \leq N-r-1$, entonces $R_{k,r} = 0$.*

Demostración. Del teorema del binomio se sigue que

$$
\begin{aligned}
R_{k,r} &= \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} i^m k^{r-m} \\
&= \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} k^{r-m} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} i^m.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Por (A.2) del apéndice tenemos que

$$
\sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} i^m = 0, \text{ si } N-k-1 \geq m.
$$

Notemos que si $k \leq N-r-1$, entonces $N-k-1 \geq r \geq m$, para toda $m = 0, 1, \ldots, r$. Así por (2.15), $R_{k,r} = 0$ para toda $k \leq N-r-1$. ■

De este modo, de la proposición 2.2.5 y el lema 2.2.7 se sigue que una expresión para $E(Y_n^r)$, con $1 \leq r \leq N-1$, está dada por (2.14).

A manera de ejemplo, calculemos ahora $E(Y_n)$ y $E(Y_n^2)$ utilizando la expresión (2.14).

Para $r = 1$,

$$E(Y_n) = \sum_{k=N-1}^{N} R_{k,1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_k}, \text{ con } R_{k,1} = \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (i+k).$$

Si $k = N-1$, entonces

$$R_{N-1,1} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} (i+N-1) = [(N-1) + (-1)(1)N] = -1.$$

Si $k = N$, entonces

$$R_{N,1} = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{N-N}{i} (i+N)^r = N.$$

Por tanto, el primer momento de Y_n está dado por

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= -\sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-1}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_{N-1}} + N \sum_{\{i_1,\ldots,i_N\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_N} \\ &= -\sum_{i=1}^{N} (1-p_i)^n + N = N - \sum_{i=1}^{N} (1-p_i)^n. \end{aligned}$$

Para $r = 2$,

$$E(Y_n^2) = \sum_{k=N-2}^{N} R_{k,2} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_k}, \text{ con } R_{k,2} = \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (i+k)^2.$$

Si $k = N-2$, entonces

$$\begin{aligned} R_{N-2,2} &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} (i+N-2)^2 = \left[(N-2)^2 - 2(1+N-2)^2 + N^2\right] \\ &= \left[N^2 - 4N + 4 - 2(N-1)^2 + N^2\right] = \left[N^2 - 4N + 4 - 2(N^2 - 2N + 1) + N^2\right] \\ &= \left[N^2 - 4N + 4 - 2N^2 + 4N - 2 + N^2\right] = 2. \end{aligned}$$

Si $k = N-1$, entonces

$$\begin{aligned} R_{N-1,2} &= \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} (i+N-1)^2 = \left[(N-1)^2 - N^2\right] \\ &= (N^2 - 2N + 1 - N^2) = -(2N-1). \end{aligned}$$

Si $k = N$,

$$R_{N,2} = \sum_{i=0}^{0}(-1)^i \binom{N-N}{i} N^2 = N^2.$$

Por lo tanto, el segundo momento de Y_n está dado por

$$\begin{aligned}
E(Y_n^2) = 2 &\sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-2}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_{N-2}} - (2N-1) \sum_{\{i_1,\ldots,i_{N-1}\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_{N-1}} \\
&+ N^2 \sum_{\{i_1,\ldots,i_N\}\subset\{1,2,\ldots,N\}} p^n_{i_1,\ldots,i_N} \\
= 2 &\sum_{1\le i<j\le N} (1-p_i-p_j)^n - (2N-1)\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^n + N^2. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

2.3. Adquisiciones para obtener k cupones distintos de un subconjunto (T_{k,N_1})

En esta sección nuestro interés es estudiar a la variable aleatoria que representa el número de adquisiciones requeridas para obtener k tipos distintos de cupones de un subconjunto de interés de la colección completa de cupones. También describimos la relación entre esta variable y la variable Y_n definida en la sección anterior.

Iniciamos considerando que, en una etapa dada del proceso, hay un conjunto $K \subset H$ de tipos distintos de cupones no adquiridos. Este es nuestro conjunto de interés, y los tipos distintos de cupones restantes $H - K$ podrían haber sido o no adquiridos. Denotamos por X al número de cupones en el conjunto $H - K$ adquiridos por el coleccionistas antes de que uno de los cupones de algún tipo en K sea adquirido.

Como este proceso involucra la repetición de ensayos independientes, la variable aleatoria X sigue una distribución geométrica con parámetro $p = \sum_{i\in K} p_i$ (o una distribución degenerada si $K = H$). Entonces,

$$E(X) = \frac{1 - \sum_{i\in K} p_i}{\sum_{i\in K} p_i} = \frac{\sum_{i\in H-K} p_i}{\sum_{i\in K} p_i}. \qquad (2.17)$$

Ahora, sean k y N_1 enteros tales que $1 \le k \le N_1 \le N$. Sea H_1 un subconjunto del conjunto de tipos distintos de cupones H, y $H_2 = H - H_1$, $|H_1| = N_1$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $H_1 = \{1, 2, \ldots, N_1\}$.
Si consideramos que los cupones distintos del conjunto H_1 no han sido adquiridos, entonces podemos definir T_{k,N_1} como el número aleatorio de adquisiciones requeridas para garantizar que k tipos distintos de cupones del conjunto H_1 sean coleccionados.

A continuación estudiaremos el caso en que la cardinalidad de H_1 es distinta a la cardinalidad de H, es decir, $N_1 \neq N$, en particular daremos una expresión para la esperanza de T_{k,N_1} que denotaremos por $E(T_{k,N_1})$. Sean $i_1, i_2, \ldots, i_k$ elementos distintos de H_1. Sea $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$

el evento definido por el hecho de que los primeros k tipos distintos de cupones adquiridos del conjunto H_1 son $i_1, i_2, \ldots, i_k$ y se adquieren en este preciso orden. En otras palabras, algunos de los tipos distintos de cupones del conjunto H_2 pueden ser adquiridos primero, seguidos por el cupón de tipo i_1. Enseguida, algunos tipos distintos de cupones de $H_2 \cup \{i_1\}$ pueden ser adquiridos, seguidos del cupón de tipo i_2, etc. Sean

$$p = \sum_{i \in H_1} p_i, \quad q = 1 - p = \sum_{i \in H_2} p_i,$$

y sea π_k el conjunto de todas las permutaciones de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, N_1\}$. Tenemos que los eventos $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ con $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \pi_k$ constituyen una partición de Ω, es decir, $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \cap D_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = \emptyset$ si $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ y $\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$ $= 1$. Entonces podemos escribir $E(T_{k,N_1})$ como sigue

$$E(T_{k,N_1}) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} E(T_{k,N_1} | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}). \tag{2.18}$$

Veremos que la probabilidad del evento $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ y la esperanza condicional de T_{k,N_1} están dadas por las siguientes expresiones

$$P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}}{p(p - p_{i_1})(p - p_{i_1} - p_{i_2}) \cdots (p - \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j})}, \tag{2.19}$$

y

$$E(T_{k,N_1} | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p - p_{i_1}} + \frac{1}{p - p_{i_1} - p_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{p - \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}. \tag{2.20}$$

Veamos primeramente que en efecto se cumple la expresión (2.19), para lo cual, definimos a B_{ji_j} como el evento de que el j-ésimo tipo de cupón adquirido de H_1 es i_j, donde $j = 1, \ldots, k$ e $i_j \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) &= P(B_{1i_1} \cap B_{2i_2} \cap \ldots. \cap B_{ki_k}) \\ &= P(B_{1i_1}) P(B_{2i_2} | B_{1i_1}) P(B_{3i_3} | B_{1i_1} \cap B_{2i_2}) \cdots P(B_{ki_k} | \cap_{j=1}^{k-1} B_{ji_j}). \end{aligned}$$

Entonces, claramente es necesario conocer estas probabilidades. Iniciamos calculando la probabilidad de que el primer tipo de cupón adquirido de H_1 es i_1, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} P(B_{1i_1}) &= P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \in \{i_1\} | \text{el tipo de cupón adquirido } i \in H_1) \\ &= \frac{P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \in \{i_1\} \text{ e } i \in H_1)}{P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \in H_1)} \\ &= \frac{P(\text{el tipo de cupón adquirido es } i_1)}{P(\text{el tipo de cupón adquirido pertenece a } H_1)} \\ &= \frac{p_{i_1}}{1 - q} = \frac{p_{i_1}}{p}. \end{aligned}$$

En general, para el resto de las probabilidades, calculamos la probabilidad de que el $h-$ésimo tipo de cupón adquirido de H_1 es de tipo i_h, dado que los primeros tipos distintos de cupones adquiridos de H_1 fueron $i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}$, para toda $h = 1, 2, \ldots, k$. Esta probabilidad es

$$\begin{aligned}
P(B_{hi_h} | \cap_{j=1}^{h-1} B_{ji_j}) &= \frac{P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \in \{i_h\}, i \in H_1, i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}\})}{P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \in H_1, i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}\})} \\
&= \frac{P(\text{el tipo de cupón adquirido es } i_h)}{P(\text{el tipo de cupón adquirido } i \notin H_2, i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}\})} \\
&= \frac{p_{i_h}}{1 - q - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}} = \frac{p_{i_h}}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) &= \frac{p_{i_1}}{p} \left(\frac{p_{i_2}}{p - p_{i_1}} \right) \left(\frac{p_{i_3}}{p - (p_{i_1} + p_{i_2})} \right) \cdots \left(\frac{p_{i_k}}{p - (p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_{k-1}})} \right) \\
&= \frac{\Pi_{j=1}^{k} p_{i_j}}{p(p - p_{i_1})(p - p_{i_1} - p_{i_2}) \cdots (p - \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j})}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple que la probabilidad del evento $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ es la expresión (2.19).

Enseguida, veamos que la esperanza condicional de T_{k,N_1} está dada por la expresión (2.20). Primero es necesario calcular las esperanzas condicionales $E(T_{k,N_1} | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$, para lo cual denotamos por X_h a la variable aleatoria que representa el número de adquisiciones realizadas antes de obtener un nuevo tipo de cupón de H_1, después de que $h - 1$ tipos distintos de cupones del conjunto H_1 han sido coleccionados, $1 \leq h \leq k$. Podemos entonces escribir

$$T_{k,N_1} = X_1 + 1 + X_2 + 1 \cdots + X_k + 1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_k + k$$

y por lo tanto

$$E(T_{k,N_1} | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \sum_{h=1}^{k} E\left(X_h | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right) + k, \qquad (2.22)$$

pero

$$E\left(X_h | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right) = E(X_h | \text{los tipos de cupones adquiridos son de } H_2 \text{ e } i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}). \qquad (2.23)$$

De manera que por una aplicación directa de (2.17), obtenemos

$$E(X_h | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \frac{1 - \left(p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}\right)}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}} = \frac{q + \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}} \text{ para } h = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2.24)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
E(T_{k,N_1} | D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) &= \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{q + \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}} \right) + k = \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{q + \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{i_j}} + 1 \right) = \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{1}{p - \sum_{j=1}^{h-1} p_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p - p_{i_1}} + \frac{1}{p - p_{i_1} - p_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{p - \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}},
\end{aligned}$$

de esta manera obtenemos que se cumple la expresión (2.20).

En consecuencia ya podemos calcular la esperanza de T_{k,N_1} usando (2.18). Sustituyendo las expresiones (2.19) y (2.20) en (2.18) se obtiene

$$E(T_{k,N_1}) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \frac{1}{p-p_{i_1}-p_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}\right) \cdot \frac{\Pi_{j=1}^{k} p_{i_j}}{p(p-p_{i_1})(p-p_{i_1}-p_{i_2})\cdots(p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j})}.$$

De esta manera tenemos la expresión deseada. La siguiente proposición se sigue de lo visto anteriormente.

Proposición 2.3.1. *El valor esperado de T_{k,N_1} es*

$$E(T_{k,N_1}) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \frac{1}{p-p_{i_1}-p_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}\right) \cdot \frac{\Pi_{j=1}^{k} p_{i_j}}{p(p-p_{i_1})(p-p_{i_1}-p_{i_2})\cdots(p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j})}, \quad (2.25)$$

donde π_k es el conjunto de todas las k permutaciones del conjunto $\{1,2,\ldots,N_1\}$, es decir, los arreglos de longitud k de los diferentes elementos de $\{1,2,\ldots,N_1\}$.

Observación 2.3.2. *$E(T_{k,N_1})$, el número esperado de adquisiciones requeridas para que k tipos distintos de cupones del conjunto $H_1 \subset H$ con cardinalidad N_1 sean coleccionados, generalmente es difícil de obtener, porque el número de términos requeridos para su cálculo es el número de k permutaciones de $1,2,\ldots,N_1$, esto es $N_1^{(k)} = N_1(N_1-1)\ldots(N_1-k+1)$. Este valor es grande cuando N_1 y k son grandes. Por lo tanto es importante obtener los límites superior e inferior para este valor.*

Proposición 2.3.3. *Sean k dado y $p_1, p_2, \ldots p_{N_1}$ números reales que satisfacen $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{N_1}$. Entonces el máximo de $E(T_{k,N_1}|D_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$ dada en (2.20) sobre todas las posibles elecciones de $k-$ subconjuntos $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ de H_1 es*

$$E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_1} p_i} + \frac{1}{\sum_{i=2}^{N_1} p_i} + \cdots + \frac{1}{\sum_{i=k}^{N_1} p_i}, \quad (2.26)$$

y el mínimo es

$$E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_1} p_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_1-1} p_i} + \cdots + \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_1-k+1} p_i}. \quad (2.27)$$

Demostración. Por las hipótesis, sabemos que $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{N_1}$. Se sigue así, de manera directa, que

$$\sum_{i=h}^{N_1} p_i \leq \sum_{j=h}^{N_1} p_{i_j} \leq \sum_{i=1}^{N_1-h+1} p_i, \quad h = 1,2,\ldots,N_1. \quad (2.28)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_1} + \frac{1}{p-\sum_{i=1}^{2} p_i} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{i=1}^{k-1} p_i} \\
&\geq \frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \frac{1}{p-p_{i_1}-p_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}} \\
&\geq \frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{N_1}} + \frac{1}{p-\sum_{i=N_1-1}^{N_1} p_i} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{i=N_1-k+2}^{N_1} p_i} \\
&= E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}).
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. ■

Proposición 2.3.4. *Sean $p_1, p_2, \ldots, p_{N_1}$ números reales que satisfacen $0 \leq p_i \leq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, N_1$ y $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{N_1}$. Entonces*

$$E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) \geq E(T_{k,N_1}) \geq E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}). \tag{2.29}$$

En otras palabras, $E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k})$ y $E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1})$ son cotas superiores e inferiores, respectivamente, para el número esperado de adquisiciones requeridas para que k tipos distintos de cupones del conjunto H_1 sean coleccionados.

Demostración. De la prueba de la proposición 2.3.3 sabemos que

$$E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}.$$

Si multiplicamos esta expresión por la probabilidad del evento $D_{i_1,\ldots,i_k}$ y tomamos la suma sobre todas las permutaciones $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \pi_k$ obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) P(D_{i_1,\ldots,i_k}) \geq \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}\right) P(D_{i_1,\ldots,i_k}) \\
&\iff E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} P(D_{i_1,\ldots,i_k}) \geq \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} E(T_{k,N_1}|D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) \\
&\iff E(T_{k,N_1}|D_{1,2,\ldots,k}) \geq E(T_{k,N_1}).
\end{aligned}$$

Así, se cumple la primera parte de la desigualdad (2.29). De manera similar probaremos la segunda parte de la desigualdad (2.29).

De la proposición 2.3.3 se sigue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{p-\sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}} \geq E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}).$$

Si multiplicamos esta expresión por la probabilidad del evento $D_{i_1,\ldots,i_k}$ y tomamos la suma sobre todas las permutaciones $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \pi_k$ obtenemos entonces

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-p_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{p - \sum_{j=1}^{k-1} p_{i_j}}\right) P(D_{i_1,\ldots,i_k}) \geq$$

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}) P(D_{i_1,\ldots,i_k})$$

$$\iff \quad \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} E(T_{k,N_1}|D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) P(D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) \geq$$

$$E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}) \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\pi_k} P(D_{i_1,\ldots,i_k})$$

$$\iff \quad E(T_{k,N_1}) \geq E(T_{k,N_1}|D_{N_1,N_1-1,\ldots,N_1-k+1}).$$

De este modo se cumple lo deseado. ■

Las proposiciones 2.3.3 y 2.3.4 prueban que si $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{N_1}$, entonces el orden más probable de adquisición de k tipos distintos de cupones en H_1 es el orden preferencial $1, 2, \ldots, k$. Además, el escenario más rápido (en términos de la esperanza) para la adquisición de k tipos distintos de cupones de H_1 es la secuencia que se extiende desde el tipo de cupón menos probable, N_1, al tipo de cupón más probable, $N_1 - k + 1$, en el orden correcto. El escenario más lento (en términos de la esperanza) para la adquisición de k tipos distintos de cupones de H_1 se extiende desde el tipo de cupón más probable, 1, hasta el tipo de cupón menos probable, k, en el correcto orden.

Estos resultados pueden ser explicados intuitivamente de la siguiente manera. Supongamos que el cupón de tipo 1 es el primero en ser obtenido. La probabilidad de que un nuevo tipo de cupón del conjunto $H_1 - \{1\}$ sea adquirido es entonces $p - p_1$. Este valor es menor que cualquier otro valor $p - p_j$ con $j \neq 1$. Por lo tanto es más difícil para un tipo de cupón del conjunto $H_1 - \{1\}$ ser adquirido que para un tipo de cupón del conjunto $H_1 - \{j\}$, $j \neq 1$. La aplicación repetida de este razonamiento explica la primera desigualdad de la proposición. La segunda desigualdad se puede explicar de manera similar.

2.4. Adquisiciones para obtener k cupones distintos de la colección completa (T_k)

Ahora estudiaremos el caso en que la cardinalidad de H_1 es igual a la cardinalidad de H, es decir, $N_1 = N$. Por simplicidad denotaremos a $T_{k,N}$ por T_k. Así que T_k es el número de adquisiciones para obtener k cupones distintos de toda la colección de cupones.

Considerando la relación entre Y_n y T_k podemos escribir

$$P(Y_n \leq k-1) = P(T_k > n), \tag{2.30}$$

en consecuencia

$$P(Y_n \leq k-1) = 1 - P(T_k \leq n), \tag{2.31}$$

por lo que usando las dos igualdades anteriores tenemos que la función masa de T_k está dada por

$$\begin{aligned} P\left(T_k = n\right) &= P(T_k > n-1) - P(T_k > n) \\ &= P\left(Y_{n-1} \leq k-1\right) - P\left(Y_n \leq k-1\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por (2.32) y (2.6), obtenemos que la función masa de probabilidad de la variable T_k es

$$\begin{aligned} P\left(T_k = n\right) = &\sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n-1} \\ &- \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n} \\ = &\sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n-1}\left(1-p_A\right), \end{aligned} \tag{2.33}$$

para $n = k, k+1, \ldots$.

Además de (2.30), (2.31) y usando la expresión de la función de distribución de Y_n, (2.6), tenemos que

$$P(T_k > n) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n} \tag{2.34}$$

y la función de distribución de T_k es

$$P(T_k \leq n) = 1 - \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n}. \tag{2.35}$$

Por lo que, utilizando (2.34), obtenemos que el número esperado de adquisiciones requeridas para que k diferentes tipos de cupones sean adquiridos, $E(T_k)$, está dado por

$$\begin{aligned} E(T_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_k > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n}\right) \\ &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \frac{1}{1-p_A}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.4.1. Función generadora de momentos de T_k

En esta subsección proporcionamos en el siguiente teorema la función generadora de momentos de T_k, y posteriormente calculamos el primer y segundo momento de T_k.

Teorema 2.4.1. *La función generadora de momentos de la variable T_k está dada por*

$$M_{T_k}(t) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \frac{(1-p_A)e^t}{1-e^t p_A}, \tag{2.37}$$

para toda $t < min_{A\subset H,\ 1\leq |A|\leq k-1}\{-\log p_A\}$.

Demostración. Usando la función masa de probabilidad de T_k, (2.33), tenemos que

$$\begin{aligned}
M_{T_k}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} p_A^{n-1}(1-p_A) \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} (1-p_A) \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} p_A^{n-1} \\
&= (-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1} e^t + \sum_{A\subset H, 1\leq |A|\leq k-1} (-1)^{k-|A|-1} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \\
&\qquad\qquad \cdot (1-p_A) e^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{t(n-1)} p_A^{n-1}. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Ahora, si $t < \min_{A\subset H,\ 1\leq |A|\leq k-1}\{-\log p_A\}$, entonces $0 < e^t p_A < 1$, y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{t(n-1)} p_A^{n-1} = \frac{1}{1-e^t p_A} \qquad (2.39)$$

para todo $A \subset H,\ 1 \leq A \leq k-1$. Por lo tanto, (2.37) se sigue de (2.38) y (2.39). ■

De manera similar a la sección anterior calculamos el primer y segundo momento de T_k, pero ahora usando la función generadora de momentos de T_k dada por (2.37).

Iniciamos calculando $E(T_k)$, para lo cual usaremos el teorema 1.5.6, por consiguiente calculamos la primera derivada de

$$h(t) = \frac{e^t}{1-e^t p_A}.$$

Por lo que

$$h'(t) = \frac{e^t(1-e^t p_A) - e^t(-e^t p_A)}{(1-e^t p_A)^2} = \frac{e^t}{(1-e^t p_A)^2},$$

y entonces

$$\lim_{t\to 0} h'(t) = \frac{1}{(1-p_A)^2}.$$

En consecuencia, el primer momento de T_k es

$$\begin{aligned}
E(T_k) = \lim_{t\to 0} M'_{T_k}(t) &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \frac{(1-p_A)}{(1-p_A)^2} \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \frac{1}{1-p_A}.
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos $E(T_k^2)$, para lo cual obtenemos la segunda derivada de $h(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
h^{(2)}(t) &= \frac{e^t(1-e^t p_A)^2 - e^t 2(1-e^t p_A)(-e^t p_A)}{(1-e^t p_A)^4} \\
&= \frac{e^t(1-e^t p_A)^2 + 2e^{2t} p_A (1-e^t p_A)}{(1-e^t p_A)^4}.
\end{aligned}$$

Así que

$$\lim_{t\to 0} h^{(2)}(t) = \frac{(1-p_A)^2 + 2p_A(1-p_A)}{(1-p_A)^4} = \frac{(1-p_A)\left[1-p_A+2p_A\right]}{(1-p_A)^4} = \frac{1+p_A}{(1-p_A)^3}.$$

Por lo tanto, el segundo momento de T_k es

$$\begin{aligned} E(T_k^2) = \lim_{t\to 0} M_{T_k}(t) &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}(1-p_A)\left[\frac{1+p_A}{(1-p_A)^3}\right] \\ &= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}\frac{1+p_A}{(1-p_A)^2}. \end{aligned}$$

Observamos que las expresiones de las derivadas de $h(t)$ son cada vez más complejas, por lo que calcular momentos de orden alto es complicado con el método anterior.

2.4.2. Cálculo del r-ésimo momento de T_k

En esta subsección proporcionamos una nueva fórmula para calcular el r-ésimo momento de T_k. Para lo anterior usaremos el siguiente resultado que puede ser consultado en [11], el cual dice que si tenemos $|q| < 1$ y $r \in \mathbb{N}$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r+1}q^n &= \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^j q^k\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-j}q^n\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^r q^n\right) + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^j q^k\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-j}q^n\right), \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde $0^0 \equiv 1$. A continuación definamos

$$D(r,q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r q^n.$$

Es conocido que $D(1,q) = \frac{q}{(1-q)^2}$ y $D(0,q) = \frac{q}{1-q}$. Entonces, por (2.40) tenemos que para cualquier entero positivo r,

$$D(r+1,q) = \frac{D(r,q)}{1-q} + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j} D(j,q)D(r-j,q). \tag{2.41}$$

La fórmula anterior es válida para $r = 0$, si se considera que $\sum_{j=1}^{0} 1 = 0$.

Recordemos que como T_k es el número de adquisiciones requeridas para obtener $k \leq N$ cupones diferentes. Entonces, si $1 \leq k \leq N$

$$P(T_k > n) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

y además por (2.33) sabemos que

$$P(T_k = n) = \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^{n-1}(1-p_A) \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
E(T_k^r) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^r P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^r \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^{n-1}(1-p_A) \\
&= \sum_{A\subset H, |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} \sum_{n=1}^{\infty} n^r p_A^{n-1}(1-p_A) \\
&= (-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1} + \sum_{A\subset H, 1\leq |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^{-1}(1-p_A) \sum_{n=1}^{\infty} n^r p_A^{n} \\
&= (-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1} + \sum_{A\subset H, 1\leq |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^{-1}(1-p_A) D(r, p_A).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$E(T_k^r) = (-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1} + \sum_{A\subset H,\, 1\leq |A|\leq k-1} (-1)^{k-1-|A|}\binom{N-1-|A|}{k-1-|A|} p_A^{-1}(1-p_A) D(r, p_A). \quad (2.42)$$

Ahora, definimos

$$G(r, q) = \begin{cases} \dfrac{1-q}{q} D(r, q), & \text{si } 0 < |q| < 1 \\ 1, & \text{si } q = 0, \end{cases}$$

para todo $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Por (2.41), notemos que si $0 < |q| < 1$, entonces

$$G(0, q) = 1, \quad G(1, q) = \frac{1}{1-q}$$

y para $r \geq 1$,

$$\begin{aligned}
G(r+1, q) &= \frac{1-q}{q} D(r+1, q) \\
&= \frac{1-q}{q}\left[\frac{D(r, q)}{q-1} + \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j} D(j, q) D(r-j, q)\right] \\
&= \frac{1}{1-q}\left[\frac{1-q}{q} D(r, q)\right] + \frac{q}{1-q}\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}\left[\frac{1-q}{q} D(j, q)\right]\left[\frac{1-q}{q} D(r-j, q)\right] \\
&= \frac{1}{1-q} G(r, q) + \frac{q}{1-q}\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j} G(j, q) G(r-j, q).
\end{aligned}$$

Esto es, $G(r,q)$, para $0<|q|<1$, puede obtenerse de forma recursiva mediante

$$G(0,q)=1, \quad G(1,q)=\frac{1}{1-q},$$
$$G(r+1,q)=\frac{1}{1-q}G(r,q)+\frac{q}{1-q}\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}G(j,q)G(r-j,q), \quad \forall r\geq 1.$$

Así, por (2.42), tenemos que una función recursiva para calcular el momento r-ésimo de T_k es

$$E(T_k^r)=(-1)^{k-1}\binom{N-1}{k-1}+\sum_{A\subset H,\,1\leq|A|\leq k-1}(-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-1-|A|}G(r,p_A)$$
$$=\sum_{A\subset H,|A|\leq k-1}(-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}G(r,p_A).$$

Hemos demostrado así, el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. *Para cualquier entero positivo r, el r-ésimo momento de T_k está dado por*

$$E(T_k^r)=\sum_{A\subset H,|A|\leq k-1}(-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}G(r,p_A). \tag{2.43}$$

A manera de ilustración calcularemos los primeros momentos de T_k usando la expresión (2.43).
Para $r=1$, tenemos que el primer momento de T_k es

$$E(T_k)=\sum_{A\subset H,|A|\leq k-1}(-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}\frac{1}{1-p_A}.$$

Para $r=2$, tenemos que

$$G(2,p_A)=\frac{1}{1-p_A}G(1,p_A)+\frac{p_A}{1-p_A}\sum_{j=1}^{1}\binom{1}{j}G(j,p_A)G(1-j,p_A)$$
$$=\frac{1}{(1-p_A)^2}+\frac{p_A}{1-p_A}\left(\frac{1}{1-p_A}\right)$$
$$=\frac{1+p_A}{(1-p_A)^2}.$$

De aquí, el segundo momento de T_k es

$$E(T_k^2)=\sum_{A\subset H,|A|\leq k-1}(-1)^{k-1-|A|}\binom{N-|A|-1}{k-|A|-1}\frac{1+p_A}{(1-p_A)^2}.$$

Para $r = 3$,

$$
\begin{aligned}
G(3, p_A) &= \frac{1}{1-p_A} G(2, p_A) + \frac{p_A}{1-p_A} \sum_{j=1}^{2} \binom{2}{j} G(j, p_A) G(2-j, p_A) \\
&= \frac{1}{1-p_A} \frac{1+p_A}{(1-p_A)^2} + \frac{p_A}{1-p_A} \left[2G(1, p_A)G(1, p_A) + G(2, p_A)G(0, p_A) \right] \\
&= \frac{1+p_A}{(1-p_A)^3} + \frac{p_A}{1-p_A} \left[2\left(\frac{1}{1-p_A} \right)^2 + \frac{1+p_A}{(1-p_A)^2} \right] \\
&= \frac{1+p_A+p_A(3+p_A)}{(1-p_A)^3} \\
&= \frac{1+4p_A+p_A^2}{(1-p_A)^3}.
\end{aligned}
$$

Finalmente el tercer momento de T_k es

$$
E(T_k^3) = \sum_{A \subset H, |A| \leq k-1} (-1)^{k-1-|A|} \binom{N-|A|-1}{k-|A|-1} \frac{1+4p_A+p_A^2}{(1-p_A)^3}.
$$

Observación 2.4.3. *La fórmula (2.43) facilita el cálculo de los momentos de cualquier orden, ya que utiliza expresiones recursivas, además puede calcularse computacionalmente para valores dados de* r, N, k *y* $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$.

2.5. Caso particular con cupones equiprobables

En esta sección hallaremos algunas expresiones para la esperanza, segundo momento y varianza de Y_n, para cuando la probabilidad de adquisición de cada tipo de cupón es la misma, es decir, $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{1}{N}$. También determinaremos ciertas fórmulas para calcular el número esperado de cupones que se deben adquirir para obtener k cupones distintos del conjunto H, y para calcular el número esperado de cupones que se deben adquirir para obtener toda la colección, es decir, los N cupones.

Usando la expresión (2.9), y al considerar $p_i = \frac{1}{N}$, para $i = 1, 2, \ldots, N$, tenemos que

$$
E(Y_n) = N - \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n = N - N\frac{(N-1)^n}{N^n} = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}, \tag{2.44}
$$

que nos representa el promedio de cupones distintos después de n adquisiciones.

Análogamente, usando la expresión (2.10), y considerando que $p_i = \frac{1}{N}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, obtenemos

$$\begin{aligned}
E(Y_n^2) &= 2\left((N-1)\frac{(N-2)^n}{N^n} + (N-2)\frac{(N-2)^n}{N^n} + \cdots + (2)\frac{(N-2)^n}{N^n} + (1)\frac{(N-2)^n}{N^n}\right) \\
&\quad - (2N-1)N(1-\frac{1}{N})^n + N^2 \\
&= 2\left(\frac{(N-2)^n}{N^n}\right)\left(\frac{(N-1)(N)}{2}\right) - (2N-1)N\frac{(N-1)^n}{N^n} + N^2 \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n}{N^{n-1}} - (2N-1)\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} + N^2 \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n - (2N-1)(N-1)^n}{N^{n-1}} + N^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(Y_n^2) = \frac{(N-1)(N-2)^n - (2N-1)(N-1)^n}{N^{n-1}} + N^2. \tag{2.45}$$

En consecuencia, usando las expresiones obtenidas, podemos calcular la varianza de Y_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Var(Y_n) &= \frac{(N-1)(N-2)^n - (2N-1)(N-1)^n}{N^{n-1}} + N^2 - \left(N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}\right)^2 \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n - (2N-1)(N-1)^n}{N^{n-1}} + N^2 - \left(N^2 - 2N\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} + \frac{(N-1)^{2n}}{N^{2(n-1)}}\right) \\
&= \frac{1}{N^{n-1}}\left((N-1)(N-2)^n - (2N-1)(N-1)^n + 2N(N-1)^n\right) - \frac{(N-1)^{2n}}{N^{2(n-1)}} \\
&= \frac{1}{N^{n-1}}\left((N-1)(N-2)^n - 2N(N-1)^n + (N-1)^n + 2N(N-1)^n\right) - \frac{(N-1)^{2n}}{N^{2(n-1)}} \\
&= \frac{1}{N^{n-1}}\left((N-1)(N-2)^n + (N-1)^n\right) - \frac{(N-1)^{2n}}{N^{2(n-1)}} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n}{N^{n-1}} + \frac{(N-1)^n N^{n-1}}{N^{n-1}N^{n-1}} - \frac{(N-1)^{2n}}{N^{2(n-1)}} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n}{N^{n-1}} + \frac{(N-1)^n N^{n-1} - (N-1)^n(N-1)^n}{N^{2n-2}} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)^n}{N^{n-1}} + \frac{(N-1)^n\left(N^{n-1} - (N-1)^n\right)}{N^{2n-2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la varianza de Y_n está dada por

$$Var(Y_n) = \frac{(N-1)(N-2)^n}{N^{n-1}} + \frac{(N-1)^n\left(N^{n-1} - (N-1)^n\right)}{N^{2n-2}}. \tag{2.46}$$

Ahora consideremos a la variable aleatoria T_{k,N_1}, que representa el número de aquisiciones necesarias para obtener k cupones distintos de un subconjunto H_1 de tamaño N_1 de toda la colección de cupones, con $k \leq N_1 \leq N$. Para encontrar el valor esperado de esta variable aleatoria usaremos la fórmula (2.25) de la proposición 2.3.1, pero considerando que la probabilidad de adquirir un cupón de cualquier tipo es $\frac{1}{N}$.

$$
\begin{aligned}
E(T_{k,N_1}) = & \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in\pi_k} \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N_1} p_{i_j}} + \frac{1}{\sum_{j=2}^{N_1} p_{i_j}} + \frac{1}{\sum_{j=3}^{N_1} p_{i_j}} + \cdots + \frac{1}{\sum_{j=k}^{N_1} p_{i_j}} \right) \\
& \cdot \frac{\Pi_{j=1}^{k} p_{i_j}}{\left(\sum_{j=1}^{N_1} p_{i_j}\right)\left(\sum_{j=2}^{N_1} p_{i_j}\right)\left(\sum_{j=3}^{N_1} p_{i_j}\right)\cdots\left(\sum_{j=k}^{N_1} p_{i_j}\right)} \\
= & \frac{N_1!}{(N_1-k)!}\left(\frac{N}{N_1} + \frac{N}{N_1-1} + \frac{N}{N_1-2} + \cdots + \frac{N}{N_1-(k-1)} \right) \\
& \cdot \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^k}{\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1-1}{N}\right)\left(\frac{N_1-2}{N}\right)\cdots\left(\frac{N_1-(k-1)}{N}\right)} \\
= & \frac{N_1!}{(N_1-k)!}\left(\frac{N}{N_1} + \frac{N}{N_1-1} + \frac{N}{N_1-2} + \cdots + \frac{N}{N_1-k+1} \right) \\
& \cdot \left(\frac{N^k}{N^k N_1 (N_1-1)(N_1-2)\cdots(N_1-k+1)} \right) \\
= & \left(\frac{N}{N_1} + \frac{N}{N_1-1} + \frac{N}{N_1-2} + \cdots + \frac{N}{N_1-k+1} \right) \\
& \cdot \frac{N_1!}{(N_1-k)!(N_1-k+1)\cdots(N_1-2)(N_1-1)N_1} \\
= & \left(\frac{N}{N_1} + \frac{N}{N_1-1} + \frac{N}{N_1-2} + \cdots + \frac{N}{N_1-k+1} \right) \frac{N_1!}{N_1!} \\
= & N\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1-1} + \frac{1}{N_1-2} + \cdots + \frac{1}{N_1-k+1} \right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para $1 \leq k \leq N_1 \leq N$ se tiene que

$$
E(T_{k,N_1}) = N\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1-1} + \frac{1}{N_1-2} + \cdots + \frac{1}{N_1-k+1} \right). \tag{2.47}
$$

En particular, si consideramos $k = N_1 = N$ tenemos que la expresión anterior queda de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
E(T_N) = & N\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{(N-1)} + \frac{1}{(N-2)} + \cdots + \frac{1}{N-N+1} \right) \\
& = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(N-2)} + \frac{1}{(N-1)} + \frac{1}{N} \right),
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

la cual es la esperanza de la variable aleatoria $T_N = T_{N,N}$, variable que representa el número de adquisiciones necesarias para obtener toda la colección de cupones.

Capítulo 3

Ejemplo de aplicación

Una aplicación del problema del coleccionista de cupones, considerada en [15], es la modelación de los sistemas huéspedes-parásitos. El contexto de esta aplicación se desarrrolla, por ejemplo, en visitas sucesivas de avispas (parásitos) a orugas (huéspedes). En cada visita una avispa ataca a una oruga, en la que pone un huevo, a este proceso se le conoce como parasitación.

Supongamos que las sucesivas visitas son mutuamente independientes y que tenemos una población finita de orugas. Estas orugas las denotamos por los números $1, 2, 3, \ldots, N$, las cuales forman el conjunto H, el tamaño de la población de avispas es irrelevante. Asumimos también que el número de huevos que las avispas pueden depositar en la población de orugas no es limitada y a su vez denotamos de manera general a $p_h \geq 0$, como la probabilidad de que una avispa deposite un huevo en la oruga h, para cada $h = 1, 2, \ldots, N$. En el contexto del coleccionista de cupones, estas orugas representan a los distintos tipos de cupones. Que la oruga h sea parasitada es equivalente a obtener el h-ésimo cupón de la colección de cupones, por lo tanto el número de visitas necesarias para que las avispas parasiten a todas las orugas es equivalente al número de adquiciones necesarias para obtener toda la colección de cupones.

En el análisis de esta aplicación usaremos dos variables aleatorias de interés, estas variables son las siguientes:

- La variable aleatoria Y_n que nos representa el número de orugas parasitadas después de n visitas.
- Supongamos que tenemos un subconjunto de interés H_1 de tamaño N_1 del conjunto H de orugas que no han sido parasitadas, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $H_1 = \{1, 2, \ldots, N_1\}$. Consideramos a la variable aleatoria T_{k,N_1} que representa el número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H_1 de tamaño N_1 sean parasitadas.

La variable aleatoria Y_n tiene analogía con la variable aleatoria que representa el número de cupones distintos obtenidos después de n adquisiciones, estudiada en el capítulo 2, y la variable aleatoria T_{k,N_1} tiene similitud con la variable aleatoria que representa el número de adquisiciones necesarias para obtener k tipos distintos de cupones del subconjunto H_1, también estudiada en el capítulo 2. Por esta razón, estaremos usando fórmulas obtenidas en dicho capítulo para el estudio de esta aplicación.

3.1. Parasitación equiprobable

En esta sección, abordaremos el estudio de los sistemas huéspedes-parásitos bajo la suposición de que la probabilidad de parasitación de cada oruga es la misma. A manera de ilustración, asumimos también que tenemos una población de $N = 10$ orugas y que las probabilidades de parasitación de las orugas están dadas por el vector de probabilidades $P = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10}\right)$. Calcularemos la esperanza y varianza del número de orugas parasitadas después de n visitas, para lo cual usaremos las fórmulas (2.44) y (2.46) estudiadas en la sección 2.5.

Así, la fórmula (2.44) correspondiente al valor esperado del número de cupones distintos después de n adquisiciones, en este entorno representa el valor esperado del número de orugas parasitadas después de n visitas. Por lo que si las avispas realizan $n = 5$ visitas a las orugas, entonces el número esperado de orugas parasitadas después de estas visitas es de

$$E(Y_5) = 10 - \frac{(10-1)^5}{10^{5-1}} = 10 - \frac{9^5}{10^4} = 4.0951 \approx 4.$$

Así también, la fórmula (2.46) correspondiente a la varianza del número de cupones distintos después de n adquisiciones, se puede interpretar en este contexto como la varianza del número de orugas parasitadas después de n visitas. Por lo que si las avispas realizan 5 visitas a las orugas, entonces la varianza del número de orugas parasitadas después de estas visitas es

$$\begin{aligned} Var(Y_5) &= \frac{(10-1)(10-2)^5}{10^{5-1}} + \frac{(10-1)^5(10^{5-1} - (10-1)^5)}{10^{2(5)-2}} \\ &= \frac{(9)(8)^5}{10^4} + \frac{(9)^5(10^4 - (9)^5)}{10^8} \\ &= 0.5282. \end{aligned}$$

Siguiendo con las estimaciones, ahora calculamos el segundo momento de Y_n usando la fórmula (2.45), como se presenta a continuación

$$\begin{aligned} E(Y_5^2) &= \frac{(10-1)(10-2)^5 - (2(10)-1)(10-1)^5}{10^{5-1}} + 10^2 \\ &= \frac{9(8)^5 - (19)(9)^5}{10^4} + 10^2 \\ &= 17.2981. \end{aligned}$$

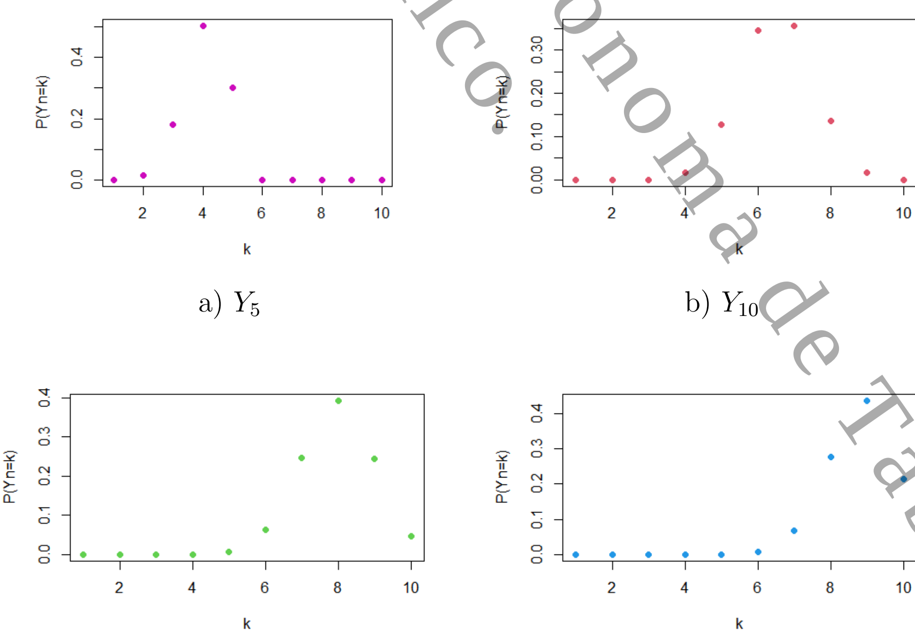
Similarmente a los cálculos ya realizados, calculamos la esperanza, varianza y segundo momento de Y_n para varios valores de n. Además, aplicando el corolario 2.2.6 calculamos computacionalmente el tercer momento de Y_n a través del programa RStudio. En la tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos.

n	$E(Y_n)$	$E(Y_n^2)$	$E(Y_n^3)$	$Var(Y_n)$
5	4.0951	17.2981	75.0241	0.5282
10	6.5132	43.4147	295.6625	0.9927
15	7.9410	64.0472	524.1148	0.9863
20	8.7842	77.9380	697.9688	0.7753
25	9.2821	86.6999	814.5334	0.5425
30	9.5760	92.0570	888.1119	0.3556
35	9.7496	95.2805	933.1475	0.2241
40	9.8521	97.2036	960.2664	0.1379
45	9.9127	98.3456	976.4530	0.0835

Tabla 3.1: Primeros momentos y varianza de Y_n

La tabla 3.1 nos dice por ejemplo, que en 20 visitas que realizan las avispas a las orugas, se obtiene en promedio aproximadamente 9 orugas parasitadas, que la varianza del número de orugas parasitadas después de estas visitas es de 0.7753, que el segundo momento y tercer momento de la variable aleatoria Y_n es 77.9380 y 697.9688, respectivamente.

La fórmula (2.4) en este contexto es la función masa de probabilidad del número de orugas parasitadas después de n visitas, es decir, $f(k) = P(Y_n = k)$. En la figura 3.1 se muestran las funciones masa de probabilidad de Y_n para algunos valores de n.



a) Y_5 b) Y_{10}

c) Y_{15} d) Y_{20}

Figura 3.1: La función masa de probabilidad de Y_5, Y_{10}, Y_{15} y Y_{20}

Observación 3.1.1. *De la figura 3.1, vemos que*

- *Para* $n = 5$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 4 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 10$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 7 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 15$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 8 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 20$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 9 *orugas parasitadas.*

Siguiendo con el análisis de este problema, otra variable de interés es T_{k,N_1}, que como recordaremos nos indica el número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H_1 sean parasitadas.

En principio, notemos que podemos calcular la esperanza de T_{k,N_1} para $k \leq N_1 \leq N$ usando la fórmula (2.47) vista en la sección 2.5, para lo cual supongamos que nuestro interés se enfoca en un subconjunto de $N_1 = 8$ orugas que no han sido parasitadas, digamos $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. En primera instancia calculemos el número esperado de visitas requeridas para que $k = 4$ orugas del conjunto H_1 sean parasitadas, como se presenta a continuación

$$E(T_{4,8}) = 10\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{8-2} + \frac{1}{8-4+1}\right) = 10\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) = 6.3452 \approx 6.$$

Por lo que se requieren aproximadamente 6 visitas para que 4 orugas de H_1 sean parasitadas. Asimismo calculamos la esperanza de $T_{k,8}$ para otros valores de $k \leq N_1$. En la tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos.

k	$E(T_{k,8})$
1	1.2500
2	2.6785
3	4.3452
4	6.3452
5	8.8452
6	12.1785
7	17.1785
8	27.1785

Tabla 3.2: Valores esperados de $T_{k,8}$

En la tabla 3.2, $E(T_{k,8})$ es el número esperado de visitas para que k orugas del conjunto H_1 sean parasitadas.

Asumimos ahora que la cardinalidad del conjunto H_1, es la misma que la cardinalidad del conjunto H, es decir $N_1 = N$, por lo que para este caso vamos a denotar a T_{k,N_1} de manera más práctica como T_k. A continuación utilizamos la fórmula (2.47) para calcular la esperanza de T_k para $k \leq N$. También aplicamos la fórmula (2.43) para calcular el segundo momento y tercer momento de T_k, los resultados se presentan en la tabla 3.3.

k	$E(T_k)$	$E(T_k^2)$	$E(T_k^3)$	$Var(T_k)$
1	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
2	2.1111	4.5802	10.3415	0.1234
3	3.3611	11.7330	42.9862	0.4359
4	4.7896	23.9892	126.6987	1.0481
5	6.4563	43.8437	315.3024	2.1593
6	8.4563	75.6691	720.5793	4.1593
7	10.9563	127.9509	1600.5380	7.9092
8	14.28968	219.8821	3659.7960	15.6871
9	19.28968	407.7789	9492.1350	35.6871
10	29.28968	983.5726	38130.6200	125.6872

Tabla 3.3: Primeros momentos y varianza de T_k

La fórmula (2.33) en esta aplicación representa la función masa de probabilidad del número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H sean parasitadas, es decir, $f(n) = P(T_k = n)$. En la figura 3.2 y 3.3 presentamos la función masa de probabilidad de T_5 y la función masa de probabilidad de T_{10}.

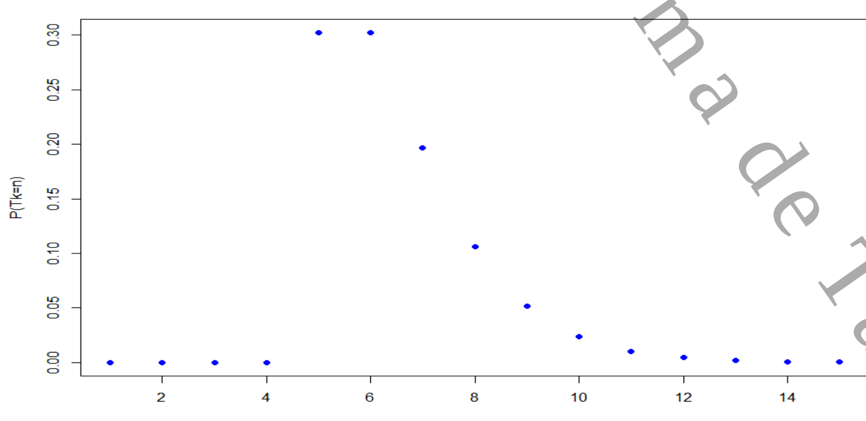


Figura 3.2: Función masa de probabilidad de T_5

La figura 3.2 nos representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots, 15$ visitas, obtengamos $k = 5$ orugas distintas parasitadas del conjunto H.

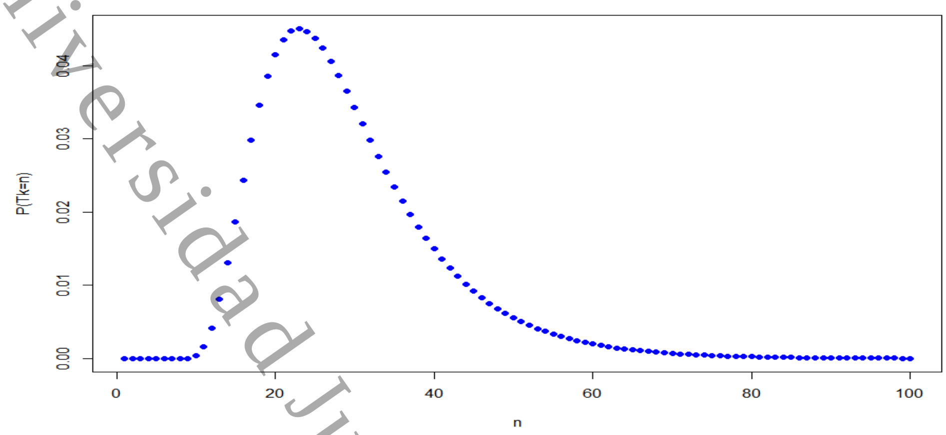


Figura 3.3: Función masa de probabilidad de T_{10}

La figura 3.3 nos representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots 100$ visitas, obtengamos $k = 10$ orugas distintas parasitadas del conjunto H (todas las orugas de H).

También podemos calcular el número esperado de visitas para que todas las orugas sean parasitadas, es decir $k = N_1 = 10$, usando la fórmula (2.48) como se muestra a continuación

$$E(T_{10}) = 10\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) = 29.2896. \tag{3.1}$$

3.2. Parasitación no equiprobable

En esta sección nos enfocaremos ahora en el estudio de los sistemas huéspedes-parásitos, bajo la suposición de que la probabilidad de parasitación de las avispas a las orugas es no equiprobable. Asumimos también en este caso que tenemos una población de $N = 10$ orugas y que las probabilidades de parasitación de las orugas están dadas por el vector de probabilidades $P = \left(\frac{1}{55}, \frac{2}{55}, \ldots, \frac{10}{55}\right)$, donde el elemento i-ésimo del vector es $p_i = \frac{i}{\sum_{i=1}^{10} i}$. Similarmente a la sección anterior, nos interesa conocer algunas propiedades de la variable aleatoria Y_n.

Notemos que la fórmula (2.9) vista en la sección 2.2.1, la cual corresponde al número esperado de cupones distintos obtenidos después de n adquisiciones en el caso no equiprobable, en este contexto corresponde al número esperado de orugas parasitadas después de n visitas, en el caso en que las orugas no necesariamente tienen la misma probabilidad de ser parasitadas. Por lo que si las avispas realizan $n = 5$ visitas a las orugas, entonces el número esperado de orugas parasitadas después de estas visitas es de

$$E(Y_5) = 10 - \sum_{i=1}^{10}(1 - p_i)^5 = 3.8956 \approx 4.$$

Usando la fórmula (2.10) vista en la sección 2.2.1, podemos calcular computacionalmente el segundo momento de la variable aleatoria Y_n como se presenta a continuación.

$$\begin{aligned} E(Y_5^2) &= 2 \sum_{1 \le i < j \le 10} (1 - p_i - p_j)^5 - (2(10) - 1) \sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5 + 10^2 \\ &= 2(15.87268) - (19)(6.104313) + 100 \\ &= 15.7634. \end{aligned}$$

También calculemos la varianza de Y_n, utilizando la fórmula (2.11), que en este contexto representa la variabilidad, alrededor de su media, que existe del número de orugas parasitadas después de n visitas. Cuando las avispas realizan $n = 5$ visitas a las orugas, tenemos que la varianza es

$$\begin{aligned} Var(Y_5) &= 2 \sum_{1 \le i < j \le 10} (1 - p_i - p_j)^5 + \left(\sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5 \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5 \right) \\ &= 2(15.87268) + (6.104313)(1 - 6.104313) \\ &= 0.5870. \end{aligned}$$

Análogamente a los cálculos ya realizados, calculamos la esperanza, varianza y segundo momento de Y_n para varios valores de n. Además, aplicando el corolario 2.2.6, calculamos computacionalmente el tercer momento de Y_n usando el programa RStudio. En la tabla 3.4 se muestran los resultados obtenidos.

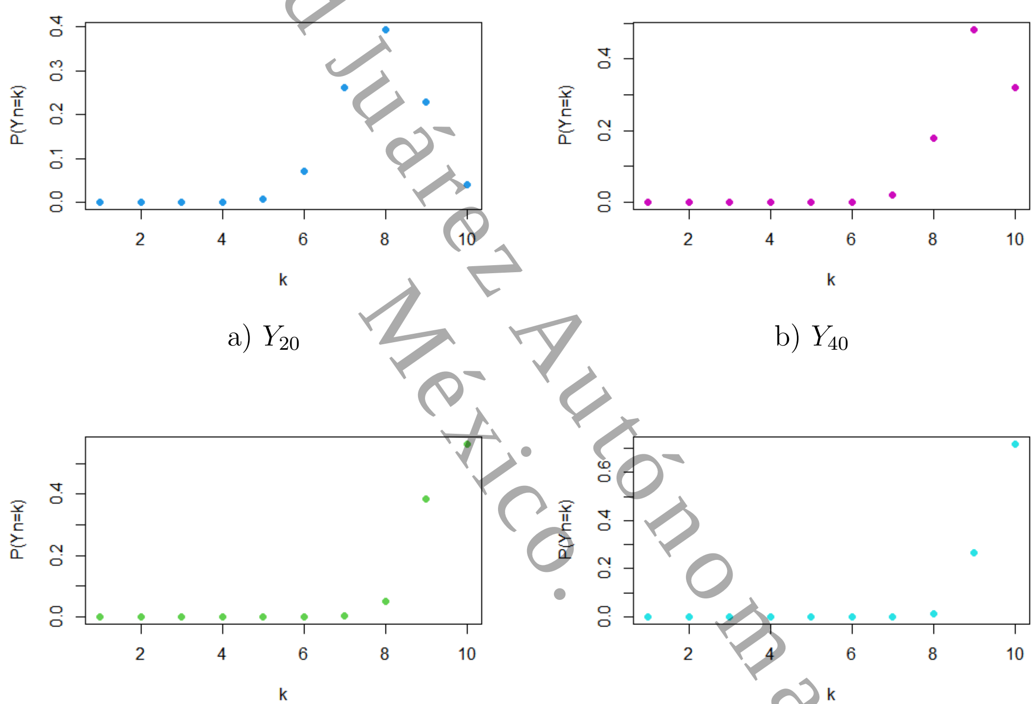
n	$E(Y_n)$	$E(Y_n^2)$	$E(Y_n^3)$	$Var(Y_n)$
5	3.8956	15.7634	65.8706	0.5870
10	5.9700	36.6707	231.2140	1.0289
20	7.8810	63.0915	512.5417	0.9803
30	8.6830	76.1437	673.9628	0.7492
40	9.0986	83.3596	768.7013	0.5743
50	9.3467	87.8131	828.9952	0.4505
60	9.5091	90.7835	869.9372	0.3600
70	9.6219	92.8733	899.0672	0.2915
80	9.7037	94.4002	920.5076	0.2382
90	9.7647	95.5471	936.6917	0.1958
100	9.8114	96.4267	949.1456	0.1617
110	9.8477	97.1123	958.8734	0.1338
120	9.8763	97.6532	966.5622	0.1110
130	9.8991	98.0844	972.6969	0.0922
140	9.9173	98.4308	977.6290	0.0766

Tabla 3.4: Primeros momentos y varianza de Y_n, caso no equiprobable

En tabla 3.4 podemos observar, por ejemplo, que en 70 visitas que realizan las avispas a las orugas se obtiene en promedio, aproximadamente 10 orugas parasitadas, que la varianza del número de orugas parasitadas después de estas visitas es de 0.2915; que el segundo momento y tercer momento de la variable aleatoria Y_n es 92.8733 y 899.0672, respectivamente.

Observación 3.2.1. *En el caso no equiprobable se requiere un número mayor de visitas para que el promedio de orugas parasitadas sea aproximadamente $N = 10$, que en el caso equiprobable; por lo que podemos decir que las avispas parasitan más rápido a toda la población de orugas cuando la probabilidad de parasitar a cualquier oruga es la misma.*

La fórmula (2.4) en este contexto es la función masa de probabilidad del número de orugas parasitadas después de n visitas, es decir, $f(k) = P(Y_n = k)$. En la figura 3.4 se muestran las funciones masa de probabilidad de Y_n para algunos valores de n.



a) Y_{20} b) Y_{40}

b) Y_{60} d) Y_{80}

Figura 3.4: Funciones masa de probabilidad de Y_{20}, Y_{40}, Y_{60}, y Y_{80}

Observación 3.2.2. *De la figura 3.4, vemos que*

- *Para $n = 20$ visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a 8 orugas parasitadas.*
- *Para $n = 40$ visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a 9 orugas parasitadas.*
- *Para $n = 60$ y $n = 80$ visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a 10 orugas parasitadas.*

Continuando con el análisis de este problema, otra variable de interés es T_{k,N_1}, que recuérdese, representa el número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H_1 sean parasitadas.

Podemos calcular la esperanza de T_{k,N_1}, para $k \leq N_1 \leq N$, usando la fórmula (2.25) vista en la sección 2.3, para lo cual supongamos que nuestro interés se enfoca nuevamente en un subconjunto de $N_1 = 8$ orugas que no han sido parasitadas, digamos $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, calculamos el número esperado de visitas requeridas para que $k \leq N_1$ orugas del conjunto H_1 sean parasitadas, los resultados se muestran en la tabla 3.5.

k	$E(T_{k,8})$
1	1.5277
2	3.3484
3	5.5884
4	8.4728
5	12.4536
6	18.6247
7	30.5518
8	68.9144

Tabla 3.5: Valores esperados de $T_{k,8}$, caso no equiprobable

La tabla 3.5 nos indica el número de visitas promedio que las avispas necesitan para parasitar k orugas del conjunto H_1.

Asumimos ahora que la cardinalidad del conjunto H_1 es la misma que la cardinalidad del conjunto H, es decir, $N_1 = N$, por lo que también en este caso vamos a denotar a T_{k,N_1} como T_k. A continuación utilizamos la fórmula (2.36) de la sección 2.3 para calcular la esperanza de T_k para $k \leq N$. También aplicamos la fórmula (2.43) para calcular el segundo momento y tercer momento de T_k, los resultados se presentan en la tabla 3.6.

k	$E(T_k)$	$E(T_k^2)$	$E(T_k^3)$	$Var(T_k)$
1	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
2	2.1487	4.7945	11.3113	0.1774
3	3.4939	12.8793	50.8687	0.6715
4	5.1092	27.8665	164.3825	1.7618
5	7.1161	54.7059	459.6542	4.0657
6	9.7339	103.8913	1229.7270	9.1411
7	13.4108	201.5852	3439.4270	21.7349
8	19.2471	431.3757	11439.1100	60.9214
9	30.8485	1197.6030	59539.8500	245.9717
10	68.9845	7179.3000	1091134.0000	2420.4280

Tabla 3.6: Primeros momentos y varianza de T_k, caso no equiprobable

La fórmula (2.33), en esta aplicación representa la función masa de probabilidad del número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H sean parasitadas, es decir, $f(n) = P(T_k = n)$. En las siguientes figuras presentamos la función masa de probabilidad de T_5 y la función masa de probabilidad de T_{10}.

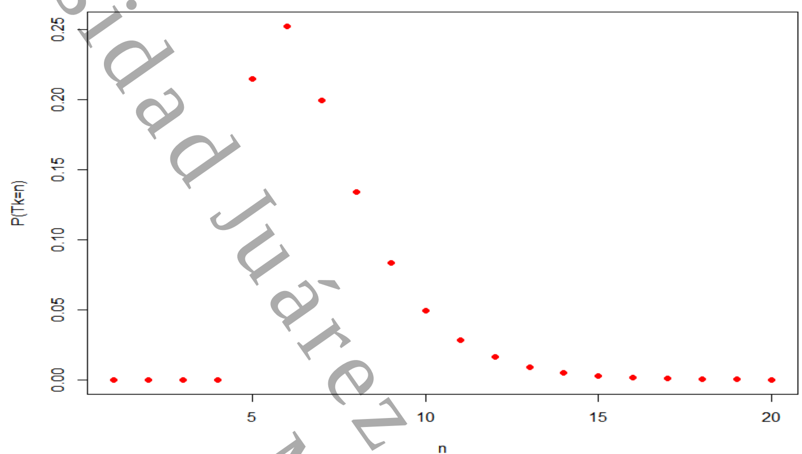


Figura 3.5: Función masa de probabilidad de T_5, caso no equiprobable

La figura 3.5 representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots, 20$ visitas, obtengamos $k = 5$ orugas distintas parasitadas del conjunto H.

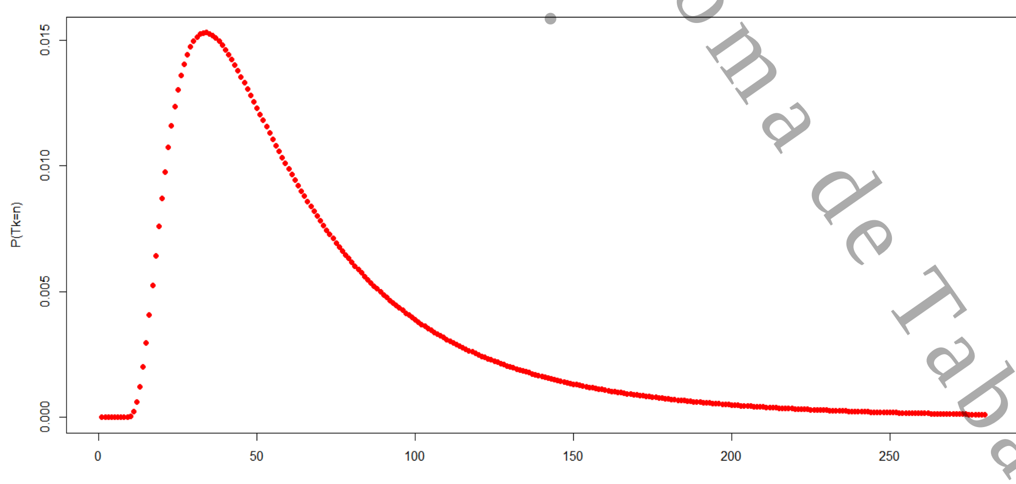


Figura 3.6: Función masa de probabilidad de T_{10}

La figura 3.6 representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots, 280$ visitas, obtengamos $k = 10$ orugas distintas (todas las orugas) parasitadas del conjunto H.

3.3. Parasitación considerando dos tipos de huéspedes

En esta sección consideramos una población con 2 tipos de orugas, como se hace en [15]. Los dos tipos de orugas son una idealización del siguiente caso. Orugas que están muertas, ya sea porque fueron previamente parasitadas o porque produjeron minas (en las hojas) y gallas (protuberancias y crecimientos extraños que se desarrollan en las plantas después de haber sido invadidas por algún organismo), las cuales permanecen en el ecosistema durante mucho más tiempo que el tiempo de existencia del huésped (su tiempo de vida). Estas orugas pueden constituir hasta el 90 por ciento de la población de orugas. Además pueden seguir siendo atractivas para las avispas mucho tiempo después de su muerte. Aunque las avispas no tengan intención de poner su huevos en esas orugas, podrían parasitar a una proporción de ellas. En estos casos, es posible prever dos categorías, orugas vivas y orugas muertas.

Consideraremos pues la situación en la cual hay dos tipos de orugas, y por lo tanto, dos probabilidades diferentes de parasitación por avispas. En una población de $N = 10$ orugas, las orugas $1, 2, \ldots, 5$ tienen una probabilidad de $0.4/5$ de ser parasitadas, mientras que las orugas $6, 7, \ldots, 10$ tienen una probabilidad de $0.6/5$, por lo que

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.4/5,$$

$$p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = 0.6/5.$$

Al igual que en las secciones anteriores, estudiaremos algunas propiedades de las variables aleatorias Y_n y T_k.

Notemos que la fórmula (2.9) vista en la sección 2.2.1, en este contexto corresponde al número esperado de orugas parasitadas después de n visitas. Por lo que si las avispas realizan $n = 5$ visitas a las orugas, entonces el número esperado de orugas parasitadas después de estas visitas es

$$E(Y_5) = 10 - \sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5 = 4.0659 \approx 4.$$

Usando la fórmula (2.10) vista en la sección 2.2.1, podemos calcular computacionalmente el segundo momento de la variable aleatoria Y_n, como se presenta a continuación.

$$\begin{aligned} E(Y_5^2) &= 2 \sum_{1 \le i < j \le 10} (1 - p_i - p_j)^5 - (2(10) - 1) \sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5 + 10^2 \\ &= 2(14.90964) - (19)(5.934067) + 100 \\ &= 17.0720. \end{aligned}$$

Enseguida calculemos computacionalmente la varianza de Y_n, utilizando la fórmula (2.11). Cuando las avispas han realizado $n = 5$ visitas a las orugas tenemos que la varianza es

$$\begin{aligned} Var(Y_5) &= 2 \sum_{1\leq i<j\leq 10} (1 - p_i - p_j)^5 + \left(\sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{10} (1 - p_i)^5\right) \\ &= 2(14.90964) + (5.934067)(1 - 5.934067) \\ &= 0.5402. \end{aligned}$$

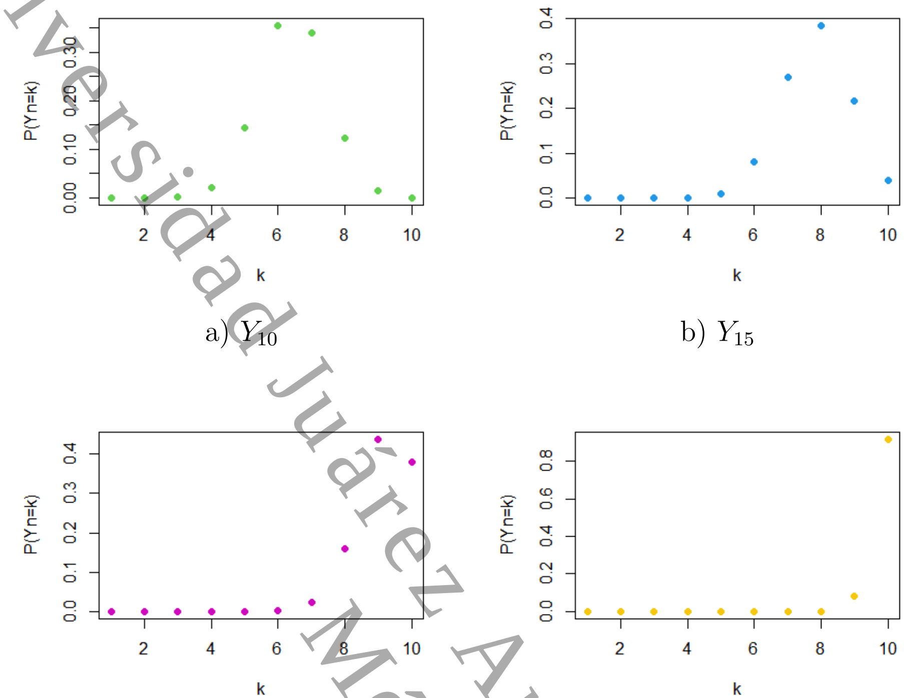
Análogamente a los cálculos ya realizados, calculamos la esperanza, varianza y segundo momento de Y_n para varios valores de n. A su vez, aplicando el corolario 2.2.6, calculamos computacionalmente el tercer momento de Y_n a través del programa RStudio. En la tabla 3.7 se muestran los resultados obtenidos.

n	$E(Y_n)$	$E(Y_n^2)$	$E(Y_n^3)$	$Var(Y_n)$
5	4.0659	17.0720	73.6674	0.5402
10	6.4355	42.4280	286.0301	1.0116
15	7.8336	62.3873	504.5698	1.0214
20	8.6687	75.9766	672.7276	0.8299
25	9.1735	84.7625	788.4329	0.6091
30	9.4821	9.4821	864.3353	0.4238
35	9.6728	93.8512	913.1378	0.2864
40	9.7918	96.0716	944.2956	0.1905
45	9.8667	97.4791	964.1728	0.1255
50	9.9142	98.3755	976.8808	0.0823

Tabla 3.7: Primeros momentos de Y_n, caso no equiprobable

La tabla 3.7 nos dice por ejemplo, que en 15 visitas que realizan las avispas a las orugas se obtiene en promedio, aproximadamente 8 orugas parasitadas, que la varianza del número de orugas parasitadas después de estas visitas es de 1.0214; que el segundo momento y tercer momento de la variable aleatoria Y_n es 62.3873 y 504.5698, respectivamente.

La fórmula (2.4), en este contexto, es la función masa de probabilidad del número de orugas parasitadas después de n visitas, es decir, $f(k) = P(Y_n = k)$. En la figura 3.7 se muestran las funciones masa de probabilidad de Y_n para algunos valores de n.



a) Y_{10} b) Y_{15}

c) Y_{25} d) Y_{50}

Figura 3.7: La función masa de probabilidad de Y_n, para $n = 10, 15, 25, 50$

Observación 3.3.1. *De la figura 3.7, vemos que*

- *Para* $n = 10$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 6 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 15$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 8 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 25$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 9 *orugas parasitadas.*
- *Para* $n = 50$ *visitas se observa que la probabilidad máxima de parasitación corresponde a* 10 *orugas parasitadas.*

Ahora analizamos a la variable aleatoria T_{k,N_1}, que representa el número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H_1 sean parasitadas.

Podemos calcular la esperanza de T_{k,N_1}, para $k \leq N_1 \leq N$, usando la fórmula (2.25) vista en la sección 2.3, para lo cual supongamos que nuestro interés se enfoca en un subconjunto de $N_1 = 8$ orugas que no han sido parasitadas, digamos $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, calculamos el número esperado de visitas requeridas para que $k \leq N_1$ orugas del conjunto H_1 sean parasitadas, los resultados se presentan en la tabla 3.8.

k	$E(T_{k,8})$
1	1.3157
2	2.8299
3	4.6105
4	6.7676
5	9.4951
6	13.1853
7	18.8305
8	30.4650

Tabla 3.8: Valores esperados de $T_{k,8}$, caso no equiprobable

La tabla 3.8 nos dice, por ejemplo, que para que 5 orugas del conjunto H_1 sean parasitadas, las avispas necesitan realizar 9 visitas en promedio.

Ahora bien, supongamos que $N_1 = N$, entonces T_{k,N_1} es denotado por T_k. Enseguida utilizamos la fórmula (2.36) de la sección 2.3 para calcular la esperanza de T_k para $k \leq N$. También aplicamos la fórmula (2.43) para calcular el segundo momento y tercer momento de T_k, los resultados se presentan en la tabla 3.9.

k	$E(T_k)$	$E(T_k^2)$	$E(T_k^3)$	$Var(T_k)$
1	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
2	2.1166	4.6113	10.4813	0.1313
3	3.3798	11.8921	44.0558	0.4687
4	4.8329	24.4985	131.4518	1.1408
5	6.5413	45.1743	331.8861	2.3851
6	8.6105	78.8209	772.1189	4.6796
7	11.2273	135.1672	1755.3270	9.1130
8	14.7707	236.8485	4147.1750	18.6739
9	20.2045	452.8246	11334.2800	44.5998
10	31.4826	1161.9400	50760.4200	170.7815

Tabla 3.9: Primeros momentos y varianza de T_k, caso no equiprobable

La fórmula (2.33), en este caso, nos representa la función masa de probabilidad del número de visitas requeridas para garantizar que k orugas distintas del conjunto H sean parasitadas, es decir, $f(n) = P(T_k = n)$. En las siguientes figuras presentamos las funciones masa de probabilidad de T_k para $k = 5$ y $k = 10$.

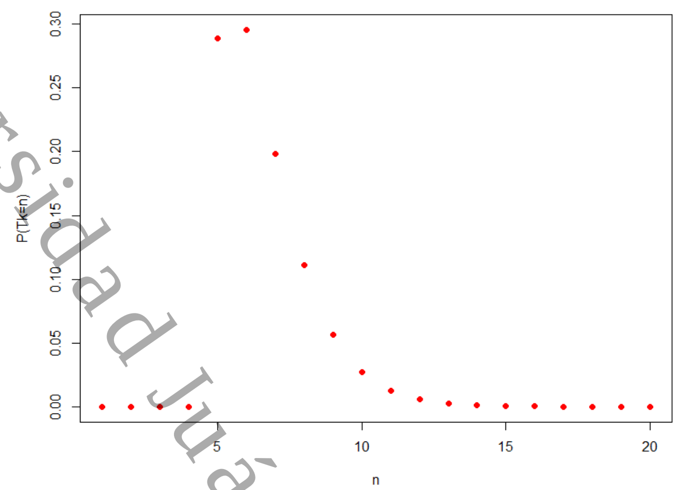


Figura 3.8: Función masa de probabilidad de T_5

La figura 3.8 nos representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots, 20$ visitas, obtengamos $k = 5$ orugas distintas parasitadas del conjunto H.

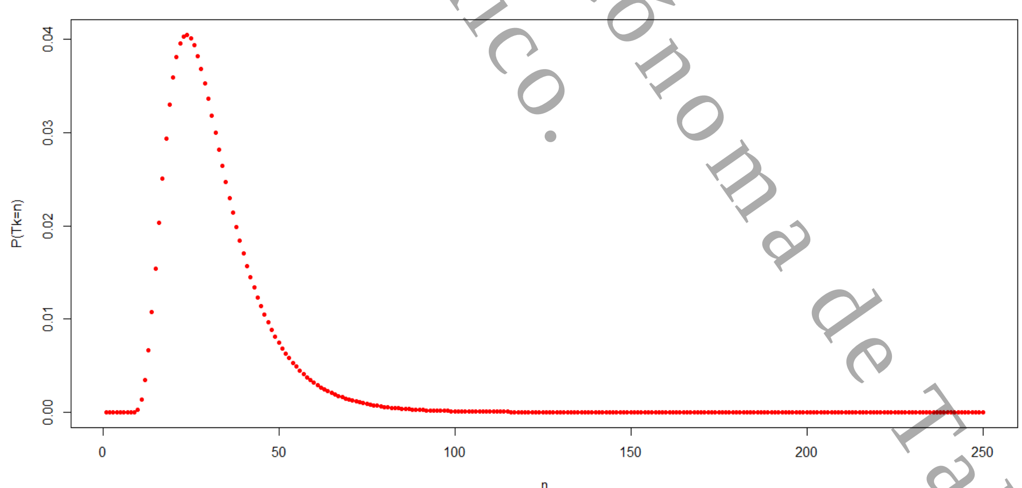


Figura 3.9: Función masa de probabilidad de T_{10}

La figura 3.9 nos representa las probabilidades de que en $n = 1, 2, \ldots, 250$ visitas, obtengamos $k = 10$ orugas distintas (todas las orugas) parasitadas del conjunto H.

Conclusiones

En este trabajo de tesis estudiamos algunas variables aleatorias que surgen del problema del coleccionista de cupones. A continuación se mencionan los resultados obtenidos.

I. Para la variable Y_n, que representa el número de tipos de cupones obtenidos en n adquisiciones, se encontró una expresión para el r-ésimo momento que está dada en términos de sumas finitas, fáciles de calcular computacionalmente. Se obtuvo también una expresión para su función generadora de momentos.

II. Para la variable T_{k,N_1}, que es el número de adquisiciones necesarias para obtener k cupones de un subconjunto de cupones de interés de tamaño $N_1 \leq N$, se presentó una expresión para su valor esperado. Para la variable T_k, que es el número de adquiciones necesarias para obtener $k \leq N$ tipos de cupones de la colección completa, se encontró una expresión para el $r-$ésimo momento. Es importante mencionar que el r-ésimo momento de T_k está en términos de expresiones recursivas, lo que permite implementar fácilmente su cálculo computacionalmente. También mediante esta expresión se hallaron expresiones simplificadas para los tres primeros momentos de T_k. Por otra parte se calculó una expresión para su función generadora de momentos.

Por último, se presentó un ejemplo de aplicación de un sistema huéspedes-parásitos. En esta aplicación se muestra la utilidad de las expresiones encontradas para el cálculo de los primeros momentos de las variables Y_n y T_{k,N_1}, que en este caso representan el número de orugas parasitadas después de n vistas y el número de visitas requeridas para parasitar a k orugas de un subconjunto de intéres, respectivamente. Además se analizó el comportamiento de estos momentos al variar el valor de n y k.

Apéndice A

Algunas resultados de combinatoria

A continuación presentamos algunos resultados de combinatoria, empleados en algunas demostraciones de los resultados que se obtuvieron en esta tesis.

Proposición A.0.1. *Sea k un entero no negativo. Para cualquier entero positivo K con $k < K$,*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{K}{i} = (-1)^k \binom{K-1}{k}. \tag{A.1}$$

Demostración. Para $K = k+1$, usando el teorema del binomio de Newton, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k+1}{i} &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i \binom{k+1}{i} - (-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1} \\
&= (1+(-1))^{k+1} + (-1)^{k+2} \\
&= (-1)^k = (-1)^k \binom{k}{k} \\
&= (-1)^k \binom{(k+1)-1}{k}.
\end{aligned}$$

Esto muestra la validez de (A.1) para $K = k+1$. Supongamos ahora que (A.1) es válido para algún $K > k$. Entonces haciendo uso de la conocida identidad de Pascal (ver [14, Theorem 2, pág. 440]), obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{K+1}{i} &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \left[\binom{K}{i-1} + \binom{K}{i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \binom{K}{i-1} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{K}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+1} \binom{K}{i} + (-1)^k \binom{K-1}{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{K}{i} - (-1)^{k+1} \binom{K}{k} + (-1)^k \binom{K-1}{k} \\
&= (-1) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{K}{i} + (-1)^{k+2} \binom{K}{k} + (-1)^k \binom{K-1}{k} \\
&= (-1)(-1)^k \binom{K-1}{k} + (-1)^k(-1)^2 \binom{K}{k} + (-1)^k \binom{K-1}{k} \\
&= -(-1)^k \binom{K-1}{k} + (-1)^k \binom{K}{k} + (-1)^k \binom{K-1}{k} \\
&= (-1)^k \binom{K}{k}.
\end{aligned}
$$

Por lo que el resultado es válido para $K+1$. Así, por inducción matemática, se concluye la validez de (A.1) para todo número natural $K > k$. ■

Lema A.0.2. *Para cualesquiera enteros a y b, se tiene que*

$$
\sum_{i=0}^{a} (-1)^i \binom{a}{i} i^b = 0, \quad si \quad a-1 \geq b \geq 0. \tag{A.2}
$$

Demostración. Supongamos $b = 0$. Sea $a - 1 \geq b$, es decir, $a \geq 1$, entonces utilizando la proposición A.0.1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a} (-1)^i \binom{a}{i} &= \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \binom{a}{i} + (-1)^a \binom{a}{a} \\
&= (-1)^{a-1} \binom{a-1}{a-1} + (-1)^a \\
&= (-1)^{a-1}(1-1) = 0,
\end{aligned}
$$

por lo que (A.2) se cumple para $b = 0$.

Supongamos que se cumple (A.2) para $b \leq m$ y veamos que se cumple para $b = m+1$. Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $a - 1 \geq m + 1$, es decir, $a \geq m + 2$. Entonces por el teorema del binomio de

Newton

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a}(-1)^i\binom{a}{i}i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{a}(-1)^i\frac{a!}{(a-i)!i!}i^{m+1} = \sum_{i=1}^{a}(-1)^i\frac{a!}{(a-i)!(i-1)!}i^{m}\\ &= (-1)a\sum_{i=1}^{a}(-1)^{i-1}\frac{(a-1)!}{(a-1-(i-1))!(i-1)!}i^m\\ &= -a\sum_{j=0}^{a-1}(-1)^j\frac{(a-1)!}{(a-1-j)!j!}(j+1)^m\\ &= -a\sum_{j=0}^{a-1}(-1)^j\binom{a-1}{j}(j+1)^m = -a\sum_{j=0}^{a-1}(-1)^j\binom{a-1}{j}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}j^n\\ &= -a\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\sum_{j=0}^{a-1}(-1)^j\binom{a-1}{j}j^n. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{c-1}{j}j^n = 0, \quad \text{si } (c-1)-1\geq n, \text{ para toda } n=0,1,\ldots,m,$$

es decir, si $c \geq n+2$, pero tenemos que $a \geq m+2 \geq n+2$, para toda $n = 0,\ldots,m$, por lo que

$$\sum_{j=0}^{a-1}(-1)^j\binom{a-1}{j}j^n = 0, \quad \text{para toda } n=0,1,2,\ldots,m.$$

Así, por (A.3)

$$\sum_{i=0}^{a}(-1)^i\binom{a}{i}i^{m+1} = 0,$$

lo que concluye la prueba del lema. ■

Bibliografía

[1] A. Boneh and M. Hofri, *The coupon-collector problem revisited-a survey of engineering problems and computational methods*, Stochastic Models, Vol. 13, No. 1, 1997, 39-66.

[2] G. Casella and R. L. Berger, *Statistical inference*, Duxbury Thomson Learning, 2002.

[3] M. Ferrante and N. Frigo, *A note on the coupon-collector's problem with multiple arrivals and the random sampling*, arXiv.1209.2667v2, 2012, 1-16.

[4] R. J. Flowers, H. D. Cruz Suárez, L. López Segovia y A. Pérez, *Probabilidad*, 2^{da} Edición, Colección Héctor Ochoa Bacelis, UJAT, Tabasco, México, 2015.

[5] B. Fridstedt and L. Gray, *A modern approach to probability theory*, Science & Business Media, 2013.

[6] J. E. Kobza, S. H. Jacobson and D. E. Vaughan, *A survey of the coupon collector's problem with random sample sizes*, Methodol. Comput. Appl. Probab., Vol. 9, 2007, 573-584.

[7] A. M. Mood, F. A. Graybill, and D. C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill Kogakusha, 1974.*

[8] A. León-García, A. Pérez and A. Bolívar-Cimé, *New easy to compute formulas of the moments of random variables appearing in the coupon collector problem*, Probability and Mathematical Statistics, 2023, doi:10.37190/0208-4147.00130.

[9] S. N. Luko, *The "coupon collector's problem" and quality control*, Quality Engineering, Vol. 21, No. 2, 2009, 168-181.

[10] A. Pérez y J. Alavez, *Segundo curso sobre elementos básicos del análisis matemático*, Colección Héctor Ochoa Bacelis, UJAT, Tabasco, México, 2021.

[11] C. E. G. Pineda, S. M. García, L. E. O. Acevedo, *La serie geométrica y su derivada*, Scientia Et Technica, Vol. 17, No. 47, 2011, 196-200.

[12] L. Rincón, *Estadística descriptiva*, Las Prensas de Ciencias, 2017.

[13] L. Rincón, *Introducción a la probabilidad*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2014, http://www.matematicas.unam.mx/lars.

[14] K. Rosen, *Discrete mathematics and its applications*, Monmouth University (and formerly AT&T Laboratories), Eighth edition, McGraw-Hill Education, 2019.

[15] N. Zoroa, E. Lesigne, M. J. Fernandez Saéz, P. Zoroa and J. Casas, *The coupon collector urn model with unequal probabilities in ecology and evolution*, Journal of the Royal Society Interface, Vol. 14, 2017.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de la tesis	Estudio de la distribución y los momentos de algunas variables aleatorias que aparecen en el problema del coleccionista de cupones.
Autor(a) o autores (ras) de la Tesis:	Lic. Amayrani León García, Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé y Dr. Aroldo Pérez Pérez.
ORCID:	0009-0002-5149-1623
Resumen de la Tesis	El Problema del Coleccionista de Cupones (PCC) aborda la estimación del número esperado de adquisiciones necesarias para obtener una colección completa de N elementos distintos, considerando que cada uno aparece con cierta probabilidad. Una aplicación relevante de este modelo se presenta en el estudio de la parasitación de orugas por avispas, donde las orugas se modelan como cupones y cada visita de la avispa representa una adquisición.
Palabras claves de la Tesis:	Problema del coleccionista de cupones, orugas parasitadas, función masa, función generadora de momento, esperanza y varianza.

Referencias citadas:	1.-A. Boneh and M. Hofri, The coupon-collector problem revisited-a survey of engineering problems and computational methods, Stochastic Models, Vol. 13, No. 1, 1997, 39-66. 2.-G. Casella and R. L. Berger, Statistical inference, Duxbury Thomson Learning, 2002. 3.-M. Ferrante and N. Frigo, A note on the coupon-collector's problem with multiple arrivals and the random sampling, arXiv.1209.2667v2, 2012, 1-16. 4.-R. J. Flowers, H. D. Cruz Suárez, L. López Segovia y A. Pérez, Probabilidad, Segunda Edición, Colección Héctor Ochoa Bacelis, UJAT, Tabasco, México, 2015. 5.-B. Fridstedt and L. Gray, A modern approach to probability theory, Science & Business Media, 2013. 6.-J. E. Kobza, S. H. Jacobson and D. E. Vaughan, A survey of the coupon collector's problem with random sample sizes, Methodol. Comput. Appl. Probab., Vol. 9, 2007, 573-584. 7.-A. M. Mood, F. A. Graybill, and D. C. Boes, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill Kogakusha, 1974. 8.-A. León-García, A. Pérez and A. Bolívar-Cimé, New easy to compute formulas of the moments of random variables appearing in the coupon collector problem, Probability and

Mathematical Statistics, 2023, doi:10.37190/0208-4147.00130.

9.-S. N. Luko, The ``coupon collector's problem'' and quality control, Quality Engineering, Vol. 21, No. 2, 2009, 168-181.

10.-A. Pérez y J. Alavez, Segundo curso sobre elementos básicos del análisis matemático, Colección Héctor Ochoa Bacelis, UJAT, Tabasco, México, 2021.

11.-C. E. G. Pineda, S. M. García, L. E. O. Acevedo, La serie geométrica y su derivada, Scientia Et Technica, Vol. 17, No. 47, 2011, 196-200.

12.-L. Rincón, Estadística descriptiva, Las Prensas de Ciencias, 2017.

13.-L. Rincón, Introducción a la probabilidad, Las Prensas de Ciencias, Faculta, F. Ciencias UNAM, México, 2014, http://www.matematicas.unam.mx/lars.

14.-K. Rosen, Discrete mathematics and its applications, Monmouth University (and formerly AT\&T Laboratories), Eighth edition, McGraw-Hill Education, 2019.

15.-N. Zoroa, E. Lesigne, M. J. Fernandez Saéz, P. Zoroa and J. Casas, The coupon collector urn model with unequal probabilities in ecology and evolution, Journal of the Royal Society Interface, Vol. 14, 2017.