



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO



DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

**CONTROL DE UN CIRCUITO DE JOSEPHSON. MINIMIZANDO CON EL
ALGORITMO BFGS Y DISPARO MÚLTIPLE**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ING. JASIEL CHAVALA MISS

BAJO LA DIRECCIÓN DE:

DR. JORGE LÓPEZ LÓPEZ

EN CO-DIRECCIÓN DE:

DR. LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA

CUNDUACÁN, TABASCO. FEBRERO DE 2026.

Declaración de autoría y originalidad

En la ciudad de Cunduacán, Tabasco, en el mes de febrero de 2026, el que suscribe C. Jasiel Chavala Miss, alumno de la División Académica de Ciencias Básicas con número de matrícula 232A15001, adscrito a la Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Como autor de la tesis presentada para la obtención del título y titulada Control de un circuito de Josephson. Minimizando con el algoritmo BFGS y disparo múltiple. Dirigida por el Dr. Jorge López López y el Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia.

Declaro que:

La tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la ley Federal del derecho de autor del 01 de julio de 2020, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la maestría), las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Cunduacán, Tabasco; 13 de febrero del 2026.



Jasiel Chavala Miss



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



2026
año de
Margarita
Maza

DIRECCIÓN

12 de febrero de 2026

ING. JASIEL CHAVALA MISS
EGRESADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS APLICADAS
PRESENTE

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que se le **AUTORIZA** la impresión del trabajo de Tesis titulado **“CONTROL DE UN CIRCUITO DE JOSEPHSON. MINIMIZANDO CON EL ALGORITMO BFGS Y DISPARO MÚLTIPLE”** bajo la Dirección del Dr. Jorge López López (DACB), en Codirección con el Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia (UAM-I).

La Comisión revisora conformada por el Dr. Justino Alavez Ramírez, Dr. Iván Loreto Hernández, Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo, Dr. Jorge López López y Dr. Gamaliel Blé González aprobó el documento en virtud de reunir los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL y obtener el grado de **Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas** bajo la modalidad de titulación por Tesis.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.C.P.- Archivo.

Dir'Dra.HPV/jkal**

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

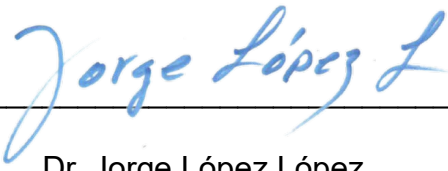
Cunduacán, Tabasco a 13 de febrero de 2026

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada "*Control de un circuito de Josephson. Minimizando con el algoritmo BFGS y disparo múltiple*". Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal de Derecho de Autor y toda vez que la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de derechos patrimoniales por un periodo de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la universidad.

COLABORADORES



Ing. Jasiel Chavala Miss



Dr. Jorge López López



Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

TESTIGOS



Lic. René de la Cruz de los Santos



Lic. Víctor Reyes García

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por la vida, la salud y la oportunidad de haber cursado esta maestría. Su guía y cuidado han sido fundamentales en cada etapa de este camino.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mis asesores de tesis, el Dr. Jorge López López y el Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia, por su orientación y apoyo continuo durante la maestría y en el desarrollo de este trabajo de investigación. Extiendo también mi gratitud a todos los docentes que contribuyeron a mi formación académica, por los conocimientos y herramientas que me brindaron.

Agradezco profundamente a mis padres y a mi hermana por su apoyo constante y su aliento incondicional. De manera especial, a mi mamá, por motivarme siempre a seguir adelante y estar conmigo en los momentos más desafiantes.

Jasiel Chavala Miss

Índice general

Agradecimientos	I
Índice general	II
Índice de tablas	V
Índice de figuras	VI
Resumen	IX
Introducción	X
Marco teórico	XII
Justificación	XIV
Pregunta de investigación	XV
Hipótesis	XVI
Objetivo general	XVII
Objetivos específicos	XVIII
Metodología	XIX
1. El circuito JJA como un bit clásico	1
1.1. Presentación del circuito y su modelo matemático	1

1.2. Estados de equilibrio del sistema	6
1.3. Operadores de memoria	10
1.4. Un problema de control óptimo para el sistema JJAM	11
2. Control del sistema JJAM por pedazos vía disparo múltiple	14
2.1. Descripción del método de disparo múltiple	14
2.2. Gradiente de $J(x)$ para controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$	19
2.3. Control vía disparo múltiple modificado	26
2.3.1. Controles continuos lineales por pedazos	26
2.3.2. Controles constantes por pedazos	40
3. Control del sistema JJAM vía DMM con parámetros de disparo fijos	48
3.1. Controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$	48
3.1.1. Presentación del método	48
3.1.2. Cálculo del gradiente del funcional J	50
3.2. Controles continuos lineales por pedazos	53
3.3. Controles constantes por pedazos	63
3.4. Notas sobre el método del Lagrangiano aumentado	70
4. Análisis de resultados y conclusiones	73
4.1. Análisis de resultados	73
4.2. Discusión	76
4.3. Conclusiones y recomendaciones	77
Bibliografía	79
A. Cambio de variable y adimensionalización de la ecuación de balance	81
B. Control en $(L^2(0, T))^3$ del sistema JJAM para transición entre estados	83
B.1. Gradiente de J en $(L^2(0, T))^3$	83
B.2. Problemas de búsqueda en línea asociados con J	95
B.3. Minimización del funcional J con los algoritmos GC-FR y BFGS	97

C. Estimación numérica de los equilibrios del sistema JJA	108
C.1. Descripción del programa	109
C.2. Región que acota los equilibrios para $-\pi \leq \psi_3 \leq \pi$	110
C.3. Equilibrios en la región \mathbb{K}	111
D. Algoritmos usados en la tesis	115
E. Método sin derivadas para resolver los PBL	121
Anexo	123

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice de tablas

Tabla 1: Algunos equilibrios estables e inestables del sistema JJA en la región \mathbb{K} . . .	8
Tabla 2: Comparación del rendimiento de los algoritmos GC-FR y BFGS	105
Tabla 3: Equilibrios del sistema JJA encontrados en la región \mathbb{K}	113
Tabla 4: Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	123

Índice de figuras

Figura 1: Circuito considerado de un arreglo de tres juntas de Josephson	XIII
Figura 2: Circuito de 3 juntas de Josephson acopladas inductivamente	2
Figura 3: Algunos equilibrios del sistema JJA en la región $(0, 4) \times (-1, 2) \times (-7, 0)$	9
Figura 4: Solución numérica del sistema JJA con condición inicial $\psi(0) = 0$	10
Figura 5: Ilustración de la dinámica de los operadores de escritura del 0 y del 1	11
Figura 6: Partición del intervalo $(0, T)$ en N subintervalos	14
Figura 7: Ilustración de subintervalos para controles por pedazos	15
Figura 8: Ilustración de los nodos τ'_j uniformemente espaciados	15
Figura 9: Ilustración de los τ_j ajustados para que coincidan con un t_i	16
Figura 10: Disparo múltiple	17
Figura 11: Ilustración de control óptimo v^*	18
Figura 12: Ilustración de transición continua de ψ_0 a ψ_T con v^* y s^* óptimos	18
Figura 13: Ilustración de control lineal por pedazos definido por los c_j	27
Figura 14: Control continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a E_1	36
Figura 15: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 14 y $\psi_0 = E_0$	37
Figura 16: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 14 y $\psi_0 = E_1$	38
Figura 17: Control continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1}	38
Figura 18: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 17 y $\psi_0 = E_0$	39

Figura 19: Ilustración de control constante por pedazos 40

Figura 20: Control constante por pedazos para transitar de E_0 a E_1 44

Figura 21: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 20
 y $\psi_0 = E_0$ 44

Figura 22: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 20
 y $\psi_0 = E_1$ 45

Figura 23: Control constante por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1} 46

Figura 24: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 23
 y $\psi_0 = E_0$ 47

Figura 25: Ilustración de la elección de los parámetros de disparo para cada subin-
 tervalo 49

Figura 26: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1 57

Figura 27: Selección de los parámetros de disparo s_j 58

Figura 28: Control óptimo lineal por pedazos para transitar de E_0 a E_1 58

Figura 29: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 28
 y $\psi_0 = E_0$ 59

Figura 30: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 28
 y $\psi_0 = E_1$ 60

Figura 31: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1} 61

Figura 32: Selección de los parámetros de disparo s_j 62

Figura 33: Control óptimo continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1} 62

Figura 34: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 33
 y $\psi_0 = E_0$ 63

Figura 35: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1 66

Figura 36: Control óptimo constante por pedazos para transitar de E_0 a E_1 66

Figura 37: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 36
 y $\psi_0 = E_0$ 67

Figura 38: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 36
 y $\psi_0 = E_1$ 67

Figura 39: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1} 68

Figura 40: Control óptimo constante por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1} 68

Figura 41: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 40
 y $\psi_0 = E_0$ 69

Figura 42: Gráfica del término de regularización contra el término de penalización . . . 75

Figura 43: Gráfica del término de regularización contra el término de penalización . . . 76

Figura 44: Gráficas de $g(\alpha)$ y $g'(\alpha)$ 97

Figura 45: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1 100

Figura 46: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 45
 y $\psi_0 = E_0$ 101

Figura 47: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 45
 y $\psi_0 = E_1$ 102

Figura 48: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1 103

Figura 49: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 48
 y $\psi_0 = E_0$ 104

Figura 50: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 48
 y $\psi_0 = E_1$ 105

Figura 51: Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1} 106

Figura 52: Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 51
 y $\psi_0 = E_0$ 107

Figura 53: Superficies de nivel $\{F_1 = 0\}$, $\{F_2 = 0\}$ y $\{F_3 = 0\}$ en la región \mathbb{K} 112

Figura 54: Equilibrios del sistema JJA encontrados en la región \mathbb{K} 113

Control de un circuito de Josephson. Minimizando con el algoritmo BFGS y disparo múltiple

Resumen

En esta tesis se presentan métodos para obtener controles óptimos continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos para un circuito compuesto por un arreglo de tres juntas de Josephson acopladas inductivamente que es empleado en la fabricación de unidades de memoria y que es modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Se trabajó en la obtención de controles para transitar entre dos estados del sistema, los cuales sirven para definir operadores de memoria. Los métodos presentados se basan en la metodología de disparo múltiple combinada con el algoritmo BFGS. Con estos métodos se obtuvieron resultados satisfactorios, de los cuales se muestran algunos ejemplos con simulaciones numéricas.

Palabras claves: juntas de Josephson, control óptimo, disparo múltiple, algoritmo BFGS.

Abstract

In this thesis, methods are presented to obtain piecewise linear continuous and piecewise constant optimal controls for a circuit composed of an array of three inductively coupled Josephson junctions, which is used in the fabrication of memory units and is modeled by a system of differential equations. The work focused on obtaining controls to transition between two states of the system, which serve to define memory operators. The methods presented are based on the multiple shooting methodology combined with the BFGS algorithm. Using these methods, satisfactory results were obtained, and some examples with numerical simulations are shown.

Key words: Josephson joints, optimal control, multiple shooting, BFGS algorithm.

Introducción

En la actualidad, existen diversos paradigmas de computación, que van desde la computación clásica hasta la computación cuántica, pasando por la computación biológica, la computación caótica basada en dinámica no lineal y la computación criogénica. Cada uno de ellos trabaja con distintos dispositivos electrónicos, tanto para el diseño de unidades de memorias como para el diseño de unidades de procesamiento. La velocidad con que se llevan a cabo los procesos en una unidad de memoria y en una unidad de procesamiento dependen del dispositivo usado para tal fin. En particular, la computación criogénica utiliza dispositivos superconductores, como los circuitos compuestos por juntas de Josephson, tanto para el diseño de memorias como para el diseño de compuertas lógicas para realizar operaciones aritméticas. Una de las ventajas principales de los dispositivos superconductores es que son más rápidos que los clásicos, llegando a realizar los procesos en pico-segundos, mientras que los dispositivos clásicos los realizan en nano-segundos.

En el contexto de las unidades de memoria, una unidad de memoria clásica o un bit clásico, es un dispositivo en el que se puede almacenar un 0 o un 1 y se puede leer el contenido. En la computación criogénica, se usa como unidad de memoria clásica un circuito compuesto por un arreglo de tres juntas de Josephson (JJAM, por las siglas en inglés de Josephson Junction Array Memory) acopladas inductivamente. En una unidad de este tipo para definir lo que significa escribir un 0 o un 1 primero se eligen dos equilibrios estables del circuito, los cuales se pueden etiquetar como E_0 y E_1 . Si el circuito está en E_0 diremos que tiene almacenado un 0 y si está en E_1 diremos que tiene un 1. Una vez definido esto, un operador de escritura del 0 será una energía eléctrica aplicada durante un tiempo T que permita la transición al estado E_0 sin importar el estado inicial (E_0 o E_1) y un operador de escritura del 1 será una energía eléctrica aplicada durante un tiempo T que permita la transición al estado E_1 sin importar el

estado inicial (E_0 o E_1); finalmente un operador de lectura será una energía eléctrica aplicada durante un tiempo T que permita identificar en qué estado se encuentra el circuito. Encontrar energía que hagan estas transiciones implica poder controlar el sistema para que vaya de un estado inicial a un estado final deseado.

En [Braitman et al., 2016, Glowinski et al., 2020] ya se han encontrado operadores de memoria utilizando como controles pulsos gaussianos y controles en L^2 [Braitman et al., 2016, Glowinski et al., 2020]. En este trabajo se aborda el problema de encontrar operadores de memoria en el conjunto de las funciones continuas lineales por pedazos y en el conjunto de las funciones constantes por pedazos.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Marco teórico

En [Braiman et al., 2016, Harvey and Qu, 2018, Nair and Braiman, 2018] se empezaron a estudiar los arreglos de tres juntas de Josephson para ser usados como bits clásicos, tanto en sistemas binarios como ternarios, pero usando como operadores de memoria pulsos gaussianos y pulsos cuadrados, aunque estos operadores no cumplían ningún criterio de optimalidad.

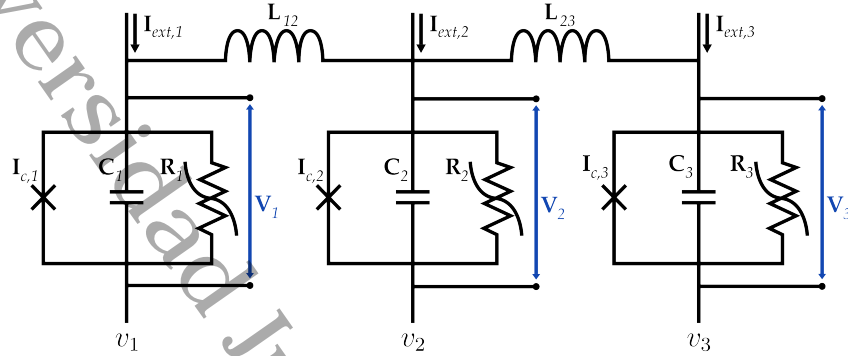
En [Glowinski et al., 2020] se propuso una formulación de control óptimo para la transición de un estado de equilibrio a otro, independientemente si es estable o inestable, usando controles en $(L^2(0, T))^3$, y se llegó a la conclusión de que es posible realizar esa transición controlando a través de solo una junta.

En aras de obtener controles en espacios más sencillos y prácticos, en [Juárez et al., 2024] se implementó la metodología del lagrangiano aumentado combinada con disparo múltiple para hallar controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos, en un proceso que engloba tres regiones de control, una primera región de estabilización alrededor de un equilibrio inicial, una segunda región de transición entre el equilibrio inicial y el equilibrio final y una tercera región de estabilización alrededor del equilibrio final. Con esta metodología en [Juárez et al., 2024] se obtuvieron controles pero no se determinaron operadores de memoria.

Todos los trabajos mencionados consideraron un circuito compuesto por un arreglo de tres juntas de Josephson acoplados inductivamente. El diagrama de este circuito se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Circuito considerado de un arreglo de tres juntas de Josephson



Nota. Adaptado de “Memory states in small arrays of Josephson junctions” (p. 2), Y. Braiman, 2016, *Physical Review E*, 94 (5).

En [Glowinski et al., 2020], para describir la dinámica del circuito JJA, se trabajó con un modelo dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \text{sen } \psi_1 = i_1 + \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \text{sen } \psi_2 = i_2 + \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2), \\ \frac{d^2 \psi_3}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \text{sen } \psi_3 = i_3 + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3), \end{cases} \quad (1)$$

mientras que en las demás artículos citados se trabajó con el modelo de primer orden

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \text{sen } \psi_1 = i_1 + \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1), \\ \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \text{sen } \psi_2 = i_2 + \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2), \\ \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \text{sen } \psi_3 = i_3 + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3). \end{cases} \quad (2)$$

A estos modelos también se les denomina JJA. Los parámetros $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, i_1, i_2, i_3, \kappa_1$ y κ_2 son conocidos y sus valores se presentan en el Capítulo 1.

Justificación

La justificación para esta investigación se basa en la importancia y relevancia del control de sistemas no lineales, especialmente en el contexto de dispositivos utilizados en campos como la superconductividad. El estudio y control de sistemas, como el circuito de tres juntas de Josephson (JJA), son fundamentales para el avance de tecnologías emergentes, como la computación criogénica y la electrónica de alta velocidad, ya que se utilizan tanto como dispositivos de almacenamiento, como dispositivos para diseñar compuertas lógicas o dispositivos para llevar a cabo operaciones aritméticas.

No obstante, a pesar de la relevancia tecnológica del sistema JJA, previo a este trabajo no se habían obtenido operadores de memoria en espacios prácticos como las funciones continuas lineales por pedazos o las funciones constantes por pedazos. Este tipo de funciones resulta más conveniente para el diseño e implementación de dispositivos capaces de inyectar la energía necesaria en el sistema, lo que constituye una motivación central para el desarrollo de esta investigación.

Pregunta de investigación

¿Se puede encontrar operadores de memoria para el sistema JJAM controlando con funciones continuas lineales por pedazos o funciones constantes por pedazos?

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Hipótesis

Se puede encontrar operadores de memoria para el sistema JJAM controlando con funciones continuas lineales por pedazos o funciones constantes por pedazos seleccionado adecuadamente un par de equilibrios estables.

Objetivo general

Encontrar operadores de memoria implementando el algoritmo BFGS combinado con disparo múltiple para controlar la transición entre estados de equilibrio del sistema JJAM.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Objetivos específicos

- Estudiar un modelo para el sistema JJAM.
- Estudiar el problema de transición entre equilibrios del sistema JJAM y definir un problema de optimización asociado.
- Calcular el diferencial del funcional de transición, que se resume en saber resolver el sistema de estado y el sistema adjunto asociado.
- Estudiar el algoritmo BFGS combinado con disparo múltiple para llevar a cabo la transición entre estados de equilibrio del sistema JJAM.
- Implementar el algoritmo BFGS en algún lenguaje de programación.
- Obtener controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos para transitar entre dos equilibrios del sistema JJAM.
- Obtener operadores de escritura continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos.
- Estudiar el problema de minimizar el Lagrangiano aumentado.

Metodología

En referencia a los objetivos específicos, para la familiarización con el modelo JJAM y para estudiar el problema de transición entre equilibrios del sistema JJAM se estudió [Braiman et al., 2016, Nair et al., 2019, Glowinski et al., 2020], donde también se estudió un problema de optimización asociado.

Para lo que respecta al cálculo del diferencial del funcional de optimización y al estudio del algoritmo BFGS combinado con disparo múltiple para obtener controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos, se estudió [Juárez and Rojas, 2022, Juárez et al., 2024].

Se implementó en MATLAB el algoritmo BFGS combinado con disparo múltiple para obtener controles continuos lineales por pedazos o constantes por pedazos para transitar desde un estado inicial hasta un estado final y en particular, obtener operadores de memoria, transitando entre estados de equilibrio estables.

Por último, el estudio de las propiedades del lagrangiano aumentado, se realizó consultando [Juárez and Rojas, 2022, Juárez et al., 2024].

El circuito JJA como un bit clásico

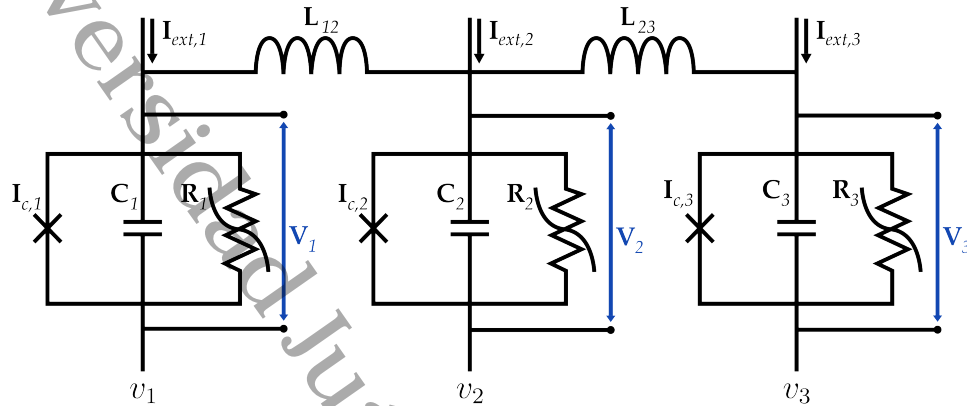
En la primera sección este capítulo se presentará el circuito de interés en este trabajo de investigación, así como el modelo matemático que describe su dinámica. En la segunda sección se mostrarán algunos de los equilibrios del sistema JJA que se tomarán en cuenta a lo largo de la tesis. Los operadores de memoria se definirán en la tercera sección, y finalmente, en la última sección se expondrá un problema de control óptimo para el sistema JJA que permita encontrar dichos operadores.

1.1. Presentación del circuito y su modelo matemático

El objeto de estudio en este trabajo es un modelo presentado en [Braiman et al., 2016] que describe el comportamiento dinámico de un circuito compuesto por un Arreglo de tres Juntas de Josephson (JJA, por las siglas en inglés de Josephson Junction Array) que están acopladas mediante inductores, tal como se ilustra en la Figura 2.

Figura 2

Circuito de 3 juntas de Josephson acopladas inductivamente



Nota. Adaptado de “Memory states in small arrays of Josephson junctions” (p. 2), Y. Braiman, 2016, *Physical Review E*, 94 (5).

En cada junta de este circuito se cumplen las dos relaciones siguientes. La primera es la **ecuación de la evolución de fase superconductora**

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}, \tag{1.1}$$

y la segunda es la **relación de Josephson**

$$I_J = I_c \text{sen}(\phi), \tag{1.2}$$

donde

- $V(t)$ es el voltaje a través de la junta de Josephson.
- $I_J(t)$ es la corriente (superconductora) de Josephson en la junta.
- ϕ es la diferencia de fase entre las dos partes superconductoras que forman la junta.
- I_c es una constante, la corriente crítica de la junta (la máxima corriente que puede fluir a través de la junta sin generar un voltaje).

- $\bar{h} = \frac{h}{2\pi}$, donde h es la constante de Planck. A \bar{h} se le llama constante de Planck reducida.
- e es la carga eléctrica elemental, la cual también es una constante.

Para un circuito de una sola junta, la **ecuación de balance** es

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_J = I_{ext}, \quad (1.3)$$

donde C es la capacidad eléctrica o capacitancia de la junta, R es la resistencia de la junta e I_{ext} es la corriente externa de encendido.

Sustituyendo las relaciones (1.1) y (1.2) en la ecuación (1.3) se obtiene que la ecuación de balance se puede escribir exclusivamente en términos de ϕ de la siguiente manera

$$\frac{hC}{2e} \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{h}{2eR} \frac{d\phi(t)}{dt} + I_c \text{sen}(\phi(t)) = I_{ext}. \quad (1.4)$$

Basados en [Braiman et al., 2016, Glowinski et al., 2020], si se consideran los siguientes parámetros

$$\omega_J^2 = \frac{2e I_c}{h C}, \quad \tau = \omega_J t, \quad i = \frac{I_{ext}}{I_c} \text{ y } \gamma = \sqrt{\frac{hC}{2eI_c}} \frac{1}{RC} = (\omega_J RC)^{-1}, \quad (1.5)$$

donde $\tau = 4.15ps$, se obtiene la versión adimensional de la ecuación de balance (ver Apéndice A):

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\psi(t)}{dt} + \text{sen}(\psi(t)) = i, \quad (1.6)$$

donde haciendo abuso de notación, se seguirá usando la variable t en lugar de τ .

En el caso del circuito de la Figura 2, que está compuesto por tres juntas acopladas inductivamente, el sistema de ecuaciones de balance es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \text{sen} \psi_1 = i_1 + \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \text{sen} \psi_2 = i_2 + \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2), \\ \frac{d^2\psi_3}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \text{sen} \psi_3 = i_3 + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Los términos adicionales en (1.7) representan contribuciones al sistema debidas a la in-

fluencia mutua de las fases de Josephson a través de las inductancias. En este contexto, los parámetros κ_i , para $i = 1, 2$, conocidos como **parámetros de acoplamiento**, están dados por

$$\kappa_i = \frac{\Phi_0}{2\pi L_i I_c}, \quad (1.8)$$

donde $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$, L_i representa la inductancia i e I_c es la corriente crítica de las juntas de Josephson y es la misma para las tres juntas [Braiman et al., 2016, Rezac et al., 2017].

Si la capacitancia de las juntas puede ser despreciada (lo que significa que las juntas son altamente disipativas), entonces los términos de segundo orden del sistema (1.7) pueden omitirse para obtener, tras reordenar los términos, el siguiente modelo

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \sin \psi_1 = i_1, \\ \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1) + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3) + \sin \psi_2 = i_2, \\ \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2) + \sin \psi_3 = i_3. \end{cases} \quad (1.9)$$

Dado que al circuito lo hemos llamado JJA, también denominaremos así a este modelo. Valores plausibles para los diferentes parámetros del sistema (1.9) son $\gamma_1 = 0.7$, $\gamma_2 = 1.1$, $\gamma_3 = 0.7$; $i_1 = 1.0$, $i_2 = 0.8$, $i_3 = -1.0$ y los parámetros de acoplamiento son $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$. [Braiman et al., 2016, Glowinski et al., 2020].

En este trabajo, se estudiará el sistema (1.9) desde la perspectiva de controlabilidad para optimizar la transición del estado del sistema de un equilibrio estable ψ_0 a otro ψ_T en un periodo de tiempo $[0, T]$. La versión controlable del sistema, para $t \in [0, T]$, es

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\psi_1}{dt} + \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \sin \psi_1 = i_1 + v_1, & t \in (0, T), \\ \gamma_2 \frac{d\psi_2}{dt} + \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1) + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3) + \sin \psi_2 = i_2 + v_2, & t \in (0, T), \\ \gamma_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2) + \sin \psi_3 = i_3 + v_3, & t \in (0, T), \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

donde $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ son funciones mediante las cuales se controla el sistema inyectándolas a través de las juntas 1, 2 y 3 respectivamente, con el objetivo de hacer transitar la

dinámica desde el estado $\psi_0 = (\psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \psi_{0,3})$ hasta un estado $\psi_T = (\psi_{T,1}, \psi_{T,2}, \psi_{T,3})$ definidos previamente. Si se considera

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -\kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \text{sen } \psi = \begin{pmatrix} \text{sen } \psi_1 \\ \text{sen } \psi_2 \\ \text{sen } \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

se puede escribir el modelo (1.10) en su versión matricial como

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \frac{d\psi}{dt} + \mathbf{K} \psi + \text{sen } \psi = \mathbf{i} + \mathbf{v}, & t \in (0, T), \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Al modelo (1.12) se le denominará JJAM (siglas en inglés de Josephson Junction Array Memory), ya que es el modelo que permite usar el circuito JJA como una unidad de memoria.

Es de interés, en este trabajo, encontrar controles \mathbf{v} que lleven el sistema JJA de un estado de equilibrio estable inicial ψ_0 a un estado de equilibrio estable final ψ_T . La obtención de estos controles es un paso previo para obtener operadores de memoria clásica, los cuales se definen en la Sección 1.3.

En este contexto, este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: en lo que resta de este capítulo se estudian los equilibrios del sistema JJA y su estabilidad, se definirá cómo usar el circuito como una unidad de memoria clásica, es decir, como guardar en él un 0 o un 1, para lo cual se definen lo que son los operadores de escritura y se concluirá el capítulo definiendo un problema de optimización cuya solución proporciona los controles que sirven como operadores de memoria.

En el Capítulo 2 se aborda la metodología de disparo múltiple, considerando una modificación, para obtener controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos para transición entre dos estados, para lo cual se define un problema de optimización. Se calcula el gradiente de dicho funcional y se implementa el algoritmo BFGS para finalmente mostrar

ejemplos de controles y de operadores de memoria. Para el desarrollo de este capítulo, y los siguientes, se usan algunos teoremas y proposiciones que se incluyen en el Apéndice B.

En el Capítulo 3 se presenta una variante del método de disparo múltiple, a la cual se denomina en esta tesis como disparo múltiple fijo, y que también se emplea en la obtención de controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos para transición entre estados. Nuevamente se define un funcional a optimizar con el algoritmo BFGS y se presentan experimentos numéricos.

El trabajo de tesis finaliza con las conclusiones y algunas sugerencias de trabajos que se podrían desarrollar a futuro.

1.2. Estados de equilibrio del sistema

Los estados de equilibrio del sistema JJA se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \kappa_1 (\psi_1 - \psi_2) + \text{sen } \psi_1 = i_1, \\ \kappa_1 (\psi_2 - \psi_1) + \kappa_2 (\psi_2 - \psi_3) + \text{sen } \psi_2 = i_2, \\ \kappa_2 (\psi_3 - \psi_2) + \text{sen } \psi_3 = i_3. \end{cases} \quad (1.13)$$

El sistema JJA cuenta tanto con estados de equilibrio estables como con estados de equilibrio inestables [Braiman et al., 2016]. De hecho, cuenta con una infinidad de ellos, ya que, si

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

es un estado de equilibrio del sistema JJA, entonces $\boldsymbol{\theta} + 2\pi n$ es también un estado de equilibrio para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde

$$2\pi n = \begin{pmatrix} 2\pi n \\ 2\pi n \\ 2\pi n \end{pmatrix}.$$

Para ver esto, sea θ un estado de equilibrio. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta + 2\pi n) + \text{sen}(\theta + 2\pi n) - \mathbf{i} &= \mathbf{K} \cdot \theta + \mathbf{K} \cdot 2\pi n + \text{sen}(\theta) - \mathbf{i} \\ &= \mathbf{K} \cdot \theta + \text{sen}(\theta) - \mathbf{i} + \mathbf{K} \cdot 2\pi n. \end{aligned}$$

Como θ es un equilibrio y

$$\mathbf{K} \cdot 2\pi n = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -\kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi n \\ 2\pi n \\ 2\pi n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\mathbf{K}(\theta + 2\pi n) + \text{sen}(\theta + 2\pi n) - \mathbf{i} = \mathbf{0},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\theta + 2\pi n$ es también un estado de equilibrio del sistema JJA para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Todos los equilibrios que se pueden obtener de esta manera, a partir de un equilibrio θ , forman una familia, la familia de θ . También es fácil ver que todos los equilibrios de una familia tienen la misma estabilidad local.

Existen muchas familias de equilibrios del sistema JJA, pero cada familia debe tener un representante en la región $\mathbb{K} = \{(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid -\pi \leq \psi_3 \leq \pi, -\pi \leq \psi_1 \leq \pi + 40, -\pi \leq \psi_2 \leq \pi + 20\}$, así que para definir todas las familias basta con encontrar los equilibrios en esa región. En este trabajo, se estimaron de forma numérica 44 equilibrios estables e inestables en la región \mathbb{K} . Todos los equilibrios encontrados en dicha región se muestran en el Apéndice C. Aunque no podemos afirmarlo, sospechamos que esos son todos los equilibrios existentes en esa región. En la Tabla 1 se muestran algunos de los equilibrios enlistados en el Apéndice C.

Tabla 1

Algunos equilibrios estables e inestables del sistema JJA en la región \mathbb{K}

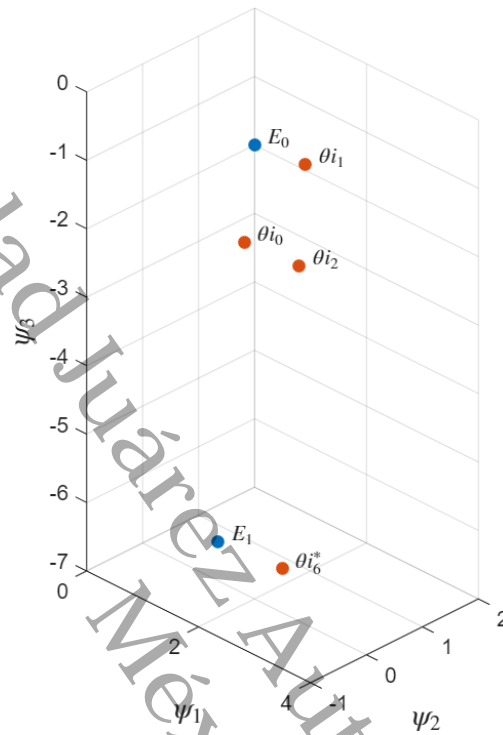
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Estabilidad
θ_{e_0}	1.2514	0.7457	-0.9753	Estable
θ_{e_1}	7.4205	6.4954	-0.3237	Estable
θ_{i_0}	1.2178	0.6010	-2.3608	Inestable
θ_{i_1}	2.0730	0.8383	-0.9615	Inestable
θ_{i_2}	2.1105	0.6890	-2.3751	Inestable
θ_{i_6}	8.4793	6.5869	-0.3150	Inestable

Nota. Los equilibrios estables se etiquetan como θ_{e_j} y los inestables como θ_{i_j} .

Para el desarrollo que haremos en esta tesis de los operadores de memoria, los cuales se definen en la siguiente sección, se deben considerar pares de equilibrios estables a los que llamaremos E_0 y E_1 . En particular, en este contexto tomaremos el par $E_0 = \theta_{e_0}$ y $E_1 = \theta_{e_1} - 2\pi(1, 1, 1)$ que se muestran en la Figura 3, donde además se incluyen los equilibrios inestables θ_{i_0} , θ_{i_1} , θ_{i_2} y $\theta_{i_6}^* = \theta_{i_6} - 2\pi(1, 1, 1)$.

Figura 3

Algunos equilibrios del sistema JJA en la región $(0, 4) \times (-1, 2) \times (-7, 0)$



Nota. En esta figura los equilibrios en azul son estables y los equilibrios en naranja son inestables. Los equilibrios usados en los experimentos numéricos son E_0 , E_1 y θ_{i_1} .

Si se resuelve de forma numérica¹ el sistema (1.12) con condición inicial

$$\psi_0 = (0, 0, 0)^T,$$

la función control

$$v(t) = (0, 0, 0)^T$$

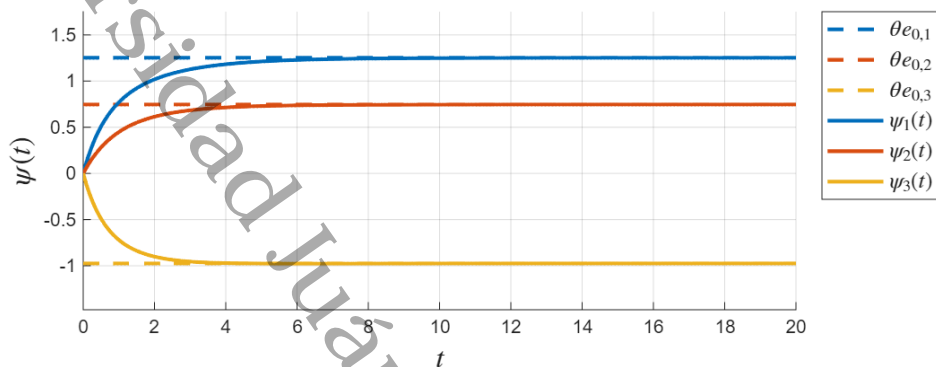
y el intervalo de tiempo $[0, 20]$, se obtiene la solución numérica que se muestra en la Figura 4, donde se puede observar que a medida que avanza el tiempo, la solución tiende al estado de equilibrio estable $E_0 = \theta_{e_0}$. Este experimento simula la dinámica del circuito bajo la acción

¹Se resolvió con un programa elaborado en MATLAB que hace uso del método de Euler. El programa se encuentra en la ruta Dinámica del sistema JJA/Solución del sistema JJA/Main.sol.sistema.JJA.m.

solamente de la corriente de encendido, I_{ext} , y se tiene, que alrededor del tiempo $t = 10$ prácticamente llega al equilibrio $E_0 = \theta e_0$.

Figura 4

Solución numérica del sistema JJA con condición inicial $\psi(0) = \mathbf{0}$.



Nota. Esta gráfica presenta, en líneas continuas, las series de tiempo de las variables de estado, tomando $\psi_0 = (0, 0, 0)$ y bajo la influencia solo de la corriente de encendido. En líneas discontinuas se ha indicado el equilibrio estable $E_0 = \theta e_0$.

1.3. Operadores de memoria

Una condición necesaria para que un sistema como el JJAM funcione como un bit clásico, es que debe contar con al menos dos familias de estados de equilibrio estables.

Como ya se vió en la Sección 1.2, el sistema JJA cuenta con más de dos familias de equilibrios estables, por lo tanto, este sistema cumple con el primer requisito para ser implementado como un bit clásico. Los demás requisitos tienen que ver con la definición de operador de memoria. Para definir los operadores de memoria se eligen dos estados, pertenecientes a familias distintas, los cuales se denotarán como E_0 y E_1 , y para este trabajo serán los equilibrios que se presentaron en la Figura 3.

En [Glowinski et al., 2020] se presentan las siguientes definiciones para los operadores de memoria.

Definición 1.3.1 . Cuando el circuito (la unidad de memoria) está en el estado E_0 se dice que **contiene un 0** y cuando está en el estado E_1 se dice que **contiene un 1**.

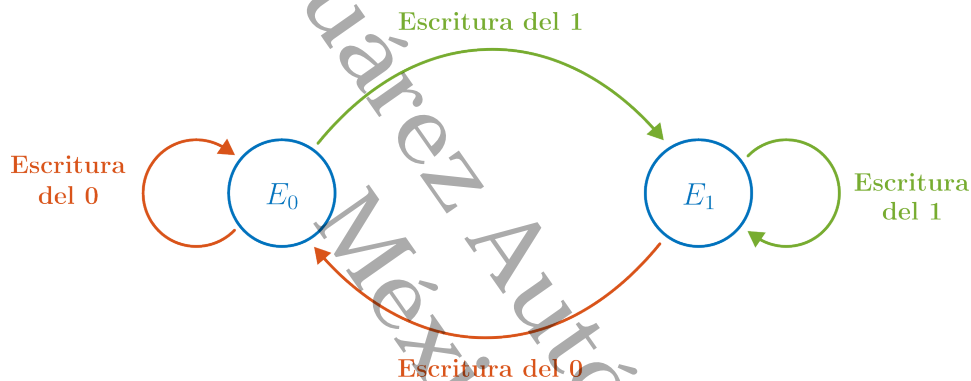
Definición 1.3.2 . Se llamará **operador de escritura del 1** a una energía $v(t)$ si lleva al sistema al estado E_1 sin importar el estado inicial (E_0 o E_1).

Definición 1.3.3 . Se llamará **operador de escritura del 0** a una energía $v(t)$ si lleva al sistema al estado E_0 sin importar el estado inicial (E_0 o E_1).

Definición 1.3.4 . Se llamará **operador de lectura** a una energía $v(t)$ si al aplicarla al circuito nos brinda información que nos permita determinar en qué estado se encontraba el circuito (E_0 o E_1).

Figura 5

Ilustración de la dinámica de los operadores de escritura del 0 y del 1



Nota. Los dos operadores (de Escritura del 0 y de Escritura del 1) tienen que enviar el sistema al estado previsto partiendo de cualquier estado inicial, ya sea E_0 o E_1 .

Así que, para que un sistema como el JJAM se pueda utilizar como unidad de memoria, se debe contar con tres energías que cumplan la definición de operadores de escritura y lectura, respectivamente. De modo que lo primero que se debe responder en este caso, es cómo se pueden encontrar energías que lleven el sistema del estado E_0 al E_1 y viceversa. En la siguiente sección se define un problema de control óptimo que permite encontrar estas energías y que además sean óptimas en un cierto sentido.

1.4. Un problema de control óptimo para el sistema JJAM

En este trabajo se quiere encontrar operadores de memoria que sean óptimos, en el sentido de que no solo lleven el sistema de un estado a otro, sino también que la energía que se re-

quiere para ello sea mínima. En particular, para el sistema JJAM, esto se traduce matemáticamente en resolver el siguiente problema de minimización [Glowinski et al., 2020].

Encontrar $\mathbf{v}^* \in \mathcal{B} = (L^2(0, T))^3$ tal que

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}} J(\mathbf{v}), \quad (1.14)$$

donde el funcional $J(\mathbf{v})$ está dado por

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|^2, \quad (1.15)$$

aquí $\eta > 0$ es un parámetro de regularización, $k > 0$ es un parámetro de penalización, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ y la función vectorial $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ se obtiene de manera única a partir de \mathbf{v} mediante la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi} + \text{sen } \boldsymbol{\psi} = \mathbf{i} + \mathbf{v}, & t \in (0, T), \\ \boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{\psi}_0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Cabe aclarar que, en general, el mínimo del funcional no lleva el sistema JJAM al estado final de forma exacta, pero es posible llegar cada vez más cerca aumentando el valor del parámetro de penalización k .

Para el caso del operador de escritura del 1, se debe resolver (1.14) considerando en (1.15) $\boldsymbol{\psi}_T = E_1$ y en (1.16) $\boldsymbol{\psi}_0 = E_0$. De forma similar, para el caso del operador de escritura del 0, se debe resolver (1.14) considerando en (1.15) $\boldsymbol{\psi}_T = E_0$ y en (1.16) $\boldsymbol{\psi}_0 = E_1$. Ahora bien, esto solo garantiza que esos controles llevan el sistema de un estado a otro con una energía mínima, pero no necesariamente serán estos los operadores de escritura, ya que para ello se requiere, además, que al aplicarle la misma energía al estado final, el sistema haga un transitorio y regrese al mismo estado.

El problema (1.14) es un problema típico de control óptimo. En el siguiente capítulo se presentará una de las herramientas con las que puede resolverse de forma numérica y así, encontrar controles que lleven al sistema de un estado a otro de forma óptima. A lo largo

de la tesis también se considerarán otros funcionales que permiten encontrar controles en espacios más prácticos: el espacio de funciones continuas lineales por pedazos y el espacio de funciones constantes por pedazos, para lo cual se aprovechará la metodología de disparo múltiple.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Control del sistema JJAM por pedazos vía disparo múltiple

En este capítulo se describirá la metodología de disparo múltiple para obtener tanto controles en $(L^2(0, T))^3$ por pedazos como controles continuos lineales por pedazos y controles constantes por pedazos que permitan transitar entre dos estados del sistema JJAM.

2.1. Descripción del método de disparo múltiple

Paso 1. Se define una partición del intervalo de tiempo $[0, T]$ en N subintervalos de tamaño $h = T/N$ definidos por los nodos

$$0 = t_1, t_2, \dots, t_{N+1} = T \quad (2.1)$$

donde

$$t_i = (i - 1) \cdot h, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (2.2)$$

Figura 6

Partición del intervalo $[0, T]$ en N subintervalos



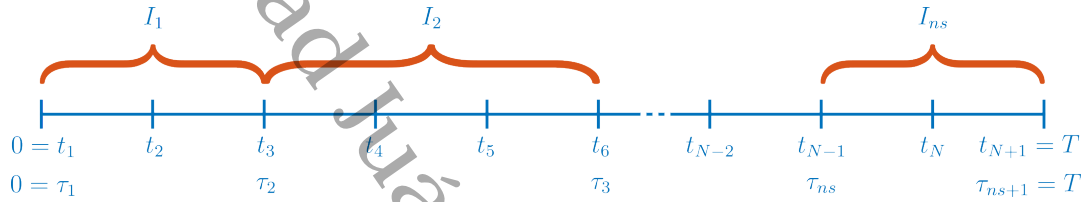
Paso 2. Se divide el intervalo $[0, T]$ en n_s subintervalos, $I_j = [\tau_j, \tau_{j+1}]$, definidos por los nodos

$$0 = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_s}, \tau_{n_s+1} = T, \quad (2.3)$$

donde cada τ_j debe coincidir con un t_i , como se ilustra en la siguiente figura.

Figura 7

Ilustración de subintervalos para controles por pedazos



Una forma de hacer la asignación de los nodos de disparo para que coincidan con un nodo de tiempo es la siguiente.

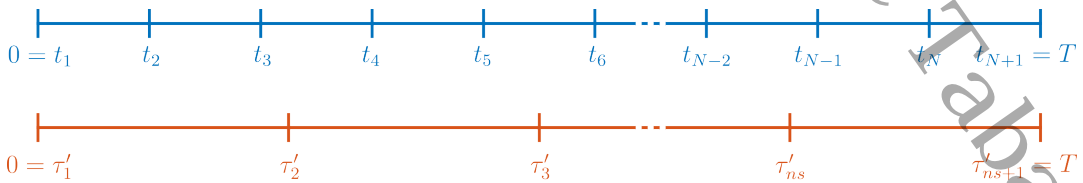
Primero, se toman $n_s + 1$ nodos uniformemente espaciados en el intervalo $[0, T]$, a los que se denota por τ'_j , para $j = 1, \dots, n_s + 1$, de tal forma que

$$0 = \tau'_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{n_s+1} = T, \quad (2.4)$$

como se ilustra en la Figura 8.

Figura 8

Ilustración de los nodos τ'_j uniformemente espaciados



Posteriormente, se asigna a los nodos de disparo τ_j el valor del nodo de tiempo más cercano aplicando la siguiente regla

$$\tau_j = t_\lambda, \quad (2.5)$$

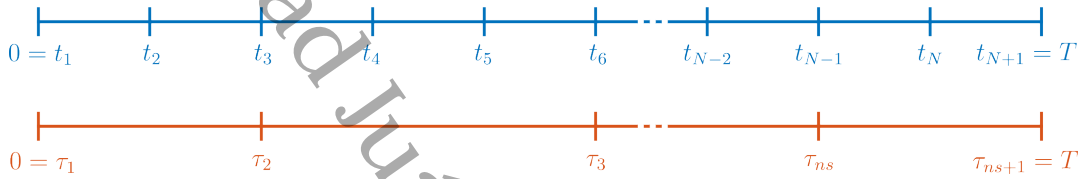
donde

$$\lambda = \text{round} \left(\frac{N(\tau'_j)}{T} \right) + 1. \quad (2.6)$$

Si τ'_j está en medio de dos nodos de tiempo, esta regla le asignará a τ_j el valor del nodo de tiempo de la derecha, como se muestra en la Figura 9.

Figura 9

Ilustración de los τ_j ajustados para que coincidan con un t_i



Paso 3. Se quiere encontrar una función de control

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{i=1}(t) \\ v_{i=2}(t) \\ v_{i=3}(t) \end{pmatrix}$$

que lleve el sistema de un estado inicial ψ_0 a un estado final ψ_T . En particular, se quiere encontrar un control $\mathbf{v}(t)$ definido por pedazos

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_{j=1}(t), & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ \mathbf{v}_{j=2}(t), & \text{si } t \in [\tau_2, \tau_3) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{j=ns}(t), & \text{si } t \in [\tau_{ns}, \tau_{ns+1}] \end{cases}$$

donde cada $v_j \in (L^2(I_j))^3$. El espacio donde vive \mathbf{v} se denotará por $(L^2_{pw}(0, T))^3$ donde el subíndice “*pw*” viene de *piecewise* (por partes).

Observación 2.1.1 . En este trabajo, cuando se utilice el subíndice $i = 1, 2, 3$ en \mathbf{v} , ψ o s , este hará referencia a la componente; y cuando se utilice el subíndice $j = 1, \dots, ns$, este hará referencia al número del subintervalo de disparo.

La idea básica del disparo múltiple es que en cada subintervalo de disparo I_j se debe resolver el sistema de estado, para lo cual se requieren condiciones iniciales (parámetros de disparo) s_j , para $j = 1, \dots, ns$. En cada subintervalo I_j el objetivo es que el sistema llegue a los puntos s_{j+1} . Los parámetros de disparo s_j son desconocidos con excepción de $s_{j=1}$ y $s_{j=ns+1}$ los cuales se definen como

$$s_{j=1} := \psi_0, \tag{2.7}$$

$$s_{j=ns+1} := \psi_T. \tag{2.8}$$

Observación 2.1.2 . Los parámetros de disparo $s_{j=1}$ y $s_{j=ns+1}$ también se pueden considerar como desconocidos y que se encuentren como parte del proceso de optimización, para ello se tiene que agregar al funcional los términos $\|s_{j=1} - \psi_0\|$ y $\|s_{j=ns+1} - \psi_T\|$. En este trabajo, en aras de reducir la cantidad de parámetros a estimar, se consideran como conocidos.

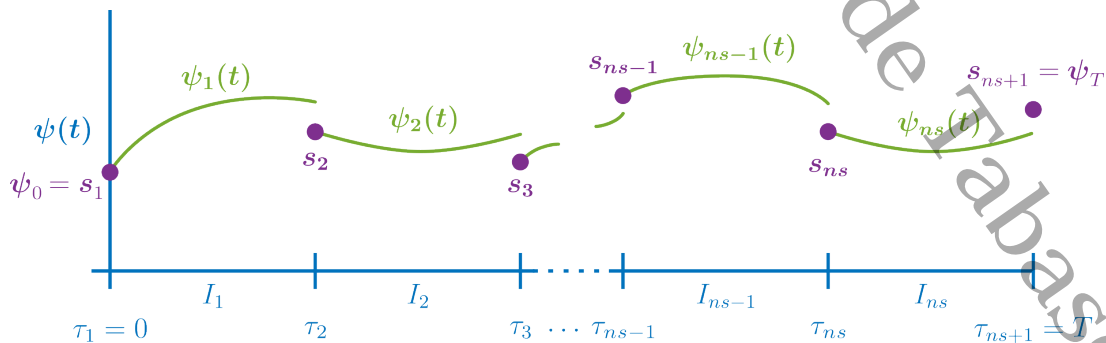
Así, en cada subintervalo de disparo I_j se debe resolver para $j = 1, \dots, ns$

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_j}{dt} + \mathbf{K} \psi_j + \text{sen}(\psi_j) = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}) \\ \psi_j(\tau_j) = s_j. \end{cases} \tag{2.9}$$

La ilustración de la Figura 10 representa la idea básica de la metodología de disparo múltiple.

Figura 10

Disparo múltiple

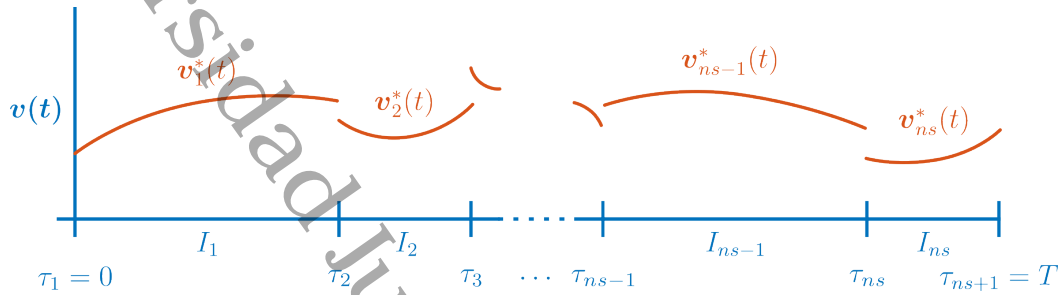


Nota. Aunque el sistema considerado es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Se quiere encontrar v_j^* y s_j^* óptimos que le permitan al sistema transitar de forma continua del estado inicial ψ_0 al estado final ψ_T como se ilustra en las Figuras 11 y 12.

Figura 11

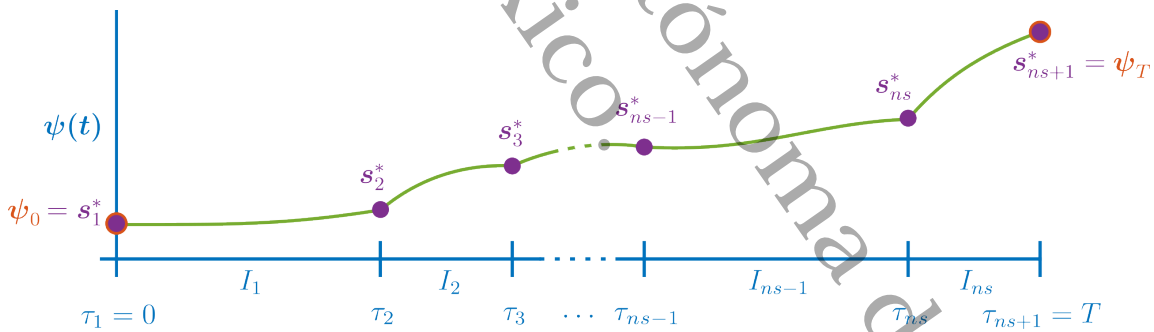
*Ilustración de control óptimo v^**



Nota. Aunque el control es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Figura 12

Ilustración de transición continua de ψ_0 a ψ_T con v^ y s^* óptimos*



Nota. Aunque el sistema considerado es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Para lograr esto, se aplicará el siguiente y último paso.

Paso 4. Problema de optimización

El método de disparo múltiple consiste en encontrar $x^* = (v^*, s^*) \in (L^2_{pw}(0, T))^3 \times (\mathbb{R}^3)^{n_s-1}$, tal que

$$x^* = \arg \min J(x), \tag{2.10}$$

donde

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{ns} J_j(\hat{\mathbf{v}}_j), \quad (2.11)$$

donde $\hat{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{s}_2)$, $\hat{\mathbf{v}}_j = (\mathbf{v}_j, \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_{j+1})$ para cada $j = 2, \dots, ns - 1$, $\hat{\mathbf{v}}_{ns} = (\mathbf{v}_{ns}, \mathbf{s}_{ns})$ y

$$J_j(\hat{\mathbf{v}}_j) = \frac{\eta}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2, \quad \text{si } t \in I_j, \quad (2.12)$$

donde $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \mathbf{s}_j. \end{cases} \quad (2.13)$$

Observación 2.1.3 . Cuando en $\boldsymbol{\psi}$, \mathbf{v} o \mathbf{s} se use el subíndice $i = 1, 2, 3$ y además las letras no estén en negritas ($\boldsymbol{\psi}$, \mathbf{v} o \mathbf{s}), se hará alusión a la componente y cuando se use el subíndice $j = 1, \dots, ns$ y las letras estén en negritas, se hará alusión al número de subintervalo.

A continuación, se va a calcular el gradiente del funcional $J(\mathbf{x})$ definido en (2.11) para poderlo minimizar usando el algoritmo BFGS.

2.2. Gradiente de $J(\mathbf{x})$ para controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$

Teorema 2.2.1 . El funcional J en (2.11) es Frechet diferenciable en $(L^2_{pw}(0, T))^3 \times (\mathbb{R}^3)^{ns-1}$ y su derivada $DJ(\mathbf{v})$ aplicada a $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_v, \mathbf{w}_s) \in (L^2_{pw}(0, T))^3 \times (\mathbb{R}^3)^{ns-1}$ es

$$\begin{aligned} \langle DJ(\mathbf{v}(t)), (\mathbf{w}(t)) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_v \right\rangle_{(L^2_{pw}(0, T))^3} \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) - k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}, \mathbf{w}_s \right\rangle_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $(\cdot, \cdot)_{(L^2_{pw}(0,T))^3}$ denota el producto interno en $(L^2_{pw}(0,T))^3$, $(\cdot, \cdot)_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}}$ es el producto interno en $(\mathbb{R}^3)^{ns-1}$ y \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (2.15)$$

donde

$$C(\boldsymbol{\psi}_j) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_{j,1}) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_{j,2}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\psi_{j,3}) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \mathbf{s}_j. \end{cases} \quad (2.17)$$

Observación 2.2.1 . En la siguiente demostración se hace uso de proposiciones enunciadas y demostradas en el Apéndice B.

Demostración. Realizando un análisis de perturbación para el funcional (2.11), se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{x}) &= \delta \sum_{j=1}^{ns} J_j(\mathbf{x}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \delta J_j(\mathbf{x}_j) \quad (\text{Prop. B.1.1}) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \delta \left(\frac{\eta}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \left(\frac{\eta}{2} \delta \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) \quad (\text{Prop. B.1.1}) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \left(\frac{\eta}{2} \int_{I_j} \delta \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right). \quad (\text{Prop. B.1.4}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

En este punto, se va a separar el primer y último sumando del resto, ya que el primer sumando solo depende de \mathbf{v}_1 y \mathbf{s}_2 , debido a que \mathbf{s}_1 es fijo, el último sumando solo depende

de \mathbf{v}_{ns} y \mathbf{s}_{ns} , ya que \mathbf{s}_{ns+1} es fijo, y los demás sumandos dependen de \mathbf{v}_j , \mathbf{s}_j y \mathbf{s}_{j+1} .

Para el primer sumando, es decir para $j = 1$, por la Proposición B.1.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} \int_{I_1} \delta \|\mathbf{v}_2(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2\|^2 &\approx \int_{I_1} \eta \mathbf{v}_1(t) \cdot \delta \mathbf{v}_1(t) dt \\ &+ k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \cdot \delta_{\mathbf{v}_1} \boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) \\ &- k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \cdot \delta \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para $j = 2, \dots, ns - 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{ns-1} \left(\frac{\eta}{2} \int_{I_j} \delta \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) &\approx \\ \approx \sum_{j=2}^{ns-1} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j(t) \cdot \delta \mathbf{v}_j(t) dt \right. & \\ \left. + k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta_{\mathbf{v}_j, \mathbf{s}_j} \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) \right. & \\ \left. - k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_{j+1} \right). & \end{aligned} \quad (2.20)$$

Finalmente, para $j = ns$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} \int_{I_{ns}} \delta \|\mathbf{v}_{ns}(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_{ns}(\tau_{ns+1}) - \mathbf{s}_{ns+1}\|^2 &\approx \\ \approx \int_{I_{ns}} \eta \mathbf{v}_{ns}(t) \cdot \delta \mathbf{v}_{ns}(t) dt & \\ + k(\boldsymbol{\psi}_{ns}(\tau_{ns+1}) - \mathbf{s}_{ns+1}) \cdot \delta_{\mathbf{v}_{ns}, \mathbf{s}_{ns}} \boldsymbol{\psi}_{ns}(\tau_{ns+1}). & \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por la Proposición B.1.6, $\delta_{\mathbf{v}_1} \boldsymbol{\psi}_1$ en (2.19) se aproxima por la solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma} \frac{d\delta \boldsymbol{\psi}_1}{dt} + \mathbf{K} \delta \boldsymbol{\psi}_1 + \mathbf{C}(\boldsymbol{\psi}_1) \delta \boldsymbol{\psi}_1 = \delta \mathbf{v}_1 & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \delta \boldsymbol{\psi}_1(\tau_1) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.22)$$

y por la Proposición B.1.7, $\delta \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{\mathbf{v}_j, \mathbf{s}_j} \boldsymbol{\psi}_j$ en (2.21) y (2.21), para $j = 2, \dots, ns$, se aproxima

por la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} + \mathbf{K}\delta\psi_j + C(\psi_j)\delta\psi_j = \delta\mathbf{v}_j & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \delta\psi_j(\tau_j) = \delta\mathbf{s}_j. \end{cases} \quad (2.23)$$

Ahora se introduce una función vectorial $\mathbf{p}_j(t) = (p_{j1}(t), p_{j2}(t), p_{j3}(t))$, que se supone diferenciable sobre todo I_j . Multiplicando ambos lados del sistema diferencial (2.23) por la función vectorial \mathbf{p}_j e integrando sobre I_j se obtiene

$$\int_{I_j} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} \cdot \mathbf{p}_j dt + \int_{I_j} \mathbf{K}\delta\psi_j \cdot \mathbf{p}_j dt + \int_{I_j} C(\psi_j)\delta\psi_j \cdot \mathbf{p}_j dt = \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta\mathbf{v}_j dt, \quad \text{en } I_j. \quad (2.24)$$

Integrando por partes el primer término se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} \cdot \mathbf{p}_j dt &= \Gamma \mathbf{p}_j \cdot \delta\psi_j \Big|_{I_j} - \int_{I_j} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta\psi_j dt \\ &= \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta\psi_j(\tau_{j+1}) - \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta\psi_j(\tau_j) - \int_{I_j} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta\psi_j dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para $j = 1$, por la condición inicial de (2.22) se tiene que $\Gamma \mathbf{p}_1(\tau_1) \cdot \delta\psi_1(\tau_1) = \mathbf{0}$, por lo tanto, se puede reescribir (2.24), tras reordenar los términos, como

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{v}_1 dt &= \Gamma \mathbf{p}_1(\tau_2) \cdot \delta\psi_1(\tau_2) - \int_{I_1} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \cdot \delta\psi_1 \\ &\quad + \int_{I_1} \mathbf{K}\mathbf{p}_1 \cdot \delta\psi_1 dt + \int_{I_1} C(\psi_1)\mathbf{p}_1 \cdot \delta\psi_1 dt \\ &= \Gamma \mathbf{p}_1(\tau_2) \cdot \delta\psi_1(\tau_2) + \int_{I_1} \left[-\Gamma \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_1 + C(\psi_1)\mathbf{p}_1 \right] \cdot \delta\psi_1 dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Supóngase que la función \mathbf{p}_1 es solución del siguiente sistema (sistema adjunto)

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_1 + C(\psi_1)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \mathbf{p}_1(\tau_2) = \Gamma^{-1}[k(\psi_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2)], \end{cases} \quad (2.27)$$

entonces, de (2.26) y (2.27) se obtiene que

$$\int_{I_1} \mathbf{p}_1 \cdot \delta \mathbf{v}_1 dt = k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_1(\tau_2). \quad (2.28)$$

Para $j = 2, \dots, n_s$, por la condición inicial de (2.23) se tiene que $\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j$, por lo tanto, se puede reescribir (2.24), tras reordenar los términos, como

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt &= \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j - \int_{I_j} \boldsymbol{\Gamma} \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j \\ &\quad + \int_{I_j} \mathbf{K} \mathbf{p}_j \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j dt + \int_{I_j} C(\boldsymbol{\psi}_j) \mathbf{p}_j \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j dt \\ &= \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\ &\quad + \int_{I_j} \left[-\boldsymbol{\Gamma} \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j) \mathbf{p}_j \right] \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Supóngase que la función \mathbf{p}_j es solución del siguiente sistema (sistema adjunto)

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Gamma} \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j) \mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (2.30)$$

entonces, de (2.29) y (2.30) se obtiene que

$$\int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j = k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}). \quad (2.31)$$

De (2.19) y (2.28) se obtiene, para $j = 1$, que

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \boldsymbol{\eta} \mathbf{v}_1(t) \cdot \delta \mathbf{v}_1(t) dt + k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \cdot \delta_{\mathbf{v}_1} \boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \cdot \delta \mathbf{s}_2 &\approx \\ &\approx \int_{I_1} \boldsymbol{\eta} \mathbf{v}_1 \cdot \delta \mathbf{v}_1 dt + \int_{I_1} \mathbf{p}_1 \cdot \delta \mathbf{v}_1 dt - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_2 \\ &= \int_{I_1} (\boldsymbol{\eta} \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1) \cdot \delta \mathbf{v}_1 dt - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.20) y (2.31) se obtiene, para $j = 2, \dots, ns - 1$, que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=2}^{ns-1} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j(t) \cdot \delta \mathbf{v}_j(t) dt + k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta_{\mathbf{v}_j, \mathbf{s}_j} \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) \right. \\
 & \quad \left. - k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_{j+1} \right) \approx \\
 & \approx \sum_{j=2}^{ns-1} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \right. \\
 & \quad \left. - k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_{j+1} \right) = \\
 & = \sum_{j=2}^{ns-1} \left(\int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j - k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_{j+1} \right).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

De (2.21) y (2.31) se obtiene, para $j = ns$, que

$$\begin{aligned}
 & \int_{I_{ns}} \eta \mathbf{v}_{ns}(t) \cdot \delta \mathbf{v}_{ns}(t) dt + k(\boldsymbol{\psi}_{ns}(\tau_{ns+1}) - \mathbf{s}_{ns+1}) \cdot \delta_{\mathbf{v}_{ns}, \mathbf{s}_{ns}} \boldsymbol{\psi}_{ns}(\tau_{ns+1}) \approx \\
 & \approx \int_{I_{ns}} \eta \mathbf{v}_{ns} \cdot \delta \mathbf{v}_{ns} dt + \int_{I_{ns}} \mathbf{p}_{ns} \cdot \delta \mathbf{v}_{ns} dt + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) \cdot \delta \mathbf{s}_{ns} \\
 & = \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) \cdot \delta \mathbf{v}_{ns} dt + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) \cdot \delta \mathbf{s}_{ns}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sumando (2.32), (2.33) y (2.34) se tiene que

$$\delta J(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \sum_{j=2}^{ns} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j - \sum_{j=1}^{ns-1} k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \mathbf{s}_{j+1}. \tag{2.35}$$

Realizando un cambio de índice en la tercera suma se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta J(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \sum_{j=2}^{ns} \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j - \sum_{j=2}^{ns} k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \sum_{j=2}^{ns} (\Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) - k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j)) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \left(\begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{pmatrix}, \delta \mathbf{v} \right)_{(L^2_{pw}(0,T))^3} \\
 &\quad + \left(\begin{pmatrix} \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) - k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}, \delta \mathbf{s} \right)_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}},
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde $(\cdot, \cdot)_{(L^2_{pw}(0,T))^3}$ denota el producto interno en $(L^2_{pw}(0, T))^3$ y $(\cdot, \cdot)_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}}$ el producto interno en $(\mathbb{R}^3)^{ns-1}$. Así, el funcional $J(\mathbf{x})$ en (2.11) es Frechet diferenciable y su gradiente está dado por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_{ns}} J(\mathbf{v}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \\ \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) - k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

■

Con el gradiente (2.37) se podría aplicar el algoritmo BFGS para controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$. Sin embargo, para tamaños de paso de tiempo muy pequeños la inversa de la hessiana tendría un tamaño muy grande, lo cual implicaría mucha memoria y un tiempo de cómputo alto. Además, los controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$ son difíciles de implementar en la práctica, y es por esto que se tiene interés en controles en espacios más prácticos como continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos. Controles en estos espacios los exploraremos en las siguientes secciones.

2.3. Control vía disparo múltiple modificado

2.3.1. Controles continuos lineales por pedazos

Un control continuo lineal por pedazos es aquel que en cada uno de los subintervalos I_j es un segmento de recta definido de la siguiente forma

$$\mathbf{v}_j(t) = q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}, \quad (2.38)$$

donde para $t \in I_j$

$$q_j^1 = \frac{\tau_{j+1} - t}{\tau_{j+1} - \tau_j}, \quad q_j^2 = \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}, \quad (2.39)$$

y las \mathbf{c}_j , para $j = 1, \dots, ns + 1$, son constantes. Las funciones de (2.39) son rectas que pasan por los puntos (τ_j, \mathbf{c}_j) y $(\tau_{j+1}, \mathbf{c}_{j+1})$, lo cual se puede apreciar mejor en el siguiente desarrollo:

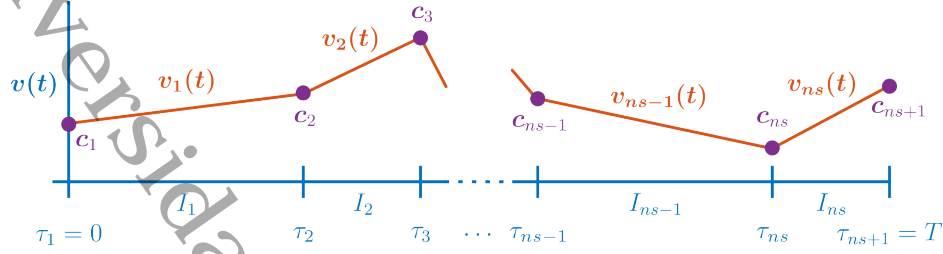
Considérese primero la recta en el plano $t\mathbf{c}$ que pasa por los puntos $A = (\tau_j, \mathbf{c}_j)$ y $B = (\tau_{j+1}, \mathbf{c}_{j+1})$. Si se toma un punto $C = (t, \mathbf{v}(t))$ sobre la recta y entre los puntos dados, se puede obtener la ecuación de la recta igualando la pendiente de A a C con la pendiente de C a B ; desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{c} - \mathbf{c}_j}{t - \tau_j} &= \frac{\mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}}{\tau_{j+1} - t} \\ (\mathbf{c} - \mathbf{c}_j)(\tau_{j+1} - t) &= (t - \tau_j)(\mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}) \\ \mathbf{c}(\tau_{j+1} - t) - \mathbf{c}_j(\tau_{j+1} - t) &= (t - \tau_j)\mathbf{c}_{j+1} - (t - \tau_j)\mathbf{c} \\ \mathbf{c}(\tau_{j+1} - t) + \mathbf{c}(t - \tau_j) &= (t - \tau_j)\mathbf{c}_{j+1} + (\tau_{j+1} - t)\mathbf{c}_j \\ \mathbf{c}(\tau_{j+1} - \tau_j) &= (\tau_{j+1} - t)\mathbf{c}_j + (t - \tau_j)\mathbf{c}_{j+1} \\ \mathbf{c} = \mathbf{v}_j(t) &= \frac{\tau_{j+1} - t}{\tau_{j+1} - \tau_j} \mathbf{c}_j + \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} \mathbf{c}_{j+1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En la Figura 13 se muestra una ilustración de una función continua lineal por pedazos.

Figura 13

Ilustración de control lineal por pedazos definido por los c_j



Nota. Aunque el control es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Así, un control continuo lineal por pedazos se puede caracterizar por el vector de $ns + 1$ constantes $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{ns+1})$.

Para controles continuos lineales por pedazos se tiene la siguiente proposición que proporciona una representación para la parte del gradiente asociada al control.

Proposición 2.3.1 . Sea $\eta > 0$ una constante, \mathbf{p}_j una función vectorial diferenciable en el intervalo I_j , para $j = 1, \dots, ns$, y sea \mathbf{v}_j una función vectorial lineal en el intervalo I_j definida como en (2.38), entonces, se cumple que

$$\int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt = \left(\int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt \right) \cdot \delta \mathbf{c}_j + \left(\int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt \right) \cdot \delta \mathbf{c}_{j+1}. \quad (2.41)$$

Demostración. Sea \mathbf{v}_j una función lineal en I_j definida como en (2.38), entonces

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_j &= q_j^1 (\mathbf{c}_j + \delta \mathbf{c}_j) + q_j^2 (\mathbf{c}_{j+1} + \delta \mathbf{c}_{j+1}) - (q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) \\ &= q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^1 \delta \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1} + q_j^2 \delta \mathbf{c}_{j+1} - q_j^1 \mathbf{c}_j - q_j^2 \mathbf{c}_{j+1} \\ &= q_j^1 \delta \mathbf{c}_j + q_j^2 \delta \mathbf{c}_{j+1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt &= \int_{I_j} [(\eta v_{j,1} + p_{j,1}) \delta v_{j,1} + (\eta v_{j,2} + p_{j,2}) \delta v_{j,2} + (\eta v_{j,3} + p_{j,3}) \delta v_{j,3}] dt \\
&= \int_{I_j} [(\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) (q_j^1 \delta c_{j,1} + q_j^2 \delta c_{j+1,1}) \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) (q_j^1 \delta c_{j,2} + q_j^2 \delta c_{j+1,2}) \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,3} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) (q_j^1 \delta c_{j,3} + q_j^2 \delta c_{j+1,3})] dt \\
&= \int_{I_j} [(\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) q_j^1 \delta c_{j,1} \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) q_j^2 \delta c_{j+1,1} \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) q_j^1 \delta c_{j,2} \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) q_j^2 \delta c_{j+1,2} \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,3} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) q_j^1 \delta c_{j,3} \\
&\quad + (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) q_j^2 \delta c_{j+1,3}] dt \\
&= \int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) \delta c_{j,1} dt \\
&\quad + \int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) \delta c_{j,2} dt \\
&\quad + \int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,3} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) \delta c_{j,3} dt \\
&\quad + \int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) \delta c_{j+1,1} dt \\
&\quad + \int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) \delta c_{j+1,2} dt \\
&\quad + \int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) \delta c_{j+1,3} dt,
\end{aligned}$$

(2.43)

como $\delta c_{j,1}, \delta c_{j,2}, \delta c_{j,3}, \delta c_{j+1,1}, \delta c_{j+1,2}$ y $\delta c_{j+1,3}$ son constantes en I_j , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt &= \left(\int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) dt \right) \delta c_{j,1} \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) dt \right) \delta c_{j,2} \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^1 (\eta(q_j^1 c_{j,3} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) dt \right) \delta c_{j,3} \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,1} + q_j^2 c_{j+1,1}) + p_{j,1}) dt \right) \delta c_{j+1,1} \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,2} + q_j^2 c_{j+1,2}) + p_{j,2}) dt \right) \delta c_{j+1,2} \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^2 (\eta(q_j^1 c_{j,3} + q_j^2 c_{j+1,3}) + p_{j,3}) dt \right) \delta c_{j+1,3}, \\
 &= \left(\int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt \right) \cdot \delta \mathbf{c}_j \\
 &+ \left(\int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt \right) \cdot \delta \mathbf{c}_{j+1}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

■

Corolario 2.3.1 (Al Teorema 2.2.1). Para el caso de controles continuos lineales por pedazos, el gradiente del funcional J en (2.11) tiene un representante en $(\mathbb{R}^3)^{2ns}$ dado por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{n_s+1}} J(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{n_s}} J(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{n_s} + B_{n_s-1} \\ B_{n_s} \\ \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{n_s}(\tau_{n_s}) - k(\boldsymbol{\psi}_{n_s-1}(\tau_{n_s}) - \mathbf{s}_{n_s}) \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

donde

$$\begin{aligned} A_j &:= \int_{I_j} q_j^1 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \\ B_j &:= \int_{I_j} q_j^2 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \end{aligned} \quad (2.46)$$

y \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j) \mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (2.47)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \mathbf{s}_j. \end{cases} \quad (2.48)$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} A_j &:= \int_{I_j} q_j^1 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \\ B_j &:= \int_{I_j} q_j^2 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt. \end{aligned} \quad (2.49)$$

De la segunda igualdad de (2.36) y por la Proposición 2.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \delta J(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \sum_{j=2}^{ns} (\Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) - k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j)) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \sum_{j=1}^{ns} A_j \cdot \delta \mathbf{c}_j + B_j \cdot \delta \mathbf{c}_{j+1} + \sum_{j=2}^{ns} (\Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) - k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j)) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \\ \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) - k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix} \cdot \delta \mathbf{x}. \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el caso de controles continuos lineales por pedazos, el gradiente del funcional $J(\mathbf{x})$ en (2.11) tendrá una representación en $(\mathbb{R}^3)^{2ns}$ dada por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns+1}} J(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{ns}} J(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \\ \Gamma \mathbf{p}_2(\tau_2) - k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \Gamma \mathbf{p}_{ns}(\tau_{ns}) - k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Observación 2.3.1 . Se usa la notación $\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{x})$ o $\nabla_{\mathbf{s}_j} J(\mathbf{x})$ para referirse a la componente del vector gradiente asociada a \mathbf{c}_j o \mathbf{s}_j respectivamente. ■

Se realizó un programa¹ para resolver con el algoritmo BFGS el problema de optimización definido en la metodología de disparo múltiple, aunque no se obtuvieron resultados satisfactorios ya que no se logró que, con el control obtenido en cada intervalo I_j , el sistema de estado llegara a los s_{j+1} objetivo, de forma que al aplicar todo el control en el intervalo $[0, T]$ el sistema de estado no lograba hacer la transición al estado objetivo ψ_T . Para resolver este problema, se realizó la siguiente modificación al método de disparo múltiple. En lugar de resolver

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_j}{dt} + \mathbf{K}\psi_j + \text{sen } \psi_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \psi_j(\tau_j) = \mathbf{s}_j. \end{cases} \quad (2.52)$$

se resuelve, para $j = 1$

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_1}{dt} + \mathbf{K}\psi_1 + \text{sen } \psi_1 = \mathbf{i} + \mathbf{v}_1, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \psi_1(\tau_1) = \psi_0, \end{cases} \quad (2.53)$$

y para $j = 2, \dots, ns$

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_j}{dt} + \mathbf{K}\psi_j + \text{sen } \psi_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \psi_j(\tau_j) = \psi_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (2.54)$$

Corolario 2.3.2 (Al Teorema 2.2.1). Para el caso de controles continuos lineales por pedazos y considerando las modificaciones en (2.53) y (2.54), el gradiente del funcional J en (2.11)

¹Programa elaborado en MATLAB ubicado en la ruta Programas tesis/Transición/Transición controles pp DM y BFGS/Main controles_pp_DM.m.

tiene un representante en $(\mathbb{R}^3)^{2ns}$ dado por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns+1}} J(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{ns}} J(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \\ -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

donde

$$\begin{aligned} A_j &:= \int_{I_j} q_j^1 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \\ B_j &:= \int_{I_j} q_j^2 [\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j] dt = \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \end{aligned} \quad (2.56)$$

y \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j) \mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (2.57)$$

$\boldsymbol{\psi}_{j=1}$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \boldsymbol{\psi}_0, \end{cases} \quad (2.58)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (2.59)$$

Demostración. Realizando un análisis de perturbación, considerando los cambios menciona-

dos en (2.53) y (2.54), se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \delta J(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt - \sum_{j=2}^{ns} k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt - k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\
 &= \left(\begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{pmatrix}, \delta \mathbf{v} \right)_{(L^2_{pw}(0,T))^3} \\
 &\quad + \left(\begin{pmatrix} -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}, \delta \mathbf{s} \right)_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}},
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde $(\cdot, \cdot)_{(L^2_{pw}(0,T))^3}$ denota el producto interno en $(L^2_{pw}(0, T))^3$ y $(\cdot, \cdot)_{(\mathbb{R}^3)^{ns-1}}$ el producto interno en $(\mathbb{R}^3)^{ns-1}$. Así, el representante del gradiente, considerando las modificaciones en (2.53) y (2.54) y la Proposición 2.3.1, está dado por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{c_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{c_{ns+1}} J(\mathbf{v}) \\ \nabla_{s_2} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{s_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \\ -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

■

Note que en el gradiente (2.61) ya no están los términos $\Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j)$ que aparecían en el gradiente (2.37), esto se debe a que con esta modificación cada funcional J_j ya no depende de s_j . En el Algoritmo 3 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional (2.11) con controles continuos lineales por pedazos, tomando en cuenta los cambios

antes mencionados.

Se realizó un programa² basado en el Algoritmo 3. Este programa incluye también la búsqueda de controles constantes por pedazos, lo cual se describe en la siguiente subsección. Con este programa, usando controles continuos lineales por pedazos, se obtuvieron los resultados que se muestran más adelante.

Para todos los experimentos numéricos de esta sección, se va a tomar al vector inicial x^0 como $x^0 = (c^0, s^0)$ con c^0 una matriz de $3 \times ns + 1$ ceros y s^0 como puntos sobre el segmento de recta que une los estados ψ_0 y ψ_T , evaluados en los nodos τ_j . La fórmula utilizada es

$$s_j^0 = \frac{(\tau_{ns+1} - \tau_j)\psi_0 + (\tau_j - \tau_1)\psi_T}{\tau_{ns+1} - \tau_1}. \quad (2.62)$$

En todos los experimentos que se presentan en los capítulos de esta tesis se emplea un método sin derivadas para resolver los problemas de búsqueda en línea, el cual se describe en el Apéndice E. El motivo por el cual se hizo esta elección es que se identificó en experimentos preliminares que el funcional (2.11), en algunos casos, no es estrictamente convexo y en algunas regiones casi pierde la diferenciabilidad, por lo cual los métodos con derivadas, como Newton o incluso el método de la secante, no resuelven de buena forma los PBL.

Los siguientes datos y parámetros fueron los mismos en todos los experimentos numéricos de este capítulo:

- $N = 1,000$,
- $ns = 4$,
- $T = 20$,
- $\eta = 1$,
- $k = 10$,
- $v^0(t) = 0$,
- $\varepsilon_1 = 1 \times 10^{-3}$ (tolerancia para el BFGS),

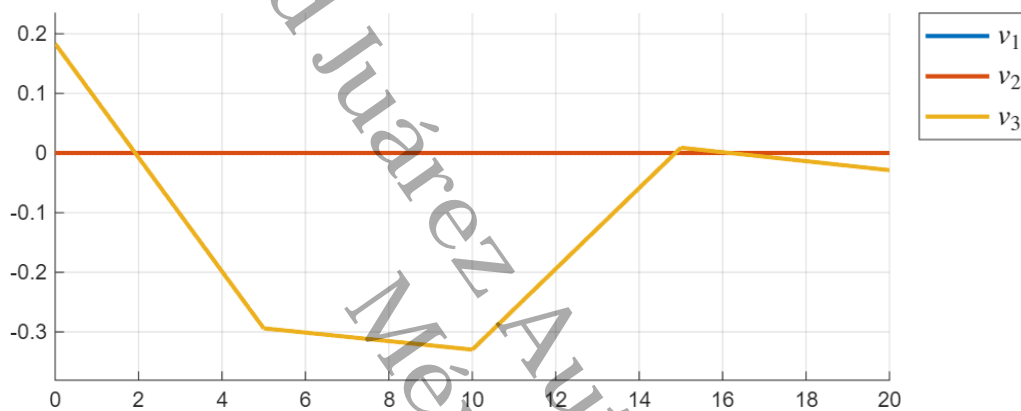
²Programa elaborado en MATLAB ubicado en la ruta Programas de tesis/Transición/Transición controles pp con DMM y BFGS/Main_controles_pp_DMM.m.

- $\varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$ (tolerancia para la búsqueda en línea).

Ejemplo 2.3.1 (Operador de escritura del 1 continuo lineal por pedazos). Sea $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. En este caso, el algoritmo BFGS, para controles continuos lineales por pedazos, convergió en 270 iteraciones. El control obtenido es el que se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Control continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a E_1

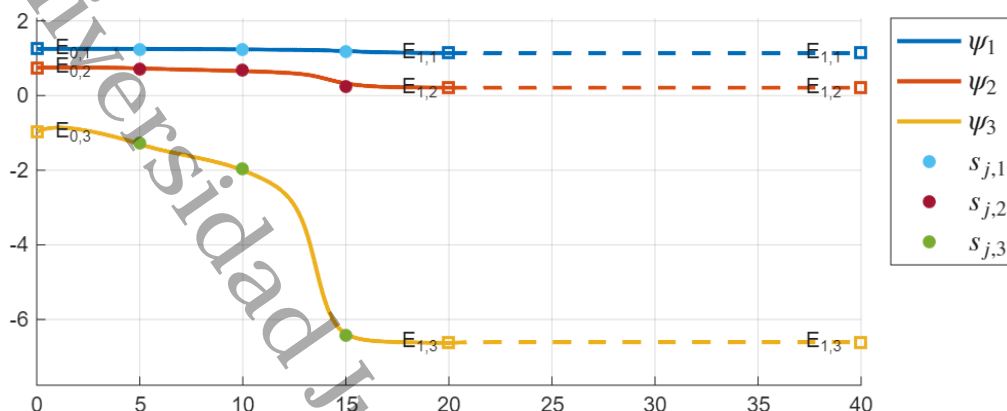


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 15 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 14. Se puede observar que el sistema llega de forma exitosa al estado final $\psi_T = E_1$ al tiempo $t = 20$.

Figura 15

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 14 y $\psi_0 = E_0$

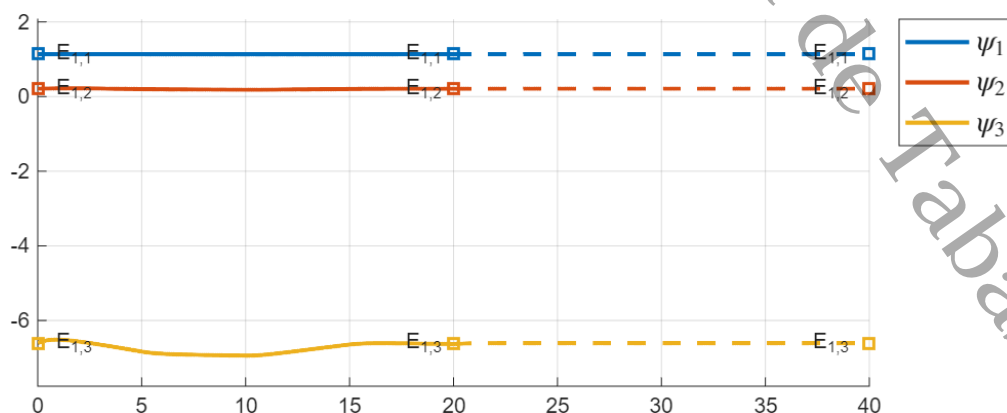


Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control continuo lineal por pedazos de la Figura 14, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 16 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 14 pero partiendo desde el estado final E_1 .

Figura 16

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 14 y $\psi_0 = E_1$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control continuo lineal por pedazos de la Figura 14, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en

el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponder a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

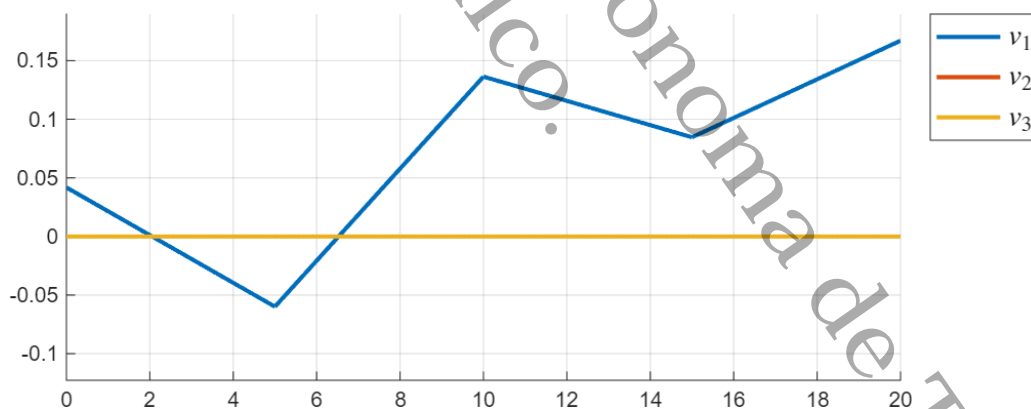
En la Figura 16 se puede ver que el sistema hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado final E_1 al tiempo $t = 20$, por lo tanto, el control de la Figura 14 es un operador de escritura del 1. \square

Cabe mencionar, que también se obtuvo un operador de escritura del 0, aunque no se incluye para no extender demasiado el material de esta tesis.

Ejemplo 2.3.2 (Control continuo lineal por pedazos para transitar del equilibrio estable E_0 al inestable θ_{i_1}). Sea $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = \theta_{i_1}$ y el control solo con la junta 1. En este caso, el algoritmo BFGS no convergió en 300 iteraciones, pero el criterio de paro sí se acercó a la tolerancia estacionándose alrededor del valor 0.0012. El control obtenido se muestra en la Figura 17.

Figura 17

Control continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1}

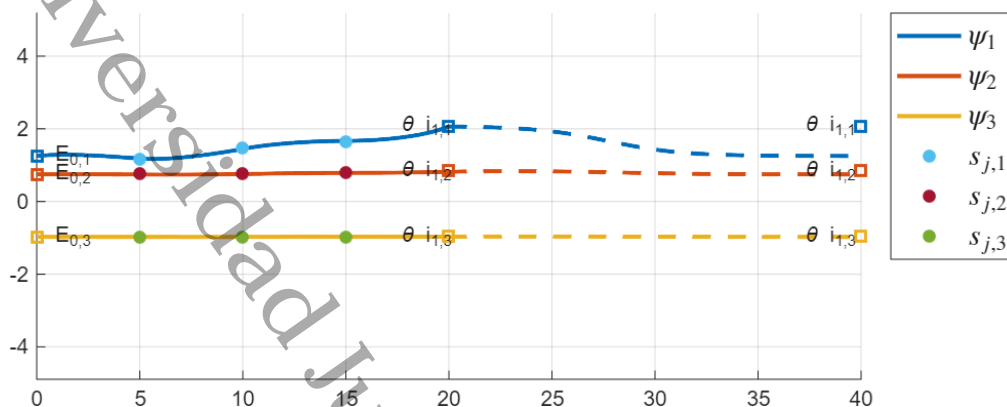


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 18 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 17 partiendo desde E_0 .

Figura 18

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 17 y $\psi_0 = E_0$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control continuo lineal por pedazos de la Figura 17, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 18 se puede observar que, bajo la influencia del control de la Figura 17, el sistema transita del estado inicial (estable) $\psi_0 = E_0$ al estado final objetivo (inestable) $\psi_T = \theta_{i_2}$ en el intervalo de control $[0, 20]$. A partir del tiempo $t = 20$ se grafican con líneas discontinuas las series de tiempo del sistema sin control partiendo desde el punto al que llega el sistema tras controlar; se puede apreciar que el sistema se aleja del estado final θ_{i_1} , lo cual era de esperar ya que el estado θ_{i_1} es un equilibrio inestable. □

2.3.2. Controles constantes por pedazos

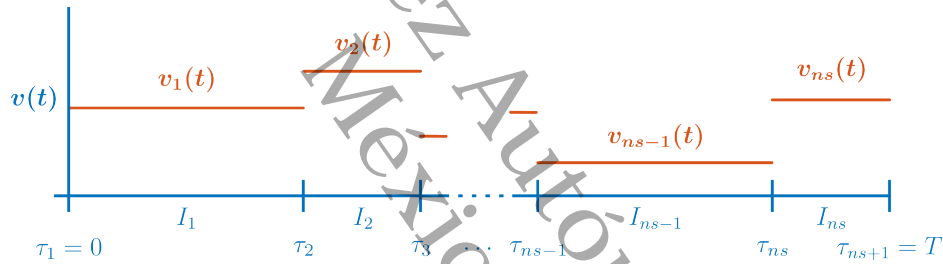
Para el caso de controles constantes por pedazos, un control $v(t)$ está definido de la siguiente forma

$$v(t) = \begin{cases} v_{j=1}(t) = c_{j=1}, & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ v_{j=2}(t) = c_{j=2}, & \text{si } t \in [\tau_2, \tau_3), \\ \vdots \\ v_{j=ns}(t) = c_{j=ns}, & \text{si } t \in [\tau_{ns}, \tau_{ns+1}), \end{cases} \quad (2.63)$$

donde las c_j , para $j = 1, \dots, ns$, son constantes (ver Figura 19).

Figura 19

Ilustración de control constante por pedazos



Nota. Aunque el control es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Así, un control constante por pedazos se puede definir por el siguiente vector de ns constantes

$$c = (c_1, \dots, c_{ns}). \quad (2.64)$$

Para controles constantes por pedazos se tiene la siguiente proposición que proporciona una representación para la parte del gradiente asociada al control.

Proposición 2.3.2 . Sea $\eta > 0$ una constante, p_j una función vectorial diferenciable en el intervalo I_j , para $j = 1, \dots, ns$, y sea $v_j = c_j$ una función constante en I_j , entonces, se cumple que

$$\int_{I_j} (\eta v_j + p_j) \cdot \delta v_j dt = \int_{I_j} (\eta c_j + p_j) dt \cdot \delta c_j. \quad (2.65)$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt &= \int_{I_j} [(\eta v_{j,1} + p_{j,1}) \delta v_{j,1} + (\eta v_{j,2} + p_{j,2}) \delta v_{j,2} + (\eta v_{j,3} + p_{j,3}) \delta v_{j,3}] dt \\
 &= \int_{I_j} [(\eta c_{j,1} + p_{j,1}) \delta c_{j,1} + (\eta c_{j,2} + p_{j,2}) \delta c_{j,2} + (\eta c_{j,3} + p_{j,3}) \delta c_{j,3}] dt \\
 &= \int_{I_j} (\eta c_{j,1} + p_{j,1}) \delta c_{j,1} dt + \int_{I_j} (\eta c_{j,2} + p_{j,2}) \delta c_{j,2} dt \\
 &\quad + \int_{I_j} (\eta c_{j,3} + p_{j,3}) \delta c_{j,3} dt,
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

como $\delta c_{j,1}$, $\delta c_{j,2}$ y $\delta c_{j,3}$ son constantes en I_j , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt &= \left(\int_{I_j} (\eta c_{j,1} + p_{j,1}) dt \right) \delta c_{j,1} + \left(\int_{I_j} (\eta c_{j,2} + p_{j,2}) dt \right) \delta c_{j,2} \\
 &\quad + \left(\int_{I_j} (\eta c_{j,3} + p_{j,3}) dt \right) \delta c_{j,3} \\
 &= \int_{I_j} (\eta \mathbf{c}_j + \mathbf{p}_j) dt \cdot \delta \mathbf{c}_j.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

■

Corolario 2.3.3 (Al Teorema 2.2.1). Para el caso de controles constantes por pedazos y considerando las modificaciones en (2.53) y (2.54), el gradiente del funcional J en (2.11) tiene un representante en $(\mathbb{R}^3)^{2ns-1}$ dado por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns}} J(\mathbf{v}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \\ -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

donde \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (2.69)$$

$\boldsymbol{\psi}_{j=1}$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \boldsymbol{\psi}_0, \end{cases} \quad (2.70)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (2.71)$$

Demostración. De la segunda igualdad de (2.60) y por la Proposición 2.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt - \sum_{j=2}^{ns} k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{c}_j + \mathbf{p}_j) dt \cdot \delta \mathbf{c}_j - \sum_{j=2}^{ns} k(\boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j) - \mathbf{s}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j \\ &= \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \\ -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix} \cdot \delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Por lo tanto, para el caso de controles constantes por pedazos, el gradiente del funcional $J(\mathbf{x})$

en (2.11) tiene una representación en $(\mathbb{R}^3)^{2ns-1}$ dada por

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns}} J(\mathbf{v}) \\ \nabla_{\mathbf{s}_2} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{s}_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \\ -k(\boldsymbol{\psi}_1(\tau_2) - \mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ -k(\boldsymbol{\psi}_{ns-1}(\tau_{ns}) - \mathbf{s}_{ns}) \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

■

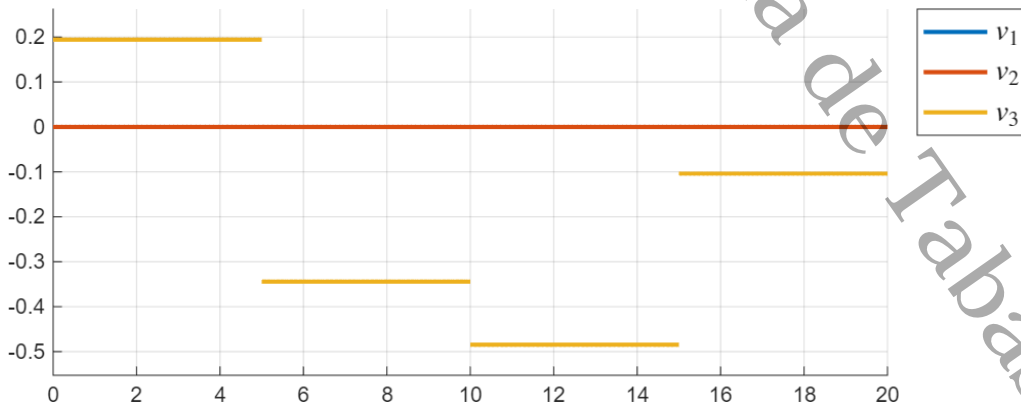
En el Algoritmo 5 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional (2.11) con controles constantes por pedazos.

Se usó nuevamente el programa mencionado anteriormente, pero esta vez para controles constantes por pedazos (asignando a la variable `tipo_control` el valor de 2). Enseguida se muestran algunos experimentos numéricos usando el algoritmo anterior.

Ejemplo 2.3.3 (Operador de escritura del 1 constante por pedazos). Sea $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. Para este caso, el algoritmo BFGS convergió en 18 iteraciones. El control obtenido se presenta de la Figura 20.

Figura 20

Control constante por pedazos para transitar de E_0 a E_1

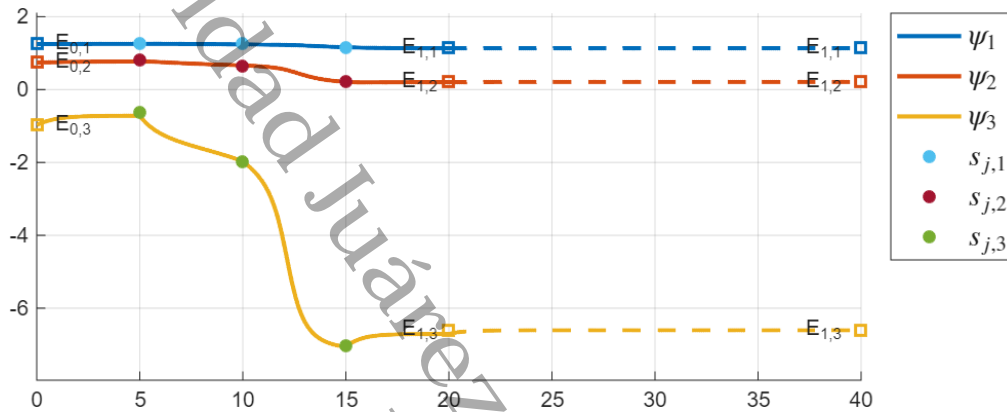


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 21 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 20. Se puede observar que el sistema transita de forma exitosa al estado final $\psi_T = E_1$.

Figura 21

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 20 y $\psi_0 = E_0$

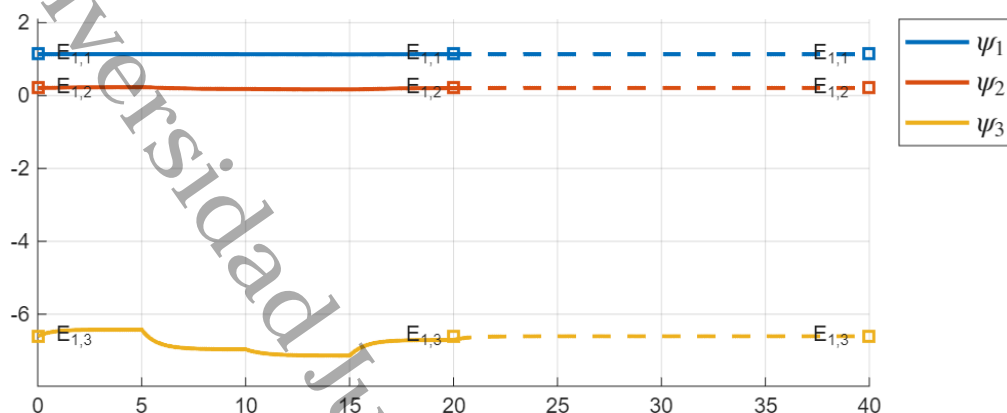


Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control continuo lineal por pedazos de la Figura 20, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 22 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 20 pero partiendo desde el estado final E_1 .

Figura 22

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 20 y $\psi_0 = E_1$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control constante por pedazos de la Figura 20, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponder a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

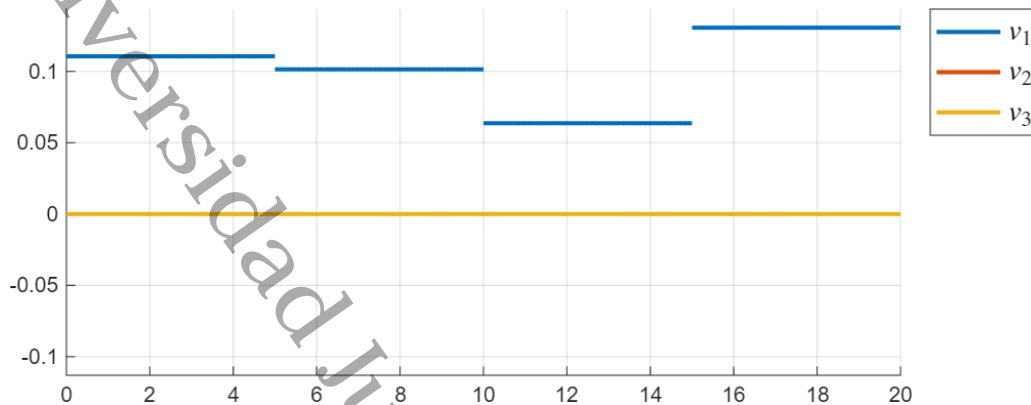
En la Figura 22 se puede apreciar que el sistema hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado, E_1 , por lo tanto, el control de la Figura 20 es un operador de escritura del 1. \square

Cabe mencionar que también se obtuvo un operador de escritura del 0, constante por pedazos, aunque no se incluyen las simulaciones por motivos de extensión.

Ejemplo 2.3.4 (Control constante por pedazos para transitar del equilibrio estable E_0 al inestable θ_{i_1}). Sea $\psi_0 = E_0, \psi_T = \theta_{i_1}$ y el control solo con la junta 1. En este caso, el algoritmo BFGS no convergió en 300 iteraciones, pero el criterio de paro sí se acercó a la tolerancia estacionándose alrededor del valor 0.0025. El control obtenido se muestra en la Figura 23.

Figura 23

Control constante por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1}

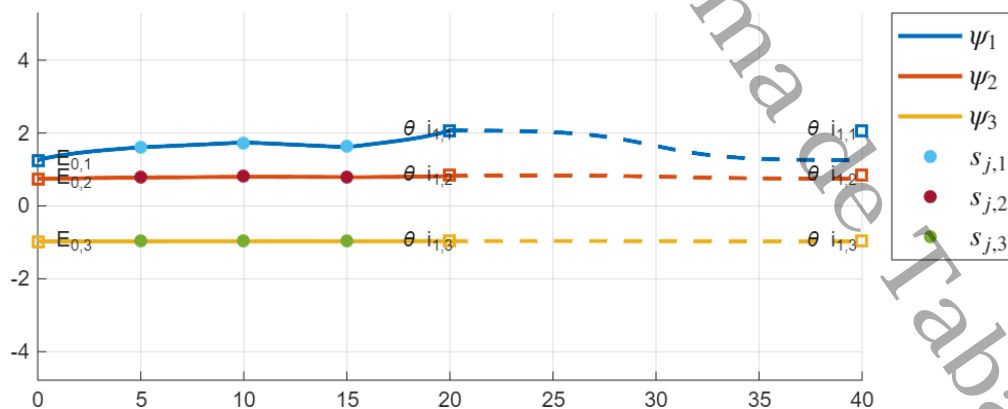


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 24 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 23 partiendo desde E_0 .

Figura 24

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 23 y $\psi_0 = E_0$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control constante por pedazos de la Figura 23, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del

intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 24 se puede observar que, por influencia del control de la Figura 23, el sistema, al tiempo $t = 20$, llega al estado final objetivo (inestable) $\psi_T = \theta_{i_1}$. \square

Con estos experimentos numéricos se concluye la presentación de esta metodología para la obtención de controles continuos lineales por pedazos y controles constantes por pedazos. A esta metodología de aquí en adelante se le llamará disparo múltiple modificado (DMM). En el siguiente capítulo se expone una variación de este método con la misma finalidad, obtener controles en los espacios mencionados.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Control del sistema JJAM vía DMM con parámetros de disparo fijos

En este capítulo se presenta cómo obtener controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$, controles continuos lineales por pedazos y también controles constantes por pedazos para transitar entre dos estados del sistema JJAM, usando la metodología de disparo múltiple modificado (DMM) presentada en el Capítulo 2, pero en este capítulo los parámetros de disparo s_j , para $j = 1, \dots, ns$, se toman fijos y definidos mediante la obtención previa de un control en $(L^2(0, T))^3$.

3.1. Controles en $(L^2_{pw}(0, T))^3$.

3.1.1. Presentación del método

Para encontrar controles por pedazos en $(L^2(0, T))^3$, los pasos son los siguientes:

Los primeros 2 pasos son los mismos que en el método de disparo múltiple presentado en la Sección 2.1.

Paso 3. Dados ψ_0 y ψ_T , se aplica el algoritmo BFGS para encontrar un control óptimo \hat{v} en $(L^2(0, T))^3$ tal que, $\hat{\psi}$, la solución del sistema de estado (1.12) con $v = \hat{v}$, satisfaga

$$\hat{\psi}(0) = \psi_0 \quad \text{y} \quad \hat{\psi}(T) = \psi_T. \quad (3.1)$$

Paso 4. Se definen los parámetros de disparo en cada subintervalo como

$$s_j := \hat{\psi}(\tau_j), \quad (3.2)$$

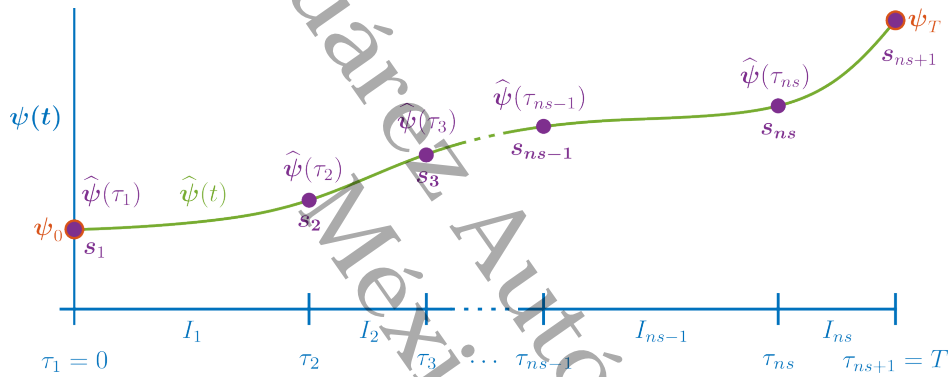
para $j = 1, \dots, ns$, y

$$s_{ns+1} := \psi_T, \quad (3.3)$$

como se ilustra en la siguiente figura.

Figura 25

Ilustración de la elección de los parámetros de disparo para cada subintervalo



Nota. Aunque el sistema considerado es tridimensional, en esta figura se representa únicamente una de las componentes.

Se quiere encontrar un control \mathbf{v}^* en $(L^2_{pw}(0, T))^3$ tal que, en cada uno de los intervalos I_j , para $j = 1, \dots, ns$, se tenga que ψ_j^* , la solución del sistema de estado en el intervalo I_j con $\mathbf{v} = \mathbf{v}_j^*$, satisfaga que

1. $\psi_j^*(\tau_j) = s_j$, para $j = 1, \dots, ns$,
2. $\psi_j^*(\tau_{j+1}) = s_{j+1}$, para $j = 1, \dots, ns$.

Para lograr esto, se realiza el siguiente y último paso.

Paso 5. (Problema de optimización) Encontrar \mathbf{v}^* en $(L^2_{pw}(0, T))^3$, tal que,

$$\mathbf{v}^* = \arg \min J(\mathbf{v}), \quad (3.4)$$

donde

$$J(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{ns} J_j(\mathbf{v}_j), \quad (3.5)$$

y para cada $j=1, \dots, ns$,

$$J_j(\mathbf{v}_j) = \frac{\eta}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2, \quad \text{si } t \in I_j, \quad (3.6)$$

donde $\boldsymbol{\psi}_{j=1}$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \mathbf{s}_{j=1}, \end{cases} \quad (3.7)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (3.8)$$

Para poder minimizar el funcional (3.5) aplicando el algoritmo BFGS se necesita conocer su gradiente, el cual se calcula a continuación realizando un análisis de perturbación.

3.1.2. Cálculo del gradiente del funcional J

Teorema 3.1.1 . El funcional J en (3.5) es Frechet diferenciable en $(L_{pw}^2(0, T))^3$ y su derivada $DJ(\mathbf{v})$ aplicada a $\mathbf{w} \in (L_{pw}^2(0, T))^3$ es

$$\langle DJ(\mathbf{v}(t)), (\mathbf{w}(t)) \rangle = \left(\left(\begin{array}{c} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{array} \right), \mathbf{w} \right)_{((L^2(0, T))^3)^{ns}}, \quad (3.9)$$

donde $(\cdot, \cdot)_{(L^2_{pw}(0,T))^3}$ denota el producto interno en $(L^2_{pw}(0, T))^3$ y \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (3.10)$$

$\boldsymbol{\psi}_{j=1}$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \mathbf{s}_{j=1}, \end{cases} \quad (3.11)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (3.12)$$

Demostración. Para el funcional $J(\mathbf{v})$ en (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &= \delta \sum_{j=1}^{ns} J_j(\mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \delta J_j(\mathbf{v}_j) \quad (\text{Proposición B.1.1}) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \delta \left(\frac{\eta}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \left(\frac{\eta}{2} \delta \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) \quad (\text{Proposición B.1.1}) \quad (3.13) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \left(\frac{\eta}{2} \int_{I_j} \delta \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 \right) \quad (\text{Proposición B.1.4}) \\ &\approx \sum_{j=1}^{ns} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j(t) \cdot \delta \mathbf{v}_j(t) dt \right. \\ &\quad \left. + k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) \right) \quad (\text{Proposición B.1.3}) \end{aligned}$$

donde $\delta\psi_j$ se aproxima por la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} + \mathbf{K}\delta\psi_j + C(\psi_j)\delta\psi_j = \delta\mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \delta\psi_j(\tau_j) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Ahora, se introduce una función vectorial $\mathbf{p}_j(t) = (p_{j1}(t), p_{j2}(t), p_{j3}(t))$, que se supone diferenciable sobre todo I_j . Multiplicando ambos lados del sistema diferencial (3.14) por la función vectorial \mathbf{p}_j e integrando sobre I_j se obtiene

$$\int_{I_j} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} \cdot \mathbf{p}_j dt + \int_{I_j} \mathbf{K}\delta\psi_j \cdot \mathbf{p}_j dt + \int_{I_j} C(\psi_j)\delta\psi_j \cdot \mathbf{p}_j dt = \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta\mathbf{v}_j dt, \quad t \in I_j. \quad (3.15)$$

Integrando por partes el primer término se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \Gamma \frac{d\delta\psi_j}{dt} \cdot \mathbf{p}_j dt &= \Gamma \mathbf{p}_j \cdot \delta\psi_j \Big|_{I_j} - \int_{I_j} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta\psi_j dt \\ &= \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta\psi_j(\tau_{j+1}) - \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta\psi_j(\tau_j) - \int_{I_j} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta\psi_j dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por la condición inicial de (3.14) se tiene que $\Gamma \mathbf{p}_j(\tau_j) \cdot \delta\psi_j(\tau_j) = \mathbf{0}$, por lo tanto, se puede reescribir (3.15), tras reordenar los términos, como

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta\mathbf{v}_j dt &= \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta\psi_j(\tau_{j+1}) - \int_{I_j} \Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \cdot \delta\psi_j \\ &\quad + \int_{I_j} \mathbf{K}\mathbf{p}_j \cdot \delta\psi_j dt + \int_{I_j} C(\psi_j)\mathbf{p}_j \cdot \delta\psi_j dt \\ &= \Gamma \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) \cdot \delta\psi_j(\tau_{j+1}) + \int_{I_j} \left[-\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\psi_j)\mathbf{p}_j \right] \cdot \delta\psi_j dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Supóngase que la función \mathbf{p}_j es solución del siguiente sistema (sistema adjunto)

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\psi_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\psi_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (3.18)$$

entonces, de (3.17) y (3.18) se obtiene que

$$\int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt = k(\psi_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \psi_j(\tau_{j+1}). \quad (3.19)$$

De (3.13) y (3.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j(t) \cdot \delta \mathbf{v}_j(t) dt + k(\psi_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}) \cdot \delta \psi_j(\tau_{j+1}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \left(\int_{I_j} \eta \mathbf{v}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt + \int_{I_j} \mathbf{p}_j \cdot \delta \mathbf{v}_j dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{v}_j + \mathbf{p}_j) \cdot \delta \mathbf{v}_j dt \\ &= \left(\begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{pmatrix}, \delta \mathbf{v} \right)_{((L^2_{pw}(0,T))^3)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, el funcional J en (3.5) es Frechet diferenciable y su gradiente está dado por

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \eta \mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \eta \mathbf{v}_{ns} + \mathbf{p}_{ns} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

3.2. Controles continuos lineales por pedazos

Para controles continuos lineales por pedazos, un control $\mathbf{v}(t)$ se puede definir en términos del vector de $ns + 1$ constantes $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{ns+1})$ tomando

$$\mathbf{v}_j(t) = q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}, \quad (3.22)$$

donde para $t \in I_j$,

$$q_j^1 = \frac{\tau_{j+1} - t}{\tau_{j+1} - \tau_j}, \quad q_j^2 = \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}. \quad (3.23)$$

Corolario 3.2.1 (Al Teorema 3.1.1). Para el caso de controles continuos lineales por pedazos, el gradiente del funcional J en (3.5) tiene un representante en $(\mathbb{R}^3)^{ns+1}$ dado por

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns+1}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} A_j &:= \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \\ B_j &:= \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \end{aligned} \quad (3.25)$$

\mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (3.26)$$

$\boldsymbol{\psi}_{j=1}$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \mathbf{s}_{j=1}, \end{cases} \quad (3.27)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (3.28)$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} A_j &:= \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt, \\ B_j &:= \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}) + \mathbf{p}_j] dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

De la segunda igualdad de (3.20) y por la Proposición 2.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} [A_j \cdot \delta \mathbf{c}_j + B_j \cdot \delta \mathbf{c}_{j+1}] \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \end{pmatrix} \cdot \delta \mathbf{c}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por lo tanto, en este caso el gradiente de $J(\mathbf{v})$ de (3.5) tiene una representación en $(\mathbb{R}^3)^{ns+1}$ dada por

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns+1}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ \vdots \\ A_{ns} + B_{ns-1} \\ B_{ns} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

■

Como ya se tiene el gradiente del funcional para el caso de controles continuos lineales por pedazos, entonces, ya se puede aplicar el algoritmo BFGS para minimizarlo. En el Algoritmo 6 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional $J(\mathbf{v})$ de (3.5) sobre el espacio de controles continuos lineales por pedazos.

Se desarrolló un programa¹ que implementa el Algoritmo 6. A continuación, se presentan algunos ejemplos numéricos de controles continuos lineales por pedazos obtenidos con dicho programa.

¹Programa elaborado en MATLAB ubicado en la ruta Programas de tesis/Transición/Transición controles pp con DMF y BFGS/Main_controles_pp_DMF.m.

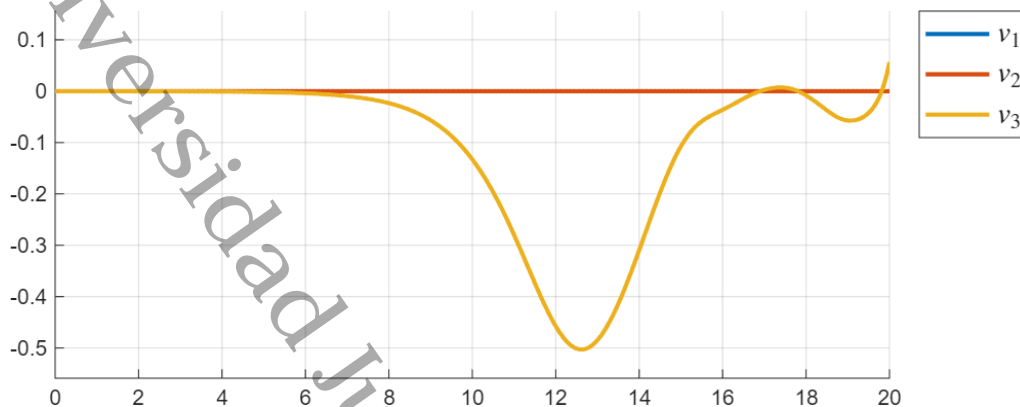
Los siguientes datos y parámetros fueron los mismos en todos los experimentos numéricos de este capítulo:

- $N = 1,000$,
- $ns = 4$,
- $T = 20$,
- $\eta = 1$,
- $k = 10$,
- $v^0(t) = 0$,
- $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-5}$ (tolerancia para el BFGS con controles en $(L^2(0, T))^3$),
- $\varepsilon_1 = 1 \times 10^{-3}$ (tolerancia para el BFGS con controles por pedazos),
- $\varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$ (tolerancia para la búsqueda en línea).

Ejemplo 3.2.1 (Operador de escritura del 1 continuo lineal por pedazos). Sean $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. Cuando se aplicó el algoritmo BFGS para controles en $(L^2(0, T))^3$ se obtuvo el control de la Figura 26.

Figura 26

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1

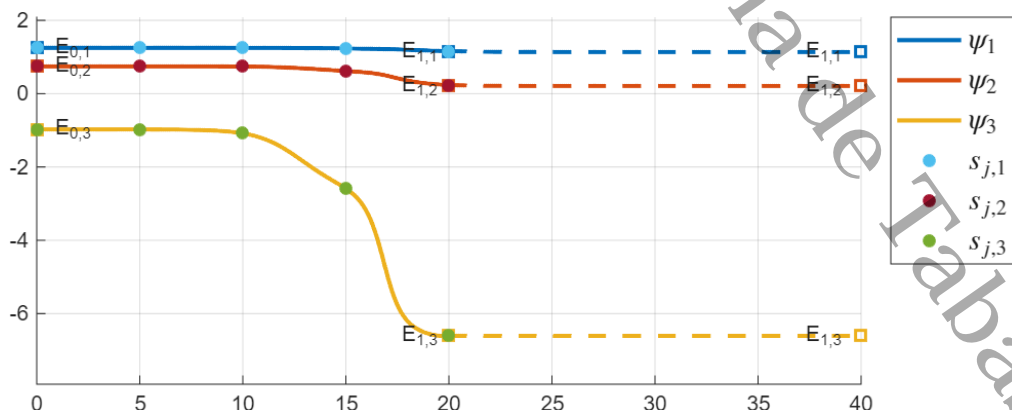


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

Para definir los parámetros de disparo, s_j , en cada subintervalo, se hace uso de la solución del sistema JJA bajo la influencia del control de la Figura 26. Así, los parámetros de disparo, en este caso, son los que se muestran con puntos en la Figura 27.

Figura 27

Selección de los parámetros de disparo s_j



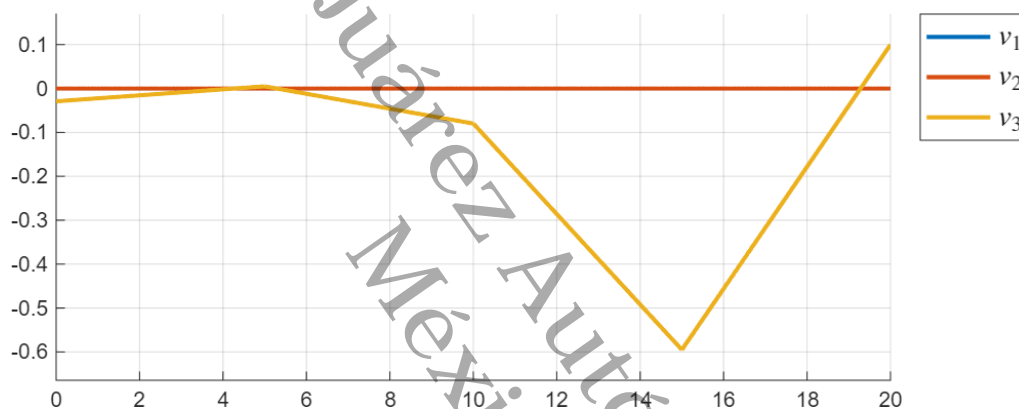
Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 26, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no

controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

Ya teniendo los s_j , se procede a minimizar el funcional para controles continuos lineales por pedazos con el algoritmo BFGS. En este caso, el algoritmo BFGS convergió en la iteración 7. El control obtenido se muestra en la Figura 28.

Figura 28

Control óptimo lineal por pedazos para transitar de E_0 a E_1

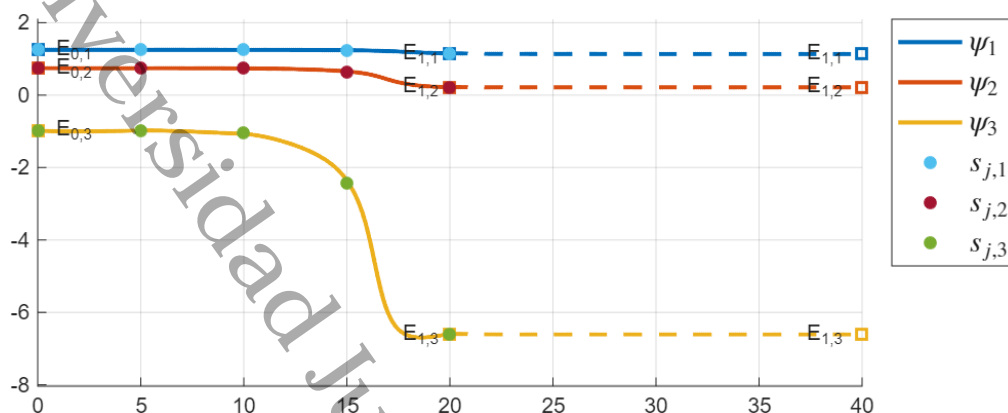


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 29 se grafican las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control óptimo de la Figura 28. Se puede ver que el sistema transita de forma exitosa al estado final E_1 .

Figura 29

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 28 y $\psi_0 = E_0$

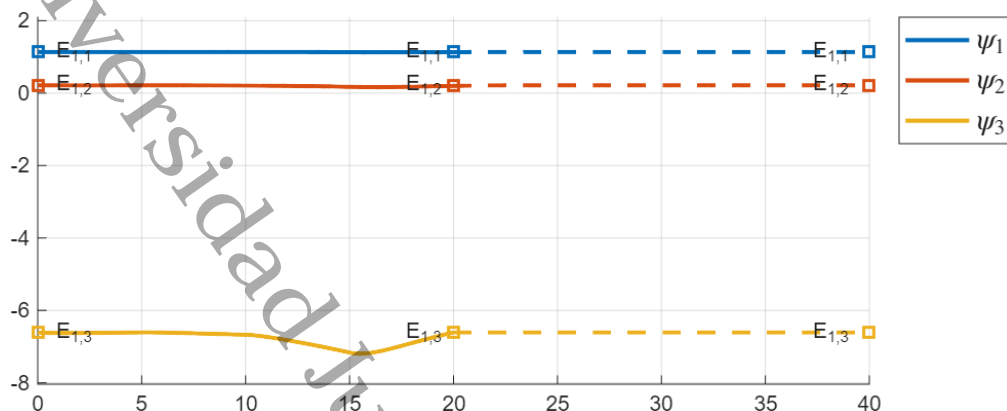


Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control continuo lineal por pedazos de la Figura 28, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 30 se grafican las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control óptimo de la Figura 28 y $\psi_0 = E_1$. Se puede ver que la solución hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado E_1 , por lo tanto, este control es un operador de escritura del 1.

Figura 30

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 28 y $\psi_0 = E_1$



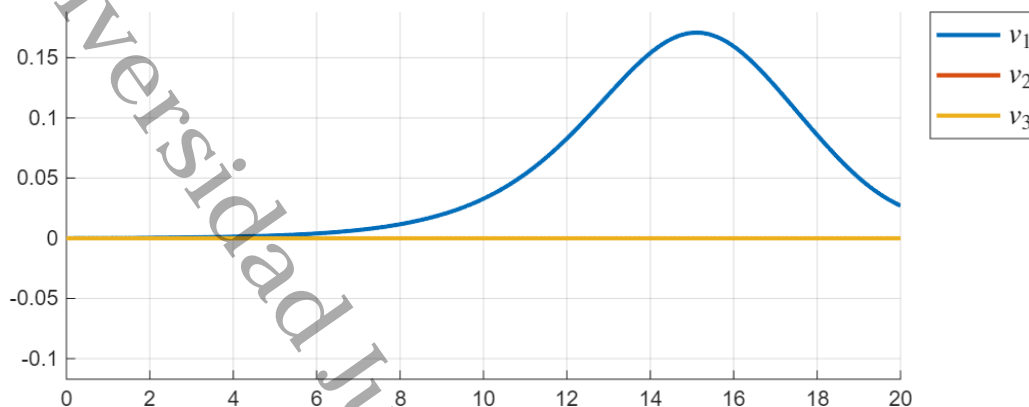
Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control continuo lineal por pedazos de la Figura 28, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

□

Ejemplo 3.2.2 (Control continuo lineal por pedazos para transitar del equilibrio estable E_0 al inestable θ_{i_1}). Sea $\psi_0 = E_0, \psi_T = \theta_{i_1}$ y se controla solo con la junta 1. Cuando se aplicó el algoritmo BFGS para controles en $(L^2(0, T))^3$ se obtuvo el control de la Figura 31.

Figura 31

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1}

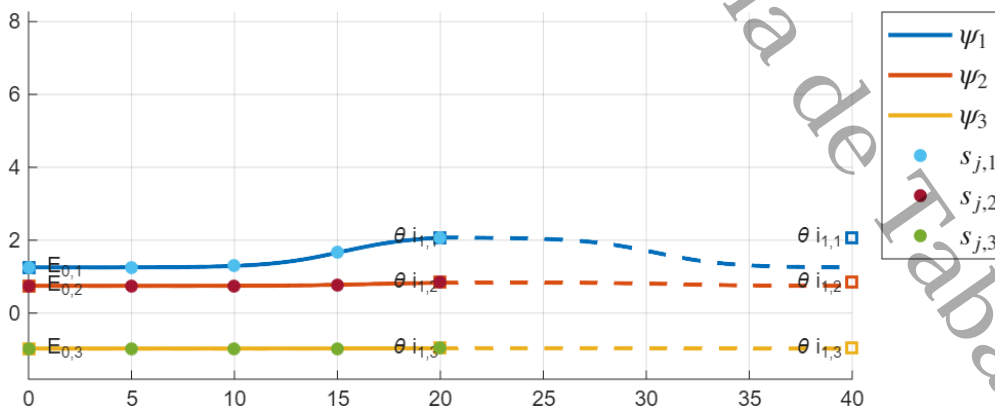


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

Para definir los parámetros de disparo, s_j , en cada subintervalo, se hace uso de la solución del sistema JJA bajo la influencia del control de la Figura 26. Así, los parámetros de disparo, en este caso, son los que se muestran con puntos en la Figura 32.

Figura 32

Selección de los parámetros de disparo s_j



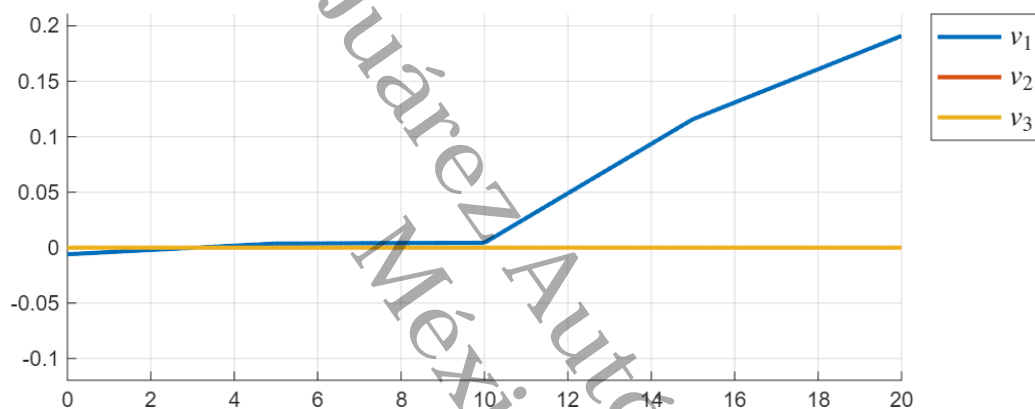
Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 26, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no

controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

Una vez teniendo los s_j se aplica el algoritmo BFGS para controles continuos lineales por pedazos. En este caso, el algoritmo BFGS convergió en 11 iteraciones. El control obtenido se muestra en la Figura 33.

Figura 33

Control óptimo continuo lineal por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1}

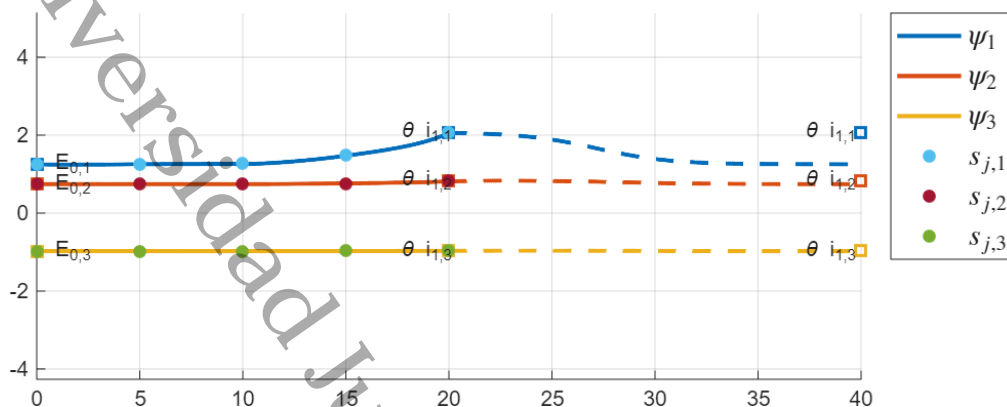


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 34 se grafican las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control óptimo de la Figura 33. Se puede observar que el sistema, al tiempo $t = 20$, llega al estado objetivo θ_{i_1} .

Figura 34

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 33 y $\psi_0 = E_0$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control continuo lineal por pedazos de la Figura 33, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

□

3.3. Controles constantes por pedazos

Para controles constantes por pedazos, un control $v = (v_1, \dots, v_{ns})$ se puede definir en términos del vector de ns constantes $c = (c_1, \dots, c_{ns})$ tomando

$$v_j(t) = c_j. \tag{3.32}$$

Corolario 3.3.1 (Al Teorema 3.1.1). Para el caso de controles constantes por pedazos, el

gradiente del funcional J en (3.5) tiene un representante en $(\mathbb{R}^3)^{ns}$ dado por

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

donde \mathbf{p}_j , para $j = 1, \dots, ns$, es la solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p}_j + C(\boldsymbol{\psi}_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \mathbf{p}_j(\tau_{j+1}) = \Gamma^{-1}[k(\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1})], \end{cases} \quad (3.34)$$

$\boldsymbol{\psi}_{j=1}$, es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_{j=1}}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{j=1} + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_{j=1} = \mathbf{i} + \mathbf{v}_{j=1}, & t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \boldsymbol{\psi}_{j=1}(\tau_1) = \mathbf{s}_{j=1}, \end{cases} \quad (3.35)$$

y $\boldsymbol{\psi}_j$, para $j = 2, \dots, ns$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{dt} + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j + \text{sen } \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{i} + \mathbf{v}_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\tau_j) = \boldsymbol{\psi}_{j-1}(\tau_j). \end{cases} \quad (3.36)$$

Demostración. De la segunda igualdad de (3.20) y por la Proposición 2.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &\approx \sum_{j=1}^{ns} \int_{I_j} (\eta \mathbf{c}_j + \mathbf{p}_j) dt \cdot \delta \mathbf{c}_j \\ &= \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \end{pmatrix} \cdot \delta \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por lo tanto, el gradiente de $J(\mathbf{v})$ tiene una representación en $(\mathbb{R}^3)^{ns}$ dada por

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}_1} J(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{c}_{ns}} J(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{I_1} (\eta \mathbf{c}_1 + \mathbf{p}_1) dt \\ \vdots \\ \int_{I_{ns}} (\eta \mathbf{c}_{ns} + \mathbf{p}_{ns}) dt \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

■

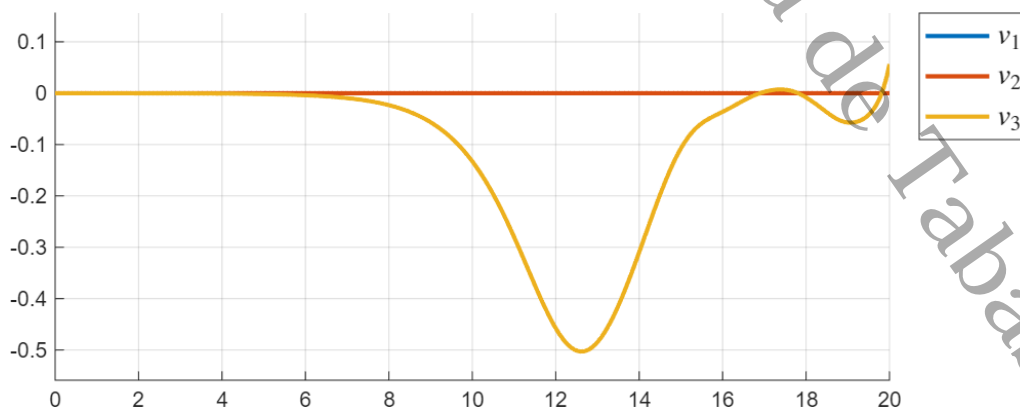
Como ya se tiene el gradiente del funcional, entonces, ya se puede aplicar el algoritmo BFGS. En el Algoritmo 8 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional $J(\mathbf{v})$ en (3.5) con controles constantes por pedazos.

A continuación, se presentan algunos ejemplos numéricos para controles constantes por pedazos.

Ejemplo 3.3.1 (Operador de escritura del 1 constante por pedazos). Sea $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. En la Figura 35 se presenta el control obtenido en $(L^2(0, T))^3$, el cual se usa para definir los s_j a partir del sistema de estado bajo la influencia de dicho control. En este caso, el algoritmo BFGS para controles constantes por pedazos convergió en 145 iteraciones. En la Figura 36 se muestra el control constante por pedazos obtenido.

Figura 35

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1

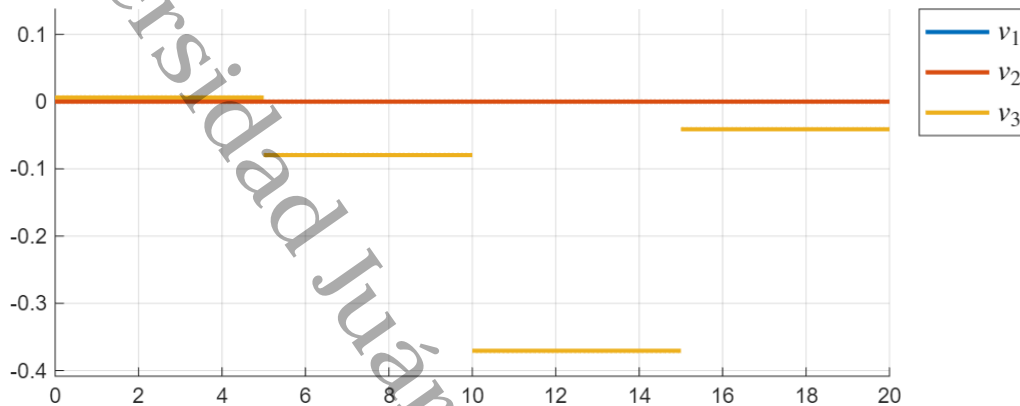


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo

tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

Figura 36

Control óptimo constante por pedazos para transitar de E_0 a E_1

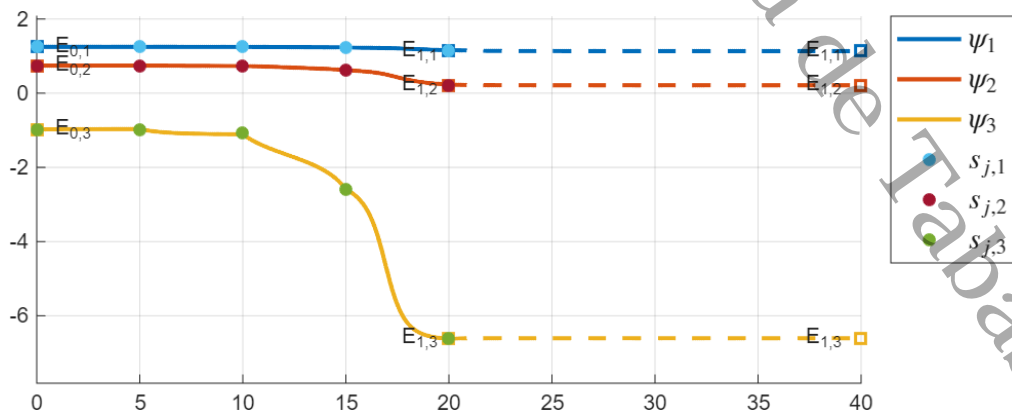


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 37 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 36.

Figura 37

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 36 y $\psi_0 = E_0$



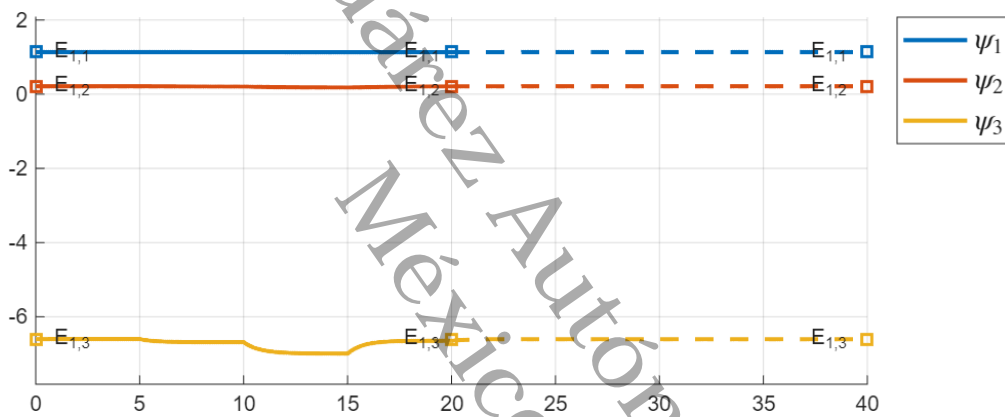
Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control constante por pedazos de la Figura 36, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en

el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 38 se puede apreciar que al aplicar el mismo control pero partiendo del estado final E_1 , el sistema hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado, por lo tanto, es un operador de escritura del 1.

Figura 38

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 36 y $\psi_0 = E_1$



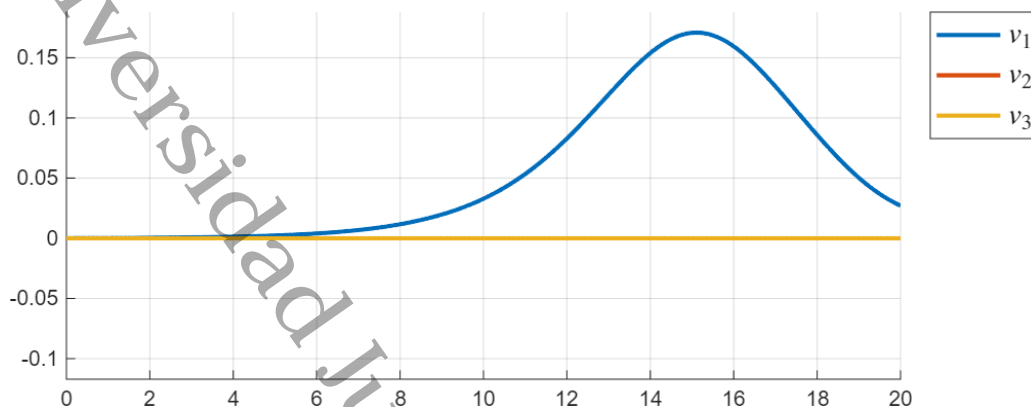
Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control constante por pedazos de la Figura 36, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

□

Ejemplo 3.3.2 (Control constante por pedazos para transitar del equilibrio estable E_0 al inestable θ_{i_1}). Sea $\psi_0 = E_0, \psi_T = \theta_{i_1}$ y el control solo con la junta 1. En la Figura 39 se muestra el control obtenido en $(L^2(0, T))^3$ con el cual se definen los s_j a partir del sistema de estado bajo la influencia de dicho control. En este caso, el algoritmo BFGS para controles constantes por pedazos convergió en la iteración 119. En la Figura 40 se presenta el control constante por pedazos obtenido.

Figura 39

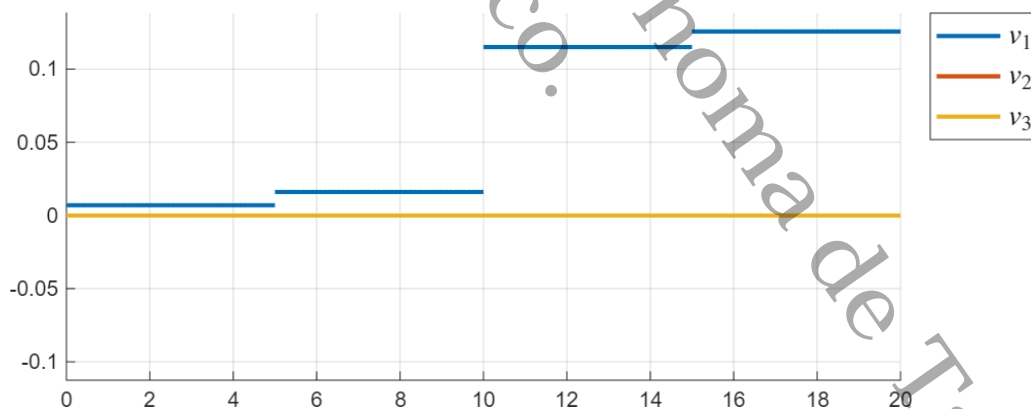
Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1}



Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

Figura 40

Control óptimo constante por pedazos para transitar de E_0 a θ_{i_1}

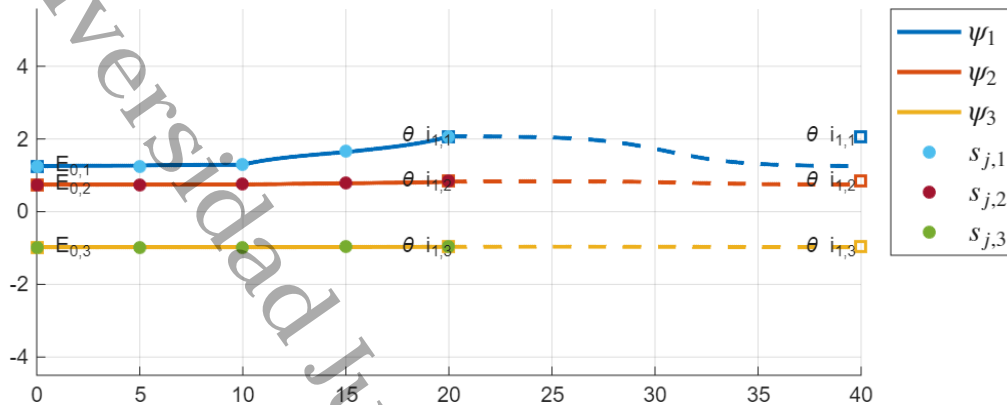


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 41 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 40.

Figura 41

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 40 y $\psi_0 = E_0$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control constante por pedazos de la Figura 40, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$. Los puntos en celeste, vino y verde representan los parámetros de disparo de las juntas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la Figura 41 se puede apreciar que el sistema llega al tiempo $t = 20$ al estado objetivo θ_{i_1} . A partir del tiempo $t = 20$ se grafican con líneas discontinuas las series de tiempo del sistema sin control partiendo desde el punto donde se quedó el sistema tras controlar; se puede apreciar que el sistema se aleja del estado final θ_{i_1} , lo cual era de esperar ya que el estado θ_{i_1} es un equilibrio inestable. □

Con estos ejemplos numéricos se concluye la presentación de esta segunda metodología para la obtención de controles continuos lineales por pedazos y controles constantes por pedazos. A esta metodología se le denominará disparo múltiple fijo (DMF). En el Capítulo 4 se analizarán los resultados obtenidos a lo largo de la tesis y se llevará a cabo una comparación entre las dos metodologías presentadas para controles por pedazos.

3.4. Notas sobre el método del Lagrangiano aumentado

Inicialmente, basados en el artículo [Juárez et al., 2024], se tenía la idea de implementar el método de disparo múltiple combinado con el método del Lagrangiano aumentado para obtener controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos que sirvieran como operadores de memoria. En el artículo citado, se consideran tres regiones en el control, la primera, $[\tau_1, \tau_{n_1}]$, es de estabilización alrededor de un estado inicial ψ_0 , la segunda región, $[\tau_{n_1}, \tau_{n_2}]$, es de transición del estado inicial ψ_0 al estado final ψ_T y la tercera región, $[\tau_{n_2}, \tau_{n_{s+1}}]$, es de estabilización alrededor del estado final ψ_T , y se calcula el control de forma simultánea para estas tres regiones, pero durante la etapa de estudio de la metodología descrita en [Juárez et al., 2024] se identificó que se podían simplificar los procesos manteniendo algunas ideas de disparo múltiple, pero minimizando directamente los funcionales de transición y estabilización, en vez del Lagrangiano aumentado, y resolviendo de manera independiente en cada región.

En el artículo [Juárez et al., 2024], el funcional que se minimiza es

$$J(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{ns} L_j(\mathbf{x}_j), \quad (3.39)$$

donde se define $L_j(\mathbf{x}_j)$, dependiendo de la subregión de tiempo:

$$L_j(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k_{1j}}{2} \int_{I_j} \|\psi_j(t) - \psi_0\|^2 dt, & \text{si } 1 \leq j \leq n_1, \\ \frac{1}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k_{1j}}{2} \int_{I_j} \|\psi_j(t) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 dt, & \text{si } n_1 < j < n_2, \\ \frac{1}{2} \int_{I_j} \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 dt + \frac{k_{1j}}{2} \int_{I_j} \|\psi_j(t) - \psi_T\|^2 dt, & \text{si } n_2 \leq j \leq ns, \end{cases} \quad (3.40)$$

donde los parámetros \mathbf{s}_j , \mathbf{s}_{j+1} , \mathbf{v}_j y la función ψ_j están restringidos por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_j(t)}{dt} + \mathbf{K} \psi_j(t) + \text{sen}(\psi_j(t)) = \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_j(t), & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}), \\ \psi_j(\tau_j) = \mathbf{s}_j, \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\psi_j(\tau_{j+1}) = \mathbf{s}_{j+1}, \quad (3.42)$$

las cuales están asociadas a la metodología de disparo múltiple.

Los parámetros de penalización k_{1j} anteriores son escalares positivos que deben determinarse.

Observación 3.4.1 . En el artículo, aunque es posible fijar $s_1 = \psi_1(t_0) \equiv \psi_0$, se optó por dejar el parámetro s_1 como desconocido para tener mayor libertad y poder medir cómo la metodología estabiliza el sistema alrededor de ψ_0 . Por lo tanto, se añade al funcional $L_1(x_1)$ en (4.6) el término penalizado

$$\frac{k_0}{2} \|\mathbf{s}_1 - \psi_0\|^2$$

con $k_0 > 0$.

Para este problema de optimización con restricciones, el lagrangiano aumentado, asociado a cada subintervalo de tiempo de disparo I_j , es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \boldsymbol{\lambda}_j) = & L_j(\mathbf{x}_j) \\ & + \int_{I_j} \mathbf{y}_j \cdot \left\{ \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_j(t) - \Gamma \dot{\boldsymbol{\psi}}_j(t) - \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j(t) - \text{sen}(\boldsymbol{\psi}_j(t)) \right\} dt \\ & + \left\{ \boldsymbol{\lambda}_j \cdot [\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}] + \frac{k_{2j}}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|_{\mathbb{R}^3}^2 \right\} \end{aligned}$$

donde \mathbf{y}_j y $\boldsymbol{\lambda}_j$ son los multiplicadores de Lagrange correspondientes asociados a (4.7) y (4.8), respectivamente y $\mathbf{p}_j = (\mathbf{v}_j, \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_{j+1})$. Los parámetros de penalización k_{2j} son constantes positivas.

En el presente trabajo de tesis, como ya se mencionó, en vez de trabajar con las tres subregiones (estabilización inicial, transición y estabilización final) de forma simultanea, se trabajó solo con la región de transición. Para esta región, se modificaron los funcionales definidos para DMM y DMF tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- Tanto en el funcional definido para DMM como para DMF, el término $\frac{k_{1j}}{2} \int_{I_j} \|\boldsymbol{\psi}_j(t) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2 dt$ se sustituyó por $\frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}_j(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}\|^2$, ya que no se requiere que el valor de las variables de estado esté cercano al valor \mathbf{s}_{j+1} en todo el intervalo I_j , sino solo en el extremo derecho, τ_{j+1} .

- Tanto en el funcional definido para DMM como en el definido para DMF, se sustituyó la condición inicial del sistema de estado, $\psi_j(\tau_j) = s_j$, por $\psi_j(\tau_j) = \psi_{j-1}(\tau_j)$, salvo que en el primer intervalo se consideró $\psi_1(\tau_1) = \psi_0$. Para el caso del funcional definido para DMM los s_j fueron variables y se obtuvieron durante el proceso de optimización con el algoritmo BFGS, mientras que en el funcional definido para DMF los parámetros de disparo s_j se tomaron fijos, definidos a partir de una corrida previa con controles en $(L^2(0, T))^3$.

Con estas simplificaciones se obtuvieron resultados satisfactorios, y por lo tanto, ya no fue necesario implementar el método del lagrangiano aumentado que representa un mayor número de cálculos y mayor tiempo de cómputo.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Análisis de resultados y conclusiones

4.1. Análisis de resultados

Los resultados obtenidos en este trabajo se enlistan a continuación:

1. Se obtuvieron controles óptimos continuos lineales por pedazos para transitar entre dos estados del sistema JJA, incluso controlando con una sola junta.
2. Se obtuvieron controles óptimos constantes por pedazos para transitar entre dos estados del sistema JJA, incluso controlando con una sola junta.
3. Se obtuvieron operadores óptimos de escritura tanto del 0 como del 1 con controles continuos lineales por pedazos.
4. Se obtuvieron operadores óptimos de escritura tanto del 0 como del 1 con controles contantes por pedazos.

Estos resultados muestran que es posible controlar el sistema JJAM de manera óptima con controles continuos lineales por pedazos y con controles constantes por pedazos aplicando los métodos presentados que se basan en la metodología de disparo múltiple combinada con el algoritmo BFGS. Por lo tanto, la hipótesis planteada es cierta.

Ahora bien, para comparar el desempeño de las dos metodologías presentadas para controles por pedazos se consideró que las dos características que se buscan en los controles y

que están plasmadas en el funcional

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|^2, \quad (4.1)$$

son, en primer lugar, que el control sea pequeño, lo cual está asociado con minimizar el primer término del funcional (4.1), el cual mide el tamaño del control usando la norma en $(L^2(0, T))^3$

$$\|\mathbf{v}\|_{(L^2(0, T))^3}^2 = \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 dt, \quad (4.2)$$

y en segundo lugar, que el sistema bajo la influencia del control llegue, al tiempo T , al estado objetivo $\boldsymbol{\psi}_T$, lo cual está asociado con minimizar el segundo término del funcional usando la norma euclidiana en \mathbb{R}^3

$$\|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|^2 = (\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T) \cdot (\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T). \quad (4.3)$$

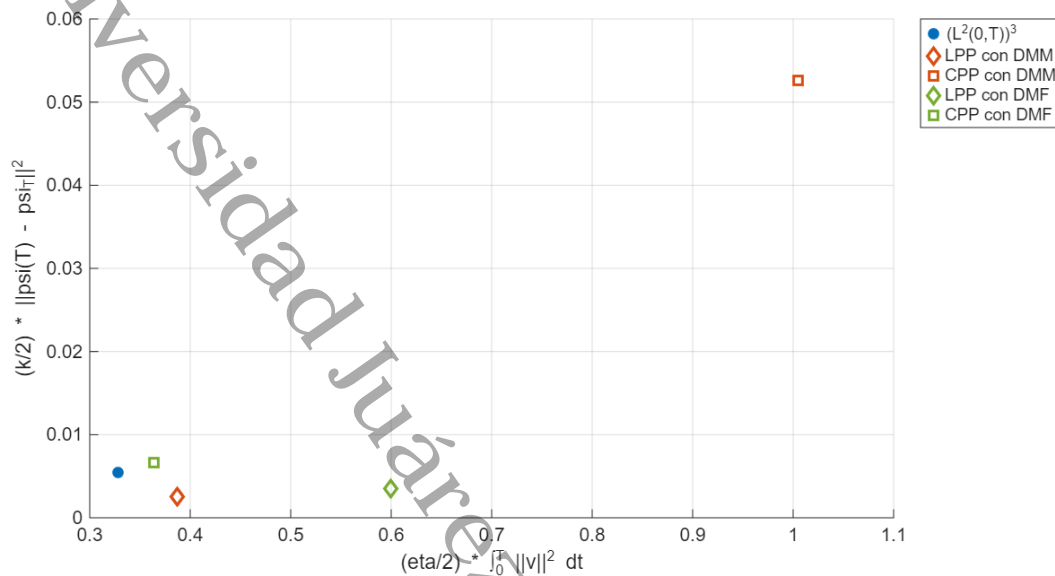
Como se vio a lo largo de la tesis y para fines de obtener operadores de memoria, esta última característica es la más importante.

Para fines de este análisis se consideran tanto los experimentos asociados con la transición del estado estable E_0 al estado estable E_1 , como los experimentos asociados a la transición del estado estable E_0 al estado inestable θ_{i_1} . Todos estos experimentos numéricos se realizaron con los parámetros $\eta = 1$, $k = 10$ y $T = 20$. A continuación, para cada uno de estos experimentos se comparan los resultados obtenidos con los diferentes tipos de control y las dos metodologías, disparo múltiple modificado (DMM) y disparo múltiple fijo (DMF).

Para el caso de transición del estado estable E_0 al estado estable E_1 , en la Figura 42 se grafican los valores del primer término del funcional (4.1) contra los valores del segundo término para cada uno de los controles obtenidos.

Figura 42

Gráfica del término de regularización contra el término de penalización



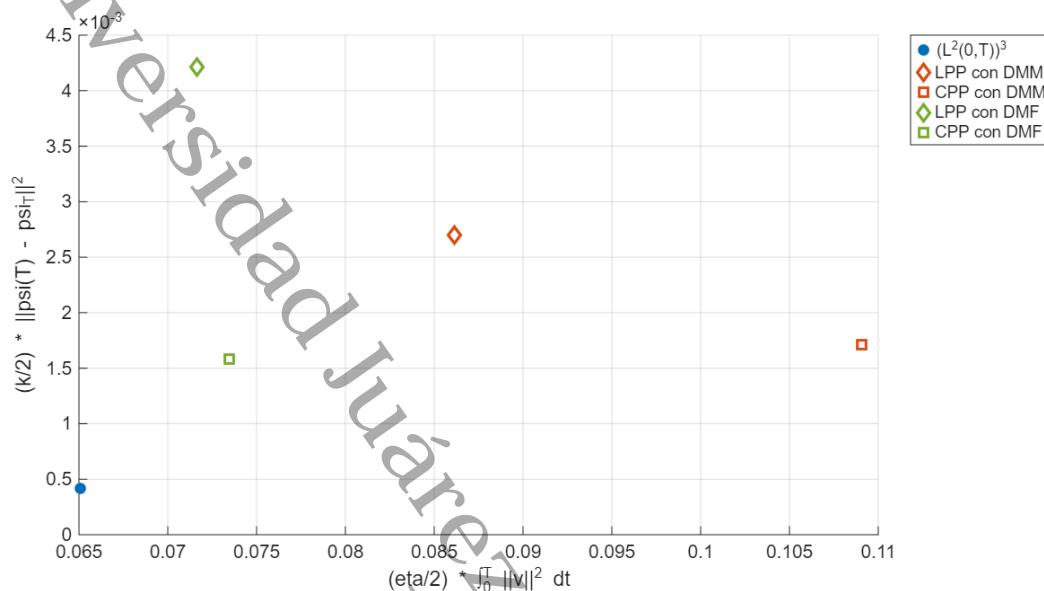
Nota. En esta figura las siglas LPP hacen referencia a los controles continuos lineales por pedazos y las siglas CPP a controles constantes por pedazos. Se incluye también, como punto de referencia, el caso con el control obtenido en $(L^2(0, T))^3$.

En la Figura 42 se pueden apreciar que los controles continuos lineales por pedazos obtenidos con DMM y DMF son los que hacen que el sistema llegue más cerca del estado objetivo ψ_T , más cerca incluso que con el control en $(L^2(0, T))^3$, siendo el control obtenido con DMM el que permite que el sistema llegue más cerca del estado objetivo, además de ser uno de los que tiene menor tamaño. Se puede observar, que también el control constante por pedazos obtenido con DMF tiene un buen desempeño aunque no llega tan cerca del estado objetivo.

Para el caso de transición del estado estable E_0 al estado inestable θ_{i_1} , en la Figura 43 se grafican los valores del primer término del funcional (4.1) contra los valores del segundo término para cada uno de los controles obtenidos.

Figura 43

Gráfica del término de regularización contra el término de penalización



Nota. Las siglas LPP hacen referencia a los controles continuos lineales por pedazos y las siglas CPP a controles constantes por pedazos. Se incluye también, como punto de referencia, el caso con el control obtenido en $(L^2(0, T))^3$.

En la Figura 43 podemos ver que los controles obtenidos con la metodología DMF tienen un menor tamaño que los obtenidos con DMM, siendo el de mejor desempeño el control constante por pedazos al llegar más cerca del estado objetivo.

4.2. Discusión

En trabajos anteriores no se habían obtenido operadores de lectura con controles en espacios más prácticos como los controles continuos lineales por pedazos o controles constantes por pedazos, lo cual sí se logró en este trabajo con ambas metodologías presentadas.

Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación dan una respuesta afirmativa a la pregunta de investigación planteada. Además, todos los objetivos propuestos, tanto general como específicos, fueron logrados de forma satisfactoria.

4.3. Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo el objetivo era probar que se pueden obtener controles lineales por pedazos continuos y constantes por pedazos para hacer transitar el estado del sistema JJA entre dos estados de equilibrio, y que algunos de estos controles pueden ser usados como operadores de memoria.

De los experimentos numéricos que se muestran en los capítulos 2 y 3, se concluye que sí es posible obtener controles continuos lineales por pedazos y también controles constantes por pedazos, para transitar entre dos estados de equilibrio del sistema JJA. Esto se logró con ambas metodologías presentadas basadas en disparo múltiple. En ambas se definió en el intervalo de control $[0, T]$, un funcional J por pedazos (definidos por los subintervalos I_j) que depende de la solución del sistema de estado en cada uno de los subintervalos I_j , con una modificación con respecto al disparo múltiple usual, ya que se sustituyó la condición inicial $\psi_j(\tau_j) = s_j$ por $\psi_j(\tau_j) = \psi_{j-1}(\tau_j)$. En la primera metodología los s_j se consideraron variables mientras que en la segunda se tomaron fijos. De la comparación de las metodologías realizada en la sección de resultados no se puede concluir que alguna de las metodologías sea mejor que la otra, ya que cada una de ellas dio buenos resultados en distintos experimentos, aunque la metodología de DMM tiene la ventaja de que no requiere una corrida previa del algoritmo BFGS en $(L^2(0, T))^3$.

Para obtener los controles buscados se minimizó el funcional J , que numéricamente se hizo usando el algoritmo cuasi-Newton BFGS. Cabe mencionar, que entre los controles hallados, se obtuvieron algunos que además de realizar la transición entre estados, también funcionan como operadores de memoria.

De los experimentos se pudo concluir que, para resolver el problema de búsqueda en línea (PBL), dentro del algoritmo BFGS, para los funcionales presentados en esta tesis, es mejor usar métodos sin derivadas, ya que dichos funcionales no son convexos.

Es posible obtener controles continuos lineales por pedazos y controles constantes por pedazos para transición minimizando directamente los funcionales respectivos sin la necesidad de implementar la metodología del lagrangiano aumentado, la cual implica más cálculos y mayor tiempo de cómputo.

Se recomienda, para trabajos futuros, realizar una comparación del algoritmo de gradiente conjugado con el algoritmo BFGS para el caso de controles continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos. En trabajos posteriores también se podría implementar la metodología del lagrangiano aumentado para la obtención de controles tanto continuos lineales por pedazos como constantes por pedazos y comparar con los resultados obtenidos en este trabajo. Para futuras investigaciones también se puede buscar el valor mínimo de T con el cual se pueden obtener operadores de memoria.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Bibliografía

- [Apostol, 1969] Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II: Multi-variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*. John Wiley & Sons, New York, 2 edition.
- [Belete and Huchaiah, 2021] Belete, D. M. and Huchaiah, M. D. (2021). Grid search in hyperparameter optimization of machine learning models for prediction of hiv/aids test results. *International Journal of Computers and Applications*. Published online: 12 September 2021.
- [Braiman et al., 2016] Braiman, Y., Neschke, B., Nair, N., Imam, N., and Glowinski, R. (2016). Memory states in small arrays of josephson junctions. *Physical Review E*, 94(5).
- [Brezis, 2011] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 1st edition.
- [Cortazar, 2021] Cortazar, C. N. C. (2021). Método de newton para búsquedas en línea en el espacio $l^2(0, t)^3$. Tesis de maestría, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco.
- [Glowinski et al., 2020] Glowinski, R., López, J., Juárez, H., and Braiman, Y. (2020). On the controllability of transitions between equilibrium states in small inductively coupled arrays of josephson junctions: A computational approach. *Journal of Computational Physics*, 403:109023.
- [Harvey and Qu, 2018] Harvey, R. and Qu, Z. (2018). Control of cryogenic memory state transitions in a josephson junction array. In *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, pages 5671–5676.

- [Juárez et al., 2024] Juárez, L. H., López, J., and Rojas, J. T. (2024). Parameter estimation and control by penalized multiple shooting. *Annals of Mathematical Sciences and Applications*, 9(1):237–279.
- [Juárez and Rojas, 2022] Juárez, L. H. and Rojas, J. (2022). Parameter estimation in odes: Modelling and computational issues. *Boletín de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones*, VIII(8):34–49.
- [Lewis et al., 2000] Lewis, R. M., Torczon, V., and Trosset, M. W. (2000). On the convergence of pattern search algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 11(3):682–716.
- [Nair and Braiman, 2018] Nair, N. and Braiman, Y. (2018). A ternary memory cell using small josephson junction arrays. *Superconductor Science and Technology*, 31(11):115012.
- [Nair et al., 2019] Nair, N., Jafari-Salim, A., D’Addario, A., Imam, N., and Braiman, Y. (2019). Experimental demonstration of a josephson cryogenic memory cell based on coupled josephson junction arrays. *Superconductor Science and Technology*, 32(11):115012.
- [Nocedal and Wright, 2006] Nocedal, J. and Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, NY, 2nd edition.
- [Rezac et al., 2017] Rezac, J. D., Imam, N., and Braiman, Y. (2017). Parameter optimization for transitions between memory states in small arrays of josephson junctions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 474:267–281.

Apéndice A

Cambio de variable y adimensionalización de la ecuación de balance

En este apéndice se desarrolla el cambio de variable y adimensionalización de la ecuación de balance presentada en (1.4).

La ecuación de balance en términos de ϕ se expresa de la siguiente manera

$$\frac{hC}{2e} \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{h}{2eR} \frac{d\phi(t)}{dt} + I_c \sin(\phi(t)) = I_{ext}. \quad (\text{A.1})$$

Considérese el cambio de variable $\tau = \omega_J t$ y los parámetros definidos a continuación

$$\omega_J^2 = \frac{2eI_c}{hC}, \quad i = \frac{I_{ext}}{I_c} \quad \text{y} \quad \gamma = \sqrt{\frac{hC}{2eI_c}} \frac{1}{RC} = (\omega_J RC)^{-1}.$$

Como $\tau(t) = \omega_J t$, entonces

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \omega_J.$$

Sea $\phi(t) = \psi(\tau(t))$, entonces por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau(t)}{dt} = \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \quad (\text{A.2})$$

y

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = \omega_J \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau(t)}{dt} = \omega_J^2 \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.1), se obtiene

$$\frac{hC}{2e} \omega_J^2 \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{h}{2eR} \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + I_c \text{sen}(\psi(\tau)) = I_{ext}. \quad (\text{A.4})$$

Como $\omega_J^2 = \frac{2eI_c}{hC}$, entonces

$$\frac{hC}{2e} \frac{2eI_c}{hC} \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{h}{2eR} \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + I_c \text{sen}(\psi(\tau)) = I_{ext}. \quad (\text{A.5})$$

Simplificando el primer término, se obtiene

$$I_c \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{h}{2eR} \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + I_c \text{sen}(\psi(\tau)) = I_{ext}. \quad (\text{A.6})$$

Si se dividen ambos miembros entre I_c , entonces

$$\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{h}{2eRI_c} \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \text{sen}(\psi(\tau)) = \frac{I_{ext}}{I_c}. \quad (\text{A.7})$$

Del segundo término se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{h}{2eRI_c} \omega_J &= \frac{h}{2eI_c} \frac{1}{R} \omega_J \\ &= \frac{hC}{2eI_c} \frac{1}{RC} \omega_J \\ &= \frac{1}{\omega_J^2} \frac{1}{RC} \omega_J \\ &= \frac{1}{\omega_J} \frac{1}{RC} \\ &= (\omega_J RC)^{-1} \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la versión adimensional de la ecuación de balance en términos de ψ es

$$\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \gamma \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \text{sen}(\psi(\tau)) = i. \quad (\text{A.8})$$

Control en $(L^2(0, T))^3$ del sistema JJAM para transición entre estados

En este apéndice se trabajará en la minimización del funcional J en (1.15), en el intervalo $[0, T]$ aplicando los métodos de gradiente conjugado (GC) y BFGS. Para poder hacer uso de estos métodos de optimización es necesario conocer el gradiente del funcional J , es por eso que la primera sección se centrará en la obtención del gradiente de J usando la definición de la derivada de Frechet y un análisis de perturbación. En la segunda sección se mostrará que aunque no es posible tener una representación gráfica del funcional J , sí es posible graficar el funcional restringido a una “recta”; minimizar el funcional en esa restricción será de utilidad en los métodos de optimización que se emplearán. Finalmente, en la tercera sección se describirán los algoritmos GC y BFGS y se mostrarán algunos ejemplos de controles óptimos en $(L^2(0, T))^3$ minimizando el funcional J con dichos algoritmos.

B.1. Gradiente de J en $(L^2(0, T))^3$

Para obtener la derivada del funcional J , requerimos de las siguientes definiciones y teoremas.

Definición B.1.1 (Derivada total). [Apostol, 1969]. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar definido en un subconjunto S de \mathbb{R}^n . Sean \mathbf{a} un punto interior de S y $B(\mathbf{a}; r)$ una n -bola abierta contenida en S . Sea \mathbf{v} un vector tal que $\|\mathbf{v}\| < r$, de modo que $\mathbf{a} + \mathbf{v} \in B(\mathbf{a}; r)$.

Decimos que f tiene derivada total en \mathbf{a} si existen una transformación lineal

$$T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y una función escalar $\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{v})$, tales que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{v}),$$

para $\|\mathbf{v}\| < r$, de manera que $\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ tiende a 0 cuando $\|\mathbf{v}\|$ tiende a 0. La transformación lineal $T_{\mathbf{a}}$ se llama **derivada total** de f en \mathbf{a} .

Teorema B.1.1 [Apostol, 1969]. Si f es diferenciable en \mathbf{a} con diferencial $T_{\mathbf{a}}$, entonces existe la derivada direccional $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ para todo \mathbf{y} de \mathbb{R}^n . Además

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) = f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y},$$

donde $\nabla f(\mathbf{a})$ es el gradiente de f en \mathbf{a} .

Definición B.1.2 . Sea H un espacio de Hilbert. Un funcional J sobre H es Frechet-diferenciable si para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in H$, existe $DJ(\mathbf{v}) \in H'$ ($DJ(\mathbf{v}) : H \rightarrow \mathbb{R}$, es lineal y continua), tal que

$$J(\mathbf{v} + \mathbf{z}) - J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \mathbf{z} \rangle + \|\mathbf{z}\|\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{z}),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota par de dualidad y $\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{z})$ tiende a cero cuando $\|\mathbf{z}\|$ tiende a cero. La **derivada o el diferencial de Frechet** de J en \mathbf{v} es la transformación $DJ(\mathbf{v})$.

Teorema B.1.2 (Teorema de representación de Riesz-Fréchet). [Brezis, 2011]. Sea H un espacio de Hilbert. Para toda T transformación lineal y continua de H en \mathbb{R} , existe un único $t \in H$ tal que

$$T(h) = (t, h), \quad \forall h \in H,$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto interno en H . A t se le llama representante de T en H .

Observación B.1.1 . El teorema de representación de Riesz dice que para fines prácticos es suficiente conocer al representante de la transformación lineal T , que es un elemento del espacio de Hilbert.

Observe que si H es \mathbb{R}^n , entonces la derivada de Frechet es la derivada total y que el representante de la derivada total es el gradiente.

A continuación, se presentan una serie de definiciones y proposiciones que serán de ayuda para hallar el gradiente del funcional (1.15) mediante un análisis de perturbación.

Definición B.1.3. Sea $F : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ o $F : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Para describir cómo cambia F bajo una pequeña variación de la variable $v(t) \in L^2(0, T)$ se define

$$\delta F(v(t)) := F(v(t) + \delta v(t)) - F(v(t)),$$

donde $\delta v(t)$ representa una pequeña perturbación de $v(t)$.

Definición B.1.4. Si J es Frechet-diferenciable se define

$$\delta J(\mathbf{v}) \approx \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota par de dualidad en $(L^2(0, T))^3$ y $\delta \mathbf{v}$ es una perturbación para la variable \mathbf{v} .

La definición anterior dice que $\langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle$ es una buena aproximación para $\delta J(\mathbf{v})$, ya que si J es Frechet-diferenciable se cumple que

$$J(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (\text{B.1})$$

en particular, si se considera $\mathbf{w} = \delta \mathbf{v}$, se tiene que

$$J(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle + \|\delta \mathbf{v}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}). \quad (\text{B.2})$$

Como $\varepsilon(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v})$ tiende a 0 cuando $\|\delta \mathbf{v}\|$ tiende a 0, entonces

$$\delta J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}) \approx \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Proposición B.1.1. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $F_i : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ o $F_i : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$. Se tiene que

$$\delta(c F_1(v(t)) + F_2(v(t))) = c \delta F_1(v(t)) + \delta F_2(v(t)).$$

Demostración. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $F_i : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ o $F_i : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned} \delta(cF_1(v(t)) + F_2(v(t))) &= [cF_1(v(t) + \delta v(t)) + F_2(v(t) + \delta v(t))] - [cF_1(v(t)) + F_2(v(t))] \\ &= [cF_1(v(t) + \delta v(t)) - cF_1(v(t))] + [F_2(v(t) + \delta v(t)) - F_2(v(t))] \\ &= c[F_1(v(t) + \delta v(t)) - F_1(v(t))] + [F_2(v(t) + \delta v(t)) - F_2(v(t))] \\ &= c\delta F_1(v(t)) + \delta F_2(v(t)). \end{aligned}$$

■

Proposición B.1.2 . Sea $v^2 : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$. Se tiene que

$$\delta v^2(t) \approx 2v(t)\delta v(t).$$

Demostración. Como $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces para cada t fijo se define $w := v(t)$ y se puede aplicar la regla de la cadena a w^2 y obtener el diferencial

$$d(w^2) = 2w dw,$$

donde dw es el diferencial de w . Como se sabe, para pequeñas perturbaciones en w , se puede aproximar δw^2 por el diferencial $d(w^2)$ y δw por dw , de esta forma se obtiene que, para cada t fijo

$$\begin{aligned} \delta v^2(t) &= (v(t) + \delta v(t))^2 - (v(t))^2 = (w + \delta w)^2 - w^2 = \delta w^2 \\ &\approx d(w^2) = 2w dw \approx 2w \delta w = 2v(t)\delta v(t), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\delta v^2(t) \approx 2v(t)\delta v(t). \tag{B.4}$$

■

Proposición B.1.3 . Para $v \in (L^2(0, T))^3$ se tiene que

$$\delta (\|v(t)\|_E^2) \approx 2v(t) \cdot \delta v(t),$$

donde \cdot es el producto escalar usual.

Demostración. Para cada t se tiene que

$$\begin{aligned}
 \delta (\|\mathbf{v}(t)\|_E^2) &= \delta (\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) \\
 &= \delta (v_1(t)v_1(t) + v_2(t)v_2(t) + v_3(t)v_3(t)) \\
 &= \delta (v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)) \\
 &= \delta v_1^2(t) + \delta v_2^2(t) + \delta v_3^2(t) && \text{(Proposición B.1.1)} \\
 &\approx 2v_1\delta v_1(t) + 2v_2\delta v_2(t) + 2v_3\delta v_3(t) && \text{(Proposición B.1.2)} \\
 &= 2\mathbf{v}(t) \cdot \delta \mathbf{v}(t),
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

por lo tanto,

$$\delta (\|\mathbf{v}(t)\|_E^2) \approx 2\mathbf{v}(t) \cdot \delta \mathbf{v}(t). \tag{B.6}$$

■

Proposición B.1.4 . Sea $F : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ o $F : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\delta \int_0^T F(v(t))dt = \int_0^T \delta F(v(t))dt.$$

Demostración. Sea $F : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ o $F : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \delta \int_0^T F(v(t))dt &= \int_0^T F(v(t) + \delta v(t))dt - \int_0^T F(v(t))dt \\
 &= \int_0^T [F(v(t) + \delta v(t)) - F(v(t))]dt \\
 &= \int_0^T \delta F(v(t))dt,
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

por lo tanto,

$$\delta \int_0^T F(v(t))dt = \int_0^T \delta F(v(t))dt. \tag{B.8}$$

■

Proposición B.1.5 . Sea $F : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$, entonces

$$\delta_v \text{sen}[F(v(t))] \approx \cos[F(v(t))]\delta_v F(v(t)).$$

Demostración. Para cada t fijo se define $w := v(t)$ y se puede aplicar la regla de la cadena para obtener el diferencial de $\text{sen}[F(w)]$ con respecto a w

$$d_w \text{sen}[F(w)] = \cos[F(w)]d_w F(w). \quad (\text{B.9})$$

Para pequeñas perturbaciones se puede aproximar $\delta_w F(w)$ por $d_w F(w)$ y también se puede aproximar $\delta_w \text{sen}[F(w)]$ por $d_w \text{sen}[F(w)]$. Así,

$$\begin{aligned} \delta_v \text{sen}[F(v(t))] &= \text{sen}[F(v(t) + \delta v(t))] - \text{sen}[F(v(t))] = \text{sen}[F(w + \delta w)] - \text{sen}[F(w)] \\ &= \delta_w \text{sen}[F(w)] \approx d_w \text{sen}[F(w)] = \cos[F(w)]d_w F(w) \\ &\approx \cos[F(v(t))]\delta_v F(v(t)), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

por lo tanto,

$$\delta_v \text{sen}[F(v(t))] \approx \cos[F(v(t))]\delta_v F(v(t)). \quad (\text{B.11})$$

■

Proposición B.1.6 . Sean $v(t) \in (L^2(0, T))^3$, $s \in \mathbb{R}^3$ y $\psi_{v,s}$ la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K}\psi_{v,s} + \text{sen}(\psi_{v,s}) = \mathbf{i} + v(t), \\ \psi_{v,s}(0) = s, \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

entonces $\delta_v \psi_{v,s}$ se aproxima con la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_v \psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K}\delta_v \psi_{v,s} + C(\psi_{v,s})\delta_v \psi_{v,s} = \delta_v v(t), \\ \delta_v \psi_{v,s}(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

donde

$$C(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\psi_3) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

y ψ es la solución del sistema de estado (B.12).

Demostración. Sean $\mathbf{v}(t) \in (L^2(0, T))^3$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ y $\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}$ la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}}{dt} + \mathbf{K}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}} + \text{sen}(\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}) = \mathbf{i} + \mathbf{v}(t), \\ \psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}(0) = \mathbf{s}. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Se tiene que

$$\delta_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}} = \psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}} - \psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}, \quad (\text{B.16})$$

donde $\psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}}$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}}}{dt} + \mathbf{K}\psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}} + \text{sen}(\psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}}) = \mathbf{i} + \mathbf{v}(t) + \delta_{\mathbf{v}}\mathbf{v}(t), \\ \psi_{\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}, \mathbf{s}}(0) = \mathbf{s}. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Si al sistema (B.17) se le resta el sistema (B.15), se obtiene

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}}{dt} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}} + \delta_{\mathbf{v}}\text{sen}(\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}) = \delta_{\mathbf{v}}\mathbf{v}(t), \\ \delta_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Por la Proposición B.1.5 se tiene que

$$\delta_{\mathbf{v}}\text{sen}(\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}}) = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{v}}\text{sen}(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 1}) \\ \delta_{\mathbf{v}}\text{sen}(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 2}) \\ \delta_{\mathbf{v}}\text{sen}(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 3}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 1})\delta_{\mathbf{v}}\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 1} \\ \cos(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 2})\delta_{\mathbf{v}}\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 2} \\ \cos(\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 3})\delta_{\mathbf{v}}\psi_{(\mathbf{v}, \mathbf{s}), 3} \end{pmatrix} = C(\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}})\delta_{\mathbf{v}}\psi_{\mathbf{v}, \mathbf{s}} \quad (\text{B.19})$$

donde $C(\psi_{v,s})$ es como en (B.14). Por lo tanto, $\delta_v \psi_{v,s}$ se aproxima con la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_v \psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \delta_v \psi_{v,s} + C(\psi_{v,s}) \delta_v \psi_{v,s} = \delta_v \mathbf{v}(t), \\ \delta_v \psi_{v,s}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

■

Proposición B.1.7. Sean $\mathbf{v}(t) \in (L^2(0, T))^3$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ y $\psi_{v,s}$ la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \psi_{v,s} + \text{sen}(\psi_{v,s}) = \mathbf{i} + \mathbf{v}(t), \\ \psi_{v,s}(0) = \mathbf{s}, \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

entonces $\delta_{v,s} \psi_{v,s}$ se aproxima con la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_s \psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \delta_s \psi_{v,s} + C(\psi_{v,s}) \delta_s \psi_{v,s} = \delta_s \mathbf{v}(t), \\ \delta_s \psi_{v,s}(0) = \delta_s \mathbf{s}, \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

donde $C(\psi_{v,s})$ es como en (B.14).

Demostración. Sean $\mathbf{v}(t)$ un control, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ y $\psi_{v,s}$ la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \psi_{v,s} + \text{sen}(\psi_{v,s}) = \mathbf{i} + \mathbf{v}(t), \\ \psi_{v,s}(0) = \mathbf{s}, \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

entonces

$$\delta_s \psi_{v,s} = \psi_{v+\delta v, s+\delta s} - \psi_{v,s}, \quad (\text{B.24})$$

donde $\psi_{v+\delta v, s+\delta s}$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi_{v+\delta v, s+\delta s}}{dt} + \mathbf{K} \psi_{v+\delta v, s+\delta s} + \text{sen}(\psi_{v+\delta v, s+\delta s}) = \mathbf{i} + \mathbf{v}(t) + \delta_v \mathbf{v}(t), \\ \psi_{v+\delta v, s+\delta s}(0) = \mathbf{s} + \delta_s \mathbf{s}. \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Si se resta los sistemas (B.25) y (B.23), se obtiene

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_s \psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \delta_s \psi_{v,s} + \delta_s \operatorname{sen}(\psi_{v,s}) = \delta_v \mathbf{v}(t), \\ \delta_s \psi_{v,s}(0) = \delta_s \mathbf{s}. \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Se tiene que $\delta_s \operatorname{sen}(\psi_{v,s}) \approx C(\psi_{v,s}) \delta_{v,s} \psi_{v,s}$, donde $C(\psi_{v,s})$ es como en (B.14). Por lo tanto, $\delta_s \psi_{v,s}$ se aproxima con la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta_s \psi_{v,s}}{dt} + \mathbf{K} \delta_s \psi_{v,s} + C(\psi_{v,s}) \delta_s \psi_{v,s} = \delta_v \mathbf{v}(t), \\ \delta_s \psi_{v,s}(0) = \delta_s \mathbf{s}. \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

■

El siguiente teorema establece no solo que J es Frechet diferenciable, sino también, quién es el representante en $(L^2(0, T))^3$ de la derivada de Frechet del funcional J .

Teorema B.1.3 . El funcional J es Frechet diferenciable en $(L^2(0, T))^3$ y su derivada $DJ(\mathbf{v})$ aplicada a $\mathbf{w} \in (L^2(0, T))^3$ es

$$\langle DJ(\mathbf{v}(t)), (\mathbf{w}(t)) \rangle = (\eta \mathbf{v}(t) + \mathbf{p}(t), \mathbf{w}(t)),$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto interno en $(L^2(0, T))^3$ y $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{p} + C(\psi)\mathbf{p} = \mathbf{0}, & t \in (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\psi(T) - \psi_T), \end{cases}$$

una vez que ψ se ha obtenido resolviendo

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi}{dt} + \mathbf{K}\psi - \operatorname{sen}(\psi) = \mathbf{i} + \mathbf{v}, & t \in (0, T), \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Demostración. Por definición se tiene que si J es Frechet diferenciable, entonces

$$\delta J(\mathbf{v}) \approx \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle. \quad (\text{B.28})$$

Por otro lado, realizando un análisis de perturbación, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &= \delta \left(\frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|_E^2 \right) \\ &= \frac{\eta}{2} \delta \left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt \right) + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|_E^2 \quad (\text{Proposición B.1.1}) \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T \delta (\|\mathbf{v}\|_E^2) dt + \frac{k}{2} \delta \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|_E^2 \quad (\text{Proposición B.1.4}) \\ &\approx \eta \int_0^T \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dt + k (\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T) \quad (\text{Proposición B.1.3}) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

donde, por la Proposición B.1.6 con $\mathbf{s} = \boldsymbol{\psi}_0$, $\delta \boldsymbol{\psi}$ se aproxima por la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta \boldsymbol{\psi}}{dt} + \mathbf{K} \delta \boldsymbol{\psi} + C(\boldsymbol{\psi}) \delta \boldsymbol{\psi} = \delta \mathbf{v}, & t \in (0, T), \\ \delta \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

Ahora, se introduce una función vectorial $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, que se supone diferenciable sobre todo $(0, T)$. Multiplicando ambos lados del sistema diferencial (3.14) por la función vectorial \mathbf{p} e integrando sobre $(0, T)$ se obtiene

$$\int_0^T \Gamma \frac{d\delta \boldsymbol{\psi}}{dt} \cdot \mathbf{p} dt + \int_0^T \mathbf{K} \delta \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{p} dt + \int_0^T C(\boldsymbol{\psi}) \delta \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{p} dt = \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt, \quad t \in (0, T). \quad (\text{B.31})$$

Integrando por partes el primer término se obtiene

$$\int_0^T \Gamma \frac{d\delta \boldsymbol{\psi}}{dt} \cdot \mathbf{p} dt = \Gamma \mathbf{p} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \Big|_0^T - \int_0^T \Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dt. \quad (\text{B.32})$$

Por la condición inicial de (B.30) se tiene que $\Gamma \mathbf{p}(0) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}$, por lo tanto

$$\int_0^T \Gamma \frac{d\delta \boldsymbol{\psi}}{dt} \cdot \mathbf{p} dt = \Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T) - \int_0^T \Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dt. \quad (\text{B.33})$$

Así, por (B.33), tras reordenar los términos, se obtiene que (B.31) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt \text{ en } (0, T) &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{p}(T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T) + \int_0^T -\mathbf{\Gamma} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \\ &+ \int_0^T \mathbf{K} \mathbf{p} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dt + \int_0^T C(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{p} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dt \\ &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{p}(T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T) + \int_0^T \left[-\mathbf{\Gamma} \frac{d}{dt} \mathbf{p} + \mathbf{K} \mathbf{p} + C(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{p} \right] \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Supóngase que la función \mathbf{p} es solución del siguiente sistema (sistema adjunto)

$$\begin{cases} -\mathbf{\Gamma} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{p} + C(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{p} = \mathbf{0}, & t \in (0, T), \\ \mathbf{p}(T) = \mathbf{\Gamma}^{-1} [k(\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T)], \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

entonces, de (B.34) y (B.35) se tiene que

$$\int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt \approx k(\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T). \quad (\text{B.36})$$

De (B.29) y (B.36) se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &\approx \int_0^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dt + k(\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}(T) \\ &\approx \int_0^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dt + \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt \\ &= \int_0^T (\boldsymbol{\eta} \mathbf{v} + \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{v} dt \\ &= (\boldsymbol{\eta} \mathbf{v} + \mathbf{p}, \delta \mathbf{v})_{(L^2(0, T))^3}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Se define la transformación T_v aplicada a \mathbf{w} como $\langle T_v, \mathbf{w} \rangle := (\boldsymbol{\eta} \mathbf{v} + \mathbf{p}, \mathbf{w})_{(L^2(0, T))^3}$, donde $\boldsymbol{\eta} \mathbf{v} + \mathbf{p}$ es el representante en $(L^2(0, T))^3$ de T_v . Para esta transformación se cumple que

$$\delta J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}) \approx (\boldsymbol{\eta} \mathbf{v} + \mathbf{p}, \delta \mathbf{v})_{(L^2(0, T))^3} = \langle T_v, \delta \mathbf{v} \rangle, \quad (\text{B.38})$$

por lo tanto, el funcional J es Frechet diferenciable ya que la transformación T_v es una derivada de Frechet de J y como la derivada de Frechet es única, entonces T_v es la derivada

de Frechet de J ; a esta transformación se denotará por $DJ(v)$. Además, se tiene que el representante de la derivada de Frechet de $J(v)$ en $(L^2(0, T))^3$ es

$$\eta v + p. \quad (\text{B.39})$$

■

Cuando $H = \mathbb{R}^n$ y $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el representante de la derivada de J es $\nabla J(v)$, así que, por similitud con \mathbb{R}^n , en este trabajo, al representante de la derivada de Frechet de J en v se le llamará el gradiente de J en v y se denotará por $\nabla J(v)$.

Teorema B.1.4 . Si u es mínimo local de J , entonces $\nabla J(u) = \eta u + p = 0$ o equivalentemente $\eta u(t) = -p(t)$.

Demostración. Supóngase que u es mínimo local del funcional J , es decir, existe $\delta > 0$ tal que para todo $v \in H$ con $\|v - u\| < \delta$, se cumple que

$$J(v) \geq J(u).$$

Sea $w \in H$ arbitraria. Se define:

$$g(\alpha) := J(u + \alpha w), \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como u es un mínimo local de J , se deduce que $\alpha = 0$ es mínimo local de $g(\alpha)$. Entonces, por condiciones de primer orden de optimalidad en una variable real se tiene que

$$g'(0) = 0.$$

Por la regla de la cadena

$$g'(\alpha) = (\nabla J(u + \alpha w), w).$$

Entonces, evaluando en $\alpha = 0$

$$g'(0) = (\nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{w}) = 0.$$

La igualdad anterior es válida para toda $\mathbf{w} \in H$, y en espacios de Hilbert, esto implica que

$$\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Del Teorema B.1.3 se tiene que $\nabla J(\mathbf{u}) = \eta\mathbf{u} + \mathbf{p}$, por lo tanto, se deduce que

$$\eta\mathbf{u} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mathbf{u}(t) = -\mathbf{p}(t), \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

■

B.2. Problemas de búsqueda en línea asociados con J

El paso principal en los algoritmos para minimizar el funcional J tiene que ver con la minimización del funcional restringido a una recta, $g(\alpha)$, que se conoce como el Problema de Búsqueda en Línea (PBL).

Nota. Dado un funcional J , un PBL es un problema de minimización de J restringido a la “recta” $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}$. De esta forma, un PBL es un problema de minimización sin restricciones en \mathbb{R} .

El siguiente teorema proporciona la forma de calcular la derivada de $g(\alpha)$, que es la restricción del funcional J a la recta $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}$, una demostración se puede consultar en [Cortazar, 2021].

Proposición B.2.1 . Sean \mathbf{u} y $\mathbf{w} \in H$ fijos y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si se define

$$g(\alpha) = J(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}), \tag{B.40}$$

entonces

$$g'(\alpha) = (\nabla J(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}), \mathbf{w}) = (\eta(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}) + \mathbf{p}, \mathbf{w}). \tag{B.41}$$

Como ya se mencionó, no se puede visualizar gráficamente el funcional J , pero sí se

puede graficar el funcional restringido a la “recta” $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}$ para \mathbf{u} y \mathbf{w} dados, y además, se puede calcular y graficar la derivada del funcional en esa restricción.

Primero, se selecciona una condición inicial ψ_0 y una condición final ψ_T . Posteriormente, se selecciona \mathbf{u} y \mathbf{w} y se calcula

$$g(\alpha) = J(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\psi(T) - \psi_T\|^2, \quad (\text{B.42})$$

donde ψ se obtiene resolviendo el sistema JJA con $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \alpha\mathbf{w}$

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi}{dt} + \mathbf{K}\psi + \text{sen } \psi = \mathbf{i} + \mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}, & t \in (0, T), \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

y haciendo uso de la Proposición B.2.1, se puede calcular $g'(\alpha)$.

Se ha desarrollado un programa¹ que calcula y grafica $g(\alpha)$ y $g'(\alpha)$, en el intervalo $[\alpha_i, \alpha_f]$, para $\psi_0, \psi_T, \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), \eta, k$ y T dados. A continuación, se va a presentar un ejemplo haciendo uso de este programa.

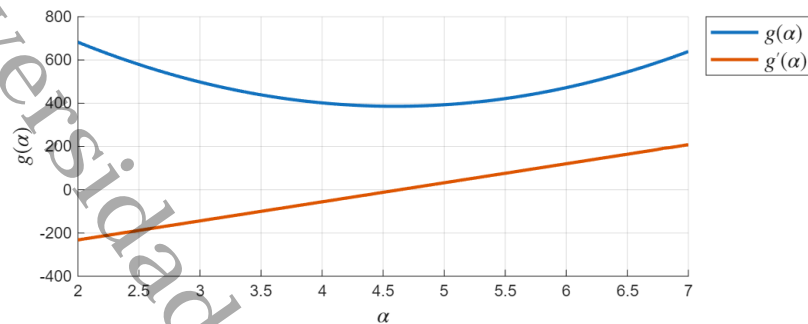
Ejemplo B.2.1 . Si se considera $\psi_0 = s_1, \psi_T = s_2$,

$$\mathbf{u}(t) = (t - e^{-t}, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{w}(t) = (\text{sen}(t) - 2, 0, 0)^T,$$

$\eta = 1, k = 1 \times 10^{-4}$ y $T = 20$, entonces $g(\alpha)$ y $g'(\alpha)$ son como se muestran en la Figura 44.

¹Programa elaborado en MATLAB ubicado en la ruta Funcional restringido a recta/Main_graf_g.m.

Figura 44Gráficas de $g(\alpha)$ y $g'(\alpha)$ 

Nota. En azul se muestra la gráfica de $g(\alpha)$ y en naranja la gráfica de $g'(\alpha)$.

□

Como ya se tiene una expresión para el gradiente de J , entonces ya se pueden aplicar algunos algoritmos para la minimización del funcional y de esta forma obtener controles que permitan la transición entre estados del sistema JJA. En la siguiente sección se presentarán los algoritmos de Gradiente Conjugado en la versión de Fletcher-Reeves y el algoritmo BFGS.

B.3. Minimización del funcional J con los algoritmos GC-FR y BFGS

En esta sección se presentará el algoritmo de Gradiente Conjugado en su versión adaptada por Fletcher y Reeves (GC-FR) para funciones no lineales y el algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) para la minimización del funcional J presentado en la Sección 1.4. Los algoritmos que se presentarán están basados en [Nocedal and Wright, 2006].

Obtención de controles minimizando con el algoritmo GC-FR

En el Algoritmo 1 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\boldsymbol{\psi}(T) - \boldsymbol{\psi}_T\|^2, \quad (\text{B.44})$$

donde ψ es la solución del sistema de estado

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\psi}{dt} + \mathbf{K}\psi + \text{sen } \psi = \mathbf{i} + \mathbf{v}, & t \in (0, T), \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

Algoritmo 1 Fletcher-Reeves (GC-FR) para minimizar el funcional de transición (B.44) con controles en $(L^2(0, T))^3$

1: **Entrada:** \mathbf{v}^0 , tolerancia $\epsilon > 0$

Inicialización:

2: Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^0)$

Resolver el sistema de estado (B.45) con $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ para obtener ψ^0

Resolver el sistema adjunto (B.35) con $\psi = \psi^0$ para obtener \mathbf{p}^0

Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^0) = \eta\mathbf{v}^0 + \mathbf{p}^0$

3: Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^0) = \eta\mathbf{v}^0 + \mathbf{p}^0$

4: Definir dirección inicial $\mathbf{d}^0 = -\nabla J(\mathbf{v}^0)$

5: Inicializar contador $\ell \leftarrow 0$

Descenso:

6: **while** $\|\nabla J(\mathbf{v}^\ell)\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{v}^0)\|^2 > \epsilon$ **do**

7: Calcular paso $\alpha^\ell = \arg \min_{\alpha} J(\mathbf{v}^\ell + \alpha\mathbf{d}^\ell)$

8: Actualizar $\mathbf{v}^{\ell+1} = \mathbf{v}^\ell + \alpha^\ell\mathbf{d}^\ell$

9: Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^{\ell+1})$

Resolver el sistema de estado (B.45) con $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\ell+1}$ para obtener $\psi^{\ell+1}$

Resolver el sistema adjunto (B.35) con $\psi = \psi^{\ell+1}$ para obtener $\mathbf{p}^{\ell+1}$

Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^{\ell+1}) = \eta\mathbf{v}^{\ell+1} + \mathbf{p}^{\ell+1}$

10: Calcular

$$\beta^{\ell+1} = \frac{(\nabla J(\mathbf{v}^{\ell+1}), \nabla J(\mathbf{v}^{\ell+1}))_{\mathcal{B}}}{(\nabla J(\mathbf{v}^\ell), \nabla J(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{B}}}$$

11: Actualizar dirección:

$$\mathbf{d}^{\ell+1} = -\nabla J(\mathbf{v}^{\ell+1}) + \beta^{\ell+1}\mathbf{d}^\ell$$

12: Actualizar iteración: $\ell \leftarrow \ell + 1$

13: **end while**

14: **Salida:** $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^\ell$

15: **Fin del algoritmo**

El PBL se puede resolver analíticamente en algunos casos, por ejemplo, cuando $H = \mathbb{R}^n$

y

$$J(v) = \frac{1}{2}v^T A v - v^T b,$$

la solución del PBL es

$$\alpha^k = \frac{(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{r}^k}{(\mathbf{d}^k)^T A \mathbf{d}^k},$$

donde $\mathbf{r}^0 = A\mathbf{v}^0 - \mathbf{b}$, $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \alpha^k A \mathbf{d}^k$ y \mathbf{d}^k es como en el algoritmo anterior.

Cuando un PBL no se puede resolver de forma exacta, se aproxima su solución, considerando que la solución α^k debe cumplir que $g'(\alpha^k) = 0$, donde $g(\alpha) = J(\mathbf{v}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$. Para resolver este problema de forma numérica se pueden emplear diferentes métodos, pero en este caso se aplicará el método de la secante, ya que nos evita calcular $g''(\alpha)$, que es necesaria en el método de Newton, y además, contamos con una fórmula para calcular la derivada de $g(\alpha)$, que es

$$g'(\alpha) = (\nabla J(\mathbf{v}^k + \alpha \mathbf{d}^k), \mathbf{d}^k) = (\eta(\mathbf{v}^k + \alpha \mathbf{d}^k) + \mathbf{p}, \mathbf{d}^k). \quad (\text{B.46})$$

La fórmula iterativa del método de la secante sería

$$\alpha_{\ell+1} = \alpha_{\ell} - \frac{g'(\alpha_{\ell})(\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})}{g'(\alpha_{\ell}) - g'(\alpha_{\ell-1})} = \frac{\alpha_{\ell-1}g'(\alpha_{\ell}) - \alpha_{\ell}g'(\alpha_{\ell-1})}{g'(\alpha_{\ell}) - g'(\alpha_{\ell-1})}, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.47})$$

la cual requiere dos valores iniciales α_0 y α_1 , los cuales, en este trabajo, se toman como $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = 0.2$.

Se creó un programa² que implementa el algoritmo Fletcher-Reeves para minimizar el funcional J y obtener controles en $(L^2(0, T))^3$ para transitar entre dos estados del sistema JJA. Más adelante, se presentan ejemplos de controles obtenidos con este programa.

Aunque ya en [Glowinski et al., 2020] obtuvieron controles minimizando el funcional J en $(L^2(0, T))^3$, en el contexto de operadores de memoria, usando el algoritmo FR, a continuación, se van a presentar algunos ejemplos más, usando el par de equilibrios que se mostró en la sección 1.2.

Los siguientes datos y parámetros fueron los mismos en todos los experimentos numéricos de este capítulo:

- $N = 1,000$,

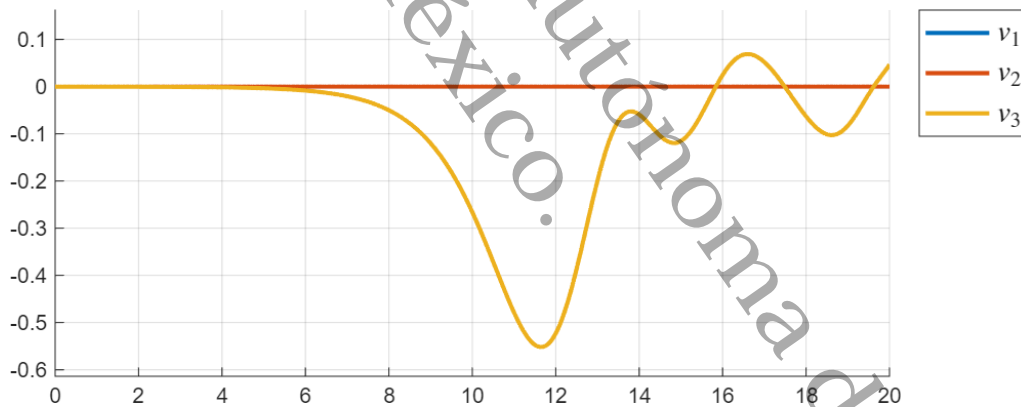
²Programa elaborado en MATLAB ubicado en la ruta Programas de tesis/Transición/Transición controles en L2 con BFGS o GC/Main_controles_L2.m.

- $T = 20$,
- $\eta = 1$,
- $k = 10$,
- $v^0 = 0$,
- $\varepsilon_1 = 1 \times 10^{-5}$ (tolerancia para el GC-FR o BFGS),
- $\varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$ (tolerancia para la búsqueda en línea).

Ejemplo B.3.1 (Operador de escritura del 1 en $(L^2(0, T))^3$). Sean $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. Al aplicar el algoritmo GC-FR, en la iteración 44 el criterio de paro alcanza la tolerancia y se obtiene el control de la Figura 45.

Figura 45

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1

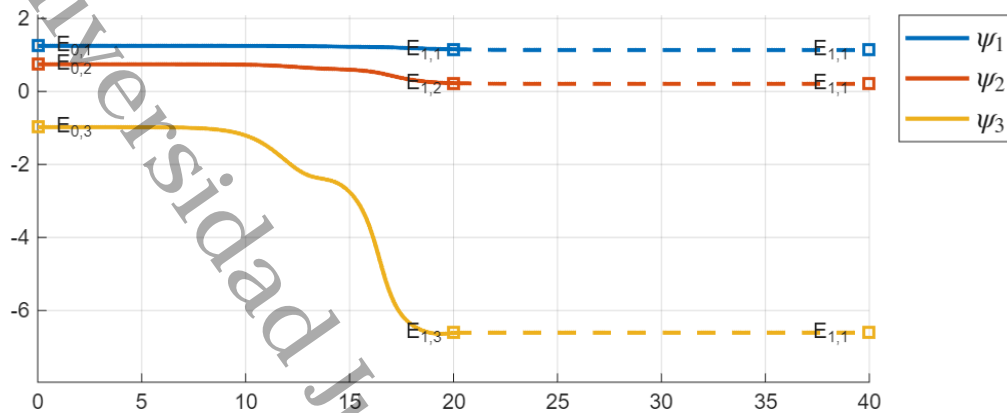


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 46 se muestran las series de tiempo del sistema JJA bajo la influencia del control de la Figura 45.

Figura 46

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 45 y $\psi_0 = E_0$

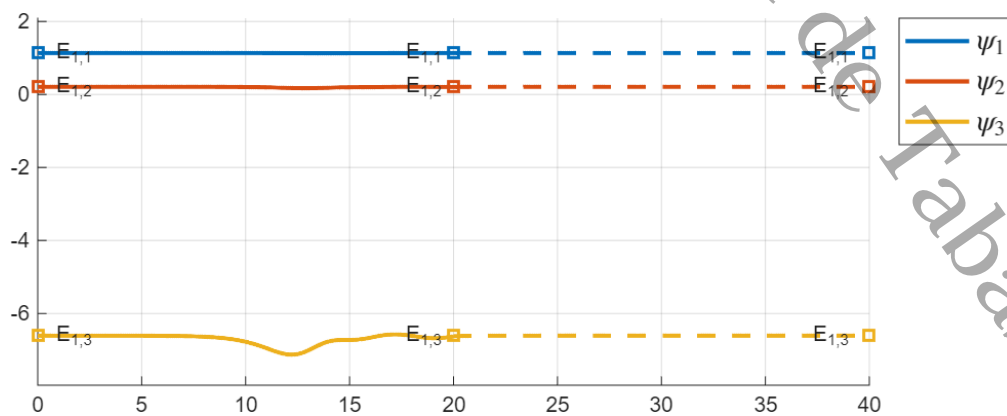


Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 45, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

Cuando se aplica el control de la Figura 45 partiendo desde el estado final E_1 , se puede ver, como se muestra en la Figura 47, que el sistema hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado, por lo tanto, este control es un operador de escritura del 1.

Figura 47

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 45 y $\psi_0 = E_1$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 45, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en el intervalo $[0, 20]$

(líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponder a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

□

Obtención de controles en $(L^2(0, T))^3$ minimizando con el algoritmo BFGS

En el Algoritmo 2 se presenta el pseudocódigo del algoritmo BFGS para minimizar el funcional (B.44) con controles en $(L^2(0, T))^3$.

Algoritmo 2 BFGS para minimizar el funcional de transición (1.15) con controles en $(L^2(0, T))^3$

- 1: **Entrada:** $v^0 \in (L^2(0, T))^3$, tolerancia $\varepsilon > 0$, matriz $H^0 = I$
 - Inicialización:**
 - 2: Calcular $\nabla J(v^0)$:
 - Obtener ψ^0 resolviendo el sistema de estado (1.12) con $v = v^0$
 - Obtener p^0 resolviendo el sistema adjunto (B.35) con $\psi = \psi^0$
 - Calcular $\nabla J(v^0) = \eta v^0 + p^0$
 - 3: $\ell \leftarrow 0$
 - Descenso:**
 - 4: **while** $\|\nabla J(v^\ell)\|^2 / \|\nabla J(v^0)\|^2 > \varepsilon$ **do**
 - 5: Calcular dirección: $d^\ell \leftarrow -H^\ell \nabla J(v^\ell)$
 - 6: Calcular paso $\alpha^\ell = \arg \min_\alpha J(v^\ell + \alpha d^\ell)$
 - 7: Actualizar $v^{\ell+1} \leftarrow v^\ell + \alpha^\ell d^\ell$
 - 8: Calcular $\nabla J(v^{\ell+1})$:
 - Obtener $\psi^{\ell+1}$ resolviendo el sistema de estado (1.12) con $v = v^{\ell+1}$
 - Obtener $p^{\ell+1}$ resolviendo el sistema adjunto (B.35) con $\psi = \psi^{\ell+1}$
 - Calcular $\nabla J(v^{\ell+1}) = \eta v^{\ell+1} + p^{\ell+1}$
 - 9: Tomar $u^\ell \leftarrow v^{\ell+1} - v^\ell$
 - 10: Tomar $w^\ell \leftarrow \nabla J(v^{\ell+1}) - \nabla J(v^\ell)$
 - 11: Tomar $\rho^\ell \leftarrow \frac{1}{(w^\ell)^T u^\ell}$
 - 12: Actualizar la inversa de la hessiana

$$H^{\ell+1} \leftarrow (I - \rho^\ell u^\ell (w^\ell)^T) H^\ell (I - \rho^\ell w^\ell (u^\ell)^T) + \rho^\ell u^\ell (u^\ell)^T$$
 - 13: $\ell \leftarrow \ell + 1$
 - 14: **end while**
 - 15: **Salida:** $v^* = v^\ell$
 - 16: **Fin del algoritmo**
-

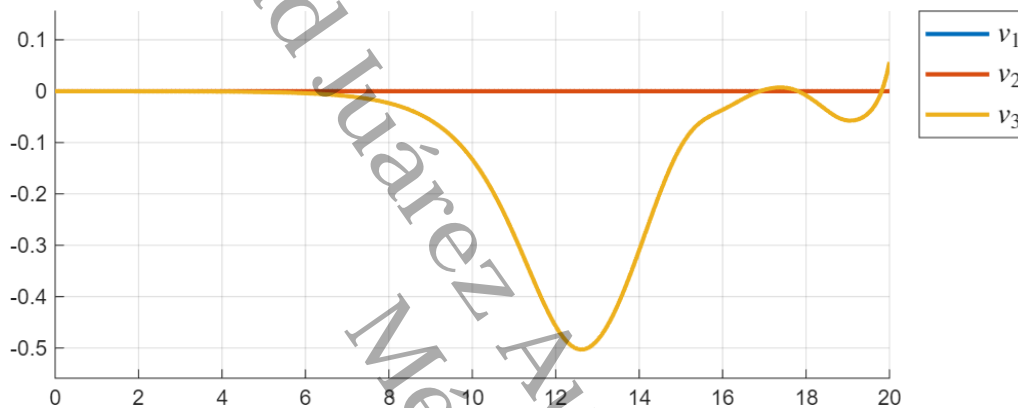
A continuación, se presentarán algunos ejemplos de controles obtenidos minimizando el

funcional J con el algoritmo BFGS, usando el mismo programa aplicado para FR pero cambiando el algoritmo de optimización (asignando a la variable `metodo_min` el valor de 2).

Ejemplo B.3.2 (Operador de escritura del 1 en $(L^2(0, T))^3$). Sean $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = E_1$ y el control solo con la junta 3. Tras aplicar el algoritmo BFGS, en la iteración 32 el criterio de paro alcanza la tolerancia y se obtiene el control de la Figura 48.

Figura 48

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a E_1

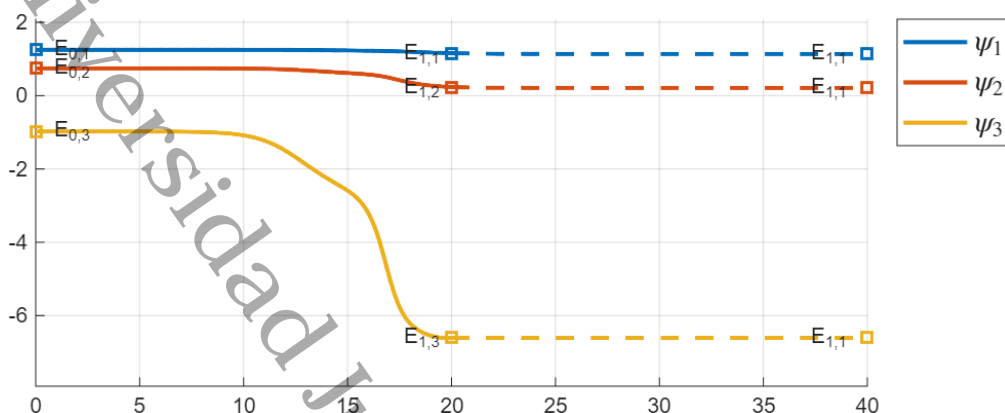


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 3 (curva amarilla), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 1 y 2 (curvas azul y naranja, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 49 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 48.

Figura 49

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 48 y $\psi_0 = E_0$

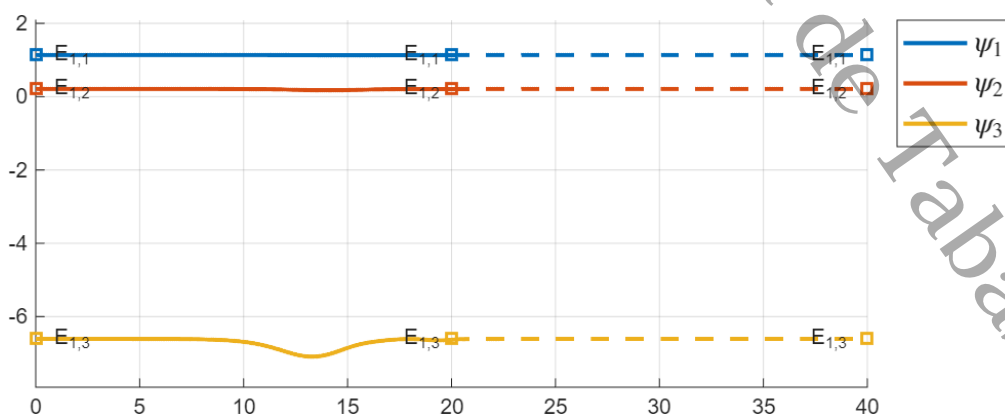


Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 48, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo $[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

Se puede ver en la Figura 50 que, al aplicar el control de la Figura 48 desde el estado final E_1 , el sistema hace un pequeño transitorio y regresa al mismo estado, por lo tanto, este control es un operador de escritura del 1.

Figura 50

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 48 y $\psi_0 = E_1$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la acción del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 48, con condición inicial $\psi_0 = E_1$, en el intervalo $[0, 20]$

(líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponder a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

□

En el ejemplo anterior se puede apreciar que el resultado obtenido con BFGS son muy similar al obtenido con el algoritmo GC-FR, pero con BFGS se requiere un menor número de iteraciones para alcanzar la tolerancia y, por lo tanto, un menor tiempo de cómputo. En la Tabla 2 se hace una comparación de los resultados de los ejemplos presentados con ambos algoritmos.

Tabla 2

Comparación del rendimiento de los algoritmos GC-FR y BFGS

Algoritmo	Criterio de paro	Total de iteraciones
GC-FR	9.199217×10^{-6}	44
BFGS	1.469773×10^{-6}	32

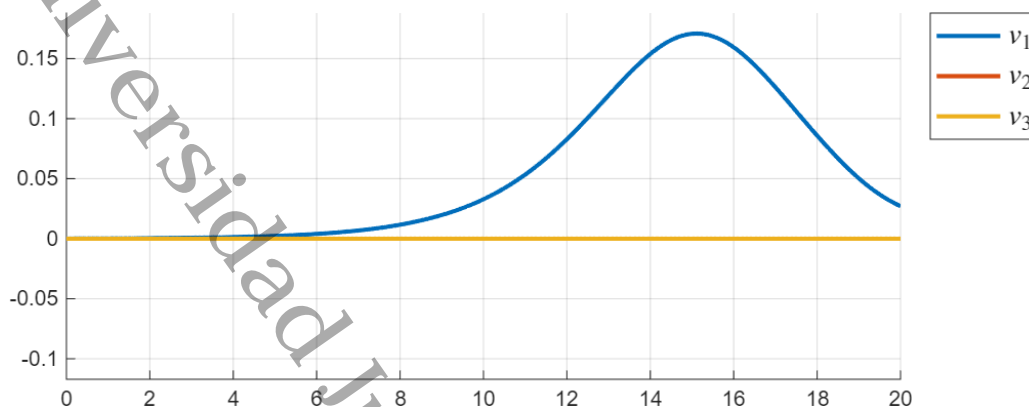
Nota. Comparación de los valores del criterio de paro y el total de iteraciones en los experimentos realizados con cada algoritmo.

De aquí en adelante, los ejemplos que se presenten serán minimizando con el algoritmo BFGS.

Ejemplo B.3.3 (Control en $(L^2(0, T))^3$ para transitar del estado estable E_1 al inestable θ_{i_1}). Sean $\psi_0 = E_0$, $\psi_T = \theta_{i_1}$ y el control solo con la junta 1. El control que se obtuvo es el que se muestra en la Figura 51.

Figura 51

Control óptimo en $(L^2(0, T))^3$ para transitar de E_0 a θ_{i_1}

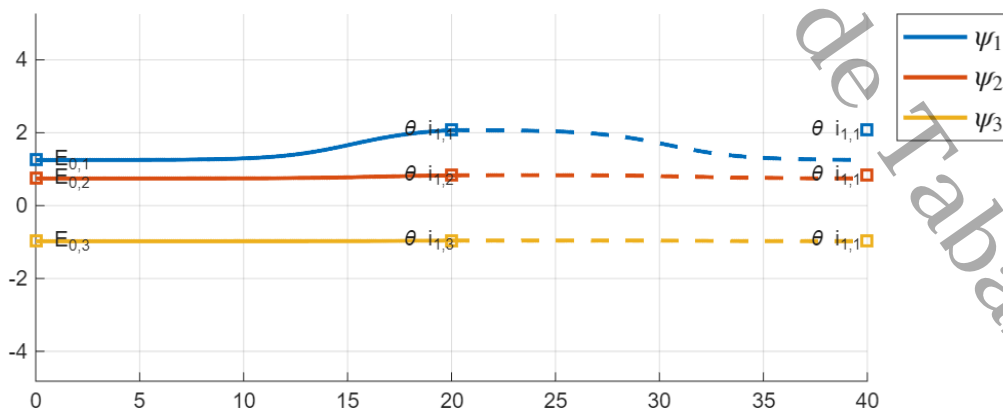


Nota. En este ejemplo se controla solo con la junta 1 (curva azul), así que solo se inyecta energía en esa junta. Las juntas 2 y 3 (curvas naranja y amarilla, respectivamente) permanecen inactivas, por lo tanto la energía inyectada en estas juntas es nula.

En la Figura 52 se muestran las series de tiempo de las variables de estado bajo la influencia del control de la Figura 51, donde se puede observar que el sistema llega al estado objetivo θ_{i_1} al tiempo $T = 20$. El control se aplica en el intervalo $[0, 20]$. Del tiempo $t = 20$ al tiempo $t = 40$ se grafica la dinámica del sistema sin control, en la que se puede ver que el sistema se sale del estado final, como era de esperar ya que es un equilibrio inestable.

Figura 52

Series de tiempo de las variables de estado con el control de la Figura 51 y $\psi_0 = E_0$



Nota. En esta figura se muestran las series de tiempo de las variables de estado ψ_1, ψ_2, ψ_3 bajo la influencia del control en $(L^2(0, T))^3$ de la Figura 51, con condición inicial $\psi_0 = E_0$, en el intervalo

$[0, 20]$ (líneas continuas). A partir de $t = 20$, las líneas discontinuas corresponden a la evolución no controlada del sistema, tomando como condición inicial el estado alcanzado al final del intervalo de control, $\psi(20)$.

□

Aunque los controles obtenidos en $(L^2(0, T))^3$ son óptimos, en la práctica, es difícil desarrollar un dispositivo que inyecte una energía de ese tipo, por eso se tiene interés en encontrar controles más prácticos de implementar, como lo son los continuos lineales por pedazos y los constantes por pedazos. En los capítulos 2 y 3 se aborda la transición entre estados de equilibrio del sistema JJAM con estos tipos de controles.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Estimación numérica de los equilibrios del sistema JJA

En este apéndice se describe de qué forma se estimaron numéricamente algunos de los equilibrios del sistema JJA.

Los equilibrios del sistema JJA se obtienen resolviendo el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} F_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = i_1 - \kappa_1(\psi_1 - \psi_2) - \text{sen } \psi_1 = 0, \\ F_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = i_2 - \kappa_1(\psi_2 - \psi_1) - \kappa_2(\psi_2 - \psi_3) - \text{sen } \psi_2 = 0, \\ F_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = i_3 - \kappa_2(\psi_3 - \psi_2) - \text{sen } \psi_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

con $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$, que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{1}{\gamma_1} (i_1 - \kappa_1(\psi_1 - \psi_2) - \text{sen } \psi_1) = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{1}{\gamma_2} (i_2 - \kappa_1(\psi_2 - \psi_1) - \kappa_2(\psi_2 - \psi_3) - \text{sen } \psi_2) = 0, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{1}{\gamma_3} (i_3 - \kappa_2(\psi_3 - \psi_2) - \text{sen } \psi_3) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Se realizó un programa¹ para estimar de forma numérica los equilibrios del sistema JJA en un región. El programa se describe a continuación.

¹Programa realizado en MATLAB ubicado en la ruta Dinámica del sistema JJA/Equilibrios del sistema JJA/Main.equilibrios_sistema_JJA.m

C.1. Descripción del programa

1. **Definición de la malla:** Se establece una región tridimensional delimitada por los intervalos:

$$x \in [x_i, x_f], \quad y \in [y_i, y_f], \quad z \in [z_i, z_f]$$

con n_x, n_y, n_z nodos en cada dirección. Se genera una malla tridimensional mediante la función `meshgrid`.

2. **Definición del sistema:** Se consideran las funciones:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.1(x - y) + \sin(x) - 1, \\ F_2(x, y, z) = 0.1(y - x) + 0.1(y - z) + \sin(y) - 0.8, \\ F_3(x, y, z) = 0.1(z - y) + \sin(z) + 1. \end{cases}$$

Estas funciones corresponden a las derivadas $\frac{d\psi_1}{dt}, \frac{d\psi_2}{dt}, \frac{d\psi_3}{dt}$ del sistema JJA.

3. **Evaluación sobre la malla:** Se calculan los valores V_1, V_2, V_3 de F_1, F_2, F_3 en cada punto de la malla.
4. **Visualización de superficies de nivel:** Se grafican las superficies $\{F_1 = 0\}$, $\{F_2 = 0\}$ y $\{F_3 = 0\}$ en colores rojo, verde y azul, respectivamente, utilizando la función `isosurface`.
5. **Identificación de posibles equilibrios:** Se detectan los puntos de la malla donde

$$|V_1| < 0.05, \quad |V_2| < 0.05, \quad |V_3| < 0.05.$$

Estos puntos son candidatos a ser equilibrios.

6. **Refinamiento mediante Newton–Raphson:** Cada punto candidato se mejora usando la función `estimar_equilibrio()`, la cual aplica el método de Newton–Raphson para obtener una mejor aproximación del equilibrio.

7. **Análisis de estabilidad:** Para cada equilibrio refinado que:

- haya convergido con Newton–Raphson,
- y esté dentro de la región definida,

se evalúa su estabilidad mediante la función `estabilidad_JJA()`.

Los equilibrios estables se representan con un asterisco en color azul, mientras que los inestables se grafican en color naranja.

C.2. Región que acota los equilibrios para $-\pi \leq \psi_3 \leq \pi$

Para el sistema JJA se tiene que si θ es un equilibrio, entonces $\theta + n(2\pi, 2\pi, 2\pi)$ también es un equilibrio, por lo tanto, es suficiente encontrar los equilibrios en una región de tamaño 2π en alguna de las 3 direcciones. Si consideramos la región definida por $-\pi < z < \pi$, se obtiene que es posible acotar la región en la que se encuentran las soluciones del sistema (C.1) de la siguiente forma.

De

$$F_3(x, y, z) = 0.1(z - y) + \sin z + 1 = 0$$

se despeja y

$$0.1(z - y) = -1 - \sin z$$

$$z - y = -10(1 + \sin z),$$

$$y = z + 10(1 + \sin z).$$

Como $z \in [-\pi, \pi]$ y $\sin z \in [-1, 1]$, se deduce que

$$y \in [z + 10(1 - 1), z + 10(1 + 1)] = [z, z + 20].$$

Por tanto, usando los extremos $z = -\pi$ y $z = \pi$, se tiene que

$$y \in [-\pi, \pi + 20].$$

Además, de $y = z + 10(1 + \sin z)$ se tiene que $y \geq z$ para todo z en el intervalo.

De

$$F_1 = 0.1(x - y) + \text{sen } x - 1 = 0$$

se despeja la diferencia $x - y$

$$x - y = 10(1 - \text{sen } x).$$

Como $\text{sen } x \in [-1, 1]$, entonces

$$x - y \in [0, 20],$$

por lo tanto,

$$x \in [y, y + 20].$$

Usando los extremos para y deducidos antes, se tiene que

$$x \in [-\pi, (\pi + 20) + 20] = [-\pi, \pi + 40].$$

Además, como $x - y \geq 0$, entonces

$$z \leq y \leq x.$$

Así, la región donde se encuentran los equilibrios para $-\pi < z < \pi$ es

$$\mathbb{K} = \{(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid -\pi \leq \psi_3 \leq \pi, -\pi \leq \psi_1 \leq \pi + 40, -\pi \leq \psi_2 \leq \pi + 20\}.$$

C.3. Equilibrios en la región \mathbb{K}

Haciendo uso del programa descrito antes considerando la región deducida arriba con $n_x = n_y = n_z = 400$ nodos en cada dirección, se obtienen las superficies de nivel para el valor de 0 que se muestran en la Figura 53. Los puntos en los que se intersecan las 3 superficies son los equilibrios del sistema (en esa región) y son los que se muestran en la Figura 54.

Figura 53

Superficies de nivel $\{F_1 = 0\}$, $\{F_2 = 0\}$ y $\{F_3 = 0\}$ en la región \mathbb{K}

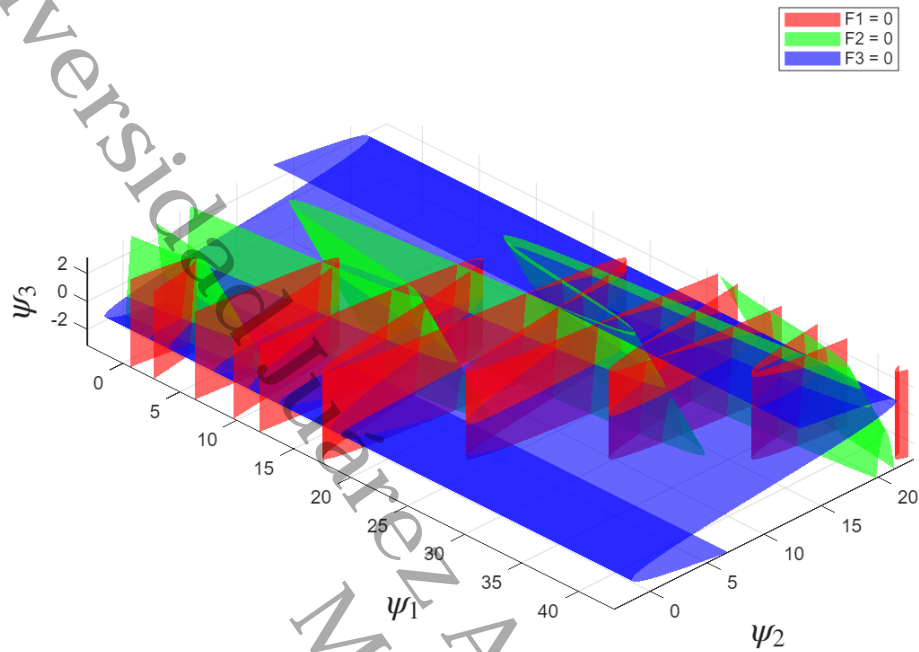
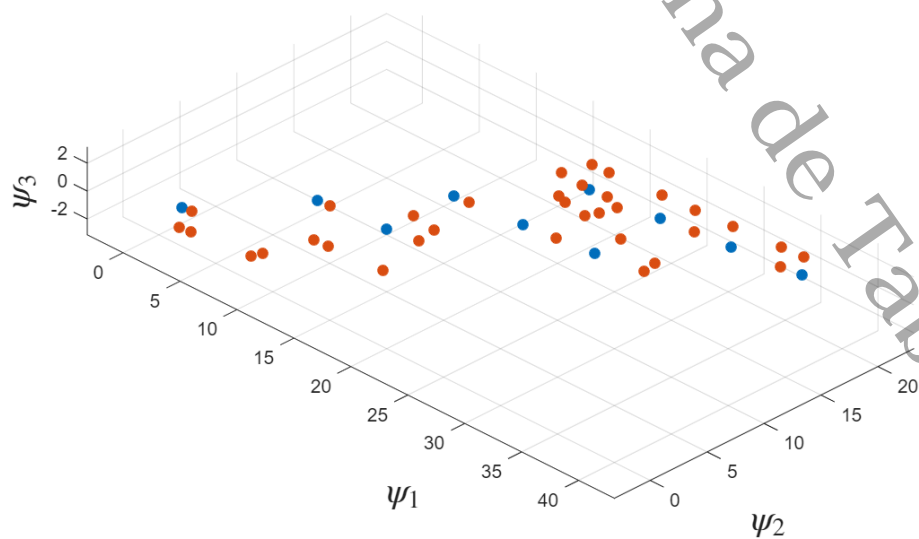


Figura 54

Equilibrios del sistema JJA encontrados en la región \mathbb{K}



Nota. Los equilibrios en azul son estables y los equilibrios en naranja son inestables.

En la Tabla 3 se enlistan los equilibrios estables e inestables obtenidos.

Tabla 3

Equilibrios del sistema JJA encontrados en la región \mathbb{K}

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Estabilidad
θ_{e_0}	1.2514	0.7457	-0.9753	Estable
θ_{e_1}	7.4205	6.4954	-0.3237	Estable
θ_{e_2}	12.9815	7.0144	-0.2745	Estable
θ_{e_3}	13.6159	12.2878	0.2094	Estable
θ_{e_4}	19.2124	12.7618	0.2535	Estable
θ_{e_5}	19.8115	18.0146	0.8052	Estable
θ_{e_6}	24.9652	13.2972	0.3040	Estable
θ_{e_7}	25.4496	18.5653	0.8770	Estable
θ_{e_8}	31.1997	19.0546	0.9457	Estable
θ_{e_9}	36.8817	19.5882	1.0276	Estable
θ_{i_0}	1.2178	0.6010	-2.3608	Inestable
θ_{i_1}	2.0730	0.8383	-0.9615	Inestable
θ_{i_2}	2.1105	0.6890	-2.3751	Inestable
θ_{i_3}	6.7561	1.3108	-2.4706	Inestable
θ_{i_4}	6.8539	2.2566	-2.6015	Inestable
θ_{i_5}	7.3771	6.2611	-3.0752	Inestable
θ_{i_6}	8.4793	6.5869	-0.3150	Inestable
θ_{i_7}	8.5252	6.3560	-3.0857	Inestable
θ_{i_8}	12.9540	6.7341	-3.1278	Inestable
θ_{i_9}	13.2016	9.1356	-0.0787	Inestable
$\theta_{i_{10}}$	14.8538	12.3940	0.2192	Inestable
$\theta_{i_{11}}$	15.3525	8.8327	-0.1063	Inestable
$\theta_{i_{12}}$	15.5272	7.3248	-0.2454	Inestable
$\theta_{i_{13}}$	19.5320	15.8393	2.8366	Inestable

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Estabilidad
$\theta_{i_{14}}$	19.5658	16.1315	0.5876	Inestable
$\theta_{i_{15}}$	19.8400	18.2028	2.5396	Inestable
$\theta_{i_{16}}$	21.1966	18.3322	2.5216	Inestable
$\theta_{i_{17}}$	21.2233	18.1692	0.8248	Inestable
$\theta_{i_{18}}$	21.5434	15.8730	0.5601	Inestable
$\theta_{i_{19}}$	21.5798	15.5787	2.8670	Inestable
$\theta_{i_{20}}$	21.8489	13.2665	3.1277	Inestable
$\theta_{i_{21}}$	21.8793	12.9958	0.2755	Inestable
$\theta_{i_{22}}$	24.9968	13.6420	3.0860	Inestable
$\theta_{i_{23}}$	25.1277	15.0771	2.9246	Inestable
$\theta_{i_{24}}$	25.1590	15.4211	0.5130	Inestable
$\theta_{i_{25}}$	25.4626	18.7018	2.4686	Inestable
$\theta_{i_{26}}$	28.2017	18.9277	2.4350	Inestable
$\theta_{i_{27}}$	28.2157	18.8017	0.9095	Inestable
$\theta_{i_{28}}$	28.6621	14.8811	0.4582	Inestable
$\theta_{i_{29}}$	28.7949	13.8215	0.3541	Inestable
$\theta_{i_{30}}$	31.2114	19.1802	2.3960	Inestable
$\theta_{i_{31}}$	35.1530	19.5442	2.3367	Inestable
$\theta_{i_{32}}$	35.1711	19.4134	0.9998	Inestable
$\theta_{i_{33}}$	36.9002	19.7341	2.3040	Inestable

Nota. Los equilibrios están clasificados de acuerdo a su estabilidad.

Cada uno de los equilibrios encontrados define una familia de equilibrios.

Algoritmos usados en la tesis

En este apéndice se muestra el pseudocódigo de los algoritmos usados para los experimentos numéricos que se presentan en los capítulos 2 y 3. Por motivos de extensión algunos de ellos se han dividido en dos partes.

Algoritmo 3 BFGS para minimizar el funcional de transición (2.11) con controles continuos lineales por pedazos con disparo múltiple modificado (Parte 1)

1: **Entrada:** $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{c}^0, \mathbf{s}^0)$, donde $\mathbf{c}^0 \in (\mathbb{R}^3)^{ns+1}$ es el representante de \mathbf{v}^0 , $\varepsilon > 0$ y una aprox. inicial de la inversa de la hessiana $H^0 = I$;

Inicialización:

2: Calcular $\nabla J(\mathbf{x}^0)$:

3: **for** $j = 1$ **to** ns **do**

4: Calcular $q_j^1 = \frac{\tau_{j+1}-t}{\tau_{j+1}-\tau_j}$ y $q_j^2 = \frac{t-\tau_j}{\tau_{j+1}-\tau_j}$;

5: **if** $j == 1$ **then**

6: Resolver (2.53) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^0 = q_j^1 \mathbf{c}_1^0 + q_j^2 \mathbf{c}_2^0$ para obtener $\boldsymbol{\psi}_1^0$;

7: **else**

8: Resolver (2.54) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^0 = q_j^1 \mathbf{c}_j^0 + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^0$ para obtener $\boldsymbol{\psi}_j^0$;

9: **end if**

10: Resolver el sistema adjunto (2.30) con $\boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\psi}_j^0$ para obtener \mathbf{p}_j^0 ;

11: Calcular:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{x}^0) &= \int_{I_j} q_j^1 [\boldsymbol{\eta} \mathbf{v}_j^0 + \mathbf{p}_j^0] dt, \\ \nabla_{\mathbf{c}_{j+1}} J(\mathbf{x}^0) &= \int_{I_j} q_j^2 [\boldsymbol{\eta} \mathbf{v}_j^0 + \mathbf{p}_j^0] dt, \\ \nabla_{\mathbf{s}_{j+1}} J(\mathbf{x}^0) &= -k(\boldsymbol{\psi}_j^0(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}^0). \end{aligned} \tag{D.1}$$

12: **end for**

Algoritmo 4 BFGS para minimizar el funcional de transición (2.11) con controles continuos lineales por pedazos con disparo múltiple modificado (Parte 2)

- 1: $\ell \leftarrow 0$;
- Descenso:**
- 2: **while** $\|\nabla J(\mathbf{c}^\ell)\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{c}^0)\|^2 > \varepsilon$ **do**
- 3: Calcular dirección $\mathbf{d}^\ell \leftarrow -H^\ell \nabla J(\mathbf{x}^\ell)$;
- 4: Buscar paso $\alpha^\ell = \arg \min J(\mathbf{x}^\ell + \alpha \mathbf{d}^\ell)$;
- 5: Actualizar $\mathbf{x}^{\ell+1} \leftarrow \mathbf{x}^\ell + \alpha^\ell \mathbf{d}^\ell$;
- 6: Calcular $\nabla J(\mathbf{x}^{\ell+1})$;
- 7: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
- 8: Calcular $q_j^1 = \frac{\tau_{j+1}-t}{\tau_{j+1}-\tau_j}$ y $q_j^2 = \frac{t-\tau_j}{\tau_{j+1}-\tau_j}$;
- 9: **if** $j == 1$ **then**
- 10: Resolver (2.53) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^{\ell+1} = q_j^1 \mathbf{c}_1^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_2^{\ell+1}$ para obtener $\boldsymbol{\psi}_1^{\ell+1}$;
- 11: **else**
- 12: Resolver (2.54) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^{\ell+1} = q_j^1 \mathbf{c}_j^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^{\ell+1}$ para obtener $\boldsymbol{\psi}_j^{\ell+1}$;
- 13: **end if**
- 14: Resolver el sistema adjunto (2.30) con $\boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\psi}_j^{\ell+1}$ para obtener $\mathbf{p}_j^{\ell+1}$;
- 15: Calcular:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{x}^{\ell+1}) &= \int_{I_j} q_j^1 [\eta \mathbf{v}_j^{\ell+1} + \mathbf{p}_j^{\ell+1}] dt, \\ \nabla_{\mathbf{c}_{j+1}} J(\mathbf{x}^{\ell+1}) &= \int_{I_j} q_j^2 [\eta \mathbf{v}_j^{\ell+1} + \mathbf{p}_j^{\ell+1}] dt, \\ \nabla_{\mathbf{s}_{j+1}} J(\mathbf{x}^{\ell+1}) &= -\ell(\boldsymbol{\psi}_j^{\ell+1}(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}^{\ell+1}). \end{aligned} \tag{D.2}$$
- 16: **end for**
- 17: Tomar $\mathbf{u}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell+1} - \mathbf{x}^\ell$; $\mathbf{w}^\ell \leftarrow \nabla J(\mathbf{x}^{\ell+1}) - \nabla J(\mathbf{x}^\ell)$; $\rho^\ell \leftarrow 1/(\mathbf{w}^\ell)^T \mathbf{u}^\ell$;
- 18: Calcular: $H^{\ell+1} = (I - \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{w}^\ell)^T) H^\ell (I - \rho^\ell \mathbf{w}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T) + \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T$;
- 19: $\ell \leftarrow \ell + 1$;
- 20: **end while**
- 21: **return** \mathbf{v}^* , el control continuo lineal por pedazos definido por el \mathbf{c}^* asociado a $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\ell+1}$;
- 22: **Fin del algoritmo.**

Algoritmo 5 BFGS para minimizar el funcional de transición 2.11 con controles constantes por pedazos con disparo múltiple modificado

1: **Entrada:** $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{c}^0, \mathbf{s}^0)$, donde $\mathbf{c}^0 \in (\mathbb{R}^3)^{ns}$ es el representante de \mathbf{v}^0 , $\varepsilon > 0$ y una aprox. inicial de la inversa de la hessiana $H^0 = I$;

Inicialización:

2: Calcular $\nabla J(\mathbf{x}^0)$;
 3: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
 4: **if** $j == 1$ **then**
 5: Resolver (2.53) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^0 = \mathbf{c}_1^0$ para obtener ψ_1^0 ;
 6: **else**
 7: Resolver (2.54) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^0 = \mathbf{c}_j^0$ para obtener ψ_j^0 ;
 8: **end if**
 9: Resolver el sistema adjunto (2.30) con $\psi_j = \psi_j^0$ para obtener \mathbf{p}_j^0 ;
 10: Calcular:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{x}^0) &= \eta(\tau_{j+1} - \tau_j) \mathbf{c}_j^0 + \int_{I_j} \mathbf{p}_j^0 dt, \\ \nabla_{\mathbf{s}_{j+1}} J(\mathbf{x}^0) &= -k(\psi_j^0(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}^0).\end{aligned}\tag{D.3}$$

11: **end for**

12: $\ell \leftarrow 0$;

Descenso:

13: **while** $\|\nabla J(\mathbf{c}^\ell)\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{c}^0)\|^2 \geq \varepsilon$ **do**
 14: Calcular dirección $\mathbf{d}^\ell \leftarrow -H^\ell \nabla J(\mathbf{x}^\ell)$;
 15: Buscar paso $\alpha^\ell = \arg \min J(\mathbf{x}^\ell + \alpha \mathbf{d}^\ell)$;
 16: Actualizar $\mathbf{x}^{\ell+1} \leftarrow \mathbf{x}^\ell + \alpha^\ell \mathbf{d}^\ell$;
 17: Calcular $\nabla J(\mathbf{x}^{\ell+1})$;
 18: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
 19: **if** $j == 1$ **then**
 20: Resolver (2.53) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^{\ell+1} = \mathbf{c}_1^{\ell+1}$ para obtener $\psi_1^{\ell+1}$;
 21: **else**
 22: Resolver (2.54) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^{\ell+1} = \mathbf{c}_j^{\ell+1}$ para obtener $\psi_j^{\ell+1}$;
 23: **end if**
 24: Resolver el sistema adjunto (2.30) con $\psi_j = \psi_j^{\ell+1}$ para obtener $\mathbf{p}_j^{\ell+1}$;
 25: Calcular:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{x}^{\ell+1}) &= \eta(\tau_{j+1} - \tau_j) \mathbf{c}_j^{\ell+1} + \int_{I_j} \mathbf{p}_j^{\ell+1} dt, \\ \nabla_{\mathbf{s}_{j+1}} J(\mathbf{x}^{\ell+1}) &= -k(\psi_j^{\ell+1}(\tau_{j+1}) - \mathbf{s}_{j+1}^{\ell+1}).\end{aligned}\tag{D.4}$$

26: **end for**

27: Tomar $\mathbf{u}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell+1} - \mathbf{x}^\ell$; $\mathbf{w}^\ell \leftarrow \nabla J(\mathbf{x}^{\ell+1}) - \nabla J(\mathbf{x}^\ell)$; $\rho^\ell \leftarrow 1/(\mathbf{w}^\ell)^T \mathbf{u}^\ell$;

28: Calcular:

$$H^{\ell+1} = (I - \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{w}^\ell)^T) H^\ell (I - \rho^\ell \mathbf{w}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T) + \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T;$$

29: $\ell \leftarrow \ell + 1$;

30: **end while**

31: **return** \mathbf{v}^* , el control continuo lineal por pedazos definido por el \mathbf{c}^* asociado a $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\ell+1}$;

32: **Fin del algoritmo.**

Algoritmo 6 BFGS para minimizar el funcional de transición (3.5) con controles continuos lineales por pedazos con disparo múltiple fijo (Parte 1)

- 1: **Entrada:** $\mathbf{c}^0 \in (\mathbb{R}^3)^{ns+1}$, $\varepsilon > 0$ y una aprox. inicial de la inversa de la hessiana $H^0 = I$;
Inicialización:
2: Calcular $\nabla J(\mathbf{c}^0)$:
3: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
4: Calcular $q_j^1 = \frac{\tau_{j+1}-t}{\tau_{j+1}-\tau_j}$ y $q_j^2 = \frac{t-\tau_j}{\tau_{j+1}-\tau_j}$;
5: **if** $j == 1$ **then**
6: Resolver (3.7) con $\mathbf{v}_1 = q_j^1 \mathbf{c}_1^0 + q_j^2 \mathbf{c}_2^0$ para obtener ψ_1^0 ;
7: **else**
8: Resolver (3.8) con $\mathbf{v}_j = q_j^1 \mathbf{c}_j^0 + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^0$ para obtener ψ_j^0 ;
9: **end if**
10: Resolver el sistema adjunto (3.18) con $\psi = \psi_j^0$ para obtener \mathbf{p}_j^0 ;
11: Calcular:

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{c}^0) = \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j^0 + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^0) + \mathbf{p}_j^0] dt;$$

$$\nabla_{\mathbf{c}_{j+1}} J(\mathbf{c}^0) = \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j^0 + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^0) + \mathbf{p}_j^0] dt;$$

- 12: **end for**
-

Algoritmo 7 BFGS para minimizar el funcional de transición (3.5) con controles continuos lineales por pedazos con disparo múltiple fijo (Parte 2)

- 1: $\ell \leftarrow 0$;
- Descenso:**
- 2: **while** $\|\nabla J(\mathbf{c}^\ell)\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{c}^0)\|^2 > \varepsilon$ **do**
- 3: Calcular dirección $\mathbf{d}^\ell \leftarrow -H^\ell \nabla J(\mathbf{c}^\ell)$;
- 4: Buscar paso $\alpha^\ell = \arg \min J(\mathbf{c}^\ell + \alpha \mathbf{d}^\ell)$;
- 5: Actualizar $\mathbf{c}^{\ell+1} \leftarrow \mathbf{c}^\ell + \alpha^\ell \mathbf{d}^\ell$;
- 6: Calcular $\nabla J(\mathbf{c}^{\ell+1})$:
- 7: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
- 8: Calcular $q_j^1 = \frac{\tau_{j+1}-t}{\tau_{j+1}-\tau_j}$ y $q_j^2 = \frac{t-\tau_j}{\tau_{j+1}-\tau_j}$;
- 9: **if** $j == 1$ **then**
- 10: Resolver (3.7) con $\mathbf{v}_1 = q_j^1 \mathbf{c}_1^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_2^{\ell+1}$ para obtener $\psi_1^{\ell+1}$;
- 11: **else**
- 12: Resolver (3.8) con $\mathbf{v}_j = q_j^1 \mathbf{c}_j^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^{\ell+1}$ para obtener $\psi_j^{\ell+1}$;
- 13: **end if**
- 14: Resolver el sistema adjunto (3.18) con $\psi = \psi_j^{\ell+1}$ para obtener $\mathbf{p}_j^{\ell+1}$;
- 15: Calcular:

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{c}^{\ell+1}) = \int_{I_j} q_j^1 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^{\ell+1}) + \mathbf{p}_j^{\ell+1}] dt;$$

$$\nabla_{\mathbf{c}_{j+1}} J(\mathbf{c}^{\ell+1}) = \int_{I_j} q_j^2 [\eta(q_j^1 \mathbf{c}_j^{\ell+1} + q_j^2 \mathbf{c}_{j+1}^{\ell+1}) + \mathbf{p}_j^{\ell+1}] dt;$$

- 16: **end for**
- 17: Tomar $\mathbf{u}^\ell \leftarrow \mathbf{c}^{\ell+1} - \mathbf{c}^\ell$; $\mathbf{w}^\ell \leftarrow \nabla J(\mathbf{c}^{\ell+1}) - \nabla J(\mathbf{c}^\ell)$; $\rho^\ell \leftarrow 1/(\mathbf{w}^\ell)^T \mathbf{u}^\ell$;
- 18: Calcular:

$$H^{\ell+1} = (I - \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{w}^\ell)^T) H^\ell (I - \rho^\ell \mathbf{w}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T) + \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T;$$

- 19: $\ell \leftarrow \ell + 1$;
- 20: **end while**
- 21: **return** \mathbf{v}^* , el control continuo lineal por pedazos generado por $\mathbf{c}^* = \mathbf{c}^\ell$;
- 22: **Fin del algoritmo.**

Algoritmo 8 BFGS para minimizar el funcional de transición (3.5) con controles constantes por pedazos con disparo múltiple fijo

- 1: **Entrada:** $\mathbf{c}^0 \in (\mathbb{R}^3)^{ns}$, $\varepsilon > 0$ y una aprox. inicial de la inversa de la hessiana $H^0 = I$;
- Inicialización:**
- 2: Calcular $\nabla J(\mathbf{v}^0)$;
- 3: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
- 4: **if** $j == 1$ **then**
- 5: Resolver (3.7) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_1^0$ para obtener ψ_1^0 ;
- 6: **else**
- 7: Resolver (3.8) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{c}_j^0$ para obtener ψ_j^0 ;
- 8: **end if**
- 9: Resolver el sistema adjunto (3.18) con $\psi = \psi_j^0$ para obtener \mathbf{p}_j^0 ;
- 10: Calcular:

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{v}^0) = \int_{I_j} (\eta \mathbf{c}_j^0 + \mathbf{p}_j^0) dt;$$

11: **end for**

12: $\ell \leftarrow 0$;

Descenso:

- 13: **while** $\|\nabla J(\mathbf{c}^\ell)\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{c}^0)\|^2 > \varepsilon$ **do**
- 14: Calcular dirección $\mathbf{d}^\ell \leftarrow -H^\ell \nabla J(\mathbf{c}^\ell)$;
- 15: Buscar paso $\alpha^\ell = \arg \min J(\mathbf{c}^\ell + \alpha \mathbf{d}^\ell)$;
- 16: Actualizar $\mathbf{c}^{\ell+1} \leftarrow \mathbf{c}^\ell + \alpha^\ell \mathbf{d}^\ell$;
- 17: Calcular $\nabla J(\mathbf{c}^{\ell+1})$;
- 18: **for** $j = 1$ **to** ns **do**
- 19: Calcular $q_j^1 = \frac{\tau_{j+1}-t}{\tau_{j+1}-\tau_j}$ y $q_j^2 = \frac{t-\tau_j}{\tau_{j+1}-\tau_j}$;
- 20: **if** $j == 1$ **then**
- 21: Resolver (3.7) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_1^{\ell+1}$ para obtener $\psi_1^{\ell+1}$;
- 22: **else**
- 23: Resolver (3.8) con $\mathbf{v}_j = \mathbf{c}_j^{\ell+1}$ para obtener $\psi_j^{\ell+1}$;
- 24: **end if**
- 25: Resolver el sistema adjunto (3.18) con $\psi = \psi_j^{\ell+1}$ para obtener $\mathbf{p}_j^{\ell+1}$;
- 26: Calcular:

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} J(\mathbf{v}^{\ell+1}) = \int_{I_j} (\eta \mathbf{c}_j^{\ell+1} + \mathbf{p}_j^{\ell+1}) dt;$$

27: **end for**

28: Tomar $\mathbf{u}^\ell \leftarrow \mathbf{c}^{\ell+1} - \mathbf{c}^\ell$; $\mathbf{w}^\ell \leftarrow \nabla J(\mathbf{c}^{\ell+1}) - \nabla J(\mathbf{c}^\ell)$; $\rho^\ell \leftarrow 1/(\mathbf{w}^\ell)^T \mathbf{u}^\ell$;

29: Calcular:

$$H^{\ell+1} = (I - \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{w}^\ell)^T) H^\ell (I - \rho^\ell \mathbf{w}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T) + \rho^\ell \mathbf{u}^\ell (\mathbf{u}^\ell)^T;$$

30: $\ell \leftarrow \ell + 1$;

31: **end while**

32: **return** \mathbf{v}^* , el control constante por pedazos definido por $\mathbf{c}^* = \mathbf{c}^\ell$;

33: **Fin del algoritmo.**

Método sin derivadas para resolver los PBL

PBL

En este apéndice se describe un método sin derivada para resolver los PBL. Este método está basado en los métodos *grid search* y *pattern search*, los cuales son métodos de búsqueda local [Belete and Huchaiah, 2021, Lewis et al., 2000].

Método sin derivada para resolver el PBL

Paso 1. Definir un intervalo inicial

$$[\gamma_0 - r_0, \gamma_0 + r_0] \quad (\text{E.1})$$

donde γ_0 es una aproximación inicial del mínimo de $g(\alpha) = J(\mathbf{v} + \alpha \mathbf{d})$ y r_0 es el radio del intervalo.

Paso 2. Dar un factor $0 < \omega < 1$, con el que se irá reduciendo el tamaño del radio, y $\epsilon > 0$, una tolerancia para el criterio de paro.

Paso 3. Definir m nodos uniformemente espaciados en el intervalo $[\gamma_0 - r_0, \gamma_0 + r_0]$

$$\gamma_0 - r_0 = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = \gamma_0 + r_0, \quad (\text{E.2})$$

en los que se evaluará la función $g(\alpha)$.

Paso 4. Evaluar $g(\alpha)$ en cada nodo $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, e identificar el α_i que tiene el menor valor bajo $g(\alpha)$:

$$\gamma_1 = \arg \min \{g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_m)\}. \quad (\text{E.3})$$

Paso 5. Si $\gamma_1 = \alpha_1$ o $\gamma_1 = \alpha_m$ tomar $r_1 = r_0$, de lo contrario, tomar $r_1 = \omega r_0$ y definir un nuevo intervalo centrado en γ_1 y de radio r_1 .

Paso 6. Tomar $\gamma_0 = \gamma_1$, $r_0 = r_1$, repetir los pasos 2-5 hasta que $r_0 < \epsilon$ y tomar $\alpha^* = \arg \min g(\alpha)$ como γ_0 .

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional

Tabla 4

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional

Título de Tesis:	Control de un circuito de Josephson. Minimizando con el algoritmo BFGS y disparo múltiple.
Autores de la Tesis:	Jasiel Chavala Miss. Asesor: Dr. Jorge López López (UJAT). Co-asesor: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia.
ORCID:	0000-0001-7328-4866.
Resumen de la Tesis:	En esta tesis se presentan métodos para obtener controles óptimos continuos lineales por pedazos y constantes por pedazos para un circuito compuesto por un arreglo de tres juntas de Josephson acopladas inductivamente que es empleado en la fabricación de unidades de memoria y que es modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Se trabajó en la obtención de controles para transitar entre dos estados del sistema, los cuales sirven para definir operadores de memoria. Los métodos presentados se basan en la metodología de disparo múltiple combinada con el algoritmo BFGS. Con estos métodos se obtuvieron resultados satisfactorios, de los cuales se muestran algunos ejemplos con simulaciones numéricas.

Palabras claves de la Tesis: Juntas de Josephson, control óptimo, disparo múltiple, algoritmo BFGS.

Referencias citadas: Las referencias citadas son las que se presentan en la bibliografía.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.