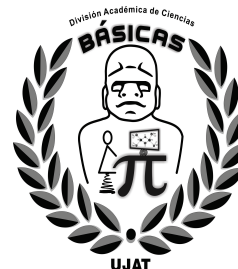




UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



DETERMINACIÓN DE CAOS EN SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

FIDADELFO MONDRAGÓN SÁNCHEZ

DIRECTORES

DR. MIGUEL ANGEL DE LA ROSA CASTILLO,

DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

CUNDUACÁN, TAB.

OCTUBRE 2023



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



DIRECCIÓN

División
Académica
de Ciencias
Básicas



12 de octubre de 2023

M.C. FIDAELO MONDRAGÓN SÁNCHEZ
PASANTE DEL DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRESENTE.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**DETERMINACIÓN DE CAOS EN SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS**", en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE.

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo

DIR'DRA.HPV/JP'DRA.EAM/elg

Miembro CUMEX desde 2008



UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.

Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

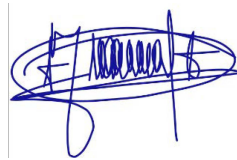
El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de doctorado denominada **“Determinación de Caos en Sistemas Dinámicos Continuos”** de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa Tabasco a los 23 días del mes de octubre del año 2023.

AUTORIZÓ



M. C. Fidadelfo Mondragón Sánchez
Matricula: 192A22001

*A Jordán F., Eneyda,
Anibal, Jaqueline
y mis Padres*

Agradecimientos

A Dios, por la vida y permitir concluir una etapa más de mi vida profesional.

31 *A mi familia por su amor, comprensión, apoyo incondicional y moral.*

Al Dr. Miguel Angel De la Rosa Castillo, profesor investigador del CONAHCYT-UJAT, por la dirección de este proyecto de tesis, por haberme regalado muchas horas de su valioso tiempo para el análisis, revisión de la investigación que forman parte de esta tesis y dado sugerencias en la redacción de la misma.

Al Dr. Gamaliel Blé González, profesor investigador de la División Académica de Ciencias Básicas de la UJAT, por formar parte en la dirección de esta tesis, haberme regalado su valioso tiempo en el análisis y revisión de los temas que forman parte de este proyecto de tesis.

A la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), por haberme acogido como estudiante para cursar el Doctorado en Ciencias Matemáticas, en el periodo agosto 2019-julio 2022.

43 *Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por la beca de manutención No. 788504 que me otorgó para cursar el Doctorado en Ciencias Matemáticas, durante el período agosto 2019 - julio 2022.*

¡A todos ellos, mil gracias!

Introducción

El estudio de los movimientos de los cuerpos ha fascinado a la humanidad durante cientos de años. Fueron los estudios del Sir. Isaac Newton para entender y modelar la dinámica de los planetas del sistema solar lo que llevó al desarrollo del cálculo diferencial y de la teoría sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias. El estudio de los sistemas no lineales mostró la dificultad de dar una solución analítica explícita y que en la mayoría de los casos era imposible. Debido a ello, a finales del siglo XIX, Henry Poincaré propuso métodos cualitativos y geométricos para describir los comportamientos límites de las soluciones de una ecuación diferencial en general [G]. Por otra parte, al analizar los conjuntos límites de un sistema dinámico no lineal, se han observado conjuntos muy complicados, lo que ha permitido introducir un nuevo término que actualmente conocemos como caos [GH, R]. Los métodos geométricos y cualitativos para analizar los sistemas no lineales introducidos por Poincaré, fueron seguidos por Birkhoff (1927), Lyapunov (1949), Smale (1963), Melnikov (1963), Lorenz (1963), Andronov (1973), por mencionar algunos [GH].

La dinámica caótica en un sistema no lineal se caracteriza principalmente por: tener sensibilidad a las condiciones iniciales, ser transitivo y que el conjunto de órbitas periódicas sea denso [D]. En 1965, Stephen Smale detectó la manifestación de caos en un sistema conocido actualmente como herradura de Smale [GH, S]. En la literatura se pueden apreciar varios enfoques que en cierto sentido generalizan el trabajo de Smale y permiten determinar caos en un sistema dinámico discreto. Éstos proporcionan una herramienta para determinar condiciones que garantizan la presencia de caos en la aplicación de Poincaré en un sistema diferencial [P, R, W]. De hecho, en sistemas discretos, el caos aparece desde las funciones de una variable, mientras que para sistemas de ecuaciones diferenciales, las soluciones no presentan caos cuando se tiene una o dos variables. En el caso de tres variables se conocen ejemplos que presentan caos y hay muchos resultados numéricos que muestran caos, pero aún falta mucho por analizar y formalizar, por lo que resulta ser un problema de interés, sobre todo en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

Entre los sistemas diferenciales de tipo depredador-presa que modelan procesos ecológicos o biológicos se encuentran los de tipo Leslie. Tales sistemas se caracterizan por la suposición de que el depredador es generalista y el beneficio de alimentarse de la presa se refleja en su capacidad de carga (ver [HH, HX, HRS, LX] y las referencias allí citadas). En el caso tridimensional, Aziz-Alaoui considera un modelo de depredación intragremial, basado en una versión modificada del esquema de Leslie-Gower, donde el depredador es especialista y el superdepredador es generalista. Además, el superdepredador se alimenta del depredador y el recurso. El establece condiciones para acotar las

soluciones del sistema, existencia de un conjunto atractor, existencia de equilibrios y su estabilidad local o global, las cuales representan la extinción del superdepredador o depredador [A]. Posteriormente, Priyadarshi y Gakkhar analizaron la dinámica de un sistema tritrófico de red alimentaria, donde el depredador y el superdepredador son generalistas. Ellos dan condiciones para las cuales las soluciones del sistema son acotadas. Además, prueban la bifurcación de Hopf en los planos fase y la coexistencia de las tres especies a través de soluciones periódicas o la existencia de órbitas caóticas [PG]. Agrawal *et al.* consideran un sistema tritrófico del tipo Leslie-Gower y analizan el efecto de un retardo en la respuesta numérica del depredador. Ellos muestran la estabilidad de los equilibrios, bifurcación de Hopf y bifurcación doble de Hopf cuando las respuestas funcionales son de tipo Holling IV y tipo Beddington-DeAngelis para el depredador y superdepredador, respectivamente. Suponen que el superdepredador es de tipo generalista y su crecimiento se debe a la reproducción sexual. Numéricamente ellos muestran la existencia de comportamiento caótico en el sistema [AJUR].

8 Recientemente, Blé y Dela-Rosa muestran las condiciones de los parámetros bajo las cuales un modelo tritrófico de tipo Leslie experimenta una bifurcación de codimensión 2 Bogdanov-Takens, lo que implica que hay curvas en el espacio de parámetros en las que el sistema puede exhibir una bifurcación silla-nodo, Hopf o una bifurcación homoclínica [BR]. Falconi *et al.* analizan un modelo de cadena tritrófica tipo Leslie, considerando la interferencia del superdepredador sobre el depredador. Ellos analizan la dinámica de los puntos de equilibrio y muestran la existencia de una bifurcación cero-Hopf usando la teoría del promedio [FVV].

50 Es importante mencionar que cuando ocurre una bifurcación cero-Hopf, el valor de bifurcación en el espacio de parámetros está en la intersección de dos ramas, una donde ocurre la bifurcación silla-nodo y otra donde aparece una bifurcación Hopf, por lo que esta bifurcación permite encontrar conjuntos límites estables invariantes más complicados que los puntos de equilibrio o los ciclos límite. De hecho, se pueden detectar toros invariantes o atractores caóticos [K, GK, W]. En este sentido, Liu y Han estudiaron un modelo depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo II, que incorpora la dispersión de la presa y el tiempo de retardo en el sistema. Al elegir el tiempo de retraso debido a la gestación como parámetro de bifurcación, ellos probaron la existencia de bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio positivo y mostraron numéricamente la existencia de caos [LH]. Además, Adak *et al.* analizaron un modelo depredador-presa-parásito con un retardo inducido y captura de la presa. Ellos suponen que la interacción depredador-presa está representada por un modelo tipo Leslie-Gower con respuesta funcional Holling tipo II y muestran que la demora puede causar inestabilidad en un punto de equilibrio de coexistencia y que una demora mayor puede incluso producir caos [ABH].

5 En este trabajo analizamos la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales que modela la interacción entre una presa, un depredador y un superdepredador. En particular analizaremos la presencia de bifurcación cero-Hopf o Bogdanov-Takens y de comportamientos caóticos en el sistema. En primer lugar, analizaremos un modelo tritrófico tipo Leslie propuesto en [BR] y por último analizaremos un modelo intragremial tipo Leslie, el cual considera un factor en la tasa de crecimiento de la presa, para modelar el efecto del miedo de la presa ante la presencia del depredador.

3 Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presentan los conceptos y resultados de la teoría local y de bifurcación de ecuaciones diferenciales, los cuales serán utilizados

11

en el desarrollo del trabajo.

En el *capítulo 2*, analizamos un sistema tritrófico tipo Leslie propuesto en [BR] y mostramos que el sistema presenta una bifurcación cero-Hopf y exhibe órbitas con comportamientos caóticos. Con el uso de respuestas funcionales de tipo Holling se verifican los resultados demostrados en la sección 2.2 y mediante simulaciones numéricas mostramos atractores como: órbitas periódicas, toros invariantes y atractores extraños (caóticos), sección 2.3. Además, vía el máximo exponente de Lyapunov (MLE), mostramos que existen comportamientos caóticos, para parámetros en una vecindad del valor de bifurcación del sistema diferencial asociado.

En el *capítulo 3*, consideramos un sistema intragremial tipo Leslie que considera un factor en la tasa de crecimiento de la presa que modela el efecto del miedo de la presa ante la presencia del depredador. Para este sistema demostramos que existen parámetros para los cuales se exhibe una bifurcación de Bogdanov-Takens y usando respuestas funcionales Holling II, ejemplificamos los resultados de la sección 3.1, mediante simulación numérica encontramos un atractor extraño, misma que del cálculo del máximo exponente de Lyapunov mostramos que el atractor es caótico. Finalmente calculamos el MLE para una familia de parámetros en una vecindad del valor de bifurcación de los sistemas diferenciales asociados, teniendo en todos ellos MLE positivos, concluyendo que el sistema presenta caos, sección 3.3.

En el *capítulo 4* analizamos la dinámica de un sistema intragremial Leslie y mostramos que exhibe una bifurcación cero-Hopf. Usando respuestas funcionales Holling ejemplificamos la existencia de tal bifurcación y mediante simulaciones numéricas mostramos atractores cerca del valor de bifurcación, tales como: órbitas periódicas, toros invariantes, órbitas homoclínicas y atractores extraños, subsección 4.5.1 y 4.5.2. Siguiendo el enfoque de los capítulos anteriores, se calcula el MLE del atractor extraño, resultando ser positivo, en consecuencia tal atractor es caótico. Luego, se calcula el MLE para una familia de sistemas diferenciales, con parámetros que son tomados en un intervalo o bien en un rectángulo que contiene el valor de bifurcación y se obtiene que los máximos exponentes de Lyapunov son positivos, sección 4.6. Del MLE concluimos que el sistema presenta caos.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	II
1. Preliminares	1
1.1. Estabilidad local	1
1.1.1. Puntos de equilibrio	1
1.1.2. Órbitas periódicas	4
1.1.3. Aplicación de Poincaré	6
1.2. Teoría de bifurcación	7
1.2.1. Bifurcación unidimensional	8
1.2.2. Bifurcación de Hopf	11
1.2.3. Bifurcación homoclínica	16
1.2.4. Bifurcación de Bogdanov-Takens	19
1.2.5. Bifurcación cero-Hopf	22
2. Bifurcación cero-Hopf y caos en un modelo tritrófico Leslie	28
2.1. Análisis de bifurcación cero-Hopf	28
2.1.1. Condición necesaria cero-Hopf	29
2.1.2. Condiciones de no degeneración cero-Hopf	30
2.2. Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling	32
2.2.1. Caso 1: Holling II-II	33
2.2.2. Caso 2: Holling II-IV	34
2.2.3. Caso 3: Holling IV-III	35
2.3. Resultados numéricos	37
2.4. Determinación de caos	40
2.4.1. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov	40
3. Bifurcación de Bogdanov-Takens en un modelo intragremial	44
3.1. Análisis de bifurcación de Bogdanov-Takens	46
3.1.1. Condición necesaria para la bifurcación Bogdanov-Takens	47
3.1.2. Condiciones de no degeneración de la bifurcación Bogdanov-Takens	48
3.2. Aplicaciones del resultado principal	49

ÍNDICE GENERAL

vi

3.2.1. Caso 1: Holling II con factor miedo $k_2 \neq 0$	50
3.2.2. Caso 2: Holling II con factor miedo $k_2 = 0$	51
3.3. Resultados numéricos	54
3.3.1. Dinámica complicada vía el máximo exponente de Lyapunov	54
4. Bifurcación cero-Hopf en un modelo intragremial	59
4.1. Existencia de un punto de equilibrio	60
4.2. Condición necesaria	60
4.3. Simplificación del modelo intragremial	62
4.4. Resultado principal	63
4.5. Aplicaciones para respuestas funcionales Holling	64
4.5.1. Caso 1: Holling II-II-II	64
4.5.2. Caso 2: Holling III-II-III	69
4.6. Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov	75
4.6.1. MLE para el caso 1: Holling II-II-II	75
4.6.2. MLE para el caso 2: Holling III-II-III	77
Bibliografía	83
A.	87
A.1. Términos de la proposición 2.4	87
A.2. Términos de la proposición 2.5	87
B.	94
B.1. Términos de la sección 3.1.1	94
B.2. Vectores propios normalizados	94
B.3. Expresiones correspondientes a la sección 3.2.1	96
B.4. Regularidad y coeficientes cuadráticos para $k_2 = 0$	96
C.	99
C.1. Vectores propios normalizados	99
C.2. Términos de la sección de aplicaciones	101

9

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos y resultados básicos de la teoría geométrica para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la primera sección se muestran los conceptos de la teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias y en la segunda se presentan los diferentes tipos de bifurcación que serán abordados en los capítulos posteriores.

1.1. Estabilidad local

1.1.1. Puntos de equilibrio

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en un subconjunto abierto E de \mathbb{R}^n ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial con $\mathbf{f} \in C^r(E)$, $r \geq 1$. Los resultados expuestos en este apartado están basados en [P, W].

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado *punto de equilibrio* de (1.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

1. La linealización de (1.1) en \mathbf{x}_0 , es el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, donde la matriz $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.
2. Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es llamado *punto de equilibrio hiperbólico* de (1.1), si ninguno de los valores propios de la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real cero.

Sean $\lambda_1^s, \dots, \lambda_{n_s}^s$, los valores propios con parte real negativa de A , $\lambda_1^c, \dots, \lambda_{n_c}^c$, los valores propios con parte real cero de A y $\lambda_1^u, \dots, \lambda_{n_u}^u$, los valores propios con parte real positiva de A , con $n_s + n_c + n_u = n$; consideremos también los vectores propios generalizados u_1, \dots, u_{n_s} , v_1, \dots, v_{n_c} y w_1, \dots, w_{n_u} correspondientes a los valores propios con parte real negativa, cero y positiva, respectivamente. Definimos los espacios estable, central e inestable, respectivamente como

$$\mathbb{E}^s = \langle u_1, \dots, u_{n_s} \rangle, \quad \mathbb{E}^c = \langle v_1, \dots, v_{n_c} \rangle, \quad \mathbb{E}^u = \langle w_1, \dots, w_{n_u} \rangle.$$

1.1 Estabilidad local

2

Sea $\mathbf{x}_0 \in E$, consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

del *teorema fundamental de existencia y unicidad*, existe una solución $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ que pasa por \mathbf{x}_0 definida en un intervalo maximal $I(\mathbf{x}_0)$. Así para todo $t \in I(\mathbf{x}_0)$, el conjunto de aplicaciones ϕ_t dado por

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0),$$

es llamado el flujo de la ecuación diferencial (1.1), a la función ϕ_t es también conocido como el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

El flujo ϕ_t satisface las siguientes propiedades

1. $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. $\phi_s \circ \phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{s+t}(\mathbf{x})$, para todo $s, t \in I(\mathbf{x})$,
3. $\phi_{-t} \circ \phi_t(\mathbf{x}) = \phi_t \circ \phi_{-t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, para todo $t \in I(\mathbf{x})$.

Por lo anterior, a la familia ϕ_t se le llama sistema dinámico asociado a (1.1). El sistema diferencial (1.1), tiene variedades diferenciables de clase C^r en el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 , las cuales se conocen como variedad estable, central e inestable, denotadas como S , C y U , respectivamente, los cuales son tangentes a los subespacios estable, central e inestable \mathbb{E}^s , \mathbb{E}^c y \mathbb{E}^u respectivamente. Además tienen la misma dimensión y las siguientes propiedades

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in S,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in U.$$

Definición 1.1. Sea ϕ_t el flujo para el sistema no lineal (1.1). Definimos la variedad global estable e inestable de (1.1) en el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 como,

$$W^s(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S) \quad y$$

$$W^u(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U),$$

respectivamente.

Las variedades globales estable e inestable en \mathbf{x}_0 son únicas e invariantes con respecto al flujo ϕ_t .

1.1 Estabilidad local

Teorema 1.2. *Supongamos que el origen es un punto de equilibrio del sistema (1.1) y que $Df(0)$ tiene c valores propios con parte real cero y s valores propios con parte real negativa, con $c + s = n$. El sistema (1.1) puede escribirse en la forma diagonal*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= P\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ y C, P son matrices cuadradas con c valores propios con parte real cero y s valores propios con parte real negativa, respectivamente y $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{F}(0) = D\mathbf{G}(0) = \mathbf{0}$. Además existe $\delta > 0$ y una función $\mathbf{h} \in C^r(N_\delta(0))$ que define la variedad central local y que satisface

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x})(C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))) - P\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \tag{1.3}$$

para $|\mathbf{x}| < \delta$; y que el flujo en la variedad central $W^c(0)$ es definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})), \tag{1.4}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^c$ con $|\mathbf{x}| < \delta$.

Definición 1.3. Sean E_1, E_2 subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , \mathbf{f}, \mathbf{g} campos vectoriales tales que $\mathbf{f} \in C^1(E_1)$, $\mathbf{g} \in C^1(E_2)$ y ϕ_τ, φ_t los flujos asociados a \mathbf{f} y \mathbf{g} , respectivamente. Los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.5}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$

son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $H : E_1 \rightarrow E_2$ que preserva la orientación y satisface $H \circ \varphi_t(\mathbf{x}) = \phi_\tau \circ H(\mathbf{x})$. Si $t = \tau$ se dice que los sistemas son topológicamente conjugados.

Teorema 1.4 (Hartman-Grobman). Si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (1.5), entonces el sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es topológicamente conjugado, en una vecindad del origen, al sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = Df(0)\mathbf{y}$.

Estabilidad estructural

Sean $\mathbf{f} \in C^1(E)$, E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , se define la C^1 -norma de \mathbf{f} como

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x} \in E} \|Df(\mathbf{x})\|, \tag{1.7}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclídeana en \mathbb{R}^n y $\|\cdot\|$ denota la norma de operadores acotados.

En particular, si K es un subconjunto compacto de E , la C^1 -norma de \mathbf{f} en K es

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \max_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| + \max_{\mathbf{x} \in K} \|Df(\mathbf{x})\| < \infty. \tag{1.8}$$

1.1 Estabilidad local

4

Definición 1.5. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un campo vectorial $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ es estructuralmente estable si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(E)$ con

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_1 < \varepsilon,$$

\mathbf{f} y \mathbf{g} son topológicamente equivalentes en E . En este caso, decimos que el sistema dinámico (1.5) es estructuralmente estable. Un campo vectorial $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ que no es estructuralmente estable, es llamado inestable.

Teorema 1.6. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ donde E es un abierto en \mathbb{R}^n que contiene un punto de equilibrio hiperbólico \mathbf{x}_0 de (1.5). Entonces para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(E)$ con

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_1 < \delta,$$

tiene un punto de equilibrio hiperbólico $\mathbf{y}_0 \in N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ de (1.6). Más aún, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ y $D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa y positiva.

Cuando un campo vectorial no es estructuralmente estable se presenta un fenómeno conocido como *bifurcación*.

1.1.2. Órbitas periódicas

Sea $\mathbf{x} \in E$, la función $\phi(\cdot, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow E$ define una curva solución, trayectoria u órbita para el sistema (1.1) que pasa por un punto \mathbf{x}_0 en E , la cual está dada por:

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in E : \mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.7. Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in E$ y $\Gamma = \phi(\cdot, \mathbf{x})$ una trayectoria que pasa por \mathbf{x} , del sistema (1.1). Diremos que

- \mathbf{p} es un punto ω -límite de Γ , si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{p},$$

- \mathbf{q} es un punto α -límite de Γ , si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{q}.$$

El conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria es llamado *conjunto ω -límite* de Γ y es denotado por $\omega(\Gamma)$, de manera similar, el conjunto de todos los puntos α -límite, es llamado *conjunto α -límite* de Γ , denotado por $\alpha(\Gamma)$. El conjunto de todos los puntos límites de Γ , $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ es el conjunto límite de Γ .

Definición 1.8. Una solución cerrada Γ que no contiene puntos de equilibrio del sistema (1.1) es llamado un ciclo u órbita periódica. Una órbita periódica Γ es:

1.1 Estabilidad local

1. estable si para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de Γ tal que para todo $\mathbf{x} \in U$, $d(\phi(t, \mathbf{x}), \Gamma) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$,

2. asintóticamente estable si es estable y para todo punto \mathbf{x} en una vecindad U de Γ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, \mathbf{x}), \Gamma) = 0,$$

3. inestable, si no es estable.

Teorema 1.9. Los conjuntos α -límite y ω -límite de una trayectoria Γ del sistema (1.1) son subconjuntos cerrados de E y si Γ esta contenido en un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , entonces $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$, son subconjuntos de E no vacíos, conexos y compactos.

Una órbita $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$ define una curva solución cerrada del sistema (1.1) si y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t + T, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$ para algún $T > 0$; al mínimo T que satisface esta propiedad, se le conoce como el periodo de la órbita periódica.

Definición 1.10. Un ciclo límite Γ de un sistema es un ciclo de (1.1), el cual es el conjunto α u ω -límite de alguna trayectoria del sistema (1.1) distinta de Γ . Si en una vecindad del ciclo, Γ es el conjunto ω -límite de cada trayectoria, Γ es llamado ciclo límite estable; y si Γ es el conjunto α -límite de alguna trayectoria, es llamado ciclo límite inestable.

Definición 1.11. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{2n} y $\mathbf{H} \in C^2(E)$ donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Un sistema diferencial de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_n} \right)^T \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y_n} \right)^T,$$

es llamado un sistema hamiltoniano con n grados de libertad en E .

Ejemplo 1.12. El sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + x^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

con hamiltoniano $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ tiene curvas solución definidas por

$$y^2 - x^2 - \frac{2x^3}{3} = C.$$

El retrato fase para este sistema (1.9), se muestra en la figura 1.1. La curva solución $y^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^3$, corresponde a $C = 0$, pasa por el punto $(-\frac{3}{2}, 0)$ y la silla en el origen el cual es el conjunto α -límite y ω -límite de Γ . La curva solución $\Gamma \subset W^s(\mathbf{0}) \cap W^u(\mathbf{0})$ es conocida como órbita homoclínica y la curva cerrada simple determinada, por la unión de esta órbita homoclínica y el punto de equilibrio en el origen es llamado ciclo separatriz.

1.1 Estabilidad local

6

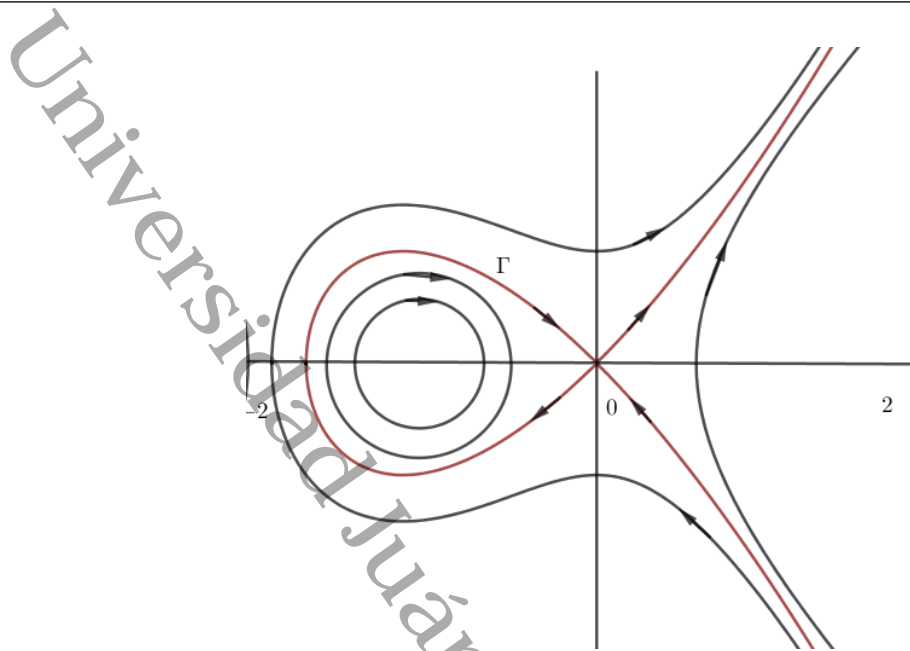


Figura 1.1: Órbita homoclínica Γ que define un ciclo separatriz.

1.1.3. Aplicación de Poincaré

Los resultados presentados en este apartado están basados en [P, GH]. Una herramienta básica para el estudio de la estabilidad y bifurcación de órbitas periódicas es la aplicación de Poincaré o de primer retorno, definida por Henry Poincaré en 1881. La idea de la aplicación de Poincaré es bastante simple, la cual considera una órbita periódica, Γ , cerrada en \mathbf{x}_0 del sistema (1.1) y un hiperplano ortogonal a Γ en \mathbf{x}_0 .

La demostración del siguiente resultado está basada en [P].

Teorema 1.13. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Supongamos que el flujo, $\phi_t(\mathbf{x}_0)$, es una solución periódica de (1.1) de periodo T y que el ciclo

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x}_0), 0 \leq t \leq T\},$$

esté contenido en E . Si Σ es el hiperplano ortogonal a Γ en \mathbf{x}_0 , es decir,

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0\},$$

entonces existe un $\delta > 0$ y una única función $\tau(\mathbf{x})$ continuamente diferenciable para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$, tal que $\tau(\mathbf{x}_0) = T$ y

$$\phi_{\tau(\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x}) \in \Sigma,$$

para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, definimos la función

$$F(t, \mathbf{x}) = (\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

1.2 Teoría de bifurcación

7

6 Para F así definida, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times E)$ y de la periodicidad de $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ se tiene que $F(T, \mathbf{x}_0) = 0$. Además, dado que $\phi(t, \mathbf{x}_0) = \phi_t(\mathbf{x}_0)$ es una solución de (1.1), el cual satisface $\phi(T, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, se sigue que

$$\frac{\partial F(T, \mathbf{x}_0)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(T, \mathbf{x}_0)}{\partial t} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = |\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|^2 \neq 0,$$

dado que $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ no es un punto de equilibrio de (1.1). Así del *teorema de la función implícita*, se sigue que existe $\delta > 0$ y una única función $\tau(\mathbf{x})$ definida y continuamente diferenciable para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ tal que $\tau(\mathbf{x}_0) = T$ y

$$F(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$$

para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$, ver figura 1.2. Así, para todo $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$, $(\phi(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. En consecuencia

$$\phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma.$$

De la demostración del teorema 1.13, se garantiza la existencia de la aplicación de Poincaré.

Definición 1.14. Sean Γ, Σ, δ y τ , definidas como en el teorema 1.13. Para $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$, la función

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}),$$

es llamada *aplicación de Poincaré para Γ en \mathbf{x}_0* , ver figura 1.2.

Definición 1.15. Una órbita periódica Γ que pasa por \mathbf{x}_0 es *hiperbólica* si todos los valores propios de $DP(\mathbf{x}_0)$ son de módulo distinto de 1.

Teorema 1.16. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ un campo vectorial con una órbita periódica hiperbólica Γ contenida en E . Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que todo campo $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(E)$ con

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_1 < \delta,$$

tiene una órbita periódica hiperbólica Γ' contenida en una ε -vecindad tubular de Γ . Más aún, las variedades estables $W^s(\Gamma)$ y $W^s(\Gamma')$ y las variedades inestables $W^u(\Gamma)$ y $W^u(\Gamma')$ tienen la misma dimensión.

1.2. Teoría de bifurcación

67 En esta sección estudiamos la estructura cualitativa del conjunto de soluciones o retrato fase de una familia de campos vectoriales en un abierto de \mathbb{R}^n y los cambios que sufre la dinámica al mover los parámetros en una vecindad pequeña. Los resultados que se muestran a continuación pueden ser ampliados en [GH, K, W].

Consideremos una familia de campos vectoriales no lineales que dependen de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}^k$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad (1.10)$$

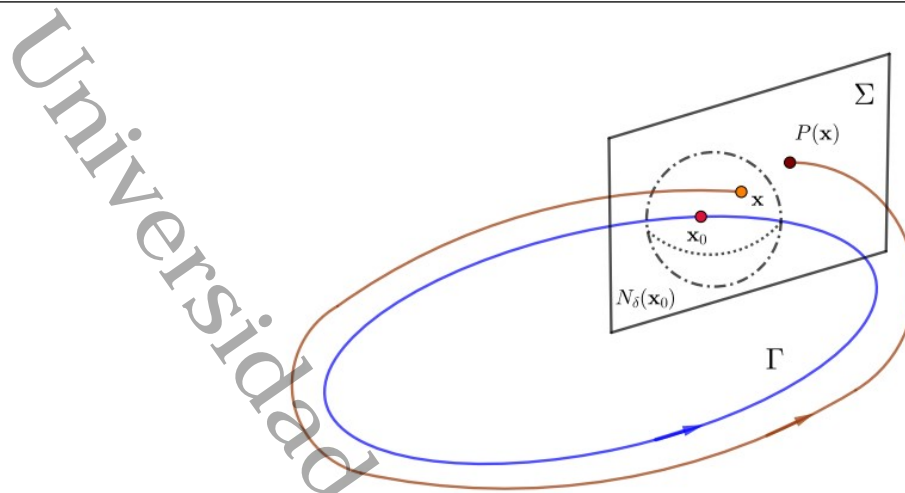


Figura 1.2: Aplicación de Poincaré.

con $\mathbf{f} \in C^r(E \times \mathbb{R}^k)$, para $r \geq 1$ y E un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n . Supongamos que (1.10) tiene un punto de equilibrio en (\mathbf{x}_0, μ_0) .

Enseguida surgen dos preguntas:

1. ¿El punto de equilibrio es estable o inestable?
2. ¿Cómo se ve afectada la estabilidad o inestabilidad del punto de equilibrio cuando se varía μ ?

Del teorema 1.6, si el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es hiperbólico entonces existe una vecindad de μ_0 para la cual todos los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ de esa vecindad son localmente equivalentes a $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu_0)$, en una vecindad de \mathbf{x}_0 . Por lo que no se afecta la dinámica del punto \mathbf{x}_0 al mover el parámetro μ . Por otro lado, cuando el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 no es hiperbólico responder a las preguntas anteriores, resulta ser más difícil. En este caso, para (\mathbf{x}, μ) en una vecindad de (\mathbf{x}_0, μ_0) , puede ocurrir un comportamiento dinámico radicalmente diferente al de (\mathbf{x}_0, μ_0) . Por ejemplo, se pueden crear puntos de equilibrio, órbitas periódicas, órbitas casiperiódicas o incluso se pueden crear dinámicas caóticas. En cierto sentido cuantos más valores propios se tengan en el eje imaginario, mayores serán las posibilidades de obtener dinámicas diferentes en una vecindad de μ_0 . En esta dirección estudiaremos el sistema (1.10), cuando el punto de equilibrio (\mathbf{x}_0, μ_0) no es hiperbólico.

1.2.1. Bifurcación unidimensional

Comenzamos el estudio del sistema (1.10) cuando la linealización en (\mathbf{x}_0, μ_0) , $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0)$, tiene un solo valor propio cero y el resto de los valores propios tiene parte real distinto de cero; luego la estructura de la órbita cerca de (\mathbf{x}_0, μ_0) está determinada por la ecuación en la variedad central asociada, la cual se escribe como

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad (1.11)$$

donde $\lambda = \mu - \mu_0$. Además, el sistema diferencial (1.11) debe satisfacer

1.2 Teoría de bifurcación

$$f(0, 0) = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \tag{1.13}$$

La ecuación (1.12) es la condición del punto de equilibrio y (1.13) es la condición del valor propio cero.

Si consideramos que $\lambda \in \mathbb{R}$, la dinámica en la variedad central está determinada por los términos no lineales que tiene la función f . En particular, si ésta tiene términos cuadráticos, una posible forma normal es la siguiente,

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2. \tag{1.14}$$

La ecuación (1.14) es la forma normal para la *bifurcación silla-nodo*. Para $\mu > 0$ existen dos puntos de equilibrio $x = \pm\sqrt{\mu}$; la derivada del campo en el punto de equilibrio es $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \pm 2\sqrt{\mu}$, así el punto de equilibrio $x = \sqrt{\mu}$ es estable, mientras que el punto $x = -\sqrt{\mu}$ es inestable. Notemos que para $\mu = 0$, solo existe un punto de equilibrio en $x = 0$ y este no es hiperbólico, dado que $Df(0, 0) = 0$; así el campo vectorial $f(x) = -x^2$ es inestable y $\mu = 0$ es un valor de bifurcación. No existen puntos de equilibrio cuando $\mu < 0$. Para $\mu > 0$ las variedades estables e inestables del sistema (1.14), están dadas por $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$, $W^s(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$ y para $\mu = 0$ la variedad central es $W^c(0) = (-\infty, \infty)$, ver figura (1.3).

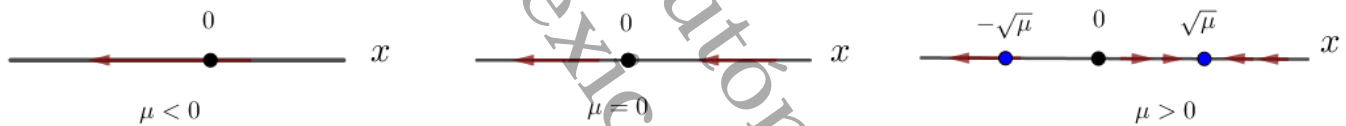


Figura 1.3: Bifurcación silla-nodo.

Toda la información pertinente sobre la bifurcación que tiene lugar en este sistema en $\mu = 0$ se captura en el diagrama de bifurcación que se muestra en la figura 1.4. La curva $\mu - x^2 = 0$ determina la posición de los puntos de equilibrio; la curva sólida es usado para indicar la familia de puntos de equilibrio estables, mientras que la curva punteada indica la familia de puntos de equilibrio inestables para el sistema (1.14)

Consideremos ahora el sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^2. \tag{1.15}$$

La ecuación (1.15) es la forma normal para la *bifurcación transcritical*, los puntos de equilibrio son $x = 0$ y $x = \mu$. La derivada del campo es $Df(x, \mu) = \mu - 2x$; en consecuencia si $\mu > 0$ el punto de equilibrio $x = \mu$ es estable, mientras que si $\mu < 0$ es inestable. Por otra parte el punto de equilibrio $x = 0$ es inestable si el parámetro $\mu > 0$ y estable si $\mu < 0$. Para $\mu = 0$ existe solo un punto de equilibrio en $x = 0$ y este no es hiperbólico, en consecuencia el cambio de estabilidad ocurre en este punto de equilibrio y $\mu = 0$ es un valor de bifurcación. El retrato fase para esta ecuación diferencial

1.2 Teoría de bifurcación

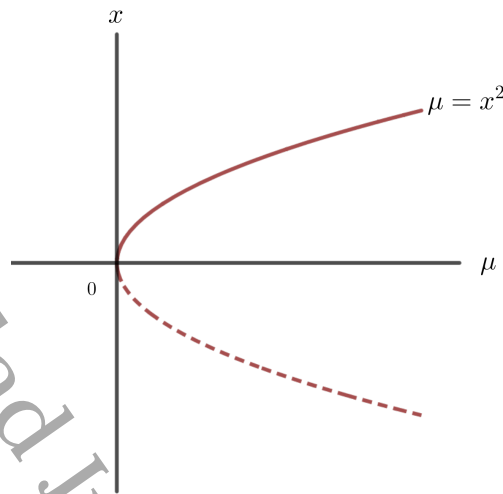


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación silla-nodo

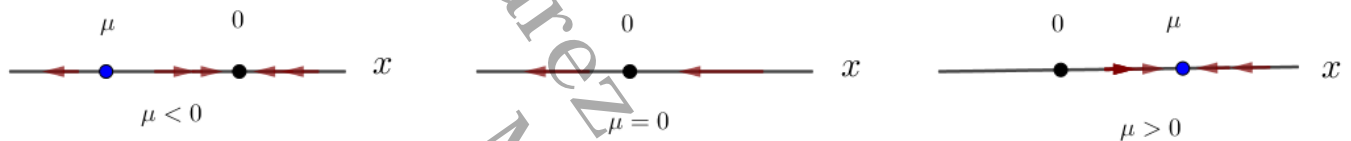


Figura 1.5: Bifurcación transcritical.

se muestra en la figura 1.5. Toda la información relacionada con la bifurcación que tiene lugar en este sistema en $\mu = 0$ se muestra en el diagrama de bifurcación de la figura 1.6.

Consideremos ahora el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^3. \tag{1.16}$$

La ecuación (1.16) es la forma normal para la *bifurcación tridente*. Para $\mu > 0$ existen tres puntos de equilibrio, $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\mu}$; mientras que si $\mu < 0$, existe solo un punto de equilibrio en $x = 0$ y para $\mu = 0$, solo hay un punto de equilibrio $x = 0$, el cual no es hiperbólico. En este caso, se tiene el campo vectorial $f(x) = -x^3$, el cual es inestable, por lo que $\mu = 0$ es un valor de bifurcación. El retrato fase para el sistema (1.16) se muestra en la figura (1.7) y la figura (1.8) muestra toda la información relacionada a la bifurcación tridente.

Supongamos ahora que en el campo vectorial (1.10), el parámetro $r = 1$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Además, hagamos las siguientes hipótesis,

- en el parámetro $\mu = 0$ el sistema tiene un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$,
- la matriz jacobiana $A_0 = Df(\mathbf{0}, 0)$ tiene un único valor propio $\lambda_1 = 0$.

Cuando $\mu < 0$ existen dos puntos de equilibrio uno silla y el otro nodo, y cuando $\mu = 0$ solo existe un punto de equilibrio silla, mientras que si $\mu > 0$ no existen puntos de equilibrio. En este caso

1.2 Teoría de bifurcación

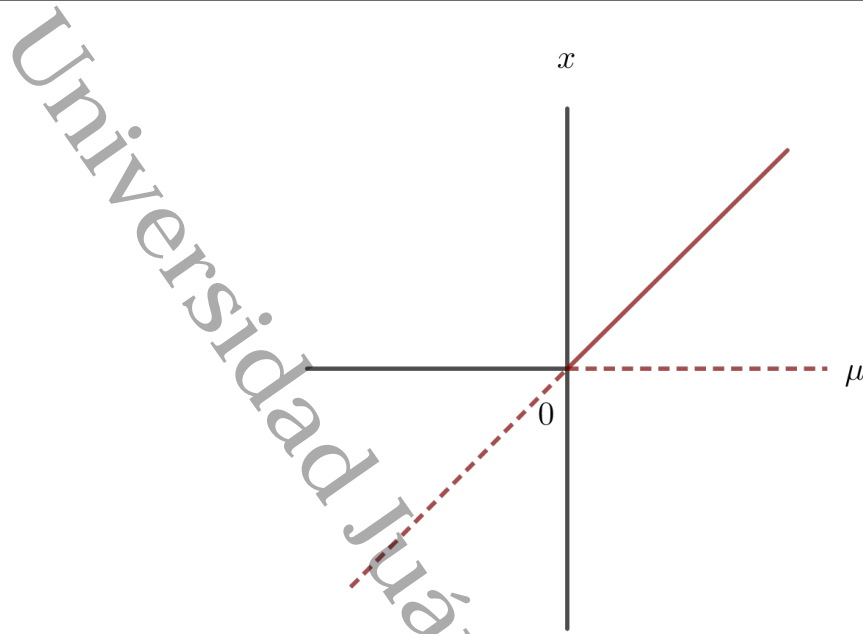


Figura 1.6: Diagrama de bifurcación transcritical.



Figura 1.7: Retrato fase para la bifurcación tridente.

la bifurcación que se presenta es conocida como silla-nodo, y se caracteriza por la condición de bifurcación $\lambda_1 = 0$ y aparece genéricamente en familias de campos vectoriales suaves dependientes de un parámetro, el caso unidimensional ya lo hemos estudiado. En este apartado estudiaremos solo el caso bidimensional, el caso general puede consultarse en [K, P]. La forma normal bidimensional asociada es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu \pm x^2, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned}$$

El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 1.4, los retratos fases para distintos valores en los parámetros se muestra en la figura 1.9.

1.2.2. Bifurcación de Hopf

Consideremos el campo vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

1.2 Teoría de bifurcación

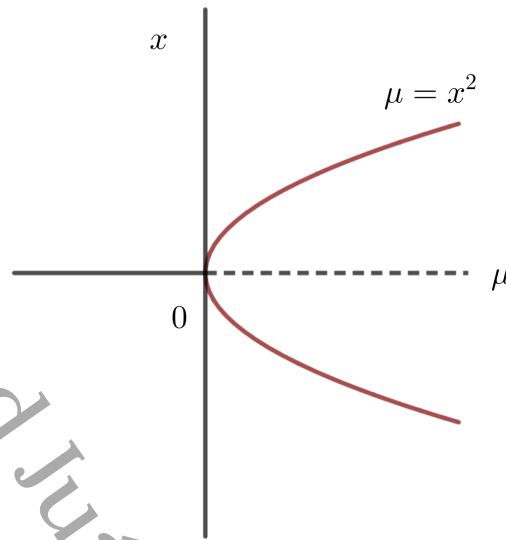


Figura 1.8: Diagrama de la bifurcación tridente.

donde \mathbf{f} es una función de clase $\mathcal{C}^r(E)$, $r \geq 3$, con un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 en $\mu = \mu_0$. Estamos interesados en la estructura cualitativa de la órbita cerca de \mathbf{x}_0 a medida que varía el parámetro μ . Suponemos que la matriz jacobiana asociada a (1.17) en el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 tiene un par de valores propios imaginarios puros y $n - 2$ valores propios con parte real distinto de cero. Por el *teorema de la función implícita* tenemos que para μ cerca de μ_0 existe un punto de equilibrio $\mathbf{x}(\mu)$ cerca de \mathbf{x}_0 el cual varía suavemente con respecto a μ . Sin embargo, las dimensiones de las variedades estable e inestable en $\mathbf{x}(\mu)$ cambian si los valores propios de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu))$ cruzan el eje imaginario en μ_0 . Cuando el punto de equilibrio no es hiperbólico, la parte lineal del campo vectorial (1.17) en \mathbf{x}_0 , proporciona poca información sobre la dinámica de éste en una vecindad de \mathbf{x}_0 , por lo que es necesario analizar la dinámica en la variedad central, en una vecindad del punto de equilibrio \mathbf{x}_0 . Los resultados aquí presentados pueden consultarse en [K, P, W].

El campo vectorial (1.17) en la variedad central tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & -\operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ \operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \quad (1.18)$$

donde f y g son no lineales en la variable x y en la variable y , y los valores propios del campo vectorial linealizado en el origen, son $\lambda(\mu)$ y $\overline{\lambda(\mu)}$.

Supongamos que $\mu_0 = 0$ y denotemos por

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

los valores propios de la parte lineal del sistema (1.18). De las hipótesis hechas, se tiene que $\alpha(0) = 0$ y $\omega(0) \neq 0$, la forma normal asociada al sistema es

1.2 Teoría de bifurcación

13

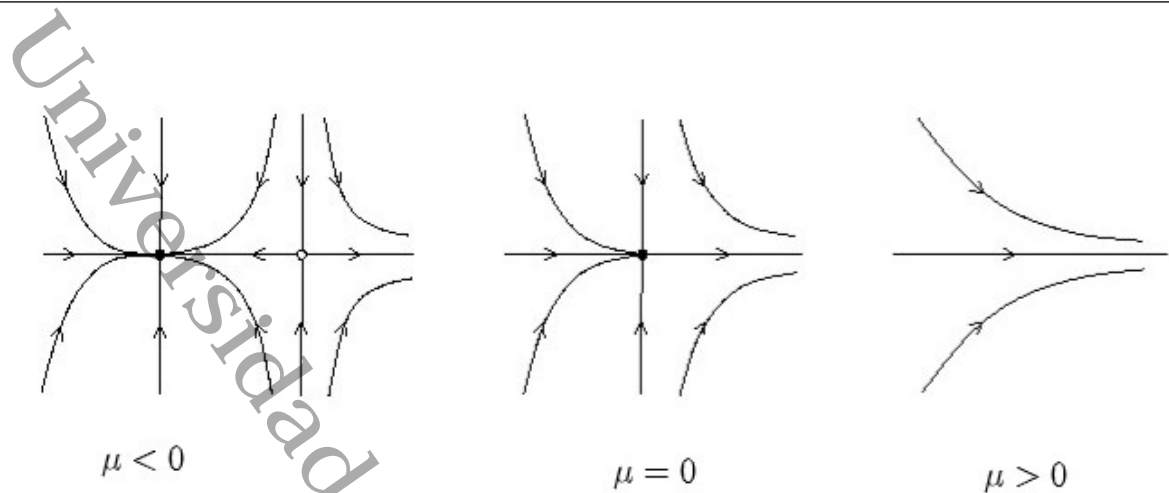


Figura 1.9: Retrato fase para la bifurcación silla-nodo bidimensional.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y \pm x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y \pm y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (1.19)$$

la cual tiene un punto de equilibrio en el origen para todo $\mu \in \mathbb{R}$ y la matriz jacobiana en el $(0, 0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Tomando el signo negativo en el sistema (1.19) y usando coordenadas polares, el sistema queda como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Como estas ecuaciones están desacoplados para r y θ , es posible resolverlas de manera individual. La primera ecuación se resuelve para $r \geq 0$. Esta tiene un punto de equilibrio en $r = 0$ para todo valor de μ . El punto de equilibrio es estable si $\mu < 0$, permanece estable en $\mu = 0$ y es inestable si $\mu > 0$. Además, hay un punto de equilibrio adicional $x_0(\mu) = \sqrt{\mu}$ para $\mu > 0$. La segunda ecuación describe una rotación con ángulo constante, por lo que se tiene una órbita periódica, cuando $r = \sqrt{\mu}$, $\mu > 0$.

La dinámica definida por el sistema (1.20), se muestra en el diagrama de bifurcación del sistema bidimensional (1.19), ver figura 1.10. Como puede observarse, el punto de equilibrio en el origen es un foco estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. En el valor del parámetro de bifurcación $\mu = 0$, el equilibrio es un foco débilmente estable. Cuando $\mu > 0$, el origen está rodeado por una

1.2 Teoría de bifurcación

14

única órbita periódica estable que es una circunferencia de radio $r_0(\mu) = \sqrt{\mu}$, cuya ecuación es $\Gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)$. En la figura 1.11, se muestra la familia de órbitas periódicas en el espacio (x, y, μ) , las cuales forman un paraboloides circular.

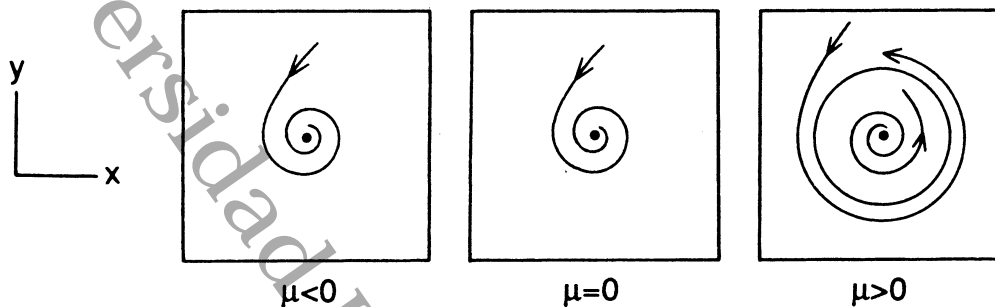


Figura 1.10: Bifurcación de Hopf supercrítica.

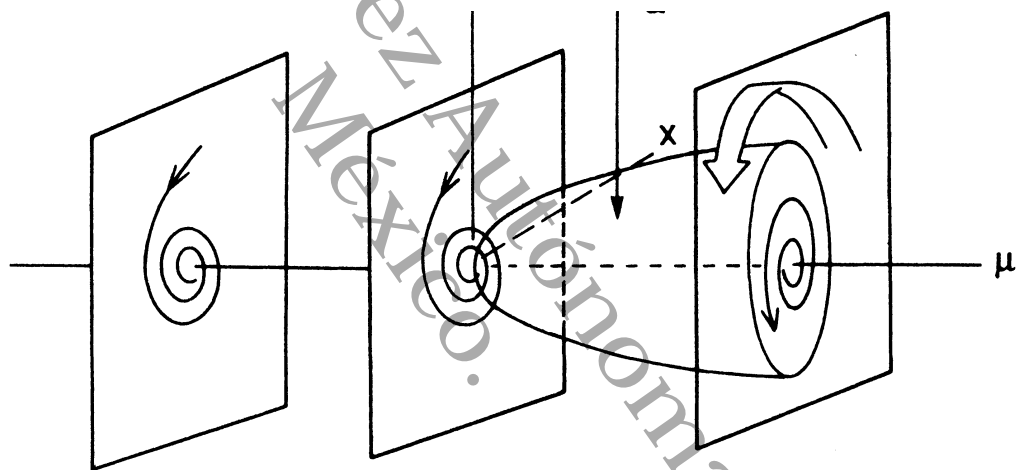


Figura 1.11: Diagrama de bifurcación de Hopf supercrítica.

Ahora consideremos el sistema (1.19) con el signo positivo en la parte no lineal. Este sistema es posible analizarlo de la misma manera que el caso negativo. El sistema sufre una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$. Contrario al sistema analizado, existe una única órbita periódica inestable cuando $\mu < 0$, la cual desaparece cuando μ es mayor que cero. Cuando $\mu \neq 0$, el punto de equilibrio en el origen tiene la misma estabilidad que el caso anterior, es estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$, mientras que si $\mu = 0$ la estabilidad del origen se invierte con respecto al caso negativo, ya que es inestable. En las figuras 1.12 y 1.13 se muestran los retratos fases y los diagramas de bifurcación correspondientes a este caso.

Este análisis nos permite mostrar dos tipos de bifurcación de Hopf. La bifurcación en el sistema (1.19) cuando la parte no lineal es negativa, se le llama *bifurcación de Hopf supercrítica*, porque

1.2 Teoría de bifurcación

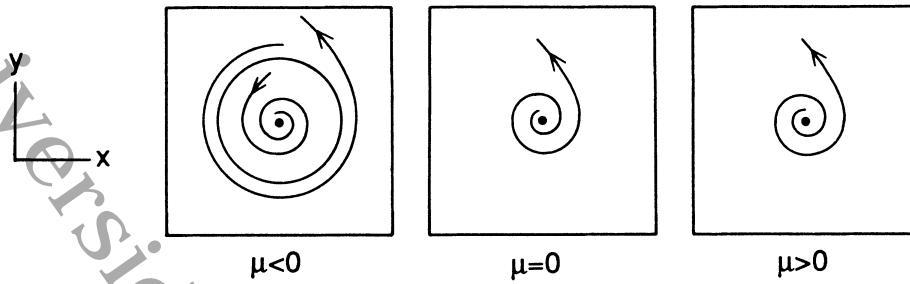


Figura 1.12: Bifurcación de Hopf Subcrítica.

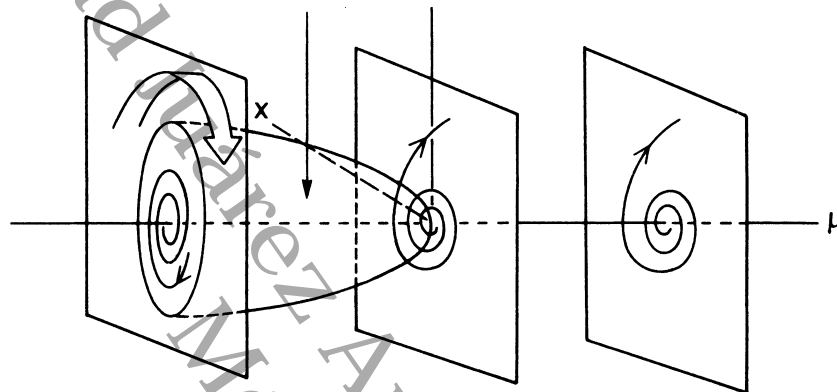


Figura 1.13: Diagrama de bifurcación de Hopf subcrítica.

la órbita periódica que aparece para valores positivos del parámetro μ , es estable, ver figura 1.10. Mientras que la bifurcación para el caso no lineal positivo, se le llama *bifurcación de Hopf subcrítica*, ya que la órbita periódica que aparece para valores negativos del parámetro μ , es inestable, ver figura 1.11.

Primer coeficiente de Lyapunov

La estabilidad del ciclo límite es determinado por el signo del primer coeficiente de Lyapunov $l_1(0)$ del sistema dinámico cerca del punto de equilibrio. Este coeficiente puede calcularse en $\mu = 0$ de la siguiente manera. Escribimos la expansión de Taylor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$ en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = A_0\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^4),$$

donde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ son las funciones bilineales y trilineales con componentes

$$B_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l \quad \text{y} \quad C_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m,$$

1.2 Teoría de bifurcación

donde $j = 1, \dots, n$. Sean $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$ un vector complejo de A_0 correspondiente al valor propio $i\omega_0$ tal que $A_0\mathbf{q} = i\omega_0\mathbf{q}$ y el vector propio adjunto $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n$ tal que $A_0^T\mathbf{p} = -i\omega_0\mathbf{p}$, con $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$ donde \langle, \rangle es el producto interno usual en \mathbb{C}^n . Así

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re} \left[\langle \mathbf{p}, C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle - 2\langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, A_0^{-1}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})) \rangle + \langle \mathbf{p}, B(\bar{\mathbf{q}}, (2i\omega_0 I_n - A_0)^{-1}B(\mathbf{q}, \mathbf{q})) \rangle \right], \quad (1.21)$$

es la fórmula para el primer coeficiente de Lyapunov.

El siguiente teorema permite determinar la existencia de la bifurcación de Hopf.

Teorema 1.17 (Andronov-Hopf). *Consideremos el campo vectorial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

con $\mathbf{f} \in C^k(E \times \mathbb{R})$, $k \geq 3$ y $E \subset \mathbb{R}^2$ abierto, tal que para todo μ suficientemente pequeño, existe un punto de equilibrio en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con valores propios $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, donde $\alpha(0) = 0$ y $\omega(0) > 0$. Además, supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov.
2. $\alpha'(0) \neq 0$.

Entonces el sistema es topológicamente equivalente en una vecindad del origen, a una de las siguientes formas normales

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Las condiciones genéricas 1. y 2. del teorema 1.17, son las condiciones de no degeneración y transversalidad, respectivamente. La condición de no degeneración (primer coeficiente de Lyapunov l_1) nos permite determinar la estabilidad del ciclo límite; si $l_1 < 0$ entonces se tiene una bifurcación de Hopf supercrítica, de otra manera si $l_1 > 0$, se tiene una bifurcación de Hopf subcrítica (c.f. teorema 1, sec. 4.4, [P]).

1.2.3. Bifurcación homoclínica

En este apartado estudiamos la bifurcación global correspondiente a la aparición de órbitas homoclínicas que conectan puntos de equilibrio hiperbólicos en sistemas dinámicos de tiempo continuo. Los resultados mostrados en esta sección están basados en [K, P].

Definición 1.18. *Consideremos el sistema (1.10) con dos puntos de equilibrio distintos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$. Una órbita Γ que comienza en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,*

1. es homoclínica, si $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = \{\mathbf{x}_0\}$,
2. es heteroclínica, si $\alpha(\Gamma) = \{\mathbf{x}_0\}$ y $\omega(\Gamma) = \{\mathbf{x}_1\}$.

1.2 Teoría de bifurcación

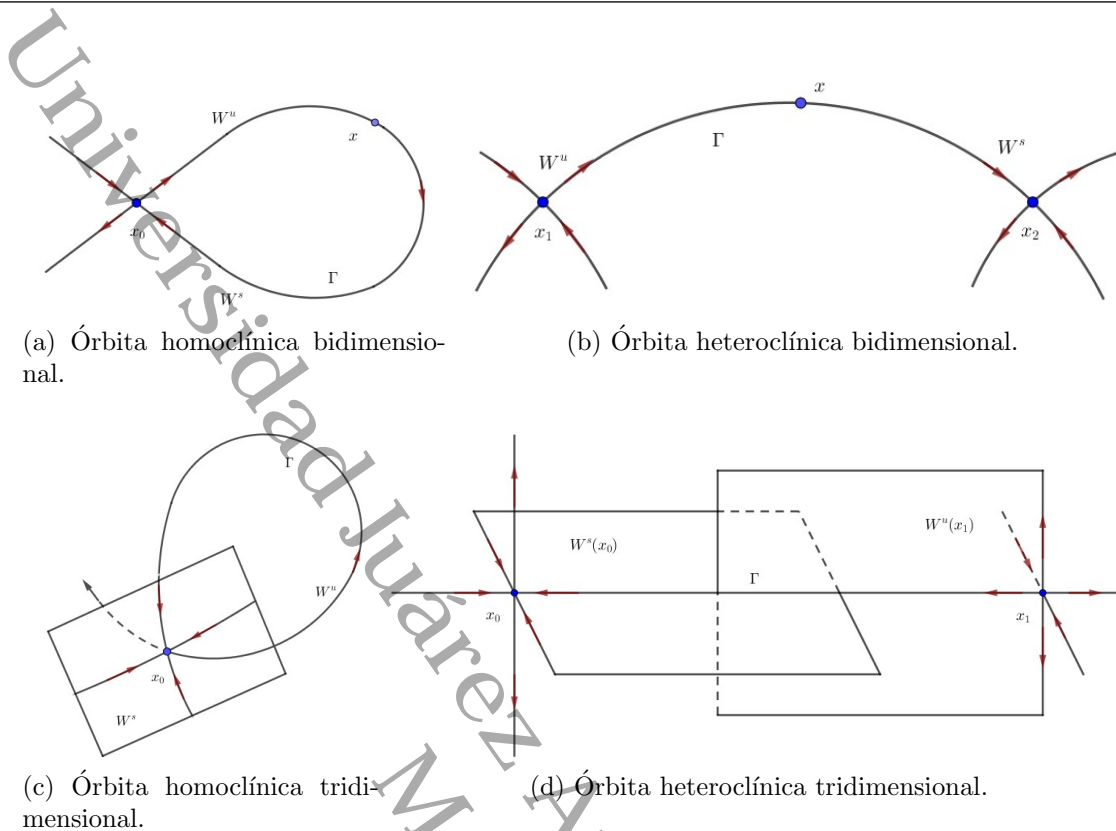


Figura 1.14: Órbitas homoclinicas y heteroclinicas.

En las figuras 1.14a y 1.14b, se muestran órbitas homoclinicas y heteroclinicas para el caso $n = 2$ y $n = 3$. Una órbita homoclinica Γ en el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 , está en la intersección de la variedad estable e inestable de \mathbf{x}_0 , esto es $\Gamma \subset W^s(\mathbf{x}_0) \cap W^u(\mathbf{x}_0)$.

Definición 1.19. Sean M y N variedades diferenciables en \mathbb{R}^k , con dimensiones m y n respectivamente. Diremos que M y N se intersecan transversalmente, si la suma de los espacios tangentes en \mathbf{p} , es \mathbb{R}^k para toda $\mathbf{p} \in M \cap N$.

Consideremos un sistema bidimensional con una órbita homoclinica en un punto de equilibrio silla \mathbf{x}_0 . Sea Σ una sección transversal local a la variedad estable $W^s(\mathbf{x}_0)$, como se muestra en la figura 1.15. Representemos la coordenada en Σ por ξ , tomando el punto de intersección con la variedad estable como $\xi = 0$. Esta construcción es posible para todos los sistemas suficientemente cercanos. Sin embargo, para tales sistemas, la variedad inestable $W^u(\mathbf{x}_0)$ genéricamente no vuelve a la silla. En la figura 1.15 se muestran las diferentes posibilidades. Denotemos por ξ^u al punto de intersección de la variedad inestable $W^u(\mathbf{x}_0)$ con la sección transversal Σ , al valor $\beta = \xi^u$ se le llama *función de separación*. Esta función es diferenciable en los parámetros, para un sistema dependiente de parámetros. La ecuación $\beta = 0$, es la condición de bifurcación, para la bifurcación homoclinica es sistemas bidimensionales.

Por otra parte, consideremos un sistema diferencial en \mathbb{R}^3 con una órbita homoclinica Γ_0 en un

68

4

3

3

4

3

3

14

1.2 Teoría de bifurcación

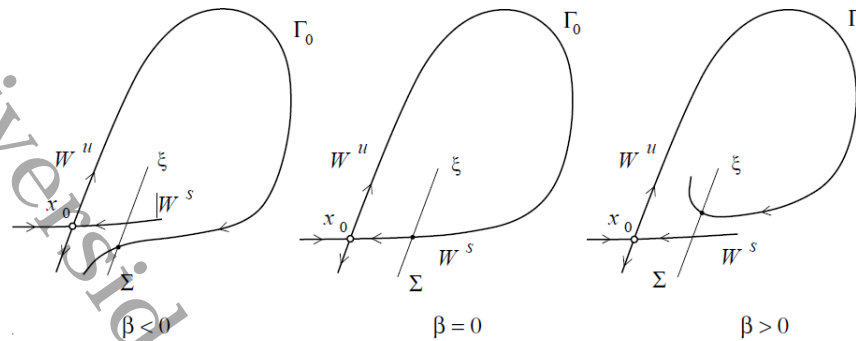


Figura 1.15: Función de separación en el plano.

punto de equilibrio silla \mathbf{x}_0 . Supongamos que la dimensión de la variedad inestable es uno, si no fuese así, invertimos la dirección en el tiempo; consideremos también una sección transversal bidimensional Σ con coordenadas (ξ, η) como en la figura 1.16. Tomemos como $\xi = 0$ a la intersección de la sección transversal Σ con la variedad estable $W^s(\mathbf{x}_0)$ y el punto (ξ^u, η^u) como la intersección de la variedad inestable $W^u(\mathbf{x}_0)$ con Σ . Definimos la función de separación como en el caso bidimensional: $\beta = \xi^u$. Así, cuando $\beta = 0$ se tiene la condición para la bifurcación homoclínica en dimensión tres. Por lo que hemos encontrado bajo que condiciones se presenta una órbita homoclínica Γ_0 en un punto de equilibrio silla y una bifurcación homoclínica, ver figura 1.16.

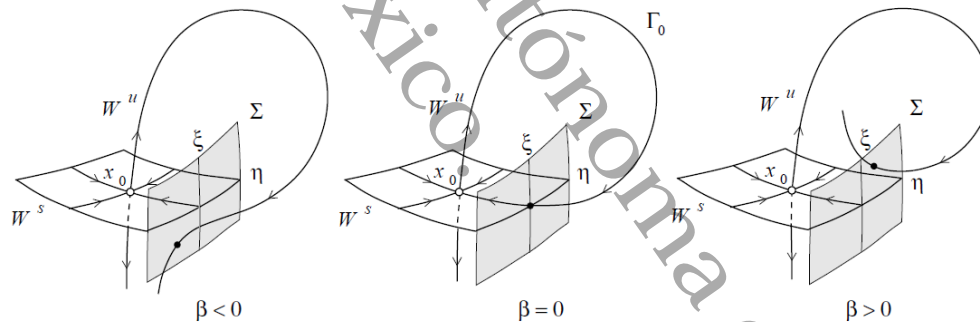


Figura 1.16: Función de separación en el espacio.

En el caso bidimensional, la bifurcación homoclínica está completamente caracterizada por el siguiente resultado.

Teorema 1.20 (Andronov-Leontovich). *Consideremos el sistema bidimensional*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{1.23}$$

con $\mathbf{f} \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Teniendo en $\mu = 0$, un punto de equilibrio tipo silla en el origen, con valores propios $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$ y una órbita homoclínica Γ_0 . Supongamos además que se cumplen las siguientes condiciones:

1.2 Teoría de bifurcación

1. $\lambda_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$,
2. $\beta'(0) \neq 0$, donde $\beta(\mu)$ es la función de separación.

Entonces para μ suficientemente pequeño, existe una vecindad U_0 de la órbita homoclínica Γ_0 , en la cual existe un único ciclo límite L_β que se bifurca de Γ_0 . Además, el ciclo es estable si existe para $\beta > 0$ y $\lambda_0 < 0$, y es inestable si existe para $\beta < 0$ y $\lambda_0 > 0$.

Al número real $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ se le conoce como *cantidad silla*. Las figuras 1.17a y 1.17b muestran el resultado del teorema 1.20. Si la cantidad silla es negativa, la órbita homoclínica en $\beta = 0$ es estable en el interior, y se tiene la existencia de un único ciclo límite estable $L_\beta \subset U_0$ para $\beta > 0$. Para $\beta < 0$ no existen órbitas periódicas en U_0 . Ahora, si la cantidad silla es positiva, la órbita homoclínica en $\beta = 0$ es inestable en el interior, y se tiene la existencia de un único ciclo límite inestable $L_\beta \subset U_0$ para $\beta < 0$. Para $\beta > 0$ no existen órbitas periódicas en U_0 . En consecuencia, el signo de la cantidad silla determina la dirección de bifurcación y la estabilidad del ciclo límite.

Como $|\beta| \rightarrow 0$, la órbita periódica se acerca cada vez más a la silla y su período T_β tiende a infinito cuando $\beta \rightarrow 0$, ya que un punto que se mueve a lo largo del ciclo gasta más y más tiempo cerca del equilibrio, ver Figura 1.18.

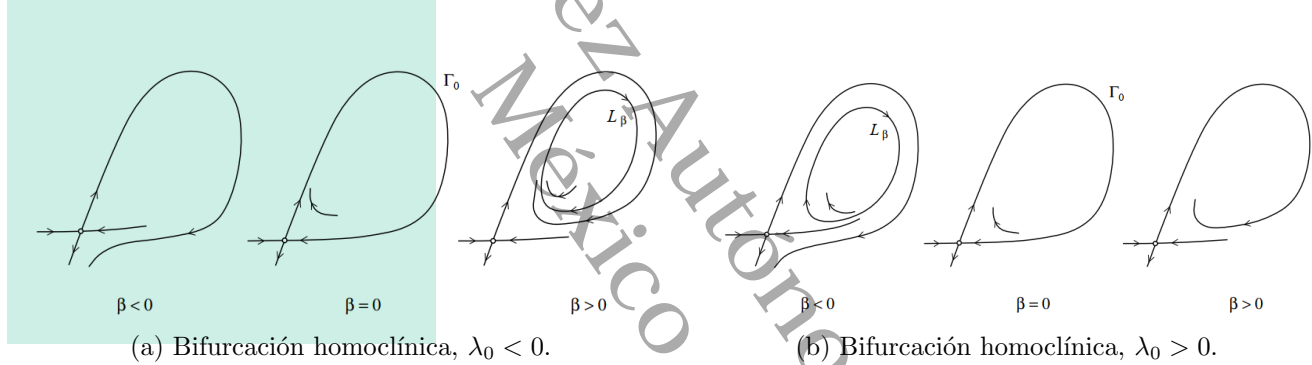


Figura 1.17: Bifurcación homoclínica bidimensional.

1.2.4. Bifurcación de Bogdanov-Takens

En este apartado estudiamos una bifurcación de codimensión dos, Bogdanov-Takens (BT), la cual ocurre en un punto de equilibrio de una familia de campos vectoriales dependientes de dos parámetros, cuando la linealización tiene un valor propio cero de multiplicidad dos. Para valores de los parámetros en una vecindad, el sistema tiene dos puntos de equilibrio, una silla y el otro foco, que se intersecan y desaparecen a través de una bifurcación silla-nodo. El punto de equilibrio foco sufre una bifurcación de Hopf, generando un ciclo límite, este ciclo límite se degenera en una órbita homoclínica a la silla y desaparece a través de una bifurcación homoclínica. Los resultados que se muestran a continuación están basados en [K, P, W].

Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f} \in C^r(E \times \mathbb{R}^2), \quad r \geq 2, \quad (1.24)$$

hacemos las siguientes suposiciones para (1.24):

1.2 Teoría de bifurcación

20

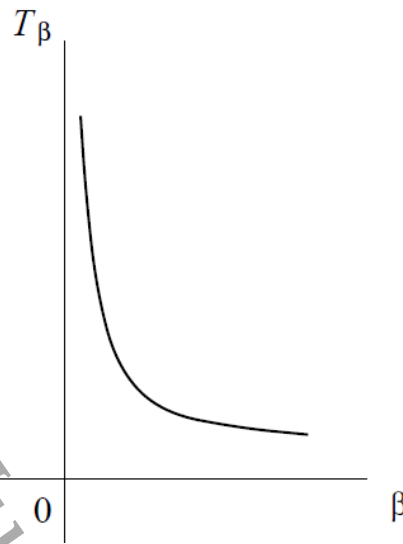


Figura 1.18: Período del ciclo cerca de la órbita homoclínica.

1. En $\mu = \mathbf{0}$, el sistema tiene un punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. La linealización $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica dos $\lambda_{1,2} = 0$.
3. El resto de los valores propios de la linealización tiene parte real distinto de cero.

En general, el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es raíz doble de la ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ y $\mu = \mathbf{0}$ es el origen del plano de parámetros de

- una curva con dos ramas de bifurcación silla-nodo,
- una curva de bifurcación de Hopf y
- una bifurcación homoclínica en una silla.

Estas bifurcaciones no son degeneradas y no ocurren otras bifurcaciones en una vecindad pequeña de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para valores suficientemente cercanos de $\mu = \mathbf{0}$.

De acuerdo a la teoría de la variedad central y las condiciones en los valores propios de la jacobiana del sistema (1.24) en \mathbf{x}_0 , $\mu = \mathbf{0}$, se sigue que la variedad central es bidimensional. El siguiente resultado permite caracterizar la bifurcación de Bogdanov-Takens en una familia de sistemas diferenciales dependientes de dos parámetros cuya prueba puede consultarse en [K].

Teorema 1.21. Consideremos el sistema bidimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f} \in C^r(E \times \mathbb{R}^2), \quad r \geq 2.$$

Supongamos que en $\mu = \mathbf{0}$ tiene un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y la linealización $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tiene un valor propio de multiplicidad algebraica dos, $\lambda_{1,2} = 0$. Además, supongamos las siguientes condiciones de no degeneración:

1.2 Teoría de bifurcación

21

1. $a(0)b(0) \neq 0$, donde $a(0)$ y $b(0)$ son los coeficientes cuadráticos.
2. La aplicación $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \text{Tr}D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \text{Det}D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu))$ es regular en $(\mathbf{x}, \mu) = (\mathbf{0}, 0)$.

Entonces, el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \beta_1 + \beta_2 x + x^2 + bxy, \quad b = \text{sign } a(0)b(0) = \pm 1, \end{aligned} \tag{1.25}$$

y presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens en $(\mathbf{0}, 0)$.

El diagrama de bifurcación de la forma normal con $b = -1$, se muestra en la figura 1.19. El origen separa las dos ramas de la curva de bifurcación silla-nodo:

$$T_+ = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 > 0 \right\} \quad \text{y} \quad T_- = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 < 0 \right\}.$$

Sobre la curva de parámetros T_+ (T_-) el sistema tiene un punto de equilibrio no hiperbólico, el cual es silla-nodo y su parte lineal tiene un valor propio cero y uno positivo (negativo). Por otra parte, en los parámetros que están sobre el rayo

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\},$$

el sistema presenta una bifurcación de Hopf supercrítica por lo que se genera un ciclo límite estable. Este ciclo límite existe y permanece hiperbólico en la región de parámetros limitada por el rayo H y la curva suave

$$P = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + O(|\beta_2|^3), \beta_2 < 0 \right\}.$$

Sobre la curva P se produce una bifurcación homoclínica y cuando el ciclo límite se acerca a la órbita homoclínica, su periodo tiende a infinito. El caso $b = 1$, se reduce al caso anterior bajo las transformaciones $t \mapsto -t, y \mapsto -y$. Éste no afecta las curvas de bifurcación, pero la bifurcación de Hopf es subcrítica, por lo que el ciclo límite se vuelve inestable. Además T_+ se encuentra en el cuarto cuadrante y T_- en el primero.

Coefficientes cuadráticos

Los coeficientes cuadráticos $a(0)$ y $b(0)$ involucrados en la condición de no degeneración, se pueden calcular para $n \geq 2$ como sigue. Supongamos que la serie de Taylor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = A_0\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^3),$$

donde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la forma bilineal con componentes

$$B_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

1.2 Teoría de bifurcación

Sean $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^n$ vectores distintos de cero que satisfacen

$$A_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad A_0 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0, \quad A_0^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad A_0^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1, \quad \text{y}$$

$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0 \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1 \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en \mathbb{R}^n . Entonces

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_1, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) \rangle, \quad b(0) = \langle \mathbf{p}_0, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) \rangle + \langle \mathbf{p}_1, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rangle.$$

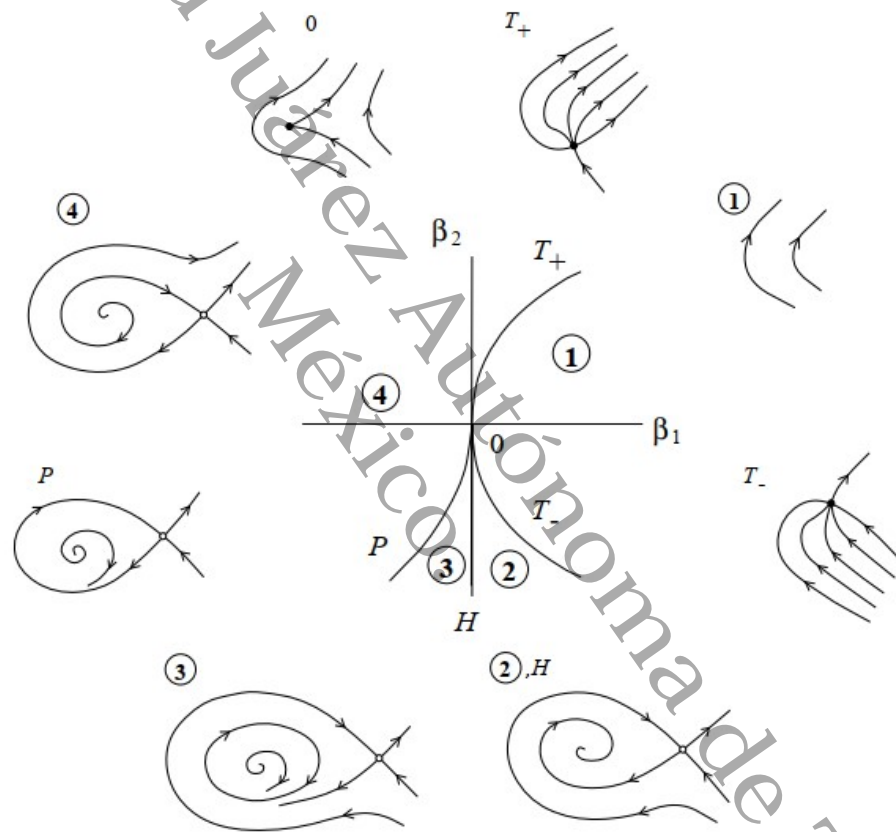


Figura 1.19: Diagrama de bifurcación de Bogdanov-Takens.

1.2.5. Bifurcación cero-Hopf

En este apartado, estudiamos la bifurcación de codimensión dos, cero-Hopf, la cual ocurre en un sistema diferencial dependiente de un parámetro bidimensional, definida en un abierto de \mathbb{R}^n . Suponemos que el sistema tiene un punto de equilibrio y la jacobiana del sistema tiene un valor propio cero y un par de valores propios imaginarios puros, en el valor de bifurcación. Esta bifurcación

4
19
1

1.2 Teoría de bifurcación

23

es también conocida como *Hopf-nodo-silla*, el valor de bifurcación en el espacio de parámetros se encuentra en una intersección tangencial de curvas de bifurcaciones nodo-silla y Hopf, ver [GK].

Los resultados que a continuación mostramos están basados en [K, GK]. Consideremos una familia de sistemas diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in E, \quad \mu \in \mathbb{R}^2, \quad (1.26)$$

donde $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(E \times \mathbb{R}^2)$, $k \geq 3$, $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Hacemos las siguientes suposiciones para el sistema (1.26):

1. En el parámetro $\mu = \mathbf{0}$, el sistema tiene un punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. La jacobiana $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, tiene un valor propio cero, $\lambda_1 = 0$, y una pareja de valores propios imaginarios puros, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$, $\omega > 0$.
3. La jacobiana tiene $n - 3$ valores propios con parte real distinto de cero.

Genéricamente, $\mu = \mathbf{0}$ se encuentra en una bifurcación tangencial de curvas de bifurcación silla-nodo y curva de bifurcación de Hopf, como una familia de dos parámetros.

En una vecindad local de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, para valores de parámetros suficientemente cercanos a $\mu = 0$, el sistema (1.26) tiene a los más dos puntos de equilibrio que pueden colisionar y desaparecer a través de una bifurcación silla-nodo o sufrir una bifurcación de Hopf, generando un ciclo límite.

Las curvas adicionales de las bifurcaciones de codimensión uno se acumulan en $\mu = 0$ en el espacio de parámetros. Las bifurcaciones de codimensión uno aparecen dependiendo de los coeficientes de segundo orden en la expansión en serie de Taylor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. El caso más complicado está asociado con la aparición de una rama de bifurcación en toro de ciclos límites generados por las bifurcaciones de Hopf. Las bifurcaciones del toro generan, un toro bidimensional invariante, es decir, la interacción del nodo-silla y Hopf, pueden generar toros. Éste, desaparece mediante una destrucción heteroclínica o una explosión. En el primer caso, las órbitas homoclínicas y heteroclínicas que conectan los dos puntos de equilibrio aparecen y desaparecen, en el último caso, el toro interseca cualquier vecindad fija de $\mathbf{x} = 0$. La dinámica en el toro puede ser periódica o cuasiperiódica, y el toro puede perder diferenciabilidad antes de desaparecer.

De acuerdo a la teoría de la variedad central y las condiciones en los valores propios de la jacobiana del sistema (1.26), se sigue que la variedad central es de dimensión tres. En consecuencia, basta con hacer el estudio de esta bifurcación considerando que $n = 3$, la cual se visualiza en el siguiente resultado, cuya prueba se muestra en [K].

Teorema 1.22. *Supongamos $n = 3$ en el sistema diferencial (1.26) y que en el parámetro $\mu = 0$ el sistema tiene un punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y la jacobiana tiene valores propios,*

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0.$$

Además consideremos las siguientes condiciones genéricas:

1.2 Teoría de bifurcación

24

1. $B(\mathbf{0})C(\mathbf{0})E(\mathbf{0}) \neq 0$,

2. la aplicación

$$(\mathbf{x}, \mu) \mapsto (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \text{Tr}(A), \text{Det}(A)),$$

es regular en $(\mathbf{x}, \mu) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$,

3. $\theta(\mathbf{0}) = \frac{\text{Re}H_{110}}{B(\mathbf{0})} \neq 0$,

Entonces el sistema es topológicamente equivalente cerca del origen a la forma normal compleja,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s|\zeta|^2 + \mathbf{O}(\|(\xi, \zeta)\|^4), \\ \dot{\zeta} &= (\beta_2 + i\omega)\zeta + (\theta(\beta) + i\theta_1(\beta))\xi\zeta + \xi^2\zeta + \mathbf{O}(\|(\xi, \zeta)\|^4),\end{aligned}\tag{1.27}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}^2$ y

$$s = \text{sing}B(\mathbf{0})C(\mathbf{0}) = \pm 1, \quad \theta(\mathbf{0}) = \frac{\text{Re}(H_{110})}{B(\mathbf{0})}.$$

Donde B, C son las formas bilineal, trilineal de la expansión en serie de Taylor del sistema (1.26) y H_{110} es un valor calculable a través de los vectores propios de la jacobiana y su transpuesta. Esta forma normal es simple en coordenadas reales cilíndricas,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2 + \mathbf{O}((\xi^2 + \rho^2)^2), \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta(\beta)\xi + \xi^2) + \mathbf{O}((\xi^2 + \rho^2)^2), \\ \dot{\phi} &= \omega + \theta_1(\beta)\xi + \mathbf{O}(\xi^2 + \rho^2).\end{aligned}\tag{1.28}$$

Los términos de orden superior son 2π periódicos en la dirección ϕ . En general, los diagramas de bifurcación de la forma normal (1.28) dependen de los términos superiores, aunque sus características esenciales están determinadas por la forma normal truncada,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta(\beta)\xi + \xi^2), \\ \dot{\phi} &= \omega + \theta_1(\beta)\xi.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Donde las primeras dos ecuaciones son independientes de la tercera y la ecuación para ϕ describen una rotación monótona alrededor del eje ξ , con velocidad angular casi constante $\dot{\phi} \approx \omega$, para $|\xi|$ suficientemente pequeño. Así, para entender las bifurcaciones en (1.29), basta con estudiar el sistema plano en coordenadas (ξ, ρ) para $\rho \geq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta(\beta)\xi + \xi^2).\end{aligned}\tag{1.30}$$

1.2 Teoría de bifurcación

25

A la ecuación (1.30), se le denomina sistema de amplitud. Si se considera todo el plano (ξ, ρ) , es simétrico, ya que la reflexión $\rho \rightarrow -\rho$, lo deja invariante.

El sistema (1.30), puede tener entre cero y tres puntos de equilibrio en una vecindad pequeña del origen para $\|\beta\|$ pequeño. Existen dos puntos de equilibrio cuando $\rho = 0$, para $\beta_1 < 0$ y están dados por

$$E_{1,2} = (\xi_{1,2}^{(0)}, 0) = (\mp \sqrt{-\beta_1}, 0).$$

Los puntos de equilibrio aparecen a través de una bifurcación silla-nodo genérico en la línea

$$S = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}.$$

La bifurcación en la línea S tiene dos ramas, S_+ y S_- , separados por el punto $\beta = 0$ y correspondientes a $\beta_2 > 0$ y $\beta_2 < 0$, respectivamente. Cruzar la rama S_+ da lugar a un nodo inestable y una silla, mientras que pasar por S_- implica la existencia de un nodo estable y una silla.

Los puntos de equilibrio $E_{1,2}$ pueden bifurcarse en un equilibrio no trivial con $\rho > 0$,

$$E_3 = (\xi_3^{(0)}, \rho_3^{(0)}) = \left(-\frac{\beta_2}{\theta} + \mathbf{O}(\beta_2), \sqrt{-\frac{1}{s} \left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2}{\theta^2} + \mathbf{O}(\beta_2^2) \right)} \right),$$

pudiendo ramificarse desde E_1 o E_2 . El sistema (1.30) podría tener otro punto de equilibrio no trivial, pero no es de nuestro interés debido a que se encuentra fuera de cualquier vecindad suficientemente pequeña del origen en el plano fase y no interactúa con ninguno de los puntos de equilibrio mencionados. El punto de equilibrio E_3 aparece en la curva de bifurcación

$$H = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{\beta_2^2}{\theta^2} + \mathbf{O}(\beta_2^2) \right\}.$$

Los diagramas de bifurcación para las primeras dos ecuaciones con $\theta \neq 0$, se presentan en las figuras 1.20.

Mostramos ahora los casos posibles en el retrato fase del sistema (1.30):

1. $s = 1, \theta(0) > 0$; aparición de bifurcación de Hopf subcrítica y no existen toros.
2. $s = -1, \theta(0) < 0$; aparición de bifurcación de Hopf subcrítica y no existen toros.
3. $s = 1, \theta(0) < 0$; existencia de la bifurcación de Hopf subcrítica y supercrítica y destrucción de toros heteroclínicos.
4. $s = -1, \theta(0) > 0$; existencia de la bifurcación de Hopf subcrítica y supercrítica y explosión de toros.

1.2 Teoría de bifurcación

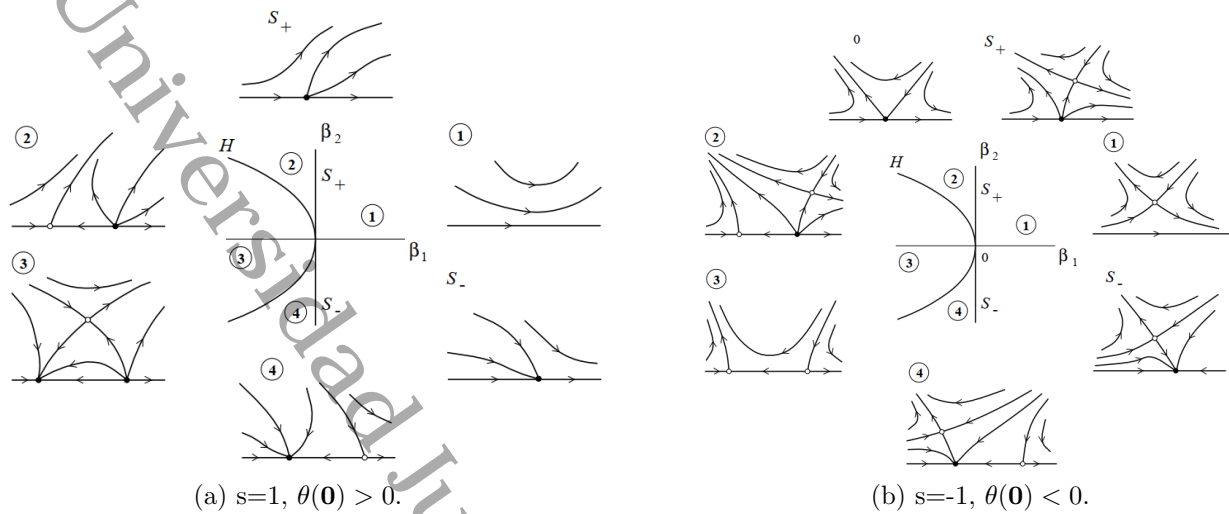


Figura 1.20: Bifurcación cero-Hopf, parte I.

Coefficientes de la forma normal

Los coeficientes de la forma normal asociada, que están involucrados en las condiciones de no degeneración 1. y 3. del teorema 1.22 se pueden calcular para $n \geq 3$ de la siguiente manera. Escribimos la expansión de Taylor de $f(\mathbf{x}, \mu)$ en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como

$$f(\mathbf{x}, \mu) = A\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4),$$

donde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ es la forma bilineal y trilineal, respectivamente; con componentes

$$B_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k,l=1}^n \left. \frac{\partial^2 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{\xi=0} x_k y_l, \quad C_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k,l,m=1}^n \left. \frac{\partial^3 f_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \right|_{\xi=0} x_k y_l z_m,$$

para $j = 1, \dots, n$.

Consideramos dos vectores propios, $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{C}^n$ tales que $A\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, $A\mathbf{q}_1 = i\omega\mathbf{q}_1$. Además dos vectores propios adjuntos $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^n$ tales que $A^T\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, $A^T\mathbf{p}_1 = -i\omega\mathbf{p}_1$. Las cuales satisfacen $\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0 \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = 1$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en \mathbb{C}^n .

Calculamos

$$G_{200} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_0, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) \rangle, \quad H_{110} = \langle \mathbf{p}_1, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rangle, \quad G_{011} = \langle \mathbf{p}_0, B(\mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_1) \rangle,$$

$$G_{300} = \frac{1}{6} \langle \mathbf{p}_0, C(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + 3B(\mathbf{q}_0, h_{200}) \rangle,$$

$$G_{111} = \langle \mathbf{p}_0, C(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_1) + B(\mathbf{q}_1, \bar{h}_{110}) + B(\bar{\mathbf{q}}_1, h_{110}) + B(\mathbf{q}_0, h_{011}) \rangle,$$

$$H_{210} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_1, C(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) + 2B(\mathbf{q}_0, h_{110}) + B(\mathbf{q}_1, h_{200}) \rangle,$$

$$H_{021} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_1, C(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_1) + 2B(\mathbf{q}_1, h_{011}) + B(\bar{\mathbf{q}}_1, h_{020}) \rangle,$$

1.2 Teoría de bifurcación

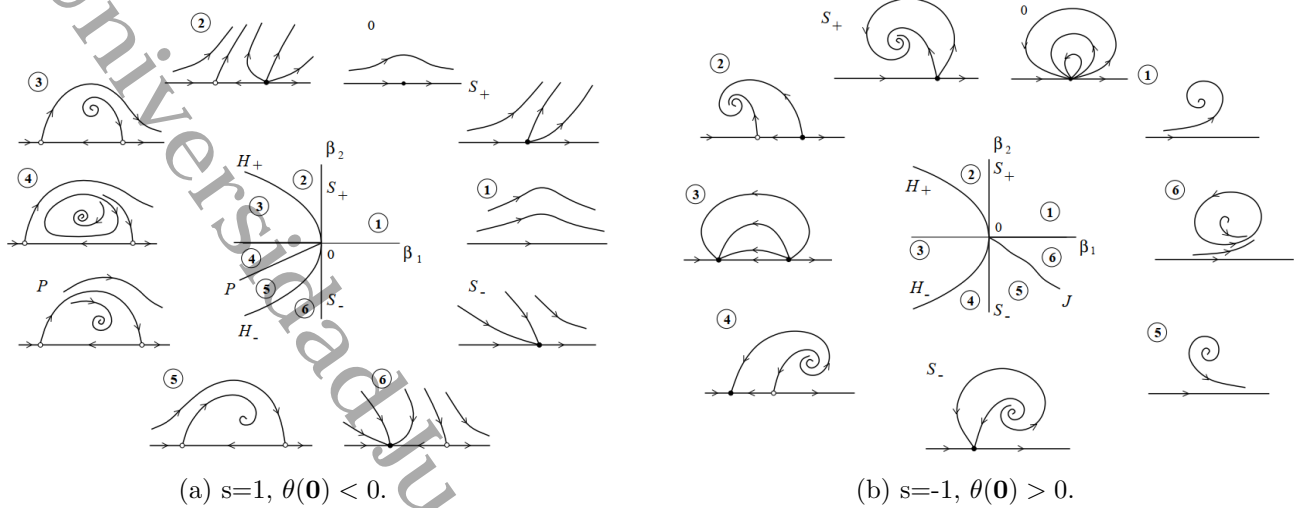


Figura 1.21: Bifurcación cero-Hopf, parte II.

donde $h_{020} = (2i\omega I_n - A)^{-1}B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)$ y los vectores h_{200} , h_{011} y h_{110} son las soluciones de los sistemas no singulares

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{200} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + \langle \mathbf{p}_0, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) \rangle \mathbf{q}_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{011} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(\mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_1) + \langle \mathbf{p}_0, B(\mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_1) \rangle \mathbf{q}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} i\omega I_n - A & \mathbf{q}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{110} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) - \langle \mathbf{p}_1, B(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rangle \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $B(\mathbf{0}) = G_{200}$, $C(\mathbf{0}) = G_{011}$ y

$$E(\mathbf{0}) = \text{Re} \left[H_{210}(\mathbf{0}) + H_{110}(\mathbf{0}) \left(\frac{\text{Re } H_{021}(\mathbf{0})}{G_{011}(\mathbf{0})} - \frac{3G_{300}(\mathbf{0})}{2G_{200}(\mathbf{0})} + \frac{G_{111}(\mathbf{0})}{2G_{011}(\mathbf{0})} \right) - \frac{H_{021}(\mathbf{0})G_{200}(\mathbf{0})}{G_{011}(\mathbf{0})} \right].$$

36

Capítulo 2

Bifurcación cero-Hopf y caos en un modelo tritrófico Leslie

En este capítulo analizamos la dinámica local del siguiente modelo tritrófico tipo Leslie,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= h_1(x) - yf_1(x), \\ \dot{y} &= ys_1 \left(1 - \frac{y}{\alpha_1 x + \beta_1}\right) - zg_1(y), \\ \dot{z} &= zs_2 \left(1 - \frac{z}{\alpha_2 y + \beta_2}\right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde x, y y z , representan la densidad de población de la especie presa (P), la especie depredadora (MP) y la especie superdepredadora (SP), respectivamente. La tasa de crecimiento de la población P es de la forma $h_1(x) = xh(x)$ y las respuestas funcionales generales de la interacción MP-P y SP-MP, son $f_1(x) = xf(x)$ y $g_1(y) = yg(y)$, respectivamente; donde f, g y h son funciones positivas de clase $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+)$.

Los parámetros adimensionales s_1 y s_2 son las tasas de crecimiento intrínsecas del MP y del SP, respectivamente. El parámetro β_1 es la capacidad de carga del MP en ausencia de la población presa y β_2 es la capacidad de carga en ausencia de la población MP, lo que indica que se tienen depredadores generalistas. Por otra parte, los parámetros α_1 y α_2 son el aprovechamiento derivado de la depredación y el sistema será analizado en la región ecológica de interés

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

El sistema (2.1) fue propuesto en [BR] y los autores demostraron que este sistema de ecuaciones diferenciales, exhibe una bifurcación de Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros s_2 y β_2 . En este capítulo se generalizarán estos resultados, mostrando que el sistema presenta una bifurcación cero-Hopf con respecto a los mismos parámetros.

2.1. Análisis de bifurcación cero-Hopf

El siguiente resultado, demostrado en [BR], da condiciones para la existencia de un punto de equilibrio en Ω .

2.1 Análisis de bifurcación cero-Hopf

Proposición 2.1. Si

$$\beta_1 = \frac{h(x_0)}{f(x_0)}, \quad s_1 = \frac{g(\beta_1)(\alpha_2\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \alpha_1x_0)}{\alpha_1x_0}, \quad y_0 = \beta_1 \quad y \quad z_0 = \alpha_2\beta_1 + \beta_2, \quad (2.2)$$

entonces el sistema diferencial (2.1) tiene un punto de equilibrio $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, s_1$ son números reales positivos con significado ecológico y x_0 es un número real positivo.

Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio \mathbf{p}_0 , calculamos la derivada en un punto (x, y, z) del campo vectorial (2.1), la cual está dada por,

$$\mathbf{J}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(x) - y(f(x) + xf'(x)) + xh'(x) & -xf(x) & 0 \\ \frac{s_1y^2\alpha_1}{(x\alpha_1 + \beta_1)^2} & -\frac{2ys_1}{x\alpha_1 + \beta_1} + s_1 - z(g(y) + yg'(y)) & -yg(y) \\ 0 & \frac{s_2z^2\alpha_2}{(y\alpha_2 + \beta_2)^2} & s_2 - \frac{2s_2z}{y\alpha_2 + \beta_2} \end{pmatrix}.$$

Si las hipótesis de la proposición 2.1 se cumplen, entonces $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0)$ es,

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} x_0(h'(x_0) - \beta_1f'(x_0)) & -\frac{x_0h(x_0)}{\beta_1} & 0 \\ \frac{\beta_1^2(\alpha_2\beta_1 + \beta_2)g(\beta_1)}{x_0(x_0\alpha_1 + \beta_1)} & -\frac{\beta_1(\alpha_2\beta_1 + \beta_2)(g(\beta_1) + x_0\alpha_1g'(\beta_1))}{x_0\alpha_1} & -\beta_1g(\beta_1) \\ 0 & s_2\alpha_2 & -s_2 \end{pmatrix}.$$

De ahora en adelante fijamos todos los parámetros excepto s_2 y β_2 , por lo que consideramos a $\mathbf{J}(x, y, z)$ como una matriz dependiente de dos parámetros, la cual denotaremos por $\mathbf{J}(x, y, z, s_2, \beta_2)$. En particular, $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_2, \beta_2)) = \mathbf{J}(x_0, \beta_1, \alpha_2\beta_1 + \beta_2, s_2, \beta_2)$ tiene polinomio característico

$$pol_0(\lambda, s_2, \beta_2) = -\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0,$$

con coeficientes dependiente de (s_2, β_2) , las cuales están dados por

$$A_0(s_2, \beta_2) = -\frac{K_5}{\alpha_1(\beta_1 + \alpha_1x_0)}, \quad A_1(s_2, \beta_2) = -\frac{K_6}{\alpha_1x_0(\beta_1 + \alpha_1x_0)}, \quad A_2(s_2, \beta_2) = -\frac{K_7}{\alpha_1x_0}; \quad (2.3)$$

además K_5, K_6 y K_7 son como en el apéndice A.2 (cf. [BR, Eq. (12)]).

2.1.1. Condición necesaria cero-Hopf

El análisis de bifurcación para el modelo (2.1) comienza verificando la validez de las condiciones necesarias, esto es demostrando que la aproximación lineal $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0)$ tiene un valor propio cero y un par de valores propios imaginarios puros conjugados. Para simplificar la notación introducimos

$$K_1 = \beta_1f'(x_0) - h'(x_0), \quad K_2 = \beta_1 + \alpha_1x_0 \quad y \quad K_3 = x_0(h'(x_0) - \beta_1f'(x_0)) + \alpha_2\beta_1g(\beta_1).$$

Proposición 2.2. Supongamos que las hipótesis de la proposición 2.1 se satisfacen. Si $A_1(s_{20}, \beta_{20}) < 0$,

12

1

44

2.1 Análisis de bifurcación cero-Hopf

30

$$\begin{aligned} s_{20} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h(x_0)}{\alpha_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0))} + K_3 > 0, \quad y \\ \beta_{20} &= -\frac{\alpha_2 (\alpha_1 \beta_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2^2 K_1 + \alpha_1 \beta_1 h(x_0)))}{\alpha_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0))} > 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

entonces los valores propios de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}))$ son

$$\lambda_1 = 0, \quad y \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad (2.5)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{-A_1(s_{20}, \beta_{20})}$ es un número real positivo.

Demostración. Primero, notemos que el polinomio característico de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_2, \beta_2))$ es determinado por las condiciones dadas en (2.3). Por lo tanto, una factorización es de la forma

$$pol_0(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda_2) = -\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2), \quad \omega_0 > 0,$$

si y solo si existen condiciones en los parámetros tales que $A_0(s_2, \beta_2) = A_2(s_2, \beta_2) = 0$ y $\lambda_2 = -\omega_0^2 = A_1(s_2, \beta_2)$ (esto es, $\omega_0^2 = -A_1(s_2, \beta_2) > 0$). Ahora, de la ecuación (2.3), $A_0(s_2, \beta_2) = A_2(s_2, \beta_2) = 0$ si y solo si $K_5 = K_7 = 0$. Usando el software Mathematica, un cálculo directo demuestra que si $\beta_2 = \beta_{20}$, entonces $K_5(s_2, \beta_2) = 0$ donde β_{20} es como en las hipótesis. En consecuencia, $A_0(s_2, \beta_{20}) = 0$. Además, haciendo $\beta_2 = \beta_{20}$ y sustituyendo en $A_2(s_2, \beta_2)$, tenemos que si $s_2 = s_{20}$, entonces $A_2(s_2, \beta_{20}) = 0$, donde s_{20} es como en las hipótesis. Finalmente, tomando $(s_2, \beta_2) = (s_{20}, \beta_{20})$ se concluye la prueba. ◀

2.1.2. Condiciones de no degeneración cero-Hopf

En esta sección mostramos que existen condiciones de parámetros para el modelo (2.1), que aseguran la validación de regularidad y las condiciones de no degeneración ZH. Supongamos que s_{20}, β_{20} son como en la proposición 2.2 y definamos los siguientes valores de parámetro

$$\beta_{10} := \frac{h(x_0)}{f(x_0)} \quad y \quad s_{10} := \frac{g(\beta_{10})(\alpha_2 \beta_{10} + \beta_{20})(\beta_{10} + \alpha_1 x_0)}{\alpha_1 x_0}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, se sigue que si s_{20} y β_{20} son como en (2.4), $s_1 = s_{10}$ y $\beta_1 = \beta_{10}$, entonces el sistema diferencial (2.1), depende solamente de los parámetros $x_0, s_2, \alpha_1, \alpha_2$ y β_2 (cf. [BR, Sec. 3.1]). En particular, variando los parámetros (s_2, β_2) en una vecindad pequeña del punto (s_{20}, β_{20}) el plano $\mathbb{R}_{s_2, \beta_2}^2$, el sistema diferencial (2.1) se escribe como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(h(x) - yf(x)), \\ \dot{y} &= y\left(s_{10}\left(1 - \frac{y}{\beta_{10} + \alpha_1 x}\right) - zg(y)\right), \\ \dot{z} &= zs_2\left(1 - \frac{z}{\beta_2 + \alpha_2 y}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.1 Análisis de bifurcación cero-Hopf

Observación 2.3. *Del análisis anterior, es importante tener en cuenta los siguientes hechos que usaremos más adelante:*

1. El punto $\mathbf{p}_0(s_2, \beta_2) = (x_0, \beta_{10}, \alpha_2 \beta_{10} + \beta_2)$ es un punto de equilibrio del sistema diferencial (2.7) si y solo si $\beta_2 = \beta_{20}$.
2. De acuerdo a la proposición 2.2, los valores propios de la aproximación lineal en $\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20})$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$.

Ahora, fijamos algunas notaciones para demostrar la regularidad ZH. En lo que sigue $E(x, y, z, s_2, \beta_2)$ denota el campo vectorial para el sistema diferencial (2.7). Además, denotamos por $\tau(x, y, z, s_2, \beta_2)$ y $\delta(x, y, z, s_2, \beta_2)$ a la traza y el determinante de la matriz jacobiana $\mathbf{J}(x, y, z, s_2, \beta_2)$, respectivamente. Explícitamente, las expresiones matemáticas para τ y δ son dadas en el apéndice A.1. Definimos la siguiente expresión

$$\mathcal{D}_0 = \frac{\alpha_2 \beta_{10} x_0 g'(\beta_{10}) (h'(x_0) - \beta_{10} f'(x_0))^2 B_3^2 (B_6 B_4 + B_5)}{K_2 (\alpha_1 x_0 g'(\beta_{10}) B_6 + g(\beta_{10}) K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0))^3}, \tag{2.8}$$

donde las expresiones matemáticas para los términos B_3, B_4, B_5 y B_6 son como en el apéndice A.2. Por lo tanto, la condición de regularidad ZH puede probarse mediante el siguiente criterio.

Proposición 2.4. *La aplicación*

$$\mathcal{R} : (x, y, z, s_2, \beta_2) \mapsto (E(x, y, z, s_2, \beta_2), \tau(x, y, z, s_2, \beta_2), \delta(x, y, z, s_2, \beta_2)),$$

es regular en $(\mathbf{p}_0, s_{20}, \beta_{20})$ si y solo si $\mathcal{D}_0 \neq 0$.

Demostración. Usando el software Mathematica, calculamos la derivada de la aplicación \mathcal{R} , con respecto a las variables x, y, z, s_2 y β_2 en el punto $(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}), s_{20}, \beta_{20})$. Ésta es una matriz no trivial M_0 , la cual omitimos aquí, porque tiene una expresión matemática muy grande. Finalmente, el determinante de M_0 es igual a \mathcal{D}_0 . Esto completa la prueba. ◀

Para continuar con el análisis de bifurcación supondremos las condiciones que definen el sistema diferencial (2.7). Por lo tanto, de acuerdo con las fórmulas de Guckenheimer-Kuznetsov y usando el software Mathematica, calculamos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}(\mathbf{p}_0, s_{20}, \beta_{20}) = G_{200}, & \mathbf{C}_0 &= \mathbf{C}(\mathbf{p}_0, s_{20}, \beta_{20}) = G_{011}, \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}(\mathbf{p}_0, s_{20}, \beta_{20}), & \theta_0 &= \theta(\mathbf{p}_0, s_{20}, \beta_{20}), \end{aligned} \tag{2.9}$$

El término \mathbf{E}_0 tiene una expresión matemática muy grande (el cual se omite en este texto, lo daremos de manera explícita en las secciones posteriores). Por otro lado, las expresiones para $\mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ y θ_0 en (2.9) se calculan explícitamente (el apéndice A.2 contiene los términos principales) y los cálculos correspondientes son resumidos en la siguiente resultado, la cual nos permite mostrar las condiciones de no degeneración de la bifurcación cero-Hopf.

2.2 Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

32

Proposición 2.5. Si las hipótesis de las proposiciones 2.1 y 2.2 se cumplen, entonces

$$\mathbf{B}_0 = \frac{K_1 C_1}{2\alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) C_3^2 C_2}, \quad \theta_0 = \frac{Re H_{110}}{\mathbf{B}_0}, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{(g(\beta_1)\alpha_1 h(x_0) + (x_0\alpha_1 + \beta_1)K_1 + x_0\alpha_1(x_0\alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1)D_1}{\alpha_1(x_0\alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1 x_0^2 - D_2},$$

con $H_{110} = -\frac{N}{M}$, donde $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, M$ y N son como en el apéndice A.2.

De las proposiciones 2.1, 2.2, 2.4 y 2.5 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6 (Teorema principal). Si $\mathcal{D}_0, \mathbf{S}_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_0 \mathbf{E}_0$ y θ_0 , son números reales distintos de cero, entonces existen condiciones de parámetros para los cuales el punto de equilibrio $\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20})$ del sistema diferencial (2.1) exhibe una bifurcación cero-Hopf con respecto a los parámetros (s_2, β_2) en el valor de bifurcación (s_{20}, β_{20}) .

Del teorema de bifurcación cero-Hopf, si en particular $s = 1$ y $\theta_0 < 0$, o bien $s = -1$ y $\theta_0 > 0$, se tiene la existencia de ciclos límite estables provenientes de órbitas casiperiódicas de una bifurcación de Hopf supercrítica, o bien una bifurcación homoclínica o heteroclínica. Así mismo, se puede detectar cerca del valor de bifurcación el comportamiento caótico del sistema diferencial (2.1).

2.2. Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

En esta sección ilustramos los resultados generales del apartado 2.1, para lo cual utilizamos respuestas funcionales tipo Holling para f_1 y g_1 en el sistema diferencial (2.7) y mostramos que las hipótesis del teorema 2.6 se verifican. En lo que sigue consideremos las siguientes premisas:

1. la población de presas tiene una tasa de crecimiento logístico, esto es, $h(x) = \rho(1 - \frac{x}{R})$, donde ρ y R son parámetros constantes adimensionales positivos, que miden la **tasa de crecimiento** y la **capacidad de carga de la población presa**, respectivamente,
2. las interacciones poblacionales se rigen por respuestas funcionales tipo Holling.

En este sentido, mostraremos diferentes dinámicas que el sistema diferencial (2.7) puede tener. De hecho, se consideran tres casos, donde la respuesta funcional f_1 es Holling II o IV y g_1 es Holling II, III o IV. Estos casos se etiquetan de la siguiente manera:

- Caso 1: Holling II-II,
- Caso 2: Holling II-IV,
- Caso 3: Holling IV-III.

Para facilitar la lectura y apreciar las diferentes dinámicas, cada caso se ha incorporado de forma independiente en un apartado.

2.2 Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

2.2.1. Caso 1: Holling II-II

Sean f_1 y g_1 respuestas funcionales de tipo Holling II-II dadas por

$$f_1(x) = \frac{a_1 x}{b_1 x + 1}, \quad g_1(y) = \frac{a_2 y}{b_2 y + 1},$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son parámetros constantes positivos adimensionales. En este caso, el sistema (2.7) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(\rho \left(1 - \frac{x}{R} \right) - y \frac{a_1}{b_1 x + 1} \right), \\ \dot{y} &= y \left(s_{10} \left(1 - \frac{y}{\beta_{10} + \alpha_1 x} \right) - z \frac{a_2}{b_2 y + 1} \right), \\ \dot{z} &= z s_2 \left(1 - \frac{z}{\beta_2 + \alpha_2 y} \right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

para s_{10} y β_{10} son como en la fórmula (2.6).

El siguiente teorema demuestra que el sistema diferencial (2.10) presenta una bifurcación cero-Hopf.

Teorema 2.7. (Caso 1: Holling II-II) Si

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{9}{25}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad b_1 = \frac{4}{R}, \quad b_2 = \frac{24}{5R}, \\ \alpha_1 &= 1, \quad \beta_1 = \frac{R}{24}, \quad s_1 = \frac{245R}{5184} \text{ y } \rho = \frac{R}{100}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

entonces si $\beta_2 = \beta_{20}$, se sigue que $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{R}{4}, \frac{R}{24}, \frac{7\alpha_2 R}{144} \right)$ es punto de equilibrio para el sistema diferencial (2.10) en el cual ocurre una bifurcación cero-Hopf con respecto a (s_2, β_2) , en el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = \left(\frac{R}{800}, \frac{\alpha_2 R}{144} \right)$. Más aún, $S_0 \neq 0, \theta_0 < 0$ y $s = 1$.

Demostración. Primero mostramos la existencia de un punto de equilibrio en Ω . Para simplificar el análisis sean $b_1 = \frac{1}{x_0}$ y $x_0 = \frac{R}{4}$. Por lo tanto, de las fórmulas en (2.6), se sigue que

$$\beta_{10} = \frac{3\rho}{2a_1} \text{ y } s_{10} = \frac{a_2 \alpha_2 (a_1 \alpha_1 R + 6\rho)^2}{\alpha_1 a_1^2 R (\alpha_1 b_2 R + 20) + 12a_1 \rho (3\alpha_1 b_2 R - 2) - 36b_2 \rho^2}.$$

Por otro lado, de las hipótesis hechas en (2.11), si $\beta_1 = \beta_{10}$ y $s_1 = s_{10}$, entonces

$$\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}) = (x_0, \beta_{10}, \alpha_2 \beta_{10} + \beta_{20}) = \left(\frac{R}{4}, \frac{R}{24}, \frac{7R\alpha_2}{144} \right),$$

es un punto de equilibrio del sistema (2.10) cuando $\beta_2 = \beta_{20}$, ver observación 2.3 a). Además, se cumplen las hipótesis de la proposición 2.2 y por lo tanto se sigue que $s_{20} = \frac{R}{800}$ y $\beta_{20} = \frac{\alpha_2 R}{144}$ y la aproximación lineal $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}))$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, donde $\omega_0 = \frac{\sqrt{491R}}{2400}$, ver observación 2.3 b).

19

6

2.2 Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

Luego, por la proposición 2.4, $\mathcal{D}_0 = -\frac{3011R^5}{10701766656000000\alpha_2}$, lo cual garantiza la condición de regularidad. Finalmente, de la proposición 2.5, las expresiones dadas en (2.9) tienen los siguientes valores explícitos,

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{15055}{494928\alpha_2}, \quad \mathbf{C}_0 = -\frac{6243906250}{67116227157\alpha_2}, \quad \theta_0 = -\frac{39479312}{3387375},$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\frac{258268150247369007709}{68826064303672200000\alpha_2^2} - \frac{11347439829883009072534036365917}{61300866568339786287098021622912\alpha_2^4}}{R}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{S}_0 \neq 0$, $\theta_0 < 0$ y $s = 1$, por lo que la demostración se sigue del teorema 2.6. ◀

Observación 2.8. Del teorema 2.7 se tiene $s = 1$ y $\theta_0 < 0$. En este caso, existen curvas en el espacio de parámetros $\mathbb{R}_{s_2\beta_2}^2$ del sistema (2.10), donde se presenta bifurcación de Hopf, donde aparece un toro invariante y donde desaparece con una destrucción heteroclínica, (ver [GK, BL]).

2.2.2. Caso 2: Holling II-IV

Sean f_1 y g_1 respuestas funcionales de tipo Holling II-IV dadas por

$$f_1(x) = \frac{a_1x}{b_1x + 1}, \quad g_1(y) = \frac{a_2y}{b_2y^2 + 1},$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son parámetros constantes adimensionales positivos. Así, el sistema (2.7) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(\rho \left(1 - \frac{x}{R} \right) - y \frac{a_1}{b_1x + 1} \right), \\ \dot{y} &= y \left(s_{10} \left(1 - \frac{y}{\beta_{10} + \alpha_1x} \right) - z \frac{a_2y}{b_2y^2 + 1} \right), \\ \dot{z} &= z s_2 \left(1 - \frac{z}{\beta_2 + \alpha_2y} \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

para s_{10} y β_{10} como en la fórmula (2.6).

En el siguiente teorema se muestra que el sistema diferencial (2.12) presenta una bifurcación cero-Hopf.

Teorema 2.9. (Caso 2: Holling II-IV) Si

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{30\rho}{\alpha_1R}, \quad a_2 = \frac{2\rho}{\alpha_1\alpha_2R}, \quad b_1 = \frac{4}{R}, \\ b_2 &= \frac{100}{3\alpha_1^2R^2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1R}{20} \text{ y } s_1 = \frac{18\rho}{155}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

entonces para $\beta_2 = \beta_{20}$, el sistema (2.12) tiene como punto de equilibrio a $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{R}{4}, \frac{R\alpha_1}{20}, \frac{13\alpha_1\alpha_2R}{248} \right)$, en el cual ocurre una bifurcación cero-Hopf con respecto a (s_2, β_2) , en el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = \left(\frac{1943\rho}{16120}, \frac{3\alpha_1\alpha_2R}{1240} \right)$. Más aun, $\mathbf{S}_0 \neq 0$, $\theta_0 > 0$ y $s = 1$.

2.2 Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

Demostración. Siguiendo la misma idea como en la prueba del teorema 2.7. De las fórmulas en (2.6), en caso se tiene

$$\beta_{10} = \frac{3\rho}{2} \text{ y } s_{10} = \frac{9\rho(3\alpha_2\rho + 2\beta_2)}{18b_2\rho^2 + 8}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{R}{4}, \frac{R\alpha_1}{20}, \frac{13\alpha_1\alpha_2 R}{248} \right),$$

es un punto de equilibrio del sistema diferencial (2.12), cuando $\beta_2 = \beta_{20}$, ver observación 2.3 a).

Por otra parte, tomando las asignaciones dadas en (2.13) y sustituyendo en (2.4) obtenemos que $s_{20} = \frac{1943\rho}{16120}$ y $\beta_{20} = \frac{3\alpha_1\alpha_2 R}{1240}$. Por la proposición 2.2, la matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}))$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, donde $\omega_0 = \frac{1}{248} \sqrt{\frac{32527}{65}} \rho$.

Además, por la proposición 2.4, $\mathcal{D}_0 = -\frac{373749651\rho^6}{2094426464000\alpha_1\alpha_2 R}$, lo cual garantiza la condición regularidad. Finalmente, de la proposición 2.5, las expresiones dadas en (2.9) tienen los siguientes valores explícitos,

$$\mathbf{B}_0 = -\frac{23316\rho}{2957\alpha_1\alpha_2 R}, \quad \mathbf{C}_0 = -\frac{398802982118400\rho}{40670798228489\alpha_1\alpha_2 R}, \quad \theta_0 = \frac{45376693}{162870032},$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{52240460060544360669085874700089839243232473128\rho^3}{1831214345899365897120262787886264877471577\alpha_1^4\alpha_2^4 R^4} - \frac{56003083588473797292382368773\rho}{54945925847224327390904000\alpha_1^2\alpha_2^2 R^2}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{S}_0 \neq 0$, $\theta_0 > 0$ y $s = 1$, por lo que la demostración se sigue del teorema 2.6. ◀

Observación 2.10. *Para este caso, del teorema 2.9, existe una curva en el espacio de parámetros en el cual el sistema diferencial (2.14) presenta una bifurcación de Hopf (subcrítica) y no existen toros invariantes.*

2.2.3. Caso 3: Holling IV-III

Sean f_1 y g_1 , las respuestas funcionales de Holling tipo IV-III dadas por

$$f_1(x) = \frac{x}{b_1 x^2 + 1}, \quad g_1(y) = \frac{y^2}{b_2 y^2 + 1},$$

donde b_1, b_2 son parámetros constantes adimensionales positivos. Así, el sistema diferencial (2.7) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(\rho \left(1 - \frac{x}{R} \right) - y \frac{1}{b_1 x^2 + 1} \right), \\ \dot{y} &= y \left(s_{10} \left(1 - \frac{y}{\beta_{10} + \alpha_1 x} \right) - z \frac{y}{b_2 y^2 + 1} \right), \\ \dot{z} &= z s_2 \left(1 - \frac{z}{\beta_2 + \alpha_2 y} \right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

para s_{10} y β_{10} son como en la fórmula (2.6).

En el siguiente teorema se muestra que el sistema diferencial (2.14) presenta una bifurcación cero-Hopf.

2.2 Aplicaciones para respuestas funcionales tipo Holling

Teorema 2.11. (Caso 3: Holling IV-III) Si

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{53}{27\rho^2}, & b_1 &= \frac{\alpha_1^2}{9\rho^2}, & R &= \frac{12\rho}{\alpha_1}, \\ s_1 &= \frac{14661\rho}{20500}, & \alpha_2 &= \frac{181}{250\rho} & \text{y} & \beta_1 = \frac{3\rho}{2}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

entonces para $\beta_2 = \beta_{20}$, el sistema diferencial (2.14) tiene como punto de equilibrio a $\mathbf{p}_0 = \left(\frac{3\rho}{\alpha_1}, \frac{3\rho}{2}, \frac{7059}{4100}\right)$, en el cual presenta una bifurcación cero-Hopf con respecto a (s_2, β_2) en el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = \left(\frac{749329\rho}{1332500}, \frac{3258}{5125}\right)$. Más aún, $\mathbf{S}_0 \neq 0, \theta_0 > 0$ y $s = 1$.

Demostración. Una vez más, siguiendo la misma idea como en la demostración del teorema 2.7. De las fórmulas en (2.6), se tiene

$$\beta_1 = \frac{3\rho}{2} \text{ y } s_1 = \frac{9\rho(3\alpha_2\rho + 2\beta_2)}{18b_2\rho^2 + 8}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{3\rho}{\alpha_1}, \frac{3\rho}{2}, \frac{7059}{4100}\right),$$

es un punto de equilibrio del sistema (2.14).

Por otro parte, tomando las asignaciones dadas en (2.15) y sustituyendo en (2.4) obtenemos que $s_{20} = \frac{749329\rho}{1332500}$ y $\beta_{20} = \frac{3258}{5125}$. Por la proposición 2.2, la matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}))$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{88872073}{65} \frac{\rho}{20500}}$.

Además, por la proposición 2.4, $\mathcal{D}_0 = \frac{74088565240349709\rho^6}{123028292562500000000}$, lo cual garantiza la condición de regularidad. Finalmente, de la proposición 2.5, las expresiones dadas en (2.9) tienen los siguientes valores explícitos,

$$\mathbf{B}_0 = \frac{505797075\rho}{4621347796}, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{2317444969494307044593938590\rho}{118626751046532190925959873}, \quad \theta_0 = \frac{2177670123253642}{1219894030411875},$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{3\rho(E_{01} - E_{02})}{1184832802649434111550036435636371855246147565608557345608415699459094100000},$$

donde

$$E_{01} = 32333864201218895945572259203282180349163829980325010973363650899989367265625\rho^2,$$

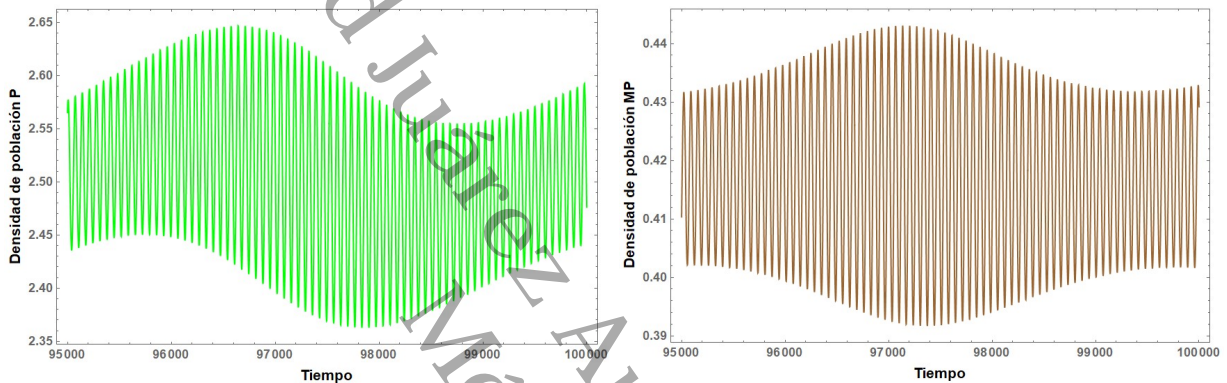
$$E_{02} = 16218016742362238950855666415473506060934950295257226891312756788413682864932872.$$

Por lo tanto, $\mathbf{S}_0 \neq 0, \theta_0 > 0$ y $s = 1$, luego la demostración se sigue del teorema 2.6. ◀

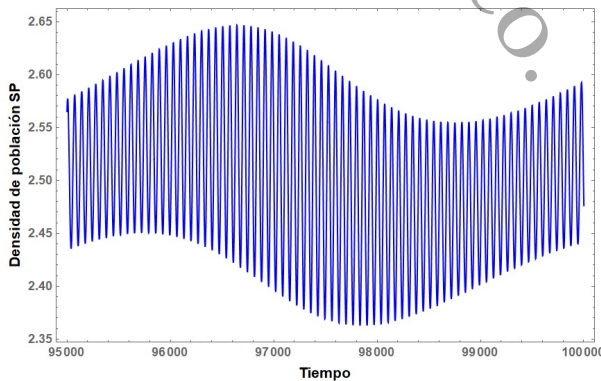
Del teorema 2.11, existe una curva en el espacio de parámetros en el cual el sistema presenta una bifurcación de Hopf (subcrítica) y no hay toros invariantes.

2.3. Resultados numéricos

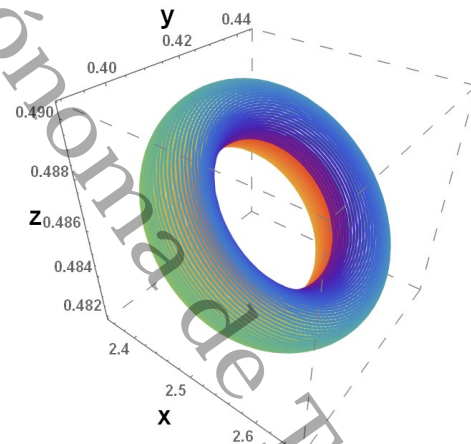
Ejemplo 2.12 (Caso 1: Holling II-II, teorema 2.7). Consideramos las asignaciones (2.11), $\alpha_1 = 1$ y $R = 10$. En consecuencia, $s_{20} = 0.0125$ y $\beta_{20} = 0.069444$. El punto de equilibrio para el sistema (2.10) en el cual se presenta la bifurcación cero-Hopf es $\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}) = (2.5, 0.416667, 0.486111)$. Haciendo $s_2 = s_{20} + 10^{-6}$, $\beta_2 = 0.069855$ y tomando como condición inicial el punto $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.500001, 0.416676, 0.486121)$ se obtiene una órbita que es densa en un toro invariante, véase la figura 2.1d. Las correspondientes series de tiempo de las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 2.1a, 2.1b y 2.1c.



(a) Serie de tiempo para la población presa. (b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



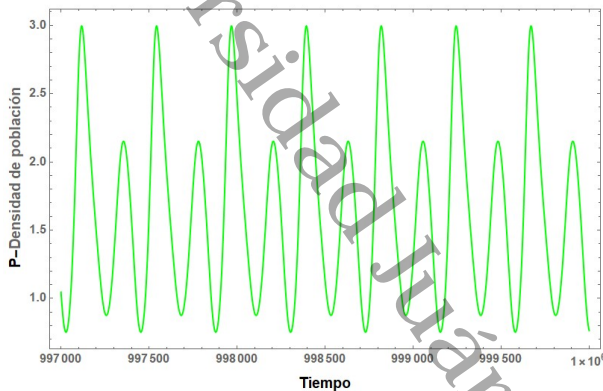
(d) Toro invariante.

Figura 2.1: Series de tiempo para el Caso Holling II-II y una órbita con condición inicial $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.500001, 0.416676, 0.486121)$ la cual es densa en el toro invariante.

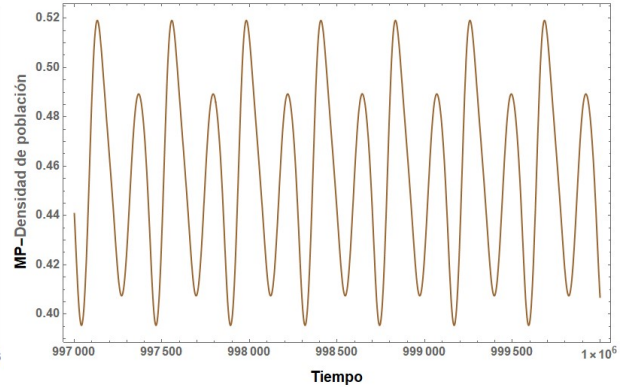
Ejemplo 2.13 (Caso 2: Holling II-IV, teorema 2.9). Consideramos las asignaciones como en (2.13), $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\rho = 0.5$ y $R = 10$. En consecuencia $s_{20} \approx 0.060267$ y $\beta_{20} \approx 0.024194$. Luego el sistema (2.12) tiene un punto de equilibrio $\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}) = (2.5, 0.5, 0.524194)$, en el cual presenta una

2.3 Resultados numéricos

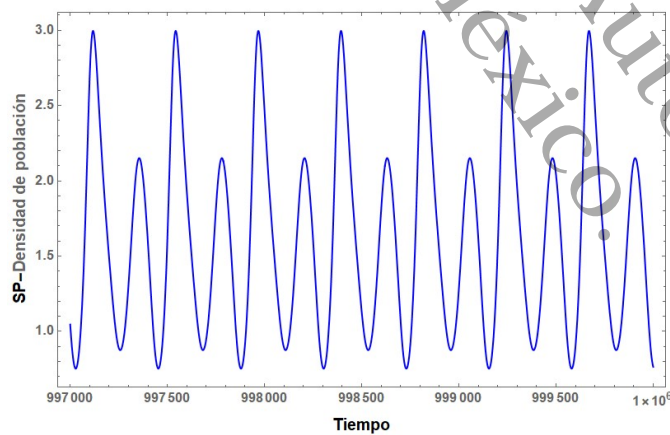
bifurcación cero-Hopf. Hagamos $\beta_2 \approx 0.024194$ y $s_2 \approx 0.088344$. Tomando como condición inicial $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.501, 0.51, 0.624194)$, obtenemos una órbita tendiendo a una órbita periódica, véase la figura 2.2d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 2.2a, 2.2b y 2.2c.



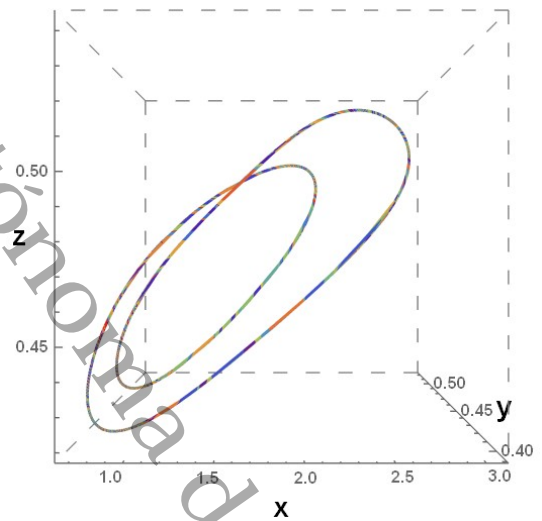
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Órbita periódica.

Figura 2.2: Series de tiempo para el caso Holling II-IV y una órbita con condición inicial $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.501000, 0.510000, 0.624194)$ tendiendo a una órbita periódica.

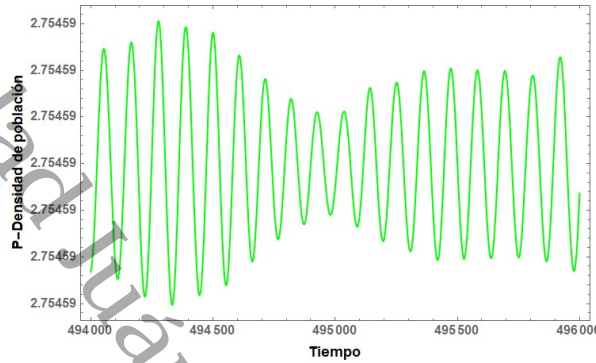
Ejemplo 2.14 (Caso 3: Holling IV-III, teorema 2.11). Consideramos una vez más las asignaciones (2.15), $\alpha_1 = 0.5$ y $\rho = 0.5$. En consecuencia, $s_{20} = 0.281174$ y $\beta_{20} = 0.635707$. Por lo tanto, el punto de equilibrio para el sistema (2.14) en la cual presenta bifurcación cero-Hopf es $\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}) = (3, 0.75, 1.72171)$. Haciendo $s_2 = s_{20} + 10^{-6}$ y $\beta_2 = 0.6356$, el sistema diferencial tiene un único punto de equilibrio en Ω dado por $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.754592, 0.710004, 1.663685)$, el cual es localmente asintóticamente estable, ya que $\mathbf{J}(\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2))$ tiene valores propios $-0.0167396, -0.00199505 \pm$

7

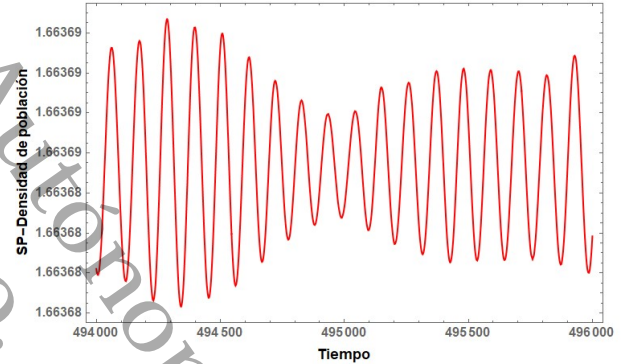
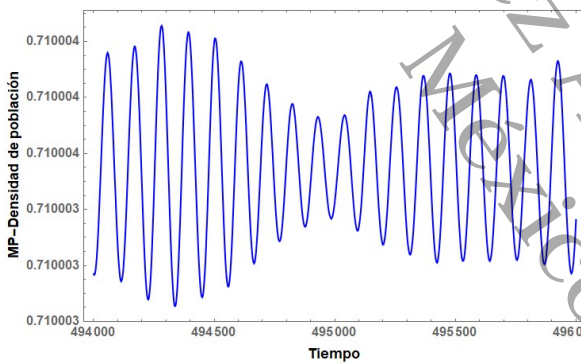
8

2.3 Resultados numéricos

0.0572379 *i*. Tomando como condición inicial $\mathbf{q}_1 \approx (3.000001, 0.750010, 1.721717)$, se obtiene una trayectoria que se acumula en un atractor extraño oculto [LK], ver figura 2.4b. Las correspondientes series de tiempo para las densidades poblacionales se muestran en las figuras 2.3a, 2.3b y 2.3c. Finalmente, escogiendo como condición inicial $\mathbf{q}_2 \approx (2.98, 0.74, 1.71)$, se obtiene una trayectoria que tiende a un ciclo límite, ver figura 2.4a.



(a) Serie de tiempo para la población presa.

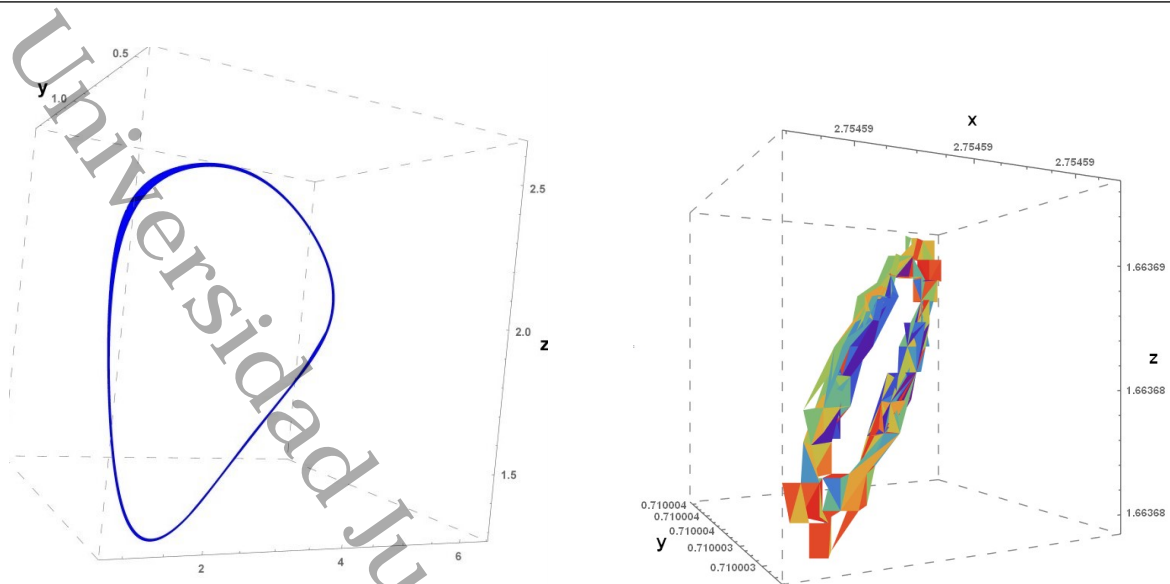


(b) Serie de tiempo para la población depredadora. (c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.

Figura 2.3: Series de tiempo para el caso Holling IV-III: una órbita con condición inicial $\mathbf{q}_0(s_2, \beta_2) \approx (2.754592, 0.710004, 1.663685)$ detectando un atractor extraño oculto.

2.4 Determinación de caos

40



(a) Una órbita con condición inicial $\mathbf{q}_2 \approx (2.98, 0.74, 1.71)$ tendiendo a un ciclo límite.

(b) Una órbita con condición inicial $\mathbf{q}_1 \approx (3.000001, 0.750010, 1.721717)$ acumulándose en un atractor extraño oculto.

Figura 2.4: Caso 3 Holling IV-III: Conjuntos límites.

2.4. Determinación de caos

En esta sección calculamos el máximo exponente de Lyapunov (MLE), como una herramienta que permite mostrar el comportamiento caótico en el sistema diferencial correspondiente. Efectivamente, usando los algoritmos propuestos en [Sa], se ha implementado una rutina en el software Mathematica que permite calcular el MLE como una función $(s_2, \beta_2) \mapsto MLE(s_2, \beta_2)$.

2.4.1. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov

Para el caso Holling II-II, con las asignaciones (2.11), $\alpha_1 = 1$ y $R = 10$ en el sistema (2.10), se tiene el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = (0.0125, 0.069444)$ y en la figura 2.5a se muestra que el sistema presenta caos ya que al calcular MLE , éste resulta ser positivo para valores del parámetro β_2 en el intervalo $[0.14, 0.35]$. De igual manera en la figura 2.5b se muestran diferentes valores de los parámetros s_2 y β_2 para los cuales el MLE del sistema resulta ser positivo.

Para el caso Holling II-IV, con las asignaciones (2.13), $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\rho = 0.5$ y $R = 10$ en el sistema (2.12), se tiene el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = (0.060267, 0.024194)$. Además, en la figura 2.6a se muestra que el sistema presenta caos ya que al calcular MLE , éste resulta ser positivo para valores del parámetro s_2 en el intervalo $[0.01, 0.5]$. De igual manera en la figura 2.6b se muestran diferentes valores de los parámetros s_2 y β_2 para los cuales el MLE del sistema resulta ser positivo.

Para el caso Holling IV-III, con las asignaciones (2.15) y $\alpha_1 = \rho = 0.5$ en el sistema (2.14), se

2.4 Determinación de caos

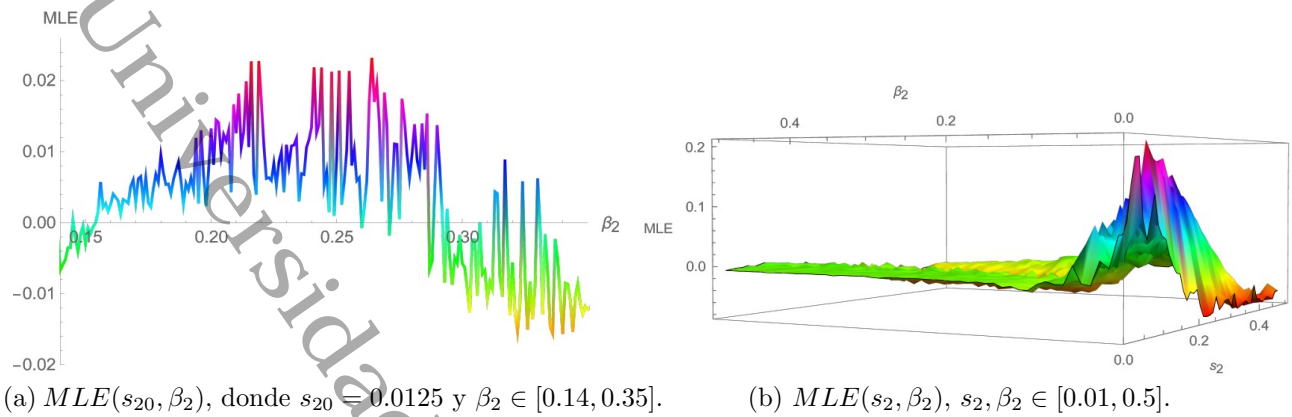


Figura 2.5: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros s_2 y β_2 : caso Holling II-II.

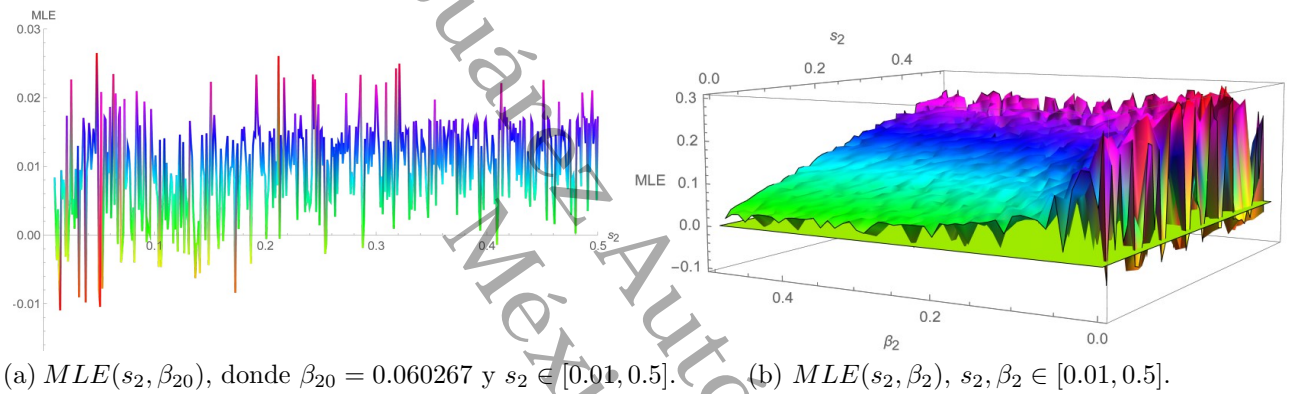


Figura 2.6: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros s_2 y β_2 : caso Holling II-IV.

obtiene el valor de bifurcación $(s_{20}, \beta_{20}) = (0.281174, 0.635707)$. En la figura 2.7a se muestra que el sistema presenta caos, ya que al calcular MLE , éste resulta ser positivo para valores del parámetro β_2 en el intervalo $[0.5, 0.8]$. De igual manera, en la figura 2.7b se muestran diferentes valores de los parámetros s_2 y β_2 para los cuales el MLE del sistema resulta ser positivo.

De acuerdo con el ejemplo 2.14, ver figura 2.3, consideramos una condición inicial

$$\tau_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \approx (2.754589, 0.710003, 1.663684),$$

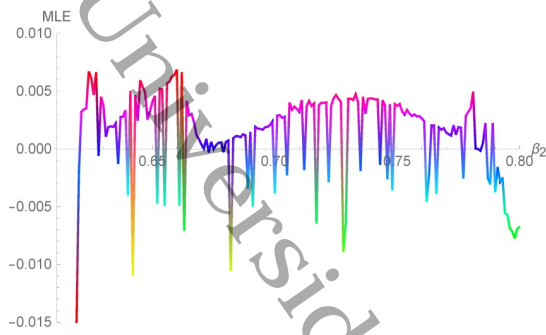
la cual en $t_0 = 494000$ está cerca del atractor extraño que se muestra en la figura 2.4b. Usando Mathematica, en la figura 2.8 se muestra el cálculo de los exponentes de Lyapunov (L_1, L_2, L_3) (cf. Sandri [Sa]) asociadas a estas trayectorias en el intervalo de tiempo $[494000, 495000]$. En particular, los exponentes de Lyapunov asociados al atractor extraño son $L_1 \approx 0.001486$, $L_2 \approx 0.001446$ y $L_3 \approx -0.023662$. Por lo tanto, $MLE(0.281175, 0.6356) = 0.001486$.

Por otra parte, para los sistemas (2.10) y (2.14), calculamos $MLE(s_2, \beta_{20})$ en un intervalo I_1 del parámetro β_2 donde MLE es positivo. Además, para el sistema (2.12) calculamos $MLE(s_{20}, \beta_2)$ en un intervalo I_2 del parámetro s_2 , donde MLE es positivo. Finalmente, en los tres ejemplos,

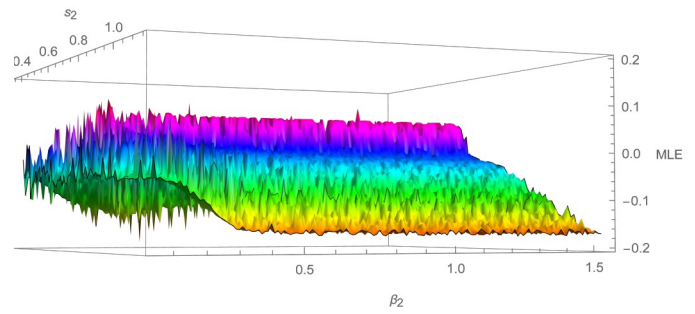
22

9

2.4 Determinación de caos



(a) $MLE(s_{20}, \beta_2)$, donde $s_{20} = 0.281174$ y $\beta_2 \in [0.5, 0.8]$.



(b) $MLE(s_2, \beta_2)$, $s_2, \beta_2 \in [0.01, 1.5]$.

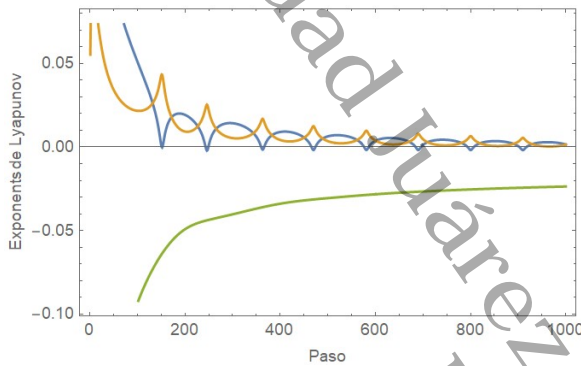
Figura 2.7: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros s_2 y β_2 : caso Holling IV-III.

Comportamiento caótico	Valor de bifurcación (s_{20}, β_{20})	Gráfica de $MLE(s_2, \beta_2)$
Ejemplo 2.12 del teorema 2.7	$(0.0125, 0.069444)$	Figura 2.5
Ejemplo 2.13 del teorema 2.9	$(0.060267, 0.024194)$	Figura 2.6
Ejemplo 2.14 del teorema 2.11	$(0.281174, 0.635707)$	Figura 2.7

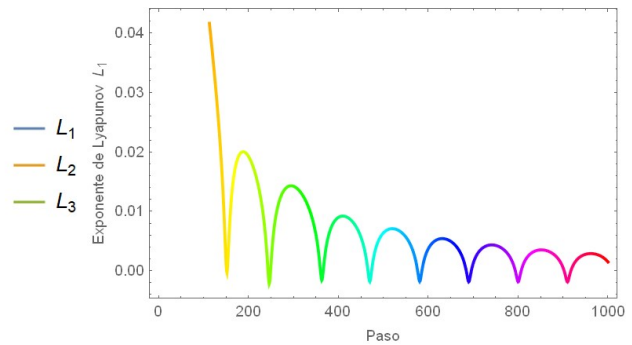
Cuadro 2.1: Máximo exponente de Lyapunov cerca del valor de bifurcación (s_{20}, β_{20}) .

calculamos $MLE(s_2, \beta_2)$ en una región $I_3 \times I_4$, para valores de s_2 y β_2 en el cual MLE es positivo. Estos resultados se resumen en el cuadro 2.1.

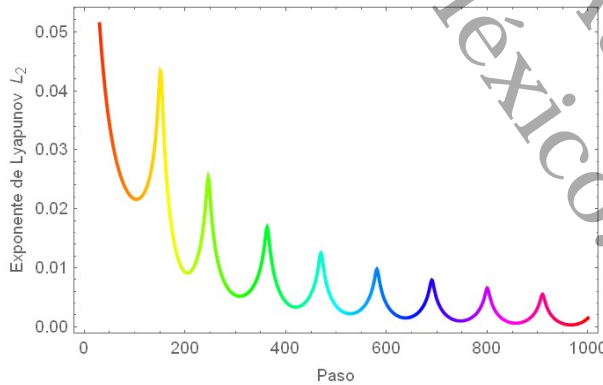
2.4 Determinación de caos



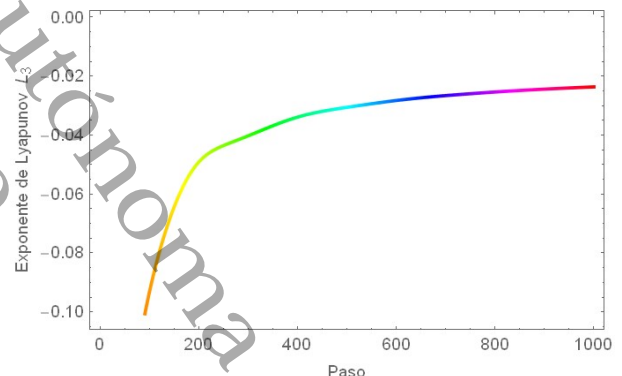
(a) Exponentes de Lyapunov L_1 , L_2 y L_3 .



(b) Exponente de Lyapunov L_1 .



(c) Exponente de Lyapunov L_2 .



(d) Exponente de Lyapunov L_3 .

Figura 2.8: Exponentes de Lyapunov para la trayectoria mostrada en la figura 2.4b la cual corresponde al ejemplo 2.14, caso 3 Holling IV-III.

Capítulo 3

Bifurcación de Bogdanov-Takens en un modelo intragremial

En la depredación de seres vivos, existen factores que además del ataque directo del depredador hacia la presa, inhiben el crecimiento de la densidad de la población presa, tal es el caso del factor miedo, el cual consiste en el temor que los depredadores infunden a sus presas y en consecuencia se reduce la tasa de natalidad y la densidad de población para las siguientes generaciones [C, PB]. En los modelos depredador presa se ha incluido el factor miedo y se ha analizado tanto el caso bidimensional como tridimensional, véase [WZ, Ss, HZL, ST1, ST2, PP, SSa].

En el caso bidimensional. Wang *et al.* describieron el efecto miedo, mediante una función en dos variables $F(k, y) = \frac{1}{1+ky}$, conocida como costo de la depredación, debido al miedo, sobre la tasa de natalidad de la presa. Donde y representa la densidad de la población depredadora y k refleja el nivel de miedo que infunden los depredadores hacia las presas. En general, desde un punto de vista biológico, ellos suponen que la función $F(k, y)$ debe cumplir,

$$F(0, y) = 1, F(k, 0) = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} F(k, y) = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} F(k, y) = 0, \frac{\partial F(k, y)}{\partial k} < 0, \frac{\partial F(k, y)}{\partial y} < 0.$$

Tomando una respuesta funcional Holling tipo II, ellos analizan el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_0 x F(k, y) - dx - ax^2 - \frac{pxy}{1+qx}, \\ \dot{y} &= \frac{cpy}{1+qx} - my, \end{aligned}$$

donde x es la densidad de la presa. Ellos demostraron que altos niveles de miedo pueden estabilizar el sistema depredador presa, pero excluir la existencia de ciclos límites. Por otro lado, niveles relativamente bajos de miedo pueden inducir múltiples ciclos límites a través de bifurcaciones de Hopf subcríticas [WZ].

Posteriormente, Sasmal estudia un sistema depredador presa, considerando que la presa tiene un crecimiento logístico en ausencia de la población depredadora, la respuesta funcional es lineal, el factor miedo en el sistema es el mismo que en el trabajo de Wang y además, considera el efecto Allee. El muestra que el efecto miedo no perturba la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema y que éste presenta biestabilidad [Ss]. Huang *et al.* analizan un modelo depredador presa con efecto miedo,

efecto Allee e incluyen un refugio para la presa. Ellos dan una condición umbral para la estabilidad del sistema y prueban que el sistema sufre una bifurcación de Hopf supercrítica. Además, muestran la dinámica que presenta el sistema ante variaciones de los parámetros correspondientes al refugio o al efecto Allee [HZL].

Por otra parte, Sasmal-Takeuchi estudian la dinámica de un modelo de interacción depredador presa con efecto miedo y defensa grupal, al considerar una respuesta funcional Holling tipo IV. En el análisis muestran la existencia de puntos de equilibrio de coexistencia, estabilidad de los puntos de equilibrio, presencia de bifurcación de Hopf y de ciclos límites estables [ST1]. Posteriormente, ellos consideran el efecto miedo, el efecto arrastre, y una respuesta funcional lineal. Ellos muestran que este efecto tiene un papel significativo en la estabilidad asintótica local y global de cada punto de equilibrio de coexistencia. Además, muestran la existencia de ciclos límite y bifurcación de Hopf sobre el parámetro del efecto miedo o del efecto arrastre [ST2].

El caso tridimensional. Panday *et al.* analizaron el impacto del factor miedo en una cadena alimentaria tritrófica de Hastings-Powell, donde la presa tiene una tasa de crecimiento logístico y la respuesta funcional es Holling tipo II, en ausencia del factor miedo. Ellos muestran existencia de puntos de equilibrio, análisis de estabilidad local y global; y numéricamente, variando los parámetros del factor miedo garantizan la coexistencia de especies debido a la existencia de ciclos límite estables. Además, muestran que existen parámetros para los cuales el sistema presenta caos, mediante el enfoque del máximo exponente de Lyapunov [PP].

En Saha *et al.* los autores estudiaron un sistema de cadena alimentaria tritrófica, en el que consideran el factor miedo. La interacción entre las especies está dada por una respuesta funcional Holling tipo III. Ellos muestran la existencia de puntos de equilibrio, su dinámica local y global. Además, determinan parámetros donde se presentan bifurcación de Hopf o transcítica [SSa].

En este capítulo analizaremos un modelo intragremial que considera la interacción de tres poblaciones: una presa (P), un depredador (MP) y un superdepredador (SP) con densidades poblacionales x , y y z , respectivamente. Suponemos que la presa es devorada por el depredador y el superdepredador. Además, el depredador es devorado por el superdepredador.

Para el análisis consideramos las siguientes premisas:

- La población P tiene función de crecimiento de Richards $rxT_0(x)$ en ausencia de las poblaciones MP y SP.
- Las respuestas funcionales para la interacción entre P y MP es $f_1(x)$ y las que corresponden a SP son $g_1(x)$ y $h_1(y)$. Estas funciones son positivas y de clase $C^3(\mathbb{R}_+)$.
- Las poblaciones MP y SP son depredadores generalistas.
- La población MP (SP) se beneficia linealmente de P (MP) sobre su capacidad de carga.

3.1 Análisis de bifurcación de Bogdanov-Takens

46

Específicamente, analizaremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R_1(x, y, z) - yf_1(x) - zg_1(x), \\ \dot{y} &= s_1y \left(1 - \frac{y}{b_1 + c_1x}\right) - zh_1(y), \\ \dot{z} &= s_2z \left(1 - \frac{z}{b_2 + c_2y + c_3x}\right),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde

$$R_1(x, y, z) = rxT_0(x)R(y)T_1(z), \quad f_1(x) = xf(x), \quad g_1(x) = xg(x), \quad \text{y} \quad h_1(y) = yh(y).$$

En este sistema suponemos que todos los parámetros son constantes adimensionales positivos y su significado ecológico es el siguiente:

- Los parámetros s_1 y s_2 son las tasas de crecimiento intrínsecas del MP y SP, respectivamente.
- El parámetro b_1 (b_2) es la capacidad de carga de MP (SP) en ausencia de la población presa (presa y depredadora).
- Los parámetros c_1 , c_2 y c_3 representan el aprovechamiento derivado de la depredación.

Además, los factores f , g y h son funciones de clase $C^3(\mathbb{R}_+)$. Nótese que el origen es un punto de equilibrio para el sistema diferencial y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ son invariantes, siempre que $f_1(0) = 0$, $g_1(0) = 0$ y $h_1(0) = 0$. En este trabajo el factor miedo de la presa hacia el depredador está dado por $R(y) = \frac{1}{k_1y+1}$ y $T_1(z)$ es una función positiva que mide el efecto del factor de miedo de la presa hacia SP.

Para el sistema (3.1) se buscan condiciones en los parámetros que garanticen la coexistencia de las tres especies o la presencia de caos en el sistema. Para ello, se determinarán condiciones para la existencia de puntos de equilibrio con coordenadas positivas y condiciones para las cuales se puede presentar una bifurcación de Bogdanov-Takens. Como es usual, la región ecológica de interés será el octante positivo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

3.1. Análisis de bifurcación de Bogdanov-Takens

El siguiente resultado provee condiciones suficientes en los parámetros para que el sistema diferencial (3.1) tenga un punto de equilibrio de coexistencia en Ω .

Proposición 3.1. Sea $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Si $b_1 + c_1x_0 - y_0 > 0$, $-c_2y_0 - c_3x_0 + z_0 > 0$,

$$r = \frac{(k_1y_0 + 1)(y_0f(x_0) + z_0g(x_0))}{T_0(x_0)T_1(z_0)}, \quad s_1 = \frac{z_0h(y_0)(b_1 + c_1x_0)}{b_1 + c_1x_0 - y_0} \quad \text{y} \quad b_2 = -c_2y_0 - c_3x_0 + z_0,\tag{3.2}$$

entonces \mathbf{p}_0 es un punto de equilibrio para el sistema diferencial (3.1).

3.1 Análisis de bifurcación de Bogdanov-Takens

Demostración. Un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ es un punto de equilibrio si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= rT_0(x_0)R(y_0)T_1(z_0) - y_0f(x_0) - z_0g(x_0), \\ 0 &= s_1 \left(1 - \frac{y_0}{b_1 + c_1x_0 - y_0} \right) - z_0h(y_0), \\ 0 &= 1 - \frac{z_0}{b_2 + c_2y_0 + c_3x_0}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

suponemos que $b_1 + c_1x_0 - y_0 > 0$ y $-c_2y_0 - c_3x_0 + z_0 > 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.3) con respecto a las variables r, s_1 y b_2 , se completa la prueba.

Si las condiciones de la proposición 3.1 se cumplen, entonces la matriz jacobiana del sistema (3.1) en el punto (x, y, z) es

$$\mathbf{J}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-\mathbf{J}_1 + y_0 f(x_0) \mathbf{J}_3 T_1(z_0) \mathbf{J}_2 + z_0 g(x_0) \mathbf{J}_3 T_1(z_0) \mathbf{J}_2}{\mathbf{J}_7 T_0(x_0) T_1(z_0)} & -\frac{k_1 x \mathbf{J}_3 T_0(x) T_1(z) \mathbf{J}_4}{\mathbf{J}_7^2 T_0(x_0) T_1(z_0)} - x f(x) & \frac{x \mathbf{J}_3 T_0(x) T_1'(z) \mathbf{J}_4}{\mathbf{J}_7 T_0(x_0) T_1(z_0)} - x g(x) \\ \frac{c_1 y^2 z_0 h(y_0) b_1 + c_1 x_0}{(b_1 + c_1 x)^2 b_1 + c_1 x_0} & \frac{z_0 h(y_0) b_1 + c_1 x_0 (b_1 + c_1 x - 2y)}{(b_1 + c_1 x) b_1 + c_1 x_0} - z (y h'(y) + h(y)) & -y h(y) \\ \frac{c_3 s_2 z^2}{\mathbf{J}_6^2} & \frac{c_2 s_2 z^2}{\mathbf{J}_6^2} & s_2 - \frac{2s_2 z}{\mathbf{J}_6} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{J}_7 T_0(x_0) T_1(z_0) (x y f'(x) + y f(x) + x z g'(x) + z g(x)), \quad \mathbf{J}_2 = x T_0'(x) + T_0(x), \quad \mathbf{J}_3 = k_1 y_0 + 1, \\ \mathbf{J}_4 &= y_0 f(x_0) + z_0 g(x_0), \quad \mathbf{J}_5 = b_1 + c_1 x_0, \quad \mathbf{J}_6 = c_2 (y - y_0) + c_3 (x - x_0) + z_0, \quad \mathbf{J}_7 = k_1 y + 1. \end{aligned}$$

En particular, la aproximación lineal del sistema diferencial (3.1) en el punto de equilibrio \mathbf{p}_0 es

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} x_0 (-y_0 f'(x_0) + \frac{T_0'(x_0) \mathbf{J}_4}{T_0(x_0)} - z_0 g'(x_0)) & -\frac{x_0 (2k_1 y_0 f(x_0) + f(x_0) + k_1 z_0 g(x_0))}{k_1 y_0 + 1} & \frac{x_0 T_0'(z_0) \mathbf{J}_4}{T_1(z_0)} - x_0 g(x_0) \\ \frac{c_1 y_0^2 z_0 h(y_0)}{b_1 + c_1 x_0 \mathbf{J}_5} & y_0 z_0 \left(-\frac{h(y_0)}{\mathbf{J}_5} - h'(y_0) \right) & -y_0 h(y_0) \\ c_3 s_2 & c_2 s_2 & -s_2 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

3.1.1. Condición necesaria para la bifurcación Bogdanov-Takens

Definamos

$$\begin{aligned} k_{10} &= \frac{f(x_0) \mathbf{L}_1 + z_0 g(x_0) \mathbf{K}_3 (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{J}_5)}{z_0 g(x_0) \mathbf{K}_6 + y_0 f(x_0) (y_0 z_0 T_1'(z_0) \mathbf{L}_2 + 2h(y_0) T_1(z_0) \mathbf{L}_3)}, \\ s_{20} &= \frac{c_1 x_0 y_0^2 z_0^2 (T_1'(z_0) \mathbf{J}_4 - g(x_0) T_1(z_0)) \mathbf{L}_2}{\mathbf{K}_2 \mathbf{L}_3 (y_0 h(y_0) T_1(z_0) (c_2 \mathbf{J}_5 + z_0) + y_0 \mathbf{J}_5 \mathbf{K}_5 + c_3 x_0 g(x_0) \mathbf{K}_3 \mathbf{J}_5)}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4, \mathbf{K}_5, \mathbf{K}_6, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ y \mathbf{L}_3 son como en el apéndice B.1.

Proposición 3.2. Si las hipótesis de la proposición 3.1 se cumplen,

$$f'(x_0) = \frac{-z_0 g'(x_0)}{-y_0} \quad y \quad g'(x_0) = \frac{T_0'(x_0) \mathbf{J}_4}{2z_0 T_0(x_0)},$$

3.1 Análisis de bifurcación de Bogdanov-Takens

entonces los valores propios de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_1, s_2))$ son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad y \quad \lambda_3 = A_2(k_{10}, s_{20}),$$

donde

$$A_2(k_1, s_2) = -\frac{y_0 z_0 h(y_0)}{b_1 + c_1 x_0 - y_0} - y_0 z_0 h'(y_0) - s_2.$$

Demostración. Bajo las hipótesis, el polinomio característico de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_1, s_2))$ es $pol_0(\lambda, k_1, s_2) = -\lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0$, donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{s_2 x_0 y_0 (z_0 g(x_0) \mathbf{K}_7 + f(x_0) (\mathbf{K}_8))}{\mathbf{J}_3 \mathbf{T}_1(z_0) \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5}, \\ A_1 &= -\frac{y_0 h(y_0) (s_2 \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2 (c_2 \mathbf{J}_5 + z_0) + c_1 x_0 y_0 z_0 f(x_0) (2k_1 y_0 + 1))}{\mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5} + \mathbf{K}_9, \\ A_2 &= -\frac{y_0 z_0 h(y_0)}{b_1 + c_1 x_0 - y_0} - y_0 z_0 h'(y_0) - s_2; \end{aligned} \tag{3.7}$$

y K_7, K_8 y K_9 son como en el apéndice B.1. Sustituyendo k_{10} y s_{20} se obtiene que $A_0 = A_1 = 0$. Esto demuestra la proposición. ◀

3.1.2. Condiciones de no degeneración de la bifurcación Bogdanov-Takens

Supongamos que las hipótesis de la proposición 3.2 son válidas. Además si k_{10} y s_{20} son como en la ecuación (3.6), y $r = r_0$, $s_1 = s_{10}$ y $b_2 = b_{20}$ donde

$$r_0 = \frac{y_0 f(x_0) + z_0 g(x_0)}{R(y_0) T_0(x_0) T_1(z_0)}, \quad s_{10} = \frac{z_0 h(y_0) (b_1 + c_1 x_0)}{b_1 + c_1 x_0 - y_0} \quad y \quad b_{20} = -c_2 y_0 - c_3 x_0 + z_0, \tag{3.8}$$

entonces el sistema diferencial (3.1) solo depende de los parámetros $b_1, c_1, c_2, c_3, k_1, s_2, x_0, y_0$ y z_0 . En particular, para parámetros (k_1, s_2) en una vecindad pequeña del punto (k_{10}, s_{20}) en el plano de parámetros $\mathbb{R}_{k_1 s_2}^2$, se tiene que el sistema (3.1) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(\frac{(k_1 y_0 + 1) T_0(x) T_1(z) (y_0 f(x_0) + z_0 g(x_0))}{(k_1 y + 1) T_0(x_0) T_1(z_0)} - y f(x) - z g(x) \right), \\ \dot{y} &= y \left(\frac{z_0 h(y_0) (b_1 + c_1 x_0) \left(1 - \frac{y}{b_1 + c_1 x} \right)}{b_1 + c_1 x_0 - y_0} - z h(y) \right), \\ \dot{z} &= s_2 z \left(1 - \frac{z}{c_2 y - c_2 y_0 + c_3 x - c_3 x_0 + z_0} \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se tiene que $\mathbf{p}_0(k_1, s_2) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de equilibrio para el sistema diferencial (3.9) si y solo si $k_1 = k_{10}$ y $s_2 = s_{20}$. Por otro lado, la aproximación lineal en $\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20})$ es $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20}))$ con valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = A_2(k_{10}, s_{20})$, de acuerdo a la proposición 3.2.

20

6

3.2 Aplicaciones del resultado principal

49

En lo que sigue $E(x, y, z, s_2, \beta_2)$ denota el campo vectorial asociado a (3.9). Denotamos por $\tau(x, y, z, k_1, s_2)$ y $\delta(x, y, z, k_1, s_2)$ la traza y el determinante de la matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20}))$, respectivamente.

Las condiciones de no degeneración se establecen mediante el determinante \mathcal{D}_0 del jacobiano de la función

$$\mathcal{R} : (x, y, z, k_1, s_2) \mapsto (E(x, y, z, k_1, s_2), \tau(x, y, z, k_1, s_2), \delta(x, y, z, k_1, s_2)),$$

y los coeficientes cuadráticos (los cuales se calculan usando los vectores propios normalizados del apéndice B.2),

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{p}_0, k_{10}, s_{20}) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(\mathbf{p}_0, k_{10}, s_{20}). \quad (3.10)$$

Usando el software Mathematica podemos calcular las expresiones matemáticas para \mathcal{D}_0 , \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 las cuales son expresiones muy grandes, razón para no escribirlas aquí; sin embargo, se pueden dar explícitamente para el caso de ausencia de factor de miedo de la presa hacia el superdepredador, ver apéndice B.4. Así mismo, dichas expresiones serán mostradas en las aplicaciones donde usamos respuestas funcionales específicas.

De las proposiciones 3.1, 3.2 y las condiciones de no degeneración se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3 (Teorema principal). *Si \mathcal{D}_0 y $\mathbf{S}_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0$, son números reales distintos de cero, entonces el sistema diferencial (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio $\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20})$ con respecto a los parámetros (k_1, s_2) en el valor de bifurcación (k_{10}, s_{20}) .*

Si $\text{sign } \mathbf{S}_0 = -1$ entonces existen ciclos límites estables que emanan de una bifurcación de Hopf o bifurcación homoclínica las cuales se detectan mediante dos ramas en el espacio de parámetros en una vecindad del valor de bifurcación Bogdanov-Takens.

Corolario 3.4. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema 3.3, si $T_1(z) = 1$ entonces el sistema diferencial (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio $\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20})$ con respecto a los parámetros (k_1, s_2) en el valor de bifurcación (k_{10}, s_{20}) .*

Demostración. En este caso, las fórmulas para \mathcal{D}_0 , \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 se simplifican notablemente, obteniendo así las expresiones correspondientes mostradas en el apéndice B.4. De lo cual se tiene el resultado. ◀

3.2. Aplicaciones del resultado principal

En esta apartado ilustramos los resultados de la sección 3.1 cuando las respuestas funcionales f_1 , g_1 y h_1 en el sistema diferencial (3.9) son de tipo Holling. En particular, mostramos que el resultado principal, teorema 3.3 y corolario 3.4, se verifican.

3.2 Aplicaciones del resultado principal

50

3.2.1. Caso 1: Holling II con factor miedo $k_2 \neq 0$

Para mostrar diferentes dinámicas que el sistema diferencial (3.9) puede tener, consideremos $R(y) = \frac{1}{1+k_1y}$, $T_1(z) = \frac{1}{1+k_2z}$ como los factores que miden el efecto del miedo en los depredadores y que las respuestas funcionales f_1, g_1 y h_1 sean de tipo Holling II con crecimiento logístico en la presa.

Sean f_1, g_1 y h_1 las respuestas funcionales tipo Holling II dadas por $f_1(x) = \frac{r_1x}{m_{11}x+1}$, $g_1(x) = \frac{r_2x}{m_{21}x+1}$ y $h_1(y) = \frac{r_3y}{m_{31}y+1}$, donde $r_1, r_2, r_3, m_{11}, m_{21}$ y m_{31} son parámetros adimensionales positivos. En este caso, el sistema diferencial (3.9) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(\frac{r(1-\frac{x}{k_0})}{(k_1y+1)(k_2z+1)} - \frac{r_1y}{m_{11}x+1} - \frac{r_2z}{m_{21}x+1} \right), \\ \dot{y} &= y \left(s_1 \left(1 - \frac{y}{b_1+c_1x} \right) - \frac{r_3z}{m_{31}y+1} \right), \\ \dot{z} &= z s_2 \left(1 - \frac{z}{b_2+c_2y+c_3x} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tomemos los siguientes valores de los parámetros en el sistema (3.11), de tal manera que se satisfagan las hipótesis de las proposiciones 3.1 y 3.2.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2}, \quad b_2 = 3k_2, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = \frac{1}{k_2}, \quad k_0 = \frac{3}{\frac{3}{k_2^2} + 2k_2^2}, \\ r_1 &= 1, \quad r_2 = \frac{1}{6}, \quad r_3 = \frac{1}{3}, \quad m_{11} = m_{21} = \frac{k_2^2}{3}, \quad m_{31} = k_2, \\ k_1 &= -\frac{864k_2^8 - 1368k_2^7 + 576k_2^6 - 1368k_2^5 + 156k_2^4 - 174k_2^3 + 20k_2^2 - 4k_2 + 1}{k_2(1296k_2^8 - 2376k_2^7 + 1224k_2^6 - 2568k_2^5 + 408k_2^4 - 370k_2^3 + 58k_2^2 - 8k_2 + 3)} \quad y \\ r &= \frac{12k_2(k_2^2+1)(6k_2^2+1)^2(2k_2^4+3)(36k_2^4-84k_2^3+12k_2^2-2k_2+1)}{(k_2^4+3)^2(1296k_2^8-2376k_2^7+1224k_2^6-2568k_2^5+408k_2^4-370k_2^3+58k_2^2-8k_2+3)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

El siguiente resultado demuestra que con estos valores de los parámetros el sistema diferencial (3.11) satisface las hipótesis del teorema 3.3, en consecuencia presenta una bifurcación Bogdanov-Takens.

Teorema 3.5 (Caso Holling II). *Si los parámetros en el sistema diferencial (3.11) satisfacen (3.12) y $k_2 \in [1.821014, 1.868685]$, entonces $\mathbf{p}_0 = (k_2^2, k_2, 6k_2)$ es un punto de equilibrio de coexistencia y el sistema presenta una bifurcación Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros (k_1, s_2) con valor de bifurcación (k_{10}, s_{20}) .*

Demostración. Mostramos primero la existencia de un punto de equilibrio de coexistencia en Ω . Hagamos $z_0 = \frac{r_1y_0}{r_2}$ y $r_2 = \frac{r_1y_0}{2(c_2y_0+c_3x_0)}$, de las fórmulas en (3.8), se tiene

$$b_2 = 3k_2, \quad r = \frac{6k_2(6k_2^2+1)(2k_2^4+3)(k_1k_2+1)}{(k_2^4+3)^2} \quad y \quad s_1 = \frac{2(6k_2^3+k_2)}{(k_2^2+1)(6k_2^2-2k_2+1)}.$$

3.2 Aplicaciones del resultado principal

Por lo tanto, $\mathbf{p}_0 = (k_2^2, k_2, 6k_2)$, es un punto de equilibrio del sistema diferencial (3.11). Por otra parte, bajo las asignaciones en los parámetros en (3.12), la proposición 3.2 implica que

$$k_{10} = \frac{864k_2^8 - 1368k_2^7 + 576k_2^6 - 1368k_2^5 + 156k_2^4 - 174k_2^3 + 20k_2^2 - 4k_2 + 1}{k_2 (1296k_2^8 - 2376k_2^7 + 1224k_2^6 - 2568k_2^5 + 408k_2^4 - 370k_2^3 + 58k_2^2 - 8k_2 + 3)},$$

$$s_{20} = -\frac{432k_2^5 (18k_2^2 + 1) (36k_2^5 - 48k_2^4 + 12k_2^3 - 40k_2^2 + k_2 - 2)}{(6k_2^2 + 1) (36k_2^4 - 84k_2^3 + 12k_2^2 - 2k_2 + 1) \Delta_2},$$

y la aproximación lineal $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20}))$ tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y

$$\lambda_3 = \frac{2k_2^2 \Delta_1}{(k_2^2 + 1)^2 \Delta_0 (6k_2^2 - 2k_2 + 1) \Delta_6 \Delta_2},$$

donde $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ y Δ_6 son como en el apéndice B.3.

Usando el software Mathematica calculamos las condiciones de no degeneración, las cuales garantizan la condición de regularidad, así como los coeficientes cuadráticos dados en (3.10) cuyos valores explícitos son:

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{186624k_2^{15} (18k_2^2 + 1)^2 \Delta_4^2 \Delta_5 \Delta_3}{(k_2^2 + 1)^5 \Delta_0^7 (6k_2^2 - 2k_2 + 1)^2 (k_2^4 + 3)^4 \Delta_6^4 \Delta_2^2},$$

$$\mathbf{a}_0 = \frac{648k_2^7 (18k_2^2 + 1)^2 \Delta_4 \Delta_2 \Delta_3}{\Delta_0^4 (k_2^4 + 3)^4 \Delta_6 \Delta_7^2} \text{ y } \mathbf{b}_0 = -\frac{144k_2^5 (18k_2^2 + 1) \Delta_2 \Delta_8}{(6k_2^2 + 1)^2 (k_2^4 + 3)^4 \Delta_7^3}.$$

Por último, se toman los valores del parámetro $k_2 \in [1.821014, 1.868685]$, para que los valores de bifurcación k_{10}, s_{20} y todos los parámetros asignados en (3.12) sean mayores que cero, y los coeficientes cuadráticos $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ sean distintos de cero, ver figuras 3.1 y 3.2.

3.2.2. Caso 2: Holling II con factor miedo $k_2 = 0$

En esta sección analizamos el modelo (3.1), cuando en la tasa de crecimiento de la presa no se ve reflejado el factor miedo debido a la presencia del superdepredador (esto equivale a $k_2 = 0$). En este caso consideramos el crecimiento logístico de Richards en la presa [TW]. Sean f_1, g_1 y h_1 respuestas funcionales Holling II dados por $f_1(x) = \frac{r_1 x}{m_{11}x + 1}$, $g_1(x) = \frac{r_2 x}{m_{21}x + 1}$ y $h_1(y) = \frac{r_3 y}{m_{31}y + 1}$, donde $r_1, r_2, r_3, m_{11}, m_{21}$ y m_{31} son parámetros mayores que cero. Consideramos también un factor en el crecimiento de la presa $T_0(x) = 1 - (\frac{x}{k_0})^L$ para $L > 0$. En este caso, el sistema diferencial (3.9) se escribe como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{rx \left(1 - \left(\frac{x}{k_0}\right)^L\right)}{k_1 y + 1} - \frac{r_1 xy}{m_{11}x + 1} - \frac{r_2 xz}{m_{21}x + 1}, \\ \dot{y} &= y \left(s_1 \left(1 - \frac{y}{b_1 + c_1 x}\right) - \frac{r_3 z}{m_{31}y + 1} \right), \\ \dot{z} &= s_2 z \left(1 - \frac{z}{b_2 + c_2 y + c_3 x}\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Aplicaciones del resultado principal

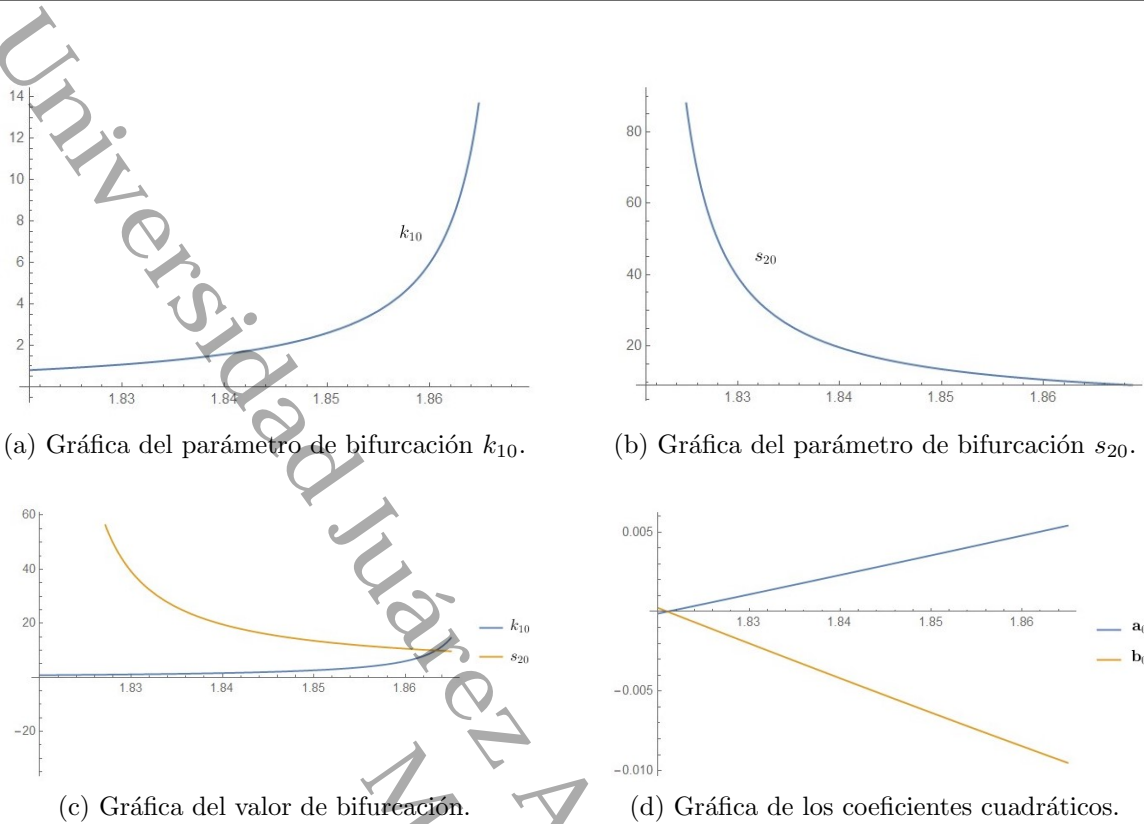


Figura 3.1: Gráfica de los valores de los parámetros cuando $k_2 \in [1.821014, 1.868685]$.

Tomemos los siguientes valores de los parámetros en el sistema (3.13), de tal manera que se satisfagan las hipótesis de las proposiciones 3.1 y 3.2.

$$b_1 = \frac{23}{16}, \quad b_2 = \frac{37}{48}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{1}{4}, \quad k_0 = \left(\frac{7}{4}\right)^{1-\frac{1}{L}} \left(\frac{1}{L + \frac{7(L+1)}{4}}\right)^{-1/L},$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{24}{37}, \quad r_3 = \frac{3817}{2}, \quad m_{11} = m_{21} = 1, \quad m_{31} = 394,$$

$$k_{10} = \frac{39}{29191}, \quad s_1 = \frac{5225473}{398160}, \quad s_{20} = \frac{25058574464}{1309660711} \quad \text{y} \quad r = \frac{233840(11L + 7)}{3532111L}.$$

El siguiente resultado demuestra que con estos valores de los parámetros el sistema diferencial (3.13) satisface las hipótesis del teorema 3.3 en consecuencia presenta una bifurcación Bogdanov-Takens.

Teorema 3.6. Si los parámetros del sistema diferencial (3.13) satisfacen las asignaciones en (3.2.2) y $L \neq L_0 = 15.792184$, entonces existe un punto de equilibrio de coexistencia $\mathbf{p}_0 = (\frac{7}{4}, 1, \frac{37}{24})$ en el cual el sistema exhibe una bifurcación Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros (k_1, s_2) con valor de bifurcación (k_{10}, s_{20}) .

Demostración. Primero mostramos la existencia de un punto de equilibrio en Ω . Por lo que haciendo

3.2 Aplicaciones del resultado principal

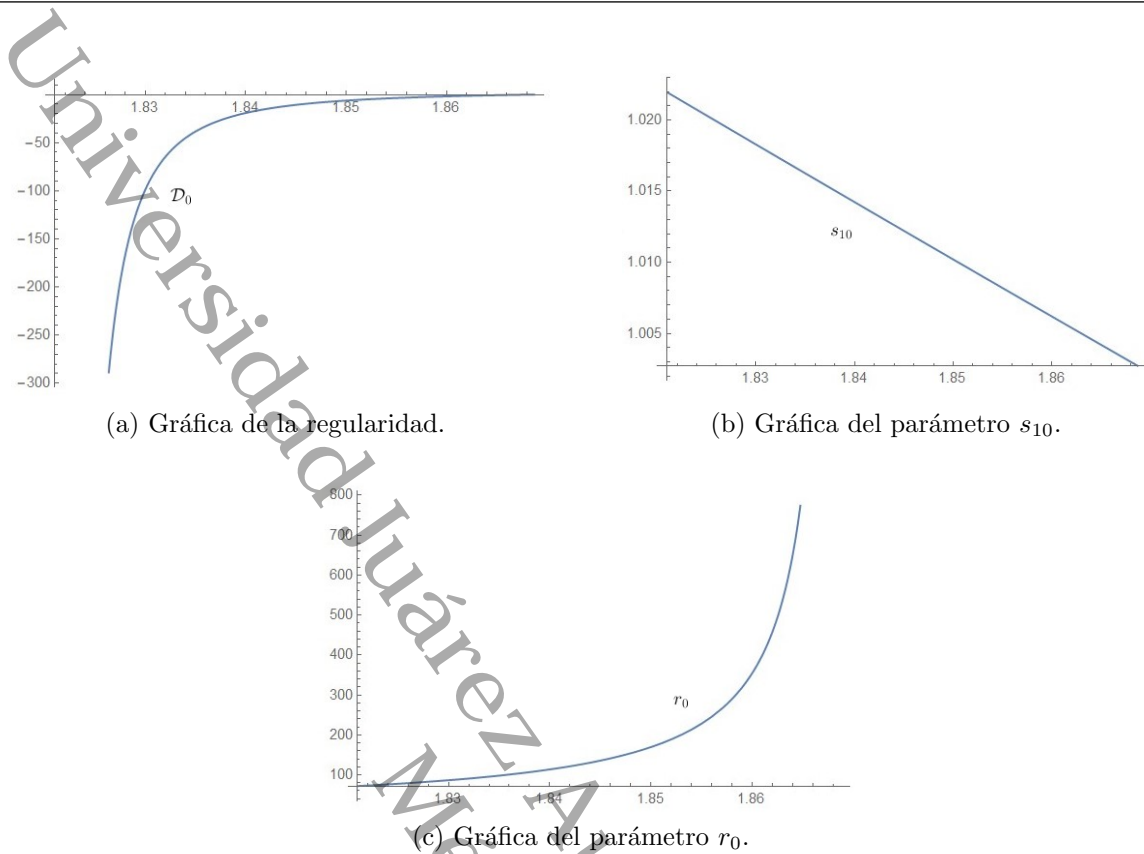


Figura 3.2: Gráfica de los valores de los parámetros para $k_2 \in [1.82101, 1.86868]$.

$z_0 = \frac{r_1 y_0}{r_2}$ y $r_2 = \frac{r_1 y_0}{2(c_2 y_0 + c_3 x_0)}$, de las fórmulas en la ecuación (3.8) se sigue que

$$b_2 = c_2 y_0 + c_3 x_0, \quad r = \frac{233840(11L + 7)}{3532111L} \quad \text{y} \quad s_1 = \frac{5225473}{398160}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{p}_0 = (\frac{7}{4}, 1, \frac{37}{24})$, es un punto de equilibrio del sistema diferencial (3.13). Por otra parte, bajo las hipótesis (3.2.2) y la proposición 3.2 implica que

$$k_{10} = \frac{39}{29191}, \quad s_{20} = \frac{25058574464}{1309660711},$$

y la aproximación lineal $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(k_{10}, s_{20}))$ tiene valores propios

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -\frac{1789813151810701237}{102987265466622600}.$$

Usando el software Mathematica calculamos los siguientes valores en los parámetros, los cuales garantizan la no degeneración de la bifurcación de Bogdanov-Takens,

$$\begin{aligned} D_0(L) &= -\frac{40715264503212095638659328(4247823926368L + 120736501474497)}{67669546736652780787971245653552959375}, \\ \mathbf{a}_0(L) &= \frac{16039164263157349515264(4247823926368L + 120736501474497)}{14823620832665615092594497495177230303} \quad \text{y} \\ \mathbf{b}_0(L) &= -\frac{450607102869504(9920290555389423661985886339296009491L - 156663050330006404342030348231520141783)}{76459687388357394882105759337282404987892498253244913}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3 Resultados numéricos

54

Nótese que $\mathcal{D}_0(L) < 0$, $\mathbf{a}_0(L) > 0$ y $\mathbf{b}_0(L_0) = 0$. Por lo tanto, si $L \neq L_0$ entonces se cumplen las hipótesis del teorema 3.3 y el sistema (3.13) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens, ver figuras 3.3 and 3.4.

Observación 3.7. De 3.14 se tiene que:

1. Si el parámetro $L > L_0$, entonces el producto de los coeficientes cuadráticos \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 es negativo.
2. Si el parámetro $L < L_0$, entonces el producto de los coeficientes cuadráticos \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 es positivo.

En el caso 1. el sistema presenta ciclos límites estables que provienen de una bifurcación de Hopf supercrítica, mientras que en el caso 2. los ciclos límites que aparecen son inestables.

3.3. Resultados numéricos

3.3.1. Dinámica complicada vía el máximo exponente de Lyapunov

Ejemplo 3.8 (Caso 1: Holling II). Para ilustrar el resultado del teorema 3.5, consideramos las asignaciones hechas en (3.12) y $k_2 = 1.8601$. Entonces, $k_{10} = 6.058631$, $s_{20} = 10.589253$, $\mathcal{D}_0 = -1.846464$, $\mathbf{a}_0 = 0.004791$ y $\mathbf{b}_0 = -0.008485$. El punto de equilibrio para el sistema diferencial (3.11) en el que existe bifurcación de Bogdanov-Takens es $\mathbf{p}_0 = (3.459972, 1.8601, 11.1606)$. Sean $s_2 = 9.360999$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-4}$. Tomando una condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4})$ se tiene una órbita que detecta un atractor extraño oculto, ver figuras 3.5d. Las correspondientes series de tiempo para cada una de las densidades de población se muestran en las figuras 3.5a, 3.5b y 3.5c.

Ejemplo 3.9 (Caso 2: Holling II). Para ilustrar el teorema 3.5, consideramos las asignaciones hechas en (3.12) y $k_2 = 1.85$. Entonces, $k_{10} = 2.60001$, $s_{20} = 13.5354$, $\mathcal{D}_0 = -6.24912$, $\mathbf{a}_0 = 0.0035332$ y $\mathbf{b}_0 = -0.006349$. El punto de equilibrio en el cual el sistema diferencial (2.10) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens es $\mathbf{p}_0 = (3.4225, 1.85, 11.1)$.

Del teorema 3.5 y el ejemplo 3.8 se tienen condiciones en los parámetros del sistema (3.1) que implican un comportamiento caótico, lo cual se puede mostrar numéricamente. En efecto, mediante los algoritmos desarrollados en [Sa], implementamos una rutina en el software Mathematica que permite calcular el máximo exponente de Lyapunov al variar los parámetros de bifurcación (k_1, s_2) , en una vecindad del valor de bifurcación (k_{10}, s_{20}) . En este sentido, mostramos el siguiente resultado obtenido en el caso Holling II.

Como antes, definimos la función $(k_1, s_2) \mapsto MLE(k_1, s_2)$ y consideramos los valores para los parámetros utilizados en el ejemplo 3.8, ya que éstos satisfacen las hipótesis del teorema 3.5. En la figura 3.6a se muestra que el sistema diferencial (3.9), presenta un comportamiento caótico ya que el MLE es positivo para un amplio rango de parámetros s_2 en el intervalo $[9.0, 10.6]$, donde $k_1 = k_{10}$ y $k_{10} = 6.058631$. Más aún, la figura 3.6b muestra un amplio rango de $k_1 \in [5, 6.6]$ y $s_2 \in [9.0, 10.6]$ para los cuales el MLE del sistema es positivo.

3.3 Resultados numéricos

55

Sobre la solución numérica del ejemplo 3.8, la cual se acerca al atractor, tomamos una condición inicial

$$\mathbf{r}_0 \approx (3.45151, 1.86069, 11.1572),$$

para continuar la órbita mucho más cerca del atractor extraño que se muestra en la figura 3.5d. Usando Mathematica calculamos los exponentes de Lyapunov (L_1, L_2, L_3) asociadas a las trayectoria en el intervalo de tiempo [992000, 996000], ver figura 3.7. En particular, los exponentes de Lyapunov asociados al atractor extraño son $L_1 \approx 0.002182$, $L_2 \approx 0.001334$ y $L_3 \approx -10.1159$. Por lo tanto, $MLE(k_{10} - 10^{-4}, 9.360999) \approx 0.002182$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

3.3 Resultados numéricos

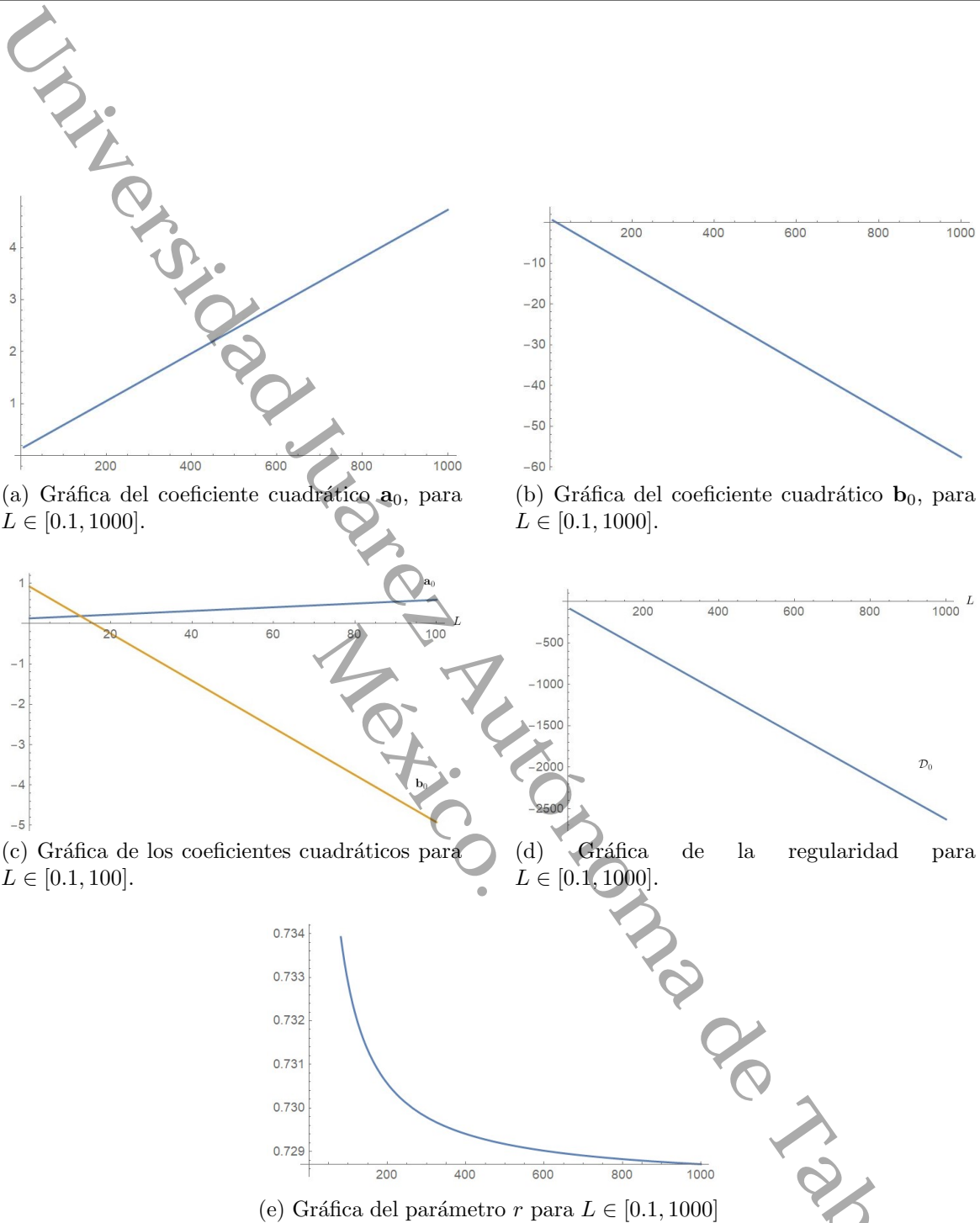


Figura 3.3: Gráfica de los valores de los parámetros para $L > 0.1$.

3.3 Resultados numéricos

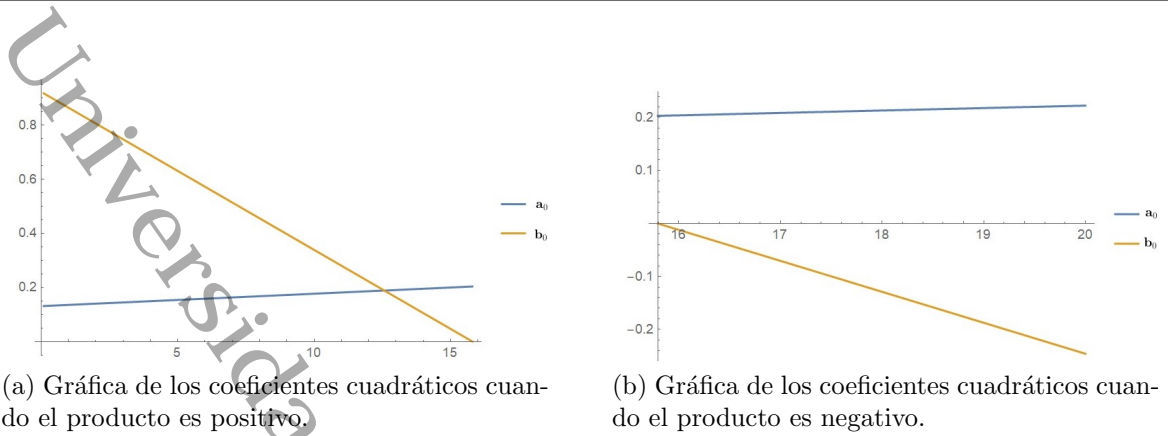


Figura 3.4: Gráfica de los coeficientes cuadráticos para $L > 0$.

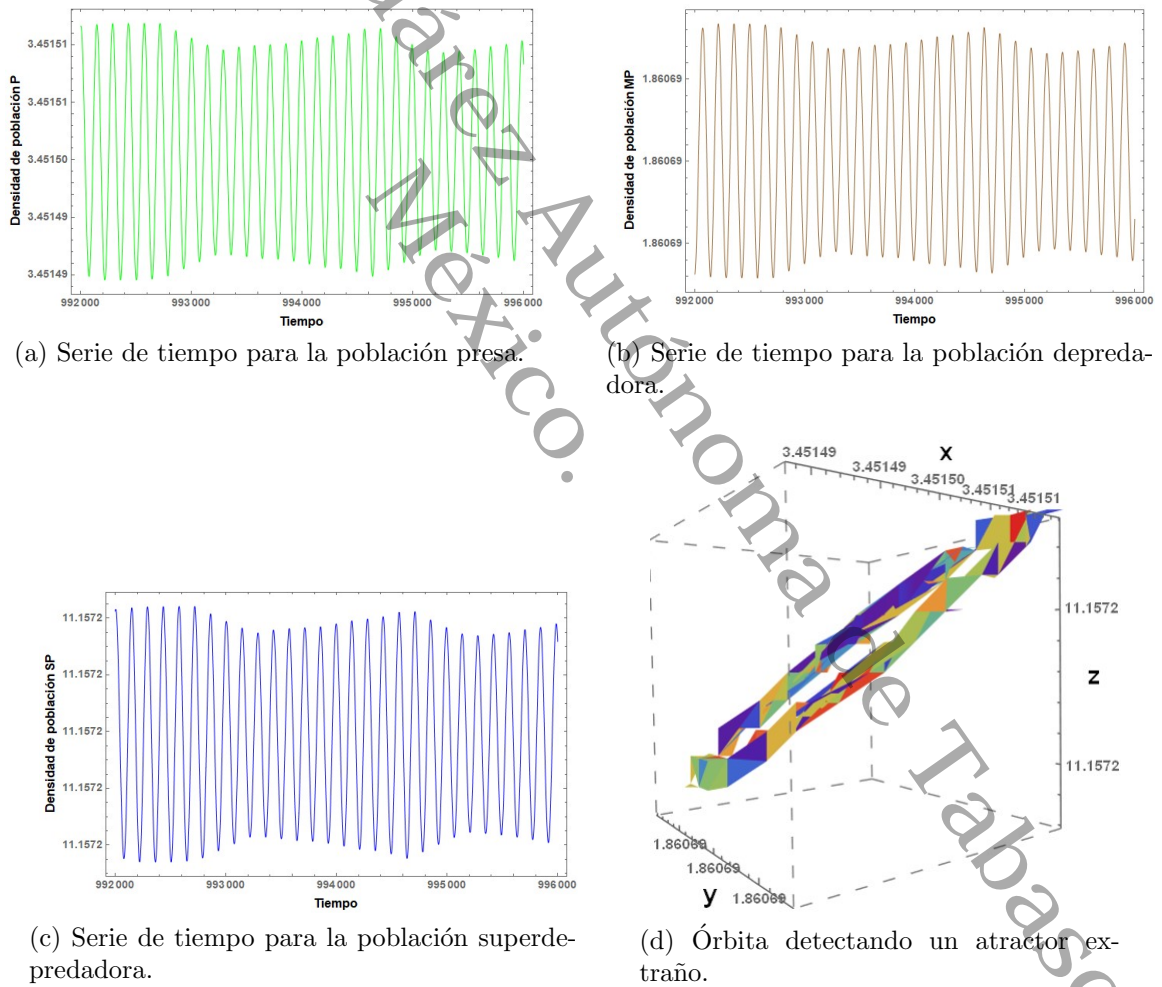


Figura 3.5: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $p_0 + (10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4})$ que detecta un atractor extraño.

3.3 Resultados numéricos

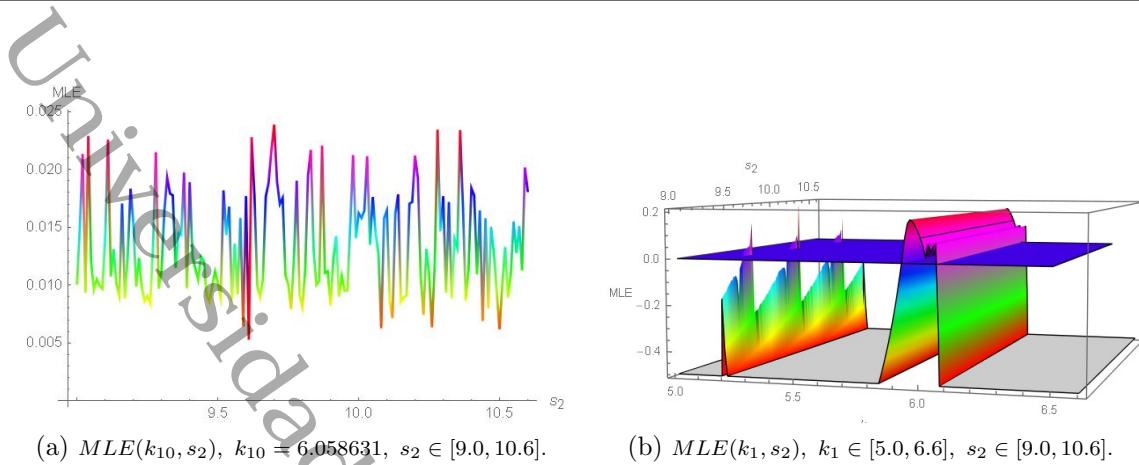


Figura 3.6: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros k_1 y s_2 en el caso Holling II-II-II.

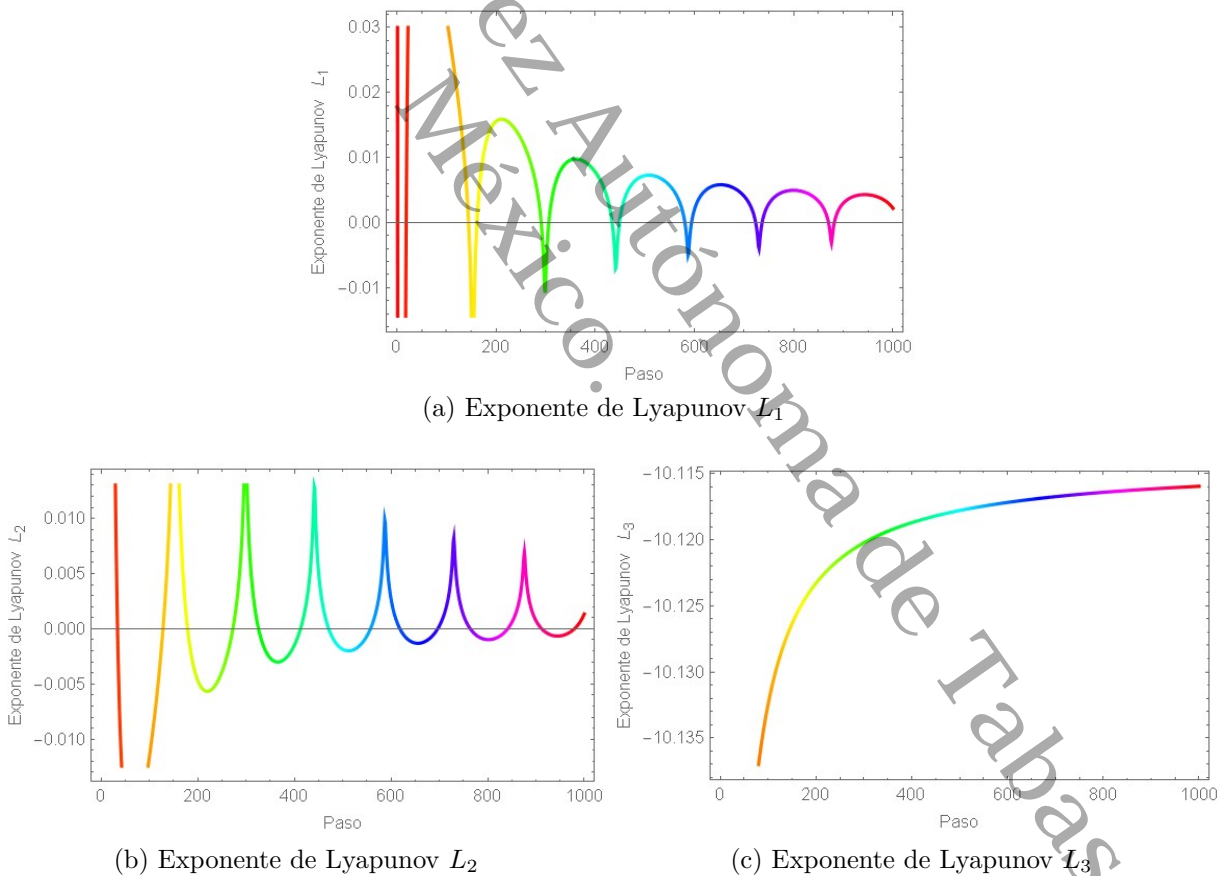


Figura 3.7: Caso 1 Holling II-II-II: exponentes de Lyapunov para la trayectoria mostrada en la figura 3.5d, la cual corresponde al ejemplo 3.8.

Capítulo 4

Bifurcación cero-Hopf en un modelo intragremial

En este capítulo retomamos el modelo intragremial (3.1) con $R_1 = rxR_0T_1(y)T_2(z)$ y demostraremos que el sistema exhibe una bifurcación cero-Hopf. Explícitamente el sistema a estudiar es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{rxR_0(x)}{(k_1y+1)(k_2z+1)} - yf_1(x) - zg_1(x), \\ \dot{y} &= s_1y \left(1 - \frac{y}{b_1 + c_1x}\right) - zh_1(y), \\ \dot{z} &= s_2z \left(1 - \frac{z}{b_2 + c_2y + c_3x}\right).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Debido a la naturaleza de la bifurcación cero-Hopf, la dinámica encontrada para este sistema es mucho más variada a diferencia de la que se obtuvo con la bifurcación de Bogdanov-Takens, pudiendo encontrarse ciclos límite, órbitas homoclinicas, toros invariantes y atractores caóticos. Los parámetros donde buscaremos bifurcación cero-Hopf son c_1 que es el aprovechamiento que se obtiene de consumir la presa por el depredador y k_1 que es el nivel de miedo que refleja el depredador sobre la presa.

El resultado principal en este capítulo es el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Existen condiciones en los parámetros bajo las cuales el sistema diferencial (4.1) sufre una bifurcación cero-Hopf con respecto a los parámetros (c_1, k_1) .*

Verificaremos las hipótesis del teorema 4.1 usando respuestas funcionales tipo Holling y crecimiento logístico generalizado para la población presa. Además, garantizaremos la coexistencia de las tres poblaciones por medio de conjuntos límites estables, como puntos de coexistencia, ciclos límite, toros invariantes y atractores extraños. Finalmente, mostraremos el comportamiento caótico mediante el cálculo de los máximos exponentes de Lyapunov para una amplia gama de valores de parámetros.

4.1 Existencia de un punto de equilibrio

4.1. Existencia de un punto de equilibrio

La derivada en un punto arbitrario $\mathbf{p} = (x, y, z)$ del campo vectorial que define el sistema (4.1) está dada por

$$\mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{rR_0(x) - (k_1y+1)(k_2z+1)(yf'_1(x) + zg'_1(x)) + rR'_0(x)}{(k_1y+1)(k_2z+1)} & -f_1(x) - \frac{k_1rxR_0(x)}{(k_1y+1)^2(k_2z+1)} & -g_1(x) - \frac{k_2rxR_0(x)}{(k_1y+1)(k_2z+1)^2} \\ \frac{c_1s_1y^2}{(b_1+c_1x)^2} & -\frac{2ys_1}{b_1+c_1x} + s_1 - z(h(y) + yh'(y)) & -yh(y) \\ \frac{c_3s_2z^2}{(b_2+c_3x+c_2y)^2} & \frac{c_2s_2z^2}{(b_2+c_3x+c_2y)^2} & s_2 - \frac{2s_2z}{b_2+c_3x+c_2y} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

El primer paso para el análisis dinámico es garantizar la existencia de un punto de equilibrio con entradas positivas, esto es establecida por el siguiente resultado

Proposición 4.2. *Si*

$$b_2 = -c_3x_0 - c_2y_0 + z_0, \quad r = \frac{(k_1y_0 + 1)(k_2z_0 + 1)(y_0f_1(x_0) + z_0g_1(x_0))}{x_0R_0(x_0)}, \quad s_1 = \frac{z_0h_1(y_0)(b_1 + c_1x_0)}{y_0(b_1 + c_1x_0 - y_0)}, \quad (4.3)$$

donde $x_0, y_0, z_0 > 0$, $b_1 + c_1x_0 - y_0 > 0$ y $-c_3x_0 - c_2y_0 + z_0 > 0$, entonces $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ es un punto de equilibrio para el sistema diferencial (4.1).

4.2. Condición necesaria

De las hipótesis hechas en la proposición 4.2 y la expresión (4.2) se tiene que \mathbf{J}_{p_0} es

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \frac{-2k_1y_0f_1(x_0) + f_1(x_0) + k_1z_0g_1(x_0)}{k_1y_0 + 1} & \frac{-k_2y_0f_1(x_0) + 2k_2z_0g_1(x_0) + g_1(x_0)}{k_2z_0 + 1} \\ \frac{c_1y_0z_0h_1(y_0)}{(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0)} & \frac{(b_1+c_1x_0-2y_0)z_0h'_1(y_0)}{(b_1+c_1x_0-y_0)y_0} - z_0h'_1(y_0) & -h_1(y_0) \\ c_3s_2 & c_2s_2 & -s_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

donde

$$\mathcal{M}_{11} = \frac{y_0f_1(x_0) + z_0g_1(x_0) - x_0(y_0f'_1(x_0) + z_0g'_1(x_0))}{x_0} + \frac{(y_0f_1(x_0) + z_0g_1(x_0))R'_0(x_0)}{R_0(x_0)}.$$

Para el análisis del modelo (4.1), suponemos que las respuestas funcionales satisfacen las siguientes condiciones en las entradas del punto de equilibrio $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (ver proposición 4.2). Esto se basa en las ideas usadas en [BGL], de hecho, supondremos que x_0, y_0 satisfacen

- i) **Simplificación a través de las respuestas funcionales I (SRFI):** Supongamos que $f'_1(x_0), g'_1(x_0), h'_1(y_0) > 0$ y

$$f_1(x_0) = 2x_0f'_1(x_0), \quad g_1(x_0) = 2x_0g'_1(x_0) \text{ y } h_1(y_0) = 2y_0h'_1(y_0),$$

- ii) **Simplificación a través de las respuestas funcionales II (SRFII):**

$$f'_1(x_0) = \frac{h'_1(y_0)}{2} \text{ y } g'_1(x_0) = \frac{h'_1(y_0)}{2},$$

- iii) **Simplificación mediante el crecimiento de la presa (SCP):** suponemos que $R'_0(x_0) < 0$ y $R_0(x_0) = -x_0R'_0(x_0)$.

4.2 Condición necesaria

61

Por lo tanto, bajo las condiciones de simplificación **SRFI**, **SRFII** y **SCP**, tenemos que \mathbf{J}_{p_0} se convierte en

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(y_0 + z_0)h'_1(y_0) & -\frac{x_0(k_1(2y_0+z_0)+1)h'_1(y_0)}{k_1y_0+1} & -\frac{x_0(k_2(y_0+2z_0)+1)h'_1(y_0)}{k_2z_0+1} \\ \frac{2c_1y_0^2z_0h'_1(y_0)}{(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0)} & \frac{(b_1+c_1x_0-3y_0)z_0h'_1(y_0)}{b_1+c_1x_0-y_0} & -2y_0h'_1(y_0) \\ c_3s_2 & c_2s_2 & -s_2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

con polinomio característico $\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ cuyos coeficientes son

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{A_{00}}{2(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0)}, \\ A_1 &= \frac{1}{2}h'_1(y_0) \left(\frac{A_{11}}{(k_1y_0+1)(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0)} \right. \\ &\quad \left. + s_2 \left(\frac{z_0(b_1+c_1x_0-5y_0)}{b_1+c_1x_0-y_0} - (4c_2+1)y_0 - \frac{2c_3x_0(k_2(y_0+2z_0)+1)}{k_2z_0+1} \right) \right), \\ A_2 &= \frac{h'_1(y_0)(z_0(b_1+c_1x_0-5y_0) - y_0(b_1+c_1x_0-y_0))}{2(b_1+c_1x_0-y_0)} - s_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{00} &= s_2h'_1(y_0)^2(-2c_2y_0^2(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0) \\ &\quad - 2c_2y_0z_0(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0)(b_1+c_1x_0-y_0) \\ &\quad + 2c_1c_3x_0^2z_0(k_1y_0+1)(b_1+c_1x_0)(k_2(y_0+2z_0)+1) \\ &\quad + 4c_3x_0y_0(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0)(k_1(2y_0+z_0)+1)(b_1+c_1x_0-y_0) \\ &\quad + 2b_1c_3x_0z_0(k_1y_0+1)(b_1+c_1x_0)(k_2(y_0+2z_0)+1) \\ &\quad - 6c_3x_0y_0z_0(k_1y_0+1)(b_1+c_1x_0)(k_2(y_0+2z_0)+1) \\ &\quad - 3y_0^2z_0(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) + c_1x_0z_0^2(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) \\ &\quad + b_1z_0^2(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) - 3y_0z_0^2(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) \\ &\quad + c_1x_0y_0z_0(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) + b_1y_0z_0(k_1y_0+1)(k_2z_0+1)(b_1+c_1x_0) \\ &\quad - 4c_1c_2x_0y_0^2z_0(k_1y_0+1)(k_2(y_0+2z_0)+1) - 4c_1x_0y_0^2z_0(k_2z_0+1)(k_1(2y_0+z_0)+1)), \\ A_{11} &= z_0h'_1(y_0)(b_1^2(k_1y_0+1)(y_0+z_0) + b_1(k_1y_0+1)(y_0+z_0)(2c_1x_0-3y_0) \\ &\quad + c_1x_0(c_1x_0(k_1y_0+1)(y_0+z_0) - y_0(y_0(11k_1y_0+7k_1z_0+7)+3z_0))). \end{aligned}$$

Consideramos la aproximación lineal como una matriz dependiente de dos parámetros $\mu = (c_1, k_1)$. Necesitamos valores en los parámetros para los cuales $A_0 = A_2 = 0$ y la factorización del polinomio característico sea $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)$, con $\omega_0^2 = -A_1 > 0$. Para tener esto, primero resolvemos $A_0 = 0$ con respecto al parámetro k_1 y por lo tanto obtenemos que $A_0(c_1, k_{10}) = 0$, con

4.3 Simplificación del modelo intragremial

el valor del parámetro dado por $k_{10} = \frac{E_{00}}{E_{11}}$, donde

$$\begin{aligned}
 E_{00} &= -b_1^2(2c_3x_0(3k_2y_0z_0 + 2k_2z_0^2 + 2y_0 + z_0) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0)) \\
 &\quad + b_1(y_0(2c_3x_0(5k_2y_0z_0 + 6k_2z_0^2 + 2y_0 + 3z_0) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - 3z_0)) \\
 &\quad - 2c_1x_0(2c_3x_0(3k_2y_0z_0 + 2k_2z_0^2 + 2y_0 + z_0) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0))) \\
 &\quad + c_1x_0(y_0(2c_2y_0(k_2y_0z_0 + 3k_2z_0^2 - y_0 + z_0) + 2c_3x_0(y_0(5k_2z_0 + 2) + 3z_0(2k_2z_0 + 1))) \\
 &\quad + z_0(k_2z_0 + 1)(7y_0 + 3z_0)) - c_1x_0(2c_3x_0(3k_2y_0z_0 + 2k_2z_0^2 + 2y_0 + z_0) \\
 &\quad - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0))), \\
 E_{11} &= y_0(b_1^2(2c_3x_0(y_0(5k_2z_0 + 4) + z_0(4k_2z_0 + 3)) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0)) \\
 &\quad + b_1(2c_1x_0(2c_3x_0(y_0(5k_2z_0 + 4) + z_0(4k_2z_0 + 3)) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0)) \\
 &\quad + y_0((k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - 3z_0) - 2c_3x_0(y_0(7k_2z_0 + 4) + z_0(8k_2z_0 + 5)))) \\
 &\quad + c_1x_0(c_1x_0(2c_3x_0(y_0(5k_2z_0 + 4) + z_0(4k_2z_0 + 3)) - (k_2z_0 + 1)(y_0 + z_0)(2c_2y_0 - z_0)) \\
 &\quad - y_0(2c_2y_0(k_2y_0z_0 + 3k_2z_0^2 - y_0 + z_0) + 2c_3x_0(y_0(7k_2z_0 + 4) + z_0(8k_2z_0 + 5)) \\
 &\quad + z_0(k_2z_0 + 1)(11y_0 + 7z_0))))).
 \end{aligned}$$

Notamos que k_{10} depende de c_1 , es decir, $k_{10}(c_1)$. Por otro lado, considerando el coeficiente A_2 en el valor (c_1, k_{10}) , tenemos que $A_2(c_1, k_{10}) = 0$ siempre que $c_1 = c_{10}$, donde $c_{10} = \frac{(b_1(z_0 - y_0) + y_0(y_0 - 5z_0))h_1'(y_0) + 2s_2(y_0 - b_1)}{x_0(y_0 - z_0)h_1'(y_0) + 2s_2x_0}$. Por lo tanto, obtenemos la factorización deseada si y solo si $A_0(\mu_0) = A_2(\mu_0)$, donde $\mu_0 = (C_{10}, K_{10})$, con $C_{10} = c_{10}$ y $K_{10} = k_{10}(c_{10})$.

Usando la notación anterior, resumimos estos resultados en la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Sea $\mu_0 = (C_{10}, K_{10})$. Si $-A_1(C_{10}, K_{10}) > 0$, $C_{10}, K_{10} > 0$, donde x_0, y_0, z_0 son números reales positivos, entonces los valores propios de la aproximación lineal $\mathbf{J}_{p_0}(\mu_0)$ son*

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm i\sqrt{-A_1(C_{10}, K_{10})}.$$

4.3. Simplificación del modelo intragremial

Supongamos que se cumplen las hipótesis de la proposición 4.3. Con el objetivo de simplificar nuestro análisis hacemos

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{20s_2z_0 - 49h_1'(y_0)z_0^2}{2(200s_2 - 90h_1'(y_0)z_0)}, \quad c_2 = \frac{-3609h_1'(y_0)z_0 - 13980s_2}{560s_2 - 1484h_1'(y_0)z_0}, \quad c_3 = \frac{11z_0}{112x_0}, \\
 k_2 &= \frac{1901000z_0 + 560000}{57239z_0^4 + 959285z_0^3}, \quad s_2 = h_1'(y_0), \quad y_0 = \frac{z_0}{10}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

De las condiciones en (4.6) tenemos que los valores del parámetro $\mu_0 = (C_{10}, K_{10})$ son

$$C_{10} = \frac{z_0(49z_0 - 20)}{20x_0(9z_0 - 20)} \quad \text{y} \quad K_{10} = \frac{z_0(z_0(3033667z_0 + 49697325) + 79096000) - 96514000 - 36960000}{10z_0(13z_0 + 460)(1901z_0 + 560)}.$$

Sea $z_0 = \frac{223}{100}$. Por lo tanto, de las condiciones (4.3) se tiene que r, s_1 y b_2 dependen de c_1 y k_1 , luego se tienen los valores de bifurcación haciendo $c_1 = C_{10}$ y $k_1 = K_{10}$:

$$b_{20} = \frac{41104921}{183288000}, \quad r_{10} = -\frac{11246984424463560622460970121521 h_1'(\frac{223}{1000})}{568823027042959802987000000000 x_0 R_0'(x_0)}, \quad s_{10} = \frac{8927}{892} h_1\left(\frac{223}{1000}\right).$$

4.4 Resultado principal

Más aún, de (4.6) tenemos que todos los parámetros son positivos y están dados por

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1990721}{14000}, \quad b_2 = b_{20}, \quad c_2 = \frac{734269}{91644}, \quad c_3 = \frac{2453}{11200x_0} \\
 k_2 &= \frac{4799230000000000}{1205356054748899}, \quad r = r_{10}, \quad s_1 = s_{10}, \quad s_2 = h'_1 \left(\frac{223}{1000} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Dado que asumimos que y_0 y z_0 son valores fijos, debemos suponer que estos valores permiten que la condición SRFI para h_1 siga siendo cierta, es decir, suponemos que

$$h_1 \left(\frac{223}{1000} \right) = \frac{223}{500} h'_1 \left(\frac{223}{1000} \right).
 \tag{4.8}$$

De las simplificaciones de supuestos generales SRFI, SRFII y SCP para f_1, g_1 y R_0 siguen siendo ciertas para las condiciones de los parámetros en (4.7). Por lo tanto, bajo las condiciones del parámetro en (4.7) y (4.8) se tiene $C_{10} = \frac{1990721}{14000x_0}$ y $K_{10} = \frac{76729387290665647}{5233309315271000}$.

Ahora, supongamos que se cumplen las asignaciones de parámetros (4.7), en consecuencia el sistema diferencial (4.1) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\frac{11246984424463560622460970121521xh'_1 \left(\frac{223}{1000} \right) R_0(x)}{568823027042959802987000000000x_0 \left(\frac{4799230000000000z}{1205356054748899} + 1 \right) (k_{11}y + 1)R'_0(x_0)} - yf_1(x) - zg_1(x) = G_1, \\
 \dot{y} &= y \left(\frac{8927h'_1 \left(\frac{223}{1000} \right) \left(1 - \frac{y}{c_{11}x + \frac{1990721}{14000}} \right)}{2000} - \frac{zh_1(y)}{y} \right) = G_2, \\
 \dot{z} &= zh'_1 \left(\frac{223}{1000} \right) \left(1 - \frac{z}{\frac{2453x}{11200x_0} + \frac{734269y}{91644} + \frac{41104921}{183288000}} \right) = G_3,
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

donde (c_{11}, k_{11}) varía en una vecindad pequeña de (C_{10}, K_{10}) en el plano $\mathbb{R}^2_{c_{11}k_{11}}$. Luego, se tiene que $\mathbf{p}_0 = \left(x_0, \frac{223}{1000}, \frac{223}{100} \right)$ es un punto de equilibrio del sistema diferencial (4.9) si y solo si $(c_{11}, k_{11}) = (C_{10}, K_{10})$.

4.4. Resultado principal

De la simplificación anterior del modelo intragremial en la sección 4.3 y la proposición 4.3, se sigue el siguiente resultado,

Corolario 4.4. Si las condiciones del parámetro en (4.7) y (4.8) se cumplen, entonces el sistema diferencial (4.9) tiene valores de bifurcación en $C_{10} = \frac{1990721}{14000x_0}$, $K_{10} = \frac{76729387290665647}{5233309315271000}$ y valores propios de la aproximación lineal $\mathbf{J}_{\mathbf{p}_0}(\mu_0)$,

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm i\omega_0,$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{-A_1(C_{10}, K_{10})} = \frac{\sqrt{501166761802996374402167} h'_1 \left(\frac{223}{1000} \right)}{6000}.$$

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

64

Enseguida, caracterizamos la condición de regularidad para la bifurcación cero-Hopf. Consideremos el campo vectorial $G(x, y, z, c_{11}, k_{11}) = (G_1, G_2, G_3)$ definido por el sistema diferencial (4.9). Usando la traza y el determinante

$$\tau(x, y, z, c_{11}, k_{11}) = \text{Tr}(D_{(x,y,z)}G(x, y, z, c_{11}, k_{11})), \quad \delta(x, y, z, c_{11}, k_{11}) = \text{Det}(D_{(x,y,z)}G(x, y, z, c_{11}, k_{11}))$$

definimos la aplicación $\mathcal{R} = (G, \tau, \delta)$.

El determinante de la derivada en $(\mathbf{p}_0, C_{10}, K_{10})$ de la aplicación \mathcal{R} es calculada usando el software Mathematica y su valor es

$$\mathcal{D}_0 = \frac{\sigma_0}{76628486569661744608876082776614954057368924249430786739200000000000R'_0(x_0)}, \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 2862719628330227149x_0h'_1(y_0)^5(R'_0(x_0)(-200h'_1(y_0)(\sigma_1) \\ &\quad - 729879h''_1(y_0)(1358804271740342865953568320739195024x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0)) \\ &\quad + 52390973263281545648506906828458823697h'_1(y_0))) \\ &\quad - 1584x_0h'_1(y_0)(6887240993427567435134197863700020311959h''_1(y_0) \\ &\quad + 123814095219746321522837386888664631453975h'_1(y_0))R''_0(x_0)), \\ \sigma_1 &= 89146148558217351496442918559838534646862x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0)) \\ &\quad + 1762179781046044100837952606643487205056897h'_1(y_0), \end{aligned}$$

con $y_0 = \frac{223}{1000}$. Resumimos estos cálculos en el siguiente resultado.

Proposición 4.5 (Condición de regularidad). *Si las hipótesis del corolario 4.4 se cumplen, entonces la aplicación \mathcal{R} es regular en $(\mathbf{p}_0, C_{10}, K_{10})$ si y solo si $\mathcal{D}_0 \neq 0$.*

Prueba del teorema 4.1. De las fórmulas de Guckenheimer–Kuznetsov [GK], podemos calcular las condiciones no degeneradas de la bifurcación cero-Hopf por medio de las cantidades $\mathbf{S}_0, \theta_0, \mathbf{E}_0$ (ver apéndice C.1). Luego del corolario 4.4 se establece que la aproximación lineal $\mathbf{J}_{\mathbf{p}_0}$ tiene valores propios 0 y $\pm i\omega_0$. La proposición 4.5 permite determinar la regularidad de la aplicación \mathcal{R} en $(\mathbf{p}_0, C_{10}, K_{10})$. Por lo tanto, tenemos que bajo las hipótesis (4.7) y (4.8) si $\mathcal{D}_0, \mathbf{S}_0, \theta_0, \mathbf{E}_0$ son todos números reales distintos de cero, entonces se completa la demostración del teorema 4.1. ◀

4.5. Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

En esta sección, ilustramos el teorema 4.1 usando respuestas funcionales Holling.

4.5.1. Caso 1: Holling II-II-II

Consideremos las respuestas funcionales f_1, g_1 y h_1 Holling tipo II,

$$f_1(x) = \frac{e_1x}{d_1x + 1}, \quad g_1(x) = \frac{e_2x}{d_2x + 1}, \quad h_1(x) = \frac{e_3x}{d_3x + 1}$$

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

y el crecimiento logístico de Richards $rxR_0(x)$, donde $R_0(x) = 1 - \frac{x^L}{R_1^L}$.

Los valores de los parámetros

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{x_0}, \quad d_3 = \frac{1000}{223}, \quad e_2 = e_1, \quad e_3 = 2e_1, \quad R_1 = (Lx_0^L + x_0^L)^{1/L}, \quad L > 0. \quad (4.11)$$

satisfacen las condiciones SRFI, SRFII y SCP determinadas en la sección 4.2. Las asignaciones hechas en (4.7) se convierten en

$$b_1 = \frac{1990721}{14000}, \quad b_2 = \frac{41104921}{183288000}, \quad c_2 = \frac{734269}{91644}, \quad c_3 = \frac{2453}{11200x_0}, \quad k_2 = \frac{47992300000000}{1205356054748899},$$

$$r = \frac{11246984424463560622460970121521e_1(L+1)}{1137646054085919605974000000000L}, \quad s_1 = \frac{8927e_1}{4000}, \quad s_2 = \frac{e_1}{2}.$$

Por lo tanto, las cantidades para la condición de no degeneración de la bifurcación cero-Hopf son

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{31489915911632498639e_1^7\mathcal{N}_1x_0}{49042231404583516549680692977033570596716111519635703513088000000000},$$

$$G_{200} = \frac{11000e_1\mathcal{N}_2}{250075019978199758200693915489877193899729},$$

$$G_{011} = \frac{210103745377526926233096175e_1\mathcal{N}_3}{\mathcal{N}_{10}}, \quad \theta_0 = -\frac{\mathcal{N}_8}{44000(\mathcal{N}_2)}, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{5e_1(3125e_1^2\mathcal{N}_8\mathcal{N}_3\mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_6\mathcal{N}_5)}{\mathcal{N}_7},$$

donde $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{10}$ son como en apéndice C.2.

En consecuencia, las hipótesis del teorema 4.1 son válidas. Existe un valor $L_0 \approx 0.270654$, para el cual \mathcal{D}_0 se anula, en consecuencia se pierde la regularidad de la aplicación \mathcal{R} , y a su vez se degenera la bifurcación cero-Hopf, ver figura 4.1.

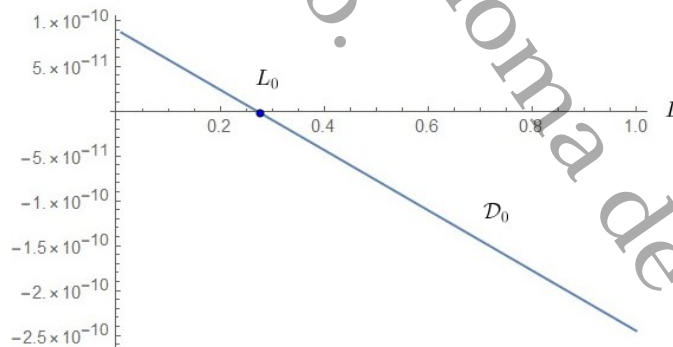


Figura 4.1: Gráfica de la regularidad para el Holling II-II-II.

Así, las hipótesis del teorema 4.1 son válidas. Lo cual resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 4.6 (Holling-II-II-II). *Existen condiciones en los parámetros bajo las cuales el sistema diferencial (4.1) presenta una bifurcación cero-Hopf en $\mathbf{p}_0 = (x_0, \frac{223}{1000}, \frac{223}{100})$ con respecto a los parámetros (c_1, k_1) en el valor de bifurcación $(c_{10}, k_{10}) = (\frac{1990721}{14000x_0}, \frac{76729387290665647}{5233309315271000})$. En este caso, $S_0 = 1$; $\theta_0 < 0$ si $L > 0$ y $e_1 > 0$.*

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

Nótese, en este caso, dado que $S_0 = 1$ y $\theta_0 < 0$, hay ramas en el espacio de parámetros donde las bifurcaciones de Hopf sub y supercríticas se manifiestan como también la destrucción heteroclínica del toro (cf. Guckenheimer–Kuznetsov [GK]), cuando $L > 0$ y $e_1 > 0$.

Simulación numérica para el caso 1: Holling II-II-II

De acuerdo al teorema 4.6, tenemos que los parámetros libres en el sistema diferencial (4.9) son e_1, L y x_0 . Sean $e_1 = 0.5, L = 1$ y $x_0 = 1$, entonces los valores de bifurcación son $c_{10} = \frac{1990721}{14000} \approx 142.194357$ y $k_{10} = \frac{76729387290665647}{5233309315271000} \approx 14.661733$. El punto de equilibrio de coexistencia en el que se presenta la bifurcación cero-Hopf es $\mathbf{p}_0 = (1, \frac{223}{1000}, \frac{223}{100})$.

A continuación mostramos varias simulaciones numéricas en las que se muestran diferentes tipos de conjuntos ω -límite, como órbitas periódicas, toros invariantes, órbitas homoclínicas y atractores extraños.

Ejemplo 4.7 (Órbita periódica). Sean $c_1 = 142.194$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-9}$, se obtiene una trayectoria tendiendo a una órbita periódica, véase la figura 4.2d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.2a, 4.2b y 4.2c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.1.

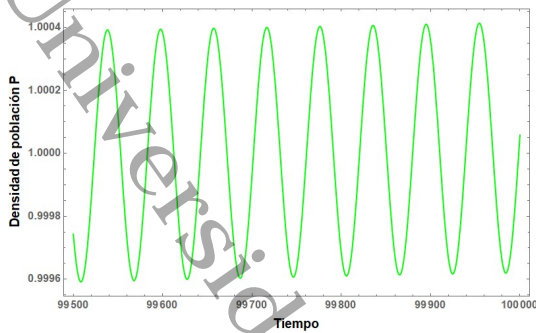
Puntos de equilibrio \mathbf{r}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_j}$	Dinámica de \mathbf{r}_j
$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 9.88619, \lambda_2 = 1.11587, \lambda_3 = 0.25$	Fuente
$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 8.963660, \lambda_2 = 0.891611, \lambda_3 = -0.25$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -9.88619, \lambda_2 = 1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (1.97183, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -7.65184, \lambda_2 = 0.459744, \lambda_3 = -0.252962$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (1.00032, 0.222977, 2.22988)$	$\lambda_{1,2} = 0.000701 \pm 0.105304i, \lambda_3 = -0.001707$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (0.99968, 0.223023, 2.23012)$	$\lambda_{1,2} = -0.000689 \pm 0.106039i, \lambda_3 = 0.001683$	Silla
$\mathbf{r}_6 = (0, 0.294603, 2.58468)$	$\lambda_{1,2} = 0.190746 \pm 0.244905i, \lambda_3 = -0.523716$	Silla
$\mathbf{r}_7 = (0, 142.194357, 0)$	$\lambda_1 = -71.0924, \lambda_2 = -1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla

Cuadro 4.1: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.194$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.7.

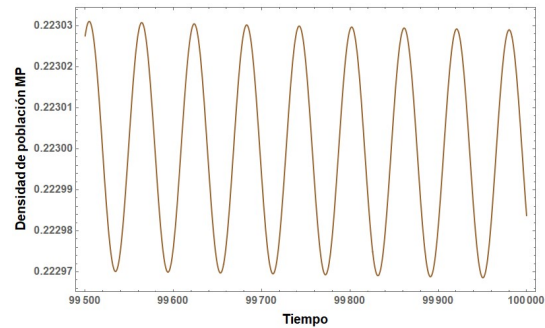
Ejemplo 4.8 (Toro invariante). Sean $c_1 = 142.1977$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-5}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-8}$, obtenemos una trayectoria acumulándose en un toro invariante, véase la figura 4.3d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.3a, 4.3b y 4.3c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.2.

Ejemplo 4.9 (Órbita homoclínica). Sean $c_1 = 142.1974$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomemos una condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-1}$, obtenemos una trayectoria tendiendo a una órbita homoclínica, véase la figura 4.4d. Las correspondientes series de

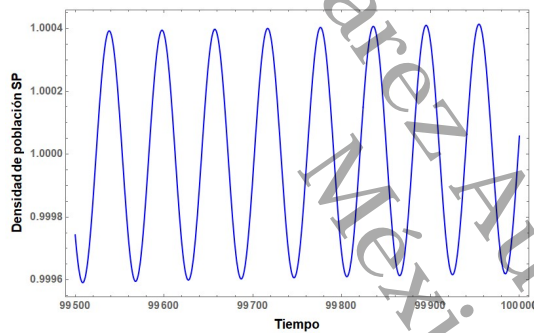
4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling



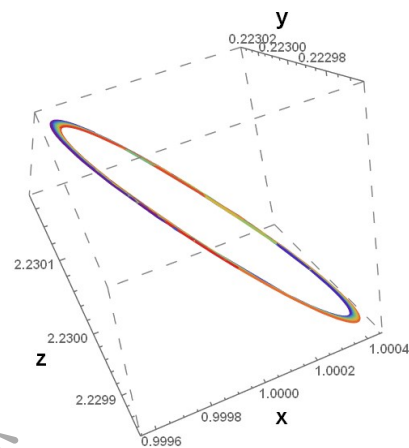
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Trayectoria tendiendo una órbita periódica.

Figura 4.2: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9})$ que converge a una órbita periódica.

tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.4a, 4.4b y 4.4c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.3.

Ejemplo 4.10 (Atractor extraño). Sean $c_1 = 142.1972$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomemos una condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$ con $\varepsilon = 10^{-9}$, se obtiene una trayectoria que se acumula en un atractor extraño, véase la figura 4.5d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades poblacionales se muestran en las figuras 4.5a, 4.5b y 4.5c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.4.

48

14

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

Puntos de equilibrio \mathbf{u}_j	Valores propios de \mathbf{u}_j	Dinámica de \mathbf{u}_j
$\mathbf{u}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 9.88619, \lambda_2 = 1.11587, \lambda_3 = 0.25$	Fuente
$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -9.88619, \lambda_2 = 1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 8.96366, \lambda_2 = 0.891611, \lambda_3 = -0.25$	Silla
$\mathbf{u}_3 = (0, 142, 0.194357, 0)$	$\lambda_1 = -71.0924, \lambda_2 = -1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{u}_4 = (0, 0.294603, 2.58468)$	$\lambda_1 = -0.523716, \lambda_{2,3} = 0.190746 \pm 0.244905i$	Silla
$\mathbf{u}_5 = (1.97183, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -7.65184, \lambda_2 = 0.459744, \lambda_3 = -0.252962$	Silla
$\mathbf{u}_6 = (1.06806, 0.217774, 2.20303)$	$\lambda_{1,2} = 0.000701 \pm 0.105304i, \lambda_3 = -0.001707$	Silla
$\mathbf{u}_7 = (0.929425, 0.227779, 2.25283)$	$\lambda_{1,2} = -0.000689 \pm 0.106039i, \lambda_3 = 0.001683$	Silla

Cuadro 4.2: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.1977$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-5}$ del ejemplo 4.8.

Puntos de equilibrio \mathbf{q}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_j}$	Dinámica de \mathbf{q}_j
$\mathbf{q}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 9.88619, \lambda_2 = 1.11587, \lambda_3 = 0.25$	Fuente
$\mathbf{q}_1 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 8.96366, \lambda_2 = 0.891611, \lambda_3 = -0.25$	Silla
$\mathbf{q}_2 = (0, 142.194357, 0)$	$\lambda_1 = -71.0924, \lambda_2 = -1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{q}_3 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -9.88619, \lambda_2 = 1.11587, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{q}_4 = (0, 0.294603, 2.58468)$	$\lambda_1 = -0.523716, \lambda_{2,3} = 0.190746 \pm 0.244905i$	Silla
$\mathbf{q}_5 = (1.97183, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -7.65184, \lambda_2 = 0.459744, \lambda_3 = -0.252962$	Silla

Cuadro 4.3: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.1974$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.9.

Punto de equilibrio \mathbf{p}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{p}_j}$	Dinámica de \mathbf{p}_j
$\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 9.886190, \lambda_2 = 1.115870, \lambda_3 = 0.25$	Fuente
$\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 8.96366, \lambda_2 = 0.891611, \lambda_3 = -0.25$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -9.88619, \lambda_2 = 1.11587, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{p}_3 = (0, 0.294603, 2.584681)$	$\lambda_1 = -0.523716, \lambda_{2,3} = 0.190746 \pm 0.244905i$	Silla
$\mathbf{p}_4 = (0, 142.194357, 0)$	$\lambda_1 = -71.0924, \lambda_2 = -1.11588, \lambda_3 = 0.25$	Silla
$\mathbf{p}_5 = (1.971833, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -7.65184, \lambda_2 = 0.459744, \lambda_3 = -0.252962$	Silla
$\mathbf{p}_6 = (1.000047, 0.222997, 2.229983)$	$\lambda_{1,2} = 0.000102 \pm 0.105609i, \lambda_3 = -0.000249$	Silla
$\mathbf{p}_7 = (0.999953, 0.223003, 2.230017)$	$\lambda_{1,2} = -0.000102 + 0.105718i, \lambda_3 = 0.000249$	Silla

Cuadro 4.4: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.1972$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.10.

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

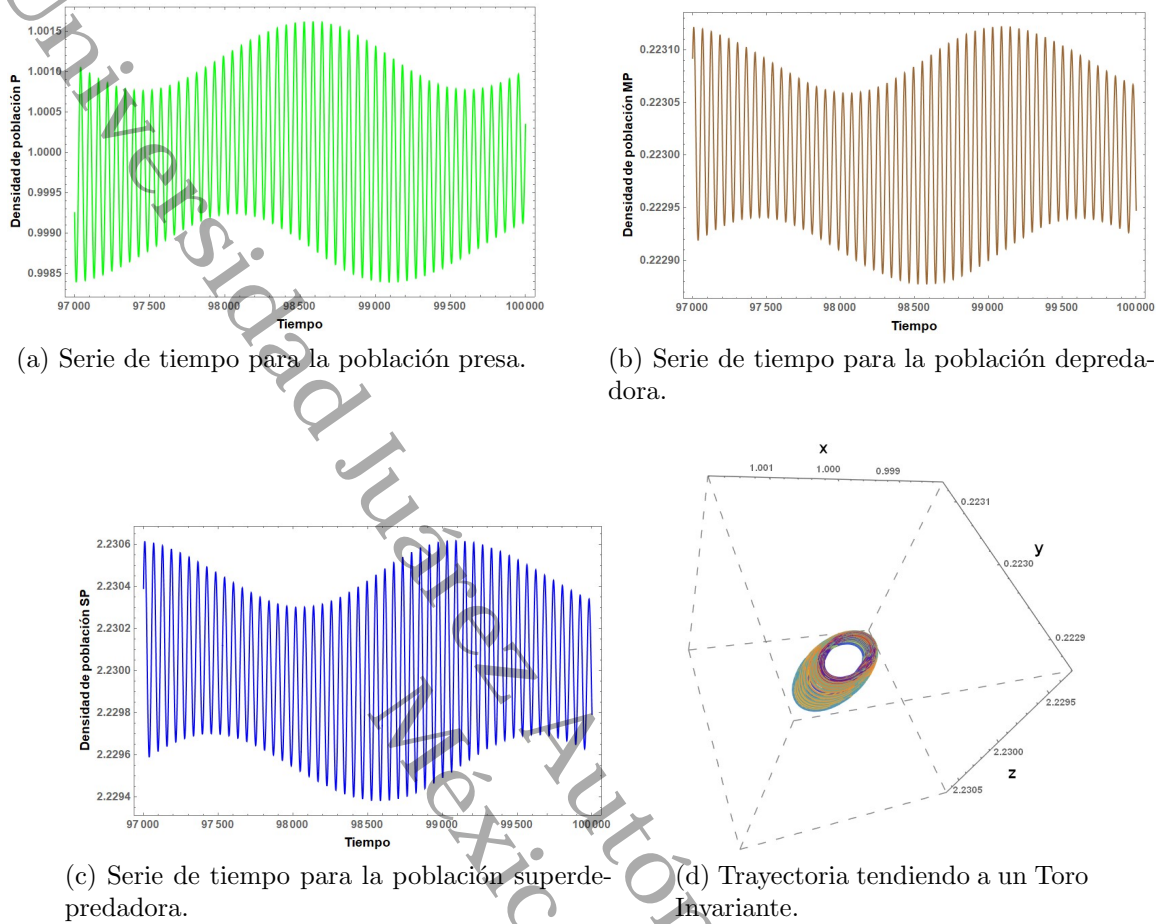


Figura 4.3: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-8}, 10^{-8}, 10^{-8})$ que detecta un toro invariante.

4.5.2. Caso 2: Holling III-II-III

Consideremos las respuestas funcionales f_1, g_1 y h_1 ,

$$f_1(x) = \frac{e_1 x^2}{d_1 x^2 + 1}, \quad g_1(x) = \frac{e_2 x}{d_2 x + 1}, \quad h_1(y) = \frac{e_3 y^2}{d_3 y^2 + 1},$$

y el crecimiento logístico de Richards $rxR_0(x)$, donde $R_0(x) = 1 - \frac{x^L}{R_1^L}$.

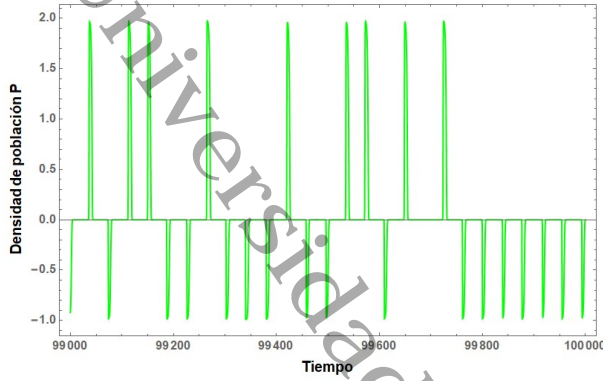
Los valores de los parámetros

$$d_1 = \frac{3}{x_0^2}, \quad d_2 = \frac{1}{x_0} d_3 = \frac{3000000}{49729}, \quad e_2 = \frac{e_1 x_0}{2},$$

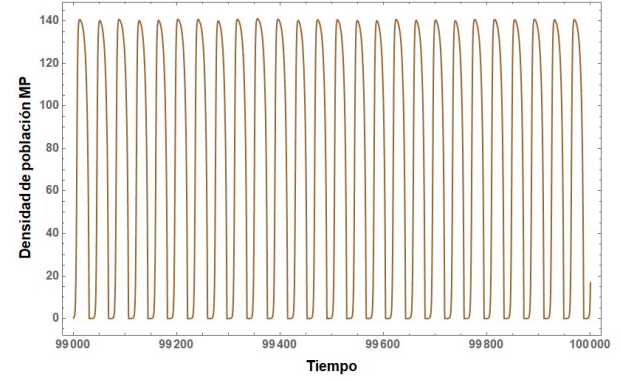
$$e_3 = \frac{2000 e_1 x_0}{223}, \quad R_1 = (L x_0^L + x_0^L)^{1/L}, \quad L > 0, \tag{4.12}$$

satisfacen las condiciones SRFI, SRFII y SCP determinados en la sección 4.2. Las asignaciones

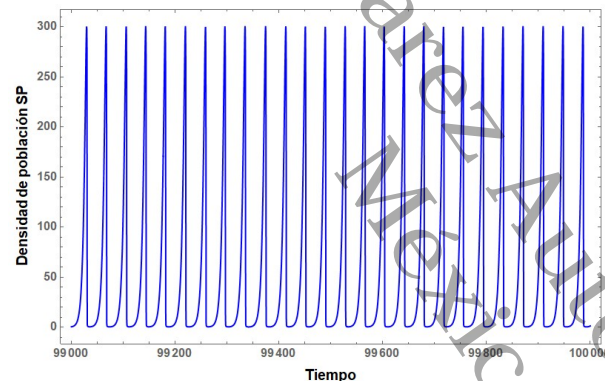
4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling



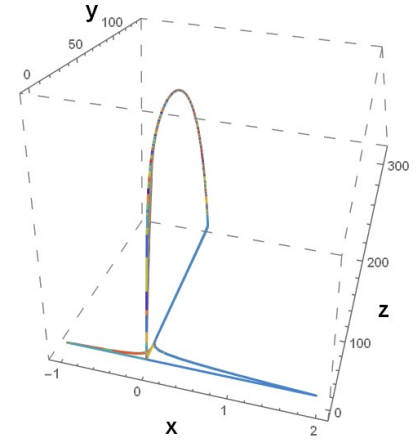
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Trayectoria detectando una órbita homoclínica.

Figura 4.4: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $p_0 + (10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1})$ que converge a una órbita homoclínica.

hechas en (4.7) se convierten en

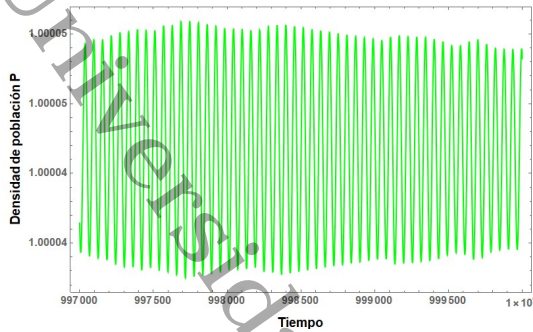
$$b_1 = \frac{1990721}{14000}, \quad b_2 = \frac{41104921}{183288000}, \quad c_2 = \frac{734269}{91644}, \quad c_3 = \frac{2453}{11200x_0}, \quad k_2 = \frac{47992300000000}{1205356054748899},$$

$$r = \frac{11246984424463560622460970121521e_1x_0}{227529210817183921194800000000 \left(1 - x_0^L \left((Lx_0^L + x_0^L)^{1/L}\right)^{-L}\right)},$$

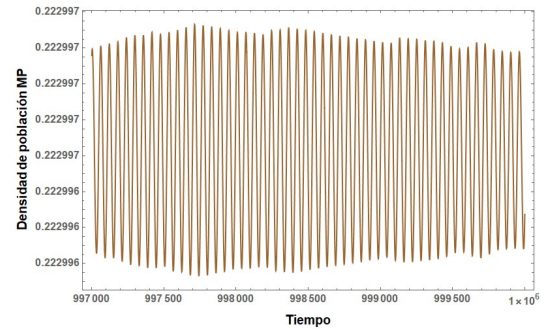
$$s_1 = \frac{8927e_1x_0}{8000}, \quad s_2 = \frac{e_1x_0}{4}.$$

Por lo tanto, los valores para la condición de no degeneración de la bifurcación cero-Hopf son

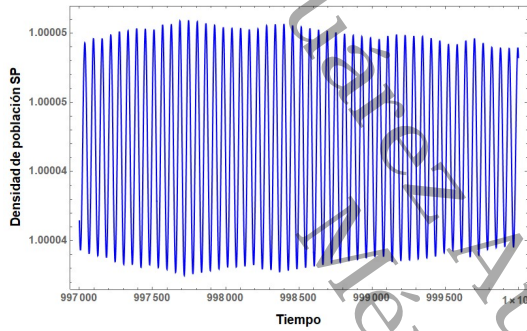
4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling



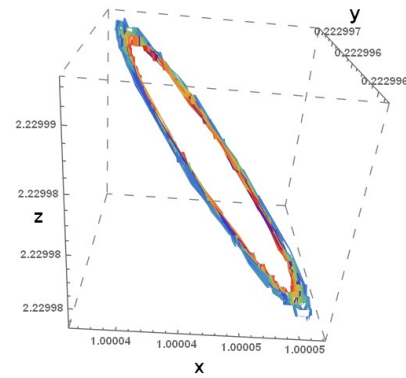
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Órbita detectando un atractor extraño oculto.

Figura 4.5: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9})$ que detecta un atractor extraño.

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{2862719628330227149e_1^7(\mathcal{M}_1)x_0^8}{\mathcal{M}_2}, \quad G_{200} = \frac{2875e_1\mathcal{M}_3x_0}{250075019978199758200693915489877193899729},$$

$$G_{011} = \frac{210103745377526926233096175e_1(\mathcal{M}_4)x_0}{\mathcal{M}_5}, \quad \theta_0 = -\frac{\mathcal{M}_6}{11500\mathcal{M}_3}, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{171875e_1^7\mathcal{M}_6\mathcal{M}_7x_0^3}{\mathcal{M}_8} + \frac{\mathcal{M}_9}{\mathcal{M}_9(\mathcal{M}_4)},$$

donde $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{10}$ son como en el apéndice C.2. Existe un valor $L_0 = 1.448948$ para el cual \mathcal{D}_0 se anula, en consecuencia se pierde la regularidad de la aplicación \mathcal{R} , y a su vez se degenera la bifurcación cero-Hopf. En consecuencia, las hipótesis del teorema 4.1 son válidas. Esto lo resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 4.11 (Holling-III-II-III). *Existen condiciones en los parámetros, bajo las cuales el sistema diferencial (4.1) presenta una bifurcación cero-Hopf en $\mathbf{p}_0 = (x_0, \frac{223}{1000}, \frac{223}{100})$, con respecto a los parámetros (c_1, k_1) en el valor de bifurcación $(c_{10}, k_{10}) = (\frac{1990721}{14000x_0}, \frac{76729387290665647}{5233309315271000})$. En este caso, $S_0 = 1$; $\theta_0 < 0$, si $L > 0$ y $e_1 > 0$.*

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

Del teorema 4.11, dado que $S_0 = 1$ y $\theta_0 < 0$, existen ramas en el espacio de parámetros donde las bifurcaciones de Hopf sub y supercríticas se manifiestan, como también la destrucción heteroclínica del toro (cf. Guckenheimer–Kuznetsov [GK]), cuando $L > 0$ y $e_1 > 0$.

Simulación numérica para el caso 2: Holling III-II-III

De acuerdo al teorema 4.11, los parámetros libres en el sistema diferencial (4.9) son e_1, L y x_0 . Fijamos $e_1 = 0.5, L = 1$ y $x_0 = 1$, en consecuencia los valores de bifurcación son $c_{10} = \frac{1990721}{14000} \approx 142.194357$ y $k_{10} = \frac{76729387290665647}{5233309315271000} \approx 14.661733$, cuyo punto de equilibrio de coexistencia en el que existe bifurcación cero-Hopf es $\mathbf{p}_0 = (1, \frac{223}{1000}, \frac{223}{100})$.

Enseguida mostramos algunas simulaciones numéricas, obtenidas con parámetros en una pequeña vecindad del valor de bifurcación cero-Hopf, donde se muestran diferentes tipos de conjuntos ω -límite, como órbitas periódicas, toros invariantes, órbitas homoclínicas y atractores extraños.

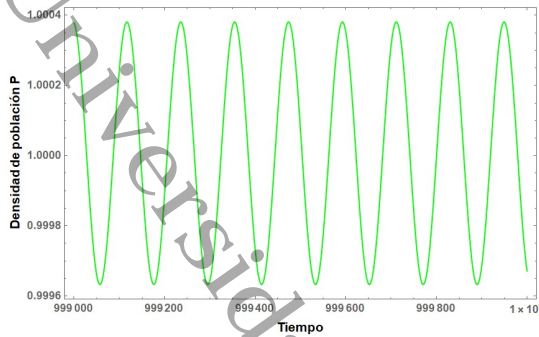
Ejemplo 4.12 (Órbita periódica). Sean $c_1 = 142.194321$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-9}$, se obtiene una trayectoria tendiendo a una órbita periódica, véase la figura 4.6d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.6a, 4.6b y 4.6c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.5.

Puntos de equilibrio \mathbf{p}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{p}_j}$	Dinámica de \mathbf{p}_j
$\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Fuente
$\mathbf{p}_1 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -4.943095, \lambda_2 = -0.557937, \lambda_3 = -0.125$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 4.481828, \lambda_2 = 0.557937, \lambda_3 = 0.125$	Silla
$\mathbf{p}_3 = (0, 0.317874, 2.771130)$	$\lambda_1 = -0.277612, \lambda_2 = 0.204346, \lambda_3 = 0.069187$	Silla
$\mathbf{p}_4 = (0, 142, 0)$	$\lambda_1 = -0.557938, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = -0.00237$	Silla
$\mathbf{p}_5 = (0.000033, 142.199096, 0)$	$\lambda_1 = -0.557937, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = -0.00237$	Silla
$\mathbf{p}_6 = (0.999729, 0.22302, 2.230097)$	$\lambda_{1,2} = -0.000375 \pm 0.052922i, \lambda_3 = 0.000899$	Silla
$\mathbf{p}_7 = (1.000271, 0.22298, 2.229903)$	$\lambda_{1,2} = 0.000378 \pm 0.052751i, \lambda_3 = -0.000906$	Silla
$\mathbf{p}_8 = (1.971833, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -3.82592, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = -0.126481$	Silla

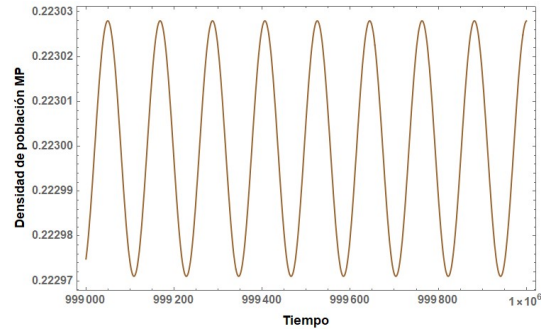
Cuadro 4.5: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.194321$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.12.

Ejemplo 4.13 (Toro invariante). Sean $c_1 = 142.197765$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-5}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-7}$, obtenemos una trayectoria acumulándose en un toro invariante, véase la figura 4.7d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.7a, 4.7b y 4.7c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.6.

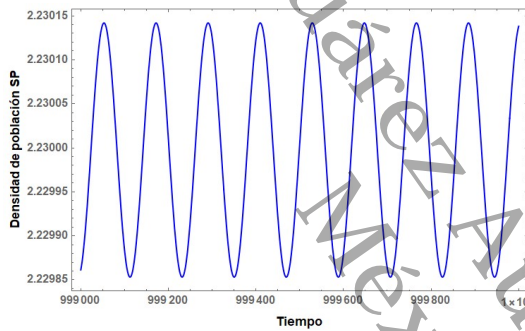
4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling



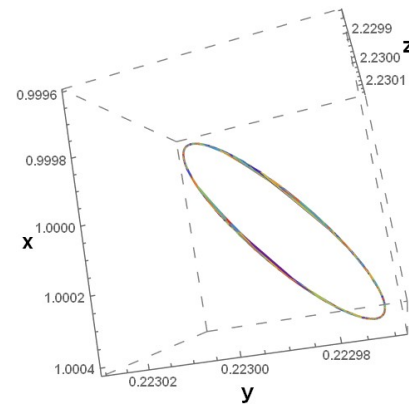
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Trayectoria convergiendo a una órbita periódica.

Figura 4.6: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9})$ que converge a una órbita periódica.

Ejemplo 4.14 (Órbita homoclínica con “movimiento complicado”¹). Sean $c_1 = 142.407805$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$, con $\varepsilon = 10^{-9}$, obtenemos una trayectoria tendiendo a una órbita homoclínica, véase la figura 4.8d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades de poblaciones se muestran en las figuras 4.8a, 4.8b y 4.8c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.7.

Ejemplo 4.15 (Atractor extraño). Sean $c_1 = 142.197243$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$, donde $k_{10} = 14.661733$. Tomando la condición inicial $\mathbf{q}_0 = (1 + \varepsilon, \frac{223}{1000} + \varepsilon, \frac{223}{100} + \varepsilon)$ con $\varepsilon = 10^{-9}$, se obtiene una trayectoria que se acumula en un atractor extraño, véase la figura 4.9d. Las correspondientes series de tiempo para las densidades poblacionales se muestran en las figuras 4.9a, 4.9b y 4.9c. Además, los puntos de equilibrio y su dinámica local se muestran en el cuadro 4.8.

¹Trayectoria que permite detectar un conjunto con dinámica caótica en una vecindad tubular de la órbita homoclínica, que a través del cálculo del máximo exponente de Lyapunov, se permite determinar que la dinámica presentada es caótica, véase la sección 4.6 y figura 4.13.

4.5 Aplicaciones para respuestas funcionales Holling

Puntos de equilibrio \mathbf{q}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_j}$	Dinámica de \mathbf{q}_j
$\mathbf{q}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Fuente
$\mathbf{q}_1 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Silla
$\mathbf{q}_2 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 4.481828, \lambda_2 = 0.557937, \lambda_3 = -0.125$	Silla
$\mathbf{q}_3 = (0, 0.317874, 2.77113)$	$\lambda_1 = -0.277612, \lambda_2 = 0.204346, \lambda_3 = 0.069187$	Silla
$\mathbf{q}_4 = (0, 142, 0)$	$\lambda_1 = -0.557938, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = 0.00237$	Silla
$\mathbf{q}_5 = (0.000033, 142.199096, 0)$	$\lambda_1 = -0.557937, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = -0.00237$	Silla
$\mathbf{q}_6 = (0.999199, 0.223058, 2.230287)$	$\lambda_{1,2} = -0.001094 \pm 0.053126i, \lambda_3 = 0.002633$	Silla
$\mathbf{q}_7 = (1.000799, 0.222942, 2.229712)$	$\lambda_{1,2} = 0.01125 \pm 0.052624i, \lambda_3 = -0.002688$	Silla
$\mathbf{q}_8 = (1.971833, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -3.825921, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = -0.126481$	Silla

Cuadro 4.6: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.197765$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-5}$ del ejemplo 4.13.

Puntos de equilibrio \mathbf{v}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{v}_j}$	Dinámica de \mathbf{v}_j
$\mathbf{v}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Fuente
$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Silla
$\mathbf{v}_2 = (0, 0.317874, 2.771129)$	$\lambda_1 = -0.277612, \lambda_2 = 0.204346, \lambda_3 = 0.069187$	Silla
$\mathbf{v}_3 = (0, 142.194357, 0)$	$\lambda_1 = -0.557938, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = 0.00237$	Silla
$\mathbf{v}_4 = (1.971833, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -0.557937, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = -0.00237$	Silla
$\mathbf{v}_5 = (0.000033, 142.199104, 0)$	$\lambda_1 = -0.557937, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = 0.002633$	Silla
$\mathbf{v}_6 = (0.000033, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 4.481835, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = -0.125$	Silla

Cuadro 4.7: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.407805$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.14.

4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov

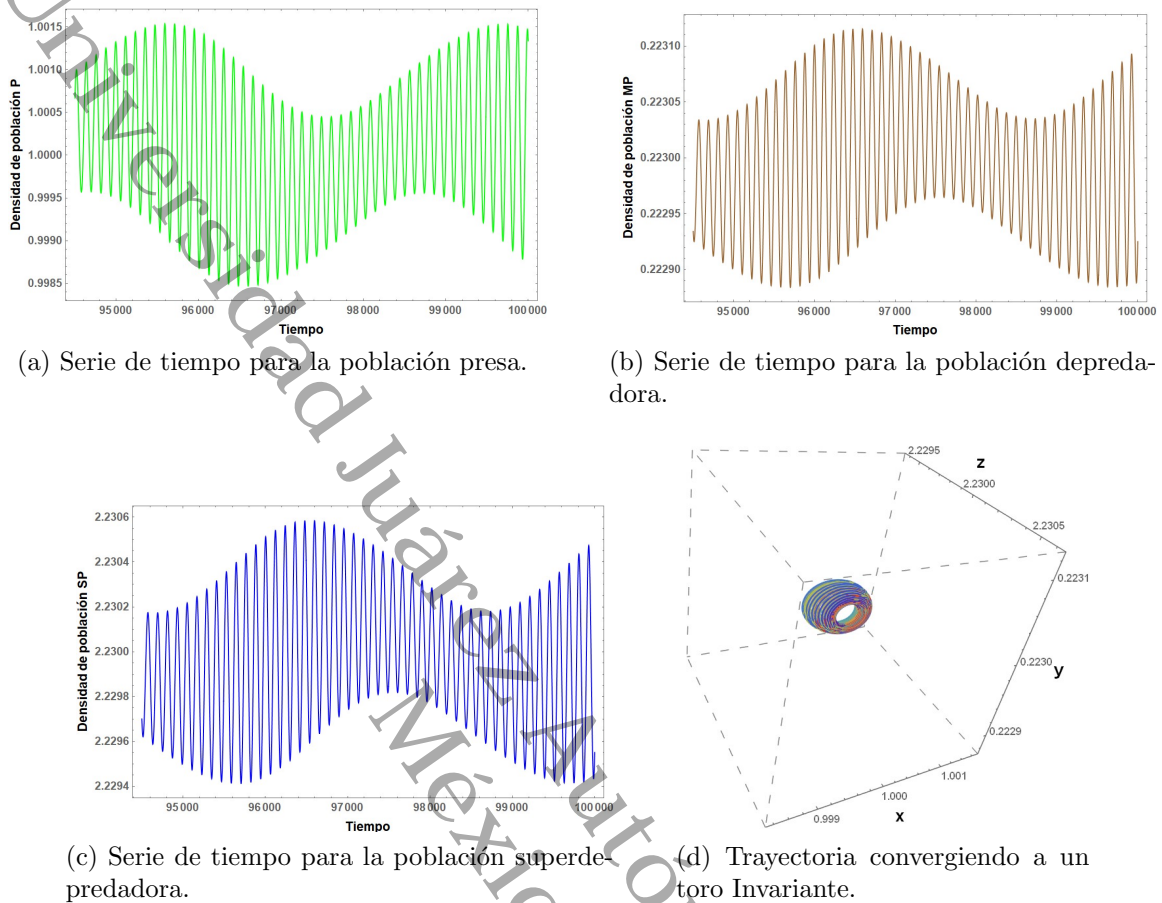


Figura 4.7: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $\mathbf{p}_0 + (10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7})$ que se acumula en un toro invariante.

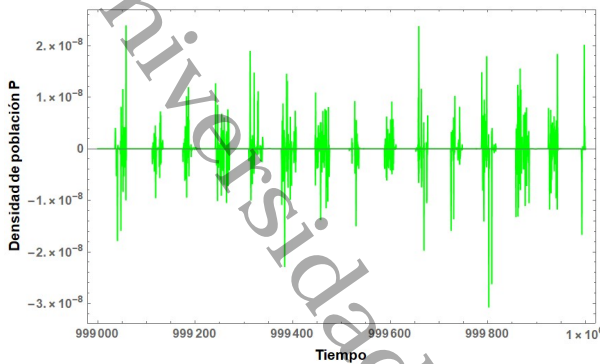
4.6. Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov

4.6.1. MLE para el caso 1: Holling II-II-II

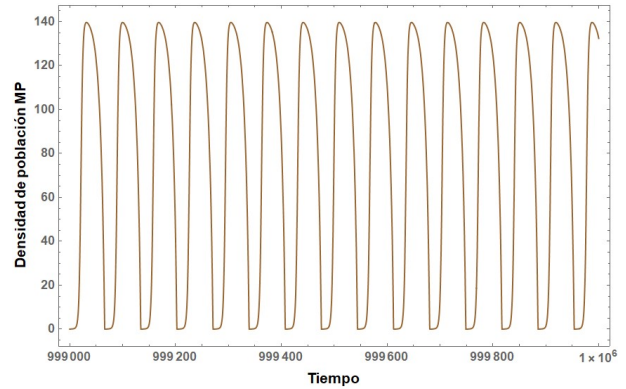
Para el caso Holling II-II-II, del teorema 4.6 y los parámetros dados en el apartado 4.5.1, obtenemos numéricamente que el sistema diferencial (4.9) presenta caos, para los parámetros cercanos al valor de bifurcación $(c_{10}, k_{10}) = (\frac{1990721}{14000}, \frac{76729387290665647}{5233309315271000}) \approx (142.194357, 14.661733)$, vía el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. En la figura 4.10a se muestra que el sistema presenta caos, ya que al calcular MLE , éste resulta ser positivo para valores del parámetro c_1 en el intervalo $[141.5, 143]$. De igual manera, en la figura 4.10b se muestran diferentes valores de los parámetros c_1 y k_1 para los cuales el MLE de órbitas del sistema resulta ser positivo.

De acuerdo con el ejemplo 4.10 y la trayectoria de la figura 4.5d, consideramos otra solución con

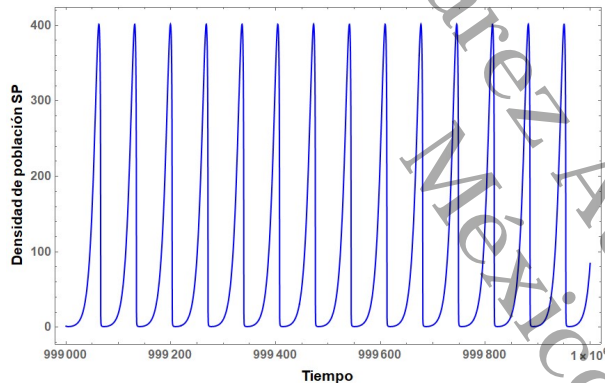
4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov



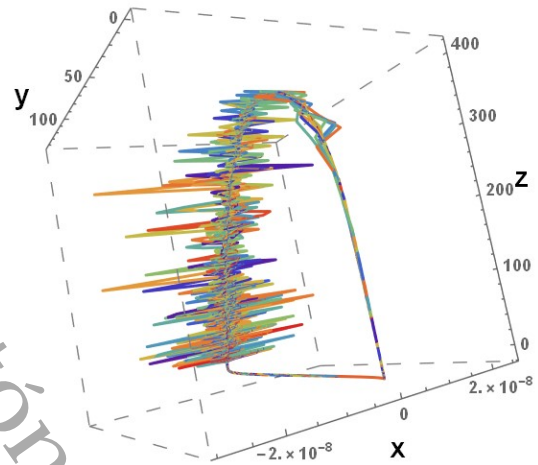
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Trayectoria detectando una órbita homoclinica con movimiento complicado.

Figura 4.8: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $p_0 + (10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9})$ que converge a una órbita con movimiento complicado.

condición inicial

$$r_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \approx (1.00004, 0.222997, 2.22999),$$

la cual corresponde a $t_0 = 997000$ y está cerca del atractor extraño que se muestra en la figura 4.5d. Usando Mathematica, en la figura 4.11 se muestra el cálculo de los exponentes de Lyapunov (L_1, L_2, L_3) asociados a estas trayectorias en el intervalo de tiempo $[997000, 1000000]$. En particular, los exponentes de Lyapunov asociados al atractor extraño son $L_1 \approx 0.011389, L_2 \approx 0.000465$ y $L_3 \approx -0.010304$. Por lo tanto, $MLE(142.197200, k_{10} - 10^{-6}) = 0.011389$.

4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov

Puntos de equilibrio \mathbf{w}_j	Valores propios de $\mathbf{J}_{\mathbf{w}_j}$	Dinámica de \mathbf{w}_j
$\mathbf{w}_0 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Fuente
$\mathbf{w}_1 = (2, 0, 0)$	$\lambda_1 = -4.943095, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = 0.125$	Silla
$\mathbf{w}_2 = (0, 142.194357, 0)$	$\lambda_1 = -0.557938, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = 0.00237$	Silla
$\mathbf{w}_3 = (0, 0.317874, 2.77113)$	$\lambda_1 = -0.277612, \lambda_2 = 0.204346, \lambda_3 = 0.069187$	Silla
$\mathbf{w}_4 = (1.971833, 0, 0.656131)$	$\lambda_1 = -3.82592, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = -0.126481$	Silla
$\mathbf{w}_5 = (1.000026, 0.222998, 2.229991)$	$\lambda_{1,2} = 0.000037 \pm 0.052823i, \lambda_3 = -0.000088$	Silla
$\mathbf{w}_6 = (0.999974, 0.223002, 2.23001)$	$\lambda_{1,2} = -0.000036 \pm 0.052840i, \lambda_3 = 0.000087$	Silla
$\mathbf{w}_7 = (0.000033, 142.199097, 0)$	$\lambda_1 = -0.557937, \lambda_2 = 0.125, \lambda_3 = -0.00237$	Silla
$\mathbf{w}_8 = (0, 0, 0.224264)$	$\lambda_1 = 4.48183, \lambda_2 = 0.557938, \lambda_3 = -0.125$	Silla

Cuadro 4.8: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $c_1 = 142.197243$ y $k_1 = k_{10} - 10^{-6}$ del ejemplo 4.15.

4.6.2. MLE para el caso 2: Holling III-II-III

Mostramos ahora la existencia de caos en los sistemas diferenciales para el caso Holling III-II-III. Del teorema 4.11 y los parámetros dados en el apartado 4.5.2, obtenemos numéricamente que el sistema diferencial (4.9) presenta caos, para los parámetros cercanos al valor de bifurcación $(c_{10}, k_{10}) = (\frac{1990721}{14000}, \frac{76729387290665647}{5233309315271000}) \approx (142.194357, 14.661733)$, vía el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. En la figura 4.12a se muestra que el sistema presenta caos, ya que al calcular MLE , éste resulta ser positivo para valores del parámetro c_1 en el intervalo $[141, 143]$. De igual manera, en la figura 4.12b se muestran diferentes valores de los parámetros c_1 y k_1 para los cuales el MLE de órbitas del sistema resulta ser positivo.

Por otra parte del ejemplo 4.14 y la figura 4.8d, consideramos una condición inicial

$$\mathbf{r}_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \approx (4.38483 \times 10^{-6}, 126.014, 134.081),$$

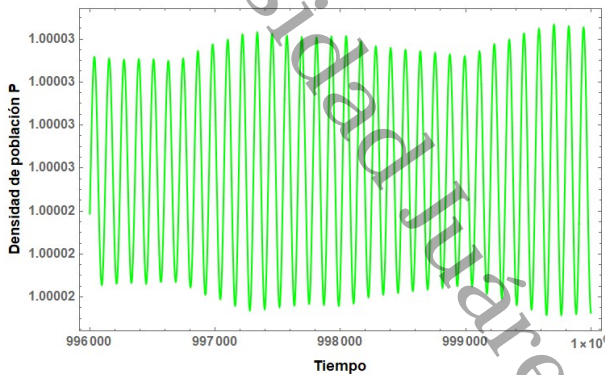
la cual corresponde a $t_0 = 997000$ y está cerca de la órbita homoclinica que se muestra en la figura 4.9d. Usando Mathematica, en la figura 4.13 se muestra el cálculo de los exponentes de Lyapunov (L_1, L_2, L_3) asociados a estas trayectorias en el intervalo de tiempo $[997000, 1000000]$. En particular, los exponentes de Lyapunov asociados al atractor extraño son $L_1 \approx 0.0192167, L_2 \approx -0.27117$ y $L_3 \approx -17.6554$. Por lo tanto, $MLE(142.407805, k_{10} - 10^{-6}) \approx 0.0192167$.

Finalmente del ejemplo 4.15 y la figura 4.9d, consideramos una condición inicial

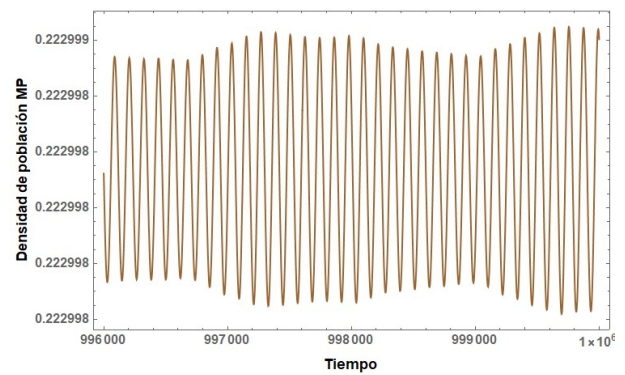
$$\mathbf{r}_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \approx (1.00002, 0.222998, 2.22999),$$

la cual corresponde a $t_0 = 996000$ y está cerca del atractor extraño que se muestra en la figura 4.9d. Usando Mathematica, en la figura 4.14 se muestra el cálculo de los exponentes de Lyapunov (L_1, L_2, L_3) asociados a estas trayectorias en el intervalo de tiempo $[996000, 1000000]$. En particular, los exponentes de Lyapunov asociados al atractor extraño son $L_1 \approx 0.007425, L_2 \approx -0.000891$ y $L_3 \approx -0.005886$. Por lo tanto, $MLE(142.197243, k_{10} - 10^{-6}) \approx 0.007425$.

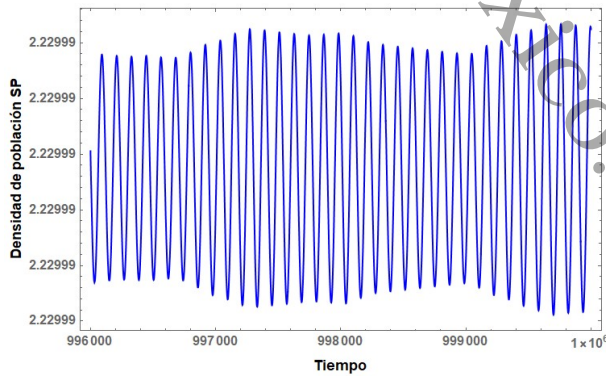
4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov



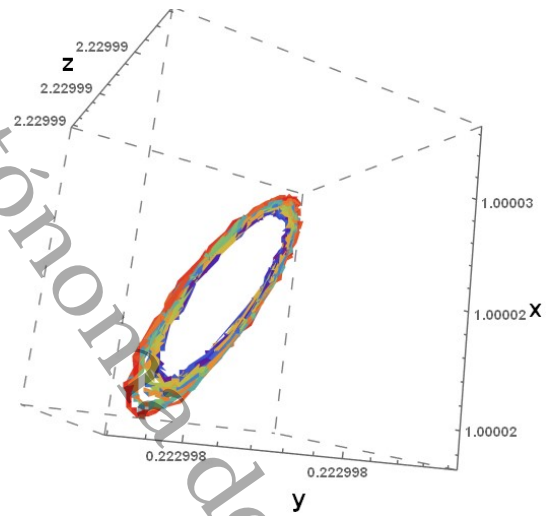
(a) Serie de tiempo para la población presa.



(b) Serie de tiempo para la población depredadora.



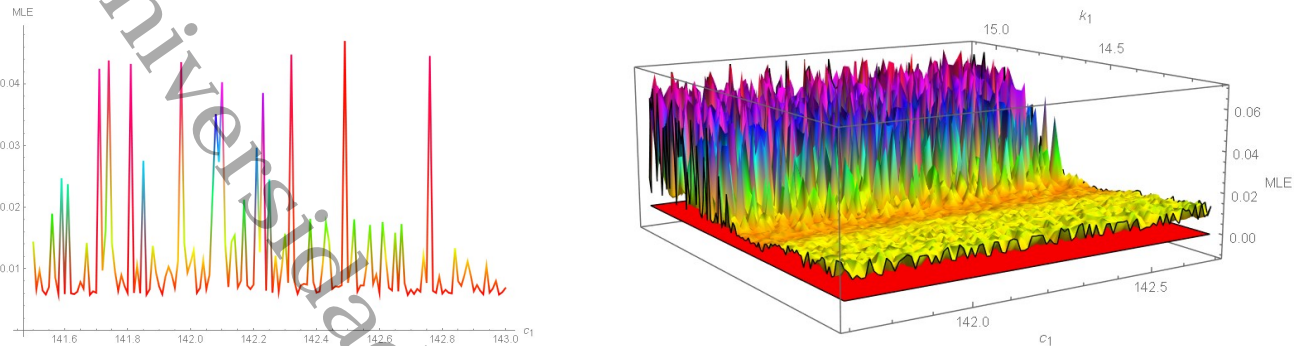
(c) Serie de tiempo para la población superdepredadora.



(d) Órbita tendiendo a un atractor extraño oculto.

Figura 4.9: Series de tiempo y trayectoria con condición inicial $p_0 + (10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9})$ tendiendo un atractor extraño.

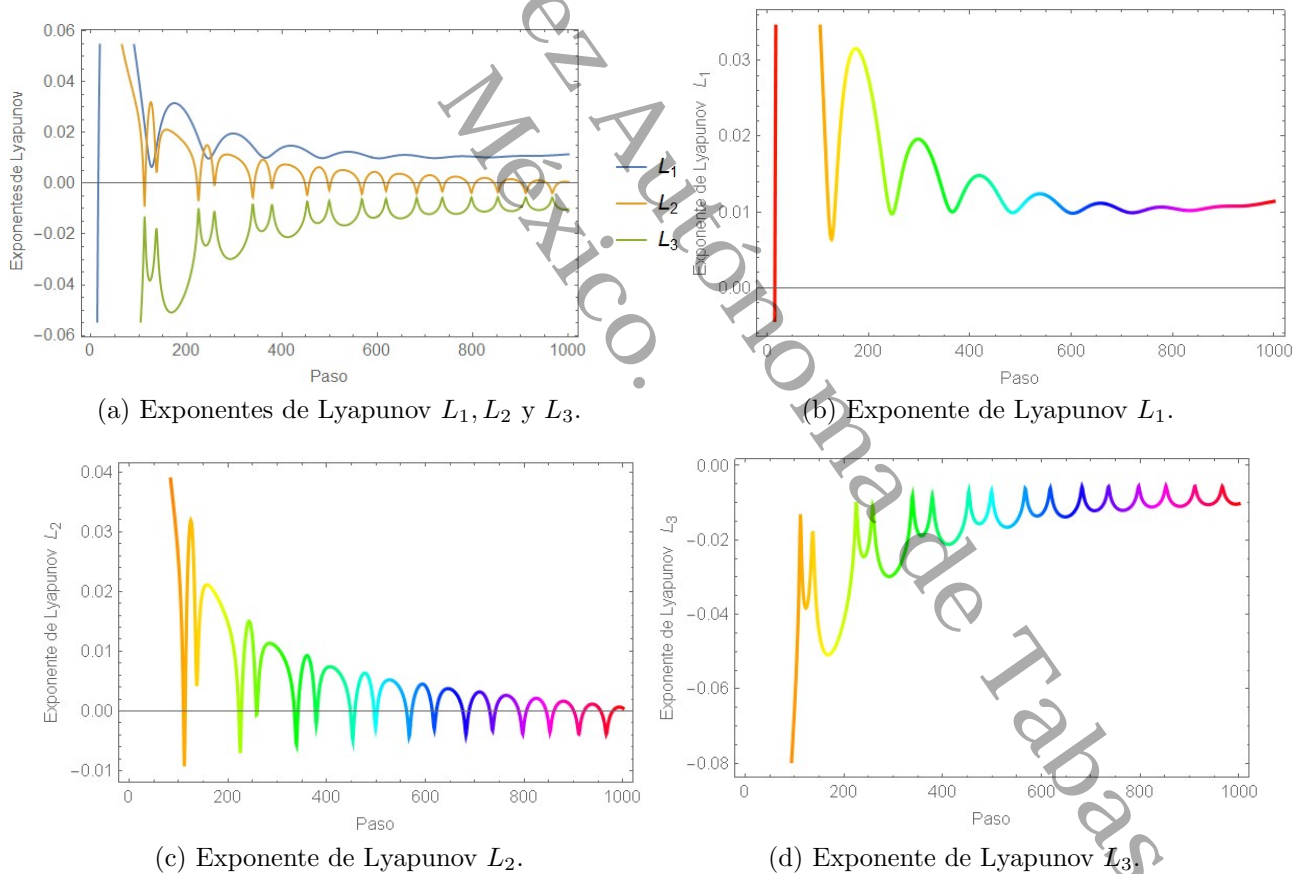
4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov



(a) $MLE(c_1, k_{10})$, donde $k_{10} = 14.661733$ y $c_1 \in [141.5, 143]$.

(b) $MLE(c_1, k_1)$, $c_1 \in [141.7, 142.7]$, $k_1 \in [14.1, 15.1]$.

Figura 4.10: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros c_1 y k_1 : caso Holling II-II-II.



(a) Exponentes de Lyapunov L_1, L_2 y L_3 .

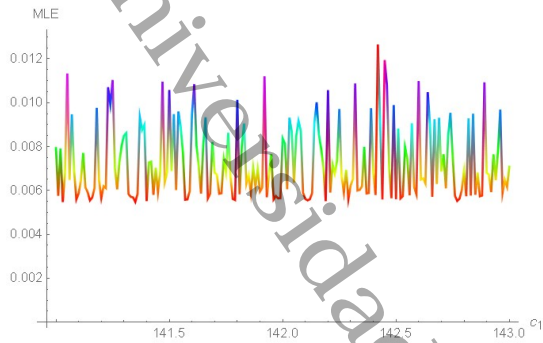
(b) Exponente de Lyapunov L_1 .

(c) Exponente de Lyapunov L_2 .

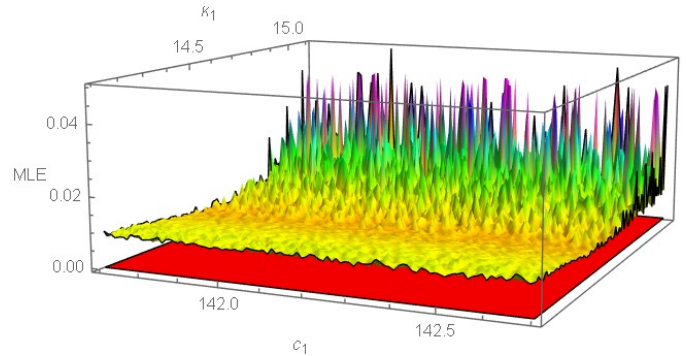
(d) Exponente de Lyapunov L_3 .

Figura 4.11: Exponentes de Lyapunov para la trayectoria mostrada en la figura 4.5d, la cual corresponde al ejemplo 4.10, caso Holling II-II-II.

4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov

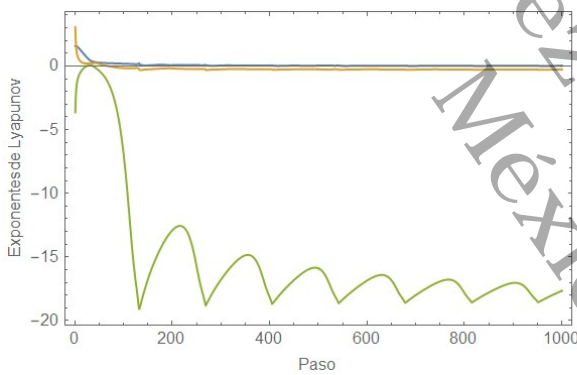


(a) $MLE(c_1, k_{10})$, donde $k_{10} = 14.661733$ y $c_1 \in [141, 143]$.

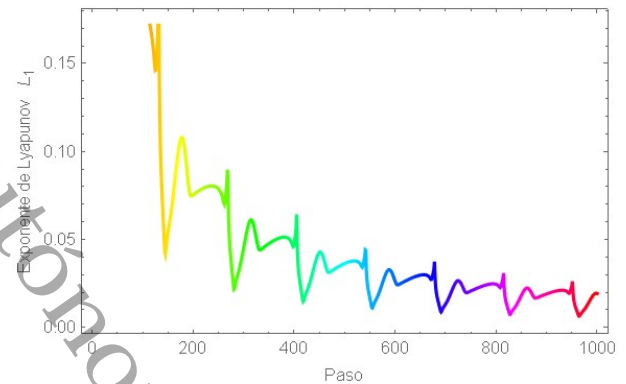


(b) $MLE(c_1, k_1)$, $c_1 \in [141.7, 142.7]$, $k_1 \in [14.1, 15.1]$.

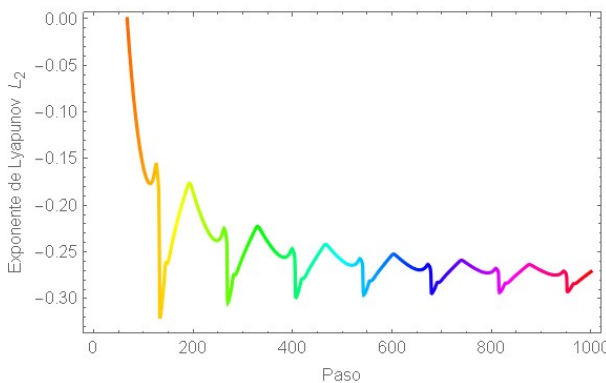
Figura 4.12: Máximo exponente de Lyapunov variando los parámetros c_1 y k_1 : caso Holling III-II-III.



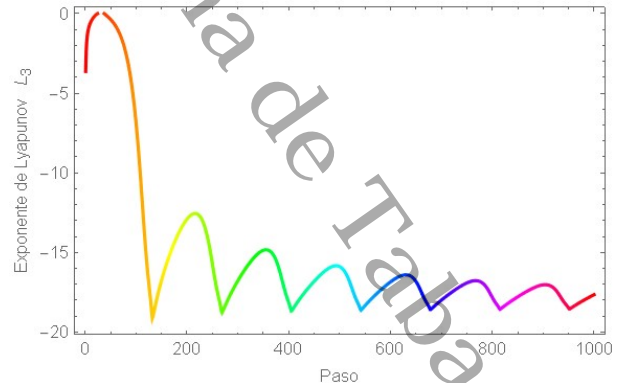
(a) Exponentes de Lyapunov L_1, L_2 y L_3 .



(b) Exponente de Lyapunov L_1 .



(c) Exponente de Lyapunov L_2 .



(d) Exponente de Lyapunov L_3 .

Figura 4.13: Exponentes de Lyapunov para la trayectoria mostrada en la figura 4.8d, la cual corresponde al ejemplo 4.14, caso Holling III-II-III.

4.6 Comportamiento caótico vía el máximo exponente de Lyapunov

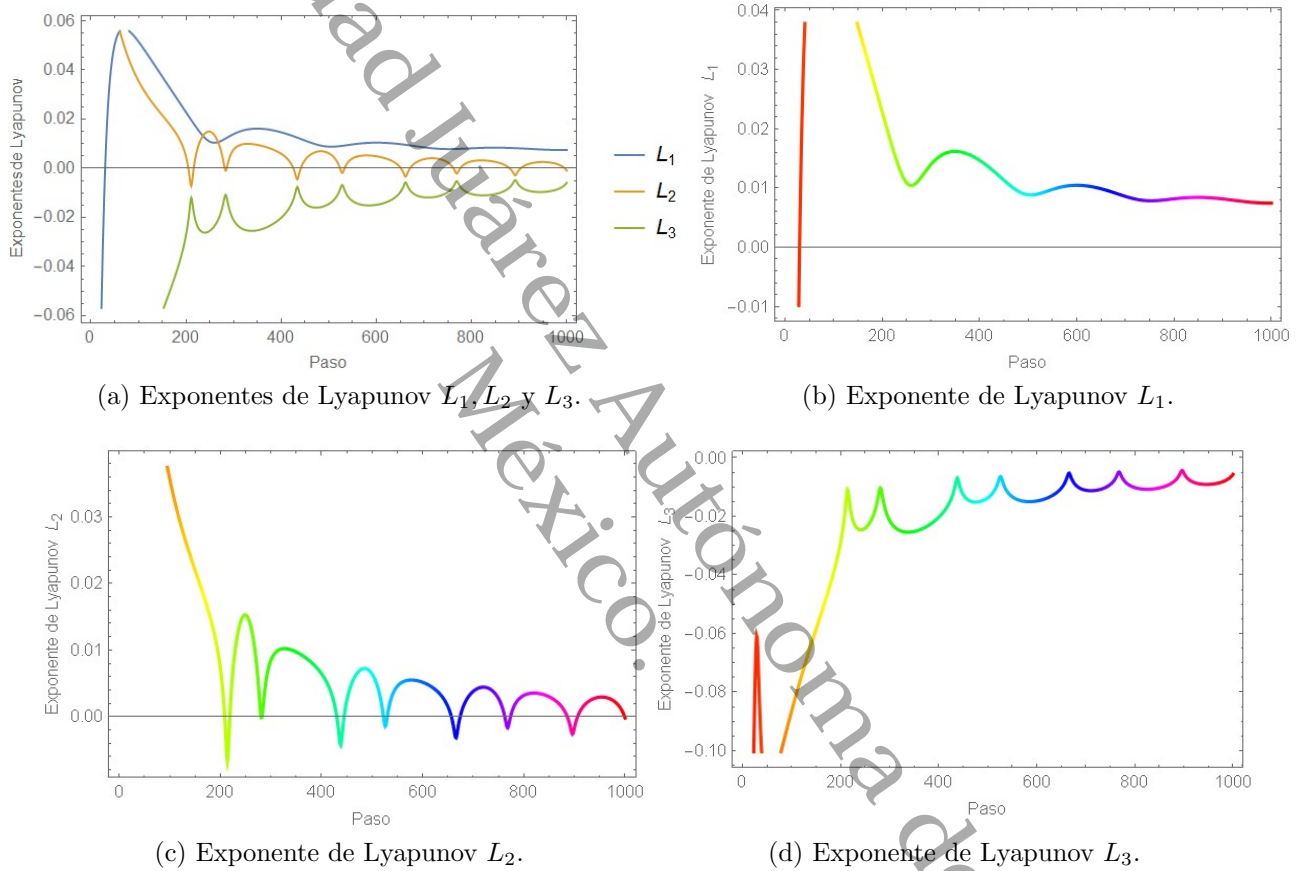


Figura 4.14: Exponentes de Lyapunov para la trayectoria mostrada en la figura 4.9d, la cual corresponde al ejemplo 4.15, caso Holling III-II-III.

Conclusiones

5
54

En este trabajo se analizó la dinámica de dos modelos tipo Leslie, basados en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela la interacción de tres especies (una presa, un depredador y un superdepredador) que forman parte de un ecosistema. El primer modelo, corresponde a una cadena alimentaria tritrófica, y se establecieron condiciones en los parámetros del sistema para la existencia de una bifurcación cero-Hopf. En consecuencia, el sistema presenta diferentes conjuntos límites estables que garantizan la coexistencia de las tres especies, tales como puntos de equilibrio, órbitas periódicas y toros invariantes. Asimismo, se mostró la existencia de órbitas caóticas, a través del cálculo del máximo exponente de Lyapunov.

El segundo modelo describe la interacción a través de una cadena alimentaria intragremial donde se consideraron los parámetros que miden el efecto del factor miedo de la presa hacia los depredadores. En el capítulo tres se demuestra la presencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens en el sistema, la cual garantiza la coexistencia de las especies a través de conjuntos límites como puntos de equilibrio, órbitas periódicas y órbitas homoclínicas. De igual manera que en el sistema tritrófico, en el capítulo cuatro se muestra que el sistema presenta una bifurcación cero-Hopf y en consecuencia se presentan toros invariantes y órbitas caóticas en el sistema intragremial.

Los resultados analíticos obtenidos consideran una respuesta funcional general. Estos resultados fueron validados con diferentes simulaciones numéricas. En particular, en el modelo intragremial se eligieron las respuestas funcionales de Holling en donde el sistema presenta caos (cualquier otra variación presentada permite mostrar: puntos de equilibrio, órbitas periódicas y toros invariantes, pero no necesariamente la aparición de órbitas caóticas). El comportamiento caótico que presentan algunas variaciones de los sistemas estudiados fue corroborado calculando el máximo exponente de Lyapunov en una familia de ecuaciones diferenciales cercanas al valor del parámetro de bifurcación.

Finalmente, vale la pena mencionar que las bifurcaciones de Bogdanov-Takens y cero-Hopf se pueden degenerar. En el caso del modelo intragremial pudimos caracterizar esta propiedad a través del parámetro k_2 que es el factor del efecto de miedo de la presa hacia el superdepredador, ver la figura 3.1d. Mientras que para cuando el efecto de miedo de la presa hacia el superdepredador, no existe, la no degeneración es caracterizada por el parámetro L en la función de crecimiento de Richards, ver figura 3.3c. De igual manera, en el modelo intragremial la no degeneración de la bifurcación cero-Hopf está determinada por el parámetro L en la función de crecimiento de Richards, debido a que existe un único valor aislado L_0 para el cual la condición de regularidad se pierde; en consecuencia la bifurcación se degenera, ver figura 4.1.

Bibliografía

- [A] Aziz-Alaoui, M.A.: Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model. *Chaos, Solitons and Fractals*. 14(8), 1275-1293, (2002). [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00079-6](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00079-6)
- [ABH] Adak, D., Bairagi, N., Haki, R.: Chaos in delay-induced Leslie-Gower prey-predator-parasite model and its control through prey harvesting. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 51, 102998, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.102998>
- [AJUR] Agrawal, R., Jana, D., Upadhyay, R. K., Rao, V.: Complex dynamics of sexually reproductive generalist predator and gestation delay in a food chain model: double Hopf-bifurcation to chaos. *J. Appl. Math. Comput.*, 55(1), 513-547, (2017). <https://doi.org/10.1007/s12190-016-1048-1>
- [BGL] Blé, G., Guzmán-Arellano, C.I., Loreto-Hernández, I.: Coexistence in a four-species food web model with general functional responses, *Chaos, Solitons and Fractals*, 153(1), (2021). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111555>
- [BL] Blé, G., Loreto, I.: Two- Dimensional Attracting Torus in an Intraguild Predation Model with General Functional Responses and Logistic Growth Rate for Prey, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(3), 1557-1576, (2021). <https://doi.org/10.11948/20200282>
- [BR] Blé, G., Dela-Rosa, M.A.: Bogdanov-Takens Bifurcation in a Leslie Type Tritrophic Model with General Functional Responses. *Acta Applicandae Mathematicae*. 169(1), 361-382, (2020). <https://doi.org/10.1007/s10440-019-00302-z>
- [C] Cresswell, W.: Predation in bird populations. *Journal of Ornithology*, 152(Suppl 1), 251-263, (2011). <https://doi.org/10.1007/s10336-010-0638-1>
- [D] Devaney, R. L.: *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, Addison-Wesley, Massachusetts, (1992).
- [FVV] Falconi, M., Vera-Damian, Y., Vidal, C.: Predator interference in a Leslie-Gower intraguild predation model. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 51, 102974, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.102974>

BIBLIOGRAFÍA

84

- [G] Green, B.: Poincaré and the three body problem, American Mathematical Society, History of Mathematics, (1997).
- [GH] Guckenheimer, J., Holmes, P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [GK] Guckenheimer, J., Kuznetsov, Y.A.: Fold-Hopf bifurcation, Scholarpedia. 2(10):1855, (2007). <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1855>
- [HH] Hsu, S. B., Huang, T. W.: Global stability for a class of predator-prey systems. SIAM J. Appl. Math. 55(3) 763-783, (1995). <https://doi.org/10.1137/S0036139993253201>.
- [HRS] Huang, J., Ruan, S., Song, J.: Bifurcations in a predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type III functional response. J. Differ. Equ. 257(6), 1721-1752, (2014). <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024>
- [HX] Huang, J., Xiao, D.: Analyses of Bifurcations and Stability in a Predator-prey System with Holling Type-IV Functional Response. Acta Math. Appl. Sin-E 20(1), 167-178, (2004). <https://doi.org/10.1007/s10255-004-0159-x>.
- [HZL] Huang, Y., Zhu, Z., Li, Z.: Modeling the Allee effect and fear effect in predator-prey system incorporating a prey refuge. Advances in Difference Equations, 1-13, (2020). <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02727-5>
- [K] Kuznetsov, A.: Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition, Springer, New York, (1998).
- [LK] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V.: Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. Int J Bifurc Chaos Appl Sci Eng, 23(01), 1330002, (2013). <https://doi.org/10.1142/S0218127413300024>
- [LH] Liu, X., Han, M.: Chaos and Hopf bifurcation analysis for a two species predator-prey system with prey refuge and diffusion. Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2), 1047-1061, (2011). <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.08.027>
- [LLW] Li, Y., Liu, H., Wei, Y., Ma, M., Ma, G., and Ma, J.: Population dynamic study of prey-predator interactions with weak allee effect, fear effect, and delay. Journal of Mathematics, (2022). <https://doi.org/10.1155/2022/8095080>
- [LX] Li, Y., Xiao, D.: Bifurcations of a predator-prey system of Holling and Leslie types. Chaos Solit. 34, 606-620, (2007). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.068>
- [P] Perko, P.: Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition, Springer, New York, (2001).

BIBLIOGRAFÍA

85

- [PB] Preisser, E. L., Bolnick, D. I.: The many faces of fear, comparing the pathways and impacts of nonconsumptive predator effects on prey populations. *PLoS One*, vol. 3, no. 6, (2008). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002465>
- [PG] Priyadarshi, A., Gakkhar, S.: Dynamics of Leslie-Gower type generalist predator in a tri-trophic food web system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18(11), 3202-3218, (2013). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.03.001>
- [PP] Panday, P., Pal, N., Samanta, S., Chattopadhyay, J. Stability and bifurcation analysis of a three-species food chain model with fear. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(01), 1850009, (2018). <https://doi.org/10.1142/S0218127418500098>
- [RA] Roy, J., Alam, S.: Fear factor in a prey-predator system in deterministic and stochastic environment. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 541, 123359,(2020). <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123359>
- [RB1] Roy, J., Barman, D., Alam, S.: Role of fear in a predator-prey system with ratio-dependent functional response in deterministic and stochastic environment. *Biosystems*, 197,104176, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104176>
- [R] Robinson, C.: *Dynamical Systems Stability Dynamics, and Chaos*, Second Edition, CRC Press, Florida, (1999).
- [SSa] Saha, S., Samanta, G. P.: Analysis of a tritrophic food chain model with fear effecting cooperating prey refuge. *Filomat*, 35(15), 4971-4999 (2021).
- [Sa] Sandri, M.: Numerical calculation of Lyapunov exponents. *Mathematica J.* 6: 78-84, (1996)
- [S] Smale, S.: *Diffeomorphisms with many periodic points*, *Differential and combinatorial Topology*, Princeton University Press, 63-80, (1965). <https://doi.org/10.1515/9781400874842-006>
- [Ss] Sasmal, S. K., Population dynamics with multiple Allee effects induced by fear factors. A mathematical study on prey-predator interactions. *Applied Mathematical Modelling*, 64,1-14 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.07.021>
- [ST1] Sasmal, S. K., Takeuchi, Y.: Dynamics of a predator-prey system with fear and group defense. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 481(1), 123471, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123471>
- [ST2] Sasmal, S. K., Takeuchi, Y.: Modeling the Allee effects induced by cost of predation fear and its carry-over effects. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 505(2), 125485, (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125485>

BIBLIOGRAFÍA

86

- [Sk] Skokos, C.: The Lyapunov characteristic exponents and their computation. In Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets. Springer, Berlin, Heidelberg, 63-135, (2010). https://doi.org/10.1007/978-3-642-04458-8_2
- [TW] Tsoularis, A., Wallace, J.: Analysis of logistic growth models. Mathematical biosciences, 179(1), 21-55, (2002). [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00096-2](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2)
- [WC] Wang, J., Cai, Y., Fu, S., Wang, W.: The effect of the fear factor on the dynamics of a predator-prey model incorporating the prey refuge. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29(8), 083109 (2019).
- [WZ] Wang, X., Zanette, L., Zou, X.: Modelling the fear effect in predator-prey interactions. Journal of mathematical biology, 73(5), 1179-1204, (2016). <https://doi.org/10.1007/s00285-016-0989-1>
- [W] Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. 2nd ed. Texts in Applied Mathematics Vol. 2 Springer-Verlag, New York, (2003).

Apéndice A

A.1. Términos de la proposición 2.4

Usando el software Mathematica, los cálculos directos nos permiten calcular la traza y el determinante de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_0(s_{20}, \beta_{20}))$, cuya expresión son dados por

$$\begin{aligned}\tau(x, y, z, s_2, \beta_2) &= -\frac{2s_2z}{\beta_2 + \alpha_2y} + \frac{\alpha_2yg(\beta_1)^2K_2^2K_1}{(\beta_1 + \alpha_1x)C_3} + \frac{\alpha_2g(\beta_1)^2K_2^2(-\beta_1 - \alpha_1x + y)K_1}{(\beta_1 + \alpha_1x)C_3} \\ &\quad + x(h'(x) - yf'(x)) - yf(x) - yzg'(y) - zg(y) + h(x) + s_2, \\ \delta(x, y, z, s_2, \beta_2) &= \frac{s_2((\beta_2 + \alpha_2y)(\beta_2 + \alpha_2y - 2z)K_9 + \alpha_2yz^2g(y)(\beta_1 + \alpha_1x)^2L_4C_3)}{(\beta_2 + \alpha_2y)^2(\beta_1 + \alpha_1x)^2C_3},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}K_1 &= \beta_1f'(x_0) - h'(x_0), \quad K_2 = \beta_1 + \alpha_1x_0, \quad K_3 = x_0(h'(x_0) - \beta_1f'(x_0)) + \alpha_2\beta_1g(\beta_1), \\ K_9 &= (\beta_1 + \alpha_1x)(xyf'(x) + yf(x) - xh'(x) - h(x)) (yzg(\beta_1)g'(y)(\beta_1 + \alpha_1x)(K_2K_1 + \alpha_1h(x_0)) \\ &\quad + zg(y)(\beta_1 + \alpha_1x)C_3 + \alpha_1x_0yzg'(\beta_1)g'(y)(\beta_1 + \alpha_1x)K_2K_1 \\ &\quad - \alpha_2g(\beta_1)^2K_2^2(-\beta_1 - \alpha_1x + 2y)K_1) - \alpha_1\alpha_2xy^2f(x)g(\beta_1)^2K_2^2K_1, \\ L_4 &= x(h'(x) - yf'(x)) - yf(x) + h(x).\end{aligned}$$

A.2. Términos de la proposición 2.5

$$G_{200} = \frac{K_1C_1}{2\alpha_2\beta_1g(\beta_1)C_3^2C_2}, \quad G_{011} = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \frac{(g(\beta_1)\Psi_{01} + x_0\alpha_1(x_0\alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1)D_1}{\alpha_1(x_0\alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1x_0^2 - D_2},$$

donde

$$\Psi = -\frac{\Psi_{07}^2}{\alpha_2\beta_1g(\beta_1)(g(\beta_1)\Psi_{01} + x_0\alpha_1(x_0\alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1)K_1\Psi_{06}} - \frac{x_0\Psi_{08}^2}{\alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2g(\beta_1)^3h(x_0)\Psi_{06} + 1}.$$

A.2 Términos de la proposición 2.5

$$\begin{aligned}
 \Psi_{01} &= \alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1, \quad \Psi_{04} = -\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0), \\
 \Psi_{02} &= (x_0 \alpha_1 + \beta_1) (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0), \\
 \Psi_{03} &= \alpha_1^2 h(x_0)^2 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0)) h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2, \\
 \Psi_{05} &= \alpha_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g'(\beta_1)^2 K_1^3 x_0^4 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) g'(\beta_1) \Psi_{01} (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 x_0^3 + g(\beta_1)^2 K_1 \Psi_{03} x_0^2 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^3 h(x_0) \Psi_{02} x_0 - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^4 h(x_0), \\
 \Psi_{06} &= -\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1 x_0^2 + g(\beta_1) ((x_0 \alpha_1 + \beta_1) \Psi_{04} - \alpha_1 h(x_0)) x_0 + \alpha_2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2, \\
 \Psi_{07} &= \Psi_{09} - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g'(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 \\
 &\quad - 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 + \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 + \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 \\
 &\quad - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 - \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 - 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 \\
 &\quad + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 - \sqrt{K_1} \sqrt{\Psi_{05}} - \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) - x_0 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) + \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0), \\
 \Psi_{08} &= \Psi_{09} - 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 + \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 \\
 &\quad + \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 - \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 - 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h(x_0) - \sqrt{K_1} \sqrt{\Psi_{05}}, \\
 \Psi_{09} &= \alpha_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^3 + \alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^3 - 2\alpha_1^2 \beta_1 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^3 + \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0^2 \\
 &\quad + \alpha_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 + \alpha_1 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 + \alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \alpha_1^2 x_0^4 g'(\beta_1)^2 K_2^2 K_1^3 + 2\alpha_1 x_0^3 g(\beta_1) g'(\beta_1) B_6^2 (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0)) + x_0^2 g(\beta_1)^2 K_1 (2\alpha_1 h(x_0) K_2 \\
 &\quad (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0)) + K_2^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 + \alpha_1^2 h(x_0)^2) - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 x_0 g(\beta_1)^3 h(x_0) (K_2 \\
 &\quad (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0)) - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 g(\beta_1)^4 h(x_0) K_2, \\
 B_3 &= -\alpha_1 x_0^2 g'(\beta_1) B_9 + x_0 g(\beta_1) (K_2 (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0)) + \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 K_2, \\
 B_4 &= -\alpha_1 \beta_1 x_0^2 g'(\beta_1)^2 K_2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 - x_0 (\beta_1 g'(\beta_1) + g(\beta_1)) B_6^2 \\
 &\quad (\alpha_1 x_0 g'(\beta_1) + g(\beta_1)) + x_0 g(\beta_1) K_1 (K_2 K_1 (\alpha_1 \beta_1 x_0 g''(\beta_1) + g'(\beta_1) (\alpha_1 x_0 - \beta_1)) \\
 &\quad - \alpha_1 \beta_1 h(x_0) g'(\beta_1)) + g(\beta_1)^2 (x_0 B_6^2 - \alpha_1 x_0 h(x_0) h'(x_0) - \alpha_1 h(x_0)^2), \\
 B_5 &= \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) (\beta_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 + g(\beta_1) (x_0 h'(x_0) B_6 \\
 &\quad + h(x_0) (-x_0 K_2 (\beta_1 f''(x_0) - h''(x_0)) - \beta_1 f'(x_0) (\beta_1 + 3\alpha_1 x_0) + h'(x_0) (\beta_1 + 3\alpha_1 x_0))), \\
 B_6 &= K_2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\alpha_1 g(\beta_1)^2 h(x_0) (h(x_0) (h''(x_0) - \beta_1 f''(x_0)) - 2\beta_1 f'(x_0) h'(x_0) + 2\beta_1^2 f'(x_0)^2) C_4}{(h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2} - \frac{C_5 C_6}{K_2}, \\
 C_2 &= \frac{K_1 (C_5)}{\alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) C_3} - \frac{\alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) C_4}{x_0 C_3^2} + 1, \\
 C_3 &= \alpha_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0)), \quad C_4 = -\alpha_1 x_0^2 g'(\beta_1) K_2 K_1 + x_0 g(\beta_1) \\
 &\quad (K_2 (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0)) + \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 K_2, \\
 C_5 &= \alpha_1 x_0^2 g'(\beta_1) K_2 K_1 - x_0 g(\beta_1) (K_2 (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0)) - \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 K_2, \\
 C_6 &= 2\alpha_1 \beta_1 x_0 g'(\beta_1)^2 K_2^2 K_1 - \beta_1 g(\beta_1) K_2 (K_2 K_1 (\alpha_1 x_0 g''(\beta_1) - 2g'(\beta_1)) - 2\alpha_1 h(x_0) g'(\beta_1)) \\
 &\quad - \frac{2\alpha_1 g(\beta_1)^2 h(x_0) (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0))}{K_1}.
 \end{aligned}$$

A.2 Términos de la proposición 2.5

$$D_1 = \frac{x_0 D_4}{(x_0 \alpha_1 + \beta_1) D_5} + \frac{2\beta_1 (D_6 + D_3)}{\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1} \frac{x_0^3 g(\beta_1) (D_6 + D_3)^2 (2\beta_1^2 f'(x_0)^2 - 2\beta_1 h'(x_0) f'(x_0) + h(x_0) (h''(x_0) - \beta_1 f''(x_0)))}{K_1 D_5},$$

$$D_2 = g(\beta_1) x_0 \left((x_0 \alpha_1 + \beta_1) (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0) \right) + \alpha_2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2,$$

$$D_3 = x_0 \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1,$$

$$\begin{aligned} D_4 = & -2\alpha_1^2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^3 g'(\beta_1)^3 K_1^3 x_0^4 \\ & + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g(\beta_1) g'(\beta_1)^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 \left(\alpha_1 (x_0 \alpha_1 - 2\beta_1) h(x_0) \right. \\ & \left. + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) (2\alpha_1 \alpha_2 g'(\beta_1) \beta_1^2 + (x_0 \alpha_1 - 2\beta_1) f'(x_0) \beta_1 + (2\beta_1 - x_0 \alpha_1) h'(x_0)) \right) x_0^3 \\ & - 2(x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2 g'(\beta_1) K_1 \left((\alpha_1^2 \alpha_2^2 g'(\beta_1)^2 \beta_1^3 + (\beta_1 - 2x_0 \alpha_1) f'(x_0)^2 \beta_1^2 \right. \\ & \left. + 4\alpha_1 \alpha_2 g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1^2 + f'(x_0) (-4\alpha_1 \alpha_2 g'(\beta_1) \beta_1^2 + x_0 \alpha_1^2 \alpha_2 g''(\beta_1) \beta_1^2 \right. \\ & \left. + (4x_0 \alpha_1 - 2\beta_1) h'(x_0) \beta_1 + h'(x_0) ((\beta_1 - 2x_0 \alpha_1) h'(x_0) - x_0 \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g''(\beta_1))) (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 \right. \\ & \left. - 2\alpha_1 h(x_0) (\alpha_1 \alpha_2 g'(\beta_1) \beta_1^2 + (2x_0 \alpha_1 - \beta_1) f'(x_0) \beta_1 + (\beta_1 - 2x_0 \alpha_1) h'(x_0)) (x_0 \alpha_1 + \beta_1) \right. \\ & \left. + \alpha_1^2 (\beta_1 - 2x_0 \alpha_1) h(x_0)^2 \right) x_0^2 + g(\beta_1)^3 \left(K_1 \left(-4\alpha_1 \alpha_2^2 g'(\beta_1)^2 \beta_1^3 + 2x_0 f'(x_0)^2 \beta_1^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_2 g'(\beta_1) (x_0 \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g''(\beta_1) - 4h'(x_0)) \beta_1^2 + 2x_0 h'(x_0) (\alpha_1 \alpha_2 g''(\beta_1) \beta_1^2 + h'(x_0)) \right. \right. \\ & \left. \left. + f'(x_0) (4\alpha_2 \beta_1^3 g'(\beta_1) - 2x_0 \beta_1 (\alpha_1 \alpha_2 g''(\beta_1) \beta_1^2 + 2h'(x_0))) \right) (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^3 \right. \\ & \left. - 2\alpha_1 h(x_0) K_1 \left(-2\alpha_2 g'(\beta_1) \beta_1^2 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g''(\beta_1) \beta_1^2 - 3x_0 f'(x_0) \beta_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + 3x_0 h'(x_0) \right) (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 + 6x_0 \alpha_1^2 h(x_0)^2 K_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) + 2x_0 \alpha_1^3 h(x_0)^3 \right) x_0 \\ & + \alpha_2^2 \beta_1^3 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^3 g(\beta_1)^4 K_1 (x_0 \alpha_1 g''(\beta_1) - 2g'(\beta_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5 = & \alpha_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g'(\beta_1)^2 K_1^3 x_0^4 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) g'(\beta_1) \left(\alpha_1 h(x_0) \right. \\ & \left. + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1 \right) (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 x_0^3 \\ & + g(\beta_1)^2 K_1 \left(\alpha_1^2 h(x_0)^2 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1)) \right. \\ & \left. - h'(x_0) h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 \right) x_0^2 \\ & - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^3 h(x_0) \left((x_0 \alpha_1 + \beta_1) (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) \right. \\ & \left. - 2\alpha_1 h(x_0) \right) x_0 - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^4 h(x_0), \end{aligned}$$

$$D_6 = g(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1).$$

A.2 Términos de la proposición 2.5

$$\begin{aligned}
 F_1 &= g(\beta_1)(\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1)K_1) + x_0 \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)g'(\beta_1)K_1, \\
 F_2 &= \alpha_1^2 h(x_0)^2 + 2\alpha_1(x_0 \alpha_1 + \beta_1)(\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0))h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2, \\
 F_3 &= F_5 + \sqrt{K_1} \sqrt{F_6} - \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) - x_0 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) + \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0), \\
 F_4 &= \alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^3 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^3 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^2 + x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^2 \\
 &\quad - \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1^2 - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1^2 - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1 - x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1 - \sqrt{K_1} \sqrt{F_6}, \\
 F_5 &= \alpha_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^3 + \alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^3 - 2\alpha_1^2 \beta_1 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^3 + \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0^2 \\
 &\quad + \alpha_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 + \alpha_1 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 + \alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0^2 \\
 &\quad - 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 \\
 &\quad + \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 + \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 \\
 &\quad - \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 - 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0, \\
 F_6 &= \alpha_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g'(\beta_1)^2 K_1^3 x_0^4 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) g'(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) \\
 &\quad (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 x_0^3 + g(\beta_1)^2 K_1 F_2 x_0^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^3 h(x_0) (x_0 \alpha_1 + \beta_1) \\
 &\quad (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0) x_0 - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^4 h(x_0), \\
 F_7 &= x_0 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) + \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_4 &= \alpha_2 \beta_1 + \beta_2, \quad K_5 = \beta_1 s_2 (\alpha_1 x_0 K_4 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2 K_1 (K_4 + \alpha_1 \alpha_2 x_0) + \alpha_1 h(x_0) K_4)), \\
 K_6 &= \alpha_1 x_0 K_2 (\beta_1 K_4 g'(\beta_1) (\beta_1 x_0 f'(x_0) + s_2) + \beta_1 s_2 x_0 f'(x_0) - x_0 h'(x_0) (\beta_1 K_4 g'(\beta_1) + s_2)) \\
 &\quad + \beta_1 g(\beta_1) (x_0 K_4 (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0)) + s_2 K_2 (K_4 + \alpha_1 \alpha_2 x_0)), \\
 K_7 &= \alpha_1 x_0 (\beta_1 x_0 f'(x_0) + \beta_1 K_4 g'(\beta_1) - x_0 h'(x_0) + s_2) + \beta_1 g(\beta_1) K_4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \left(x_0^2 g(\beta_1)^2 K_1 (M_1) + \alpha_1^2 x_0^4 g'(\beta_1)^2 K_2^2 K_1^3 + 2\alpha_1 x_0^3 g(\beta_1) g'(\beta_1) K_2 \right. \\
 &\quad \left. (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0)) - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 x_0 g(\beta_1)^3 h(x_0) (K_2 (-2\beta_1 f'(x_0) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0)) - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 g(\beta_1)^4 h(x_0) K_2 \right), \\
 M_1 &= 2\alpha_1 h(x_0) K_2 (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0)) + K_2^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 + \alpha_1^2 h(x_0)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1 g(\beta_1)^2 \left(-\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1 x_0^2 + g(\beta_1) ((x_0 \alpha_1 + \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0)) x_0 + \alpha_2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2 \right) \\
 &\quad \left(-\frac{h(x_0) N_1 N_{20}}{N_9} - \frac{(h(x_0) + x_0 \beta_1 f'(x_0)) K_1 N_{10} - h(x_0) N_{11} (2\beta_1 f'(x_0) - 2h'(x_0) + x_0 \beta_1 f''(x_0) - x_0 h''(x_0))}{\alpha_1 \alpha_2^3 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 N_{17}} \right),
 \end{aligned}$$

A.2 Términos de la proposición 2.5

$$\begin{aligned}
 N_8 = & \alpha_1^3 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^4 + \alpha_1^3 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) g''(\beta_1) x_0^4 - 2\alpha_1^3 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^4 \\
 & - 2\alpha_1^2 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1)^2 x_0^3 - 2\alpha_1^2 \beta_1 g'(\beta_1)^2 h'(x_0)^2 x_0^3 + 4\alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0^3 \\
 & + \alpha_1^2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^3 + \alpha_1^2 \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^3 + \alpha_1^2 \beta_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^3 \\
 & + \alpha_1^2 \beta_1^4 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) g''(\beta_1) x_0^3 - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) g''(\beta_1) x_0^3 - 2\alpha_1^2 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^3 \\
 & + \alpha_1^3 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^3 - 2\alpha_1^2 \beta_1^3 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^3 - 2\alpha_1 \beta_1^4 f'(x_0)^2 g'(\beta_1)^2 x_0^2 \\
 & + 2\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1)^2 x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1^2 g'(\beta_1)^2 h'(x_0)^2 x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 \\
 & - 2\alpha_1 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2 - 2\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0^2 + 4\alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0) g'(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0^2 \\
 & + 4\alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + \alpha_1 \beta_1^4 g(\beta_1) f'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^2 + \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) h'(x_0)^2 g''(\beta_1) x_0^2 \\
 & - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 + \alpha_1^2 \beta_1^2 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^4 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) g''(\beta_1) x_0^2 \\
 & + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 - \alpha_1^2 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 - 2\alpha_1 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 \\
 & + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) g''(\beta_1) x_0^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^4 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1)^2 x_0 - 2\beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 \\
 & - \alpha_1 g'(\beta_1) \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} x_0 - 2\beta_1^4 g(\beta_1) f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 \\
 & - 2\alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) g'(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 \\
 & + 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 + 4\beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 - \alpha_1 \beta_1 \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} g''(\beta_1) x_0 \\
 & - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^4 g(\beta_1)^2 f'(x_0) g''(\beta_1) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 h'(x_0) g''(\beta_1) x_0 + \beta_1 \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} g'(\beta_1) \\
 & + 2\alpha_2 \beta_1^4 g(\beta_1)^2 f'(x_0) g'(\beta_1) - 2\alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 g'(\beta_1) h'(x_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_9 = & \alpha_2 K_2 (\alpha_1 x_0 g'(\beta_1) K_2 K_1 + g(\beta_1) (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0))) \left(-\sqrt{K_1} \sqrt{N_{12}} - N_{13} - N_{14} + \alpha_1^2 \beta_1^2 x_0^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) \right) \\
 & + \alpha_1 \beta_1^3 x_0^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) - 2\alpha_1 \beta_1 x_0^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) - 2\beta_1^2 x_0 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) + \alpha_1 \beta_1 x_0 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) \\
 & + \alpha_1 \beta_1^2 x_0^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 + \beta_1^3 x_0 g(\beta_1) f'(x_0)^2 + \alpha_1^2 x_0^3 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 + \alpha_1 \beta_1 x_0^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 \\
 & + \alpha_1 x_0^2 g(\beta_1) h'(x_0)^2 - \alpha_1 x_0 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) + \beta_1 x_0 g(\beta_1) h'(x_0)^2 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h(x_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{10} = & \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 h(x_0) \left(-\alpha_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^3 - \alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^3 + 2\alpha_1^2 \beta_1 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^3 \right. \\
 & - \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2 \\
 & + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0^2 + 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 \\
 & + 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 - \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 - \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) x_0 \\
 & - \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 \\
 & + \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 + 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 + \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} \\
 & + \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) - \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \left. \right) g(\beta_1)^2 + \alpha_2 \beta_1 (g(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) \\
 & + x_0 \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1) K_1 N_{17} g(\beta_1) + \left(-\alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^3 - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^3 \right. \\
 & - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^2 - x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^2 + \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1^2 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1^2 \\
 & + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1 + x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1 + \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} \left. \right) \left(-\alpha_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^3 \right. \\
 & - \alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^3 + 2\alpha_1^2 \beta_1 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^3 - \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 \\
 & - \alpha_1 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0^2 + 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 \\
 & - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 - \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 - \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 \\
 & + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) x_0 - \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 \\
 & + \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 + 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 + \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} \\
 & \left. + \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) - \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \right),
 \end{aligned}$$

A.2 Términos de la proposición 2.5

$$\begin{aligned}
 N_{11} = & \left(-\alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^3 - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^3 - x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) \beta_1^2 - x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) \beta_1^2 \right. \\
 & + \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1^2 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1^2 + x_0 \alpha_1 \alpha_2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \beta_1 + x_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) \beta_1 \\
 & + \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} \left(-\alpha_1^2 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^3 - \alpha_1^2 \beta_1^2 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^3 + 2\alpha_1^2 \beta_1 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^3 - \alpha_1 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0^2 \right. \\
 & - \alpha_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 \beta_1 g'(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0^2 - \alpha_1 \beta_1^3 f'(x_0)^2 g'(\beta_1) x_0^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0^2 \\
 & + 2\alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 + 2\alpha_1 \beta_1^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0^2 - \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0)^2 x_0 \\
 & - \beta_1 g(\beta_1) h'(x_0)^2 x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 f'(x_0) x_0 - \alpha_1 \beta_1 g(\beta_1) h(x_0) f'(x_0) x_0 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1) x_0 \\
 & - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^2 h'(x_0) x_0 + \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) h'(x_0) x_0 + 2\beta_1^2 g(\beta_1) f'(x_0) h'(x_0) x_0 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1) g'(\beta_1) h'(x_0) x_0 \\
 & \left. + \sqrt{K_1} \sqrt{N_{22}} + \alpha_2 \beta_1^3 g(\beta_1)^2 f'(x_0) - \alpha_2 \beta_1^2 g(\beta_1)^2 h'(x_0) \right) + \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) (g(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) \\
 & + x_0 \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1) K_1 N_{17},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{12} = & x_0^2 g(\beta_1)^2 K_1 (2\alpha_1 h(x_0) K_2 (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0)) + K_2^2 (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 \\
 & + \alpha_1^2 h(x_0)^2) + \alpha_1^2 x_0^4 g'(\beta_1)^2 K_2^2 K_1^3 + 2\alpha_1 x_0^3 g(\beta_1) g'(\beta_1) B_6^2 (K_2 K_1 + \alpha_1 h(x_0)) \\
 & - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 x_0 g(\beta_1)^3 h(x_0) (K_2 (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0)) - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 g(\beta_1)^4 h(x_0) K_2, \\
 N_{13} = & 2\alpha_1^2 \beta_1 x_0^3 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0); \quad N_{14} = 2\alpha_1 \beta_1^2 x_0^2 f'(x_0) g'(\beta_1) h'(x_0), \\
 N_{15} = & \alpha_1^2 \alpha_2 \beta_1^2 x_0^2 g(\beta_1) f'(x_0) g'(\beta_1), \quad N_{16} = K_1 N_{18}, \\
 N_{17} = & -\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1 x_0^2 + g(\beta_1) ((x_0 \alpha_1 + \beta_1) \\
 & (-\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) - \alpha_1 h(x_0)) x_0 + \alpha_2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2, \\
 N_{18} = & \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1 x_0^2 + \alpha_1 g(\beta_1) h(x_0) x_0 - (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) (-\beta_1 f'(x_0) \\
 & + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + h'(x_0)) x_0 - \alpha_2 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{19} = & \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) h(x_0) \left(\frac{N_3}{N_{16}} + 1 \right) + K_1 \left((x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 \right. \\
 & + \frac{2 \left(\frac{x_0 \alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1 h(x_0)}{\alpha_2 \beta_1 f'(x_0) - \alpha_2 h'(x_0)} \right) \left(\frac{N_5 N_6}{N_{16}} - \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1) (N_{23}) \right)}{\beta_1 g(\beta_1)^2 K_1} \\
 & \left. - \frac{(x_0 \alpha_1 + \beta_1) (2\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) N_4}{(h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 N_{18}} \right),
 \end{aligned}$$

$$N_{20} = N_{19} g(\beta_1)^2 + \frac{x_0 \alpha_1 \beta_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g'(\beta_1)^2 N_2}{N_{18}} + \frac{(x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) ((x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1 N_8 - \alpha_1 \beta_1 h(x_0) g'(\beta_1) N_7)}{K_1 N_{17}},$$

$$N_{21} = -\sqrt{K_1} \sqrt{N_{12}} - N_{13} - N_{14} - N_{15},$$

$$\begin{aligned}
 N_{22} = & \alpha_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 g'(\beta_1)^2 K_1^3 x_0^4 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1) g'(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) (h'(x_0) - \beta_1 f'(x_0))^2 x_0^3 \\
 & + g(\beta_1)^2 K_1 \left(\alpha_1^2 h(x_0)^2 + 2\alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) (\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) - h'(x_0)) h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1)^2 (h'(x_0) \right. \\
 & \left. - \beta_1 f'(x_0))^2 \right) x_0^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g(\beta_1)^3 h(x_0) ((x_0 \alpha_1 + \beta_1) (-2\beta_1 f'(x_0) + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 g'(\beta_1) + 2h'(x_0)) - 2\alpha_1 h(x_0)) x_0 \\
 & - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1^2 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g(\beta_1)^4 h(x_0), \\
 N_{23} = & g(\beta_1) (\alpha_1 h(x_0) + (x_0 \alpha_1 + \beta_1) K_1) + x_0 \alpha_1 (x_0 \alpha_1 + \beta_1) g'(\beta_1) K_1.
 \end{aligned}$$

Apéndice B

B.1. Términos de la sección 3.1.1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= b_1 c_3 + c_1 c_2 y_0 + c_1 c_3 x_0, \quad \mathbf{K}_2 = b_1 + c_1 x_0, \quad \mathbf{K}_3 = T_1(z_0) - z_0 T_1'(z_0), \quad \mathbf{K}_4 = h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{J}_5, \\
 \mathbf{K}_5 &= z_0 T_1(z_0) h'(y_0) - c_3 x_0 f(x_0) T_1'(z_0), \quad \mathbf{K}_6 = h(y_0) \left(T_1(z_0) (b_1^2 c_3 + 2b_1 c_3 (c_1 x_0 - y_0) \right. \\
 &\quad \left. + c_1 (c_1 c_3 x_0^2 - y_0 (c_2 y_0 + 2c_3 x_0 + z_0))) + y_0 z_0 T_1'(z_0) \mathbf{K}_1 \right) - c_3 y_0 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{K}_3 \mathbf{J}_5, \\
 \mathbf{K}_7 &= h(y_0) \left(T_1(z_0) (b_1^2 c_3 k_1 + b_1 c_3 (2c_1 k_1 x_0 - 2k_1 y_0 - 1) - c_1 y_0 (c_2 k_1 y_0 \right. \\
 &\quad \left. + c_2 + k_1 z_0) + c_1 c_3 x_0 (c_1 k_1 x_0 - 2k_1 y_0 - 1)) + z_0 \mathbf{J}_3 T_1'(z_0) \mathbf{K}_1 \right) \\
 &\quad + c_3 \mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) (z_0 T_1'(z_0) - T_1(z_0)) \mathbf{J}_5, \\
 \mathbf{K}_8 &= y_0 z_0 \mathbf{J}_3 T_1'(z_0) (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{J}_5) + h(y_0) (2k_1 y_0 + 1) T_1(z_0) (c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5 - c_1 y_0 z_0), \\
 \mathbf{K}_9 &= x_0 g(x_0) \left(c_3 s_2 \left(\frac{z_0 T_1'(z_0)}{T_1(z_0)} - 1 \right) - \frac{c_1 k_1 y_0^2 z_0^2 h'(y_0)}{\mathbf{J}_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5} \right) + s_2 y_0 \left(\frac{c_3 x_0 f(x_0) T_1'(z_0)}{T_1(z_0)} - z_0 h'(y_0) \right), \\
 \mathbf{L}_1 &= h(y_0) T_1(z_0) (c_1 y_0 z_0 - c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5) - y_0 z_0 T_1'(z_0) \mathbf{K}_4, \\
 \mathbf{L}_2 &= h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{J}_5, \quad \mathbf{L}_3 = c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{J}_5 - c_1 y_0 z_0.
 \end{aligned}$$

B.2. Vectores propios normalizados

De acuerdo con las fórmulas de Guckenheimer-Kuznetsov [GK] calculamos vectores propios $\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_l \in \mathbb{R}^3, j, l \in \{0, 1\}$ tales que

$$\begin{aligned}
 A_0 \mathbf{q} &= 0, \quad A_0 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0, \quad A_0^T \mathbf{p}_1 = 0, \quad A_0^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1, \\
 \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q}_0 &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1 = 1, \quad \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Entonces se obtienen las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_0 &= \left(\frac{\mathbf{K}_2 (h(y_0) (c_2 \mathbf{q}_{12} + z_0) + z_0 h'(y_0) \mathbf{q}_{12})}{(z_0 h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 z_0 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \mathbf{q}_{11}}, \frac{h(y_0) (c_1 y_0 z_0 - c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12})}{(z_0 h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 z_0 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \mathbf{q}_{11}}, \frac{1}{\mathbf{q}_{11}} \right), \\
 \mathbf{q}_1 &= \left(0, -\frac{\mathbf{q}_{14} h(y_0) \mathbf{q}_{17}}{c_1 x_0 \mathbf{K}_2 z_0^2 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{q}_{16} (\mathbf{q}_{19})}, \frac{\frac{\mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{17}}{c_1 x_0 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{q}_{16}} - \frac{y_0 (c_1 y_0 z_0 - c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12})}{\mathbf{q}_{20} z_0 h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 h'(y_0)}}{\mathbf{q}_{19}} \right), \\
 \mathbf{p}_0 &= \left(\frac{c_1 x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{p}_{15}}{\mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{p}_{13}}, -\frac{\mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{14} \mathbf{q}_{18} (x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) \mathbf{q}_{18} + \mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16})}{c_1 y_0^2 h(y_0) \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{13}}, -\frac{\mathbf{q}_{12}^2 \mathbf{q}_{14} \mathbf{q}_{18} \mathbf{p}_{12}}{c_1 y_0^2 z_0 \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{13}} \right), \\
 \mathbf{p}_1 &= \left(-\frac{y_0 z_0 (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12})}{\mathbf{K}_2 \mathbf{p}_{17}}, \frac{c_3 x_0 z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12})}{h(y_0) (c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 z_0) \mathbf{p}_{17}}, 1 \right),
 \end{aligned}$$

B.2 Vectores propios normalizados

95

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{11} &= \frac{-b_1 - c_1 x_0 + y_0}{\mathbf{p}_{17}} + \frac{\mathbf{K}_2(c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 z_0)(h'(y_0) \mathbf{q}_{12} + h(y_0))}{c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0)(h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12})}, \\
\mathbf{q}_{12} &= \mathbf{K}_2 - y_0, \quad \mathbf{q}_{13} = \mathbf{K}_2, \quad \mathbf{q}_{14} = c_3 b_1^2 + c_3(2c_1 x_0 - y_0)b_1 + c_1(c_1 c_3 x_0^2 - y_0(c_3 x_0 + z_0)), \\
\mathbf{q}_{15} &= b_1 c_2 + c_1 x_0 c_2 - y_0 c_2 + z_0; \quad \mathbf{q}_{16} = \mathbf{q}_{15} h(y_0) + \mathbf{q}_{12} z_0 h'(y_0), \\
\mathbf{q}_{17} &= \mathbf{q}_{12} y_0 \mathbf{q}_{16} \mathbf{K}_2^2 + x_0 \mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{14} g(x_0) \mathbf{K}_2; \quad \mathbf{q}_{18} = \mathbf{q}_{20} h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} h'(y_0), \\
\mathbf{q}_{19} &= -\frac{y_0(c_1 y_0 z_0 - c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12})}{\mathbf{q}_{20} z_0 h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 h'(y_0)} + \frac{\mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{17}}{c_1 x_0 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{q}_{16}} \\
&\quad - \frac{c_3 \mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_{14} \mathbf{q}_{17}}{c_1 \mathbf{K}_2 z_0 (c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 z_0) \mathbf{q}_{16} (c_3 x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) + y_0(c_2 \mathbf{q}_{12} + z_0)h(y_0) + \mathbf{q}_{12} y_0 z_0 h'(y_0))}, \\
\mathbf{q}_{20} &= b_1 c_3 + c_1 x_0 c_3 + c_1 c_2 y_0, \quad \mathbf{p}_{11} = \frac{\mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{p}_{12}}{c_1 x_0 z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{q}_{16}} - \frac{y_0(c_1 y_0 z_0 - c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12})}{\mathbf{q}_{20} z_0 h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 h'(y_0)}, \\
\mathbf{p}_{12} &= x_0 \mathbf{q}_{14} g(x_0) + \mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{16}, \\
\mathbf{p}_{13} &= \mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16} + x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) (\mathbf{p}_{18} h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} \mathbf{b}_{11} h'(y_0)), \\
\mathbf{p}_{14} &= c_3 x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) + y_0 \mathbf{q}_{15} h(y_0) + \mathbf{q}_{12} y_0 z_0 h'(y_0), \\
\mathbf{p}_{15} &= -c_3 \mathbf{K}_2 z_0 \mathbf{p}_{11} \mathbf{q}_{12} + \frac{c_3^2 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12}^3 \mathbf{p}_{12}}{c_1 \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{14}} + \frac{c_2 \mathbf{q}_{12}^2 y_0 \mathbf{q}_{14} h(y_0) \mathbf{p}_{12}}{c_1 x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{14}} + \frac{\mathbf{K}_2 z_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{p}_{11}}{c_1 x_0 g(x_0)}, \\
\mathbf{p}_{16} &= h(y_0) + \mathbf{q}_{12} h'(y_0), \quad \mathbf{p}_{17} = y_0 h(y_0)(c_2 \mathbf{q}_{12} + z_0) + c_3 x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} + y_0 z_0 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}, \\
\mathbf{p}_{18} &= c_3^2 b_1^3 + c_3^2(3c_1 x_0 - y_0)b_1^2 + c_1 c_3(3c_1 c_3 x_0^2 - 2y_0(c_3 x_0 + z_0))b_1 \\
&\quad + c_1^2(c_1 c_3^2 x_0^3 - y_0(c_3^2 x_0^2 + 2c_3 z_0 x_0 + c_2 y_0 z_0)).
\end{aligned}$$

B.3 Expresiones correspondientes a la sección 3.2.1

B.3. Expresiones correspondientes a la sección 3.2.1

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 &= 6k_2^2 + 1, \\
 \Delta_1 &= 373248k_2^{19} - 1430784k_2^{18} + 1280448k_2^{17} + 998784k_2^{16} - 1297728k_2^{15} + 1591488k_2^{14} \\
 &\quad - 2978640k_2^{13} + 3331872k_2^{12} - 4072512k_2^{11} + 1959760k_2^{10} - 2500172k_2^9 + 492776k_2^8 \\
 &\quad - 599036k_2^7 + 41508k_2^6 - 62115k_2^5 + 5726k_2^4 - 2442k_2^3 + 816k_2^2 + 9k_2 + 30, \\
 \Delta_2 &= 288k_2^{10} - 240k_2^9 - 372k_2^8 - 28k_2^7 + 104k_2^6 - 514k_2^5 - 619k_2^4 - 288k_2^3 - 198k_2^2 - 42k_2 - 15, \\
 \Delta_3 &= 87340032k_2^{28} - 349360128k_2^{27} + 315207936k_2^{26} - 31228416k_2^{25} - 107868672k_2^{24} + 655060608k_2^{23} \\
 &\quad - 1476626112k_2^{22} + 2144988864k_2^{21} - 2730338496k_2^{20} + 3112277760k_2^{19} - 3658504464k_2^{18} \\
 &\quad + 4361950368k_2^{17} - 4246987344k_2^{16} + 3861997320k_2^{15} - 2678060516k_2^{14} + 1989024620k_2^{13} \\
 &\quad - 910131496k_2^{12} + 461563652k_2^{11} - 175484092k_2^{10} + 55472146k_2^9 - 19455729k_2^8 + 3951168k_2^7 \\
 &\quad - 1205532k_2^6 + 198024k_2^5 - 39822k_2^4 + 6516k_2^3 - 756k_2^2 + 90k_2 - 9, \\
 \Delta_4 &= 36k_2^5 - 48k_2^4 + 12k_2^3 - 40k_2^2 + k_2 - 2, \\
 \Delta_5 &= 1296k_2^8 - 2376k_2^7 + 1224k_2^6 - 2568k_2^5 + 408k_2^4 - 370k_2^3 + 58k_2^2 - 8k_2 + 3, \\
 \Delta_6 &= 36k_2^4 - 84k_2^3 + 12k_2^2 - 2k_2 + 1, \\
 \Delta_7 &= 373248k_2^{19} - 1430784k_2^{18} + 1280448k_2^{17} + 998784k_2^{16} - 1297728k_2^{15} + 1591488k_2^{14} - 2978640k_2^{13} \\
 &\quad + 3331872k_2^{12} - 4072512k_2^{11} + 1959760k_2^{10} - 2500172k_2^9 + 492776k_2^8 - 599036k_2^7 + 41508k_2^6 \\
 &\quad - 62115k_2^5 + 5726k_2^4 - 2442k_2^3 + 816k_2^2 + 9k_2 + 30, \\
 \Delta_8 &= 60183678025728k_2^{52} - 519084222971904k_2^{51} + 1694337713307648k_2^{50} - 2320972397936640k_2^{49} \\
 &\quad + 306502562414592k_2^{48} + 2885473491296256k_2^{47} - 4822783648948224k_2^{46} + 8449920232574976k_2^{45} \\
 &\quad - 14724046495825920k_2^{44} + 17557903936253952k_2^{43} - 14858756536320000k_2^{42} + 11391725970745344k_2^{41} \\
 &\quad - 8858768326723584k_2^{40} + 1323953696844288k_2^{39} + 9832042651009536k_2^{38} - 15881016219321600k_2^{37} \\
 &\quad + 21572620971314688k_2^{36} - 28092654426237696k_2^{35} + 35684885273610240k_2^{34} - 46329530288613120k_2^{33} \\
 &\quad + 56180479617706752k_2^{32} - 63684390564328608k_2^{31} + 64808053498422240k_2^{30} - 63567344849140432k_2^{29} \\
 &\quad + 54638647057026816k_2^{28} - 44839151807025776k_2^{27} + 33676410296398912k_2^{26} - 20589135169608280k_2^{25} \\
 &\quad + 13611193123345272k_2^{24} - 3287689894492338k_2^{23} + 4260137016597974k_2^{22} + 2466812822871765k_2^{21} \\
 &\quad + 1482725735938758k_2^{20} + 1788608658466139k_2^{19} + 469799916935640k_2^{18} + 551085868700614k_2^{17} \\
 &\quad + 90713824932563k_2^{16} + 97510354870784k_2^{15} + 7541707566980k_2^{14} + 10491723069810k_2^{13} \\
 &\quad - 357437411514k_2^{12} + 711201928956k_2^{11} - 137029201644k_2^{10} + 35372518776k_2^9 - 12665319777k_2^8 \\
 &\quad + 1779585462k_2^7 - 596990502k_2^6 + 80725329k_2^5 - 17833122k_2^4 + 1930149k_2^3 - 402408k_2^2 + 13122k_2 - 4860.
 \end{aligned}$$

B.4. Regularidad y coeficientes cuadráticos para $k_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_0 &= \frac{c_1^2 x_0^3 y_0^6 z_0^4 \mathbf{b}_{13} g(x_0)^2 \mathbf{D}_{02}^2 \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{07}}{2 \mathbf{K}_2^3 \mathbf{q}_{12}^2 \mathbf{q}_{14}^5 h(y_0) T_0(x_0) (c_3 x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) + y_0 \mathbf{D}_{00})^2}, \\
 \mathbf{a}_0 &= \frac{z_0 \mathbf{D}_{02} \left(\frac{\mathbf{D}_{09}}{c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 z_0} + \frac{\mathbf{D}_{30}}{\mathbf{K}_2} \right)}{2 (\mathbf{q}_{20} z_0 h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} z_0 h'(y_0))^2 \mathbf{D}_{40} \mathbf{D}_{20}^2}, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{-\frac{\mathbf{b}_{00}}{\mathbf{b}_{01}} + \frac{\mathbf{b}_{02}}{\mathbf{b}_{03}} + \frac{\mathbf{b}_{06}}{\mathbf{b}_{09}} + \frac{2c_1^2 x_0^3 y_0 g(x_0)^2 \mathbf{p}_{14} \mathbf{b}_{04} \mathbf{b}_{05}}{\mathbf{b}_{07}}}{2 (\mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16} + x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) \mathbf{b}_{08})^2},
 \end{aligned}$$

B.4 Regularidad y coeficientes cuadráticos para $k_2 = 0$

97

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{00} &= \mathbf{q}_{15}h(y_0) + \mathbf{q}_{12}z_0h'(y_0), \\
\mathbf{D}_{01} &= z_0g(x_0)\left((2c_3(y_0 - c_1x_0)b_1 - b_1^2c_3 + c_1(y_0(2c_3x_0 + c_2y_0 + z_0) - c_1c_3x_0^2))h(y_0)\right. \\
&\quad \left.+ c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}y_0h'(y_0)\right) - 2y_0\mathbf{q}_{14}f(x_0)h(y_0), \\
\mathbf{D}_{02} &= \mathbf{q}_{20}h(y_0) + c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}h'(y_0), \\
\mathbf{D}_{03} &= y_0\mathbf{q}_{14}\left(2\mathbf{K}_2T_0(x_0)\mathbf{D}_{00}(y_0f''(x_0) + z_0g''(x_0)) + f(x_0)\left(\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}y_0h'(y_0)(c_3T_0'(x_0) - 2z_0T_0''(x_0))\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ h(y_0)\left((c_3b_1^2 + 2c_1c_3x_0b_1 + c_1(c_1c_3x_0^2 + y_0(c_2y_0 - z_0)))T_0'(x_0) - 2\mathbf{K}_2y_0\mathbf{q}_{15}T_0''(x_0)\right)\right)\right) - z_0g(x_0) \\
&\quad \times \left(\mathbf{q}_{12}y_0h'(y_0)(4c_3y_0z_0T_0(x_0)c_1^2 + \mathbf{K}_2\mathbf{q}_{14}(c_3T_0'(x_0) + 2z_0T_0''(x_0))) + h(y_0)(4c_1c_3\mathbf{q}_{12}y_0\mathbf{q}_{20}T_0(x_0)\right. \\
&\quad \left.+ \mathbf{q}_{14}\left((c_3b_1^2 + 2c_1c_3x_0b_1 + c_1(c_1c_3x_0^2 + y_0(c_2y_0 - z_0)))T_0'(x_0) + 2\mathbf{K}_2y_0\mathbf{q}_{15}T_0''(x_0)\right)\right), \\
\mathbf{D}_{04} &= -\left(\mathbf{q}_{20}\left((3c_3x_0 - c_2y_0)b_1^2 + (2c_1x_0(3c_3x_0 - c_2y_0) + y_0(-3c_3x_0 + c_2y_0 - z_0))\mathbf{K}_2(c_1x_0(3c_3x_0 - c_2y_0)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ y_0(-3c_3x_0 + c_2y_0 - 5z_0))T_0(x_0) - x_0\mathbf{K}_2y_0\mathbf{q}_{15}T_0'(x_0)\right)h(y_0)^2\right) + \mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12} \\
&\quad \times \left(x_0y_0(c_2c_3b_1^2 + c_3(2c_1c_2x_0 - c_2y_0 + 2z_0)b_1 + c_1(c_1c_2c_3x_0^2 + 2c_3z_0x_0 + c_2y_0(z_0 - c_3x_0)))\right. \\
&\quad \times h'(y_0)T_0'(x_0) + T_0(x_0)\left((c_3(c_2y_0 - 3c_3x_0)b_1^2 + c_3(2c_1x_0(c_2y_0 - 3c_3x_0) + y_0(2c_3x_0 - c_2y_0 + 2z_0))b_1\right. \\
&\quad \left.+ c_1(c_1c_3(c_2y_0 - 3c_3x_0)x_0^2 + y_0(2c_3^2x_0^2 - 2c_2c_3y_0x_0 + 6c_3z_0x_0 + c_2y_0z_0))\right)h'(y_0) + c_3x_0y_0\mathbf{q}_{14}h''(y_0)\left.)\right)h(y_0) \\
&\quad - c_3\mathbf{K}_2^2\mathbf{q}_{12}^2y_0h'(y_0)^2\left((c_3x_0 - z_0)T_0(x_0) - x_0z_0T_0'(x_0)\right), \\
\mathbf{D}_{05} &= x_0y_0\mathbf{q}_{14}h(y_0)\left(h(y_0)(4\mathbf{q}_{14}T_0(x_0) - \mathbf{K}_2y_0\mathbf{q}_{15}T_0'(x_0)) - \mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}y_0z_0h'(y_0)T_0'(x_0)\right) \\
&\quad \times f(x_0)^2 + 2y_0z_0g(x_0)(\mathbf{D}_{04})f(x_0) + z_0^2g(x_0)^2\left(\left(2\mathbf{q}_{20}\left((c_3x_0 + c_2y_0)b_1^2 + (2c_1x_0(c_3x_0 + c_2y_0)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+ y_0(c_3x_0 - c_2y_0 + z_0))\mathbf{K}_2(c_1x_0(c_3x_0 + c_2y_0) + y_0(c_3x_0 + c_2y_0 + z_0))\right)T_0(x_0) + x_0\mathbf{K}_2\mathbf{D}_{60}\mathbf{q}_{15}T_0'(x_0)\right)h(y_0)^2\right. \\
&\quad \left.+ \mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}\left(x_0\left(c_3(2c_2y_0 + z_0)b_1^2 + c_3(2c_1x_0(2c_2y_0 + z_0) + y_0(3z_0 - 2c_2y_0))b_1 + c_1(c_1c_3x_0^2(2c_2y_0 + z_0)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.- y_0(z_0^2 - 3c_3x_0z_0 - 2c_2y_0z_0 + 2c_2c_3x_0y_0)\right)h'(y_0)T_0'(x_0) + 2T_0(x_0)\left((c_3(c_3x_0 + c_2y_0)b_1^2 + c_3(2c_1x_0(c_3x_0 + c_2y_0)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+ y_0(2c_3x_0 - c_2y_0 + 2z_0))b_1 + c_1(c_1c_3(c_3x_0 + c_2y_0)x_0^2 + y_0(2c_3^2x_0^2 + 2c_3(c_2y_0 + z_0)x_0 + c_2y_0z_0))\right)h'(y_0)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ c_3x_0y_0\mathbf{q}_{14}h''(y_0)\right)\right)h(y_0) + 2c_3\mathbf{K}_2^2\mathbf{q}_{12}^2y_0h'(y_0)^2\left((c_3x_0 + z_0)T_0(x_0) + x_0z_0T_0'(x_0)\right), \\
\mathbf{D}_{06} &= 2(b_1(c_3x_0 + c_2y_0) + c_1x_0(c_3x_0 + c_2y_0) + y_0(-c_3x_0 - c_2y_0 + z_0))T_0(x_0) + x_0y_0\mathbf{q}_{15}T_0'(x_0), \\
\mathbf{D}_{07} &= -\mathbf{q}_{14}\mathbf{D}_{02}\left(x_0f(x_0)\mathbf{D}_{00}T_0'(x_0)y_0^2 + z_0g(x_0)\left(\mathbf{q}_{12}y_0h'(y_0)(2(c_3x_0 + z_0)T_0(x_0)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ x_0z_0T_0'(x_0)) + h(y_0)\mathbf{D}_{06}\right)\right) - x_0\mathbf{D}_{00}\mathbf{D}_{03} - \frac{(c_1y_0z_0 - c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12})\mathbf{D}_{05}}{\mathbf{K}_2\mathbf{J}_4}, \\
\mathbf{D}_{08} &= (c_2\mathbf{q}_{12} + z_0)h(y_0) + \mathbf{q}_{12}z_0h'(y_0), \\
\mathbf{D}_{09} &= c_3x_0\mathbf{q}_{12}g(x_0)\left(z_0h(y_0)\left(-\frac{2h(y_0)}{\mathbf{q}_{12}} - 2h'(y_0) - y_0h''(y_0)\right)(c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12} - c_1y_0z_0)^2\right. \\
&\quad \left.+ \frac{4c_1y_0z_0(c_1y_0z_0 - c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12})h(y_0)\mathbf{D}_{08}}{\mathbf{q}_{12}} - 2(c_1y_0z_0 - c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12})(h(y_0) + y_0h'(y_0))(\mathbf{q}_{20}z_0h(y_0)\right. \\
&\quad \left.+ c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}z_0h'(y_0)) - \frac{2c_1^2y_0^2z_0\mathbf{D}_{08}^2}{\mathbf{q}_{12}}\right), \\
\mathbf{D}_{10} &= \mathbf{K}_2\left(x_0y_0\mathbf{q}_{14}f(x_0)h(y_0)T_0'(x_0) - z_0g(x_0)\left(2c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12}y_0h'(y_0)(T_0(x_0) + x_0T_0'(x_0))\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ h(y_0)(2y_0\mathbf{q}_{20}T_0(x_0) + x_0\mathbf{D}_{60}T_0'(x_0))\right)\right)\mathbf{D}_{00}, \\
\mathbf{D}_{20} &= \frac{-b_1 - c_1x_0 + y_0}{\mathbf{D}_{40}} + \frac{\mathbf{K}_2(c_3\mathbf{K}_2\mathbf{q}_{12} - c_1y_0z_0)(h(y_0) + \mathbf{q}_{12}h'(y_0))}{c_1x_0y_0z_0g(x_0)(\mathbf{D}_{02})}, \\
\mathbf{D}_{30} &= y_0\left(\frac{x_0\mathbf{K}_2^2\left(T_0(x_0)(y_0f''(x_0) + z_0g''(x_0)) - \mathbf{J}_4T_0''(x_0)\right)\mathbf{D}_{00}^2}{T_0(x_0)}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{\mathbf{K}_2\mathbf{D}_{02}(x_0y_0f(x_0)T_0'(x_0) + z_0g(x_0)(2T_0(x_0) + x_0T_0'(x_0)))\mathbf{D}_{00}}{T_0(x_0)}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{\mathbf{D}_{10}}{y_0T_0(x_0)} + \frac{2x_0(-1)(\mathbf{q}_{14}f(x_0)h(y_0) - z_0g(x_0)\mathbf{D}_{02})^2}{\mathbf{J}_4}\right), \\
\mathbf{D}_{40} &= c_3x_0\mathbf{q}_{12}g(x_0)h(y_0) + \mathbf{q}_{12}y_0z_0h'(y_0), \\
\mathbf{D}_{50} &= c_1c_3x_0^2 + y_0(c_3x_0 + 2c_2y_0 - z_0), \quad \mathbf{D}_{60} = c_3b_1^2 + c_3(2c_1x_0 + y_0)b_1 + c_1\mathbf{D}_{50},
\end{aligned}$$

B.4 Regularidad y coeficientes cuadráticos para $k_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{00} &= y_0 z_0 (\mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16} + x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) \mathbf{b}_{08}) \left(-2c_1 x_0 y_0 \mathbf{q}_{14} g(x_0) \mathbf{q}_{16} (-c_3 x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) - y_0 \mathbf{q}_{15} h(y_0) - \mathbf{q}_{12} y_0 z_0 h'(y_0)) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbf{b}_{12} \left(-g(x_0) - \frac{x_0 \mathbf{J}_4 T_0'(x_0)}{2z_0 T_0(x_0)} \right) + \frac{\mathbf{b}_{14}}{z_0 \mathbf{J}_4 \mathbf{q}_{16}} + \frac{\mathbf{q}_{12} \mathbf{p}_{14} \mathbf{p}_{12} (x_0 y_0 \mathbf{b}_{13} f(x_0) h(y_0) T_0'(x_0) + z_0 g(x_0) \mathbf{b}_{15})}{z_0 T_0(x_0)} \right), \\
 \mathbf{b}_{01} &= \mathbf{b}_{16} \left(\frac{\mathbf{b}_{17}}{h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}} - \frac{c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12}^2 \left(1 - \frac{c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0)}{\mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{16}} \right)}{c_1 \mathbf{b}_{18}} \right), \\
 \mathbf{b}_{02} &= 2c_3 x_0 y_0 z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} (y_0 \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{19} (h'(y_0) \mathbf{q}_{12} + h(y_0)) \mathbf{b}_{18} + x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} (h(y_0) (c_3^2 \mathbf{K}_2^2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 z_0 (2c_3 \mathbf{K}_2 + c_1 c_2 y_0)) \\
 &\quad + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12} (c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - 2c_1 y_0 z_0))) (h(y_0) \mathbf{b}_{19} (\mathbf{q}_{12} (2h'(y_0) + y_0 h''(y_0)) + 2h(y_0)) (c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0) - \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{16}) \\
 &\quad - 2c_1 y_0 h(y_0) \mathbf{b}_{18} (x_0 g(x_0) \mathbf{b}_{19} + y_0 \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{18}) + (y_0 h'(y_0) + h(y_0)) (\mathbf{b}_{19} (x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \\
 &\quad + y_0 \mathbf{K}_2 (h'(y_0) \mathbf{q}_{12} + h(y_0)) \mathbf{b}_{18}) - \mathbf{q}_{12} (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) (c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0) - \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{16}))), \\
 \mathbf{b}_{03} &= \mathbf{b}_{18} \left(\frac{\mathbf{b}_{17}}{h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}} - \frac{c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12}^2 \left(1 - \frac{c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0)}{\mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{16}} \right)}{c_1 \mathbf{b}_{18}} \right), \\
 \mathbf{b}_{04} &= -c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{14} g(x_0) \mathbf{b}_{12} \mathbf{q}_{12} + \frac{\mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{14}^2 h'(y_0) \mathbf{b}_{12} \mathbf{q}_{12}}{c_1 x_0} + \frac{c_3^2 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12}^3 g(x_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{p}_{12}}{c_1 \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{14}} + \frac{c_2 \mathbf{q}_{12}^2 y_0 \mathbf{q}_{14} h(y_0) \mathbf{q}_{18} \mathbf{p}_{12}}{c_1 x_0 \mathbf{q}_{16} \mathbf{p}_{14}} + \frac{\mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{14}^2 h(y_0) \mathbf{b}_{12}}{c_1 x_0}, \\
 \mathbf{b}_{05} &= -\frac{h(y_0) \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{19} \mathbf{b}_{18} \left(\frac{z_0 g(x_0) (\mathbf{b}_{21})}{y_0 h(y_0) (-b_1^2 c_3 + b_1 c_3 (y_0 - 2c_1 x_0) + c_1 \mathbf{b}_{22})} + x_0 f(x_0) T_0'(x_0) \right)}{T_0(x_0)} \\
 &\quad + \frac{2x_0 (f(x_0) h(y_0) (-b_1^2 c_3 + b_1 c_3 (y_0 - 2c_1 x_0) + c_1 (-c_1 c_3 x_0^2 + c_3 x_0 y_0 + y_0 z_0)) + z_0 g(x_0) (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}))^2}{T_0(x_0)} \\
 &\quad - \frac{\mathbf{K}_2 (x_0 y_0 f(x_0) T_0'(x_0) + z_0 g(x_0) (x_0 T_0'(x_0) + 2T_0(x_0))) (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \mathbf{b}_{18}}{T_0(x_0)} \\
 &\quad + x_0 \mathbf{K}_2^2 \left(-y_0 f''(x_0) + \frac{T_0''(x_0) \mathbf{J}_4}{T_0(x_0)} - z_0 g''(x_0) \right) \mathbf{b}_{18}^2, \\
 \mathbf{b}_{06} &= 2c_1 x_0^2 z_0 g(x_0)^2 \mathbf{q}_{12} \mathbf{b}_{19}^2 (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \mathbf{b}_{16}^2 (x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) \\
 &\quad + y_0 \mathbf{K}_2 (h'(y_0) \mathbf{q}_{12} + h(y_0)) \mathbf{b}_{18}) \mathbf{b}_{20}, \\
 \mathbf{b}_{07} &= \mathbf{K}_2 (\mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16} + x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) (\mathbf{p}_{18} h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} \mathbf{b}_{11} h'(y_0))), \\
 \mathbf{b}_{08} &= (c_3^2 \mathbf{K}_2^2 \mathbf{q}_{12} - c_1 y_0 (2c_3 \mathbf{K}_2 + c_1 c_2 y_0) z_0) h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} (c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} - 2c_1 y_0 z_0) h'(y_0), \\
 \mathbf{b}_{10} &= \mathbf{b}_{13} \mathbf{q}_{16} (\mathbf{K}_2 y_0 \mathbf{q}_{14} \mathbf{p}_{16} \mathbf{q}_{16} + x_0 \mathbf{q}_{12} g(x_0) (\mathbf{p}_{18} h(y_0) + c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} \mathbf{b}_{11} h'(y_0))); \\
 \mathbf{b}_{11} &= c_3 b_1^2 + c_3 (2c_1 x_0 - y_0) b_1 + c_1 (c_1 c_3 x_0^2 - y_0 (c_3 x_0 + 2z_0)); \quad \mathbf{b}_{12} = y_0 + \frac{\mathbf{p}_{16} \mathbf{p}_{12}}{c_1 x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{16}}, \\
 \mathbf{b}_{13} &= c_3 (y_0 - 2c_1 x_0) b_1 - b_1^2 c_3 + c_1 \mathbf{b}_{22}, \\
 \mathbf{b}_{14} &= 4x_0 \mathbf{q}_{12} y_0 \mathbf{p}_{14}^2 ((c_3 (y_0 - 2c_1 x_0) b_1 - b_1^2 c_3 + c_1 (-c_1 c_3 x_0^2 + c_3 y_0 x_0 + y_0 z_0)) f(x_0) h(y_0) + z_0 g(x_0) \mathbf{q}_{18})^2 \left(1 - \frac{c_1 x_0 y_0 z_0 g(x_0)}{\mathbf{K}_2 \mathbf{p}_{14}} \right), \\
 \mathbf{b}_{15} &= 2c_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_{12} y_0 h'(y_0) (T_0(x_0) + x_0 T_0'(x_0)) + h(y_0) (2y_0 \mathbf{q}_{20} T_0(x_0) + x_0 \mathbf{D}_{60} T_0'(x_0)), \\
 \mathbf{b}_{16} &= y_0 h(y_0) (b_1 c_2 + c_1 c_2 x_0 - c_2 y_0 + z_0) + c_3 x_0 g(x_0) \mathbf{q}_{12} + y_0 z_0 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}; \\
 \mathbf{b}_{17} &= \mathbf{b}_{19} \left(\frac{(h'(y_0) \mathbf{q}_{12} + h(y_0)) (x_0 g(x_0) \mathbf{b}_{19} + y_0 \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_{18})}{c_1 x_0 g(x_0) \mathbf{b}_{18}} + y_0 \right), \\
 \mathbf{b}_{18} &= h(y_0) (b_1 c_2 + c_1 c_2 x_0 - c_2 y_0 + z_0) + z_0 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}, \quad \mathbf{b}_{19} = b_1^2 c_3 + b_1 c_3 (2c_1 x_0 - y_0) + c_1 (c_1 c_3 x_0^2 - y_0 (c_3 x_0 + z_0)), \\
 \mathbf{b}_{20} &= 2 (y_0 h'(y_0) + h(y_0)) \mathbf{b}_{19} (h(y_0) \mathbf{K}_1 + c_3 \mathbf{K}_2 h'(y_0) \mathbf{q}_{12}) - \frac{4c_1 y_0 h(y_0) \mathbf{b}_{19} \mathbf{b}_{18}}{\mathbf{q}_{12}} \\
 &\quad + h(y_0) \mathbf{b}_{19}^2 \left(-\frac{2h(y_0)}{\mathbf{q}_{12}} - 2h'(y_0) - y_0 h''(y_0) \right) - \frac{2c_1^2 y_0^2 \mathbf{b}_{18}^2}{\mathbf{q}_{12}}, \\
 \mathbf{b}_{21} &= h(y_0) (x_0 T_0'(x_0) (b_1^2 c_3 + b_1 c_3 (2c_1 x_0 + y_0) + c_1 (c_1 c_3 x_0^2 + y_0 (2c_2 y_0 + c_3 x_0 - z_0))) + 2y_0 T_0(x_0) \mathbf{K}_1) \\
 &\quad + 2c_3 y_0 \mathbf{K}_2 h'(y_0) (x_0 T_0'(x_0) + T_0(x_0)) \mathbf{q}_{12}, \quad \mathbf{b}_{22} = y_0 (c_3 x_0 + z_0) - c_1 c_3 x_0^2.
 \end{aligned}$$

Apéndice C

C.1. Vectores propios normalizados

De las fórmulas de Guckenheimer–Kuznetsov [GK] y las condiciones en (4.7) y (4.8), se tiene que si $q_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{A}_{q_0} := D_{(x,y,z)} G(x+x_0, y+y_0, z+z_0, \xi_1 + C_{10}, \xi_2 + K_{10})|_{(q_0, 0, 0)}, \text{ es}$$

$$\mathbf{A}_{q_0} = \begin{pmatrix} -\frac{2453h'_1(y_0)}{2000} & -\frac{944220402264987764x_0h'_1(y_0)}{100197142067665647} & -\frac{15483567102013x_0h'_1(y_0)}{10204414102013} \\ \frac{1561h'_1(y_0)}{4000000x_0} & \frac{4453h'_1(y_0)}{2000} & \frac{1}{500}(-223)h'_1(y_0) \\ \frac{2453h'_1(y_0)}{11200x_0} & \frac{734269h'_1(y_0)}{91644} & -h'_1(y_0) \end{pmatrix},$$

donde $y_0 = \frac{223}{1000}$. Por lo tanto, elegimos $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{A}_{q_0} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{q_0}^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{P}_0 = \left(-\frac{1359320727043274251447416}{501166761802996374402167x_0}, \frac{21779270563478046314481500}{501166761802996374402167}, \frac{7651002771719078508811333}{501166761802996374402167} \right), \quad \mathbf{Q}_0 = \left(-\frac{30314000x_0}{10904477}, \frac{9819}{48899}, 1 \right).$$

Por otro lado, elegimos $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{C}^3$ tal que

$$\mathbf{A}_{q_0} \mathbf{Q}_1 = i\omega_0 \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{A}_{q_0}^T \mathbf{P}_1 = -i\omega_0 \mathbf{P}_1, \quad \bar{\mathbf{P}}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 = 1, \quad \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}_0 = 1,$$

donde $\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{501166761802996374402167}{77931110497073281}} h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)}{6000}$, de hecho, tenemos

$$\mathbf{P}_1 = (P_{11}, P_{12}, 1), \quad \mathbf{Q}_1 = (Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}),$$

donde

$$P_{11} = \frac{1712906379521220483628 + 3i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}}{10789889089721137354000x_0},$$

$$P_{12} = \frac{-10955508903768133491639111 + 15157i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}}{3937656729458287005400083},$$

$$Q_{11} = \left(-\frac{10634737366216286481053000}{501166761802996374402167} + 46450701306039000i\sqrt{\frac{7637}{5114113171602686316707783707026262171}} \right) x_0,$$

$$Q_{12} = \frac{669(2296463376632968638417 + 4i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927})}{1002333523605992748804334},$$

$$Q_{13} = \frac{750(5434779689014716588809 + 4i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927})}{501166761802996374402167}.$$

C.1 Vectores propios normalizados

100

Por otra parte,

$$G_{200} = \frac{\mathcal{I}_1}{500150039956399516401387830979754387799458R'_0(x_0)}, \quad G_{011} = \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_4},$$

$$\mathcal{I}_1 = 5R'_0(x_0)(\mathcal{I}_2) + 12858323570574909716704360534478813752224000x_0h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)R''_0(x_0),$$

$$\mathcal{I}_2 = 233787701283180176667352009717796613676800x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0))$$

$$- 195434308028541852486779864439140599296843h''_1\left(\frac{223}{1000}\right)$$

$$+ 3356958029678941790505135963947119285011800h'_1\left(\frac{223}{1000}\right).$$

$$\mathcal{I}_3 = 42020749075505385246619235(R'_0(x_0))$$

$$\times (219551901343103717685190983865665326290142142148918747223442739200x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0))$$

$$- 20382299394244639902675852699378759544829220523783802874136201246h''_1\left(\frac{223}{1000}\right)$$

$$+ 3133394248201892126977439536462312064479313166092765434200430194235h'_1\left(\frac{223}{1000}\right))$$

$$+ 2415070914774140894537100822522318589191563563638106219457870131200x_0h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)R''_0(x_0),$$

$$\mathcal{I}_4 = 33633405783297927956215517810519217616334624084174013929842294052569475561435951349257496R'_0(x_0).$$

$$H_{110} = \frac{\mathcal{I}_5}{3897724802895778727003196377319580906716217745600295808169800R'_0(x_0)},$$

$$\mathcal{I}_5 = R'_0(x_0)\left(177338815016036546784460347067619\right)$$

$$\times \left(3031400i\left(33\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}\right.\right.$$

$$\left.\left.+ 14698158093368465378071i\right)x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0)) + 9819\left(3872146755094914355099333\right.\right.$$

$$\left.\left.+ 13359i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}\right)h''_1\left(\frac{223}{1000}\right)\right)$$

$$+ 50\left(-2147528424495722702331087750545746581905684522533570890199668\right.$$

$$\left.+ 9072836505376907692695682541029003534165i\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}\right)h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)$$

$$+ 5913433722235745067146544057108582602600i\left(33\sqrt{39056482291529715400697344170559564199927}\right.$$

$$\left.+ 14698158093368465378071i\right)x_0h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)R''_0(x_0).$$

Luego $\mathbf{S}_0 := \text{sign}(G_{200} \cdot G_{011})$ y de las fórmulas de Guckenheimer–Kuznetsov [GK], $\theta_0 := \frac{\text{Re}(H_{110})}{G_{200}}$, se tiene que

$$\theta_0 = \frac{\mathcal{I}_6}{500(R'_0(x_0)(\mathcal{I}_2) + 2571664714114981943340872106895762750444800x_0h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)R''_0(x_0))},$$

$$\mathcal{I}_6 = R'_0(x_0)\left(86519102591542334984932850826668436027099573h''_1\left(\frac{223}{1000}\right)\right.$$

$$- 200\left(506954639865968525166040146647094478466153x_0(f''_1(x_0) + 10g''_1(x_0))\right.$$

$$\left.+ 6889188447328662079133970921510447893820957h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)\right)\right)$$

$$- 1115300207705130755365288322623607852625536600x_0h'_1\left(\frac{223}{1000}\right)R''_0(x_0).$$

A partir de las fórmulas de Guckenheimer–Kuznetsov [GK] y usando el software Mathematica, podemos calcular la tercera cantidad \mathbf{E}_0 , cuya expresión matemática es muy larga y por lo tanto solo la mostramos explícitamente en las aplicaciones (ver sección 4.5).

C.2 Términos de la sección de aplicaciones

101

C.2. Términos de la sección de aplicaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= 66909316651186640495112772990941608079102L_1 - 18109292832012541988111243450434361640881, \\
\mathcal{N}_2 &= 292234626603975220834190012147245767096L_1 + 42709998866431110742918602039704219237, \\
\mathcal{N}_3 &= 483014182954828178907420164504463717838312712727621243891574026240L_1 \\
&\quad + 84958466636339205488849612996562885867803627377151537481770919887, \\
\mathcal{N}_4 &= 18369476045738701950L_1(\mathcal{N}_9) + 385786342354488391688264503570287822884617112896256690200384 \\
&\quad 35439008029351620051967157148363389134434642797115736357573946385961950127988303089759711844 \\
&\quad 58723831395910811717642010269265229661293334921146907403512958174590177747658089, \\
\mathcal{N}_5 &= 112248555122143L_1(446L_1(12908947623898020752574610896777563508213191278063578956428808770 \\
&\quad 119948810225128619312380681350663355968586266664983908394371975883977888L_1 + 837879255671498 \\
&\quad 74667826110101049340698671672444036482865861318679963130363578976781120308016343560796155095 \\
&\quad 83107007425803147730544965561) + 743710522665190101615845050071562263436582051267341312977229 \\
&\quad 051790311183299209623339856577550736792425351260642884775613917968243089389775) + 63438349571 \\
&\quad 6279537972666860594339730868325757566182327448780427858413815145153694771039180084699287610 \\
&\quad 0645058057604678332073698277785461999444796728800, \\
\mathcal{N}_6 &= 360645390877729188891148545217161666717352610589084348280489864412860963404543930674349830 \\
&\quad 7594754359255532564204520703947653916650657312425847363554284786173297942939996035839981983980288, \\
\mathcal{N}_7 &= 50295122884277598221007465595589094385337710962136484113695218471234084045406930995241414 \\
&\quad 26887084189063762885684794104440165899885129573653581340480385737089354390121271458071600447 \\
&\quad 8822904244005813676140325595765379231186281887016806590454933879699586881702204893470614784(\mathcal{N}_3), \\
\mathcal{N}_8 &= 11153002077051307553652883226236078526255366L_1 + 928654164351319553570359193203479165393375, \\
\mathcal{N}_9 &= 21274815602379231232L_1(68405649186083241061655487236272875220900496366527896558792849435773 \\
&\quad 3740354774736170695948098382005124762471675646840833922150192934858487732158133910858709255437 \\
&\quad 200396854540149973080251243959040L_1 + 42824822547530996864787937233916829746291941495033100261 \\
&\quad 5398523913689360155583413735231526617574062181773612280031886667594713959163645107268226397433 \\
&\quad 217972997955240157233112937899148472993461661) + 2346283189480427792200072748885111214988505190 \\
&\quad 7985863700927786598638418574989142387416179775194911992213237484298793863254504287829464403257 \\
&\quad 45668713526556819388029668854658863232080232933094024808844947243108597439, \\
\mathcal{N}_{10} &= 67266811566595855912431035621038435232669248168348027859684588105138951122871902698514992.
\end{aligned}$$

C.2 Términos de la sección de aplicaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= 491397332185715224431608901642491496624762L_1 - 712009014511811689631983120026729680238727, \\
\mathcal{M}_2 &= 6277405619786690118359128701060297036379662274513370049675264000000000, \\
\mathcal{M}_3 &= 559057546546735205074102631933861467488L_1 + 246813298021984475053883388573134954867, \\
\mathcal{M}_4 &= 483014182954828178907420164504463717838312712727621243891574026240L_1 \\
&\quad + 245804167930231882174822467070792402968199476412289979238472566367, \\
\mathcal{M}_5 &= 134533623133191711824862071242076870465338496336696055719369176210277902245743805397029984, \\
\mathcal{M}_6 &= 5576501038525653776826441613118039263127683L_1 + 2150739954878153877093030618046542927030866, \\
\mathcal{M}_7 &= 834976183897213725L_1 (21274815602379231232L_1 (68405649186083241061655487236272875220900496366 \\
&\quad 5278965587928494357733740354774736170695948098382005124762471675646840833922150192934858487732 \\
&\quad 158133910858709255437200396854540149973080251243959040L_1 + 48303445741510097801646069144222175 \\
&\quad 3121478689646983666079975463657614884731235205830624439234506217239804885833625896014454486368 \\
&\quad 876365150019349736703074702361235852259863108199254915924392498101) + 3740699541437060615793133 \\
&\quad 1814627536552426122560517269063642225859979405771234222597755495981281283159063275407371549195 \\
&\quad 8369208282278734953390106705974546478309752470411448297112011029969402128959524510442854382271) \\
&\quad - 46173601900843846458628399275020181144964520631449757591945042219085043770122880863471418036 \\
&\quad 0770446158193565044934416715095651262238289896387430307343689142951423230337111766493851002761 \\
&\quad 216969014803368206424673788684266329610685538, \\
\mathcal{M}_8 &= 100590245768555196442014931191178188770675421924272968227390436942468168090813861990482828537741683 \\
&\quad 781275257713695882088803317997702591473071626809607714741787087802425429161432008957645808488011627352 \\
&\quad 280651191530758462372563774033613180909867759399173763404409786941229568, \\
\mathcal{M}_9 &= 5e_1(112248555122143L_1(4906L_1(11735406930816382502340555360706875916557446616421435414935280700109044 \\
&\quad 37293193510846580061940969395997144206060453082581306543262179808L_1 + 898732679689320012711797929637536 \\
&\quad 970124794980289558972351391525781541159764343082108918430225384536476706100256468202531504420319917323) \\
&\quad - 4960199075264023362361850450409062900515749703146047200927062491299458206547667685756017573261946892 \\
&\quad 098712238193673086366686563711213795) - 380457006755383572717398250863270913550394345386132269324206468 \\
&\quad 5511179330056700390126619914271439953368867683845776411511943839628840865432575707840369)x_0, \\
\mathcal{M}_{10} &= 27891731965225265653874017619527001999643278053455659989882126196509636961824197954686.
\end{aligned}$$

Fidelfo Mondragon Sánchez.pdf

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:535534800

Fecha de entrega

2 dic 2025, 6:09 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

15 abr 2026, 6:23 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Fidelfo Mondragon Sánchez.pdf

Tamaño del archivo




9.9 MB

112 páginas

29.764 palabras

166.682 caracteres

Fuentes principales

- 10%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Fuentes principales

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	Internet		
doczz.es			1%
2	Internet		
ouci.dntb.gov.ua			1%
3	Internet		
repositorio.usm.cl			<1%
4	Internet		
zagan.unizar.es			<1%
5	Internet		
repositorio.utb.edu.co			<1%
6	Internet		
bindani.izt.uam.mx			<1%
7	Internet		
cdigital.uv.mx			<1%
8	Internet		
digibuo.uniovi.es			<1%
9	Internet		
oa.upm.es			<1%
10	Publicación		
Fidelfo Mondragón-Sánchez, Gamaliel Blé, Miguel Angel Dela-Rosa. "Zero Hopf ...			<1%
11	Internet		
sired.udenar.edu.co			<1%

12	Publicación	Gamaliel Blé, Miguel Angel Dela-Rosa. "Bogdanov-Takens Bifurcation in a Leslie T...	<1%
13	Internet	www.fcfm.buap.mx	<1%
14	Internet	bdigital.unal.edu.co	<1%
15	Internet	iieta.org	<1%
16	Publicación	Coppejans, M.. "On efficient estimation of the ordered response model", Journal ...	<1%
17	Internet	uvadoc.uva.es	<1%
18	Internet	ri.ujat.mx	<1%
19	Internet	dgsa.uaeh.edu.mx:8080	<1%
20	Internet	docencia.mat.utfsm.cl	<1%
21	Internet	pdfs.semanticscholar.org	<1%
22	Publicación	Rafael Moreno Cano. "Aplicación de la Visión por Computador a la docencia de Fis...	<1%
23	Internet	crm.ics.org.ru	<1%
24	Internet	www.science.org	<1%
25	Internet	www.slideshare.net	<1%




10% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe


- Coincidencias menores (menos de 8 palabras)
- Trabajos entregados

Fuentes principales

- 10%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
3123 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

40	Publicación	Foda, M.A.. "Vibration confinement in a general beam structure during harmonic ...	<1%
41	Internet	fr.scribd.com	<1%
42	Publicación	Robert L. Devaney. "Sex: Dynamics, topology, and bifurcations of complex expone...	<1%
43	Internet	revistas.chapingo.mx	<1%
44	Publicación	"Cálculo Científico con MATLAB y Octave", Springer Science and Business Media L...	<1%
45	Publicación	Renato Mario Benazic Tomé. "Tipos no genérico de bifurcaciones en sistemas din...	<1%
46	Internet	dspace.cuni.cz	<1%
47	Internet	teses.usp.br	<1%
48	Internet	www.irsitio.com	<1%
49	Publicación	Mohamed BEN AHMED. "UNE SCIENCE NOUVELLE POUR UNE NOUVELLE VISION D...	<1%
50	Internet	cris.ulima.edu.pe	<1%
51	Internet	ijs.uobaghdad.edu.iq	<1%
52	Publicación	Jyotirmay Barman, Rajib Haloi. "Two weighted norm inequalities for generalized ...	<1%
53	Internet	arxiv.org	<1%

26	Internet	ora.ox.ac.uk	<1%
27	Publicación	Gamaliel Blé, Claudia Isabel Guzmán-Arellano, Iván Loreto-Hernández. "Coexiste...	<1%
28	Internet	archive.org	<1%
29	Internet	idoc.pub	<1%
30	Publicación	Robert Carlson. "A Concrete Introduction to Real Analysis", Chapman and Hall/CR...	<1%
31	Internet	hdl.handle.net	<1%
32	Internet	www.ma1.upc.edu	<1%
33	Publicación	Dipesh Barman, Jyotirmoy Roy, Shariful Alam. "Impact of wind in the dynamics of ...	<1%
34	Internet	ms.mcmaster.ca	<1%
35	Internet	issuu.com	<1%
36	Internet	fdocumentos.tips	<1%
37	Internet	qdoc.tips	<1%
38	Internet	www.coursehero.com	<1%
39	Internet	www.mdpi.com	<1%

54	Internet	docslide.net	<1%
55	Internet	doi.org	<1%
56	Publicación	Ana Emilia Ferrazzi de Bressan, Juan Carlos Bressan. "Sistemas lineales planos de ...	<1%
57	Publicación	Crespo Guerrero, Gloria Solvey. "El Teorema del Centro.", Pontificia Universidad C...	<1%
58	Publicación	Mendoza Jimenez, Joel. "Sistemas periodicos: perturbacion y aplicaciones.", Pontif...	<1%
59	Internet	astrobiologia.astroseti.org	<1%
60	Internet	epub.uni-regensburg.de	<1%
61	Internet	idus.us.es	<1%
62	Internet	repositoriousco.co	<1%
63	Internet	repository.library.noaa.gov	<1%
64	Internet	shukutoku.repo.nii.ac.jp	<1%
65	Internet	sitios.vtte.utem.cl	<1%
66	Internet	www.tdx.cat	<1%
67	Publicación	MARÍA PENKOVA VASSILEVA. "MÉTODOS ITERATIVOS EFICIENTES PARA RESOLUCI...	<1%

68	Internet	d-nb.info	<1%
69	Internet	math.u-bourgogne.fr	<1%
70	Internet	repositorio.unal.edu.co	<1%
71	Internet	revistas.uptc.edu.co	<1%
72	Internet	www.cmat.edu.uy	<1%
73	Internet	www.odi.org	<1%