



**UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO**  
**DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS**



---

---

**DINÁMICA EN UN MODELO DE RED ALIMENTARIA DE  
CUATRO ESPECIES CON FUNCIÓN DE CRECIMIENTO EN EL  
RECURSO Y RESPUESTAS FUNCIONALES GENERALES**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**M. C. JORGE LUIS RAMOS CASTELLANO**

BAJO LA DIRECCIÓN DE:

**DR. IVÁN LORETO HERNÁNDEZ**

EN CODIRECCIÓN:

**DR. MIGUEL ANGEL DE LA ROSA CASTILLO**

CUNDUACÁN, TABASCO. MARZO 2026

## Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Cunduacán, el día 17 del mes febrero del año 2026, el que suscribe **Jorge Luis Ramos Castellano** alumno del Programa **Doctorado en Ciencias Matemáticas** con número de matrícula **222A22001**, adscrito a la **División Académica de Ciencias Básicas**, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del **Grado de Doctor** y titulada **Dinámica en un modelo de red alimentaria de cuatro especies con función de crecimiento en el recurso y respuestas funcionales generales** dirigida por el **Dr. Iván Loreto Hernández** y bajo la codirección del **Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo**.

### DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Derecho por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 17 de febrero 2026.

Nombre y firma



Jorge Luis Ramos Castellano



# UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



2026  
año de  
Margarita  
Maza

DIRECCIÓN

12 de febrero de 2026

**M.C. JORGE LUIS RAMOS CASTELLANO**  
**EGRESADO DE DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
PRESENTE

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que se le **AUTORIZA** la impresión del trabajo de Tesis titulado **“DINÁMICA EN UN MODELO DE RED ALIMENTARIA DE CUATRO ESPECIES CON FUNCIÓN DE CRECIMIENTO EN EL RECURSO Y RESPUESTAS FUNCIONALES GENERALES”** dirigido por el Dr. Iván Loreto Hernández y el Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo de la DACB.

La Comisión revisora conformada por el Dr. Víctor Castellanos Vargas, Dr. Gamaliel Blé González, Dr. Iván Loreto Hernández, Dr. Justino Alavez Ramírez, Dr. Jorge López López, Dr. Manuel Falconi Magaña y Dr. Porfirio Toledo Hernández aprobó el documento en virtud de reunir los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL y obtener el grado de **Doctor en Ciencias Matemáticas** bajo la modalidad de titulación por Tesis.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL**  
**DIRECTORA**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

C.C.P.- Archivo.

Dir'Dra.HPV/jkal\*\*

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

# Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 17 de febrero de 2026

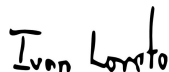
Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTORES en la producción, creación y/o realización de la obra denominada **Dinámica en un modelo de red alimentaria de cuatro especies con función de crecimiento en el recurso y respuestas funcionales generales** .

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100 % *la titularidad de los derechos patrimoniales* por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

## COLABORADORES



Jorge Luis Ramos Castellano  
ALUMNO O EGRESADO



Dr. Iván Loreto Hernández  
DIRECTOR



Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo  
CODIRECTOR

## TESTIGOS



Ramón Eduardo Chan López



Fidadelfo Mondragón Sánchez

## Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por haberme dado la vida y por permitirme concluir una etapa más de mi vida profesional. A mis profesores que sin su ayuda no hubiera concluido este trabajo. A mis asesores de tesis Dr. Iván Loreto Hernández y Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo, por todo su apoyo, orientación y valioso tiempo que me dedicaron para la realización de este trabajo. A la SECIHTI por el apoyo económico otorgado a través de la beca para que pudiera un servidor realizar el Doctorado en Ciencias Matemáticas en la DACB-UJAT, con CVU 935030. A la DACB-UJAT por haberme dado la oportunidad de realizar este proyecto en un entorno académico de excelencia. A mis amigos que siempre estuvieron ahí brindándome su ayuda y motivación cuando sentía que la meta era imposible de alcanzar.

Finalmente, estoy profundamente agradecido con mi familia, mis padres Jesús Ramos Quiroga y Guillermina Castellano de Dios, así como también a mis hermanos y mi hermana, por su constante apoyo a lo largo de este periodo, por todo el entusiasmo que me han brindaron y la comprensión ante las múltiples ocasiones que no pude estar en las situaciones que me necesitaban pero que aún así nunca me faltó su apoyo y respaldo incondicionales.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Índice general

---

Índice de figuras	IV
Índice de Tablas	V
	VI
Dinámica en un modelo de red alimentaria de cuatro especies con función de crecimiento en el recurso y respuestas funcionales generales	VI
Resumen	VI
Abstract	VI
Palabras claves	VII
Introducción	VII
Marco Teórico	X
Justificación	XII
Pregunta de Investigación	XII
Hipótesis y Supuesto	XII
Objetivo General	XIII
Objetivos Específicos	XIII
Metodología	XIII
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias	1
1.1.1. Conjuntos límites	5
1.2. Teoría de bifurcación	6
1.2.1. Bifurcación de Hopf	7
1.2.2. Bifurcación de Bogdanov-Takens	11
1.2.3. Bifurcación Hopf-Hopf	13
1.2.4. Bifurcación Cero-Hopf	16
<b>2. Bifurcación de Hopf para un modelo de cuatro especies</b>	<b>21</b>
2.1. Puntos de equilibrio y su estabilidad	21
2.2. Condiciones necesarias para una bifurcación de Hopf	23
2.3. Ejemplos	24
2.3.1. Caso H1: Sacidad e interferencia entre depredadores	25

2.3.2.	Caso H2: Defensa en la especie depredada e interferencia de los depredadores	26
2.3.3.	Caso H3: Defensa, competencia e interferencia en la especie depredada . . .	28
2.3.4.	Resultados numéricos . . . . .	29
<b>3.</b>	<b>Bifurcación de Bogdanov-Takens para el modelo de cuatro especies</b>	<b>36</b>
3.1.	Análisis de la bifurcación Bogdanov-Takens . . . . .	36
3.1.1.	Condición necesaria para la bifurcación BT . . . . .	38
3.1.2.	Resultado principal . . . . .	38
3.2.	Ejemplos . . . . .	40
3.3.	Resultados numéricos . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Bifurcación doble Hopf para el modelo de cuatro especies</b>	<b>49</b>
4.1.	Análisis de la bifurcación doble Hopf . . . . .	49
4.1.1.	Condición necesaria para la bifurcación doble Hopf . . . . .	51
4.1.2.	Condiciones de no degeneración y resultado principal . . . . .	51
4.2.	Ejemplos . . . . .	53
4.2.1.	Caso HH1: Saciedad e interferencia entre predadores . . . . .	54
4.2.2.	Caso HH2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores . . . . .	55
4.3.	Resultados numéricos . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Bifurcación cero-Hopf para el modelo de cuatro especies</b>	<b>61</b>
5.1.	Condición necesaria para la bifurcación cero-Hopf . . . . .	62
5.2.	Condiciones de no degeneración y resultado principal . . . . .	63
5.2.1.	Simplificación del modelo . . . . .	63
5.3.	Aplicación del resultado principal . . . . .	64
5.3.1.	Caso ZH1: Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia . . . . .	64
5.3.2.	Caso ZH2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores . . . . .	66
5.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	67
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>74</b>
<b>A.</b>		<b>76</b>
A.1.	Primer coeficiente de Lyapunov en la bifurcación de Hopf . . . . .	76
A.2.	Coeficientes cuadráticos de la forma normal para la bifurcación de Bogdanov-Takens . . . . .	77
A.3.	Coeficientes cúbicos de la forma normal en la bifurcación Hopf-Hopf . . . . .	78
A.4.	Coeficientes de la forma normal de la bifurcación cero-Hopf . . . . .	78
<b>B.</b>		<b>80</b>
B.1.	Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación de Hopf . . . . .	80
B.2.	Vectores propios para $\mathcal{J}_p(d_{10})$ y $(\mathcal{J}_p(d_{10}))^T$ de la Sección 2.2 . . . . .	81

<b>C.</b>		<b>82</b>
C.1.	Términos de los coeficientes cuadráticos en la Proposición 3.6 . . . . .	82
C.2.	Vectores propios normalizados para la bifurcación BT . . . . .	82
<b>D.</b>		<b>84</b>
D.1.	Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación doble Hopf . . . . .	84
D.2.	Vectores propios normalizados para la bifurcación HH . . . . .	84
<b>E.</b>		<b>86</b>
E.1.	Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación cero-Hopf . . . . .	86
E.2.	Vectores propios normalizados para la bifurcación cero-Hopf . . . . .	86
<b>Bibliografía</b>		<b>88</b>

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Índice de figuras

---

1.	Diagrama del flujo de energía de un modelo tritrófico. . . . .	XI
2.	Diagrama del flujo de energía de un modelo intragremial. . . . .	XI
3.	Diagrama del flujo de energía del modelo intragremial de cuatro especies. . . . .	XI
1.1.	Bifurcación de Hopf supercrítica. <sup>1</sup> . . . . .	9
1.2.	Bifurcación de Hopf subcrítica. <sup>1</sup> . . . . .	9
1.3.	Diagrama de Bifurcación de Bogdanov-Takens. <sup>2</sup> . . . . .	13
1.4.	Diagrama de bifurcación del sistema (1.28). Caso difícil. <sup>3</sup> . . . . .	17
1.5.	Diagrama de bifurcación del sistema (1.32): (a) Caso III, (b) Caso IV. <sup>4</sup> . . . . .	20
2.1.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ en <b>Caso H1</b> . . . . .	31
2.2.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ en <b>Caso H2</b> . . . . .	33
2.3.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ en el <b>Caso H3</b> . . . . .	35
3.1.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en <b>Caso BT1</b> . . . . .	44
3.2.	Densidades poblacionales <b>Caso BT2</b> . . . . .	47
3.3.	Gráficas de las densidades poblacionales con condición $q_2$ del <b>Caso BT2</b> . . . . .	48
4.1.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en el <b>Caso HH1</b> . . . . .	59
4.2.	Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en el <b>Caso HH2</b> . . . . .	60
5.1.	Densidades poblacionales y proyección del toro en $\mathbb{R}^3$ en el <b>Caso ZH1</b> . . . . .	69
5.2.	Densidades poblacionales y proyección del toro en $\mathbb{R}^3$ en el <b>Caso ZH2</b> . . . . .	71

# Índice de Tablas

---

1.	Significado de los parámetros del Modelo (1).	IX
2.1.	Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: <b>Caso H1</b>	30
2.2.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : <b>Caso H1</b> .	30
2.3.	Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: <b>Caso H2</b> .	32
2.4.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : <b>Caso H2</b> .	32
2.5.	Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: <b>Caso H3</b> .	34
2.6.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : <b>Caso H3</b> .	34
3.1.	Validación numérica del Teorema 3.7: <b>Caso BT1</b>	45
3.2.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $(d_1, d_2)$ perturbado: <b>Caso BT1</b> .	45
3.3.	Validación numérica para el Teorema 3.7: <b>Caso BT2</b>	46
3.4.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $(d_1, d_2)$ perturbado: <b>Caso BT2</b> .	46
4.1.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $(d_1, d_2)$ perturbado: <b>Caso HH1</b> .	57
4.2.	Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro $(d_1, d_2)$ perturbado: <b>Caso HH2</b> .	58
5.1.	Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $(d_1, d_2)$ perturbados: <b>Caso ZH1</b> .	68
5.2.	Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros $(d_1, d_2)$ perturbados: <b>Caso ZH2</b> .	70

---

# Dinámica en un modelo de red alimentaria de cuatro especies con función de crecimiento en el recurso y respuestas funcionales generales

## Resumen

En este proyecto se analiza un modelo (tipo Gause) de red alimentaria en el que interactúan una población de presas, dos de depredadores y una de superdepredador. Se considera que tanto la función de crecimiento como las respuestas funcionales que describen la interacción entre las especies son generales. Se encuentran diversos conjuntos  $\omega$ -límite tales como ciclos límite, toros invariantes que garantizan la coexistencia de las cuatro especies, aplicando la teoría local y las teorías de bifurcación de ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, el análisis realizado nos permitirá encontrar condiciones suficientes en el espacio de parámetros que garantizan que nuestro sistema exhibe bifurcaciones de Hopf, Bogdanov-Takens, Hopf-Hopf y cero-Hopf. Así mismo, se dan algunos ejemplos particulares para validar los resultados generales, considerando que la presa tiene una tasa de crecimiento logístico y la interacción entre las especies es descrita mediante respuestas funcionales tipo Beddington-DeAngelis. Para concluir, se llevan a cabo algunas simulaciones numéricas para validar los resultados obtenidos.

## Abstract

In this work a Gause-type food web model involving a prey, two meso-predator, and a super-predator is analyzed. Both prey's growth rate function and predators' functional responses are considered general, allowing for broad ecological applications. Different types of  $\omega$ -limit sets, such as invariant tori, limit cycles are found to guarantee the coexistence of the four species via bifurcation theory. In particular, the analysis performed allowed us to find sufficient conditions in the parameter space that guarantee the dynamical system associated to the ecological model exhibit Hopf, Bogdanov-Takens, Hopf-Hopf, and Zero-Hopf bifurcations. Also, to verify the results obtained, some examples are given, considering that the prey has a logistic growth rate, and the

interaction among predators is described by Beddington–DeAngelis functional responses. Finally, some numerical simulations are carried out.

## Palabras claves

Estabilidad, Hopf, Bogdanov–Takens, Hopf–Hopf, cero–Hopf, ciclo límite, toro invariante, series de tiempo, forma normal, coexistencia, respuestas funcionales.

## Introducción

Existe una gran variedad de interacciones entre poblaciones que conforman un ecosistema en la naturaleza, que dependen de aspectos biológicos y ecológicos. Una de estas interacciones es la depredación entre especies, la cual ha sido de gran interés tanto en el aspecto ecológico como matemático [1]. Estas interacciones pueden ser de varios tipos: depredador–presa, tritífico, intragremial y red alimentaria que involucra más de dos especies.

El análisis dinámico de EDOs asociados a modelos de interacción entre especies es un tema de investigación interesante hoy en día que contribuye a la literatura en modelos ecológicos deterministas [2, 1]. Rigurosamente hablando, en los modelos deterministas de dinámica poblacional por medio de sistemas de EDOs, la coexistencia de las poblaciones involucradas es de gran relevancia y se garantiza a través de la existencia de diferentes clases de conjuntos límites estables.

El propósito de este trabajo es analizar la dinámica de un modelo de red alimentaria cuatro dimensional tipo Gause, que modela la interacción entre cuatro especies, una presa (P), dos poblaciones de depredadores (MP1 y MP2) y una población de superdepredador (SP1), y garantizar la coexistencia de de cada una de ellas, considerando que las interacciones entre las especies están gobernadas por respuestas funcionales generales y que la presa o recurso tiene función crecimiento general.

Para precisar el modelo a estudiar fijamos la siguiente notación:  $w$  representa la densidad poblacional de un recurso o presa que es comida por dos especies depredadoras especialistas de densidades poblacionales  $x$  y  $y$ , respectivamente, que a su vez son atacadas por un superdepredador con densidad poblacional  $z$ , que también se alimenta de la presa. También se consideran las siguientes premisas:

- La tasa de crecimiento intrínseca de la presa en ausencia de depredadores es medida por un término  $Rwh(w)$ , donde  $h(w)$  es una función positiva suave ( $R$  es como en la Tabla 1).
- Las interacciones MP1-P y MP2-P están dadas por funciones suaves positivas que dependen solamente de la densidad  $w$ :  $f_1(w)$ ,  $f_2(w)$ .
- Las interacciones SP-P, SP-MP1 y SP-MP2 están dadas por funciones suaves positivas que dependen de las densidades  $w, x, y$ :  $g_1(w, x, y)$ ,  $g_2(w, x, y)$  y  $g_3(w, x, y)$ .

- La interacción en el modelo es de tipo Gause: cada interacción depredador-presa como se mencionó antes es llevada a cabo por ataque directo, lo que significa que los depredadores y el superdepredador son especialistas.

Específicamente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que considera nueve parámetros adimensionales cuyo significado ecológico está dado en la Tabla 1:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= R_1 w h(w) - f_1(w) x - f_2(w) y - g_1(w, x, y) z, \\
 \dot{x} &= x(c_1 f_1(w) - d_1) - g_2(w, x, y) z, \\
 \dot{y} &= y(c_2 f_2(w) - d_2) - g_3(w, x, y) z, \\
 \dot{z} &= z(e_1 g_1(w, x, y) + e_2 g_2(w, x, y) + e_3 g_3(w, x, y) - d_3).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Por cuestiones ecológicas, la región de interés para el estudio del sistema (1) es  $\Omega := \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w > 0, x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

Con el fin de destacar el aporte de nuestros resultados en el presente trabajo, se mencionan los resultados en [3] y [4] en los cuales los autores obtuvieron un análisis dinámico para casos especiales del sistema (1).

En efecto, en [3], los autores propusieron y analizaron el modelo (1) tomando en cuenta que la tasa de crecimiento  $Rwh(w)$  es logística y las respuestas funcionales  $f_1, f_2$  son Holling tipo II, y las funciones positivas suaves  $g$  son un tipo de respuestas funcionales Holling II modificadas, es decir; son de la forma

$$g_i(w, x, y) = \frac{a_{i+1} w}{1 + b_2 w + b_3 x + b_4 y}.$$

Estos autores garantizan la existencia de varios puntos de equilibrio y estudian su estabilidad. Finalmente por medio de simulaciones numéricas exhiben un ciclo límite estable.

Por otra parte, en [4], los autores analizaron el modelo (1), bajo las hipótesis débiles de que la razón de crecimiento de la presa,  $Rwh(w)$ , es logística, las respuestas funcionales  $f_1$  y  $f_2$  son Holling tipo II, la respuesta funcional  $g_1$ , que depende solo de la presa  $w$ , es de tipo Holling II y las respuestas funcionales  $g_2$  y  $g_3$  dependen solo de la presa y son de tipo Holling I (son de tipo Lotka-Volterra). Los autores prueban que hay varios puntos de coexistencia y estudian su estabilidad. Además, prueban que se da una bifurcación de Hopf.

En nuestro trabajo estudiaremos la coexistencia de las especies de manera más general haciendo posible que los resultados sean aplicables a una gran variedad de problemas, independientemente de la tasa de crecimiento de la presa  $P$  y de las respuestas funcionales involucradas en la interacción entre las especies.

También, en el presente trabajo de tesis, se establecen los resultados obtenidos en el aspecto ecológico y matemático, que forman parte del artículo publicado en la AIMS [5].

Parámetros	Significado ecológico
$R$	Tasa de crecimiento intrínseco de la presa P.
$c_1$ y $c_2$	Constantes de eficiencia de los depredadores MP1 y MP2 en la conversión del recurso.
$e_1$	Constantes de eficiencia del superdepredador en la conversión del recurso en la interacción SP-P.
$e_2$ y $e_3$	Constantes de eficiencia en las interacciones SP-MP1 y SP-MP2
$d_1, d_2$ y $d_3$	Tasa de mortalidad de los depredadores y superdepredador.

Tabla 1: Significado de los parámetros del Modelo (1).

## Marco Teórico

Con el fin de ser más precisos en la motivación para los resultados principales en este trabajo, citamos algunos trabajos que han influido en el desarrollo de nuestra investigación.

En el caso bidimensional, existe modelo precursor debido a Lotka–Volterra, la cual supone una población presa con crecimiento malthusiano y un depredador que perjudica directamente a la presa en cada encuentro, medido por una respuesta funcional lineal  $f_1(x)$  [6, 2, 1]. Este modelo ha inspirado una clase de modelos tipo Gause que lo generalizan, donde una función suave positiva  $h_1(x)$  captura la tasa de crecimiento de la presa y la respuesta funcional no necesariamente es una función lineal; en este sentido, otros factores ecológicos pueden ser considerados, tales como la saciedad del depredador y la defensa de la población presa, etcétera, [7]; la expresión matemática para este modelo es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= h_1(x) - bf_1(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= c_1f_1(x)y - d_1y,\end{aligned}$$

donde  $c_1$  y  $d_1$  son las constantes de eficiencia del depredador en la conversión del recurso  $x$  y la tasa de mortalidad del depredador, respectivamente. Por otra parte, existen trabajos en los que se abordan casos en los que interactúan tres especies, modelados a través de sistemas de tres EDOs para modelos tritróficos (la Figura 1 muestra la transferencia de energía) o interacción intragremial (la Figura 2 muestra la transferencia de energía). Para el caso de la interacción intragremial, estos tipos de modelos tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= h_1(x) - f_1(x)y - g_1(x)z, \\ \frac{dy}{dt} &= c_1yf_1(x) - g_2(y)z - d_1y, \\ \frac{dz}{dt} &= e_1g_1(x)z + e_2g_2(y)z - d_2z.\end{aligned}$$

Este modelo considera la interacción intragremial entre una presa (P), un depredador (MP) y un superdepredador (SP), donde MP y SP son especialistas y las funciones  $f_2(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  son respuestas funcionales para cada una de las interacciones P-MP, MP-SP y P-SP, respectivamente. Más aún, cuando el término  $g_1(x)z$  no aparece en la primera y tercera ecuación, se recupera el caso tritrófico. Aquí  $c_1$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  son las constantes de eficiencia del depredador en la conversión del recurso  $x$  y  $d_1$ ,  $d_2$  son las tasas de mortalidad de los depredadores.

En [8] los autores estudiaron un modelo tritrófico (ver Figura 1) y garantizaron la coexistencia de las especies probando la existencia de un ciclo límite estable que emerge de una bifurcación de Hopf.

En [9], los autores hicieron un análisis de un modelo tritrófico, encontrando condiciones en los parámetros para garantizar que el sistema diferencial exhibe una bifurcación Bogdanov-Takens, más aún, en el caso de respuestas funcionales Holling, la coexistencia de las tres especies se obtuvo

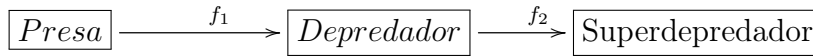


Figura 1: Diagrama del flujo de energía de un modelo tritrófico.

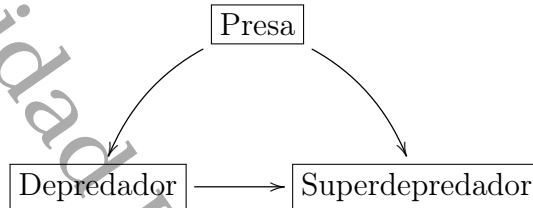


Figura 2: Diagrama del flujo de energía de un modelo intragremial.

mediante la existencia de ciclos límite estables. Por otra parte, una gran variedad de modelos intragremiales han sido estudiados en [10, 11, 12, 13] asumiendo que el superdepredador se alimenta de la presa. En estos trabajos, los autores prueban la coexistencia de las especies garantizando la existencia de conjuntos límite estables por medio de bifurcaciones de Hopf, Bautin y cero-Hopf.

Debido a la gran variedad de redes alimentarias que podemos encontrar en la naturaleza, ha sido necesario incorporar modelos que involucren más de tres especies, lo que ha hecho difícil llevar a cabo un análisis matemático exhaustivo con los métodos usuales. Por ejemplo, en [14] se analizó un modelo de red alimentaria intragremial en el cual interactúan dos presas, un depredador y un superdepredador (ver Figura 3). Los autores probaron la coexistencia de las especies a través de la existencia de conjuntos límite invariantes, mediante las bifurcaciones de Hopf y doble Hopf. Motivados en estos trabajos analizamos un sistema de red alimentaria de cuatro especies en el que se consideran ciertas premisas ecológicas.

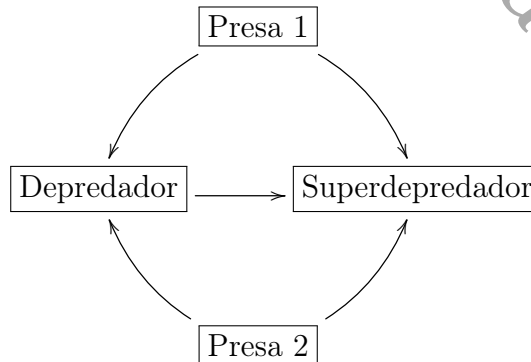


Figura 3: Diagrama del flujo de energía del modelo intragremial de cuatro especies.

## Justificación

De acuerdo con la literatura en ecología y ecología matemática, para el análisis y comprensión de interacciones de especies en ecosistemas acuáticos o terrestres, es factible considerar modelos matemáticos que involucren dos mesodepredadores, un superdepredador y una presa, cuyas interacciones son gobernadas a través de respuestas funcionales que generalizan las de tipo Holling, Crowley–Martin y Beddington–DeAngelis.

En consecuencia, consideramos que los resultados esperados en este trabajo, proveerán un aporte a la literatura derivado del análisis dinámico más general para el sistema (1), generalizando los ya obtenidos en los trabajos anteriormente mencionados. La principal tarea para establecer nuestros resultados consiste en considerar que las respuestas funcionales son generales y que dependen de las densidades poblacionales  $(w, x, y)$ . El enfoque principal que se usará es establecer condiciones en los parámetros y las respuestas funcionales para que el sistema diferencial exhiba una o más bifurcaciones como la de Hopf, de Bogdanov–Takens, de cero-Hopf o bien Hopf–Hopf; y como consecuencia de estos resultados que se obtengan se garantizará la coexistencia de las cuatro especies. Además, la novedad de nuestro trabajo es que los resultados teóricos serán enunciados para respuestas funcionales generales y, al considerar una tasa de crecimiento logística para la presa, nos permitirá explorar una gran variedad de ejemplos que involucran aspectos ecológicos de gran relevancia (por ejemplo, saciedad de los depredadores, interferencia entre depredadores, defensa de la presa, competencia entre los depredadores).

## Pregunta de Investigación

¿Los modelos de tipo Gause son adecuados para describir la interacción ecológica de poblaciones consistentes de dos mesodredadores, un superdepredador y una presa vía ecuaciones diferenciales ordinarias?

¿En dichos modelos de tipo Gause se pueden determinar condiciones genéricas en los parámetros ecológicos y las respuestas funcionales para la aparición de diferentes bifurcaciones de codimensión uno y codimensión dos?

¿Es posible formular aplicaciones plausibles o viable a través de respuestas funcionales que generalicen las de tipo Holling, Crowley–Martin, Beddington–DeAngelis?

¿Se puede garantizar la coexistencia de las cuatro poblaciones mediante la existencia de conjuntos invariantes diferentes a puntos de equilibrios y órbitas periódicas?

## Hipótesis y Supuesto

Para el modelo (1) se pueden establecer condiciones en los parámetros y respuestas funcionales que garanticen la existencia de bifurcaciones de Hopf, de Bogdanov–Takens, de cero-Hopf o bien

Hopf–Hopf; asimismo, es posible mostrar ejemplos introduciendo nuevas respuestas funcionales que generalizan las de tipo Holling, Crowley–Martin, Beddington–DeAngelis. Como consecuencia de los resultados teóricos, se puede garantizar en los ejemplos la coexistencia de las cuatro poblaciones a través de la existencia de conjuntos invariantes como puntos de equilibrio, orbitas periódicas y toros invariantes.

## Objetivo General

Determinar condiciones en los parámetros ecológicos y en las respuestas funciones involucradas en el sistema de ecuaciones diferenciales (1) que garanticen la coexistencia de las cuatro especies a través de las diferentes bifurcaciones que el sistema pueda presentar.

## Objetivos Específicos

1. Comprender los conceptos y resultados básicos de la teoría local y la teoría de bifurcaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Determinar condiciones sobre los parámetros del sistema (1) que garanticen la existencia de al menos un punto de equilibrio hiperbólico.
3. Analizar la dinámica local alrededor de los puntos de equilibrio hiperbólicos.
4. Determinar condiciones sobre los parámetros del sistema (1) que garanticen la existencia de al menos un punto de equilibrio no hiperbólico.
5. Analizar las posibles bifurcaciones en el sistema (1) alrededor de los puntos de equilibrio no hiperbólicos.
6. Determinar en casos concretos, la existencia de conjuntos  $\omega$ -límite que ejemplifiquen los diferentes escenarios en los diagramas de bifurcación.

## Metodología

Para alcanzar el objetivo de este trabajo se realizó lo siguiente:

1. Revisión de los conceptos y resultados básicos de la teoría local y de bifurcaciones de ecuaciones diferenciales [15, 16, 17, 18, 19, 20].
2. Determinación de condiciones sobre los parámetros del sistema (1), que garantizaron la existencia de al menos un punto de equilibrio en  $\Omega$ .

3. Análisis de la estabilidad local de los puntos de equilibrio del sistema (1) en  $\Omega$ .
4. Determinación de condiciones sobre los parámetros del sistema (1) que garantizaron la existencia de al menos un punto de equilibrio no hiperbólico.
5. Siguiendo las ideas usadas en [11, 12, 21, 10] se analizó y determinaron condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizaron la existencia de ciclos límite estables a través de una bifurcación de Hopf [18, 19, 20].
6. Se hizo un análisis sobre los parámetros del sistema para determinar condiciones que garantizaron la existencia de ciclos límite estables a través de una bifurcación de Bogdanov–Takens, esto de acuerdo a [9].
7. Siguiendo las ideas usadas en [14] se hizo un estudio para determinar condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizaron la existencia de conjuntos  $\omega$ -límite (ciclos límite estables, toros invariantes) a través de una bifurcación doble–Hopf [18, 19, 20].
8. Aplicando las ideas en [13], se determinaron condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizaron la existencia de conjuntos  $\omega$ -límite (ciclos límite estables, toros invariantes) a través de una bifurcación cero–Hopf, mediante asistencia computacional.

En este capítulo se presentan conceptos y resultados básicos para el estudio de sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se aborda la teoría local que permite describir el comportamiento cualitativo de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Posteriormente, se aborda la teoría de bifurcación para estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de un parámetro y comprender el cambio en la estructura cualitativa de la solución de un sistema en un punto de equilibrio no hiperbólico a medida que el parámetro varía. Los resultados aquí expuestos están basados en [19, 15, 18], por lo que el lector interesado en profundizar en la teoría puede consultar estas referencias.

## 1.1. Teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se presenta la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias que será usada en capítulos posteriores. Todos estos resultados están basados en [15].

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.** *Suponga que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(E)$ . Diremos que una función  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del sistema diferencial (1.1) en un intervalo  $I$  si  $\mathbf{x}(t)$  es diferenciable en  $I$  y para todo  $t \in I$ ,  $\mathbf{x}(t) \in E$  y*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (1.2)$$

*Además, dado  $\mathbf{x}_0 \in E$ ,  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

*en el intervalo  $I$  si  $t_0 \in I$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del sistema diferencial (1.1) en  $E$ .*

Bajo ciertas condiciones sobre  $\mathbf{f}$ , puede asegurarse que el sistema no lineal (1.1) tiene solución  $\mathbf{x}(t)$  y es única, como lo enuncia el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [15].

**Teorema 1.2** (Teorema de existencia y unicidad). *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$  y suponga que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ . Entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que el problema de valor inicial (1.3) tiene una solución única  $\mathbf{x}(t)$  en el intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .*

Al conjunto de soluciones  $\mathbf{x}(t)$  en el teorema anterior se conoce como *el flujo del sistema* (1.1), el cual se define a continuación.

**Definición 1.3.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ . Dado  $\mathbf{x}_0 \in E$ , sea  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  la solución del problema de valor inicial (1.3) definida en su intervalo máximo de existencia  $I(\mathbf{x}_0)$ . Entonces, para  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ , el conjunto de funciones  $\phi_t$  definido por*

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0), \quad (1.4)$$

es llamado *el flujo de la ecuación diferencial* (1.1) o *el flujo definido por la ecuación diferencial* (1.1) el cual satisface:

- a)  $\phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ,
- b)  $\phi_s(\phi_t(\mathbf{x}_0)) = \phi_{s+t}(\mathbf{x}_0)$ , para todo  $s, t \in I(\mathbf{x}_0)$ ,
- c)  $\phi_{-t}(\phi_t(\mathbf{x}_0)) = \phi_t(\phi_{-t}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0$ , para todo  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ .

A  $\phi_t$  también se le conoce como *el flujo del campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$* . Esto da lugar a la siguiente definición.

**Definición 1.4.** *Un sistema dinámico en  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto, es una función  $\phi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  de clase  $\mathcal{C}^1$  que cumple la condiciones a-c de la Definición 1.3.*

**Definición 1.5.** *Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\phi_t: E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1) definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Diremos que un conjunto  $S \subset E$  es invariante con respecto al flujo  $\phi_t$  si  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Pocos tipos de ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas analíticamente (en términos de funciones elementales), sin embargo, como veremos a continuación, se puede obtener información relevante del comportamiento cualitativo local del sistema (1.1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  mediante el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

cerca del origen, donde  $A = Df(\mathbf{x}_0)$ . A la función lineal  $A\mathbf{x} = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$  se le conoce como la parte lineal de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  y al sistema (1.5) con  $A = Df(\mathbf{x}_0)$  se le llama la *linealización* del sistema (1.1).

**Definición 1.6.** *Un punto  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio o un punto crítico del sistema (1.1) si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz  $Df(\mathbf{x}_0)$  tiene parte real cero.*

Si  $\mathbf{w}_j = u_j + iv_j$  es un vector propio generalizado de  $A$  en (1.5) correspondiente al valor propio  $\lambda_j = a_j + ib_j$ , se definen los subespacios estable, inestable y central de (1.5) como

$$\begin{aligned} E^s &:= \text{Span} \{u_j, v_j : a_j < 0\}, \\ E^u &:= \text{Span} \{u_j, v_j : a_j > 0\}, \\ E^c &:= \text{Span} \{u_j, v_j : a_j = 0\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

A continuación enunciamos uno de los resultados más importantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$ , el sistema no lineal (1.1) tiene variedades estable e inestable  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{U}$  tangentes en  $\mathbf{x}_0$  a los subespacios  $E^s$  y  $E^u$  del sistema linealizado (1.5) y además  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{U}$  tienen la misma dimensión que  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente.

**Teorema 1.7** (Teorema de la Variedad Estable). *Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\phi_t: E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1). Suponga que  $\mathbf{f}(0) = 0$  y que  $D\mathbf{f}(0)$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa y  $n - k$  valores propios con parte real positiva. Entonces existe una variedad diferenciable  $\mathcal{S}$  de dimensión  $k$  tangente al subespacio estable  $E^s$  del sistema lineal (1.5) en 0 tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = 0;$$

*y existe una variedad diferencial  $\mathcal{U}$  de dimensión  $n - k$  tangente al subespacio inestable  $E^u$  de (1.5) en 0 tal que para todo  $t \leq 0$ ,  $\phi_t(\mathcal{U})$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Las variedades estable e inestable en el teorema anterior se conocen como las variedades estable e inestable locales del sistema (1.1) en el origen. Así también se definen variedades estable e inestable globales del sistema no lineal (1.1) en el origen, haciendo que puntos en  $\mathcal{S}$  corran hacia adelante y elementos en  $\mathcal{U}$  hacia atrás.

**Definición 1.8.** *Sea  $\phi_t$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1). Las variedades estable e inestable del sistema (1.1) en el origen, se definen por*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^s(0) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(\mathcal{S}), \\ \mathcal{W}^u(0) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(\mathcal{U}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

*respectivamente. Además, estas variedades son únicas, invariantes y cumplen que para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{W}^s(0)$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = 0;$$

*y para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{W}^u(0)$*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = 0.$$

El siguiente teorema establece la existencia de una variedad central invariante  $\mathcal{W}^c(0)$  tangente al subespacio  $E^c$  del sistema (1.5), en el origen.

**Teorema 1.9** (Teorema de la Variedad Central). *Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^r(E)$ ,  $r \geq 1$  y  $\phi_t: E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1). Suponga que  $\mathbf{f}(0) = 0$  y que  $D\mathbf{f}(0)$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa,  $j$  valores propios con parte real positiva y  $m = n - k - j$  valores propios con parte real cero. Entonces existen variedades central  $\mathcal{W}^c(0)$ , estable  $\mathcal{W}^s(0)$  e inestable  $\mathcal{W}^u(0)$ , de dimensión  $m, j, k$ , de clase  $\mathcal{C}^r$ , tangentes a los subespacios central, estable e inestables  $E^c, E^s$  y  $E^u$  del sistema (1.5), respectivamente. Además,  $\mathcal{W}^c(0), \mathcal{W}^s(0)$  y  $\mathcal{W}^u(0)$  son invariantes bajo el flujo  $\phi_t$  del sistema (1.1).*

**Teorema 1.10** (Teorema de la Variedad Central local). *Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^r(E)$ ,  $r \geq 1$  y  $\phi_t: E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1). Suponga que  $\mathbf{f}(0) = 0$  y que  $D\mathbf{f}(0)$  tiene  $\mathbf{c}$  valores propios con parte real cero,  $\mathbf{s}$  valores propios con parte real negativa, donde  $\mathbf{c} + \mathbf{s} = n$ . Entonces el sistema (1.1) puede ser escrito en la forma diagonal*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= S\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ,  $C$  es una matriz cuadrada con  $\mathbf{c}$  valores propios con parte real cero,  $S$  es una matriz cuadrada con  $\mathbf{s}$  valores propios con parte real negativa y  $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = 0$ ,  $D\mathbf{F}(0) = D\mathbf{G}(0) = \mathbf{0}$ , más aún, existe  $\delta > 0$  y una función  $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^r(N_\delta(0))$  que define la variedad central local

$$\mathcal{W}_{loc}^c(0) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), |\mathbf{x}| < \delta\}, \quad (1.8)$$

con  $\mathbf{h}(0) = 0, D\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ; que satisface

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x})[C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] - S\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = 0.$$

para  $|\mathbf{x}| < \delta$ ; y el flujo en la variedad  $\mathcal{W}^c(0)$  está definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})), \quad (1.9)$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^c$  con  $|\mathbf{x}| < \delta$ .

Otro resultado fundamental en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es el Teorema de Hartman-Grobman, el cual muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, el sistema (1.1) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal (1.5).

**Definición 1.11.** *Diremos que los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos (1.3) y (1.5) son topológicamente equivalentes en una vecindad del origen o que poseen la misma estructura cualitativa cerca del origen si existe un homeomorfismo  $\mathcal{H}$  que lleva un conjunto  $U$  que contiene al origen en un conjunto  $V$  que contiene al origen y que lleva trayectorias del sistema (1.1) en  $U$  a trayectorias de (1.5) en  $V$  y preserva sus orientaciones en el tiempo, esto es, si una trayectoria va de  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  en  $U$  entonces su imagen va de  $\mathcal{H}(\mathbf{x}_1)$  a  $\mathcal{H}(\mathbf{x}_2)$  en  $V$ .*

**Teorema 1.12** (Hartman-Grobman). Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $\mathbf{f} \in C^r(E)$ ,  $r \geq 1$  y  $\phi_t: E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1). Suponga que  $\mathbf{f}(0) = 0$  y que  $A = D\mathbf{f}(0)$  no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo  $\mathcal{H}$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen sobre un conjunto abierto  $V$  que contiene al origen tal que para cada  $\mathbf{x}_0$  en  $U$ , existe un intervalo  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene al cero, tal que para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_0$

$$\mathcal{H} \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathcal{H}(\mathbf{x}_0); \quad (1.10)$$

es decir  $\mathcal{H}$  lleva trayectorias de (1.1) cerca del origen sobre trayectorias de (1.5) cerca del origen y preserva la orientación y la parametrización en el tiempo.

### 1.1.1. Conjuntos límites

Para  $\mathbf{x}_0 \in E$ , la función  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0): \mathbb{R} \rightarrow E$  define una curva solución, trayectoria o una órbita del sistema (1.1) que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0 \in E$ , en el tiempo  $t = 0$ , la cual se puede considerar como el movimiento a lo largo de la curva

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in E: \mathbf{x} = \phi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.11)$$

**Definición 1.13.** Sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in E$  y  $\Gamma = \phi(\cdot, \mathbf{x})$  una trayectoria del sistema (1.1).  $\mathbf{p}$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{p},$$

y  $\mathbf{q}$  es un punto  $\alpha$ -límite de  $\Gamma$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{q}.$$

A los conjuntos

$$\omega(\Gamma) = \{\mathbf{p} \in E: \mathbf{p} \text{ es un punto } \omega\text{-límite de } \Gamma\},$$

$$\alpha(\Gamma) = \{\mathbf{p} \in E: \mathbf{p} \text{ es un punto } \alpha\text{-límite de } \Gamma\},$$

se les llama *conjuntos*  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de  $\Gamma$ , respectivamente. Al conjunto de todos los puntos límite de  $\Gamma$ ,  $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ , se llama *conjunto límite* de  $\Gamma$ .

**Teorema 1.14.**  $\omega(\Gamma)$  y  $\alpha(\Gamma)$  son subconjuntos cerrados de  $E$ . Si además  $\Gamma$  está contenido en un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\omega(\Gamma)$  y  $\alpha(\Gamma)$  son subconjuntos no vacíos, conexos y compactos de  $E$ .

**Teorema 1.15.** Si  $\mathbf{p}$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma$  de (1.1), entonces todos los demás puntos de la trayectoria  $\phi(\cdot, \mathbf{p})$  de (1.1) que pasa por  $\mathbf{p}$  son también puntos  $\omega$ -límite de  $\Gamma$ ; esto es, si  $\mathbf{p} \in \omega(\Gamma)$  entonces  $\Gamma_{\mathbf{p}} \subset \omega(\Gamma)$ . Similarmente si  $\mathbf{p} \in \alpha(\Gamma)$  entonces  $\Gamma_{\mathbf{p}} \subset \alpha(\Gamma)$ .

Notemos del teorema anterior que para todo  $\mathbf{p} \in \omega(\Gamma)$  entonces  $\phi_t(\mathbf{p}) \in \omega(\Gamma)$ , esto es,  $\phi_t(\omega(\Gamma)) \subset \omega(\Gamma)$ . Por la Definición 1.5 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.16.**  $\omega(\Gamma)$  y  $\alpha(\Gamma)$  son invariantes con respecto al flujo de  $\phi_t$  del sistema (1.1).

Un tipo especial de curva solución del sistema (1.1) es aquella que se repite asimismo en el tiempo.

**Definición 1.17.** Un ciclo u órbita periódica del sistema (1.1) es cualquier curva cerrada que no es un punto de equilibrio de (1.1). Una órbita periódica  $\Gamma$  es estable si para cada  $\epsilon > 0$ , existe una vecindad  $U$  de  $\Gamma$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in U$  y  $t \geq 0$ ,  $d(\phi(t, \mathbf{x}), \Gamma) < \epsilon$ .  $\Gamma$  es inestable si no es estable. Por otra parte, es asintóticamente estable si es estable y para todo  $\mathbf{x}$  en alguna vecindad  $U$  de  $\Gamma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, \mathbf{x}), \Gamma) = 0.$$

Nótese que los ciclos del sistema (1.1) son soluciones periódicas dado que  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$  define una curva solución cerrada si y solo si para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(t + T, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$  para  $T > 0$ . Al  $T$  mínimo para el cual se tiene esta igualdad se le llama *periodo* de la órbita periódica  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$ .

**Definición 1.18.** Un ciclo límite  $\Gamma$  es un ciclo del sistema (1.1) el cual es un conjunto  $\alpha$  o  $\omega$ -límite de una trayectoria de (1.1) diferente de  $\Gamma$ . Si un ciclo  $\Gamma$  es el conjunto  $\omega$ -límite de cada trayectoria en una vecindad  $\Gamma$ , entonces  $\Gamma$  es un ciclo  $\omega$ -límite o ciclo límite estable.

## 1.2. Teoría de bifurcación

En esta sección se estudia como el comportamiento cualitativo del sistema (1.1) cambia a medida que cambiamos el campo  $\mathbf{f}$ . Si el comportamiento cualitativo permanece sin cambios para todo campo cercano a  $\mathbf{f}$  entonces el sistema (1.1) o el campo  $\mathbf{f}$  es estructuralmente estable, de lo contrario se dice que es estructuralmente inestable y entonces da lugar a las bifurcaciones. Primero, presentamos el concepto de campo o sistema dinámico estructuralmente estable. Esencialmente, se dice que un campo  $\mathbf{f}$  es estructuralmente estable si para cualquier campo  $\mathbf{g}$  cercano a  $\mathbf{f}$ , se tiene que los campos  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son topológicamente equivalentes.

**Definición 1.19.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ . La norma  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbf{f}$  se define como

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x} \in E} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|,$$

donde  $|\cdot|$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$  y  $\|\cdot\|$  la norma de transformaciones lineales  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Esta norma mide la distancia entre dos funciones en  $\mathcal{C}^1(E)$ . En el caso de que un subconjunto  $K \subset E$  es compacto entonces esta norma en  $K$  es convierte en

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \max_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| + \max_{\mathbf{x} \in K} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\| < \infty.$$

**Definición 1.20.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Un campo vectorial  $\mathbf{f}$  se dice que es estructuralmente estable si existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(E)$  con

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_1 < \epsilon, \quad (1.12)$$

$\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son topológicamente equivalentes en  $E$ .

Como se mencionó al principio, cuando un sistema no es estructuralmente estable, la estructura cualitativa del conjunto de soluciones del sistema cambia para campos muy cercanos a  $\mathbf{f}$ . En esta sección se estudian varios tipos de bifurcaciones que ocurren en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad (1.13)$$

que dependen de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $m = 1, 2$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ; en un punto de equilibrio no hiperbólico. Se verá que las soluciones del sistema cambian a medida que  $\mu$  pasa cierto valor  $\mu_0$ . Este valor  $\mu_0$  de  $\mu$  donde el sistema no es estructuralmente estable se le llama valor de bifurcación. Este tipo de bifurcaciones son llamadas bifurcaciones locales ya que se enfocan en cambios que suceden cerca del punto de equilibrio.

### 1.2.1. Bifurcación de Hopf

A continuación estudiamos un tipo de bifurcación que ocurre en un punto de equilibrio no hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  de un sistema diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

cuando la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  tiene un par simple de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio ( $n-2$  valores propios) con parte real cero. Dado que  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  es invertible, el teorema de la función implícita nos garantiza que para cada  $\alpha$  cercano a  $\alpha_0$  existe un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_\alpha$  cerca de  $\mathbf{x}_0$  el cual varía cuando  $\alpha$  cambia, sin embargo, si los valores propios de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha, \alpha)$  cruzan el eje imaginario en  $\alpha = \alpha_0$ , entonces las dimensiones de las variedades estables e inestables cambian y el retrato fase cambiará cuando  $\alpha$  pase el valor crítico de bifurcación  $\alpha_0$ .

La bifurcación de Hopf ocurre donde una órbita periódica surge cuando la estabilidad del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_\alpha$  cambia. El siguiente teorema caracteriza cuando ocurre una bifurcación de Hopf, el lector interesado en profundizar en el tema puede consultar [19, 15, 22, 23].

**Teorema 1.21.** *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo (1.14). Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto de equilibrio del sistema en  $\alpha = \alpha_0$ , suponga que para todo  $\alpha$  en una vecindad de  $\alpha_0$ , el sistema tiene una familia de equilibrios  $\mathbf{x}(\alpha)$ . Más aún, suponga que la matriz jacobiana  $M_{\mathbf{x}}(\alpha) := D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  tiene un par de valores propios complejos*

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{x}, \alpha) = \mu(\mathbf{x}, \alpha) \pm i\omega(\mathbf{x}, \alpha),$$

*tal que  $\mu(\mathbf{x}_0, \alpha_0) = 0$ ,  $\omega(\mathbf{x}_0, \alpha_0) = \omega_0 > 0$ , esto es,  $M_{\mathbf{x}_0}(\alpha_0)$  tiene un par de valores propios puramente imaginarios  $\pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ ; también,  $n_s$  valores propios con  $Re(\lambda_j) < 0$  y  $n_u$  valores propios con  $Re(\lambda_j) > 0$ , donde  $n_s + n_u + 2 = n$ . Si las siguientes condiciones se satisfacen*

$$\text{H1) } l_1(\mathbf{x}_0, \alpha_0) \neq 0,$$

$$\text{H2) } \partial_\alpha \mu(\mathbf{x}_0, \alpha_0) \neq 0,$$

*donde  $l_1(\mathbf{x}, \alpha)$  es el primer coeficiente de Lyapunov, el cual se calcula de acuerdo al Apéndice A.1. Entonces existe una familia de variedades invariantes suaves de dimensión dos,  $W_c^C$ , cerca del*

origen, tal que el sistema de dimensión  $n$  restringido a  $W_c^C$  es de dimensión dos y tiene la forma normal

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1 (y_1^2 + y_2^2), \\ \dot{y}_2 &= y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2 (y_1^2 + y_2^2),\end{aligned}\tag{1.15}$$

donde  $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $\sigma = \text{sign } l_1(\mathbf{x}_0, \alpha_0) = \pm 1$ .

Más aún el sistema de dimensión  $n$  es topológicamente equivalente localmente en el origen a la forma normal

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1 (y_1^2 + y_2^2), \\ \dot{y}_2 &= y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2 (y_1^2 + y_2^2), \\ \dot{\mathbf{y}}^s &= -\mathbf{y}^s, \\ \dot{\mathbf{y}}^u &= \mathbf{y}^u,\end{aligned}$$

donde  $\sigma = \text{sign } l_1(x_0, \alpha_0) = \pm 1$ ,  $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{y}^s \in \mathbb{R}^{n_s}$  y  $\mathbf{y}^u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

## Análisis del diagrama de bifurcación

Ahora consideremos el sistema diferencial (1.15). El sistema tiene un punto de equilibrio en  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ , cuya matriz jacobiana en este punto está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix},$$

con valores propios  $\lambda_{1,2} = \beta \pm i$ . Tomando  $\sigma = -1$  y considerando coordenadas polares, el sistema (1.15) toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\beta - \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{1.16}$$

por lo que el sistema (1.15) puede ser analizado mediante (1.16), el cual se resuelve de forma independiente para  $\rho$  y  $\theta$  dado que las ecuaciones están desacopladas. Notemos que la primera ecuación tiene un punto de equilibrio en  $\rho = 0$  para todo valor de  $\beta$ . Si  $\beta < 0$ , entonces  $\dot{\rho} < 0$  y  $\rho(t) \rightarrow 0$ , por lo que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = 0$  es un foco estable del sistema (1.15), además este punto permanece estable para  $\beta = 0$ . Para  $\beta > 0$  tenemos lo siguiente

- $\dot{\rho} > 0$  para  $\rho > 0$  pequeño y el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es un foco inestable,
- para  $\rho$  suficientemente grande  $\dot{\rho} < 0$ ,
- existe  $\rho_0 = \sqrt{\beta}$  tal que  $\dot{\rho} = 0$ ; por lo que existe una órbita periódica (ciclo límite) estable alrededor del punto de equilibrio  $x_0$ , la cual es una circunferencia de radio  $\rho_0 = \sqrt{\beta}$ , y en la cual todas las órbitas tanto al interior o al exterior (excepto en el origen) del ciclo se aproximan a este ciclo cuando  $t \rightarrow \infty$ .

La dinámica que presenta el sistema (1.16) se muestra en la Figura 1.1. Esta dinámica presenta una bifurcación de Hopf.

El caso con  $\sigma = 1$  puede ser analizado de la misma manera que el caso anterior. En este caso el sistema presenta una bifurcación de Hopf en  $\beta = 0$ , y contrario al caso anterior, se tiene la existencia de un ciclo límite inestable cuando  $\beta < 0$ , el cual desaparece cuando  $\beta$  pasa de valores negativos a positivos, ver Figura 1.2. En este caso, cuando  $\beta \neq 0$  el punto de equilibrio tiene la misma estabilidad que el caso anterior, es estable para  $\beta < 0$  e inestable para  $\beta > 0$ . Esta dinámica corresponde a una bifurcación de Hopf.

Como se puede notar, tenemos dos tipos de bifurcación de Hopf. La bifurcación considerando  $\sigma = -1$  en el sistema (1.15) se llama supercrítica pues el ciclo límite que surge lo hace para valores positivos del parámetro  $\beta$ , y además es estable. La bifurcación considerando  $\sigma = 1$  se conoce como bifurcación subcrítica dado que el ciclo límite emerge para valores negativos de  $\beta$ , y es inestable.

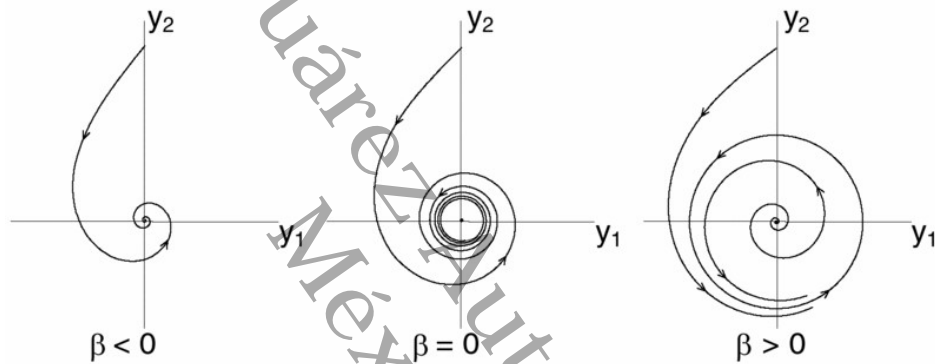


Figura 1.1: Bifurcación de Hopf supercrítica.<sup>1</sup>

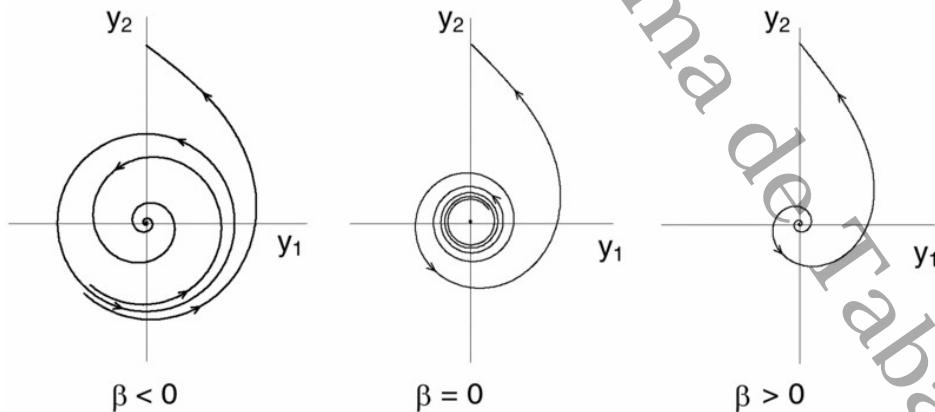


Figura 1.2: Bifurcación de Hopf subcrítica.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Imagen tomada de [http://www.scholarpedia.org/article/Andronov-Hopf\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Andronov-Hopf_bifurcation)

### Algunos resultados necesarios

Los siguientes resultados nos permiten determinar, bajo ciertas hipótesis, la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (1.14) mediante el criterio de Routh-Hurwitz, así como también una condición necesaria para tener una bifurcación de Hopf. Sea

$$P_\lambda = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad (1.17)$$

el polinomio característico de la aproximación lineal del sistema (1.14) en algún punto de equilibrio  $p_0$ . Definamos

$$\Sigma := A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_3^2. \quad (1.18)$$

Por otra parte, de la condición de la bifurcación de Hopf, es necesario que el polinomio característico  $P_\lambda$  se pueda factorizar de la siguiente forma

$$(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda^2 + \omega^2), \quad \omega > 0, \quad (1.19)$$

esto es, que se tenga dos valores propios imaginarios puros. El siguiente lema da un criterio para la estabilidad y una condición necesaria para tener una bifurcación de Hopf.

**Lema 1.22** (Lema 2.1, [12]). *Si  $A_i > 0, i = 1, \dots, 4$ , los siguientes enunciados se cumplen.*

- i) *El punto de equilibrio  $p_0$  es localmente asintóticamente estable si  $\Sigma < 0$ .*
- ii) *Asuma que el  $P_\lambda$  se factoriza como en (1.19). Entonces sus raíces son*

$$\pm i\omega \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2 + 4\omega^2}}{2},$$

$$\text{si y solo si } \Sigma = 0, \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}.$$

La siguiente proposición nos permite calcular la condición de transversalidad  $H2$  del Teorema 1.21.

**Lema 1.23** ([19], pág. 190). *Sea  $M(\tau)$  una matriz real de  $n \times n$  que depende del parámetro  $\tau$  y que tiene un par de valores propios complejos  $\xi(\tau) \pm i\omega(\tau)$  tal que  $\xi(\tau_0) = 0$  y  $\omega(\tau_0) := \omega_0 > 0$ . Entonces, la derivada de la parte real de los valores propios complejos está dado por*

$$\frac{d\xi}{d\tau}(\tau_0) = \text{Re} \left( \bar{\mathbf{p}}^{tr} \cdot \left( \frac{dM}{d\tau}(\tau_0) \cdot \mathbf{q} \right) \right),$$

donde  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$  son vectores propios que satisfacen las condiciones de normalización

$$M(\tau_0)\mathbf{q} = i\omega_0\mathbf{q}, \quad M^{tr}(\tau_0)\mathbf{p} = -i\omega_0\mathbf{p} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{p}}^{tr} \cdot \mathbf{q} = 1.$$

### 1.2.2. Bifurcación de Bogdanov-Takens

En esta sección se estudia la teoría referente a la bifurcación de Bogdanov-Takens. Se sugiere al lector interesado en profundizar en dicha teoría, consultar [19, 15, 22, 18].

La bifurcación de Bogdanov-Takens (BT) es un tipo de bifurcación que ocurre en un punto de equilibrio de una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que depende de dos parámetros (codimensión dos), en el cual el punto de equilibrio tiene dos valores propios cero. Además para valores cercanos de los parámetros, el sistema posee dos puntos de equilibrio, una silla y un foco, que se unen y desaparecen por medio de una bifurcación silla-nodo. Por otra parte, el punto de equilibrio foco sufre una bifurcación que genera un ciclo límite el cual se degenera en una órbita homoclínica a la silla y desaparece por una bifurcación homoclínica.

Empecemos considerando nuevamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1.14) con  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  y además agreguemos las siguientes condiciones:

1. en  $\alpha = \alpha_0$  el sistema tiene un punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ,
2. la linealización  $A = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ , tiene dos valores propios cero,  $\lambda_{1,2} = 0$ , donde  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$  es la matriz jacobiana del campo  $\mathbf{f}$ , y
3. los valores propios restantes tienen parte real distinta de cero.

En general tendremos que el punto de equilibrio  $x_0$  es una raíz doble de la ecuación  $f(x, \alpha_0) = 0$  y el parámetro  $\alpha = \alpha_0$  es el origen del plano de parámetros donde aparecen curvas de tres bifurcaciones de codimensión uno:

- una curva de dos ramas de la bifurcación silla-nodo,
- una curva de la bifurcación Andronov-Hopf, y
- una curva de la bifurcación homoclínica.

**Teorema 1.24.** *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo (1.14). Sea  $x_0$  un punto de equilibrio del sistema en  $\alpha = \alpha_0$ , suponga que para todo  $\alpha$  en una vecindad de  $\alpha_0$ , el sistema tiene una familia de equilibrios  $\mathbf{x}(\alpha)$ . Más aún, suponga que la matriz jacobiana  $M_{\mathbf{x}}(\alpha) := D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  tiene un par de valores propios cero, en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  y  $\alpha = \alpha_0$ ; también,  $n_s$  valores propios con  $Re(\lambda_j) < 0$  y  $n_u$  valores propios con  $Re(\lambda_j) > 0$ , donde  $n_s + n_u + 2 = n$ . Si las siguientes condiciones de no degeneración se satisfacen*

H1)  $a(0)b(0) \neq 0$ ,

H2) la aplicación  $(\mathbf{x}, \alpha) \mapsto (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), Tr(D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)), Det(D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)))$ , es regular en  $(\mathbf{x}, \alpha) = (\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ ,

donde  $a(0)$  y  $b(0)$  son ciertos coeficientes cuadráticos que se calculan usando las fórmulas en el Apéndice A.2 y  $Tr$  y  $Det$  son la traza y el determinante de  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$ , respectivamente. Entonces existe una familia de variedades invariantes suaves de dimensión dos,  $W_c^C$ , cerca del origen, tal que el sistema de dimensión  $n$  restringido a  $W_c^C$  es de dimensión dos y tiene la forma normal

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + \mu y_1 y_2,\end{aligned}\tag{1.20}$$

donde  $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$  y  $\mu = \text{signa}(0)b(0) = \pm 1$ .

Más aún el sistema de dimensión  $n$  es topológicamente equivalente localmente en el origen a la forma normal

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + \mu y_1 y_2, \\ \dot{\mathbf{y}}^s &= -\mathbf{y}^s, \\ \dot{\mathbf{y}}^u &= \mathbf{y}^s,\end{aligned}\tag{1.21}$$

donde  $\mathbf{y}^s \in \mathbb{R}^{n_s}$  y  $\mathbf{y}^u \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

## Análisis del diagrama de bifurcación

A continuación, analizamos la dinámica del sistema (1.20), tomando  $\mu = -1$ . Notemos que un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  es punto de equilibrio de este sistema si cumple  $y_2 = 0$  y adicionalmente

$$\beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 = 0.\tag{1.22}$$

Por lo que el punto de equilibrio del sistema (1.20) está dado por  $p = \left( \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right)$ .

Note que si  $p$  está sobre la parábola

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2^2 - 4\beta_1 = 0\},\tag{1.23}$$

entonces el sistema (1.20) exhibe una bifurcación silla-nodo (también conocida como tangente, fold, punto límite o turning point) dado que la parte lineal en el punto de equilibrio  $E_0 = \left( -\frac{\beta_2}{2}, 0 \right)$  tiene un valor propio cero. Por otra parte, al atravesar  $T$  de derecha a izquierda se tiene la aparición de dos puntos de equilibrio  $E_{1,2} = \left( \frac{-\beta_2 \mp \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right)$ .

Note también que el origen, esto es, el punto  $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ , separa en dos ramas la bifurcación silla-nodo, a saber

$$T_- = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 < 0 \right\} \quad \text{y} \quad T_+ = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4}\beta_2^2, \beta_2 > 0 \right\},\tag{1.24}$$

en el cual se tiene que para  $T_-$  la parte lineal en el punto  $E_0$  tiene un valor propio cero y uno negativo y para  $T_+$  se tiene uno valor propio cero y uno positivo.

Ahora si consideramos el conjunto

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}.\tag{1.25}$$

En este conjunto el sistema (1.20) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf supercrítica que genera un ciclo límite estable. Este ciclo límite existe cerca de  $H$  para  $\beta_1 < 0$ . De hecho este ciclo límite sigue siendo hiperbólico y estable para valores de los parámetros dentro de la región delimitada por  $H$  y por la curva suave

$$P = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \beta_2 < 0 \right\}, \quad (1.26)$$

y ningún otro ciclo límite existe fuera de esta región. Por otra parte, en  $P$  se origina una bifurcación homoclínica. Este análisis nos da el diagrama de bifurcación que se muestra en la Figura 1.3.

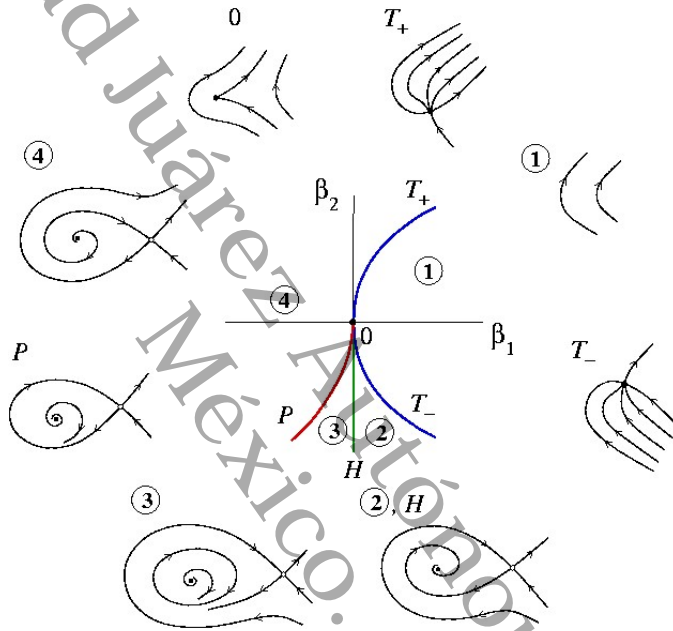


Figura 1.3: Diagrama de Bifurcación de Bogdanov-Takens.<sup>2</sup>

El caso  $\mu = 1$  se trata de manera similar al caso anterior mediante la sustitución  $t \rightarrow -t, y_2 \rightarrow -y_2$ . Esto no afecta la curva de la bifurcación pero el ciclo límite que se obtiene es inestable, esto es, se tendrá una bifurcación de Hopf subcrítica.

### 1.2.3. Bifurcación Hopf-Hopf

Ahora se describe otro tipo de bifurcación que ocurre en un punto de equilibrio no hiperbólico cuando una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de dos parámetros posee dos pares de valores propios puramente imaginarios. Esta bifurcación también es llamada *bifurcación doble Hopf*. El lector interesado en profundizar sobre la teoría puede consultar [19, 15, 22, 18]

<sup>2</sup>Imagen tomada de [http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens\\_bifurcation](http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens_bifurcation).

**Teorema 1.25.** *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo (1.14) con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ . Sea  $x_0$  un punto de equilibrio del sistema en  $\alpha = \alpha_0$ , suponga que para todo  $\alpha$  en una vecindad de  $\alpha_0$ , el sistema tiene una familia de equilibrios  $x(\alpha)$ . Más aún, suponga que la matriz jacobiana  $M_x(\alpha) := Df(x, \alpha)$  tiene dos pares de valores propios complejos*

$$\lambda_{1,2}(x, \alpha) = \mu_1(x, \alpha) \pm i\omega_1(x, \alpha), \lambda_{3,4}(x, \alpha) = \mu_2(x, \alpha) \pm i\omega_2(x, \alpha),$$

*tal que  $\mu_{1,2}(x_0, \alpha_0) = 0$ ,  $\omega_{1,2}(x_0, \alpha_0) > 0$ , esto es,  $M_{x_0}(\alpha_0)$  tiene dos pares de valores propios puramente imaginarios  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ,  $\omega_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ ; también,  $n_s$  valores propios con  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  y  $n_u$  valores propios con  $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ , donde  $n_s + n_u + 4 = n$ . Si las siguientes condiciones se satisfacen*

HH1)  $k\omega_1(\alpha_0) \neq l\omega_2(\alpha_0)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k + l \leq 3$ ,

HH2) la aplicación  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\psi(\alpha) = (\text{Re}\lambda_1(\alpha), \text{Re}\lambda_3(\alpha))$  es regular en  $\alpha_0$ ,

HH3)  $a_{11}(\alpha_0) = \text{Re} G_{2100}(\alpha_0) \neq 0$ ,  $a_{12}(\alpha_0) = \text{Re} G_{1011}(\alpha_0) \neq 0$ ,  
 $a_{21}(\alpha_0) = \text{Re} H_{1110}(\alpha_0) \neq 0$ ,  $a_{22}(\alpha_0) = \text{Re} H_{0021}(\alpha_0) \neq 0$ ,

*donde  $G_{2100}(\alpha_0)$ ,  $G_{1011}(\alpha_0)$ ,  $H_{1110}(\alpha_0)$ ,  $H_{0021}(\alpha_0)$  se calculan de acuerdo al Apéndice A.3, entonces el sistema (1.14) (restringido a la variedad central) es localmente orbitalmente equivalente cerca del origen a la forma normal polar*

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 (\beta_1 + a_{11}(\beta) r_1^2 + a_{12}(\beta) r_2^2) + O\left((r_1^2 + r_2^2)^2\right), \\ \dot{r}_2 &= r_2 (\beta_2 + a_{21}(\beta) r_1^2 + a_{22}(\beta) r_2^2) + O\left((r_1^2 + r_2^2)^2\right), \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1(\beta) + O\left(r_1^2 + r_2^2\right), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2(\beta) + O\left(r_1^2 + r_2^2\right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

## Análisis del diagrama de bifurcación

Como podemos observar, el diagrama de bifurcación de la forma normal depende de los términos  $O(\cdot)$ . Sin embargo, se pueden analizar ciertas características de este mediante la forma truncada de la forma normal (1.27), es decir, sin los términos de orden superior,  $O(\cdot)$ . Notemos que las dos últimas ecuaciones en (1.27) describen rotaciones con velocidades angulares  $\omega_1, \omega_2$ , respectivamente, y no influyen en la forma del diagrama de bifurcación; por lo que este se puede analizar mediante el sistema de amplitudes

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 (\beta_1 + a_{11}(\beta) r_1^2 + a_{12}(\beta) r_2^2), \\ \dot{r}_2 &= r_2 (\beta_2 + a_{21}(\beta) r_1^2 + a_{22}(\beta) r_2^2). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Con esto, tenemos que:

- el punto  $(r_1, r_2) = (0, 0)$  es punto de equilibrio del sistema (1.28), y corresponde a un equilibrio en el origen del sistema (1.14),
- equilibrios de la forma  $(r_1, 0)$  y  $(0, r_2)$  del sistema (1.28) corresponden a ciclos límite de (1.14),

- equilibrios con  $r_{1,2} > 0$  de (1.28), corresponden a toros de dimensión dos para el sistema (1.14),
- ciclos límite en (1.28) corresponden a toros de dimensión tres del sistema (1.14) .

Además la estabilidad de cada uno de los conjuntos invariantes de (1.14) estará determinada por el sistema (1.28).

En general, se tendrán dos casos del diagrama de bifurcación a ser considerados dependiendo si  $a_{11}, a_{22}$  tienen el mismo signo o no, de los cuales se derivan varios subcasos dependiendo del valor de  $\theta$  y  $\delta$ , donde

$$\theta := \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad \delta := \frac{a_{21}}{a_{11}}. \quad (1.29)$$

### Caso simple

Consideremos que

$$a_{11}a_{22} > 0 \quad y \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

En este caso, el punto  $\epsilon_0 = (0, 0)$  es punto de equilibrio del sistema (1.28), para todo  $\beta_{1,2}$ . También los puntos  $\epsilon_1 = (\beta_1, 0), \epsilon_2 = (0, \beta_2)$  son puntos de equilibrios del sistema (1.28) que se bifurcan o dividen en dos líneas de bifurcación

$$H_1 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = 0\} \quad y \quad H_2 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\},$$

respectivamente. Aún más, existe en una vecindad pequeña del espacio fase para  $\|\beta\|$  pequeño, otro punto de equilibrio

$$\epsilon_3 = \left( -\frac{\beta_1 - \theta\beta_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\beta\|^2), \frac{\delta\beta_1 - \beta_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\beta\|^2) \right),$$

el cual coincide con uno de los puntos de equilibrio anteriores y desaparece en las curvas

$$T_1 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = \theta\beta_2 + O(\beta_2^2), \beta_2 > 0\} \quad y \quad T_2 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \delta\beta_1 + O(\beta_1^2), \beta_1 > 0\}.$$

En estas regiones, el comportamiento dinámico del sistema (1.28) será diferente, de acuerdo a lo siguiente:

- |   |   |
|---|---|
| I. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta > 1,$  | IV. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta < 1,$ |
| II. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta < 1,$ |   |
| III. $\theta > 0, \delta < 0,$                  | V. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta > 1.$  |

En este caso simple el sistema (1.28) no tiene ciclos límite.

**Caso difícil**

Consideremos que

$$a_{11}a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \text{ y } a_{11} \neq a_{12}, \quad a_{21} \neq a_{22}.$$

En este caso, los puntos  $(-\beta_1, 0)$  y  $(0, \beta_2)$  son puntos de equilibrios del sistema (1.28), para todo  $\beta_{1,2}$ , que se bifurcan o dividen en las dos líneas de bifurcación  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente. Aún más, existe en una vecindad pequeña del espacio fase para  $\|\beta\|$  pequeño, otro punto de equilibrio

$$\epsilon_3 = \left( \frac{\beta_1 - \theta\beta_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\beta\|^2), \frac{\delta\beta_1 - \beta_2}{\theta\delta - 1} + O(\|\beta\|^2) \right),$$

siempre que las coordenadas sean positivas, el cual coincide con uno de los puntos de equilibrio anteriores y desaparece en las curvas

$$T_1 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \theta\beta_2 + O(\beta_2^2), \beta_2 > 0\} \quad \text{y} \quad T_2 = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = \delta\beta_1 + O(\beta_1^2), \beta_1 < 0\}.$$

En este punto  $\epsilon_3$  puede ocurrir una bifurcación en la que surgen ciclos límite. Tal bifurcación se da en la curva

$$C = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = -\frac{\delta-1}{\theta-1}\beta_1 + O(\|\beta\|^2), \beta_1 - \theta\beta_2 > 0, \delta\beta_1 - \beta_2 > 0 \right\}. \quad (1.30)$$

En estas regiones, el comportamiento dinámico del sistema (1.28) será diferente, de acuerdo a los siguientes casos (ver Figura 1.4(c))

- |   |   |
|---|---|
| I. $\theta > 1, \delta > 1,$                    | IV. $\theta > 0, \delta < 0,$                   |
| II. $\theta > 1, \delta < 1, \theta\delta > 1,$ | V. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta < 1,$  |
| III. $\theta > 0, \delta > 0, \theta\delta < 1$ | VI. $\theta < 0, \delta < 0, \theta\delta > 1.$ |

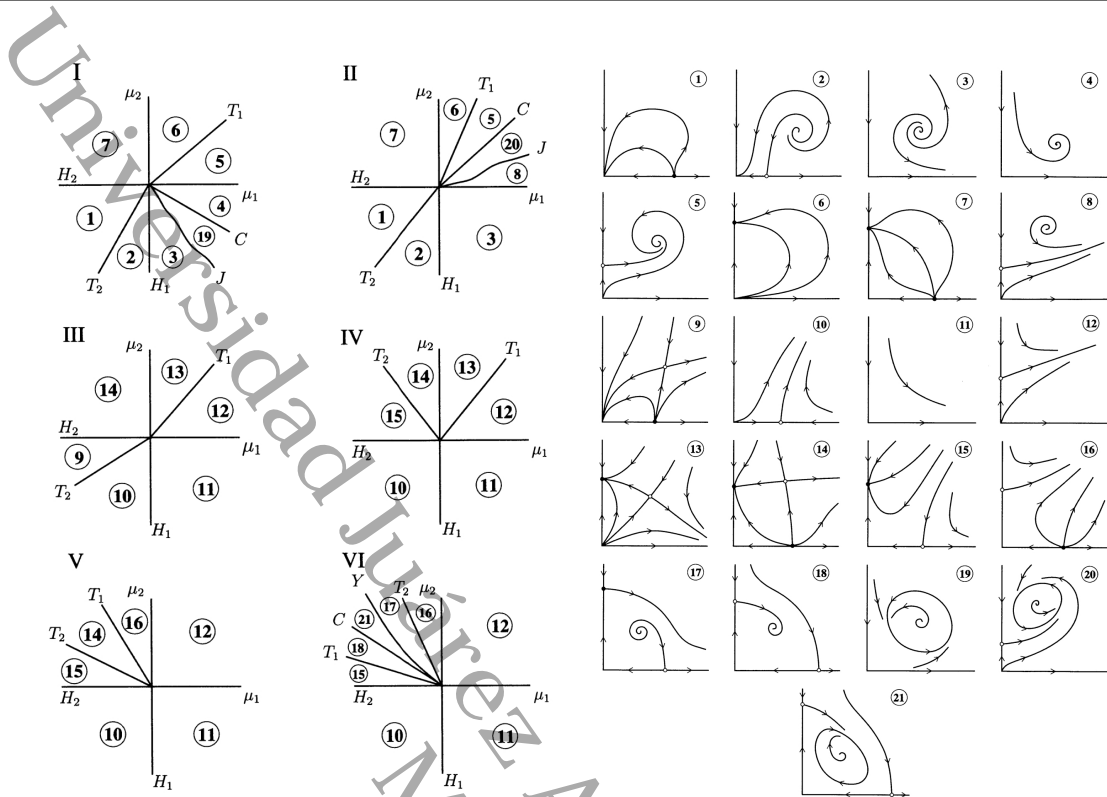
Dependiendo del caso que se tenga, se tendrá un diagrama de bifurcación distinto. En el caso difícil, los diferentes tipos de diagramas de bifurcación y dinámicas que se obtendrán se pueden observar en la Figura 1.4.

En particular, en este trabajo se encontraron condiciones suficientes que garantizan que se tenga el caso VI (ver Capítulo 4).

**1.2.4. Bifurcación Cero-Hopf**

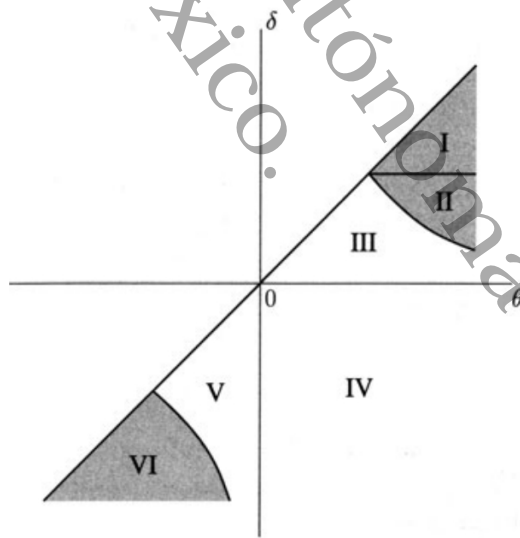
Los resultados de esta sección están basados en [19, 15, 22, 18], por lo que se recomienda consultar dichas referencias.

<sup>3</sup>Imágenes tomadas de [19]



(a) Plano de parámetros

(b) Retratos fase



(c) Regiones en el plano  $\theta - \delta$ , caso difícil.

Figura 1.4: Diagrama de bifurcación del sistema (1.28). Caso difícil.<sup>3</sup>

Este tipo de bifurcación ocurre en un punto de equilibrio no hiperbólico de una familia de

ecuaciones diferenciales ordinarias que depende de un parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , en que la parte lineal del sistema (en un valor particular de  $\alpha$ ) tiene un par de valores propios puramente imaginarios y otro cero. En consecuencia, existe una variedad central tridimensional en la cual nuestro sistema puede experimentar dinámicas distintas, tales como una bifurcación de Hopf, la existencia de cero, uno o dos puntos de equilibrio, una bifurcación toro, la existencia de caos, entre otros. Esta bifurcación está caracterizada por el siguiente teorema.

**Teorema 1.26.** *Consideremos que el sistema diferencial (1.14) con  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  cumple lo siguiente:*

- c1) en  $\alpha = \alpha_0$  el sistema tiene un punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ,
- c2) la linealización  $A = D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ , tiene valores propios  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\omega$ , donde  $\omega > 0$ ,
- c3) los valores propios restantes tienen parte real distinta de cero.

Adicionalmente, si las siguientes condiciones de no degeneración se tienen:

$$\text{ZH1)} \quad B(\alpha_0)C(\alpha_0)E(\alpha_0) \neq 0,$$

$$\text{ZH2)} \quad \text{la aplicación } (\mathbf{x}, \alpha) \mapsto (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \text{Tr}(\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \alpha)), \det(\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \alpha))) \text{ es regular en } (\mathbf{x}, \alpha) = (\mathbf{x}_0, \alpha_0),$$

$$\text{ZH3)} \quad \theta = \theta(\alpha_0) := \frac{\text{Re } H_{110}}{B(\alpha_0)} \neq 0,$$

donde  $B(\alpha_0), C(\alpha_0), E(\alpha_0)$  y  $H_{110}$  se calculan con las fórmulas del Apéndice A.4. Entonces el sistema (1.14) es orbitalmente topológicamente equivalente a la forma normal en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, \zeta)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2 + O((\xi^2 + \rho^2)^2), \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta(\beta)\xi + \xi^2) + O((\xi^2 + \rho^2)^2), \\ \dot{\varphi} &= \omega + \theta_1(\beta)\xi + O(\xi^2 + \rho^2), \end{aligned} \tag{1.31}$$

donde  $s = \text{sign } B(\alpha_0)C(\alpha_0) = \pm 1$ .

## Análisis del diagrama de bifurcación

Notemos que la dinámica que presentará la forma normal depende de los términos  $O(\cdot)$ . Sin embargo, sus características esenciales se pueden analizar mediante la forma truncada de (1.31), es decir, sin los términos de orden superior,  $O(\cdot)$ . Observemos que la última ecuación en (1.31) describe una rotación que no influye en la forma del diagrama de bifurcación; por lo que basta analizar el sistema planar para  $(\xi, \rho)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \beta_1 + \xi^2 + s\rho^2, \\ \dot{\rho} &= \rho(\beta_2 + \theta(\beta)\xi + \xi^2). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Dependiendo de los signos de  $\theta$  y  $s$  se tendrán los siguientes casos:

I.  $s = 1, \theta(0) > 0,$

III.  $s = 1, \theta(0) < 0,$

II.  $s = -1, \theta(0) < 0,$

IV.  $s = -1, \theta(0) > 0.$

En cada uno de estos casos, el sistema (1.32) en una pequeña vecindad del origen puede tener cero o tres puntos de equilibrio. Para  $\rho = 0$  existen dos puntos de equilibrio

$$E_{1,2} = (\xi_{1,2}, 0) = (\pm\sqrt{-\beta_1}, 0), \quad \beta_1 < 0,$$

sobre la línea

$$S = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}.$$

Esta línea es dividida por el punto  $\beta = 0$  en dos ramas,  $S_+$  y  $S_-$ , correspondientes a  $\beta_2 > 0$  y  $\beta_2 < 0$ , respectivamente. Al cruzar  $S_+$  surge un nodo inestable y una silla, mientras que al pasar por  $S_-$  surgen un nodo estable y una silla.

Un punto de equilibrio no trivial

$$E_3 = \left( -\frac{\beta_2}{\theta} + o(\beta_2), \sqrt{-\frac{1}{s} + \frac{\beta_2^2}{\theta^2} + o(\beta_2^2)} \right),$$

puede surgir de  $E_1$  ó  $E_2$  sobre la curva de bifurcación

$$H = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{\beta_2^2}{\theta^2} + o(\beta_2^2) \right\}.$$

Si  $s\theta > 0$  este punto es una silla, mientras que será un nodo si se tiene la desigualdad opuesta.

Por otra parte, si  $s\theta < 0$  el punto  $E_3$  tiene dos valores propios puramente imaginarios para valores de parámetros que pertenecen a la línea

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_2 = 0, \theta\beta_1 > 0\}.$$

El sistema (1.32) experimenta una bifurcación de Hopf cuando atraviesa T, por lo que aparece un ciclo límite que es inestable si  $s = 1$  y  $\theta < 0$  y coexiste con los dos equilibrios  $E_{1,2}$ , los cuales son sillas. Por el contrario, este ciclo límite es estable si  $s = -1$  y  $\theta > 0$  cuando no hay equilibrios con  $\rho = 0$ . También existe una curva de bifurcación  $J$  en  $\beta = 0$ , en la cual el ciclo límite toca la frontera de esta región.

Con lo anterior, se obtiene la siguiente dinámica para el sistema (1.31) sin considerar los términos  $o(\cdot)$ :

- los puntos de equilibrio  $E_{1,2}$  del sistema (1.32) corresponden a puntos de equilibrio del sistema (1.31),
- el punto  $E_3$  del sistema (1.32) corresponde a ciclos límite de (1.31),

- ciclos límite en (1.32) corresponden a toros invariantes del sistema (1.31) cuya estabilidad es la misma que  $E_3$ .

Con todo esto, se tienen las siguiente dinámica para el sistema (1.14) dependiendo del signo de  $s$  y  $\theta$  en (1.32):

- I.  $s = 1, \theta(0) > 0$ , bifurcación de Hopf subcrítica y no existirán toros;
- II.  $s = -1, \theta(0) < 0$ , bifurcación de Hopf subcrítica y no existen toros;
- III.  $s = 1, \theta(0) < 0$ , bifurcaciones de Hopf supercrítica y subcrítica, además existen toros que desaparecen via una destrucción heteroclínica;
- IV.  $s = -1, \theta(0) > 0$ , bifurcaciones de Hopf supercrítica y subcrítica, además existen toros que desaparecen via una explosión.

En particular, en este trabajo obtuvimos las condiciones necesarias que nos permitieron estar en los casos III y IV, cuyos diagramas de bifurcación están dados en la Figura 1.5.



Figura 1.5: Diagrama de bifurcación del sistema (1.32): (a) Caso III, (b) Caso IV.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Imágenes tomadas de [19].

# Bifurcación de Hopf para un modelo de cuatro especies

En el apartado 1.2.1 del capítulo 1 se desarrolló la teoría necesaria para el análisis dinámico del sistema de ecuaciones diferenciales (1). Por lo que el propósito de este capítulo es analizar el sistema 4-dimensional (1) con el fin de encontrar condiciones sobre los parámetros del sistema que puedan garantizar la existencia de ciclos límite estables a través de la bifurcación de Hopf, y con ello la coexistencia de las cuatro especies involucradas. Mostramos resultados generales que se pueden aplicar a una gran variedad de respuestas funcionales, de los cuales se presentan algunos ejemplos en la sección 2.3. Los cálculos se han hecho con el software Mathematica.

## 2.1. Puntos de equilibrio y su estabilidad

Para comenzar con el análisis del sistema (1), debemos encontrar los puntos de equilibrio resolviendo el sistema algebraico

$$\begin{aligned} R_1 w h(w) - f_1(w) x - f_2(w) y - g_1(w, x, y) z &= 0, \\ x(c_1 f_1(w) - d_1) - g_2(w, x, y) z &= 0, \\ y(c_2 f_2(w) - d_2) - g_3(w, x, y) z &= 0, \\ z(e_1 g_1(w, x, y) + e_2 g_2(w, x, y) + e_3 g_3(w, x, y) - d_3) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

y posteriormente analizamos su estabilidad mediante el criterio de Ruth-Hurwitz del Lema 1.22. El siguiente resultado nos proporciona un criterio para la existencia de puntos de equilibrio del sistema (1), cuyas entradas son positivas, garantizando la existencia de al menos un punto de equilibrio para el sistema en el interior de  $\Omega$ .

**Proposición 2.1.** *Sea  $p = (w_0, x_0, y_0, z_0)$  un punto en  $\Omega$ . Si los parámetros del sistema (1) satisfacen*

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{x_0 f_1(w_0) + y_0 f_2(w_0) + z_0 g_1(w_0, x_0, y_0)}{w_0 h(w_0)}, \quad c_1 = \frac{d_1 x_0 + z_0 g_2(w_0, x_0, y_0)}{x_0 f_1(w_0)}, \\ c_2 &= \frac{d_2 y_0 + z_0 g_3(w_0, x_0, y_0)}{y_0 f_2(w_0)} \quad \text{y} \quad d_3 = e_1 g_1(w_0, x_0, y_0) + e_2 g_2(w_0, x_0, y_0) + e_3 g_3(w_0, x_0, y_0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

entonces el punto  $p$  es un punto de equilibrio del sistema (1).

*Demostración.* Con el fin de encontrar los puntos de equilibrio del sistema (1) debemos resolver el sistema algebraico (2.1). En efecto, resolvemos la primera ecuación en términos de  $R_1$ , la segunda ecuación en términos de  $c_1$ , la tercera en términos de  $c_2$  y la cuarta en términos de  $d_3$ ; con lo cual se obtiene el resultado. ◀

**Observación 2.2.** *A partir de ahora, con el fin de garantizar la positividad de los parámetros del sistema y hacer el análisis dinámico del sistema más sencillo, asumimos que las condiciones del Apéndice B.1 se cumplen.*

El siguiente lema nos da condiciones para que un punto de equilibrio  $p \in \Omega$  sea localmente asintóticamente estable.

**Proposición 2.3.** *Suponga que las condiciones en la Proposición 2.1 se tienen,*

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{33}{10} y_0 f_2'(10y_0), & e_1 = e_3 &= \frac{f_2'(10y_0)}{10 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \\ e_2 &= \frac{121 f_2'(10y_0)}{120 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & y \ z_0 &= \frac{y_0 f_2'(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

y  $d_1 > d_{10} := \frac{386660234 y_0 f_2'(10y_0)}{122003525}$ . Entonces,  $p$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable del sistema (1).

*Demostración.* Como las condiciones de la Proposición (2.1) y del Apéndice B.1 se tienen y además  $d_2, e_1, e_2, e_3$  y  $z_0$  satisfacen (2.3), entonces la matriz jacobiana,  $\mathcal{J}(p)$ , asociada a la aproximación lineal del sistema (1) en  $p$  está dada por

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} -8y_0 f_2'(10y_0) & \frac{-235}{12} y_0 f_2'(10y_0) & -15y_0 f_2'(10y_0) & -20y_0 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{3}{40} (4d_1 + 5y_0 f_2'(10y_0)) & \frac{1}{2} y_0 f_2'(10y_0) & \frac{3}{2} y_0 f_2'(10y_0) & -6y_0 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{91}{400} y_0 f_2'(10y_0) & \frac{1}{24} y_0 f_2'(10y_0) & \frac{1}{2} y_0 f_2'(10y_0) & -y_0 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{37y_0 f_2'(10y_0)^2}{1600 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & \frac{11y_0 f_2'(10y_0)^2}{24 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & \frac{157y_0 f_2'(10y_0)^2}{80 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Entonces se tiene que el polinomio característico está dado por

$$\text{pol}(\lambda) = A_{01} \lambda^4 + A_{11} \lambda^3 + A_{21} \lambda^2 + A_{31} \lambda + A_{41}, \text{ donde}$$

$$A_{11} = 7y_0 f_2'(10y_0), \quad A_{21} = \frac{1}{160} y_0 f_2'(10y_0) (940d_1 + 671y_0 f_2'(10y_0)), \quad (2.5)$$

$$A_{31} = \frac{99}{800} y_0^3 f_2'(10y_0)^3, \quad A_{41} = \frac{y_0^3 f_2'(10y_0)^3 (632227y_0 f_2'(10y_0) - 197860d_1)}{12800}.$$

Por lo que haciendo

$$\begin{aligned}\Sigma(d_1) &= A_{11}^2 A_{41} - A_{11} A_{21} A_{31} + A_{31}^2 \\ &= \frac{y_0^5 f_2'(10y_0)^5 (386660234 y_0 f_2'(10y_0) - 122003525 d_1)}{160000}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

De lo anterior se obtiene que  $\Sigma(d_1) < 0$ , y  $A_{i1} > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , siempre que

$$d_1 > d_{10} := \frac{386660234 y_0 f_2'(10y_0)}{122003525}.$$

La prueba se sigue del Lema 1.22 *i*). ◀

## 2.2. Condiciones necesarias para una bifurcación de Hopf

Asumiendo que las condiciones en la Proposición 2.1 y (2.3) son válidas, consideraremos el sistema (1) como un sistema dinámico continuo dependiente de un parámetro con respecto a  $d_1$ . Los siguientes lemas nos proporcionan dos de las condiciones necesarias para tener una bifurcación de Hopf. La primera nos proporciona las expresiones para los valores propios del polinomio asociado al sistema, y la segunda nos garantiza que la condición de transversalidad se tiene.

**Lema 2.4.** *Si las condiciones de la Proposición 2.1 y (2.3) se tienen, entonces haciendo  $d_1 = d_{10}$ , la aproximación lineal del sistema (1) en  $p$ ,  $\mathcal{J}_p$ , tiene valores propios*

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_{3,4} = \left( -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{4}i \sqrt{\frac{588151373}{3485815}} \right) y_0 f_2'(10y_0),$$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{99}{5600}} y_0 f_2'(10y_0)$ .

*Demostración.* De la demostración del Lema 2.3 se tiene que el polinomio característico asociado a la aproximación lineal del sistema (1) está dado por (2.5) y  $\Sigma(d_1)$  como en (2.6). De lo que se tiene que  $\Sigma(d_1) = 0$ , si  $d_1 = d_{10}$ . La prueba se sigue del Lema 1.22 *ii*). ◀

**Lema 2.5.** *Si las hipótesis del Lema 2.4 se satisfacen, entonces la condición de transversalidad se tiene:  $\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial d_1}(d_{10}) \neq 0$ .*

*Demostración.* La aproximación lineal,  $\mathcal{J}_p(d_1)$ , del sistema (1) en el punto de equilibrio  $p$  está dada en la ecuación (2.4) del Lema 2.4, la cual tiene dos valores propios puramente imaginarios cuando  $d_1 = d_{10}$ . Además, tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial d_1}(d_{10}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, un par de vectores propios de  $\mathcal{J}_p(d_{10})$  y  $(\mathcal{J}_p(d_{10}))^T$  correspondientes a los valores propios  $iw_0$  y  $-iw_0$ , respectivamente, están dados en el Apéndice B.2. Haciendo uso del Lema 1.23 y con ayuda del software Mathematica calculamos la derivada de la parte real de  $\lambda_{1,2}$ , lo cual nos da la condición de transversalidad:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial d_1}(d_{10}) = -\frac{5418985509878858378378248102892093750 f_2'(10y_0)^2}{r_1 (340000048128437104 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2 + r_2 f_2'(10y_0)^2)},$$

donde

$$r_1 = 7921207462928967691929 \quad y \quad r_2 = 6527530581280625.$$

**Observación 2.6.** *Ahora podemos enunciar el resultado principal de este capítulo, para esto hacemos las siguientes observaciones:*

- *Los resultados obtenidos en los lemas 2.4 y 2.5 nos dan condiciones necesarias para tener una bifurcación de Hopf, a saber, la existencia de dos valores propios imaginarios puros y la condición de transversalidad. Por otra parte, de las hipótesis del Lema 2.5, con ayuda del software Mathematica, se calculó el primer coeficiente de Lyapunov,  $l(p, d_{10})$  para el sistema (1) usando la fórmula del Apéndice A.1, pero dado que la expresión que se obtuvo es muy grande se ha decidido no incluirla en este trabajo. Sin embargo se mostrarán expresiones explícitas en los ejemplos.*
- *El Teorema de Andronov-Hopf, Teorema 1.21, nos permite concluir que si  $l(p, d_{10})$  es distinto de cero entonces el sistema (1) presenta una bifurcación de Hopf, la cual es supercrítica si  $l(p, d_{10}) < 0$  y es subcrítica si  $l(p, d_{10}) > 0$ .*

Así, como consecuencia de las observaciones anteriores, enunciamos el siguiente resultado.

**Teorema 2.7** (Resultado principal). *Si las condiciones del Lema 2.4 se tienen y  $l(p, d_{10}) \neq 0$ , entonces el sistema (1) exhibe una bifurcación de Hopf en  $p$  con respecto al parámetro  $d_1$  y valor de bifurcación  $d_{10}$ .*

## 2.3. Ejemplos

En esta sección mostraremos como el Teorema 2.7 y su demostración se aplican en ciertos ejemplos para garantizar la coexistencia de las cuatro poblaciones. Considerando el sistema (1), precisamos las siguientes hipótesis que ayudan a proveer ejemplos interesantes:

- El recurso tiene una tasa de crecimiento logístico, esto es, la función de crecimiento intrínseco de la presa esta dado por  $R_1 w h(w) = R_1 w \left(1 - \frac{w}{k_1}\right)$ , donde  $k_1$  es la capacidad de carga del recurso o presa.

- Las respuestas funcionales  $f_1, f_2$  son de tipo Holling II ó IV, la cual mide la saciedad o la defensa de la población presa.
- Con las premisas anteriores, proponemos los siguientes casos de acuerdo al tipo de respuestas funcionales que  $g_1(w, x, y), g_2(w, x, y)$  y  $g_3(w, x, y)$  puedan ser:
  - i) **Caso H1:** Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia, medidas a través de respuestas funcionales de tipo Holling II generalizadas (Falconi *et al.* [24] and cf. [3]).
  - ii) **Caso H2:** La población de presas tiene defensa, los depredadores y el superdepredador experimentan defensa e interferencia, todos a través de respuestas funcionales de tipo Holling II o IV generalizadas (ver Falconi *et al.* [24], Maghool *et al.* [25] y cf. [3]).
  - iii) **Caso H3:** La población de presas tiene defensa, los depredadores experimentan defensa, interferencia o competencia, todos a través de respuestas funcionales de tipo Holling IV generalizadas (ver Falconi *et al.* [24], Maghool *et al.* [25]).

### 2.3.1. Caso H1: Saciedad e interferencia entre depredadores

En este caso las respuestas funcionales son:

$$f_1(x) = \frac{a_1x}{b_1 + x}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x}{b_2 + x}, \quad g_1(w, x, y) = \frac{\alpha_1w}{\beta_1 + \gamma_1w + \delta_1x + \eta_1y},$$

$$g_2(w, x, y) = \frac{\alpha_2x}{\beta_2 + \gamma_2w + \delta_2x + \eta_2y}, \quad g_3(w, x, y) = \frac{\alpha_3y}{\beta_3 + \gamma_3w + \delta_3x + \eta_3y}.$$

Con estas respuestas funcionales, el sistema (1) tendrá nuevos parámetros. Así que con el fin de que se cumplan las condiciones del Apéndice B.1, hacemos las siguientes asignaciones de parámetros

$$\begin{aligned} w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & k_1 &= 20y_0, & b_1 &= b_2 = 10y_0, \\ a_2 &= a_1, & \alpha_2 &= \frac{\alpha_1\beta_2}{2\beta_1}, & \alpha_3 &= \frac{\alpha_1\beta_3}{2\beta_1}, & \gamma_1 &= \frac{2\beta_1}{5y_0}, \\ \gamma_2 &= \frac{\beta_2}{10y_0}, & \gamma_3 &= \frac{\beta_3}{10y_0}, & \delta_1 &= \frac{\beta_1}{6y_0}, & \delta_2 &= \frac{2\beta_2}{3y_0}, \\ \delta_3 &= \frac{\beta_3}{3y_0}, & \eta_1 &= \frac{2\beta_1}{y_0}, & \eta_2 &= \frac{2\beta_2}{y_0}, & \eta_3 &= \frac{4\beta_3}{y_0}. \end{aligned}$$

Todas estas asignaciones de parámetros permiten verificar el Teorema 2.7, a saber:

- Existencia de un punto de equilibrio positivo: las condiciones sobre los parámetros en la Proposición 2.1 se satisfacen y están dadas por:

$$R_1 = \frac{4a_1}{5}, \quad c_1 = \frac{1}{20} + \frac{2d_1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{43}{200} \quad \text{y} \quad d_3 = \frac{163a_1}{800}.$$

- El criterio para la estabilidad del punto de equilibrio se tiene y las hipótesis en la Proposición 1.22 se convierten en:

$$d_2 = \frac{33a_1}{400}, \quad e_1 = \frac{a_1\beta_1}{25y_0\alpha_1}, \quad e_2 = \frac{121a_1\beta_1}{300y_0\alpha_1}, \quad e_3 = \frac{a_1\beta_1}{25y_0\alpha_1} \quad \text{y} \quad d_1 > d_{10} = \frac{193330117a_1}{2440070500}.$$

- El punto de equilibrio y el valor de bifurcación: de la Proposición 2.3

$$p = \left( 10y_0, 6y_0, y_0, \frac{2a_1\beta_1}{5\alpha_1} \right) \quad \text{y} \quad d_{10} = \frac{193330117a_1}{2440070500}.$$

- Condición necesaria para tener una bifurcación de Hopf: Si  $d_1 = d_{10}$ , el Lema 2.4 implica que

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \left( -\frac{7}{80} \pm \frac{1}{160}i\sqrt{\frac{588151373}{3485815}} \right) a_1, \quad \omega_0 = \frac{3}{800}\sqrt{\frac{11}{14}}a_1.$$

- La condición de transversalidad: del Lema 2.5  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial d_1}(d_{10})$  es

$$-\frac{216759420395154335135129924115683750a_1^2\beta_1^2}{7921207462928967691929(261101223251225a_1^2\beta_1^2 + 85000012032109276\alpha_1^2y_0^2)}.$$

- El primer coeficiente de Lyapunov: De acuerdo a la fórmula del Apéndice A.1 tenemos

$$l(p, d_{10}) = -\frac{\sigma_1\sqrt{\frac{7}{22}}\alpha_1^2}{\sigma_2(261101223251225a_1^2\beta_1^2 + 85000012032109276\alpha_1^2y_0^2)};$$

$$\sigma_1 = 2462969600067176324817975122466824746804106998932741257486031563409068557;$$

$$\sigma_2 = 526688741749605671005782626055524511920829633287830408.$$

De los resultados anteriores, tenemos una bifurcación de Hopf supercrítica y por lo tanto la existencia de un ciclo límite estable, lo cual en consecuencia nos garantiza la coexistencia de las cuatro poblaciones.

### 2.3.2. Caso H2: Defensa en la especie depredada e interferencia de los depredadores

Las respuestas funcionales para este caso están dadas por:

$$f_1(x) = \frac{a_1x}{b_1 + x^2}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x}{b_2 + x^2}, \quad g_1(w, x, y) = \frac{\alpha_1w}{\beta_1 + \gamma_1w^2 + \delta_1x + \eta_1y},$$

$$g_2(w, x, y) = \frac{\alpha_2x}{\beta_2 + \gamma_2w + \delta_2x^2 + \eta_2y}, \quad g_3(w, x, y) = \frac{\alpha_3y}{\beta_3 + \gamma_3w + \delta_3x + \eta_3y^2}.$$

Con estas respuestas funcionales, el sistema (1) tendrá nuevos parámetros. Así que con el fin de que se cumplan las condiciones del Apéndice B.1 hacemos las siguientes asignaciones de parámetros

$$\begin{aligned} w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & k_1 &= 20y_0, & b_1 &= b_2 = 300y_0^2, \\ a_1 &= a_2, & \alpha_2 &= \frac{5\alpha_1\gamma_2}{6\delta_1}, & \alpha_3 &= \frac{5\alpha_1\gamma_3}{2\delta_1}, & \gamma_1 &= \frac{3\delta_1}{25y_0}, \\ \beta_1 &= 18y_0\delta_1, & \beta_2 &= 30y_0\gamma_2, & \beta_3 &= 30y_0\gamma_3, & \delta_2 &= \frac{5\gamma_2}{9y_0}, \\ \delta_3 &= \frac{10\gamma_3}{3}, & \eta_1 &= 12\delta_1, & \eta_2 &= 20\gamma_2, & \eta_3 &= \frac{20\gamma_3}{y_0}. \end{aligned}$$

Todas estas asignaciones de parámetros permiten verificar el Teorema 2.7, obteniendo lo siguiente:

- Existencia de un punto de equilibrio positivo: las condiciones de parámetros en la Proposición 2.1 están dadas por:

$$R_1 = \frac{a_2}{25y_0}, \quad c_1 = \frac{1}{20} + \frac{40d_1y_0}{a_2}, \quad c_2 = \frac{43}{200} \quad \text{y} \quad d_3 = \frac{163a_2}{16000y_0}.$$

- El criterio para la estabilidad del punto de equilibrio se tiene y las hipótesis en la Proposición 1.22 se convierten en:

$$d_2 = \frac{33a_2}{8000y_0}, \quad e_1 = \frac{3a_2\delta_1}{250y_0\alpha_1}, \quad e_2 = \frac{121a_2\delta_1}{1000y_0\alpha_1}, \quad e_3 = \frac{3a_2\delta_1}{250y_0\alpha_1} \quad \text{y} \quad d_1 > d_{10}.$$

- El punto de equilibrio y el valor de bifurcación: de la Proposición 2.3

$$p = \left( 10y_0, 6y_0, y_0, \frac{3a_2\delta_1}{25\alpha_1} \right) \quad \text{y} \quad d_{10} = \frac{193330117a_2}{48801410000y_0}.$$

- Condición necesaria para tener una bifurcación de Hopf: Si  $d_1 = d_{10}$ , el Lema 2.4 implica que

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \frac{\left( -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{4}i\sqrt{\frac{588151373}{3485815}} \right) a_2}{800y_0}, \quad \omega_0 = \frac{3}{16000}\sqrt{\frac{11}{14}}a_2.$$

- La condición de transversalidad: del Lema 2.5  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial d_1}(d_{10})$  es

$$\frac{8670376815806173405405196964627350a_2^2\delta_1^2}{880134162547663076881(340000048128437104y_0^2\alpha_1^2 + 93996440370441a_2^2\delta_1^2)}.$$

- El primer coeficiente de Lyapunov: De acuerdo a la fórmula del Apéndice A.1 tenemos

$$l(p_0, d_{10}) = -\frac{\sigma_1\sqrt{\frac{7}{22}}\alpha_1^2}{\sigma_2(93996440370441a_2^2\delta_1^2 + 340000048128437104\alpha_1^2y_0^2)};$$

$$\sigma_1 = 64994862735298475077909616056950614981537201187003542163844594020035717;$$

$$\sigma_2 = 16255825362642150339684648952331865777533424794098242.$$

Con lo anterior, tenemos una bifurcación de Hopf supercrítica y por lo tanto la existencia de un ciclo límite estable, lo cual en consecuencia nos garantiza la coexistencia de las cuatro poblaciones.

### 2.3.3. Caso H3: Defensa, competencia e interferencia en la especie depredada

Las respuesta funcionales para este tercer caso están dadas por:

$$f_1(x) = \frac{a_1x}{b_1 + x^2}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x}{b_2 + x^2}, \quad g_1(w, x, y) = \frac{\alpha_1w}{\beta_1 + \gamma_1w^2 + \delta_1x^2 + \eta_1y},$$

$$g_2(w, x, y) = \frac{\alpha_2x}{\beta_2 + \gamma_2w + \delta_2x^2 + \eta_2y^2}, \quad g_3(w, x, y) = \frac{\alpha_3y}{\beta_3 + \gamma_3w + \delta_3x + \eta_3y^2}.$$

Con estas respuestas funcionales, el sistema (1) tendrá nuevos parámetros. Así que con el fin de que se cumplan las condiciones del Apéndice B.1 hacemos las siguientes asignaciones de parámetros

$$w_0 = 10y_0, \quad x_0 = 6y_0, \quad k_1 = 20y_0, \quad b_1 = b_2 = 300y_0^2, \quad a_1 = a_2,$$

$$\alpha_2 = \frac{7\alpha_1\beta_2}{16\beta_1}, \quad \alpha_3 = \frac{7\alpha_1\beta_3}{12\beta_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{175y_0^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{40y_0}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_3}{30y_0},$$

$$\delta_1 = \frac{\beta_1}{252y_0^2}, \quad \delta_2 = \frac{\beta_2}{72y_0^2}, \quad \delta_3 = \frac{\beta_3}{9y_0}, \quad \eta_1 = \frac{4\beta_1}{7y_0}, \quad \eta_2 = \frac{\beta_2}{4y_0^2}, \quad \eta_3 = \frac{2\beta_3}{3y_0^2}.$$

Todas estas asignaciones de parámetros permiten verificar el Teorema 2.7, obteniendo lo siguiente:

- Existencia de un punto de equilibrio positivo: las condiciones de parámetros en la Proposición 2.1 están dadas por:

$$R_1 = \frac{a_1}{25y_0}, \quad c_1 = \frac{1}{20} + \frac{40d_1y_0}{a_1}, \quad c_2 = \frac{43}{200} \quad \text{y} \quad d_3 = \frac{163a_1}{16000y_0}.$$

- El criterio para la estabilidad del punto de equilibrio se tiene y las hipótesis en la Proposición 1.22 se convierten en:

$$d_2 = \frac{33a_1}{8000y_0}, \quad e_1 = \frac{a_1\beta_1}{1750y_0^2\alpha_1}, \quad e_2 = \frac{121a_1\beta_1}{21000y_0^2\alpha_1}, \quad e_3 = \frac{a_1\beta_1}{1750y_0^2\alpha_1}, \quad \text{y} \quad d_1 > d_{10}.$$

- El punto de equilibrio y el valor de bifurcación: de la Proposición 2.3

$$p = \left( 10y_0, 6y_0, y_0, \frac{a_1\beta_1}{175y_0\alpha_1} \right) \quad \text{y} \quad d_{10} = \frac{193330117a_1}{48801410000y_0}.$$

- Condición necesaria para tener una bifurcación de Hopf: Si  $d_1 = d_{10}$ , el Lema 2.4 implica que

$$\lambda_{1,2} = i\omega_0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \frac{\left( -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{4}i\sqrt{\frac{588151373}{3485815}} \right) a_1}{800y_0}, \quad \omega_0 = \frac{3}{16000} \sqrt{\frac{11}{14} \frac{a_1}{y_0}}.$$

- La condición de transversalidad: del Lema 2.5  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial d_1}(d_{10})$  es

$$-\frac{1238625259400881915057885280661050a_1^2\beta_1^2}{7921207462928967691929(2380000336899059728y_0^2\alpha_1^2 + 1492006990007a_2^2\beta_1^2)},$$

- El primer coeficiente de Lyapunov: De acuerdo a la fórmula del Apéndice A.1 tenemos

$$l(p, d_{10}) = -\frac{\sigma_1 \sqrt{\frac{7}{22}} y_0^2 \alpha_1^2}{\sigma_2 (1492006990007 a_1^2 \beta_1^2 + 2380000336899059728 \alpha_1^2 y_0^4)};$$

$$\sigma_1 = 5655950984333915946070106313708512470022267338639122359619109215102383861;$$

$$\sigma_2 = 119701986761274016137677869558080102543655218938359782.$$

Nuevamente, tenemos la coexistencia de las cuatro poblaciones mediante la existencia de un ciclo límite estable vía una bifurcación de Hopf supercrítica.

### 2.3.4. Resultados numéricos

Con el fin de visualizar los resultados anteriores para la coexistencia de las cuatro especies mediante el surgimiento de un ciclo límite estable, en los siguientes ejemplos daremos valores específicos a los parámetros libres en cada uno de los casos abordados de la sección 2.3.

**Ejemplo 2.8** (Caso H1). Consideramos los siguientes valores para los parámetros libres en el **Caso H1** de la sección 2.3

$$a_1 = 40, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = 2.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{p} = (100, 60, 10, 8)$  y  $d_{10} = \frac{386660234}{122003525}$ . De acuerdo a las fórmulas explícitas obtenidas en el **Caso H1** para validar el Teorema 2.7, todos los valores numéricos de los parámetros están dados en la Tabla 2.1 de la cual, numéricamente, la condición de transversalidad se tiene ya que  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2}(d_{10}))}{\partial d_1} < 0$ , esto quiere decir que  $\text{Re}(\lambda)$  es una función decreciente en  $d_1$ , por lo cual si  $d_1 > d_{10}$  el punto de equilibrio  $p$  es localmente asintóticamente estable y si  $d_1 < d_{10}$  se vuelve inestable, y por lo tanto, existe un ciclo límite estable que emerge de una bifurcación de Hopf la cual es supercrítica, dado que el primer coeficiente de Lyapunov es  $l_1(d_{10}) = -0.0306563$ .

Con todos los resultados numéricos anteriores, para visualizar el ciclo límite, hacemos la perturbación  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$  (en el cual existen otros puntos de equilibrio, ver Tabla 2.2), y tomando la condición inicial

$$q = \left( w_0 + \frac{1}{10^2}, x_0 + \frac{1}{10^2}, y_0 + \frac{1}{10^2}, z_0 + \frac{1}{10^2} \right),$$

en el espacio fase, se tiene una trayectoria que tiende a un ciclo límite estable, cuya proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \simeq \{(0, x, y, z)\}$  está dada en la Figura 2.1(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 2.1(a)-(d).

**Ejemplo 2.9** (Caso H2). Consideramos los siguientes valores para los parámetros libre en el **Caso H2** de la sección 2.3

$$a_2 = 7000, \quad \delta_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = 90.$$

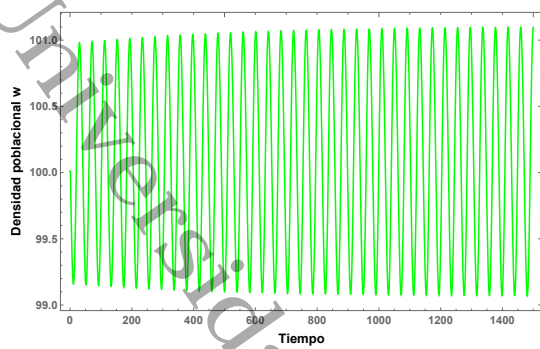
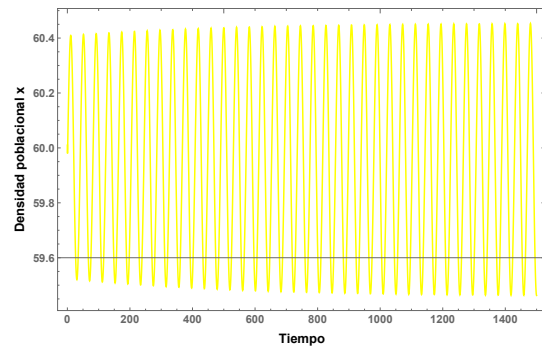
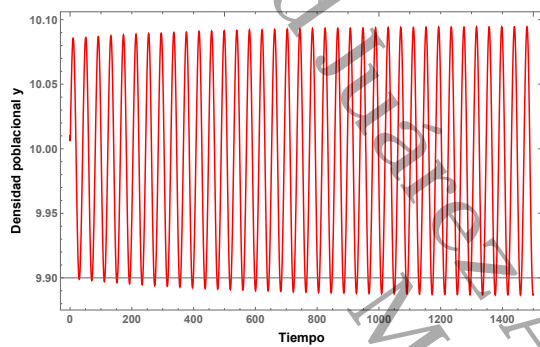
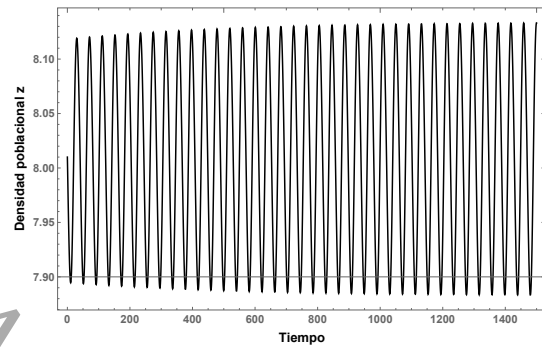
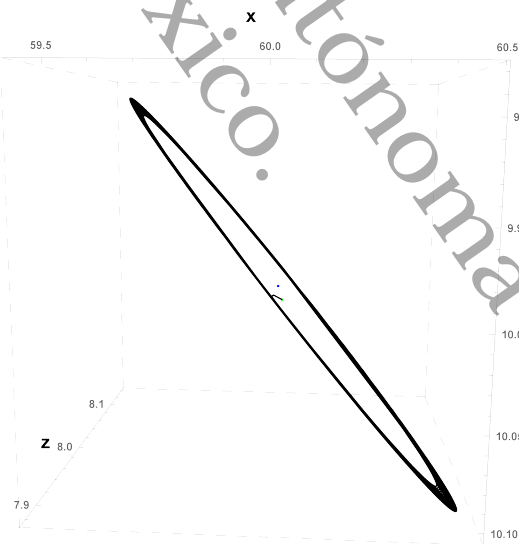
Por lo tanto,  $\mathbf{p} = \left( 100, 60, 10, \frac{28}{3} \right)$  y  $d_{10} = \frac{193330117}{69716300}$ . De acuerdo a las fórmulas explícitas obtenidas en el **Caso H2** para validar el Teorema 2.7, todos los valores numéricos de los parámetros están

Valores numéricos de los parámetros en <b>Caso H1</b>	
Coordenadas del punto de equilibrio	$w_0 = 100, x_0 = 60, y_0 = 10, z_0 = 8.$
Hipótesis de la Proposición 2.1	$R_1 = 32, c_1 = \frac{405954979}{1952056400}, c_2 = \frac{43}{200}, d_3 = \frac{163}{20},$
Condiciones (2.3) en la Proposición 2.3	$d_2 = \frac{33}{10}, e_1 = e_3 = \frac{2}{25}, e_2 = \frac{121}{150}. d_1 > d_{10}.$
Capacidad de carga de la presa	$k_1 = 200$
Parámetros en las respuestas funcionales de MP1 y MP2	$a_1 = a_2 = 40, b_1 = b_2 = 100.$
Parámetros de las respuestas funcionales del SP	$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \quad \gamma_1 = \frac{1}{25}, \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{100},$ $\delta_1 = \frac{1}{60}, \delta_2 = \frac{1}{15}, \delta_3 = \frac{1}{30}, \eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{5}, \eta_3 = \frac{2}{5}.$
Valor del parámetro del bifurcación	$d_{10} = \frac{386660234}{122003525} = 3.16925,$
Condición de transversalidad y coeficiente de Liapunov	$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})(d_{10})}{\partial d_1} = -0.00127211, l_1(p, d_{10}) = -0.0306563.$

Tabla 2.1: Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: **Caso H1**

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -8.15, \lambda_2 = -3.3, \lambda_3 = -3.15925, \lambda_4 = 32,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (61.2347, 89.4951, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = -0.682686 \pm 6.56031i, \lambda_3 = -0.0338391, \lambda_4 = 3.35867,$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (62.2642, 0, 89.3984, 0)$	$\lambda_1 = -7.49251, \lambda_{2,3} = -0.752962 \pm 6.65219i, \lambda_4 = 0.0327315,$	Silla
$\mathbf{p} = (100, 60, 10, 8)$	$\lambda_{1,2} = -3.50105 \pm 3.2384i, \lambda_{3,4} = 0.00105304 \pm 0.156567i,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -32, \lambda_2 = -4.59444, \lambda_3 = 2.38642, \lambda_4 = 2.43333,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (160.958, 26.4719, 0, 8.6244)$	$\lambda_1 = -21.1615, \lambda_2 = -0.465325, \lambda_{3,4} = 0.247547 - 2.58722i,$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (104.9, 57.5775, 9.47748, 8.55715)$	$\lambda_{1,2} = -3.83328 \pm 1.73349i, \lambda_3 = -0.334043, \lambda_4 = 0.107175,$	Silla

Tabla 2.2: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : **Caso H1**.

(a) Densidad poblacional  $w$ .(b) Densidad poblacional  $x$ .(c) Densidad poblacional  $y$ .(d) Densidad poblacional  $z$ .

(e) Proyección del ciclo límite estable.

Figura 2.1: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a  $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$  en Caso H1.

Valores numéricos de los parámetros en <b>Caso H2</b>	
Coordenadas del punto de equilibrio	$w_0 = 100, x_0 = 60, y_0 = 10, z_0 = 9.3333$
Hipótesis de la Proposición 2.1	$R_1 = 28, c_1 = 0.208463, c_2 = 0.215, d_3 = 7.13125,$
Condiciones (2.3) en la Proposición 2.3	$d_2 = 2.8875, e_1 = e_3 = 0.93333, e_2 = 0.941111, d_1 > d_{10},$
Capacidad de carga de la presa	$k_1 = 200$
Parámetros en las respuestas funcionales de MP1 y MP2	$a_1 = a_2 = 7000, b_1 = b_2 = 30000.$
Parámetros de las respuestas funcionales del SP	$\alpha_1 = 90, \alpha_2 = 75, \alpha_3 = 75, \beta_1 = 180, \beta_2 = \beta_3 = 300, \gamma_1 = 0.012, \gamma_2 = \gamma_3 = 1,$ $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.0555556, \delta_3 = 3.33333, \eta_1 = 12, \eta_2 = 20, \eta_3 = 2.$
Valor del parámetro del bifurcación	$d_{10} = 2.7731.$
Condición de transversalidad y coeficiente de Liapunov	$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})(d_{10})}{\partial d_1} = -0.00172392, l_1(p, d_{10}) = -0.0652417.$

Tabla 2.3: Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: **Caso H2**.

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\tau_1 = (65.887, 0, 92.1118, 0)$	$\lambda_1 = -6.68024, \lambda_{2,3} = -2.23862 \pm 5.95793i, \lambda_4 = 0.0289307,$	Silla
$\tau_2 = (0, 0, 0, 200)$	$\lambda_1 = -28, \lambda_2 = -4.5858, \lambda_3 = 1.39473, \lambda_4 = 1.4125,$	Silla
$\tau_3 = (64.9785, 92.4147, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = -2.21631 - 5.86777i, \lambda_3 = -0.02992, \lambda_4 = 2.32866,$	Silla
$\tau_4 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -7.13125, \lambda_2 = -2.8875, \lambda_3 = -2.7631, \lambda_4 = 28,$	Silla
$\tau_5 = (157.0780, 33.3956, 0, 9.81211)$	$\lambda_1 = -16.1556, \lambda_2 = 0.141686, \lambda_{3,4} = 0.188479 \pm 2.37279i,$	Silla
$\tau_6 = (138.629, 42.1744, 4.3054, 11.1057)$	$\lambda_1 = -12.076, \lambda_2 = -0.0726883, \lambda_{3,4} = 0.150308 \pm 2.03704i,$	Silla
$\tau_7 = (100, 60, 10, 9.33333)$	$\lambda_{1,2} = -3.06355 \pm 2.83248i, \lambda_{3,4} = 0.00105376 \pm 0.139704i,$	Silla
$\tau_8 = (104.48, 57.8423, 9.52163, 9.91994)$	$\lambda_{1,2} = -3.12651 \pm 1.72226i, \lambda_3 = -0.393033, \lambda_4 = 0.0692529,$	Silla

Tabla 2.4: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : **Caso H2**.

dados en la Tabla 2.3 de la cual, numéricamente, la condición de transversalidad se tiene ya que  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})(d_{10})}{\partial d_1} < 0$ , esto quiere decir que  $\text{Re}(\lambda)$  es una función decreciente en  $d_1$ , por lo cual si  $d_1 > d_{10}$  el punto de equilibrio  $p$  es localmente asintóticamente estable y si  $d_1 < d_{10}$  se vuelve inestable, y por lo tanto, existe un ciclo límite estable que emerge de una bifurcación de Hopf la cual es supercrítica, dado que el primer coeficiente de Lyapunov es  $l_1(d_{10}) = -0.0652417$ .

Con todos los resultados numéricos anteriores, para visualizar el ciclo límite, hacemos la perturbación  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$  (ver Tabla 2.4 para los puntos de equilibrio en este valor de  $d_1$ ), y tomando la condición inicial

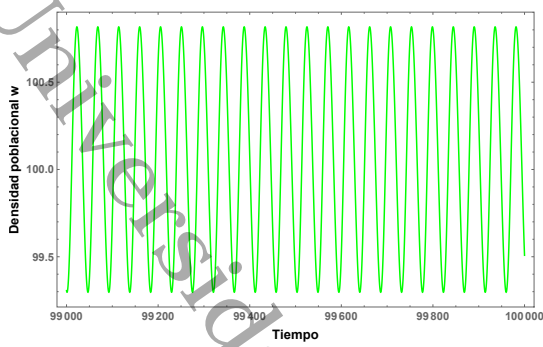
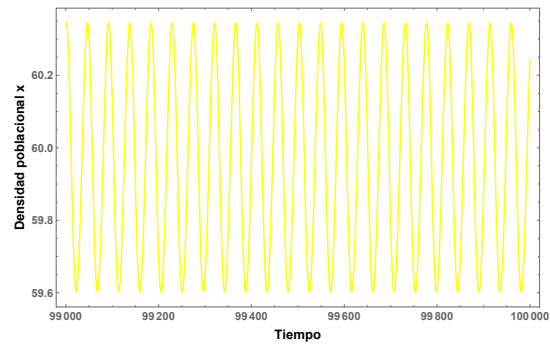
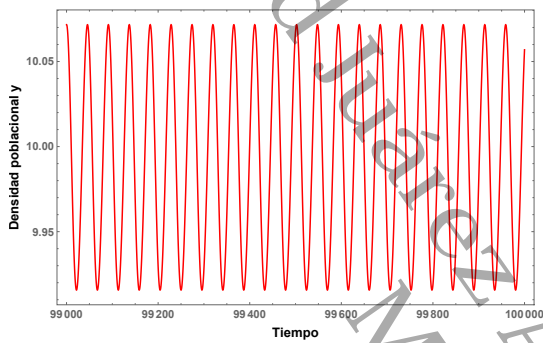
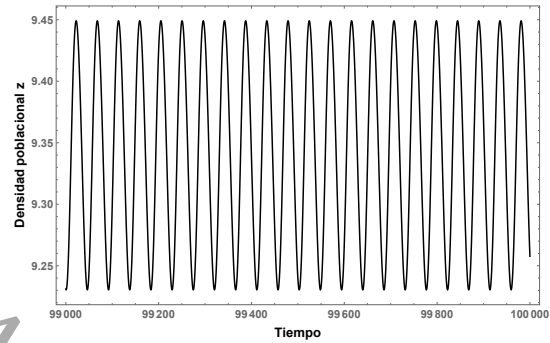
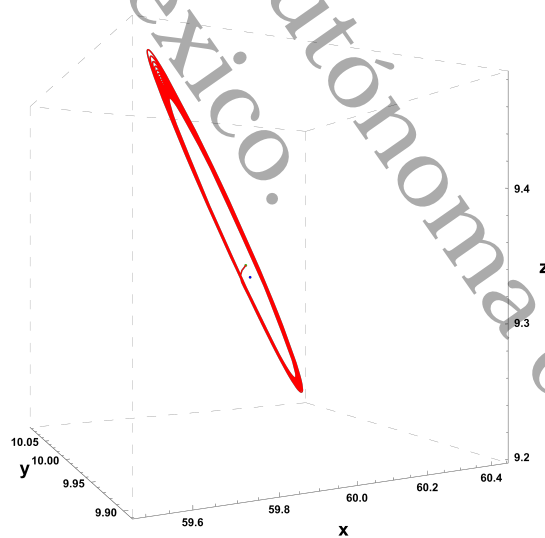
$$q = \left( w_0 + \frac{1}{10^2}, x_0 + \frac{1}{10^2}, y_0 + \frac{1}{10^2}, z_0 + \frac{1}{10^2} \right),$$

en el espacio fase, se tiene una trayectoria que tiende a un ciclo límite estable, cuya proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)} \simeq \{(0, x, y, z)\}$  está dada en la Figura 2.2(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 2.2(a)-(d).

**Ejemplo 2.10** (Caso H3). Consideramos los siguientes valores para los parámetros libre en el **Caso H3** de la sección 2.3

$$a_1 = 6020, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = 1.$$

Por lo tanto,  $p = \left( 100, 60, 10, \frac{86}{25} \right)$  y  $d_{10} = \frac{8313195031}{3485815000}$ . De acuerdo a las fórmulas explícitas obtenidas en el **Caso H3** para validar el Teorema 2.7, todos los valores numéricos de los parámetros están

(a) Densidad poblacional  $w$ .(b) Densidad poblacional  $x$ .(c) Densidad poblacional  $y$ .(d) Densidad poblacional  $z$ .

(e) Proyección del ciclo límite estable.

Figura 2.2: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a  $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$  en Caso H2.

Valores numéricos de los parámetros en <b>Caso H3</b>	
Coordenadas del punto de equilibrio	$w_0 = 100, x_0 = 60, y_0 = 10, z_0 = 3.44$
Hipótesis de la Proposición 2.1	$R_1 = 24.08, c_1 = 0.207798, c_2 = 0.215, d_3 = 6.13288,$
Condiciones (2.3) en la Proposición 2.3	$d_2 = 2.48325, e_1 = e_3 = 0.0344, e_2 = 0.346867, d_1 < d_{10}.$
Capacidad de carga de la presa	$k_1 = 200$
Parámetros en las respuestas funcionales de MP1 y MP2	$a_1 = a_2 = 6020, b_1 = b_2 = 30000.$
Parámetros de las respuestas funcionales del SP	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.4375, \alpha_3 = 0.583333, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1, \gamma_1 = 0.0000571429,$ $\gamma_2 = 0.0025, \gamma_3 = 0.00333333, \delta_1 = 0.0000396825, \delta_2 = 0.000138889, \delta_3 = 0.0111111,$ $\eta_1 = 0.0571429, \eta_2 = 0.0025, \eta_3 = 0.00666667.$
Valor del parámetro del bifurcación	$d_{10} = 2.38486.$
Condición de transversalidad y coeficiente de Lyapunov	$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2}(d_{10}))}{\partial d_1} = -0.000237563, l_1(p, d_{10}) = -0.111732.$

Tabla 2.5: Valores de los parámetros para verificar numéricamente el Teorema 2.7: **Caso H3**.

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\tau_1 = (65.887, 0, 92.1118, 0)$	$\lambda_1 = -5.75281, \lambda_{2,3} = -1.92521 \pm 5.12382i, \lambda_4 = 0.025206,$	Silla
$\tau_2 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -24.08, \lambda_2 = -4.03896, \lambda_3 = 1.19927, \lambda_4 = 1.21475,$	Silla
$\tau_3 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -6.13288, \lambda_2 = -2.48325, \lambda_3 = -2.37486, \lambda_4 = 24.08,$	Silla
$\tau_4 = (143.211, 41.3567, 0, 4.27427)$	$\lambda_1 = -11.1049, \lambda_2 = -0.100762, \lambda_{3,4} = 0.105643 \pm 2.0217i,$	Silla
$\tau_5 = (102.863, 58.6174, 9.69578, 3.58318)$	$\lambda_{1,2} = -2.66742 \pm 1.89874i, \lambda_3 = -0.251614, \lambda_4 = 0.0760893,$	Silla
$\tau_6 = (100, 60, 10, 3.44)$	$\lambda_{1,2} = -2.6348 \pm 2.43467i, \lambda_{3,4} = 0.00105469 \pm 0.123114i,$	Silla

Tabla 2.6: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ : **Caso H3**.

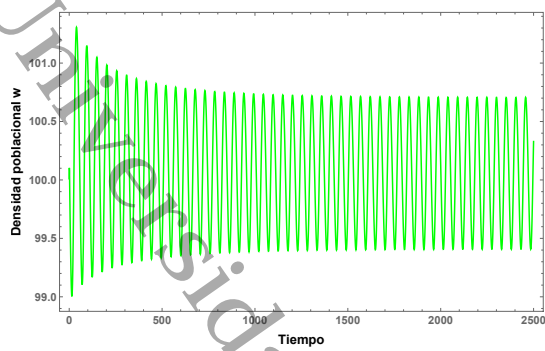
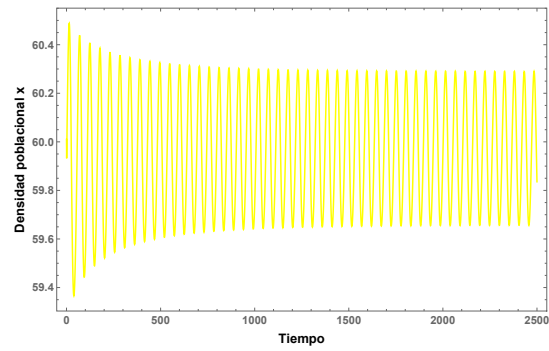
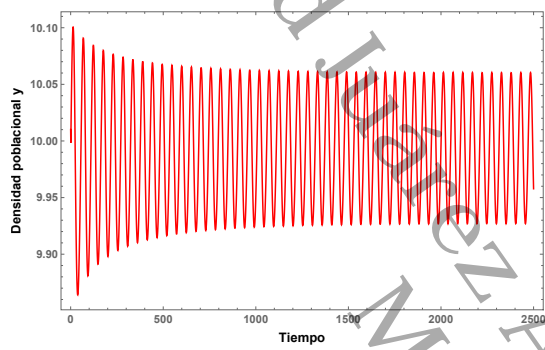
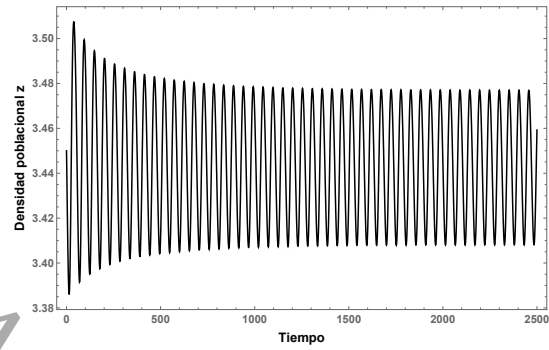
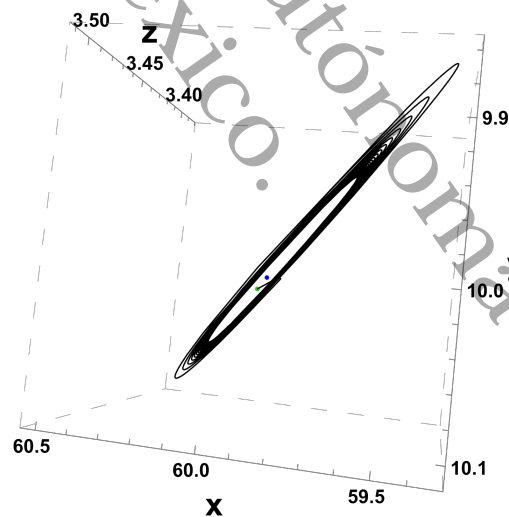
dados en la Tabla 2.5 de la cual, numéricamente, la condición de transversalidad se tiene ya que  $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2}(d_{10}))}{\partial d_1} < 0$ , esto quiere decir que  $\text{Re}(\lambda)$  es una función decreciente en  $d_1$ , por lo cual si  $d_1 > d_{10}$  el punto de equilibrio  $p$  es localmente asintóticamente estable y si  $d_1 < d_{10}$  se vuelve inestable, y por lo tanto, existe un ciclo límite estable que emerge de una bifurcación de Hopf la cual es supercrítica, dado que el primer coeficiente de Lyapunov es  $l_1(p, d_{10}) = -0.111732$ .

Con todos los resultados numéricos anteriores, para visualizar el ciclo límite, hacemos la perturbación  $d_1 = d_{10} - \frac{1}{10^2}$ , (todos los puntos de equilibrio están dados en la Tabla 2.6) y tomando la condición inicial

$$q = \left( w_0 + \frac{1}{10^2}, x_0 + \frac{1}{10^2}, y_0 + \frac{1}{10^2}, z_0 + \frac{1}{10^2} \right),$$

en el espacio fase, se tiene una trayectoria que tiende a un ciclo límite estable, cuya proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \simeq \{(0, x, y, z)\}$  está dada en la Figura 2.3(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 2.3(a)-(d).

En resumen, para el sistema (1) se analizaron distintos casos de interacción entre las especies que involucran ciertos aspectos ecológicos, que se describen en las sección 2.3, y se encontraron condiciones en los parámetros que permitieron garantizar la coexistencia de las especies.

(a) Densidad poblacional  $w$ .(b) Densidad poblacional  $x$ .(c) Densidad poblacional  $y$ .(d) Densidad poblacional  $z$ .

(e) Proyección del ciclo límite estable.

Figura 2.3: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite a  $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$  en el Caso H3.

# Bifurcación de Bogdanov-Takens para el modelo de cuatro especies

En este capítulo se analiza el sistema (1) mediante la bifurcación de Bogdanov-Takens y en particular se muestra la existencia de un ciclo límite estable, proveniente de una bifurcación de Hopf supercrítica.

## 3.1. Análisis de la bifurcación Bogdanov-Takens

En la sección 2.1 del capítulo 2 obtuvimos las condiciones que garantizan que un punto  $p_0 \in \Omega$  sea un punto de equilibrio del sistema (1), las cuales están dadas en el Proposición 2.1. Asimismo, para el caso de la bifurcación de Hopf, en el Lema 2.3 se prueba la estabilidad local del mismo. Sin embargo, para el caso de la bifurcación de Bogdanov-Takens (BT), tendremos que bajo ciertas modificaciones en algunos parámetros del sistema (1) en el punto de equilibrio  $p_0$  se presentará una bifurcación BT, en particular tendremos que nuestros parámetros de bifurcación serán  $d_1$  y  $d_2$ . En el siguiente lema se enuncian condiciones necesarias para tener una bifurcación BT.

Denotemos por  $P_\lambda$  el polinomio característico de la linealización del sistema (1) en un punto de equilibrio  $p_0$ . Del capítulo 1, sección 1.2.1, tenemos que el polinomio característico asociado a la aproximación lineal del sistema (1) tiene la forma

$$P_\lambda = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad (3.1)$$

y de la condición de la bifurcación BT tenemos que  $P_\lambda$  se debe factorizar como

$$\lambda^2(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2),$$

esto es

$$\begin{aligned} \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 &= \lambda^2(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \\ &= (\lambda^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda + \alpha_1\alpha_2)\lambda^2 \\ &= \lambda^4 - (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda^3 + \alpha_1\alpha_2\lambda^2, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = \alpha_1\alpha_2 \quad \text{y} \quad A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (3.2)$$

**Lema 3.1.** Si los coeficientes de  $P_\lambda$  cumplen las condiciones en (3.2),  $A_1 > 0$  y  $A_2 > 0$ , entonces sus raíces son:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} \quad y \quad \lambda_4 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}. \quad (3.3)$$

**Observación 3.2.** Bajo las hipótesis del Lema 3.1:

- Si  $A_1^2 - 4A_2 > 0$ , entonces  $-\sqrt{A_1^2 - 4A_2} < 0$  y  $-A_1 < 0$ , por lo que  $\lambda_3$  es un número real negativo. Más aún

$$A_1^2 - 4A_2 < A_1^2 \iff \sqrt{A_1^2 - 4A_2} < A_1 \iff \sqrt{A_1^2 - 4A_2} - A_1 < 0,$$

por lo que  $\lambda_4$  también es un número real negativo.

- Si  $A_1^2 - 4A_2 < 0$ , entonces  $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$  con  $Re(\lambda_3) = Re(\lambda_4) = -\frac{A_1}{2} < 0$ .

**Observación 3.3.** Con el fin de simplificar el análisis de la bifurcación BT, a partir de ahora convenimos que las condiciones en el Apéndice B.1 son válidas, que las hipótesis de la Proposición 2.1 se tienen y que las siguientes condiciones adicionales son válidas:

$$f'_2(w_0) = \frac{z_0 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{y_0}, \quad e_2 = \frac{121 f'_2(10y_0)}{120 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} \quad y \quad e_1 = e_3 = \frac{f'_2(10y_0)}{12 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}. \quad (3.4)$$

Con lo anterior, tenemos que el sistema (1) tiene como aproximación lineal  $\mathcal{J}(w, x, y, z)$  en un punto  $(w, x, y, z)$  dada por

$$\begin{pmatrix} -x f'_1(w) - y f'_2(w) - T_0 & -f_1(w) - z \partial_x g_1(w, x, y) & -f_2(w) - z \partial_y g_1(w, x, y) & -g_1(w, x, y) \\ x f'_1(w) T_1 - z \partial_w g_2(w, x, y) & -d_1 - z \partial_x g_2(w, x, y) + f_1(w) T_1 & -z \partial_y g_2(w, x, y) & -g_2(w, x, y) \\ y f'_2(w) T_2 - z \partial_w g_3(w, x, y) & -z \partial_x g_3(w, x, y) & -d_2 - z \partial_y g_3(w, x, y) + f_2(w) T_2 & -g_3(w, x, y) \\ z T_3 & z T_4 & z T_5 & T_6 - \frac{39}{5} T_7 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} T_0 &= z \partial_w g_1(w, x, y) + \frac{8(h(w) + wh'(w)) T_7}{5y_0 h'(10y_0)}, & T_1 &= \frac{6d_1 y_0 + 6T_7 y_0}{120y_0 T_7}, & T_2 &= \frac{d_2 y_0 + T_7 y_0}{20y_0 T_7}, \\ T_3 &= \frac{z_0 \partial_w g_1(w, x, y)}{12y_0} + \frac{121 z_0 \partial_w g_2(w, x, y)}{120y_0} + \frac{z_0 \partial_w g_3(w, x, y)}{12y_0}, \\ T_4 &= \frac{z_0 \partial_x g_1(w, x, y)}{12y_0} + \frac{121 z_0 \partial_x g_2(w, x, y)}{120y_0} + \frac{z_0 \partial_x g_3(w, x, y)}{12y_0}, \\ T_5 &= \frac{z_0 \partial_y g_1(w, x, y)}{12y_0} + \frac{121 z_0 \partial_y g_2(w, x, y)}{120y_0} + \frac{z_0 \partial_y g_3(w, x, y)}{12y_0}, \\ T_6 &= \frac{z_0 g_1(w, x, y)}{12y_0} + \frac{121 z_0 g_2(w, x, y)}{120y_0} + \frac{z_0 g_3(w, x, y)}{12y_0}, \\ T_7 &= z_0 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0). \end{aligned}$$

En particular, la aproximación lineal del sistema diferencial (1) en el punto de equilibrio  $p$  es

$$\mathcal{J}(p) = \begin{pmatrix} -8T_7 & \frac{-235T_7}{12} & -15T_7 & \frac{-20y_0 T_7}{z_0} \\ \frac{6y_0 T_7 + 6d_1 y_0}{20y_0} + \frac{3T_7}{40} & \frac{1}{2} T_7 & \frac{3}{2} T_7 & \frac{-6y_0 T_7}{z_0} \\ \frac{y_0 T_7 + d_2 y_0}{20y_0} + \frac{T_7}{80} & \frac{1}{24} T_7 & \frac{1}{2} T_7 & \frac{-y_0 T_7}{z_0} \\ \frac{z_0 T_7}{150y_0} & \frac{671 z_0 T_7}{1440y_0} & \frac{-151 z_0 T_7}{80y_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

### 3.1.1. Condición necesaria para la bifurcación BT

Para probar la presencia de una bifurcación BT, consideraremos que el sistema diferencial (1) es una familia de EDO's que depende de dos parámetros, los parámetros de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores, por lo tanto la aproximación lineal en el punto de equilibrio  $p = (w_0, x_0, y_0, z_0)$ , dada en (3.5) será denotada por  $\mathcal{J}(p, d_1, d_2)$ . Estas premisas y la observación 3.3 nos permiten tener la siguiente condición para la bifurcación BT.

**Lema 3.4.** *Si*

$$d_1 = d_{10} := \frac{70940543z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{8309764} \quad \text{y} \quad d_2 = d_{20} := \frac{73066255z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{8309764},$$

entonces los valores propios de  $\mathcal{J}(p, d_{10}, d_{20})$  son

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \left( -\frac{7}{2} \pm i \frac{11}{4} \sqrt{\frac{37917221}{6232323}} \right) z_0 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0). \quad (3.6)$$

*Demostración.* La aproximación lineal del sistema (1) en  $p$  está dada por la matriz (3.5), la cual tiene polinomio característico

$$\begin{aligned} P_\lambda(d_1, d_2) &= \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad \text{donde} \\ A_0 &= 1, \quad A_1 = 7z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0), \\ A_2 &= \frac{1}{96}z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) (145z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 564d_1 + 72d_2), \\ A_3 &= \frac{z_0^2\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2 (12649z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 88d_1 - 1524d_2)}{1920}, \\ A_4 &= -\frac{z_0^3\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^3 (3561z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 28907d_1 - 28471d_2)}{1920}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Del Lema 3.1 se sigue que  $P_\lambda(d_1, d_2) = \lambda^2(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$  si y solo si  $A_3 = A_4 = 0$ . Por otro lado, haciendo  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$  el resultado se verifica, donde  $\alpha_1 = \lambda_3$  y  $\alpha_2 = \lambda_4$ . ◀

### 3.1.2. Resultado principal

En esta subsección, siguiendo las ideas en [26] (cf. [8]), mostraremos las condiciones bajo las cuales el sistema (1) presenta en  $p$  una bifurcación BT respecto a las tasas de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores.

#### 3.1.2.1. Simplificación del modelo

Sean  $d_{10}, d_{20}$  como en el Lema 3.4. La existencia de un punto de equilibrio  $p$  en  $\Omega$  está garantizado bajo las condiciones en la Proposición 2.1, y en particular los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  dependen de las

tasas de mortalidad de los depredadores de acuerdo a las expresiones

$$c_1(d_1) = \frac{d_1 x_0 + z_0 g_2(w_0, x_0, y_0)}{x_0 f_1(w_0)} \quad \text{y} \quad c_2(d_2) = \frac{d_2 y_0 + z_0 g_3(w_0, x_0, y_0)}{y_0 f_2(w_0)}.$$

Ahora, tomando  $c_1(d_{10})$  y  $c_2(d_{20})$ , el modelo (1) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= Rwh(w) - f_1(w)x - f_2(w)y - g_1(w, x, y)z, \\ \frac{dx}{dt} &= x(c_1(d_{10})f_1(w) - d_1) - g_2(w, x, y)z, \\ \frac{dy}{dt} &= y(c_2(d_{20})f_2(w) - d_2) - g_3(w, x, y)z, \\ \frac{dz}{dt} &= z(e_1 g_1(w, x, y) + e_2 g_2(w, x, y) + e_3 g_3(w, x, y) - d_3). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por lo tanto,  $p$  es un punto de equilibrio del sistema (3.8) si y solo  $(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20})$ .

En lo que sigue  $\mathcal{G}(w, x, y, z, d_1, d_2)$  denota el campo vectorial asociado al sistema (3.8); por otro lado  $\tau(w, x, y, z, d_1, d_2)$  y  $\delta(w, x, y, z, d_1, d_2)$  denotarán la traza y el determinante de la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(w, x, y, z, d_1, d_2)$  de  $\mathcal{G}$ , respectivamente.

Las condiciones de no degeneración están dadas por la condición de regularidad y los coeficientes cuadráticos de acuerdo a las condiciones **BT1** y **BT2** del Teorema 1.24. Haciendo uso del software Mathematica se calcularon cada uno de estas condiciones. Sin embargo para la regularidad, el determinante del jacobiano, **Reg<sub>0</sub>**, de la aplicación

$$\mathcal{F} : (w, x, y, z, d_1, d_2) \mapsto (F(w, x, y, z, d_1, d_2), \tau(w, x, y, z, d_1, d_2), \delta(w, x, y, z, d_1, d_2)), \tag{3.9}$$

en  $(p_0, d_{10}, d_{20})$  resulta ser una expresión grande, por lo cual se omite aquí. Sin embargo, se mostrará explícitamente en los ejemplos, como veremos más adelante. En este sentido, enunciamos el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.** *Si las condiciones de la Proposición 2.1 se cumplen para el sistema (3.8), entonces la aplicación (3.9) es regular en  $(p_0, d_{10}, d_{20})$  si y solo si **Reg<sub>0</sub>** es un número real distinto de cero.*

### 3.1.2.2. Coeficientes cuadráticos

En la siguiente proposición muestran expresiones explícitas para los coeficientes cuadráticos, los cuales se calcularon usando los vectores propios normalizados del Apéndice C.2, de acuerdo a las expresiones en (A.9) y (A.10).

**Proposición 3.6.** Si las hipótesis de la Proposición 2.1 se cumplen, entonces los coeficientes cuadráticos están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= -\frac{(59z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0))^2 ((-2z_0\mathbf{a}_{00} + \mathbf{a}_{01})h'(10y_0) + \mathbf{a}_{02})}{27000409264555091520800h'(10y_0)}, \\ \mathbf{b}_0 &= \frac{59\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) ((-2z_0\mathbf{b}_{00} + \mathbf{b}_{01})h'(10y_0) + \mathbf{b}_{02})}{19607423994153610587503247464900h'(10y_0)}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{a}_{00}$ ,  $\mathbf{a}_{01}$ ,  $\mathbf{a}_{02}$ ,  $\mathbf{b}_{00}$ ,  $\mathbf{b}_{01}$ , y  $\mathbf{b}_{02}$  son como en el Apéndice C.1.

Enunciamos el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 3.7** (Resultado principal). Si las hipótesis de la Proposición 2.1 se tienen,  $\mathbf{Reg}_0$  y  $\kappa = \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$  son números reales distintos de cero, entonces el sistema (3.8) presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens en  $p$  con respecto a los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

*Demostración.* Primeramente, del Lema 3.4 se tiene que la linealización del sistema (3.8) en  $p$  tiene valores propios como en (3.6) cuando  $(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20})$ . Por otra parte, de las proposiciones 3.5 y 3.6, se satisfacen las condiciones de regularidad y no degeneración para la existencia BT, y más aún,  $\mathbf{Reg}_0$  y  $\kappa$  son números reales distintos de cero, el resultado se sigue del Teorema 1.24. ◀

## 3.2. Ejemplos

En este apartado daremos algunas aplicaciones que ilustran los resultados de las Proposiciones 3.5, 3.6 y del Teorema 3.7. Para precisar en los ejemplos que vamos a tratar, considerando el sistema (3.8), hacemos las siguientes hipótesis que ayudan a proveer ejemplos interesantes:

- La presa tiene una tasa de crecimiento logística, esto es, la función de crecimiento intrínseca está dada por la expresión:  $Rwh(w) = Rw \left(1 - \frac{w}{k_1}\right)$ , donde  $k_1$  es la capacidad de carga de la presa.
- Las respuestas funcionales  $f_1, f_2$  pueden ser de tipo Holling II o IV, que miden la saciedad o la defensa de la población presa.
- Con estas premisas, proponemos los siguientes casos de acuerdo al tipo de respuestas funcionales  $g_1(w, x, y)$ ,  $g_2(w, x, y)$  y  $g_3(w, x, y)$ :
  - a) **Caso BT1:** Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia a través de respuestas funcionales de tipo Holling II generalizadas.
  - b) **Caso BT2:** la población de presas tiene algún tipo de defensa, los depredadores y el superdepredador experimentan defensa e interferencia, todas a través de respuestas funcionales de tipo Holling II o IV generalizadas.

### 3.2.0.1. Caso BT1: Saciedad e interferencia entre predadores

En este caso, las respuestas funcionales son similares a las usadas en el **Caso H1** de la subsección 2.3.1.

Sustituyendo las funciones explícitas anteriores el sistema (3.8) tendrá nuevos parámetros. Por lo tanto, con el fin de que las condiciones en el Proposición 2.1 y las condiciones adicionales (3.1) de la Sección 3.1, así como las condiciones en el Apéndice B.1 se satisfagan, hacemos las siguientes asignaciones adicionales de parámetros:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{121z_0}{120y_0}, & w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{\alpha_1\eta_2}{2\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{3\alpha_1\delta_3}{\eta_1}, \\
 \beta_1 &= \frac{y_0\eta_1}{2}, & \beta_2 &= \frac{y_0\eta_2}{2}, & \beta_3 &= 3y_0\delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{5}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\
 \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{\eta_2}{3}, & \eta_3 &= 12\delta_3, & k_1 &= 20y_0, \\
 b_1 &= b_2 = 10y_0, & a_1 &= a_2 = \frac{5z_0\alpha_1}{y_0\eta_1}, & e_1 &= e_3 = \frac{z_0}{12y_0}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Estas asignaciones permiten validar el Teorema 3.7 dado que se tiene lo siguiente:

- Existencia de un punto de equilibrio al interior de  $\Omega$ : las condiciones dadas por:

$$R_1 = \frac{4z_0\alpha_1}{y_0\eta_1}, \quad c_1 = \frac{79250307}{166195280}, \quad c_2 = \frac{81376019}{166195280} \quad \text{y} \quad d_3 = \frac{39z_0\alpha_1}{40y_0\eta_1},$$

nos garantizan, de acuerdo a la Proposición 2.1, la existencia de un punto de equilibrio positivo el cual está dado por

$$p_0 = (10y_0, 6y_0, y_0, z_0),$$

en el cual, por el Lema 3.4, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (3.8) tiene valores propios

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \frac{\left(-\frac{7}{16} \pm \frac{11}{32}i\sqrt{\frac{37917221}{6232323}}\right)\alpha_1 z_0}{y_0\eta_1},$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{70940543z_0\alpha_1}{66478112y_0\eta_1} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{73066255z_0\alpha_1}{66478112y_0\eta_1},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación BT.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración: la condición de regularidad en la Proposición 3.5 y los coeficientes cuadráticos de la Proposición 3.6, obteniendo los siguientes valores

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Rego} &= \frac{3062663712947293z_0^7\alpha_1^7}{1284845926229213184y_0^7\eta_1^7}, \\
 \mathbf{a}_0 &= -\frac{338050197175353927327z_0^2\alpha_1^3}{5529683817380882743459840y_0^3\eta_1^3} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_0 = \frac{3825869963080707411609013339563z_0\alpha_1^2}{2007800217001329724160332540405760y_0^2\eta_1^2}.
 \end{aligned}$$

Del Teorema 3.7 se concluye que el sistema (3.8) presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ . Así mismo, del teorema 1.24, el sistema (3.8) es topológicamente equivalente a una forma normal determinada por  $\text{sign}(\mu) := \text{sign}(\kappa)$ . En este caso,  $\text{sign}(\mu) = -1$ , lo que garantiza la existencia de un ciclo límite estable proveniente de una bifurcación de Hopf supercrítica o una bifurcación homoclínica (ver Sección 1.2.2), y en consecuencia, la coexistencia de las especies.

### 3.2.0.2. Caso BT2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores

En este caso, las respuestas funcionales son similares a las usadas en el **Caso H2** de la subsección 2.3.2 y análogamente como se hizo en la subsección 2.3.2 se tienen los siguientes resultados. Sustituyendo las funciones explícitas anteriores el sistema (3.8) tendrá nuevos parámetros. Por lo tanto, una vez más, al igual que el ejemplo anterior, con el fin de que las condiciones en el Proposición 2.1 y las condiciones adicionales (3.1) de la Sección 3.1, así como las condiciones en el Apéndice B.1 se satisfagan, hacemos las siguientes asignaciones adicionales de parámetros:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{121z_0}{120y_0}, & w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{\alpha_1\eta_2}{2\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{3\alpha_1\delta_3}{\eta_1}, \\
 \beta_1 &= \frac{3y_0\eta_1}{2}, & \beta_2 &= \frac{3y_0\eta_2}{2}, & \beta_3 &= 9y_0\delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{100y_0}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\
 \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{\eta_2}{36y_0}, & \eta_3 &= \frac{6\delta_3}{y_0}, & k_1 &= 20y_0, \\
 b_1 = b_2 &= 300y_0^2, & a_1 = a_2 &= \frac{100z_0\alpha_1}{\eta_1}, & e_1 = e_3 &= \frac{z_0}{12y_0}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Estas asignaciones permiten validar el Teorema 3.7 dado que se tiene lo siguiente:

- Existencia de un punto de equilibrio al interior de  $\Omega$ : las condiciones dadas por:

$$R_1 = \frac{4z_0\alpha_1}{y_0\eta_1}, \quad c_1 = \frac{79250307}{166195280}, \quad c_2 = \frac{81376019}{166195280} \quad \text{y} \quad d_3 = \frac{39z_0\alpha_1}{40y_0\eta_1},$$

nos garantizan, de acuerdo a la Proposición 2.1, la existencia de un punto de equilibrio positivo el cual está dado por

$$p_0 = (10y_0, 6y_0, y_0, z_0),$$

en el cual, por el Lema 3.4, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (3.8) tiene valores propios

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \frac{\left(-\frac{7}{16} \pm \frac{11}{32}i\sqrt{\frac{37917221}{6232323}}\right)\alpha_1 z_0}{y_0\eta_1},$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{70940543z_0\alpha_1}{66478112y_0\eta_1} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{73066255z_0\alpha_1}{66478112y_0\eta_1},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación BT.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración: la condición de regularidad en la Proposición 3.5 y los coeficientes cuadráticos de la Proposición 3.6, obteniendo los siguientes valores

$$\mathbf{Rego} = \frac{9304331266348609\alpha_1^7 z_0^7}{6424229631146065920\eta_1^7 y_0^7},$$

$$\mathbf{a}_0 = \frac{319727305666717874403\alpha_1^3 z_0^2}{5529683817380882743459840\eta_1^3 y_0^3} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_0 = \frac{1582659998470877146043697389907\alpha_1^2 z_0}{401560043400265944832066508081152\eta_1^2 y_0^2}.$$

Del Teorema 3.7 se concluye que el sistema (3.8) presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ , esto dado que  $\mathbf{Rego} \neq 0$  y  $\kappa \neq 0$  (de hecho es menor que cero); y del Teorema 1.24, el sistema (3.8) es topológicamente equivalente a una forma normal, cuyo diagrama de bifurcación está dado por el sistema (1.20), en el que se tiene la existencia de un ciclo límite estable proveniente de una bifurcación de Hopf supercrítica o una bifurcación homoclínica (ver Sección 1.2.2), y en consecuencia, la coexistencia de las especies.

### 3.3. Resultados numéricos

A continuación, se dan algunos ejemplos numéricos para ilustrar los resultados de la Sección 3.2, dando valores específicos a los parámetros para cada uno de los casos analizados.

**Ejemplo 3.8** (Caso BT1: Saciedad e interferencia entre predadores). *De las condiciones en (3.11), el sistema diferencial (3.8) tiene parámetros libres  $\alpha_1, \eta_1, \eta_2$  y  $\delta_3$  y las constantes  $z_0, y_0$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:*

$$z_0 = 10, \quad y_0 = 11, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

Por lo tanto el punto de coexistencia donde se da una bifurcación BT es  $p = (110, 66, 11, 10)$ , cuyos parámetros de bifurcación son

$$d_{10} = \frac{354702715}{365629616} \approx 0.970115 \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{365331275}{365629616} \approx 0.999184.$$

Más aún, tenemos que (en la Tabla 3.1 se resumen los valores de cada uno de los parámetros del sistema)

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{1690250985876769636635}{368000458046697746577252352}, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{3825869963080707411609013339563}{24294382625716089662340023738909696}$$

$$\mathbf{Rego} = \frac{239270602574007265625}{195609470883453613375488}.$$

Por lo que se tiene la aparición de un ciclo límite estable. Para efecto de visualizarlo tomamos el vector de perturbación

$$(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20}) + (0.0000992375, 0.000100757) = (0.970214073559677, 0.999284791688692),$$

en el cual tenemos la existencia de dos puntos de equilibrio en el interior de  $\Omega$  (ver Tabla 3.2 para más puntos de equilibrio en la frontera de  $\Omega$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (110.00697615747258, 66.0025793772039, 11.000661416588835, 9.994715936678885), \\ \mathbf{p}_2 &= (110.0171440216696, 65.99564544614725, 10.998985443954254, 9.998332860924688). \end{aligned}$$

El punto  $\mathbf{p}_2$  es una silla ya que tiene valores propios  $\lambda_{1,2} = -0.397902 \pm 0.770612i$ ,  $\lambda_3 = -0.000778036$  y  $\lambda_4 = 0.000758752$ . Por otra parte, el punto  $\mathbf{p}_1$  es una silla ya que  $\lambda_{5,6} = -0.397833 \pm 0.770785i$  y  $\lambda_{7,8} = 4.78354 \times 10^{-7} \pm 0.000768047i$ , en el que las órbitas del sistema tienden a un ciclo límite estable. Por lo que tomando la condición inicial

$$\mathbf{q}_0 = (110.0069761574725 + 1/10^6, 66.002579377203 + 1/10^6, 11.00066141658883 + 1/10^6, 9.99471593667888 + 1/10^6),$$

se puede visualizar las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales para cada una de las especies en la figura 3.1(a)-(d).

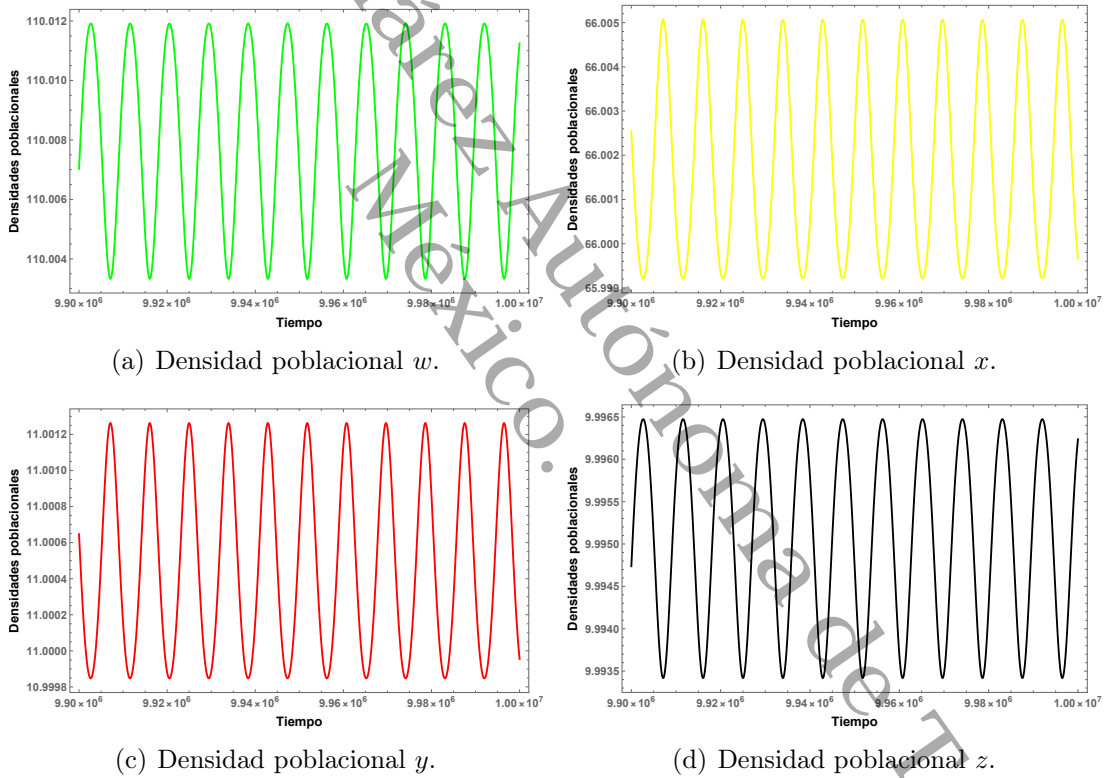


Figura 3.1: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en **Caso BT1**.

**Ejemplo 3.9** (Caso BT2: Defensa de la presa e interferencia entre depredadores). De las condiciones en (3.12), el sistema diferencial (3.8) depende de los parámetros libres  $\alpha_1, \eta_1, \eta_2, \delta_3$ , y de las constantes  $z_0, y_0$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:

$$z_0 = 10, \quad y_0 = 11, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

Valores de los parámetros de la simulación numérica en <b>Caso BT1</b>	
Punto de equilibrio	$w_0 = 110, x_0 = 66, y_0 = 11, z_0 = 10$
Hipótesis de la Proposición 2.1	$R_1 = 3.63636, c_1 = 0.476851, c_2 = 0.489641, d_3 = 0.886364,$
Capacidad de carga de la presa	$k_1 = 220$
Parámetros de las respuestas funcionales para MP1, MP2	$a_1 = a_2 = 4.54545, b_1 = b_2 = 110.$
Parámetros de las respuestas funcionales para SP	$e_2 = 0.916667, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 3, \beta_1 = \beta_2 = 5.5, \beta_3 = 33,$ $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.05, \gamma_3 = 0.3, \delta_1 = 0.08333, \delta_2 = 0.3333,$ $\eta_3 = 12, e_1 = e_3 = 0.0757576,$
Valor de bifurcación	$d_{10} = 0.970115, d_{20} = 0.999184$
Coefficientes cuadráticos y $\kappa$	$\mathbf{a}_0 = -4.59307 \times 10^{-6}, \mathbf{b}_0 = 0.00015748, \kappa = -7.23315 \times 10^{-10}$
Condición de regularidad	$\mathbf{Reg}_0 = 0.00122321.$

Tabla 3.1: Validación numérica del Teorema 3.7: **Caso BT1**

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (89.6325, 0, 94.6385, 0)$	$\lambda_1 = -0.810859, \lambda_{2,3} = -0.257017 \pm 1.05851i, \lambda_4 = 0.00296731,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (89.1377, 94.7622, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = -0.252573 \pm 1.04663i, \lambda_3 = -0.0030469, \lambda_4 = 0.37536,$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (220, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -3.63636, \lambda_2 = -0.549663, \lambda_3 = 0.474788, \lambda_4 = 0.484476,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (166.339, 30.3513, 0, 16.0114)$	$\lambda_1 = -2.0501, \lambda_2 = -0.0837165, \lambda_{3,4} = 0.027465 \pm 0.403315i,$	Silla
$\mathbf{p}_1 = (110.007, 66.0026, 11.0007, 9.99472)$	$\lambda_{1,2} = -0.397833 \pm 0.770785i, \lambda_{3,4} = 4.78357 \times 10^{-7} \pm 0.000768047i,$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (110.017, 65.9956, 10.999, 9.99833)$	$\lambda_{1,2} = -0.397902 \pm 0.770612i, \lambda_3 = -0.000778037, \lambda_4 = 0.000758753,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.999285, \lambda_2 = -0.970214, \lambda_3 = -0.886364, \lambda_4 = 3.63636,$	Silla

Tabla 3.2: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $(d_1, d_2)$  perturbado: **Caso BT1**.

En la Tabla 3.3, se muestran los valores de cada uno de los parámetros dependientes de acuerdo con el Teorema 3.7. Tomando el vector de perturbación

$$(d_1, d_2) = (d_{10} + 0.0000992374, d_{20} + 0.000100757) = (0.970214073522659, 0.99928479172515),$$

se tiene la existencia de tres puntos de equilibrio en el interior de  $\Omega$  (ver Tabla 3.4 para los demás puntos de equilibrio en la frontera de  $\Omega$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (110.00803904607265, 66.00185474583377, 11.000486256314641, 9.995093981589788), \\ \mathbf{p}_2 &= (110.01475582523996, 65.99727475487404, 10.999379214735756, 9.9974830868967), \\ \mathbf{p}_3 &= (142.89025013460605, 47.09127401357668, 4.81099965386573, 15.742379367569901). \end{aligned}$$

El punto  $\mathbf{p}_1$  es una silla ( $\lambda_{1,2} = -0.397807 \pm 0.770748i, \lambda_{3,4} = 1.2909 \times 10^{-6} \pm 0.000607103i$ ) en que las órbitas que pasan por puntos muy cercanos a  $\mathbf{p}_1$  tienden a un ciclo límite estable. Por ejemplo, tomando la condición inicial

$$\begin{aligned} q_1 &= \\ &= (110.0080390460726 + 1/10^8, 66.0018547458337 + 1/10^8, 11.00048625631464 + 1/10^8, 9.99509398158978 + 1/10^8), \end{aligned}$$

se observan las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales en la figura 3.2(a)-(d). Por otra parte, el punto  $\mathbf{p}_2$  es un punto silla ( $\lambda_{5,6} = -0.397823 \pm 0.77062i, \lambda_7 = -0.000619888, \lambda_8 = 0.000594819$ ) y  $\mathbf{p}_3$  es un punto de equilibrio estable ( $\lambda_9 = -1.22539, \lambda_{10} = -0.0131659, \lambda_{11,12} = -0.0271966 - 0.354933i$ ) en el cual tomando una condición inicial  $q_2$  (distinta de  $q_1$ ),

$$\begin{aligned} q_2 &= \\ &= (110.0080390460726 + 1/10^4, 66.0018547458337 + 1/10^4, 11.00048625631464 + 1/10^4, 9.99509398158978 + 1/10^4), \end{aligned}$$

Valores de los parámetros de la simulación numérica en <b>Caso BT2</b>	
Punto de equilibrio	$w_0 = 110, x_0 = 66, y_0 = 11, z_0 = 10$
Hipótesis de la Proposición 2.1	$R_1 = 3.63636, c_1 = 0.476851, c_2 = 0.489641, d_3 = 0.886364,$
Capacidad de carga de la presa	$k_1 = 220$
Parámetros de las respuestas funcionales para MP1, MP2	$a_1 = a_2 = 1000, b_1 = b_2 = 36300.$
Parámetros de las respuestas funcionales para SP	$e_2 = 0.916667, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 3, \beta_1 = \beta_2 = 16.5, \beta_3 = 99,$ $\gamma_1 = 0.000909091, \gamma_2 = 0.05, \gamma_3 = 0.3, \delta_1 = 0.08333, \delta_2 = 0.00252525,$ $\eta_3 = 0.545455, e_1 = e_3 = 0.0757576,$
Valor de bifurcación	$d_{10} = 0.970115, d_{20} = 0.999184,$
Coefficientes cuadráticos y $\kappa$	$\mathbf{a}_0 = -4.34412 \times 10^{-6}, \mathbf{b}_0 = 0.000325726, \kappa = -1.41499 \times 10^{-9}$
Condición de regularidad	$\mathbf{Reg}_0 = 0.000743216.$

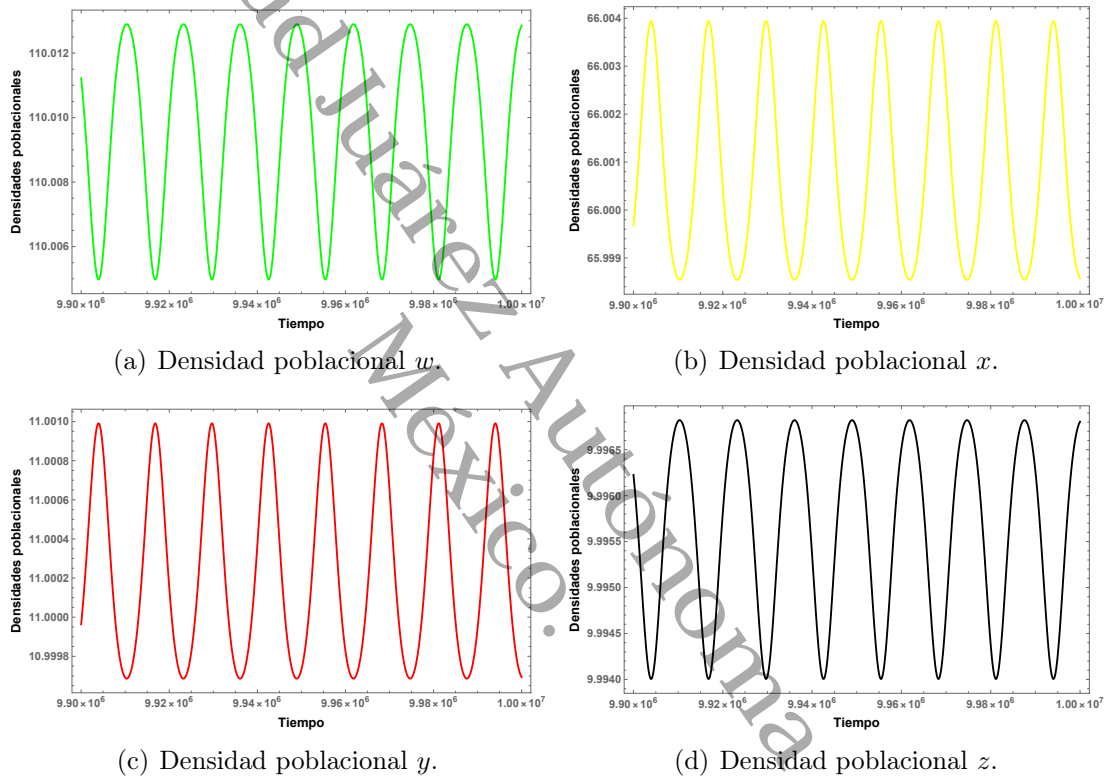
Tabla 3.3: Validación numérica para el Teorema 3.7: **Caso BT2**

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (90.9733, 0, 95.0663, 0)$	$\lambda_1 = -0.824219, \lambda_{2,3} = -0.355887 \pm 1.10143i, \lambda_4 = 0.00296731,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (220, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -3.63636, \lambda_2 = -0.610882, \lambda_3 = 0.268359, \lambda_4 = 0.27251$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (90.5335, 95.2195, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = -0.354029 \pm 1.08903i, \lambda_3 = -0.0030469, \lambda_4 = 0.322352,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.999285, \lambda_2 = -0.970214, \lambda_3 = -0.886364, \lambda_4 = 3.63636,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (163.699, 37.1329, 0, 15.0367)$	$\lambda_1 = -1.80766, \lambda_{2,3} = 0.023469 \pm 0.397817i, \lambda_4 = 0.0275151,$	Silla
$\mathbf{p}_1 = (110.008, 66.0019, 11.0005, 9.99509)$	$\lambda_{1,2} = -0.397807 \pm 0.770748i, \lambda_{3,4} = 1.29089 \times 10^{-6} \pm 0.000607103i,$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (110.015, 65.9973, 10.9994, 9.99748)$	$\lambda_{1,2} = -0.397823 \pm 0.77062i, \lambda_3 = -0.000619887, \lambda_4 = 0.000594818,$	Silla
$\mathbf{p}_3 = (142.89, 47.0913, 4.811, 15.7424)$	$\lambda_1 = -1.22539, \lambda_{2,3} = -0.0271966 \pm 0.354933i, \lambda_4 = -0.0131659,$	Foco estable

Tabla 3.4: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $(d_1, d_2)$  perturbado: **Caso BT2**.

la solución que pasa por este punto tiende a  $\mathbf{p}_1$  (ver figura 3.3). Lo que implica que se tiene bi-estabilidad en el sistema proveniente de un ciclo límite estable en el punto  $\mathbf{p}_1$  y de un punto de equilibrio estable  $\mathbf{p}_3$ .

En conclusión, la coexistencia del recurso, de los mesodepredadores y del superdepredador se da cuidando las tasas de mortalidad en las poblaciones de mesodepredadores. En ambos casos analizados podemos observar que independientemente del tipo de interacción entre las especies el cuidado de los valores en estos parámetros es indispensable ya que de lo contrario podría ocurrir la extinción de una de las especies y, dado que las especies son especialistas, la extinción de toda la red alimentaria.

Figura 3.2: Densidades poblacionales **Caso BT2**.

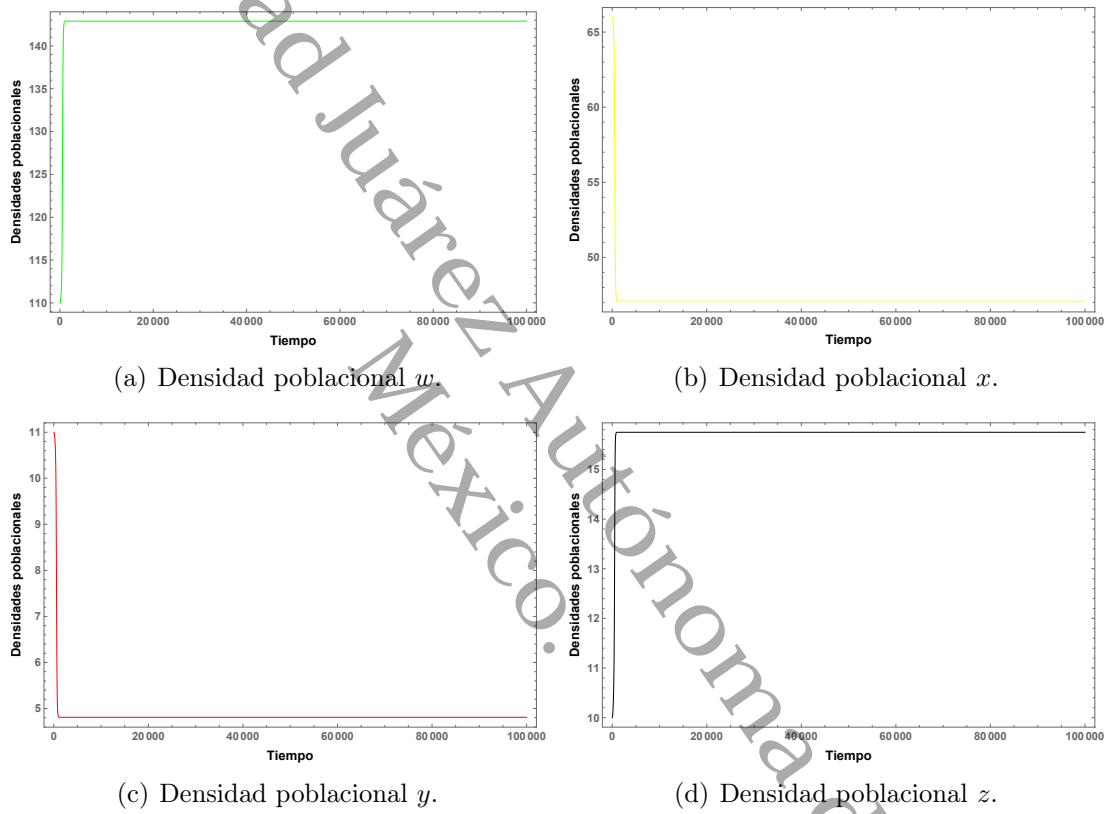


Figura 3.3: Gráficas de las densidades poblacionales con condición  $q_2$  del Caso BT2.

# Bifurcación doble Hopf para el modelo de cuatro especies

En este capítulo se analiza nuevamente el sistema (1) mediante la bifurcación Hopf-Hopf (HH) y se muestran condiciones suficientes en los parámetros del sistema que garantizan la existencia de conjuntos  $\omega$ -límite dados por ciclos límite y toros invariantes.

## 4.1. Análisis de la bifurcación doble Hopf

En la sección 2.1 del capítulo 2 se mostraron condiciones suficientes que garantizan que un punto  $p_0 \in \Omega$  es un punto de equilibrio del sistema (1), las cuales están dadas en el Proposición 2.1. Asimismo, para el caso de la bifurcación de Hopf, en el Lema 2.3 se prueba la estabilidad local del mismo. Por otra parte, modificando dichas condiciones en algunos parámetros del sistema (1) en el punto de equilibrio  $p_0$  se presentará una bifurcación HH, en particular tendremos, al igual que la bifurcación BT, que los parámetros de bifurcación serán nuevamente  $d_1$  y  $d_2$ . En el siguiente lema se enuncian una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación HH.

Denotemos por  $P_\lambda$  el polinomio característico de la linealización del sistema (1) en un punto de equilibrio  $p_0$ . Del capítulo 1, sección 1.2.1, tenemos que el polinomio característico asociado a la aproximación lineal del sistema (1) tiene la forma

$$P_\lambda = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad (4.1)$$

y de la condición de la bifurcación HH tenemos que

$$P_\lambda = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2), \quad \omega_{1,2} > 0, \quad (4.2)$$

esto es

$$\begin{aligned} \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 &= (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2) \\ &= \lambda^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad \text{y} \quad A_4 = \omega_1^2\omega_2^2. \quad (4.3)$$

De lo anterior se tiene el siguiente resultado.

**Lema 4.1.** Si  $A_2 > 0$ ,  $A_4 > 0$  y  $A_2^2 - 4A_4 > 0$ , entonces las raíces de  $P_\lambda$  son:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1 \quad y \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad (4.4)$$

si y solo si  $A_1 = A_3 = 0$ ; donde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_4}}{2}} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_4}}{2}}.$$

**Observación 4.2.** Como  $A_2^2 > A_2^2 - 4A_4$ ,  $A_2 > 0$  y  $A_2^2 - 4A_4 > 0$ , se tiene que  $A_2 > \sqrt{A_2^2 - 4A_4}$ , y por lo tanto  $A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_4} > 0$ . Así,  $\omega_{1,2}$  son siempre números reales positivos.

**Observación 4.3.** Para simplificar el análisis de la bifurcación HH, a partir de ahora convenimos que las condiciones en el Apéndice D.1 son válidas, que las hipótesis del Proposición 2.1 se tienen y que las siguientes condiciones adicionales<sup>1</sup> son válidas:

$$z_0 = \frac{879293352d_2}{476326784089\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}, \quad e_2 = \frac{f'_2(10y_0)}{2\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \quad e_1 = e_3 = \frac{f'_2(10y_0)}{12\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}. \quad (4.5)$$

Con lo anterior, el sistema (1) tiene como aproximación lineal  $\mathcal{J}(w, x, y, z)$  en un punto  $(w, x, y, z)$  dada por

$$\begin{pmatrix} -z\partial_w g_1(w, x, y) - r_0 - x f'_1(w) - y f'_2(w) & -z\partial_x g_1(w, x, y) - f_1(w) & -z\partial_y g_1(w, x, y) - f_2(w) & -g_1(w, x, y) \\ x r_1 f'_1(w) - z\partial_w g_2(w, x, y) & -z\partial_x g_2(w, x, y) + f_1(w)r_1 - d_1 & -z\partial_y g_2(w, x, y) & -g_2(w, x, y) \\ y r_2 f'_2(w) - z\partial_w g_3(w, x, y) & -z\partial_x g_3(w, x, y) & -z\partial_y g_3(w, x, y) + r_2 f_2(w) - d_2 & -g_3(w, x, y) \\ z r_3 r_4 & z r_3 r_5 & z r_3 r_6 & -\frac{47}{6}r_8 + r_3 r_7 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{(wh'(w) + h(w)) \frac{17585867040d_2 y_0}{476326784089} + 140y_0^2 f'_2(10y_0)}{100y_0^2 h'(10y_0)}, & r_1 &= \frac{6d_1 y_0 + \frac{10551520224d_2 y_0}{476326784089}}{120y_0^2 f'_2(10y_0)}, \\ r_2 &= \frac{478085370793d_2 y}{9526535681780y_0 f'_2(10y_0)}, & r_3 &= \frac{f'_2(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \\ r_4 &= \frac{1}{2}\partial_w g_2(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_w g_3(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_w g_1(w, x, y), & r_5 &= \frac{1}{2}\partial_x g_2(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_x g_3(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_x g_1(w, x, y), \\ r_6 &= \frac{1}{2}\partial_y g_2(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_y g_3(w, x, y) + \frac{1}{12}\partial_y g_1(w, x, y), & r_7 &= \frac{1}{2}g_2(w, x, y) + \frac{1}{12}g_3(w, x, y) + \frac{1}{12}g_1(w, x, y), \\ r_8 &= y_0 f'_2(10y_0). \end{aligned}$$

Por lo que la aproximación lineal del sistema diferencial (1) en el punto de equilibrio  $p$  es

$$\begin{pmatrix} -\frac{879293352d_2}{476326784089} - 7r_8 & \frac{366372230d_2}{476326784089} - 20r_8 & \frac{4396466760d_2}{476326784089} - 20r_8 & -\frac{20r_8}{12r_3} \\ \frac{6d_1 y_0 + \frac{10551520224d_2 y_0}{476326784089}}{20y_0} + \frac{329735007d_2}{2381633920445} & \frac{879293352d_2}{476326784089} & \frac{1318940028d_2}{476326784089} & -\frac{r_8}{r_3} \\ \frac{478305194131d_2}{9526535681780} & \frac{36637223d_2}{476326784089} & \frac{879293352d_2}{476326784089} & -\frac{r_8}{6r_3} \\ \frac{1575400589d_2}{19053071363560} r_3 & \frac{4872750659d_2}{5715921409068} r_3 & -\frac{73274446d_2}{36640521853} r_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>Estas condiciones permiten que los parámetros se mantengan positivos.

### 4.1.1. Condición necesaria para la bifurcación doble Hopf

Para probar la presencia de una bifurcación HH, consideraremos que el sistema diferencial (1) es una familia de EDO's que depende de dos parámetros, los parámetros de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores, por lo tanto la aproximación lineal en el punto de equilibrio  $p = (w_0, x_0, y_0, z_0)$ , dada en (4.6), será denotada por  $\mathcal{J}(p, d_1, d_2)$ . Estas premisas y la observación 4.3 nos permiten tener la siguiente condición para la bifurcación HH.

**Lema 4.4.** *Si*

$$d_1 = d_{10} := \frac{44261301554869y_0f_2'(10y_0)}{30649653984} \quad y \quad d_2 = d_{20} := \frac{476326784089y_0f_2'(10y_0)}{125613336},$$

entonces los valores propios de  $\mathcal{J}(p, d_{10}, d_{20})$  son

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad (4.7)$$

$$\text{donde } \omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{93264807851}{5233889} y_0 f_2'(10y_0)} > 0 \quad y \quad \omega_2 = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2385341}{183} y_0 f_2'(10y_0)} > 0.$$

*Demostración.* La aproximación lineal del sistema (1) en  $p$  está dada por la matriz (4.6), la cual tiene polinomio característico

$$\begin{aligned} P_\lambda(d_1, d_2) &= \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad \text{donde} \\ A_0 &= 1, \quad A_1 = -\frac{879293352d_2}{476326784089} + 7y_0f_2'(10y_0), \\ A_2 &= \left(6d_1y_0 + \frac{963241725625d_2y_0}{952653568178}\right) f_2'(10y_0) - \frac{109911669d_2(476326784089d_1 + 966062791796d_2)}{226887205240568823559921}, \\ A_3 &= \frac{36637223d_2(476326784089y_0f_2'(10y_0)(-68114730124727d_1 - 13410131302708d_2 + 253405849135348y_0f_2'(10y_0)))}{216144905646362110646742453041793938} \\ &\quad + \frac{36637223d_2(1318940028d_2(952653568178d_1 + 3378471979561d_2))}{21614490564636211064674245304179393}, \\ A_4 &= \frac{36637223d_2y_0f_2'(10y_0)(476326784089y_0(211789999895881d_2 - 211965418919605d_1)f_2'(10y_0))}{108072452823181055323371226520896969} \\ &\quad + \frac{36637223d_2y_0f_2'(10y_0)(109911669d_2(10104140245973d_2 - 126702924567674d_1))}{108072452823181055323371226520896969}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Del Lema 4.1 se sigue que  $P_\lambda(d_1, d_2) = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)$  si y solo si  $A_1 = A_3 = 0$ . Por otro lado, haciendo  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$  el resultado se verifica. ◀

**Observación 4.5.** *En una vecindad suficientemente pequeña de  $(d_{10}, d_{20})$ , para valores  $(d_1, d_2)$  muy cercanos, la matriz  $\mathcal{J}(p, d_1, d_2)$  tiene valores propios*

$$\lambda_{1,2}((d_1, d_2)) = \mu_1((d_1, d_2)) \pm i\omega_1((d_1, d_2)), \quad \lambda_{3,4}((d_1, d_2)) = \mu_2((d_1, d_2)) \pm i\omega_2((d_1, d_2)),$$

con  $\mu_{1,2}((d_1, d_2))$ , muy cercanos a  $\mu((d_{10}, d_{20})) = 0$ , por continuidad en los valores propios.

### 4.1.2. Condiciones de no degeneración y resultado principal

En esta subsección, siguiendo las ideas en [26] (cf. [8]), mostraremos las condiciones bajo las cuales el sistema (1) presenta en  $p$  una bifurcación HH respecto a las tasas de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores.

## 4.1.2.1. Simplificación del modelo

Sean  $d_{10}, d_{20}$  como en el Lema 4.4. La existencia de un punto de equilibrio  $p$  en  $\Omega$  está garantizado bajo las condiciones en la Proposición 2.1, y en particular los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  dependen de las tasas de mortalidad de los depredadores de acuerdo a las expresiones

$$c_1(d_1) = \frac{d_1 x_0 + z_0 g_2(w_0, x_0, y_0)}{x_0 f_1(w_0)}, \quad c_2(d_2) = \frac{d_2 y_0 + z_0 g_3(w_0, x_0, y_0)}{y_0 f_2(w_0)}.$$

Ahora, tomando  $c_1(d_{10})$  y  $c_2(d_{20})$ , el modelo (1) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= Rwh(w) - f_1(w)x - f_2(w)y - g_1(w, x, y)z, \\ \frac{dx}{dt} &= x(c_1(d_{10})f_1(w) - d_1) - g_2(w, x, y)z, \\ \frac{dy}{dt} &= y(c_2(d_{20})f_2(w) - d_2) - g_3(w, x, y)z, \\ \frac{dz}{dt} &= z(e_1 g_1(w, x, y) + e_2 g_2(w, x, y) + e_3 g_3(w, x, y) - d_3), \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por lo tanto,  $p$  es un punto de equilibrio del sistema (4.9) si y solo  $(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20})$ .

Sean  $U \subset \mathbb{R}^4$  abierto y  $\psi: U \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$\psi: (d_1, d_2) \mapsto (\mu_1(d_1, d_2), \mu_2(d_1, d_2)). \tag{4.10}$$

Denotaremos por  $\delta(d_1, d_2)$  el determinante de la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(d_1, d_2)$  de  $\psi$ .

Las condiciones de no degeneración están dadas por la condición de no resonancia y de regularidad expuestas en HH1 y HH2 del Teorema 1.25, las cuales se calcularon haciendo uso del software Mathematica. Estos resultados se resumen en los siguientes lemas.

**Lema 4.6.** *Si las condiciones de la Proposición 2.1 se cumplen para el sistema (4.9), entonces  $k\omega_1 \neq l\omega_2$ , para  $k, l \in \mathbb{Z}_+, k + l \leq 3$ .*

*Demostración.* Notemos que  $\omega_1(d_{10}, d_{20}) = \omega_1$  y  $\omega_2(d_{10}, d_{20}) = \omega_2$ , los cuales están dados en la Proposición 4.4. La prueba se sigue, ya que  $k\omega_1 - l\omega_2 \neq 0$ , para  $k + l \leq 3$ . ◀

**Lema 4.7.** *Si las condiciones de la Proposición 2.1 se cumplen para el sistema (4.9), entonces la aplicación (4.10) es regular en  $(p_0, d_{10}, d_{20})$ .*

*Demostración.* La aproximación lineal del sistema (4.9) en el punto de equilibrio  $p$  está dada en (4.6), cuyos valores propios, cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , están dados en el Lema 4.4. Los vectores propios de  $\mathcal{J}(p, d_{10}, d_{20})$  y  $\mathcal{J}^T(p, d_{10}, d_{20})$  correspondientes a los valores propios  $\pm i\omega_1$  y  $\pm i\omega_2$ , están dados en el Apéndice D.2.

Por otra parte, de (4.6), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_1}(p, d_{10}, d_{20}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial d_2}(p, d_{10}, d_{20}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que usando el Lema 1.23, tenemos que la derivada de la parte real de los valores propios  $\lambda_{1,3}(d_1, d_2)$  de  $\mathcal{J}(p, d_1, d_2)$  (ver Observación 4.5), respecto a los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  en el valor  $(d_{10}, d_{20})$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial d_1}(p, d_{10}, d_{20}) &= -\frac{909383398095340}{1079832819529763}, & \frac{\partial \mu_1}{\partial d_2}(p, d_{10}, d_{20}) &= \frac{729207819796661}{2159665639059526}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial d_2}(p, d_{10}, d_{20}) &= \frac{738933976660917}{2159665639059526}, & \frac{\partial \mu_2}{\partial d_1}(p, d_{10}, d_{20}) &= -\frac{904520319663212}{1079832819529763}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{J}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} -\frac{909383398095340}{1079832819529763} & \frac{729207819796661}{2159665639059526} \\ \frac{738933976660917}{2159665639059526} & -\frac{904520319663212}{1079832819529763} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \delta(d_{10}, d_{20}) = \frac{2547974615987341}{4319331278119052}.$$

Esto demuestra el lema. ◀

**Observación 4.8.** El cálculo de los coeficientes cúbicos  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ , se realizó con la ayuda del software Mathematica, usando las fórmulas del Apéndice A.3. Sin embargo, dado que las expresiones obtenidas son extensas, no se incluyeron en este trabajo, no obstante, se darán expresiones explícitas en los ejemplos.

De los lemas 4.6, 4.7, y de la observación anterior, enunciamos el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 4.9** (Resultado principal). Si  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  son distintos de cero y

a) **Caso simple:**  $a_{11}a_{22} > 0$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ,

o

b) **Caso difícil:**  $a_{11}a_{22} < 0$ ,  $a_{11} \neq a_{12}$ ,  $a_{21} \neq a_{22}$ ,

entonces el sistema (4.9) presenta una bifurcación HH en  $p$  con respecto a los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

## 4.2. Ejemplos

En este apartado daremos algunas aplicaciones que ilustran el Teorema 4.9. Para precisar en los ejemplos que vamos a tratar, considerando el sistema (4.9), hacemos las siguientes hipótesis que ayudan a proveer ejemplos interesantes:

- La presa tiene una tasa de crecimiento logística, esto es, la función de crecimiento intrínseca está dada por la expresión:  $Rwh(w) = Rw \left(1 - \frac{w}{k_1}\right)$ , donde  $k_1$  es la capacidad de carga de la presa.
- Las respuestas funcionales  $f_1, f_2$  pueden ser de tipo Holling II o IV, que miden la saciedad o la defensa de la población presa.
- Con estas premisas, proponemos los siguientes casos de acuerdo al tipo de respuestas funcionales  $g_1(w, x, y), g_2(w, x, y)$  que  $g_3(w, x, y)$ :
  - a) **Caso HH1:** Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia a través de respuestas funcionales de tipo Holling II generalizadas .
  - b) **Caso HH2:** la población de presas tiene algún tipo de defensa, los depredadores y el superdepredador experimentan defensa e interferencia, todas a través de respuestas funcionales de tipo Holling II o IV generalizadas.

#### 4.2.1. Caso HH1: Saciedad e interferencia entre predadores

En este caso, las respuestas funcionales son similares a las usadas en el Caso **H1** de la Subsección 2.3.1.

Sustituyendo las funciones explícitas anteriores, el sistema (4.9) tendrá nuevos parámetros. Por lo tanto, con el fin de que las condiciones en el Proposición 2.1, (4.5) y Apéndice D.1 se satisfagan, hacemos las siguientes asignaciones adicionales de parámetros:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{\alpha_1 \eta_1}{10\alpha_1}, & w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{2\alpha_1 \eta_2}{\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{12\alpha_1 \delta_3}{\eta_1}, \\
 \beta_1 &= \frac{y_0 \eta_1}{2}, & \beta_2 &= \frac{5y_0 \eta_2}{2}, & \beta_3 &= 15y_0 \delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{5}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\
 \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{2\eta_2}{3}, & \eta_3 &= 24\delta_3, & k_1 &= 20y_0, \\
 b_1 &= b_2 = 10y_0, & a_2 &= a_1, & e_1 &= e_3 = \frac{\alpha_1 \eta_1}{60\alpha_1}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con estas asignaciones tenemos lo siguiente:

- Existencia de un punto de equilibrio en el interior de  $\Omega$  dado por las condiciones:

$$R_1 = \frac{7a_1}{5}, \quad c_1 = \frac{8938079342129}{122598615936}, \quad c_2 = \frac{478085370793}{2512266720}, \quad d_3 = \frac{47a_1}{240},$$

de acuerdo a la Proposición 2.1; el cual está dado por

$$p_0 = \left(10y_0, 6y_0, y_0, \frac{7a_1 y_0 \eta_1}{5\alpha_1}\right),$$

en el cual, por el Lema 4.4, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (4.9) tiene valores propios

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{\frac{93264807851}{5233889}}}{80} a_1, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{\frac{2385341}{183}}}{640} a_1,$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{44261301554869a_1}{1225986159360} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{476326784089a_1}{5024533440},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación HH.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración: la condición de regularidad en la demostración de la Proposición 4.7 y los coeficientes cúbicos, los cuales están dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a_1 \alpha_1^2}{y_0^2 (61851411562730676313a_1^2 \eta_1^2 + 304670276050530322102705600\alpha_1^2)} a_{111}, \\ a_{12} &= \frac{a_1 \alpha_1^2}{y_0^2 (34955540082877833758171a_1^2 \eta_1^2 + 7915994738860901359982900\alpha_1^2)} a_{121}, \\ a_{21} &= -\frac{a_1 \alpha_1^2}{y_0^2 (61851411562730676313a_1^2 \eta_1^2 + 304670276050530322102705600\alpha_1^2)} a_{211}, \\ a_{22} &= -\frac{a_1 \alpha_1^2}{y_0^2 (34955540082877833758171a_1^2 \eta_1^2 + 7915994738860901359982900\alpha_1^2)} a_{221}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{111} &= \frac{2372408779862271200260099255387216262135158928456784962681503245957391145}{1196142391929446082335791882083444840889625293448} \\ a_{121} &= \frac{5186031227116959974988718966930567997451264054771468061836340190721403325}{9157825630026534981672332219350130824887626957824} \\ a_{211} &= \frac{2985149917622123242227425696816243407264072516616956744955181551886386005}{1196142391929446082335791882083444840889625293448} \\ a_{221} &= \frac{4314254662667568451246774509592198394432757175309446319355655736726949465}{18315651260053069963344664438700261649775253915648} \end{aligned}$$

Notemos que  $a_{11}a_{22} < 0$  y  $a_{11} \neq a_{12}, a_{21} \neq a_{22}$ . Por lo que del Teorema 4.9b) se concluye que el sistema (4.9) presenta una bifurcación HH con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

#### 4.2.2. Caso HH2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores

En este caso, las respuestas funcionales son similares a las usadas en el Caso H2 de la Subsección 2.3.2 y análogamente como se hizo en la subsección 2.3.2 se tienen los siguientes resultados.

Sustituyendo las funciones explícitas anteriores el sistema (4.9) tendrá nuevos parámetros. Por lo tanto, una vez más, al igual que el ejemplo anterior, con el fin de que las condiciones en el Proposición 2.1 y las condiciones adicionales (4.5) de la Sección 4.1, así como las condiciones en el Apéndice D.1 se satisfagan, hacemos las siguientes asignaciones adicionales de parámetros:

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{\alpha_1 \eta_1}{200\alpha_1 y_0}, & w_0 &= 10y_0 & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{2\alpha_1 \eta_2}{\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{12\alpha_1 \delta_3}{\eta_1} \\ \beta_1 &= \frac{3\eta_1 y_0}{2}, & \beta_2 &= \frac{9\eta_2 y_0}{2}, & \beta_3 &= 27y_0 \delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{100y_0}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\ \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{\eta_2}{18y_0}, & \eta_3 &= \frac{12\delta_3}{y_0}, & k_1 &= 20y_0, \\ b_1 &= b_2 = 300y_0^2, & a_2 &= a_1, & e_1 &= e_3 = \frac{\alpha_1 \eta_1}{1200y_0 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Estas asignaciones permiten validar el Teorema 4.9:

- Las condiciones de la Proposición 2.1:

$$R_1 = \frac{4z_0\alpha_1}{y_0\eta_1}, \quad c_1 = \frac{79250307}{166195280}, \quad c_2 = \frac{81376019}{166195280}, \quad d_3 = \frac{39z_0\alpha_1}{40y_0\eta_1},$$

se cumplen, las cuales nos garantizan la existencia de un punto de equilibrio positivo en el interior de  $\Omega$ , el cual está dado por

$$p_0 = (10y_0, 6y_0, y_0, \frac{7a_1\eta_1}{100\alpha_1}),$$

en el cual, por el Lema 4.4, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (4.9) tiene valores propios

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{\frac{93264807851}{5233889}}a_1}{1600y_0}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{\frac{2385341}{183}}a_1}{12800y_0},$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{44261301554869a_1}{24519723187200y_0} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{476326784089a_1}{100490668800y_0},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación HH.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración: la condición de regularidad, la cual se tiene en la demostración de la Proposición 4.7 y los coeficientes cúbicos, los cuales están dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a_1\alpha_1^2}{61851411562730676313a_1^2\eta_1^2y_0 + 121868110420212128841082240000 + \alpha_1^2y_0^3} a_{111}, \\ a_{12} &= \frac{a_1\alpha_1^2}{34955540082877833758171a_1^2\eta_1^2y_0 + 3166397895544360543993160000\alpha_1^2y_0^3} a_{121}, \\ a_{21} &= -\frac{a_1\alpha_1^2}{61851411562730676313a_1^2\eta_1^2y_0 + 121868110420212128841082240000\alpha_1^2y_0^3} a_{211}, \\ a_{22} &= -\frac{a_1\alpha_1^2}{34955540082877833758171a_1^2\eta_1^2y_0 + 3166397895544360543993160000\alpha_1^2y_0^3} a_{221}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{111} &= \frac{26051741814797686998797762260369949552078081109211020575966758587272233325}{299035597982361520583947970520861210222406323362} \\ a_{121} &= \frac{114235809877988415153586743577383665104531544476346237346703590530525908675}{6868369222519901236254249164512598118665720218368} \\ a_{211} &= \frac{111396521317063767453458301505941158954653270302790975082167377411030686825}{299035597982361520583947970520861210222406323362} \\ a_{221} &= \frac{172595758806182482867881392197752784864923306465780947069890248549673849975}{13736738445039802472508498329025196237331440436736} \end{aligned}$$

De donde tenemos que  $a_{11}a_{22} < 0$  y  $a_{11} \neq a_{12}, a_{21} \neq a_{22}$ . Por lo que del Teorema 4.9b) se concluye que el sistema (4.9) presenta una bifurcación HH con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -23.7031, \lambda_2 = -9.03365, \lambda_3 = -0.0489583, \lambda_4 = 0.35,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (98.2704, 141.19, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.123014, \lambda_{2,3} = -0.0418681 \pm 0.899655i, \lambda_4 = 0.0191974$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (99.2921, 0, 140.492, 0)$	$\lambda_1 = -0.0444784, \lambda_{2,3} = -0.0429773 \pm 1.44716i, \lambda_4 = 0.0471275,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.35, \lambda_2 = -0.0304398, \lambda_3 = 3.11722, \lambda_4 = 8.01368,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (101.114, 37.5881, 0, 3.58198)$	$\lambda_1 = -0.0650887, \lambda_2 = 0.0190303, \lambda_{3,4} = 0.0304125 \pm 0.389026i,$	Silla
$\mathbf{p}_1 = (99.8696, 67.6336, 13.2239, 3.24767)$	$\lambda_{1,2} = -0.011219 \pm 0.516667i, \lambda_{3,4} = 0.00413515 \pm 0.041692i,$	Silla

Tabla 4.1: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $(d_1, d_2)$  perturbado: **Caso HH1**.

### 4.3. Resultados numéricos

A continuación se dan algunos ejemplos numéricos para ilustrar los resultados de la Sección 4.2, dando valores específicos a los parámetros para cada uno de los casos analizados.

**Ejemplo 4.10** (Caso HH1: Sacidad e interferencia entre predadores). *De las condiciones en (4.11), el sistema diferencial (4.9) tiene parámetros libres  $a_1, \alpha_1, \eta_1, \eta_2$  y  $\delta_3$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:*

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

Por lo tanto el punto de coexistencia donde se da una bifurcación HH es  $p = (100, 60, 10, 3.5)$  cuyos parámetros de bifurcación son

$$d_{10} = \frac{44261301554869}{4903944637440} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{476326784089}{20098133760}.$$

Por otra parte, de (4.12), tenemos que  $a_{11}a_{22} < 0$  y además  $\theta\delta = 3.02507$  ( $\theta$  y  $\delta$  se definen en (1.29)). Por lo tanto, del Teorema 1.25 se tiene la aparición un toro de dimensión tres o dos y para efecto de visualizarlo tomamos el vector de perturbación

$$(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20}) + \left( \frac{8}{10^3}, \frac{3}{10^3} \right) = (9.03365, 23.7031),$$

en el cual tenemos la existencia de un punto de equilibrio en el interior de  $\omega$  (ver Tabla 4.1 para los demás puntos de equilibrios que están en la frontera de  $\Omega$ ):

$$\mathbf{p}_1 = (99.86959733893991, 70, 13.125, 3.28125).$$

Este punto es un foco inestable ya que tiene valores propios  $\lambda_{1,2} = 0.0119807 \pm 0.526789i$ , y  $\lambda_{3,4} = 0.00445985 \pm 0.0411779i$ , en el que las órbitas del sistema con condición inicial

$$q_0 = (99.8696 + \frac{1}{10^6}, 70 + \frac{1}{10^6}, 13.125 + \frac{1}{10^6}, 3.28125 + \frac{1}{10^6}),$$

tienden a un toro invariante tridimensional, que se puede visualizar en el espacio fase haciendo una proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \simeq \{(0, x, y, z)\}$ , el cual está dada en la Figura 4.1(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 4.1(a)-(d).

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (99.26970, 140.509, 0)$	$\lambda_1 = -0.000230821, \lambda_{2,3} = -0.000216371 \pm 0.00726276i, \lambda_4 = 0.000269823,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.1185, \lambda_2 = -0.0451283, \lambda_3 = -0.000244792, \lambda_4 = 0.00175,$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (98.1157, 141.307, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.000704303, \lambda_{2,3} = -0.000212683 \pm 0.00454301i, \lambda_4 = 0.0000310037,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.00175, \lambda_2 = -0.000169034, \lambda_3 = 0.00694681, \lambda_4 = 0.0174286,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (100.694, 40.5143, 0, 0.0175824)$	$\lambda_1 = -0.000372665, \lambda_{2,3} = 0.00012042 \pm 0.00203789i, \lambda_4 = 0.000228158,$	Silla

Tabla 4.2: Dinámica de los puntos de equilibrio para el parámetro  $(d_1, d_2)$  perturbado: **Caso HH2**.

**Ejemplo 4.11** (Caso HH2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores). *De las condiciones en (4.13), el sistema diferencial (4.9) tiene parámetros libres  $a_1, \alpha_1, \eta_1, \eta_2$  y  $\delta_3$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:*

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

Por lo tanto el punto de coexistencia donde se da una bifurcación HH es  $\mathbf{p} = (100, 60, 10, 0.0175)$  cuyos parámetros de bifurcación son

$$d_{10} = \frac{44261301554869}{980788927488000} \quad y \quad d_{20} = \frac{476326784089}{4019626752000}.$$

Por otra parte, de (4.14), tenemos que  $a_{11}a_{22} < 0$  y además  $\theta\delta = 5.66027$  ( $\theta$  y  $\delta$  se definen en (1.29)). Por lo tanto, del Teorema 1.25 se tiene la aparición de un toro tridimensional y para efectos de visualizarlo tomamos el vector de perturbación

$$(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20}) + \left( \frac{8}{10^3}, \frac{3}{10^3} \right) = (9.03365, 23.7031),$$

en el cual tenemos la existencia de un punto de equilibrio en  $\Omega$  (en la Tabla 4.2 aparecen todos los puntos de equilibrio en la frontera de  $\Omega$  en este parámetro  $(d_1, d_2)$ ):

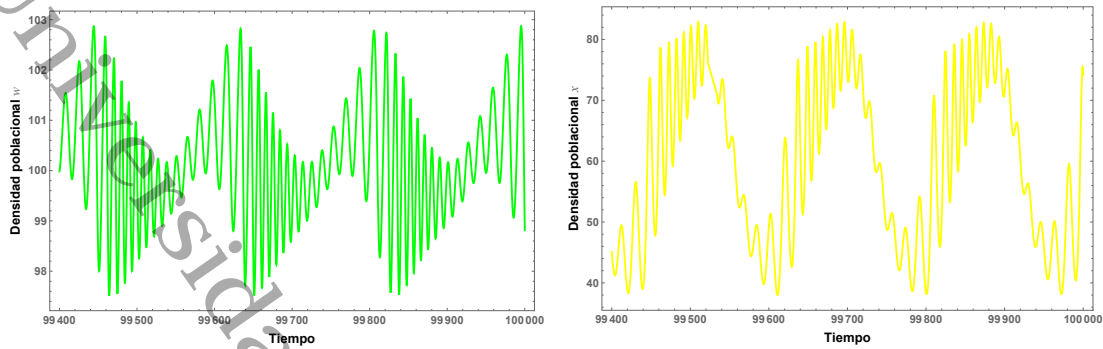
$$\mathbf{p}_1 = (99.9997, 60.019, 10.0072, 0.0174978).$$

Este punto es una silla ya que tiene valores propios  $\lambda_{1,2} = -1.904036611723412 \times 10^{-7} \pm 0.0020868i$ , y  $\lambda_{3,4} = 2.22463 \times 10^{-7} \pm 0.000222975i$ . en el que las órbitas del sistema con condición inicial

$$q_0 = (99.9997 + \frac{1}{10^6}, 60.0169 + \frac{1}{10^6}, 10.0072 + \frac{1}{10^6}, 0.0174978 + \frac{1}{10^6}),$$

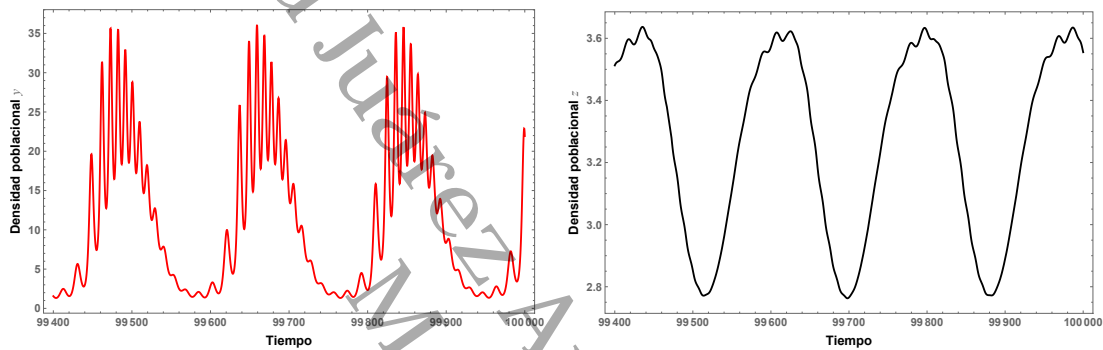
tienden a un toro invariante tridimensional, que se puede visualizar en el espacio fase haciendo una proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \simeq \{(0, x, y, z)\}$ , el cual está dada en la Figura 4.2(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 4.2(a)-(d).

Como se pudo observar, la coexistencia de las cuatro especies se tiene al asegurar la existencia de un conjunto  $\omega$ -límite, toro, en el que las densidades poblacionales se preservan en rangos favorables para la coexistencia.



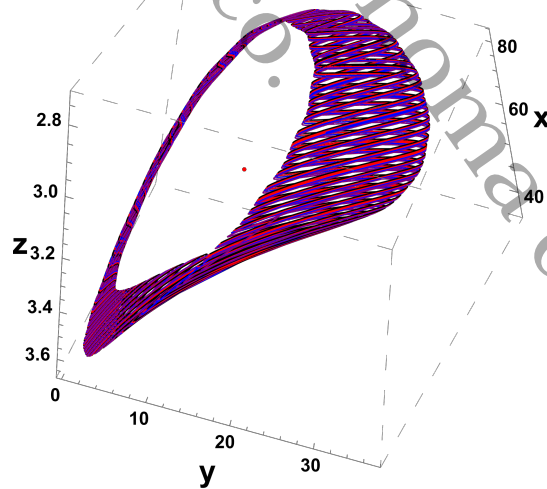
(a) Densidad poblacional  $w$

(b) Densidad poblacional  $x$



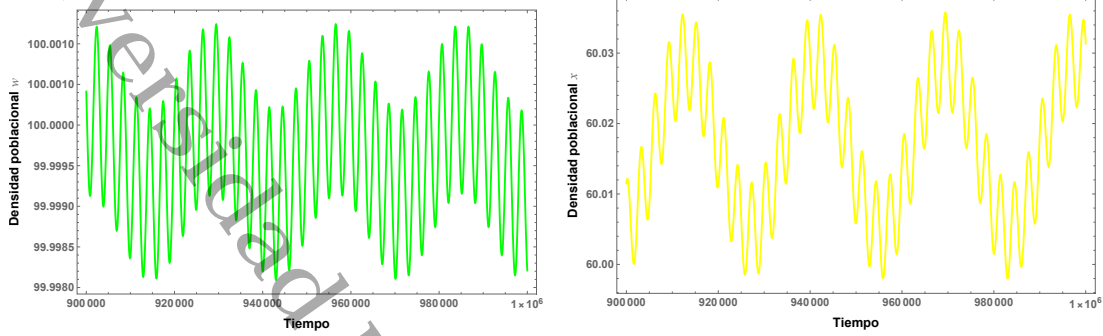
(c) Densidad poblacional  $y$

(d) Densidad poblacional  $z$



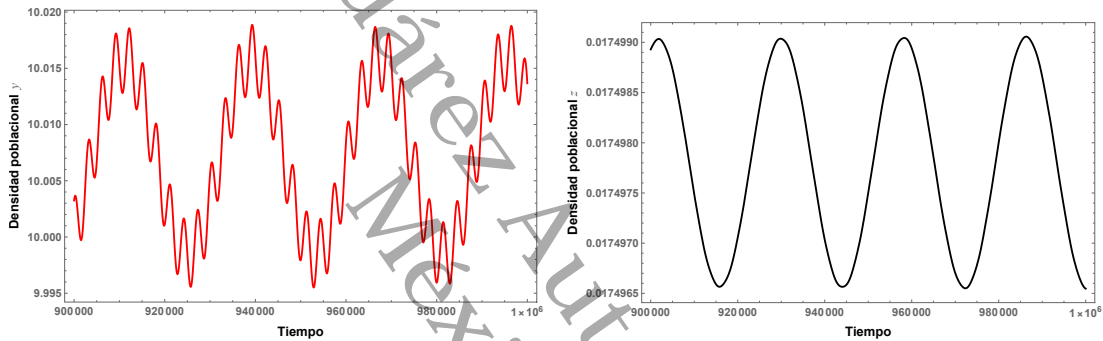
(e) Proyección del ciclo límite estable a  $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ .

Figura 4.1: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en el **Caso HH1**.



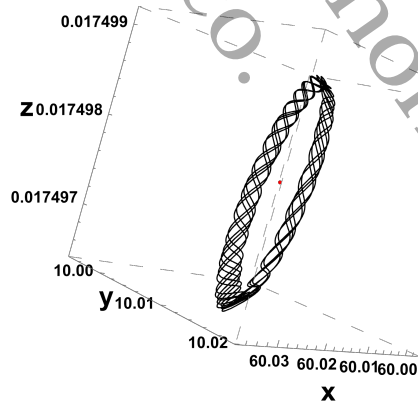
(a) Densidad poblacional  $w$

(b) Densidad poblacional  $x$



(c) Densidad poblacional  $y$

(d) Densidad poblacional  $z$



(e) Proyección del ciclo límite estable a  $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ .

Figura 4.2: Densidades poblacionales y proyección del ciclo límite en el **Caso HH2**.

# Bifurcación cero-Hopf para el modelo de cuatro especies

Asegurada la existencia de al menos un punto de equilibrio del sistema (1), dado por la Proposición 2.1, en este capítulo, analizamos este sistema a través de la bifurcación cero-Hopf y garantizamos la existencia de un conjunto límite invariante en  $\Omega$ . Denotemos por  $P_\lambda$  el polinomio característico de la linealización del sistema (1), el cual está dado por

$$P_\lambda = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad (5.1)$$

y de la condición de la bifurcación ZH tenemos que

$$P_\lambda = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda - \alpha_4), \quad \omega > 0, \quad \alpha_4 < 0. \quad (5.2)$$

**Lema 5.1.** *Si  $A_i > 0, i = 1, 2, 3$ , y  $P_\lambda$  se factoriza como en (5.2). Entonces sus raíces son*

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega, \quad \lambda_4 = \alpha_4, \quad (5.3)$$

si y solo si  $A_3 - A_2A_1 = 0$  y  $A_4 = 0$ , donde  $\omega = \sqrt{A_2}$  y  $\alpha_4 = -A_1$ .

*Demostración.* Supóngase que  $P_\lambda$  es como en la hipótesis; esto es  $P_\lambda$  factoriza como

$$P_\lambda = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda - \alpha_4), \quad \omega > 0. \quad (5.4)$$

esto es

$$\begin{aligned} \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 &= (\lambda^3 + \lambda\omega^2)(\lambda - \alpha_4) \\ &= \lambda^4 - \alpha_4\lambda^3 + \omega^2\lambda^2 - \alpha_4\omega^2\lambda \end{aligned}$$

lo cual implica

$$A_1 = -\alpha_4, \quad A_2 = \omega^2, \quad A_3 = -\alpha_4\omega^2 \quad \text{y} \quad A_4 = 0. \quad (5.5)$$

Equivalentemente

$$A_3 - A_1A_2 = 0, \quad A_4 = 0. \quad (5.6)$$

Ahora si  $A_3 - A_1A_2 = 0$  y  $A_4 = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1A_2\lambda = \lambda^3(\lambda + A_1) + A_2\lambda(\lambda + A_1) \\ &= (\lambda^3 + A_2\lambda)(\lambda + A_1) = \lambda(\lambda^2 + A_2)(\lambda + A_1) \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ◀

**Observación 5.2.** A continuación se analizará el sistema diferencial (1), y para este fin consideraremos, a partir de ahora, que las condiciones dadas en el Apéndice E.1, la Proposición 2.1 y las siguientes condiciones

$$z_0 = \frac{y_0 f'_2(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \quad e_2 = \frac{230 f'_2(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \quad e_1 = e_3 = \frac{20 f'_2(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}. \quad (5.7)$$

se cumplen.

Con lo anterior, el sistema (1) tiene como aproximación lineal  $\mathcal{J}(w, x, y, z)$  en un punto  $(w, x, y, z)$  dada por

$$\begin{pmatrix} -z\partial_w g_1(w, x, y) - x f'_1(w) - r_0 - y f'_2(w) & -z\partial_x g_1(w, x, y) - f_1(w) & -z\partial_y g_1(w, x, y) - f_2(w) & -g_1(w, x, y) \\ \frac{1}{40} x f'_1(w) r_1 - z\partial_w g_2(w, x, y) & -z\partial_x g_2(w, x, y) + \frac{1}{40} f_1(w) r_1 - d_1 & -z\partial_y g_2(w, x, y) & -g_2(w, x, y) \\ \frac{1}{20} y f'_2(w) r_2 - z\partial_w g_3(w, x, y) & -z\partial_x g_3(w, x, y) & -z\partial_y g_3(w, x, y) + \frac{1}{20} f_2(w) r_2 - d_2 & -g_3(w, x, y) \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 r_7 \\ r_4 r_7 \\ r_5 r_7 \\ r_6 r_7 \end{matrix}$$

donde

$$r_0 = \frac{8f'_2(10y_0)(wh'(w) + h(w))}{5h'(10y_0)}, \quad r_1 = \frac{2d_1}{y_0 f'_2(10y_0)} + 3, \quad r_2 = \frac{d_2}{y_0 f'_2(10y_0)} + 3, \quad r_3 = 2\partial_w g_1(w, x, y) + 23\partial_w g_2(w, x, y) + 2\partial_w g_3(w, x, y),$$

$$r_4 = 2\partial_x g_1(w, x, y) + 23\partial_x g_2(w, x, y) + 2\partial_x g_3(w, x, y), \quad r_5 = 2\partial_y g_1(w, x, y) + 23\partial_y g_2(w, x, y) + 2\partial_y g_3(w, x, y),$$

$$r_6 = -253y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 2g_1(w, x, y) + 23g_2(w, x, y) + 2g_3(w, x, y), \quad r_7 = \frac{10z f'_2(10y_0)}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}.$$

Dicha aproximación lineal en el punto de equilibrio  $p$  está dada por

$$\begin{pmatrix} -8y_0 f'_2(10y_0) & \frac{1}{12}(-235)y_0 f'_2(10y_0) & -15y_0 f'_2(10y_0) & -20y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{3}{40}(4d_1 + 7y_0 f'_2(10y_0)) & \frac{3}{4}y_0 f'_2(10y_0) & \frac{3}{2}y_0 f'_2(10y_0) & -9y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{1}{80}(4d_2 + 13y_0 f'_2(10y_0)) & \frac{1}{24}y_0 f'_2(10y_0) & \frac{3}{2}y_0 f'_2(10y_0) & -3y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\ \frac{5y_0 f'_2(10y_0)^2}{2\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & \frac{490y_0 f'_2(10y_0)^2}{3\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & -\frac{415y_0 f'_2(10y_0)^2}{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

## 5.1. Condición necesaria para la bifurcación cero–Hopf

Para probar la presencia de una bifurcación ZH, consideraremos que el sistema diferencial (1) es una familia de EDO's que depende de dos parámetros, los parámetros de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores, por lo tanto la aproximación lineal en el punto de equilibrio  $p = (w_0, x_0, y_0, z_0)$ , dada en (5.8), será denotada por  $\mathcal{J}(p, d_1, d_2)$ . Estas premisas y la Observación 5.2 nos permiten tener la siguiente condición para la bifurcación ZH.

**Lema 5.3.** Si

$$d_1 = d_{10} := \frac{2855183381y_0 f'_2(10y_0)}{140393244} \quad y \quad d_2 = d_{20} := \frac{6145801429y_0 f'_2(10y_0)}{140393244},$$

entonces los valores propios de  $\mathcal{J}(p, d_{10}, d_{20})$  son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega, \quad \lambda_4 = \alpha_4, \quad (5.9)$$

donde  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1605389501}{948603}}y_0 f'_2(10y_0)$  y  $\alpha_4 = -\frac{23}{4}y_0 f'_2(10y_0)$ .

*Demostración.* La aproximación lineal del sistema (1) en  $p$  está dada por la matriz (5.8), la cual tiene polinomio característico

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(d_1, d_2) &= \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4, \quad \text{donde} \\
 A_0 &= 1, \quad A_1 = -\frac{23}{4}y_0f_2'(10y_0), \\
 A_2 &= \frac{1}{32}y_0f_2'(10y_0)(188d_1 + 24d_2 + 8665y_0f_2'(10y_0)) \\
 A_3 &= \frac{1}{128}y_0^2f_2'(10y_0)^2(124336d_1 - 53004d_2 + 103053y_0f_2'(10y_0)) \\
 A_4 &= -\frac{5}{64}y_0^3f_2'(10y_0)^3(141992d_1 - 68044d_2 + 90971y_0f_2'(10y_0))
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Del Lema 5.1 se sigue que  $P_\lambda(d_1, d_2) = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda - \alpha_4)$ ,  $\omega > 0$ , si y solo si  $A_3 - A_1A_2 = 0$  y  $A_4 = 0$ . Haciendo  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$  el resultado se verifica. ◀

## 5.2. Condiciones de no degeneración y resultado principal

En esta sección, siguiendo las ideas en [26] (cf. [8]), mostraremos las condiciones bajo las cuales el sistema (1) presenta en  $p$  una bifurcación ZH respecto a las tasas de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los depredadores.

### 5.2.1. Simplificación del modelo

Sean  $d_{10}, d_{20}$  como en el Lema 5.3. La existencia de un punto de equilibrio  $p$  en  $\Omega$  está garantizado bajo las condiciones en la Proposición 2.1, y en particular los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  dependen de las tasas de mortalidad de los depredadores de acuerdo a las expresiones

$$c_1(d_1) = \frac{d_1x_0 + z_0g_2(w_0, x_0, y_0)}{x_0f_1(w_0)}, \quad c_2(d_2) = \frac{d_2y_0 + z_0g_3(w_0, x_0, y_0)}{y_0f_2(w_0)}.$$

Ahora, tomando  $c_1(d_{10})$  y  $c_2(d_{20})$ , el modelo (1) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dt} &= Rwh(w) - f_1(w)x - f_2(w)y - g_1(w, x, y)z, \\
 \frac{dx}{dt} &= x(c_1(d_{10})f_1(w) - d_1) - g_2(w, x, y)z, \\
 \frac{dy}{dt} &= y(c_2(d_{20})f_2(w) - d_2) - g_3(w, x, y)z, \\
 \frac{dz}{dt} &= z(e_1g_1(w, x, y) + e_2g_2(w, x, y) + e_3g_3(w, x, y) - d_3),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Por lo tanto,  $p$  es un punto de equilibrio del sistema (5.11) si y solo  $(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20})$ .

Ahora, denotamos por  $\mathcal{G}(w, x, y, z, d_1, d_2)$  el campo vectorial asociado al sistema (5.11); por otro lado  $\tau(w, x, y, z, d_1, d_2)$  y  $\delta(w, x, y, z, d_1, d_2)$  denotarán la traza y el determinante de la matriz

jacobiana  $\mathcal{J}(w, x, y, z, d_1, d_2)$  de  $\mathcal{G}$ , respectivamente. Definimos la aplicación

$$\mathcal{F} : (w, x, y, z, d_1, d_2) \mapsto (F(w, x, y, z, d_1, d_2), \tau(w, x, y, z, d_1, d_2), \delta(w, x, y, z, d_1, d_2)). \quad (5.12)$$

Las condiciones de no degeneración están caracterizadas por el determinante  $\mathfrak{D}_0$  del jacobiano de la aplicación (5.12), y los coeficientes  $B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$ ,  $C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  y  $E(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  (ver Teorema 1.2.4). Haciendo uso del software Mathematica, mediante las fórmulas del Apéndice A.4 y los vectores propios normalizados en el Apéndice E.2, se calcularon cada uno de estas condiciones. Sin embargo las expresiones obtenidas resultan ser extensas, por lo que se decidió no escribirlas aquí; no obstante se mostrarán expresiones explícitas en los ejemplos considerando respuestas funcionales específicas. En este sentido, enunciamos el siguiente resultado.

**Teorema 5.4** (Resultado principal). *Existen condiciones suficientes que garantizan que el sistema (1) exhibe una bifurcación cero–Hopf en  $p$  con respecto a los parámetros de mortalidad  $d_1$  y  $d_2$  de los mesodepredadores, con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ ; siempre que  $\mathfrak{D}_0$ ,  $B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$ ,  $C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  y  $E(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  sean distintos de cero.*

*Demostración.* Del Lema 5.3 se tiene que la linealización del sistema (5.11) en  $p$  tiene valores propios como en (5.9) cuando  $(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20})$ , y dado que  $\mathfrak{D}_0$ ,  $B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$ ,  $C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  y  $E(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})$  son números reales distintos de cero, el resultado se sigue del Teorema 1.26. ◀

## 5.3. Aplicación del resultado principal

En esta sección se dan algunas aplicaciones del resultado principal de este capítulo, utilizando respuestas funcionales específicas que consideran ciertos aspectos ecológicos del modelo que se analiza.

En particular, considerando las hipótesis de la Sección 2.3, analizamos las siguientes casos, de acuerdo al tipo de interacción entre las especies que considera las respuestas funcionales  $g_1(w, x, y)$ ,  $g_2(w, x, y)$  y  $g_3(w, x, y)$ :

- i) **Caso ZH1:** Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia, medidas a través de respuestas funcionales de tipo Holling II generalizadas (Falconi et al. [24] and cf. [3])
- iii) **Caso ZH2:** La población de presas tiene defensa, los depredadores experimentan defensa, interferencia o competencia, todos a través de respuestas funcionales de tipo Holling IV generalizadas (ver Falconi et al. [24], Maghool et al. [25]).

### 5.3.1. Caso ZH1: Los depredadores y el superdepredador experimentan saciedad e interferencia

En este caso, la tasa de consumo del superdepredador se ve afectada por la interferencia de los mesodepredadores, lo cual es favorable para la presa o recurso, ya que ocasiona que el perjuicio hacia esta se vea disminuido.

En este caso las respuestas funcionales son:

$$f_1(x) = \frac{a_1 x}{b_1 + x}, \quad f_2(x) = \frac{a_2 x}{b_2 + x}, \quad g_1(w, x, y) = \frac{\alpha_1 w}{\beta_1 + \gamma_1 w + \delta_1 x + \eta_1 y},$$

$$g_2(w, x, y) = \frac{\alpha_2 x}{\beta_2 + \gamma_2 w + \delta_2 x + \eta_2 y}, \quad g_3(w, x, y) = \frac{\alpha_3 y}{\beta_3 + \gamma_3 w + \delta_3 x + \eta_3 y}.$$

Con estas respuestas funcionales, el sistema (1) tendrá nuevos parámetros. Así que, con el fin de que se cumplan las condiciones del Apéndice E.1, hacemos las siguientes asignaciones de parámetros:

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{3a_1\eta_1}{5\alpha_1}, & w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{9\alpha_1\eta_2}{8\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{27\alpha_1\delta_3}{\eta_1}, \\ \beta_1 &= \frac{\eta_1 y_0}{2}, & \beta_2 &= \frac{3\eta_2 y_0}{2}, & \beta_3 &= 27y_0\delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{5}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\ \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{\eta_2}{2}, & \eta_3 &= 36\delta_3, & k_1 &= 20y_0, \\ b_1 &= b_2 = 10y_0, & a_2 &= a_1, & e_1 &= e_3 = \frac{a_1\eta_1}{25\alpha_1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Bajo las asignaciones anteriores, tenemos los siguientes resultados:

- Existencia de un punto de equilibrio en el interior de  $\Omega$  dado por las condiciones:

$$R_1 = \frac{4a_1}{5}, \quad c_1 = \frac{320792321}{3284079960}, \quad c_2 = \frac{460241381}{1642039980}, \quad d_3 = \frac{79a_1}{100},$$

de acuerdo a la Proposición 2.1; el cual está dado por

$$p_0 = \left(10y_0, 6y_0, y_0, \frac{a_1 y_0 \eta_1}{5\alpha_1}\right),$$

y donde, por el Lema 5.3, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (5.11) tiene valores propios

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_4 = -\zeta_1, \quad \omega_1 = \frac{a_1}{1120} \sqrt{\frac{48283416511}{16755510}}, \quad \zeta_1 = -\frac{23}{60}a_1$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{18621581a_1}{1642039980} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{26741923a_1}{410509995},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación ZH.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} B(p_0, d_{10}, d_{20}) &= \frac{4194596650298882214526\alpha_1}{504269996975446547703\eta_1 y_0}, \\ C(p_0, d_{10}, d_{20}) &= \frac{10915206114907406500468049253965\alpha_1}{3506739867989384806296036636732\eta_1 y_0}, \\ E(p_0, d_{10}, d_{20}) &= -\frac{a_{111}\alpha_1^2}{a_{121}a_1\eta_1^2 y_0^2}, \quad \mathcal{D}_0 = \frac{103988569131039870119a^7}{2826489335434444800000}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{111} &= 2480611649303273666379038895549578116783029518943330977436356641020426 \\ &\quad 9106744876351070448285268839364654624489554131904026358734335533311197800383 \\ a_{121} &= 1013502743959256816436964153618270462856760051466832407162166104043569 \\ &\quad 0982938504093123068522377143526189263124523648185271071904422898952114176. \end{aligned}$$

Notemos que tanto  $BCE$  como  $\mathfrak{D}_0$  son distintos de cero. Por lo que del Teorema 5.4 se concluye que el sistema (5.11) presenta una bifurcación ZH con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

### 5.3.2. Caso ZH2: Defensa de la presa e interferencia entre predadores

En este caso, las respuestas funcionales son similares a las usadas en el Caso **H2** de la Subsección 2.3.2 y análogamente como se hizo en la subsección 2.3.2 se tienen los siguientes resultados.

Sustituyendo las funciones explícitas anteriores el sistema (5.11) tendrá nuevos parámetros. Por lo tanto, una vez más, al igual que el ejemplo anterior, con el fin de que las condiciones en el Proposición 2.1 y las condiciones adicionales (5.7) de la Sección 1.2.4, así como las condiciones en el Apéndice E.1 se satisfagan, hacemos las siguientes asignaciones adicionales de parámetros:

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{23a_1\eta_1}{10y_0\alpha_1}, & w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, & \alpha_2 &= \frac{9\alpha_1\eta_2}{8\eta_1}, & \alpha_3 &= \frac{27\alpha_1\delta_3}{\eta_1}, \\ \beta_1 &= \frac{3\eta_1y_0}{2}, & \beta_2 &= 3\eta_2y_0, & \beta_3 &= 27y_0\delta_3, & \gamma_1 &= \frac{\eta_1}{100y_0}, & \gamma_2 &= \frac{\eta_2}{20}, \\ \gamma_3 &= \frac{3\delta_3}{10}, & \delta_1 &= \frac{\eta_1}{12}, & \delta_2 &= \frac{\eta_2}{24y_0}, & \eta_3 &= \frac{18\delta_3}{y_0}, & k_1 &= 20y_0, \\ b_1 &= b_2 = 300y_0^2, & a_2 &= a_1, & e_1 &= e_3 = \frac{a_1\eta_1}{5y_0\alpha_1}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Estas asignaciones permiten validar el Teorema 5.4:

- Las condiciones de la Proposición 2.1:

$$R_1 = \frac{4a_1}{25y_0}, \quad c_1 = \frac{3065773247}{2807864880}, \quad c_2 = \frac{6566981161}{2807864880}, \quad d_3 = \frac{253a_1}{80y_0},$$

se cumplen, las cuales nos garantizan la existencia de un punto de equilibrio positivo en el interior de  $\Omega$ , el cual está dado por

$$p_0 = (10y_0, 6y_0, y_0, \frac{a_1\eta_1}{100\alpha_1}),$$

en el cual, por el Lema 5.3, la aproximación lineal,  $\mathcal{J}(p_0, (d_{10}, d_{20}))$ , del sistema (5.11) tiene valores propios

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_4 = -\zeta_1 \quad \omega_1 = \frac{a_1}{1600y_0} \sqrt{\frac{1605389501}{948603}}, \quad \zeta_1 = -\frac{23}{3200y_0} a_1,$$

cuando  $d_1 = d_{10}$  y  $d_2 = d_{20}$ , donde

$$d_{10} = \frac{2855183381a_1}{112314595200y_0} \quad \text{y} \quad d_{20} = \frac{6145801429a_1}{112314595200y_0},$$

que nos garantiza una de las condiciones necesarias para tener una bifurcación ZH.

- Haciendo uso del software Mathematica, se calcularon las condiciones de no degeneración, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20}) &= \frac{241803908874614501509565\alpha_1}{227500530844382888508672\eta_1 y_0}, \\ C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20}) &= -\frac{56313191807698522297266918620948499167930665\alpha_1}{3203782133540484836965481918382099504140383584\eta_1 y_0}, \\ E(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20}) &= -\frac{a_{111}\alpha_1^2}{a_{121}a_1\eta_1^2 y_0}, \quad \mathfrak{D}_0 = \frac{10237674429332479459a_1^7}{4132328913764352000000000}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{111} &= 128891817218729765160757386743626624718348098810694582017251318708830 \\ &\quad 85240469698085192740287071685184167599221211170200971169250615736417185 \\ a_{121} &= 1342106110795654284238978692872184489539127468310288857881406091204 \\ &\quad 3387292777034081311237371718673734171224080988557350512522768587767808. \end{aligned}$$

Notemos que tanto  $BCE$  como  $\mathfrak{D}_0$  son distintos de cero. Por lo que del Teorema 5.4 se concluye que el sistema (5.11) presenta una bifurcación ZH con respecto a los parámetros  $(d_1, d_2)$  con valor de bifurcación  $(d_{10}, d_{20})$ .

## 5.4. Simulaciones numéricas

En esta sección se dan algunas simulaciones numéricas para validar los resultados de la sección anterior.

**Ejemplo 5.5** (Caso ZH1: Sacidad e interferencia entre predadores). *De las condiciones en (5.13), el sistema diferencial (5.11) tiene parámetros libres  $a_1, \alpha_1, \eta_1, \eta_2$  y  $\delta_3$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:*

$$a_1 = 1, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

*Con esto, el punto de coexistencia donde se da una bifurcación ZH es  $\mathbf{p}_0 = (100, 60, 10, 2)$ , cuyos parámetros de bifurcación son*

$$d_{10} = 0.0113405 \quad \text{y} \quad d_{20} = 0.0651432.$$

*Por otra parte, notemos que de (5.14), tenemos que  $\text{sign}(B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})) = 1$  y además  $\theta < 0$ . Por lo tanto, del Teorema 1.26 se tiene la aparición un toro de dimensión tres o dos, que para efecto de visualizarlo tomamos el vector de perturbación*

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.79, \lambda_2 = -0.0651432, \lambda_3 = -0.0113405, \lambda_4 = 0.8$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (13.1346, 84.5638, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.0326026, \lambda_{2,3} = 0.0171199 \pm 0.0848493i, \lambda_4 = 0.230994,$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (30.279, 0, 88.4443, 0)$	$\lambda_1 = -0.750245, \lambda_2 = 0.0113622, \lambda_{3,4} = 0.018334 \pm 0.18333i,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.8, \lambda_2 = -0.612222, \lambda_3 = 0.0537802, \lambda_4 = 0.121714,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (148.454, 39.6765, 0, 1.76651)$	$\lambda_1 = -0.464108, \lambda_2 = -0.0323217, \lambda_{3,4} = 0.0120566 \pm 0.131808i,$	Silla
$\mathbf{p}_1 = (99.9698, 60.0098, 10.0042, 1.99986)$	$\lambda_1 = -0.143462, \lambda_2 = -0.000233082, \lambda_{3,4} = 0.0000437508 \pm 0.04783i,$	Silla
$\mathbf{p}_2 = (100.03, 59.9902, 9.99577, 2.00014)$	$\lambda_1 = -0.144037, \lambda_{2,3} = -0.0000427681 \pm 0.0480287i, \lambda_4 = 0.000230313,$	Silla

Tabla 5.1: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros  $(d_1, d_2)$  perturbados: **Caso ZH1**.

$$(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20}) + \left( \frac{5}{10^9}, \frac{5}{10^9} \right),$$

en el cual nuestro sistema tiene dos puntos de equilibrio dentro de  $\Omega$  (en la Tabla 5.1 aparecen todos los puntos de equilibrio del sistema para los parámetros  $(d_1, d_2)$  perturbados)

$$\mathbf{p}_1 = (99.9698, 60.0098, 10.0042, 1.99986) \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = (100.03, 59.9902, 9.99577, 2.00014).$$

El punto  $\mathbf{p}_1$  es una silla ya que tiene valores propios  $\lambda_1 = -0.143462, \lambda_2 = -0.000233036$  y  $\lambda_{3,4} = 0.0000436279 \pm 0.0478301i$ . Así también, el punto  $\mathbf{p}_2$  es una silla ya que sus valores propios son  $\lambda_5 = -0.144037, \lambda_{6,7} = -0.0000427762 \pm 0.0480287i$  y  $\lambda_8 = 0.000230312$

Por otra parte, tomando la condición inicial

$$\mathbf{q}_0 = \left( 100 + \frac{1}{10}, 60 + \frac{1}{10}, 10 + \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10} \right),$$

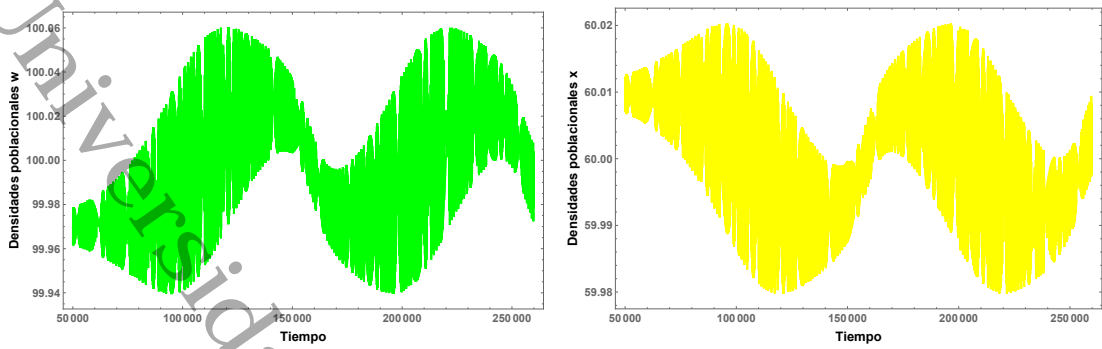
cercana al punto de equilibrio  $\mathbf{p}_0$ , (cercanas a  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$ ), las órbitas del sistema que pasan por este punto se acumulan en un conjunto invariante, toro, que se puede visualizar en el espacio fase haciendo una proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3 \simeq \{(0, x, y, z)\}$ , el cual está dada en la Figura 5.1(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 5.1(a)-(d).

**Ejemplo 5.6** (Caso ZH2: Saciedad e interferencia entre predadores). De las condiciones en (5.15), el sistema diferencial (5.11) tiene parámetros libres  $a_1, \alpha_1, \eta_1, \eta_2$  y  $\delta_3$ . Con el fin de obtener simulaciones numéricamente, damos los siguientes valores:

$$a_1 = 1, \quad y_0 = 10, \quad \alpha_1 = \eta_1 = \eta_2 = \delta_3 = 1.$$

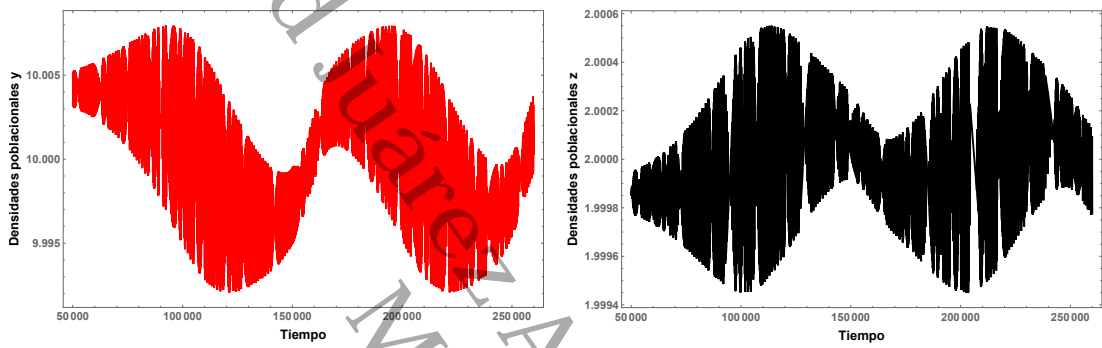
Con esto, el punto de coexistencia donde se da una bifurcación ZH es  $\mathbf{p}_0 = (100, 60, 10, 0.01)$ , cuyos parámetros de bifurcación son

$$d_{10} = 0.00254213 \quad \text{y} \quad d_{20} = 0.00547195.$$



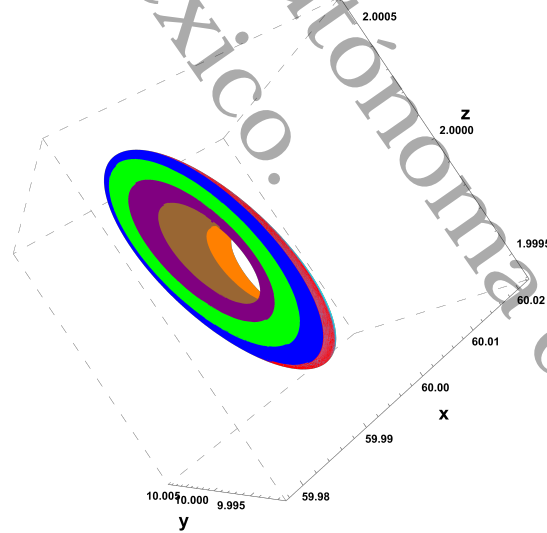
(a) Densidad poblacional  $w$

(b) Densidad poblacional  $x$



(c) Densidad poblacional  $y$

(d) Densidad poblacional  $z$



(e) Proyección del toro.

Figura 5.1: Densidades poblacionales y proyección del toro en  $\mathbb{R}^3$  en el Caso ZH1.

Por otra parte, notemos que de (5.14), tenemos que  $\text{sign}(B(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})C(\mathbf{p}_0, d_{10}, d_{20})) = -1$  y

Puntos de equilibrio	Valores propios	Dinámica de los puntos de equilibrio
$\mathbf{r}_1 = (88.5249, 0, 84.3569, 0)$	$\lambda_1 = -0.296304, \lambda_{2,3} = -0.000423479 \pm 0.00263947i, \lambda_4 = 0.0000124325,$	Silla
$\mathbf{r}_2 = (200, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.243523, \lambda_2 = -0.004, \lambda_3 = 0.000577447, \lambda_4 = 0.00121028,$	Silla
$\mathbf{r}_3 = (87.7941, 84.6208, 0, 0)$	$\lambda_{1,2} = -0.000419224 \pm 0.00178798i, \lambda_3 = -0.0000266308, \lambda_4 = 0.0836684,$	Silla
$\mathbf{r}_4 = (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.31625, \lambda_2 = -0.00547195, \lambda_3 = -0.00254213, \lambda_4 = 0.004,$	Silla
$\mathbf{r}_5 = (130.153, 40.6938, 0, 0.0187257)$	$\lambda_1 = -0.00314207, \lambda_2 = 0.0000585122, \lambda_{3,4} = 0.000913636 \pm 0.00803883i,$	Silla
$\mathbf{p}_1 = (122.433, 44.8967, 2.64382, 0.0179928)$	$\lambda_1 = -0.00298204, \lambda_2 = -0.000041609, \lambda_{3,4} = 0.000940473 \pm 0.00677911i,$	Silla

Tabla 5.2: Dinámica de los puntos de equilibrio para los parámetros  $(d_1, d_2)$  perturbados: **Caso ZH2**.

además  $\theta > 0$ . Por lo tanto, del Teorema 1.26 se tiene la aparición un toro de dimensión tres o dos, que para efecto de visualizarlo tomamos el vector de perturbación

$$(d_1, d_2) = (d_{10}, d_{20}) + (-0.146298, 0.989241),$$

en el cual nuestro sistema tiene dos puntos de equilibrio dentro de  $\Omega$  (para todos los puntos de equilibrio ver Tabla 5.2)

$$\mathbf{p}_1 = (122.433, 44.8967, 2.64382, 0.0179928),$$

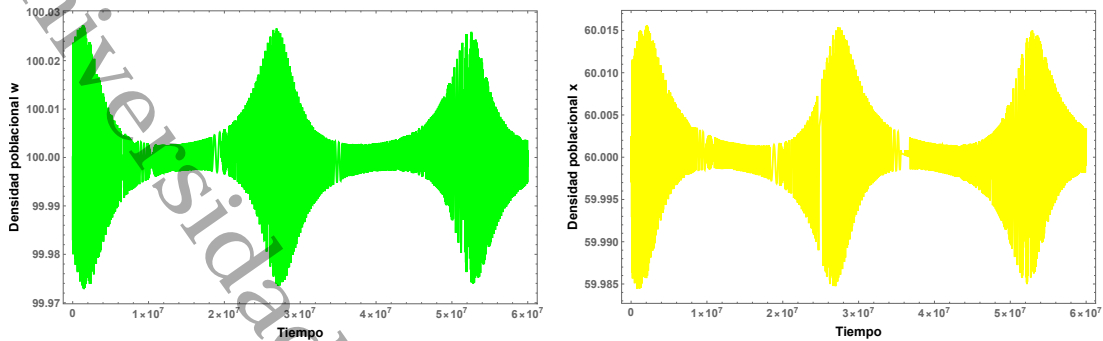
el cual es un punto silla ya que tiene valores propios  $\lambda_1 = -0.00298204, \lambda_2 = -0.000041609$  y  $\lambda_{3,4} = 0.000940473 \pm 0.00677911i$ .

Por otra parte, tomando la condición inicial

$$\mathbf{q}_0 = (100 + \frac{1}{10^7}, 60 + \frac{1}{10^7}, 10 - \frac{1}{15^7}, 2 - \frac{1}{15^4}),$$

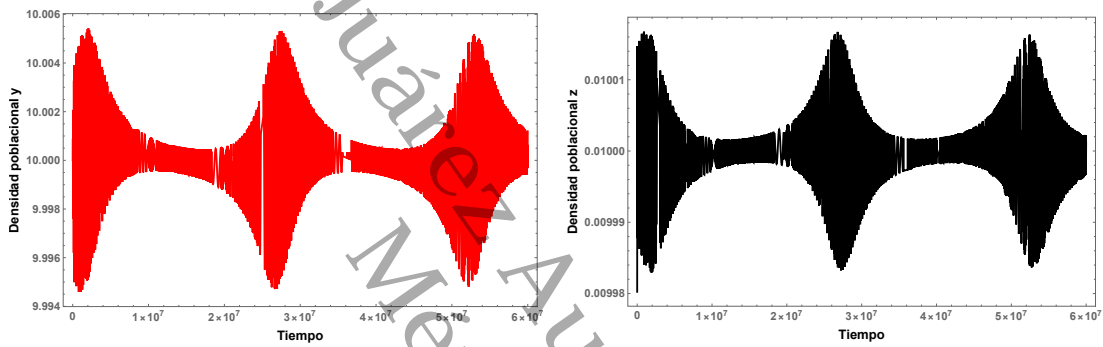
cercana al punto de equilibrio  $\mathbf{p}_0$ , (y a  $\mathbf{p}_1$ ), las órbitas del sistema que pasan por este punto se acumulan en un conjunto invariante, toro, que se puede visualizar en el espacio fase haciendo una proyección al hiperespacio  $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)} \simeq \{(0, x, y, z)\}$ , el cual está dada en la Figura 5.2(e). También, las correspondientes series de tiempo de las densidades poblacionales se muestran en la figura 5.2(a)-(d).

En resumen, como se pudo observar se probó la coexistencia de las especies a través de la existencia de toros invariantes. Para que esto fuera posible se establecieron condiciones en los parámetros ecológicos del sistema (1) que permitieron ver la relación o condiciones que se deben cumplir en cada uno de estos, entre los cuales las tasas de mortalidad de los mesodepredadores son cruciales para preservación de las especies, ya que de estos depende el comportamiento del modelo (coexistencia o extinción de las especies).



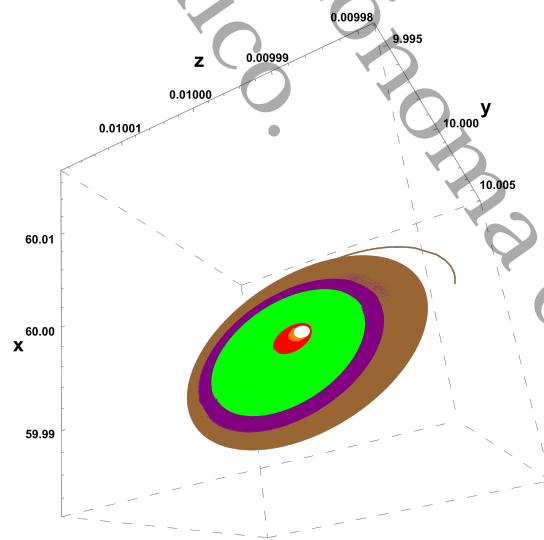
(a) Densidad poblacional  $w$

(b) Densidad poblacional  $x$



(c) Densidad poblacional  $y$

(d) Densidad poblacional  $z$



(e) Proyección del toro.

Figura 5.2: Densidades poblacionales y proyección del toro en  $\mathbb{R}^3$  en el Caso ZH2.

---

## Resultados

Como resultado del análisis realizado se logró dar respuestas a cada una de las preguntas de investigación:

1. Con cada uno de las premisas que rigen el comportamiento o interacción entre las especies es posible describir nuestro modelo ecológico a través de un modelo tipo Gause.
2. En cada uno de los capítulos se mostraron condiciones suficientes en los parámetros ecológicos y en las respuestas funcionales que garantizaron la presencia de cada una de estas bifurcaciones.
3. Como pudimos observar en cada uno de los ejemplos se consideraron casos que involucran aspectos ecológicos entre las especies que permitió obtener respuestas funcionales más generales con las cuales podemos obtener como casos particulares las respuestas funcionales tipo Holling, Crowley–Martin y Beddington–DeAngelis.
4. De nuestro análisis, además de puntos de equilibrio y órbitas periódicas, fue posible encontrar conjuntos invariantes más complejos que garantizaron la coexistencia de las cuatro especies: los toros invariantes.

## Discusión

Para el análisis del modelo de red alimentaria, consideramos ciertos aspectos ecológicos que influyen en la modelación matemática del mismo, bajo las cuales nuestro modelo ecológico quedó representado por el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias (1). Este modelo es de tipo Gause, lo que significa que la supervivencia de los mesodepredadores solamente depende del recurso o presa y la del superdepredador depende de los mesodepredadores, por lo que es de importancia la coexistencia de cada una de las especies. El análisis del sistema diferencial y la coexistencia de las especies fueron estudiados por otros autores, obteniendo resultados parciales al utilizar respuestas funcionales específicas y una tasa de crecimiento concreta para la presa. Nuestro objetivo principal en este trabajo fue estudiar la coexistencia de las especies tan general como fuese posible independientemente de la tasa de crecimiento de la presa y de las respuestas funcionales involucradas en la interacción entre las especies. Primeramente, en el Capítulo 2, se analizó el sistema (1) y se encontraron condiciones en los parámetros ecológicos y en las respuestas funcionales que garantizaron

una bifurcación de Hopf, y en consecuencia la existencia de ciclos límite estables, lo que garantizó la coexistencia de especies, dicho resultado está expuesto en el Teorema 2.7. Posteriormente, en el Capítulo 3, el análisis realizado nos permitió encontrar condiciones que garantizan que el sistema presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens, obteniendo el Teorema 3.7. De hecho, para el caso de esta bifurcación se pudo obtener que existe bi-estabilidad proveniente de un ciclo límite estable y de un punto de equilibrio estable. En los capítulos 4 y 5 obtuvimos las condiciones necesarias y suficientes que permitieron obtener los teoremas 4.9 (bifurcación doble Hopf) y 5.4 (bifurcación cero-Hopf), y garantizar la coexistencia de las especies. Por lo tanto, en cada uno de los análisis se garantizó la coexistencia de las especies a través de la existencia de conjuntos límite estables.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se analizó un modelo de red alimentaria conformado por cuatro poblaciones de especies que conforman un ecosistema: un población de presas  $P$ , dos de mesodepredadores  $MP1$  y  $MP2$ , y una de superdepredador  $SP$ . En este modelo fueron considerados ciertos aspectos ecológicos que influyen en la modelación matemática del mismo, bajo las cuales el modelo ecológico está representado por el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias (1). Este modelo es de tipo Gause, lo que significa que  $MP1$ ,  $MP2$  y  $SP$  son especialistas, esto es, la supervivencia de los mesodepredadores solamente depende del recurso o presa y la del superdepredador depende de los mesodepredadores. El análisis del sistema diferencial y la coexistencia de las especies fueron estudiados por otros autores, obteniendo resultados parciales al utilizar respuestas funcionales específicas y una tasa de crecimiento concreta para la presa. En nuestro trabajo se estudió la coexistencia de las especies más general haciendo posible que los resultados fueran aplicables a una gran variedad de problemas, independientemente de la tasa de crecimiento de la presa  $P$  y de las respuestas funcionales involucradas en la interacción entre las especies. Asimismo se generalizaron las respuestas funcionales que generalmente dependen de dos densidades poblacionales a lo más, haciéndolas depender de tres. Los resultados obtenidos podemos resumirlos a continuación.

## Resultados matemáticos

- Se encontraron condiciones en los parámetros ecológicos y en las respuestas funcionales que garantizaron la presencia de bifurcaciones de Hopf, Bogdanov–Takens, Hopf–Hopf y cero–Hopf.
- Las condiciones en los parámetros permitieron la existencia de ciclos límite estables, puntos de equilibrio y toros invariantes.
- Se abordaron ejemplos (ver Sección 2.3) de tipo Holling generalizadas en las que no solo se consideraba las interacciones descritas por las respuestas funcionales Holling usuales sino que se introdujeron más parámetros y variables a estas.
- Finalmente, se realizaron simulaciones numéricas que permitieron verificar los resultados teóricos obtenidos.

## Resultados ecológicos

- Se garantizó la coexistencia de especies.
- Los aspectos ecológicos considerados entre las especies como la interferencia en el consumo del superdepredador, y defensa de la presa, permiten que estos resultados sean aplicables a una gran variedad de ecosistemas.
- Las tasas de mortalidad juegan un papel crucial en la dinámica del sistema de red alimentaria que conforman las especies.

En conclusión, los aspectos ecológicos considerados en las aplicaciones hacen que los resultados obtenidos sean de gran relevancia e interés tanto en el aspecto teórico como aplicado, lo que contribuye a la literatura de modelos matemáticos ecológicos. Además, las simulaciones numéricas nos ayudan a ilustrar los resultados obtenidos.

Como futuras líneas de investigación, al modelo estudiado se le puede incorporar la dependencia de la interacción de las especies del espacio en el que habitan a través del paso del tiempo, convirtiéndolo en un problema con ecuaciones diferenciales parciales. Esto permitiría analizar fenómenos como la difusión o la formación de patrones [1]. Asimismo, se puede introducir la noción de retardo con respecto a algún aspecto ecológico de interés que se manifieste en las premisas que determinan el sistema diferencial o bien en las respuestas funcionales [27]. Esto significa trabajar el modelo con una combinación simultánea de estos dos aspectos, lo cual representa una línea de investigación particularmente prometedora, capaz de enriquecer la capacidad predictiva del modelo y de ofrecer nuevas perspectivas para el análisis de procesos ecológicos en contextos más cercanos a la realidad.

En este apartado se concentran todas las fórmulas necesarias para el cálculo de las condiciones de no generación de cada una de las bifurcaciones de este trabajo.

### A.1. Primer coeficiente de Lyapunov en la bifurcación de Hopf

El que una bifurcación de Hopf sea supercrítica o subcrítica está determinado a través del signo del primer coeficiente de Lyapunov,  $l(\alpha_0)$ , del sistema diferencial, cerca del punto de equilibrio, el cual se puede calcular en  $\alpha = 0$  como se describe a continuación. Dado un sistema diferencial dependiente de un parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ . Escribimos el sistema en la forma

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (\text{A.1})$$

donde  $F$  es una función vectorial cuyas componentes tienen expansión de Taylor en  $x$ , que comienzan con al menos términos cuadráticos,  $F = O(\|x\|^2)$ . Dicha expansión de Taylor cerca de  $x = 0$  está dada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (\text{A.2})$$

donde  $B(x, y)$  y  $C(x, y, u)$  son funciones vectoriales simétricas multilineales de  $x, y, u \in \mathbb{R}^n$  con coordenadas

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad (\text{A.3})$$

y

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad (\text{A.4})$$

donde  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $p \in \mathbb{C}^n$  un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $i\omega_0$  (de la condición de Hopf),  $Ap = i\omega_0 p$ , y sea  $q \in \mathbb{C}^n$  un vector propio de  $A^T$  correspondiente al valor propio  $-i\omega_0$ ,  $Aq = -i\omega_0 q$ , tales que  $\langle p, q \rangle = 1$ , donde  $\langle p, q \rangle = \bar{p}^T q$ , es el producto interior en  $\mathbb{C}^n$ . Entonces

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re} \left[ \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle \right],$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .

## A.2. Coeficientes cuadráticos de la forma normal para la bifurcación de Bogdanov–Takens

Para aplicar la teoría de la bifurcación descrita en la Sección 1.2.2 a modelos particulares, se necesita verificar las condiciones de no degeneración, expuestas en el Teorema 1.24, en el punto de bifurcación. En este apartado se derivan las fórmulas para el cálculo de los coeficientes cuadráticos  $a(0)$  y  $b(0)$  de la condición H1.

Supongamos que (1.14) con  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  y  $\alpha = 0$  se puede escribir en la forma

$$f(x, 0) = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.5})$$

donde  $A = D_x f(0, 0)$  y  $F(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$  es una función suave. Podemos escribir a  $F$  en su expansión de Taylor cerca de  $x = 0$  en la forma

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^3) \quad (\text{A.6})$$

donde  $B(x, x)$  es una función bilineal con componentes dadas por la expresión (A.4) del Apéndice A.1.

Por otra parte, de la condición de bifurcación tenemos que

$$\Delta(0) = \det A = 0, \quad \sigma(0) = \text{tr } A = 0.$$

Y supongamos que  $A \neq 0$ , esto es,  $A$  tiene al menos un elemento distinto de cero. Entonces existen vectores propios reales linealmente independientes  $u_{0,1} \in \mathbb{R}^n$ , tales que

$$Au_0 = 0, \quad Au_1 = u_0, \quad (\text{A.7})$$

donde el vector  $u_0$  es un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio 0, mientras que el vector  $u_1$  es un vector propio generalizado de  $A$  correspondiente a este mismo valor propio. Más aún, existen similarmente vectores propios adjuntos  $v_{0,1} \in \mathbb{R}^n$  de la matriz transpuesta  $A^T$  que cumplen

$$A^T v_1 = 0, \quad A^T v_0 = v_1. \quad (\text{A.8})$$

Los vectores  $u_{0,1}, v_{0,1}$  son vectores normalizados que satisfacen

$$\langle u_0, v_0 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle u_0, v_1 \rangle = \langle u_1, v_0 \rangle = 0, \quad (\text{A.9})$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle v_1, B(u_0, u_0) \rangle, \quad b(0) = \langle v_0, B(u_0, u_0) \rangle + \langle v_1, B(u_0, u_1) \rangle. \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Coeficientes cúbicos de la forma normal en la bifurcación Hopf–Hopf

Con el fin de conocer el caso para ser analizado, de acuerdo al signo de  $\theta$  y  $\delta$ , es necesario el cálculo de los coeficientes cúbicos de la forma normal. Para esto, escribimos

$$f(x, \alpha) = Ax + \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (\text{A.11})$$

donde  $B(x, x)$  y  $C(x, x, x)$  son como en (A.3) y (A.4), respectivamente.

Sean  $q_1, q_2 \in \mathbb{C}^n$  vectores propios de  $A$  correspondiente los valores propios  $i\omega_1, i\omega_2$  esto es,  $Aq_1 = i\omega_1 q_1$ , y  $Aq_2 = i\omega_2 q_2$ , y  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}^n$  vectores propios de  $A^T$  correspondiente los valores propios  $-i\omega_1, -i\omega_2$ , es decir,  $A^T p_1 = -i\omega_1 p_1$ , y  $A^T p_2 = -i\omega_2 p_2$ , tales que

$$\langle p_j, q_j \rangle = 1, \quad j = 1, 2.$$

donde  $\langle v, w \rangle = \bar{v}^T w$ , es el producto interior en  $\mathbb{C}^n$ . Entonces

$$\begin{aligned} G_{2100}(0) &= \frac{1}{2} \langle p_1, C(q_1, q_1, \bar{q}_1) + B(h_{2000}, \bar{q}_1) + 2B(h_{1100}, q_1) \rangle, \\ G_{1011}(0) &= \langle p_1, C(q_1, q_2, \bar{q}_2) + B(h_{1010}, \bar{q}_2) + B(h_{1001}, q_2) + B(h_{0011}, q_1) \rangle, \\ H_{1110}(0) &= \langle p_2, C(q_1, \bar{q}_1, q_2) + B(h_{1100}, q_2) + B(h_{1010}, \bar{q}_1) + B(\bar{h}_{1001}, q_1) \rangle, \\ H_{0021}(0) &= \frac{1}{2} \langle p_2, C(q_2, q_2, \bar{q}_2) + B(h_{0020}, \bar{q}_2) + 2B(h_{0011}, q_2) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{aligned} h_{1100} &= -A^{-1}B(q_1, \bar{q}_1), \\ h_{2000} &= (2i\omega_1(0)I_n - A)^{-1}B(q_1, q_1), \\ h_{1010} &= [i(\omega_1(0) + \omega_2(0))I_n - A]^{-1}B(q_1, q_2), \\ h_{1001} &= [i(\omega_1(0) - \omega_2(0))I_n - A]^{-1}B(q_1, \bar{q}_2), \\ h_{0020} &= (2i\omega_2(0)I_n - A)^{-1}B(q_2, q_2), \\ h_{0011} &= -A^{-1}B(q_2, \bar{q}_2). \end{aligned}$$

### A.4. Coeficientes de la forma normal de la bifurcación cero–Hopf

En este apartado se presentan las fórmulas para el cálculo de los coeficientes de la condición  $ZH1$  expuesto en el Teorema 1.26, necesario para conocer los signos de  $s$  y  $\theta$  de la forma normal(1.32) los cuales permiten saber la dinámica en el diagrama de bifurcación. Para esto, escribimos

$$f(x, \alpha) = Ax + \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4), \quad (\text{A.13})$$

donde  $B(x, x)$  y  $C(x, x, x)$  son como en (A.3) y (A.4), respectivamente.

Sean  $q_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $q_1 \in \mathbb{C}^n$  vectores propios de  $A$  correspondiente los valores propios 0 y  $i\omega$  esto es,  $Aq_0 = 0$  y  $Aq_1 = i\omega q_1$ ; y  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $p_1 \in \mathbb{C}^n$  vectores propios de  $A^T$  correspondiente los valores propios 0,  $-i\omega$ , es decir,  $A^T p_0 = 0$ , y  $A^T p_1 = -i\omega p_1$ , tales que

$$\langle p_j, q_j \rangle = 1, \quad j = 1, 2,$$

donde  $\langle v, w \rangle = \bar{v}^T w$ , es el producto interior en  $\mathbb{C}^n$ . Ahora calculamos

$$\begin{aligned} G_{200} &= \frac{1}{2} \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle, \\ H_{110} &= \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle, \\ G_{011} &= \langle p_0, B(q_1, \bar{q}_1) \rangle, \\ G_{300} &= \frac{1}{6} \langle p_0, C(q_0, q_0, q_0) + 3B(q_0, h_{200}) \rangle, \\ G_{111} &= \langle p_0, C(q_0, q_1, \bar{q}_1) + B(q_1, \bar{h}_{110}) + B(\bar{q}_1, h_{110}) + B(q_0, h_{011}) \rangle, \\ H_{210} &= \frac{1}{2} \langle p_1, C(q_0, q_0, q_1) + 2B(q_0, h_{110}) + B(q_1, h_{200}) \rangle, \\ H_{021} &= \frac{1}{2} \langle p_1, C(q_1, q_1, \bar{q}_1) + 2B(q_1, h_{011}) + B(\bar{q}_1, h_{020}) \rangle, \end{aligned} \tag{A.14}$$

donde

$$h_{020} = (2i\omega I_n - A)^{-1} B(q_1, q_1),$$

y los vectores  $h_{200}$ ,  $h_{011}$  y  $h_{110}$  son soluciones de los siguiente sistemas

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{200} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_0, q_0) + \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle q_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & q_0 \\ p_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{011} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(q_1, \bar{q}_1) + \langle p_0, B(q_1, \bar{q}_1) \rangle q_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i\omega I_n - A & q_1 \\ \bar{p}_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{110} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(q_0, q_1) - \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle q_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Definimos  $B(0) = G_{200}$ ,  $C(0) = G_{011}$  y

$$E(0) = \text{Re} \left[ H_{210}(0) + H_{110}(0) \left( \frac{\text{Re } H_{021}(0)}{G_{011}(0)} - \frac{3G_{300}(0)}{2G_{200}(0)} + \frac{G_{111}(0)}{2G_{011}(0)} \right) - \frac{H_{021}(0)G_{200}(0)}{G_{011}(0)} \right].$$

## B.1. Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación de Hopf

En este apartado se dan las condiciones necesarias para llevar a cabo los cálculos en la bifurcación de Hopf.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, \\
 h(w_0) &= -w_0 h'(w_0), & f_1(w_0) &= 2w_0 f'_1(w_0), \\
 f_2(w_0) &= 2w_0 f'_2(w_0), & g_1(w_0, x_0, y_0) &= 2w_0 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 g_2(w_0, x_0, y_0) &= 2x_0 \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0), & g_3(w_0, x_0, y_0) &= 2y_0 \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_w g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{40} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0) &= \frac{1}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_y g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_w g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{80}, \\
 \partial_x g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{24}, & \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0) &= \frac{1}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_x g_1(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{5}{12} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_y g_1(w_0, x_0, y_0) &= -5 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 f'_1(w_0) &= f'_2(w_0), & f'_2(10y_0) &> 0, \\
 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0) &> 0. & &
 \end{aligned}$$

## B.2. Vectores propios para $\mathcal{J}_p(d_{10})$ y $(\mathcal{J}_p(d_{10}))^T$ de la Sección 2.2

Un par de vectores propios asociado a los valores propios  $i\omega_i$  y  $-i\omega_0$  están dados por  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente, donde:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{1}{s_0} \left( \frac{s_3}{s_1} \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0), \frac{s_4 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{5s_2}, -\frac{s_5}{s_1} \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0), s_6 f_2'(10y_0) \right), \\
 q_2 &= \left( \frac{s_1 s_9 s_0}{160 s_7 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, -\frac{3485815 i s_2 s_0}{432 s_7 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \frac{5 s_1 s_{10} s_0}{72 s_7 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \frac{5 s_2 s_{11} s_0}{18 s_7 f_2'(10y_0)} \right), \\
 s_0 &= \sqrt{340000048128437104 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2 + 6527530581280625 f_2'(10y_0)^2}, \quad s_1 = \sqrt{1492006990007}, \\
 s_2 &= \sqrt{10444048930049}, \quad s_3 = 27886520\sqrt{7} \left( 8627174 + 33441i\sqrt{154} \right), \\
 s_4 &= 72 \left( -57161314102613 - 170600447467i\sqrt{154} \right), \quad s_5 = 4i\sqrt{7} \left( 33166645833\sqrt{154} - 6156878697763i \right), \\
 s_6 &= 25\sqrt{10444048930049}, \quad s_7 = 128116047502161657\sqrt{154} - 11490886977720227i, \\
 s_8 &= 128116047502161657\sqrt{154} - 11490886977720227i, \quad s_9 = 1787\sqrt{22} + 4460i\sqrt{7}, \\
 s_{10} &= 2919\sqrt{22} + 683096i\sqrt{7}, \quad s_{11} = 915\sqrt{154} + 20452i.
 \end{aligned}$$

## C.1. Términos de los coeficientes cuadráticos en la Proposición 3.6

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{00} &= 96083802551532096y_0\partial_y^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 795089113623108864y_0\partial_x\partial_yg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 1644831599641714944y_0\partial_x^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) - 8873565668350863105\partial_wg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 1165962976143497280y_0\partial_w\partial_yg_1(10y_0, 6y_0, y_0) - 4824145405372037760y_0\partial_w\partial_xg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 3537197804511027600y_0\partial_w^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 2949805563447597120y_0\partial_y^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 24409507414573774080y_0\partial_x\partial_yg_2(10y_0, 6y_0, y_0) + 50496892032924391680y_0\partial_x^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 35795461695610881600y_0\partial_w\partial_yg_2(10y_0, 6y_0, y_0) - 148102912018022467200y_0\partial_w\partial_xg_2(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 108593181011598922000y_0\partial_w^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) - 9909433457876897280y_0\partial_y^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 82000112977469675520y_0\partial_x\partial_yg_3(10y_0, 6y_0, y_0) - 169636805093356369920y_0\partial_x^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 120249534464931110400y_0\partial_w\partial_yg_3(10y_0, 6y_0, y_0) + 497529725262673996800y_0\partial_w\partial_xg_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 364802654977681968000y_0\partial_w^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0); \\
 \mathbf{b}_{00} &= 417634955252120214997055136y_0\partial_y^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 4181605554814705668293497152y_0\partial_x\partial_yg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 10151922900977566424314375680y_0\partial_x^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) - 878228329501925362657179615\partial_wg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 6090728136122323311124787160y_0\partial_w\partial_yg_1(10y_0, 6y_0, y_0) - 29603352702257865402807468240y_0\partial_w\partial_xg_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 21580373074016479704338355300y_0\partial_w^2g_1(10y_0, 6y_0, y_0) + 2887487251311478200082820640y_0\partial_y^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) + \\
 &46172917332116025067581337920y_0\partial_x\partial_yg_2(10y_0, 6y_0, y_0) + 141609317300649745173453127680y_0\partial_x^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 66439199506043649506337659800y_0\partial_w\partial_yg_2(10y_0, 6y_0, y_0) - 410067449191752856089515826000y_0\partial_w\partial_xg_2(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 296815998858298941202973510500y_0\partial_w^2g_2(10y_0, 6y_0, y_0) + 15500682198414711104279800320y_0\partial_y^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &+ 53424146993221012497259875840y_0\partial_x\partial_yg_3(10y_0, 6y_0, y_0) - 44310622013710573340404915200y_0\partial_x^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 82615020512826474158497675200y_0\partial_w\partial_yg_3(10y_0, 6y_0, y_0) + 112288482473485626189517795200y_0\partial_w\partial_xg_3(10y_0, 6y_0, y_0) \\
 &- 69376432530706260133488324000y_0\partial_w^2g_3(10y_0, 6y_0, y_0); \\
 \mathbf{b}_{01} &= 8819550633124439595985558005y_0^2f_1''(10y_0) - 87002878567368244422273281625y_0^2f_2''(10y_0), \\
 \mathbf{b}_{02} &= 64879172730106024136557430400y_0z_0\partial_wg_1(10y_0, 6y_0, y_0)h''(10y_0).
 \end{aligned}$$

## C.2. Vectores propios normalizados para la bifurcación BT

Usando las expresiones en (A.9) y (A.10) y con ayuda del software Mathematica, se calcularon los vectores propios normalizados para  $\mathcal{J}(p, d_{10}, d_{20})$  y  $\mathcal{J}^T(p, d_{10}, d_{20})$ :

$$q_0 = (q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04}), \quad q_1 = (q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14});$$

$$\begin{aligned}
q_{01} &= -\frac{3677070570y_0\partial_x g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{5809519049}, & q_{02} &= \frac{2507454216y_0\partial_x g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{5809519049}, \\
q_{03} &= \frac{606034548y_0\partial_x g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{5809519049}, & q_{04} &= -\frac{2877826539z_0\partial_x g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{11619038098}, \\
q_{11} &= \frac{11516185029671887866060y_0}{3678805762295631219709z_0}, & q_{12} &= -\frac{7930731255421833848520y_0}{3678805762295631219709z_0}, \\
q_{13} &= \frac{1434464608597924651548y_0}{3678805762295631219709z_0}, & q_{14} &= \frac{4351305094969314954798}{3678805762295631219709}, \\
p_1 &= \left( \frac{109z_0}{17700y_0}, -\frac{28907z_0}{21240y_0}, \frac{28471z_0}{3540y_0}, 1 \right), \\
p_0 &= \left( 0, -\frac{1519549}{231516y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \frac{1480963}{38586y_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \frac{4438}{6431z_0\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)} \right).
\end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## D.1. Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación doble Hopf

En este apartado se dan las condiciones necesarias para llevar a cabo los cálculos en la bifurcación doble Hopf.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, \\
 h(w_0) &= -w_0 h'(w_0), & f_1(w_0) &= 2w_0 f'_1(w_0), \\
 f_2(w_0) &= 2w_0 f'_2(w_0), & g_1(w_0, x_0, y_0) &= 2w_0 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 g_2(w_0, x_0, y_0) &= 2x_0 \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0), & g_3(w_0, x_0, y_0) &= 2y_0 \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_w g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{40} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0) &= \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_y g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_w g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{80}, \\
 \partial_x g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{24}, & \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0) &= \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_x g_1(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{5}{12} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_y g_1(w_0, x_0, y_0) &= -5 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 f'_1(w_0) &= f'_2(w_0), & f'_2(10y_0) &> 0, \\
 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0) &> 0.
 \end{aligned}$$

## D.2. Vectores propios normalizados para la bifurcación HH

Un par de vectores propios normalizados asociado a los valores propios  $\pm i\omega_1$  están dados por  $q_0$  y  $q_1$  respectivamente, donde:

$$q_0 = \left( \frac{q_{01}}{q_{02}q_{03}}, \frac{q_{04}}{q_{02}q_{03}}, \frac{q_{05}}{q_{02}q_{03}}, \frac{7}{q_{03}} \right), \quad p_0 = \left( -\frac{ip_{01}p_{02}p_{05}}{p_{03}}, \frac{61ip_{01}p_{02}p_{06}}{p_{03}}, \frac{ip_{01}p_{02}p_{07}}{p_{03}}, \frac{ip_{01}p_{02}}{f'_2(10y_0)p_{08}} \right),$$

donde

$$q_{01} = 117120 \left( 367233912947 \sqrt{488137651898462539} + 54562691837786514319i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)$$

$$q_{02} = \left( 45410308450645 \sqrt{488137651898462539} + 63174849474476044563486i \right) f'_2(10y_0)$$

$$q_{03} = \sqrt{\frac{12186811042021212884108224 \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2}{1262273705361850537 f'_2(10y_0)^2} + 49}$$

$$\begin{aligned}
q_{04} &= 336 \left( 31244661453028\sqrt{488137651898462539} - 592878821119945735507323i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
q_{05} &= 4 \left( 2956110442042037\sqrt{488137651898462539} - 21652243009642132836871329i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
p_{01} &= (13558102336302524256048234949099087 - 2546766784324242966072889iq_{24}), \\
p_{02} &= f_2'(10y_0) \sqrt{\frac{12186811042021212884108224\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2}{1262273705361850537f_2'(10y_0)^2} + 49}, \\
p_{03} &= (-1448450974526853545461119422139440 - 1255299069127447065766401iq_{24}) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0), \\
p_{04} &= \sqrt{488137651898462539}, \quad p_{05} = \frac{367233912947q_{24} + 54562691837786514319i}{1808552037112259756258240}, \\
p_{06} &= \frac{7q_{24} - 94843400633i}{155495926012285872}, \quad p_{07} = \frac{-637q_{24} + 3493860189419i}{103663950674857248}, \\
p_{08} &= 1079832819529763(10424885173871q_{24} - 34250000327372816146897i),
\end{aligned}$$

Del mismo modo, un parte de vectores propios correspondientes a los valores propios  $\pm i\omega_2$  están dados por:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \left( \frac{q_{11}}{q_{12}q_{13}}, \frac{6q_{14}}{427q_{12}q_{13}}, \frac{4q_{15}}{7q_{12}q_{13}}, \frac{1}{q_{13}} \right) \\
p_1 &= \left( p_{16} \frac{p_{11}f_2'(10y_0)p_{15}}{p_{14}p_{13}\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, p_{17} \frac{p_{11}f_2'(10y_0)p_{12}}{p_{14}p_{13}\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, p_{18} \frac{7(-ip_{11})f_2'(10y_0)p_{12}}{(-ip_{13})p_{14}\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}, \frac{4p_{11}p_{12}}{1079832819529763p_{13}} \right),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
q_{11} &= 209355560 \left( 976\sqrt{436517403} - 73665081i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
q_{12} &= \left( 51888775546\sqrt{436517403} - 150909778041016903i \right) f_2'(10y_0) \\
q_{13} &= \sqrt{\frac{316639789554436054399316\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2}{34955540082877833758171f_2'(10y_0)^2} + 1} \\
q_{14} &= \left( -738933976660917\sqrt{436517403} + 21163891204980465872i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0) \\
q_{15} &= \left( -19624874750787\sqrt{436517403} + 218946156309322505i \right) \partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0), \\
p_{11} &= 7833084862646536074\sqrt{436517403} + 42544754011671301405627i, \\
p_{12} &= \sqrt{\frac{19315027162820599318358276\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2}{573041640702915307511f_2'(10y_0)^2} + 3721}, \\
p_{13} &= 3507861\sqrt{436517403} + 20287665968i, \quad p_{14} = 52\sqrt{436517403} + 274117i, \\
p_{15} &= \sqrt{\frac{2216478526881052380795212\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)^2}{4993648583268261965453f_2'(10y_0)^2} + 49}, \quad p_{16} = \frac{17827\sqrt{436517403} - 1648294176i}{259159876687143120}, \\
p_{17} &= \frac{976\sqrt{436517403} - 73665081i}{38873981503071468}, \quad p_{18} = \frac{-26\sqrt{436517403} + 1994565i}{3239498458589289}.
\end{aligned}$$

## E.1. Condiciones necesarias para el análisis de la bifurcación cero-Hopf

A continuación se enlistan las condiciones necesarias para llevar a cabo el análisis dinámico en la bifurcación cero-Hopf.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 10y_0, & x_0 &= 6y_0, \\
 h(w_0) &= -w_0 h'(w_0), & f_1(w_0) &= 2w_0 f'_1(w_0), \\
 f_2(w_0) &= 2w_0 f'_2(w_0), & g_1(w_0, x_0, y_0) &= 2w_0 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 g_2(w_0, x_0, y_0) &= 2x_0 \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0), & g_3(w_0, x_0, y_0) &= 2y_0 \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_w g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{40} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_x g_2(w_0, x_0, y_0) &= \frac{3}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_y g_2(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{3}{2} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_w g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{80}, \\
 \partial_x g_3(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{\partial_w g_1(w_0, x_0, y_0)}{24}, & \partial_y g_3(w_0, x_0, y_0) &= \frac{3}{4} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 \partial_x g_1(w_0, x_0, y_0) &= -\frac{5}{12} \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), & \partial_y g_1(w_0, x_0, y_0) &= -5 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0), \\
 f'_1(w_0) &= f'_2(w_0), & f'_2(10y_0) &> 0, \\
 \partial_w g_1(w_0, x_0, y_0) &> 0. & &
 \end{aligned}$$

## E.2. Vectores propios normalizados para la bifurcación cero-Hopf

Un par de vectores propios normalizados asociado al valor propio 0, están dados por

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \left( \frac{6568159920}{151361717} q_{01}, -\frac{2133009912}{151361717} q_{01}, -\frac{920071306}{151361717} q_{01}, 1 \right), \\
 p_0 &= \left( -\frac{58576984479}{5552592898765 q_{01}}, \frac{1713565998157}{3331555739259 q_{01}}, -\frac{1635463352185}{1110518579753 q_{01}}, -\frac{273207899185}{1110518579753} \right)
 \end{aligned}$$

respectivamente. Del mismo modo, un parte de vectores propios correspondientes a los valores propios  $\pm i\omega$  están dados por:

$$q_1 = \left( \frac{140(q_{13}q_{12})q_{01}}{q_{11}}, \frac{6(q_{14}q_{12})q_{01}}{q_{11}}, \frac{(q_{15}q_{12})q_{01}}{q_{11}}, \frac{21(q_{16}q_{12})}{q_{11}} \right), \quad p_1 = \left( \frac{47(p_{11})}{q_{01}}, \frac{(p_{12})}{q_{01}}, \frac{3(p_{13})}{q_{01}}, 1 \right),$$

donde

$$\begin{aligned}
 q_{01} &= \frac{\partial_w g_1(10y_0, 6y_0, y_0)}{f_2'(10y_0)}, & q_{15} &= -12277082107539302971280 + 37429338048207i, \\
 q_{11} &= 23301721234578019449931, & q_{16} &= 671589661073792690488 - 65705531165i, \\
 q_{12} &= \sqrt{809013268184225610}, & p_{11} &= \frac{194339691763515718875 - 4631i\sqrt{118917169198913491036950800770410}}{1851253589836313526431400}, \\
 q_{13} &= -64073812286286605775 - 2210909848873i, & p_{12} &= \frac{-32317085603734840 + 7i\sqrt{169888665546827261149027741889610}}{94702506297228120}, \\
 q_{14} &= -4765107759866365971730 + 16693578762021i, & p_{13} &= \frac{2606561570173445 - 6559147i\sqrt{809013268184225610}}{7891875524769010}.
 \end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Bibliografía

---

- [1] J. Murray, *Mathematical biology I. An Introduction*. 3rd ed., Vol. 17, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Vol. 19, Cambridge University Press, Cambridge (2001), 2001.
- [3] S. Gakkhar, A. Priyadarshi, S. Banerjee, Complex behaviour in four species food-web model, *Journal of Biological Dynamics* 6 (2012) 440 – 456.  
URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:29868339>
- [4] A. Mondal, A. Pal, G. Samanta, Stability analysis of a complex four species food-web model, *Filomat* 36 (2022) 99 – 123. doi:10.2298/FIL2201099M.
- [5] J. L. Ramos-Castellano, M. A. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Bifurcation analysis for the coexistence in a gause-type four-species food web model with general functional responses, *AIMS Mathematics* 9 (11) (2024) 30263–30297. doi:10.3934/math.20241461.  
URL <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.20241461>
- [6] F. Brauer, C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Vol. 40, 2001. doi:10.1007/978-1-4614-1686-9.
- [7] G. Skalski, J. Gilliam, Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the holling type ii model, *Ecology* 82 (2001) 3083–3092. doi:10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2.
- [8] G. Ble, V. Castellanos, M. Dela-Rosa, Bifurcation analysis of a kolmogorov type tritrophic model, *Acta Applicandae Mathematicae* 181 (08 2022). doi:10.1007/s10440-022-00520-y.
- [9] G. Ble, I. Loreto-Hernández, Limit cycles in a tritrophic food chain model with general functional responses, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 23 (03 2021). doi:10.1515/ijnsns-2019-0175.
- [10] F. Castillo Santos, M. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Existence of a limit cycle in an intra-guild food web model with holling type ii and logistic growth for the common prey, *Applied Mathematics* 08 (2017) 358–376. doi:10.4236/am.2017.83030.

- [11] G. Blé, V. Castellanos, I. Loreto Hernandez, Stable limit cycles in an intraguild predation model with general functional responses, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 45 (4) (2022) 2219–2233.
- [12] G. Ble, M. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Stability analysis of a tritrophic model with stage structure in the prey population, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* 12 (2019) 765–790. doi:10.22436/jnsa.012.12.01.
- [13] G. Ble, I. Loreto-Hernández, Two-dimensional attracting torus in an intraguild predation model with general functional responses and logistic growth rate for the prey, *Journal of Applied Analysis and Computation* 11 (01 2020). doi:10.11948/20200282.
- [14] G. Blé, C. Guzmán-Arellano, I. Loreto-Hernández, Coexistence in a four-species food web model with general functional responses, *Chaos, Solitons and Fractals* 153 (2021) 111555. doi:10.1016/j.chaos.2021.111555.
- [15] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Vol. 7, Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] M. Hirsch, R. Devaney, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1974.  
URL <https://books.google.com.mx/books?id=UG4Rh40G-hUC>
- [17] F. Brauer, J. Nohel, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction*, Dover Books on Mathematics Series, Dover, 1989.  
URL <https://books.google.com.mx/books?id=KqKN2v0BpZ4C>
- [18] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 1989.  
URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126256567>
- [19] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Vol. 112, Springer, 1998.
- [20] J. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, 2007. doi:10.1007/978-0-387-48918-6.
- [21] G. Blé, I. Loreto-Hernández, Limit cycles in a tritrophic food chain model with general functional responses, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 23 (3-4) (2022) 449–460 [cited 2025-06-28]. doi:doi:10.1515/ijnsns-2019-0175.  
URL <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2019-0175>
- [22] J. M. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, in: *Applied Mathematical Sciences*, 1983. doi:<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2>.  
URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119542869>

- [23] J. E. Marsden, M. McCracken, S. New, Y. Berlin, *The hopf bifurcation and its applications* (1976).  
URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121454614>
- [24] M. Falconi, Y. Vera-Damián, C. Vidal, Predator interference in a leslie–gower intraguild predation model, *Nonlinear Analysis Real World Applications* 51 (08 2019). doi:10.1016/j.nonrwa.2019.102974.
- [25] F. H. Maghool, R. K. Naji, The dynamics of a tritrophic leslie-gower food-web system with the effect of fear, *J. Appl. Math.* 2021 (2021) 1–21.  
URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:239462475>
- [26] G. Ble, M. Dela-Rosa, Bogdanov-takens bifurcation in a leslie type tritrophic model with general functional responses, *Acta Applicandae Mathematicae* 169 (10 2020). doi:10.1007/s10440-019-00302-z.
- [27] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Vol. 57, 2010. doi:10.1007/978-1-4419-7646-8.

México. Universidad Autónoma de Tabasco.

<b>Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional</b>	
<b>Título de Tesis</b>	Dinámica en un modelo de red alimentaria de cuatro especies con función de crecimiento en el recurso y respuestas funcionales generales.
<b>Autor(a) o autores(ras) de la Tesis</b>	Jorge Luis Ramos Castellano, Iván Loreto Hernández, Miguel Angel De La Rosa Castillo.
<b>ORCID</b>	0009-0005-6069-1274
<b>Resumen de la Tesis</b>	En este proyecto se analiza un modelo (tipo Gause) de red alimentaria en el que interactúan una población de presas, dos de depredadores y una de superdepredador. Se considera que tanto la función de crecimiento como las respuestas funcionales que describen la interacción entre las especies son generales. Se encuentran diversos conjuntos $\omega$ -límite tales como ciclos límite, toros invariantes que garantizan la coexistencia de las cuatro especies, aplicando la teoría local y las teorías de bifurcación de ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, el análisis realizado nos permitirá encontrar condiciones suficientes en el espacio de parámetros que garantizan que nuestro sistema exhibe bifurcaciones de Hopf, Bogdanov-Takens, Hopf-Hopf y cero-Hopf. Así mismo, se dan algunos ejemplos particulares para validar los resultados generales, considerando que la presa tiene una tasa de crecimiento logístico y la interacción entre las especies es descrita mediante respuestas funcionales tipo Beddington-DeAngelis. Para concluir, se llevan a cabo algunas simulaciones numéricas para validar los resultados obtenidos.
<b>Palabras claves de la Tesis</b>	Estabilidad, Hopf, Bogdanov-Takens, Hopf-Hopf, cero-Hopf, ciclo límite, toro invariante, series de tiempo, forma normal, coexistencia, respuestas funcionales.
<b>Referencias citadas</b>	<p>J. Murray, <i>Mathematical biology I. An Introduction</i>. 3rd ed., Vol. 17, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2002.</p> <p>M. Kot, <i>Elements of Mathematical Ecology</i>, Vol. 19, Cambridge University Press, Cambridge (2001), 2001.</p> <p>S. Gakkhar, A. Priyadarshi, S. Banerjee, Complex behaviour in four species food-web model, <i>Journal of Biological Dynamics</i> <b>6</b> (2012) 440-456. URL <a href="https://api.semanticscholar.org/CorpusID:29868339">https://api.semanticscholar.org/CorpusID:29868339</a>.</p> <p>A. Mondal, A. Pal, G. Samanta, Stability analysis of a complex four species food-web model, <i>Filomat</i> <b>36</b> (2022) 99-123. doi:10.2298/FIL2201099M.</p>

<b>Referencias citadas</b>	<p>J. L. Ramos-Castellano, M. A. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Bifurcation analysis for the coexistence in a gause-type four-species food web model with general functional responses, <i>AIMS Mathematics</i> <b>9</b> (11) (2024) 30263-30297. doi:10.3934/math.20241461. URL <a href="https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.20241461">https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.20241461</a>.</p> <p>F. Brauer, C. Castillo-Chávez, <i>Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology</i>, Vol. 40, 2001. doi:10.1007/978-1-4614-1686-9.</p> <p>G. Skalski, J. Gilliam, Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the holling type ii model, <i>Ecology</i> <b>82</b> (2001) 3083-3092. doi:10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2.</p> <p>G. Ble, V. Castellanos, M. Dela-Rosa, Bifurcation analysis of a kolmogorov type tritrophic model, <i>Acta Applicandae Mathematicae</i> <b>181</b> (08 2022). doi:10.1007/s10440-022-00520-y.</p> <p>G. Ble, I. Loreto-Hernández, Limit cycles in a tritrophic food chain model with general functional responses, <i>International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation</i> <b>23</b> (03 2021). doi:10.1515/ijnsns-2019-0175.</p> <p>F. Castillo Santos, M. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Existence of a limit cycle in an intraguild food web model with holling type ii and logistic growth for the common prey, <i>Applied Mathematics</i> <b>08</b> (2017) 358-376. doi:10.4236/am.2017.83030.</p> <p>G. Blé, V. Castellanos, I. Loreto Hernandez, Stable limit cycles in an intraguild predation model with general functional responses, <i>Mathematical Methods in the Applied Sciences</i> <b>45</b> (4) (2022) 2219-2233.</p> <p>G. Ble, M. Dela-Rosa, I. Loreto-Hernández, Stability analysis of a tritrophic model with stage structure in the prey population, <i>Journal of Nonlinear Sciences and Applications</i> <b>12</b> (2019) 765-790. doi:10.22436/jnsa.012.12.01.</p> <p>G. Ble, I. Loreto-Hernández, Two-dimensional attracting torus in an intraguild predation model with general functional responses and logistic growth rate for the prey, <i>Journal of Applied Analysis and Computation</i> <b>11</b> (01 2020). doi:10.11948/20200282.</p> <p>G. Blé, C. Guzmán-Arellano, I. Loreto-Hernández, Coexistence in a four-species food web model with general functional responses, <i>Chaos, Solitons and Fractals</i> <b>153</b> (2021) 111555. doi:10.1016/j.chaos.2021.111555.</p> <p>L. Perko, <i>Differential equations and dynamical systems</i>, Vol. 7. Springer Science &amp; Business Media, 2013.</p> <p>M. Hirsch, R. Devaney, S. Smale, <i>Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra</i>, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1974. URL <a href="https://books.google.com.mx/books?id=UG4Rh40G-hUC">https://books.google.com.mx/books?id=UG4Rh40G-hUC</a>.</p>
----------------------------	--

Referencias citadas	<p>F. Brauer, J. Nohel, <i>The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction</i>, Dover Books on Mathematics Series, Dover, 1989. URL <a href="https://books.google.com.mx/books?id=KqKN2v0BpZ4C">https://books.google.com.mx/books?id=KqKN2v0BpZ4C</a>.</p> <p>S. Wiggins, <i>Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos</i>, 1989. URL <a href="https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126256567">https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126256567</a>.</p> <p>Y. A. Kuznetsov, <i>Elements of applied bifurcation theory</i>, Vol. 112, Springer, 1998.</p> <p>J. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, <i>Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems</i>, 2007. doi:10.1007/978-0-387-48918-6.</p> <p>G. Blé, I. Loreto-Hernández, Limit cycles in a tritrophic food chain model with general functional responses, <i>International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation</i> <b>23</b> (3-4) (2022) 449-460 [cited 2025-06-28]. doi:10.1515/ijnsns-2019-0175.</p> <p>J. M. Guckenheimer, P. Holmes, <i>Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields</i>, in: Applied Mathematical Sciences, 1983. doi:10.1007/978-1-4612-1140-2.</p> <p>J. E. Marsden, M. McCracken, S. New, Y. Berlin, <i>The Hopf bifurcation and its applications</i> (1976). URL <a href="https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121454614">https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121454614</a>.</p> <p>M. Falconi, Y. Vera-Damián, C. Vidal, Predator interference in a leslie-gower intraguild predation model, <i>Nonlinear Analysis Real World Applications</i> <b>51</b> (08 2019). doi:10.1016/j.nonrwa.2019.102974.</p> <p>F. H. Maghool, R. K. Naji, The dynamics of a tritrophic leslie-gower food-web system with the effect of fear, <i>J. Appl. Math.</i> <b>2021</b> (2021) 1-21. URL <a href="https://api.semanticscholar.org/CorpusID:239462475">https://api.semanticscholar.org/CorpusID:239462475</a>.</p> <p>G. Ble, M. Dela-Rosa, Bogdanov-takens bifurcation in a leslie type tritrophic model with general functional responses, <i>Acta Applicandae Mathematicae</i> <b>169</b> (10 2020). doi:10.1007/s10440-019-00302-z.</p> <p>H. Smith, <i>An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences</i>, Vol. 57, 2010. doi:10.1007/978-1-4419-7646-8.</p>
---------------------	--