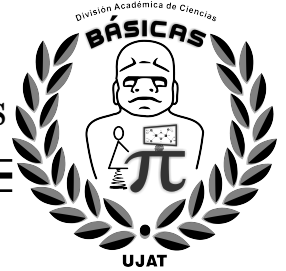




UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA
DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



FOLIACIONES DETERMINADAS POR SISTEMAS
DINÁMICOS NO-SINGULARES EN UN 2-TORO

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARCELA GUADALUPE MORALES ÁLVAREZ

BAJO LA DIRECCIÓN DE:

DR. MIGUEL ANGEL DE LA ROSA CASTILLO

CUNDUACÁN, TABASCO, MÉXICO.

JUNIO 2025

Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Macuspana, el día 28 del mes de mayo del año 2025, el que suscribe Marcela Guadalupe Morales Álvarez alumna del Programa de Maestría en Ciencias Matemáticas con número de matrícula 222A21001, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autora de la Tesis presentada para la obtención del grado de Maestro en Ciencias Matemáticas y titulada FOLIACIONES DETERMINADAS POR SISTEMAS DINÁMICOS NO-SINGULARES EN UN 2-TORO dirigida por el Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo.

DECLARO QUE: La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 28 de mayo del 2025.



Marcela Guadalupe Morales Álvarez

Nombre y Firma

DIRECCIÓN

04 de junio de 2025

LIC. MARCELA GUADALUPE MORALES ÁLVAREZ
EGRESADA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRESENTE

Por medio del presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que, proceda a la impresión del trabajo titulado "**FOLIACIONES DETERMINADAS POR SISTEMAS DINÁMICOS NO-SINGULARES EN UN 2-TORO**" dirigido por el Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo, bajo la modalidad de titulación por Tesis.

La Comisión revisora conformada por el DR. MIGUEL ÁNGEL DE LA ROSA CASTILLO, DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ, DR. JAIR REMIGIO JUÁREZ, DR. VÍCTOR CASTELLANOS VARGAS y DR. IVÁN LORETO HERNÁNDEZ aprobó el documento en virtud de reunir los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** y obtener el grado de *Maestro en Ciencias Matemáticas*.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE



DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA



C.C.P.- Archivo.

Dir'Dra.HPV/JP'Dra.EAM/jka** J

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 28 de mayo del 2025.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada FOLIACIONES DETERMINADAS POR SISTEMAS DINÁMICOS NO-SINGULARES EN UN 2-TORO.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES



Lic. Mat. Marcela Guadalupe
Morales Álvarez



Dr. Miguel Ángel de la Rosa
Castillo

TESTIGOS



M.C. Francisco Jesús Flores Vivas



Dr. Iván Loreto Hernández

Agradecimientos

Agradezco primeramente a **Dios** por haberme permitido culminar una meta más en mi vida, por ser esa luz en mi camino, por darme la sabiduría y fortaleza para alcanzar mis objetivos.

Con cariño y agradecimiento a toda mi familia, en especial a mi madre **Amalia Alvarez Torres** por ser el motor de mis sueños, por el apoyo brindado y por su amor.

Quiero agradecer de manera especial a mi novio **Francisco Jesus Flores Vivas** por su apoyo moral y emocional, pero sobre todo por su amor y su paciencia a lo largo de estos años.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, el **Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo**, por su dirección de este proyecto, específicamente por su dedicación en cada etapa de la realización de mi trabajo de tesis, por el conocimiento que me transmitió con paciencia y entrega, y finalmente, por sus sugerencias y recomendaciones en la redacción del mismo.

De igual manera le agradezco al comité de revisores, por el tiempo que dedicaron en la revisión de mi trabajo, por sus comentarios y observaciones tan acertadas que hicieron mejorar este trabajo. A la División Académica de Ciencias Básicas (DACB), por brindarme un lugar cómodo para trabajar y estudiar la Maestría en Ciencias Matemáticas. A mis profesores, quienes me formaron con los cursos del plan de estudios de la maestría y proporcionaron herramientas para desarrollar esta tesis.

Por último, pero no menos importante, agradezco al **SECIHTI** por la beca otorgada la cual me permitió sustentar mis necesidades económicas durante mi estancia en el posgrado.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
 México

Índice general

	v
Foliaciones determinadas por sistemas Dinámicos no-singulares en un 2-toro	v
Resumen	v
Abstract	v
Palabras claves	vi
Introducción	vi
Marco Teórico	vi
Justificación	vii
Pregunta de Investigación	viii
Hipótesis y supuestos	viii
Objetivo general	viii
Objetivos específicos	ix
Metodología	ix
1. Preliminares	1
1.1. Estructura diferenciable en variedades	1
1.1.1. Variedad topológica	1
1.1.2. Estructuras diferenciables	2
1.1.3. Funciones y mapeos suaves	4
1.1.4. Difeomorfismos y cubriente suave	5
1.1.5. Vectores tangentes geométricos en \mathbb{R}^n	7
1.1.6. Derivadas de mapeos suaves entre variedades	12
1.2. Noción de campos vectoriales	14
1.2.1. Descripción de una base para T_pM	14
1.2.2. Representación coordenada de push-forwards	16
1.2.3. Haz tangente en el 2-toro \mathbb{T}^2	17
1.2.4. Noción de campo vectorial en \mathbb{T}^2	19
1.2.5. Caracterización de campos vectoriales en \mathbb{T}^2	20

2. Curvas integrales para campos no-singulares en \mathbb{T}^2	23
2.1. Sistemas dinámicos continuos no-singulares	23
2.1.1. Sistema de EDOs asociado a un campo vectorial	23
2.1.2. Existencia de curvas integrales para un campo vectorial	26
2.2. Conjuntos ω -límite y α -límite en \mathbb{T}^2	28
2.3. Conjuntos invariantes en \mathbb{T}^2	29
2.4. Ejemplos genéricos de campos vectoriales	31
2.4.1. Ejemplos de campos vectoriales no constantes en \mathbb{T}^2 . .	34
2.5. Trayectorias para campos $X_{a,b}$ constantes	37
3. Teoremas de Denjoy y de Siegel	45
3.1. Difeomorfismos en \mathbb{S}^1 como “mapeos de Poincaré”	45
3.1.1. Dinámica discreta en \mathbb{S}^1 : enfoque de Denjoy	45
3.1.2. Difeomorfismos en \mathbb{S}^1 que preservan orientación	46
3.1.3. Dinámica continua en \mathbb{S}^1 : enfoque de Denjoy	49
3.2. Campo vectorial no-singular de Denjoy	50
3.3. Formulación del teorema de Denjoy-Siegel	58
3.4. Enfoque de Siegel: transversalidad de curvas	60
3.4.1. Demostración del teorema de ergodicidad de Denjoy-Siegel	69
4. Foliaciones vía el Teorema de Denjoy-Siegel	73
4.1. Noción de foliación de co-dimensión 1	73
4.2. Foliaciones para $X_{a,b}$ en el toro \mathbb{T}^2	79
4.3. Foliaciones para un sistema dinámico discreto	80
4.4. 1-foliaciones en una 2-variedad suave	82
4.5. Foliaciones en \mathbb{T}^2 vía el Teorema de Denjoy-Siegel	85
5. Resultados y Conclusiones	87
5.1. Resultados	87
5.2. Conclusiones y recomendaciones	88
A. Diferentes estructuras del 2-Toro	91
A.1. Estructura de 2-variedad	91
A.1.1. \mathbb{S}^1 como una 1-variedad suave	91
A.1.2. $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como 2-variedad	92
A.2. \mathbb{T}^2 como espacio cociente y métrico	93
A.3. Superficie parametrizada por un cubriente suave	97
A.3.1. Estructura diferencial en \mathcal{S}_T vía φ	99

Índice de figuras

1.1. Función suave.	4
1.2. Función suave entre variedades.	5
2.1. Componentes de $X_p \in X$	25
2.2. Vector tangente a φ en $\varphi(p)$	26
2.3. Curva integral de X	26
2.4. Ejemplo de campo vectorial en la esfera \mathbb{S}^2	32
2.5. Campos vectoriales F -relacionados.	33
2.6. Curvas integrales para X en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$	35
2.7. Curvas integrales para Y en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$	36
2.8. Curvas integrales para Z en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$	36
2.9. Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es racional con $a = 1$ y $b = 1$	39
2.10. Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es racional con $a = 1$ y $b = 5$	40
2.11. Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es racional con $a = 0$ y $b = 1$	40
2.12. Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es racional con $a = 1$ y $b = 0$	40
2.13. Función Piso.	42
2.14. Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es irracional con $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$	43
3.1. Modelo de \mathbb{T}^2	46
3.2. Distribución de los números $\alpha_m \in [0, 1)$	51
3.3. Intervalo J_{1+t} : Inserción de los intervalos I_m en los números $\alpha_m \in [0, 1)$	51
3.4. Gráfica de los mapeos f_m	52
3.5. Construcción usual de \mathbb{T}^2 como cuadrado en el plano módulo la retícula de enteros.	53
3.6. Construcción usual de \mathbb{T}^2 como superficie: $\mathbb{S}^1 \times I / \{\mathbb{S}^1 \times 0 \sim \mathbb{S}^1 \times 1\}$	54
3.7. El parámetro t como punto en el dominio de las curvas $\bar{\gamma}_s$	54
3.8. Familia de curvas suaves disjuntas $\{\bar{\gamma}_s\}_{s \in [0,1)} \subset \mathbb{T}^2$	55
3.9. Familia de curvas suaves $\{\bar{\gamma}_s\}_{s \in [0,1)} \subset \mathbb{T}^2$	56
3.10. Mapeos de Denjoy f_D y \bar{f}_D	56

3.11. Conectando los puntos $\bar{\gamma}_s(0)$ con $\bar{\gamma}_s(1)$ en \mathbb{S}^1	57
3.12. Copias de S_0^1 para ilustrar la conexión de puntos Q_k con la familia de curvas suaves $\{\bar{\gamma}_{s_k}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbb{T}^2$	58
3.13. Objetos relevantes para la prueba: Campo X transversal al campo $\bar{X} : v_p \perp \bar{v}_p$; curva integral $\bar{\phi}(t, p_0)$ de \bar{X} ; vecindad $U_\epsilon(a)$; sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{>0}}$; conjuntos L_1 y L_2	61
3.14. Conjuntos L_1, L_2 ; curva cerrada simple $L(X)$ transversal a X ; vecindad $U_\epsilon(a)$; sucesiones $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{>0}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{>0}}$	63
3.15. $L(X)$ transversal a X	64
3.16. $\mathbb{T}^2 - L(X)$	65
3.17. $U(c) \cap L(x)$	66
3.18. Segmento ortogonal a X_c ; vecindad $U_\epsilon(c)$; curva L'	67
3.19. L divide a $\mathbb{T}^2 \setminus L(X)$	68
3.20. Conjuntos A_- y A_+ y curvas L' y L	68
3.21. Intersección de la curva $\phi(t, q)$ con $L(X)$	69
3.22. Trayectoria a través de $L(X)$	69
3.23. Definición de f_1	70
4.1. Componente conexa de $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha)$	75
4.2. Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	76
4.3. Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta) = \frac{\pi}{2}$	77
4.4. Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \pi$	78
4.5. Carta foliada para un punto dado $p \in \mathbb{T}^2$	80
4.6. Carta foliada $(U_\lambda, \phi_\lambda)$: $n = 2$, $M^n = M$, $D = [-1 - 1]$	83
4.7. X_p transversal a Img en $p = g(x)$ con $x = x_0$	85
A.1. Cartas de \mathbb{S}^1	92
A.2. Clases del cero y otros puntos genéricos.	94
A.3. Toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^2 / \sim$	94
A.4. Parametrización de latitudes.	98
A.5. Parametrización de meridianos.	98
A.6. Parametrización del Toro como superficie.	99

Foliaciones determinadas por sistemas Dinámicos no-singulares en un 2-toro

Resumen

En este trabajo, se estudia la teoría básica de 2-variedades diferenciables y su aplicación para comprender el teorema de Denjoy-Siegel en el toro 2-dimensional \mathbb{T}^2 , el cual establece que las curvas integrales asociadas a un campo vectorial no-singular X de clase C^r , $r \geq 2$, pueden ser algunas periódicas o bien todas ergódicas. Asimismo, se aborda la teoría básica de foliaciones, y derivado del análisis de dicho teorema, se obtiene un ejemplo del concepto de foliación de codimensión 1, donde las hojas son dadas por las curvas integrales correspondientes al campo X . Finalmente, para enriquecer el tema, se explica un ejemplo de Denjoy de un campo vectorial no-singular de clase C^1 , cuyas curvas integrales forman una 1-foliación, pero para el que el teorema de Denjoy-Siegel no aplica.

Abstract

In the present work, the basic 2-differentiable manifolds theory and its application to the understanding of the Denjoy-Siegel Theorem in the 2-torus \mathbb{T}^2 are studied. Such a Theorem states that the integral curves for a given C^r , $r \geq 2$, non-singular vector field X , are such that some of them can be periodic or all of them are ergodic. Besides, the basic theory of foliations is studied, and derived from the analysis of the Denjoy-Siegel theorem, an example of the concept of codimension 1 foliation is given, where the leaves are given by the integral curves corresponding to X . Finally, in order to provide an enrichment of the present topic, a Denjoy example of a non-singular C^1 vector field is given, whose integral curves form a 1-dimensional

foliation but the Denjoy-Siegel Theorem does not apply.

Palabras claves

Campo vectorial no-singular, curvas integrales, teorema de Denjoy-Siegel, foliaciones de codimension 1.

Introducción

El estudio de sistemas dinámicos continuos asociados con las soluciones a ecuaciones diferenciales, actualmente usa en gran medida un enfoque geométrico, el cual, sin duda, provee métodos matemáticos analítico-numéricos que facilitan el análisis cualitativo de soluciones a ecuaciones que modelan problemas de interés en variadas áreas de la ciencia: química, ecología, biología y física, por mencionar algunas, ver [Ku1998].

Ahora bien, para fortalecer estas aplicaciones en las que métodos matemáticos son más “ad-hoc”, es primordial el estudio de enfoques puramente abstractos, cuya comprensión está basada en nociones geométricas que requieren de una mezcla de varias disciplinas como por ejemplo topología diferencial y sistemas dinámicos, con un enfoque moderno, es decir, sistemas dinámicos (flujos asociados a campos vectoriales suaves) que están definidos sobre variedades diferenciables, “las cuales son espacios topológicos que localmente son como un espacio euclidiano”, ver [Bu-Gi2005]. En este sentido, se pueden estudiar ciertos teoremas importantes que yacen en el corazón de teorías unificadas muy elaboradas, para las que se requiere de madurez matemática para abordarlas. Tal es el caso de la teoría de foliaciones y su relación con sistemas dinámicos en variedades, ver por ejemplo [Ta1992], [C-N2013] y [Niv2001].

Marco Teórico

Foliar un espacio es uno de los conceptos primordiales en geometría moderna y topología, lo cual se enmarca en la teoría de foliaciones cuyos comienzos se le atribuyen a Ch. Ehresmann y G. Reeb motivados por los matemáticos brillantes H. Poincaré, A. M. Lyapunov y G. D. Birkhoff, quienes promovían un enfoque geométrico para el análisis de ecuaciones diferenciales. El desarrollo contemporáneo de esta teoría, desde su comienzo en los años 1940's, es grande, y atribuido a muchos matemáticos destacados. En particular, se tiene un enfoque tratable e interesante que consiste en precisar dicha

teoría de foliaciones en superficies, aprovechando una estructura de “variedades diferenciables dos dimensionales”. El estudio de la teoría de foliaciones en superficies es de interés para expertos y principiantes en diferentes áreas de la matemática, como son: geometría y topología; teoría ergódica; sistemas dinámicos; y geometría-topología con un enfoque diferencial, ver [Niv2001]. Un aspecto importante que cabe mencionar, es que actualmente se usa mucho el enfoque de la teoría geométrica de foliaciones, el cual nació con las ideas de P. Painlevé sobre la necesidad de crear una teoría que facilitara la comprensión de problemas relacionados con el estudio de soluciones a ecuaciones diferenciales holomorfas definidas en el campo complejo, ver [C-N2013]. Motivados por estos trabajos y su vasta literatura, en el presente trabajo de tesis se abordará un problema sobre el estudio de flujos asociados a campos vectoriales suaves no-singulares (es un problema más tratable, y por ende permitirá explorar las ideas de una forma más o menos simple) que están definidos en un dos toro, y se analizará su relación con la noción de foliación. Concretamente, usando esencialmente el texto [Ta1992] se estudiará el teorema de Denjoy-Siegel: Para campos vectoriales clase C^r que no tienen puntos de equilibrio (es decir, son no-singulares), en el toro \mathbb{T}^2 , se tiene que si $r \geq 2$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones: i) X tiene algunas trayectorias periódicas; ii) Cada trayectoria de X es densa en el 2-toro \mathbb{T}^2 .

En el caso de $r = 1$, se tiene el ejemplo de Denjoy de un campo vectorial no-singular en \mathbb{T}^2 para el cual la propiedades i), ii) no se cumplen.

Finalmente, mencionamos que a través de las curvas integrales de un campo vectorial no-singular X , se puede construir una 1-foliación en \mathbb{T}^2 , lo cual es uno de los objetivos principales de este trabajo.

Justificación

En sistemas dinámicos continuos es importante estudiar el flujo asociado a campos vectoriales cuyas descripciones en coordenadas sean funciones diferenciables de clase C^r . Lo que permite hacer uso de la teoría cualitativa de EDO en un espacio euclidiano, usando la estructura de 2-variedades, de tal forma que se pueden obtener resultados en conjuntos contenidos en “espacios diferentes” y mucho más complicados que espacio Euclidiano. En espacio Euclidiano, es usual trabajar las técnicas cualitativas para analizar retratos de fase que muestren una descripción de las curvas integrales de interés en ejemplos tratables de dinámica usual.

Estudiar la descripción cualitativa de curvas integrales pero para campos vectoriales definidos en superficies, es un punto de partida para abastecer la comprensión de literatura más avanzada en el área de sistemas dinámicos.

en variedades, misma que da caviada a una madurez teórica que puede ser aplicada a problemas de interés, donde los espacios topológicos ambiente, globalmente no son un espacio Euclidiano; por ejemplo, se tiene el caso de una superficie cerrada orientada, o más concretamente, el 2-toro.

Es así que el caso de estudiar las curvas integrales asociadas a un campo vectorial de clase C^r , definido en un 2-toro se convierte en un tema interesante y de partida, ya que si $r \geq 2$, es posible, a través del Teorema de Denjoy-Siegel, dar una descripción del tipo de curvas integrales que uno puede esperar, de hecho solo puede haber de dos tipos: algunas órbitas periódicas o bien todas ergódicas. De esto, se puede ir más lejos, y tratar una teoría que evoluciona a técnicas más avanzadas, y que ya no dependen de la teoría de EDO, como es la de foliaciones. Sin embargo, como punto de inicio, es relevante y pertinente establecer resultados que describan la agrupación de curvas integrales como las hojas de una 1-foliación. Para realizar esto, las técnicas pueden llegar a ser muy ilustrativas, ya que se puede relacionar la dinámica discreta con la continua, aspectos muy relevantes en el estudio de sistemas diferenciales.

Pregunta de Investigación

¿Se pueden caracterizar a todas las curvas integrales de un campo vectorial clase C^r definido en una 2-variedad cerrada, y en particular en un 2-toro?

Hipótesis y supuestos

1. Las curvas integrales para campos vectoriales de clase C^r , con $r \geq 2$, sin puntos de equilibrio, definidos en un 2-toro pueden ser descritas de forma dinámico-topológica, a través de las nociones de órbitas periódicas y ergódicas; asimismo, forman una 1-foliación.
2. Las curvas integrales para campos vectoriales de clase C^r , con $r \geq 1$, sin puntos de equilibrio, definidos en una 2-variedad cerrada forman una 1-foliación.

Objetivo general

Analizar la dinámica del flujo asociado a campos vectoriales no-singulares, que están definidos sobre un toro 2 dimensional, para ejemplificar la noción

de foliación suave de codimensión uno en una superficie diferenciable. En particular, se abordará el teorema de Denjoy-Siegel.

Objetivos específicos

- i) Estudiar la teoría básica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias definidas en subconjuntos de un espacio euclidiano.
- ii) Estudiar la teoría básica de variedades diferenciables y campos vectoriales suaves.
- iii) Analizar las propiedades topológicas de campos vectoriales en el Toro.
- iv) Analizar la noción de foliación y su relación con el inciso iii).
- v) Interpretar el teorema de Denjoy-Siegel para campos vectoriales no-singulares en el Toro.

Metodología

1. Comprensión de la teoría básica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se abordará desde el enfoque en [Perko2013]. Se contemplan como apoyo los textos [Pa-De M2012] y [Bu-Gi2005].
2. Comprensión de la teoría básica de variedades diferenciables y campos vectoriales suaves, se estudiará en [Lee2013]. Como apoyo se usarán [Pa-De M2012] y [Bu-Gi2005].
3. El análisis de propiedades topológicas de campos vectoriales en el Toro; el análisis de la teoría básica de foliaciones y sus relación con el objetivo iii); y la interpretación del teorema de Denjoy-Siegel (ver [Br 2010], donde se prueba un resultado paralelo en toros complejos, cuyos campos vectoriales son singulares), se basarán principalmente en [Ta1992]. Como apoyo se contemplan los textos [Niv2001] y [C-N2013].

^xUniversidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

En este capítulo vamos a establecer algunos conceptos y resultados básicos sobre la teoría de variedades diferenciables, los cuales están basados en los textos [Pa-De M2012, Bu-Gi2005, Lee2013]. El contenido de esta teoría exhaustiva, se ha elegido en base al objetivo de este trabajo, que, como se verá más adelante, es el estudio cualitativo de flujos asociados a campos vectoriales en un 2-toro.

1.1. Estructura diferenciable en variedades

Empezaremos definiendo la estructura de variedad suave para un espacio topológico M , para lo cual partiremos de la hipótesis de que M es una variedad topológica de dimensión n .

1.1.1. Variedad topológica

Definición 1.1.1. *Sea M un espacio topológico. Diremos que M es una variedad topológica de dimensión n o (n -variedad topológica), si cumple las siguientes propiedades:*

1. M es un espacio Hausdorff: es decir, para cada par de puntos $p, q \in M$, existen subconjuntos abiertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ y $q \in V$.
2. M es segundo contable: existe una base contable para la topología de M .
3. M es localmente euclidiana de dimensión n : para cada punto de $p \in M$, existen abiertos $U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$, y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, con $p \in U$.

Nos vamos a referir a los homeomorfismos $\varphi : U \rightarrow V$ como **cartas coordenadas** o simplemente **cartas**, denotado por (U, φ) .

Nota 1.1.2.

- Si $\varphi(p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, diremos que (U, φ) es una carta centrada en p .
- U representa el abierto coordenado o entorno coordenado.
- φ es llamada función de coordenadas, es decir, $p \in U \subset M \mapsto \varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in V \subset \mathbb{R}^n$, es decir, omitiendo el punto p , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$.

A un conjunto de cartas coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ en M , tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ le llamaremos un **atlas** de M y se denota por \mathcal{A}_M .

1.1.2. Estructuras diferenciables

Sea M una n -variedad topológica. Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ son dos cartas tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces la función composición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es llamada **función transición** de φ a ψ .

Definición 1.1.3. 1. Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) de M son **suavemente compatibles**, si $U \cap V = \emptyset$, o bien, la función transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.

2. Un atlas \mathcal{A}_M es **suave**, si todas las cartas de \mathcal{A}_M son suavemente compatibles entre sí.
3. Un atlas \mathcal{A}_M es **maximal**, si no está contenido estrictamente en ningún otro atlas suave \mathcal{A}'_M .
4. Una estructura suave en M es un atlas suave maximal.
5. M es una variedad suave si tiene una estructura suave.

Nota 1.1.4. Cabe hacer notar que de aquí en adelante, pondremos “suave”, pero sin perder generalidad, debido a que los resultados que veremos más adelante son válidos para el caso de funciones o mapeos de clase C^r , lo que incluye el caso analítico e infinito diferenciable, es decir, clase C^ω y C^∞ , respectivamente; ver [Ta1992]. Por esta razón, de aquí en adelante, solo definiremos y enunciaremos los resultados en términos de la palabra “suave”,

aunque se puede usar indistintamente suave y clase C^r ; y cuando sea el caso necesario aclararemos que se tiene clase C^r , cuando sea importante resaltar el valor explícito de r .

Por lo tanto, un par (M, \mathcal{A}) es una estructura suave en M , si M es una n -variedad topológica y \mathcal{A} es una estructura suave en M .

Lema 1.1.5. *Sea M una variedad topológica:*

1. *Cada atlas suave para M está contenido en un único atlas suave maximal.*
2. *Dos atlas suaves para M determinan el mismo atlas suave maximal si y solo si su unión disjunta es un atlas suave.*

A continuación, enunciaremos el siguiente resultado que establece un procedimiento para construir una variedad suave, el cual puede ser consultado en [Lee2013].

Lema 1.1.6 (Construcción de variedades suaves). *Sea M un conjunto y supongamos que se tiene una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M , junto con una función inyectiva $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ para cada α , tal que se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada α , $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .*
2. *Para cada α y β , $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en \mathbb{R}^n .*
3. *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces se tiene que*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es difeomorfismo.

4. *Una cantidad numerable de conjuntos U_α cubren a M .*
5. *Siempre que p y q son puntos distintos en M se tiene que:*
 - *o bien, existe U_α , tal que $p, q \in U_\alpha$,*
 - *o bien, existen U_α, U_β , disjuntos con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.*

Entonces M tiene una única estructura suave tal que cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave.

Proposición 1.1.7 ([Lee2013], pág. 20). Sean M una m -variedad suave y N una n -variedad suave. Entonces, el producto cartesiano $M \times N$ es una $(m + n)$ -variedad suave, con cartas coordenadas suaves dadas por:

$$(U \times V, \varphi \times \psi),$$

donde (U, φ) es carta de M y (V, ψ) es carta de N .

1.1.3. Funciones y mapeos suaves

Usando una estructura suave en una variedad M , definiremos la noción de función y mapeo suave, las cuales dependerán de las estructuras suaves de los dominios y rangos correspondientes.

Definición 1.1.8. Sea M una n -variedad suave, una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es llamada **suave** si para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) para M cuyo dominio contiene a p y tal que la función composición $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ es suave sobre el subconjunto abierto $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, ver figura 1.1.

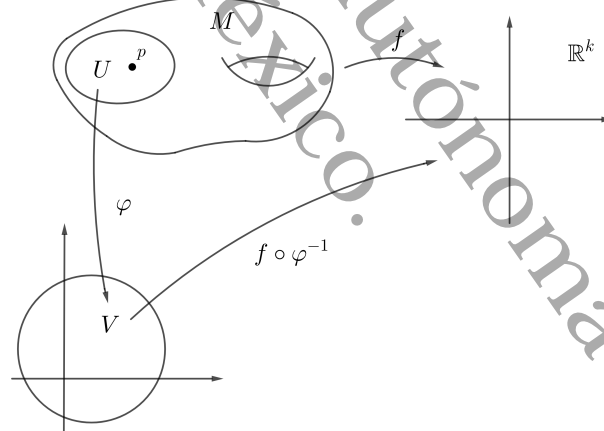


Figura 1.1: Función suave.

Nota 1.1.9. \tilde{f} denota la representación coordenada de f en U .

La definición de funciones suaves claramente se generaliza a mapeos entre variedades.

Definición 1.1.10. Sean M, N variedades suaves y $F : M \rightarrow N$ cualquier mapeo. Diremos que F es un mapeo suave, si para cada $p \in M$ existen cartas suaves (U, φ) que contiene a p y (V, ψ) que contiene a $F(p)$ tales que

$F(U) \subset V$ y el mapeo de composición $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave para $\varphi(U)$ y $\psi(V)$, ver figura 1.2.

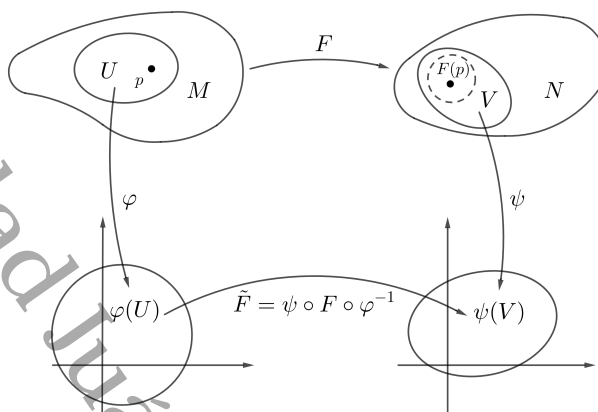


Figura 1.2: Función suave entre variedades.

Nota 1.1.11. La definición anterior expresa que F es diferenciable en p , si y solo si \tilde{F} lo es en $\varphi(p)$, para cada par de cartas suaves (U, φ) y (V, ψ) , de M y N , respectivamente, tales que $p \in U$ y $F(p) \in V$.

Lema 1.1.12. Sean M y N variedades suaves, y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de M . Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $F_\alpha : U_\alpha \rightarrow N$ suave tal que las funciones restricción

$$F_\alpha|_{(U_\alpha \cap U_\beta)} \text{ y } F_\beta|_{(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

coinciden en $U_\alpha \cap U_\beta$, para todo $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$. Entonces, existe una única función $F : M \rightarrow N$ suave tal que

$$F|_{U_\alpha} = F_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda.$$

Lema 1.1.13. Cada función suave entre variedades suaves es continua.

1.1.4. Difeomorfismos y cubriente suave

En esta sección vamos a definir lo que es un difeomorfismo y cubriente suave, así como también mostraremos un resultado de las propiedades de cubrientes suave, el cual puede ser consultada en [Lee2013].

Definición 1.1.14. Un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ es una función diferenciable entre variedades suaves y biyectiva con inversa suave.

Afirmación 1.1.15. Dada una carta suave (U, φ) , el mapeo de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo entre variedades suaves.

Definición 1.1.16 (Difeomorfismo local). Sea $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave entre variedades suaves. Decimos que F es **difeomorfismo local**, si para cada punto $p \in M$, existe un abierto $U \subset M$ con $p \in U$, tal que $F(U)$ es un conjunto abierto y la restricción

$$F|_U : U \rightarrow F(U),$$

es un difeomorfismo.

Definición 1.1.17. Sea $\pi : E \rightarrow B$ un mapeo continuo y sobre entre variedades suaves. Decimos que π es un **cuadrante suave**, si para cada $p \in B$ existe $V \subset B$ abierto, con $p \in V$, tal que:

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha,$$

donde para cada $\alpha \in \Lambda$, V_α es un conjunto abierto y la restricción $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Definición 1.1.18. Sean $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un cuadrante suave y M variedad suave. Diremos que:

1. Una **sección** $\mu : M \rightarrow \tilde{M}$ es un mapeo continuo tal que $\pi \circ \mu = Id_M$.
2. Una **sección local** $\mu : U \rightarrow \tilde{M}$ sobre U , es un mapeo continuo definido sobre algún conjunto abierto $U \subset M$ tal que $\pi \circ \mu = Id_U$.

Proposición 1.1.19 (Propiedades de cuadrantes suaves).

1. Cualquier cuadrante suave es un difeomorfismo local y un mapeo abierto.
2. Un mapeo cuadrante suave inyectivo es un difeomorfismo.
3. Un mapeo cuadrante topológico es un cuadrante suave si y solo si es un difeomorfismo local.

Lema 1.1.20. Sea $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un cuadrante suave. Entonces, cada punto de \tilde{M} está en la imagen de una sección local de π . Es decir, para todo $q \in \tilde{M}$ existe una vecindad $U \subset M$ de $p = \pi(q)$ y una sección local suave $\mu : U \rightarrow \tilde{M}$ tal que $\mu(p) = q$.

1.1.5. Vectores tangentes geométricos en \mathbb{R}^n

Definición 1.1.21. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Definamos el espacio tangente geométrico en el punto $p \in \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera:

$$\mathbb{R}_p^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n.$$

Los elementos de \mathbb{R}_p^n los denotaremos por:

$$v_p, \quad (p, v) \quad \text{o bien} \quad v|_p.$$

Proposición 1.1.22. El conjunto \mathbb{R}_p^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial bajo las siguientes operaciones:

i) $v_p + v'_p = (v + v')_p,$

ii) $\alpha v_p = (\alpha v)_p.$

Demostración. Demostraremos las propiedades para que \mathbb{R}_p^n sea un espacio vectorial.

• Cerradura de la suma: Sean $v, v' \in \mathbb{R}^n$ y $v_p, v'_p \in \mathbb{R}_p^n$.

$$v_p + v'_p = (v + v')_p = (p, v + v'),$$

como $v + v' \in \mathbb{R}^n$, lo cual implica que

$$v_p + v'_p \in \mathbb{R}_p^n.$$

• Cerradura del producto por un escalar:

$$\alpha \cdot v_p = \alpha(p, v) = (p, \alpha \cdot v),$$

dado que $\alpha \cdot v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\alpha \cdot v_p \in \mathbb{R}_p^n.$$

• Asociativa:

$$\begin{aligned} (v_p + v'_p) + \omega_p &= (v + v')_p + \omega_p \\ &= ((v + v') + \omega)_p \\ &= (v + (v' + \omega))_p \\ &= v_p + (v' + \omega)_p \\ &= v_p + (v'_p + \omega_p). \end{aligned}$$

- Conmutatividad:

$$\begin{aligned} v_p + v'_p &= (v + v')_p \quad (\text{ya que } v + v' \in \mathbb{R}^n) \\ &= (v' + v)_p \\ &= v'_p + v_p. \end{aligned}$$

- Existe un elemento neutro:

$$v_p + 0_p = (v + 0)_p = v_p.$$

- Inverso aditivo:

$$v_p + (-v'_p) = (v + (-v))_p = 0_p.$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\begin{aligned} \alpha(v_p + v'_p) &= (\alpha(v + v'))_p \quad (\text{ya que } \alpha(v + v') \in \mathbb{R}^n) \\ &= (\alpha v + \alpha v')_p \\ &= \alpha v'_p + \alpha v_p. \end{aligned}$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v_p &= ((\alpha + \beta)v)_p \quad (\text{ya que } (\alpha + \beta)v \in \mathbb{R}^n) \\ &= (\alpha v + \beta v)_p \\ &= \alpha v_p + \beta v_p. \end{aligned}$$

- Asociativa:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta v_p) &= (\alpha(\beta v))_p \quad (\text{ya que } \alpha(\beta v) \in \mathbb{R}^n) \\ &= ((\alpha\beta)v)_p \\ &= (\alpha\beta)v_p. \end{aligned}$$

- Existe un elemento unidad:

$$1 \cdot v_p = (1 \cdot v)_p = v_p$$

Por lo tanto, \mathbb{R}_p^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial. \square

Lema 1.1.23. La transformación lineal

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_p^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v_p &\mapsto v \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Primero, veamos que es transformación lineal:

$$\begin{aligned} T(\alpha v_p + \beta \omega_p) &= T((\alpha v + \beta \omega)_p) \\ &= \alpha v + \beta \omega \\ &= \alpha T(v_p) + \beta T(\omega_p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es transformación lineal. Ahora, veamos que la transformación lineal T está bien definida, es decir, si cada v_p le corresponde un único elemento en \mathbb{R}^n , digamos $\omega \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(v_p) = \omega, \text{ para todo } v_p \in \mathbb{R}_p^n.$$

Supongamos que existe $v', \omega' \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} v = T(v_p) = v' \text{ y } v = T(v_p) = \omega' \\ \Rightarrow v = v' \text{ y } v = \omega' \\ \Rightarrow \omega' = v'. \end{aligned}$$

Por lo que, T está bien definida. □

Nota 1.1.24. Dado que \mathbb{R}^n es un espacio vectorial finito con base canónica $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$, T^{-1} es isomorfismo y $T^{-1}(e_i) = (p, e_i)$, entonces una base para \mathbb{R}_p^n es entonces \mathbb{R}_p^n es un espacio vectorial que tiene como base:

$$\{(p, e_1), (p, e_2), \dots, (p, e_n)\}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &= \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} \times \mathbb{R}^n \\ &= \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_p^n. \end{aligned}$$

Supongamos que $p \neq p'$, entonces $(p, v) \neq (p', v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\mathbb{R}_p^n \cap \mathbb{R}_{p'}^n = \emptyset$, siempre que $p \neq p'$.

A continuación, usamos la noción de **derivada direccional** de funciones para determinar un clase especial de derivaciones en \mathbb{R}^n .

Definición 1.1.25. Sea $D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ el mapeo que toma la derivada direccional en la dirección de v en p :

$$D_v|_p f = D_v f(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle .$$

Lema 1.1.26. Se tiene que $D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y cumple con la regla del producto:

$$D_v|_p (f \cdot g) = f(p)D_v|_p (g) + g(p)D_v|_p (f).$$

Demostración. Veamos que $D_v|_p$ es lineal:

- $D_v|_p (f + g) = \langle \nabla (f + g)(p), v \rangle$
 $= \langle \nabla f(p) + \nabla g(p), v \rangle$ por linealidad del gradiente
 $= \langle \nabla f(p), v \rangle + \langle \nabla g(p), v \rangle$
 $= D_v|_p f + D_v|_p g.$
- $D_v|_p (\alpha f) = \langle \nabla (\alpha f)(p), v \rangle$
 $= \langle \alpha \nabla f(p), v \rangle$
 $= \alpha \langle \nabla f(p), v \rangle$
 $= \alpha D_v|_p f.$

Ahora, veamos que cumple la regla del producto:

$$\begin{aligned} D_v|_p (fg) &= \langle \nabla (fg), v \rangle \\ &= \langle f(p)\nabla g + g(p)\nabla f, v \rangle \\ &= \langle f(p)\nabla g(p), v \rangle + \langle g(p)\nabla f(p), v \rangle \\ &= f(p) \langle \nabla g(p), v \rangle + g(p) \langle \nabla f(p), v \rangle \\ &= f(p)D_v|_p g + g(p)D_v|_p f. \end{aligned}$$

□

Nota 1.1.27. Si

$$\begin{aligned}(p, v) = v_p &= \sum_{i=1}^n v^i \cdot e_i|_p \\ &= \sum_{i=1}^n v^i(p, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (p, v^i e_i) \\ &= (p, \sum_{i=1}^n v^i e_i)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{v|_p}(f) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \langle v, \nabla f(p) \rangle$$

y

$$D_{e_i|_p}(f) = \langle e_i, \nabla f(p) \rangle = 1 \cdot \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Ahora, definamos una derivación en un punto p .

Definición 1.1.28. 1. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, un mapeo lineal $X := D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado una **derivación en p** si satisface la regla del producto:

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf.$$

2. El tangente de \mathbb{R}^n en p , denotado por $T_p(\mathbb{R}^n)$, se define como el conjunto $T_p(\mathbb{R}^n) = \{X | X \text{ es una derivación en } p\}$.

Nota 1.1.29. $(T_p(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ es un espacio vectorial, dado que cumple las propiedades:

- $(X + Y) : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto X(f) + Y(f).$
- $(c \cdot X) : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto c \cdot X(f).$

Proposición 1.1.30. (Propiedades de las derivaciones). Supongamos $p \in \mathbb{R}^n$ y $X \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

1. Si f es función constante entonces $Xf = 0$,
2. Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $X(fg) = 0$.

Proposición 1.1.31. Para cualquier punto $p \in \mathbb{R}^n$, el mapeo $v_p \mapsto D_v|_p$ es un isomorfismo de \mathbb{R}_p^n sobre $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Corolario 1.1.32. Para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$, donde

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

es una \mathbb{R} -base para $T_p(\mathbb{R}^n)$ como espacio vectorial.

Notamos que como \mathbb{R} -espacio vectorial, $T_p\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n . Más adelante se usará este hecho para inducir una descripción en coordenadas del espacio tangente a una variedad abstracta M (ver sección 1.2.1).

1.1.6. Derivadas de mapeos suaves entre variedades

A continuación, definimos de forma abstracta la noción de vector tangente en el sentido de derivaciones. La idea de introducir este concepto es para que se visualice la noción de derivada de un mapeo entre variedades.

Definición 1.1.33. Sea M una variedad suave (de clase C^r) y $p \in M$. Un vector tangente X_p en p es un mapeo lineal $X_p : C^r(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface ser una derivación¹.

Nota 1.1.34. El conjunto de vectores tangentes X_p sera denotado por T_pM .

Una vez que ya hemos precisado la noción de variedades suaves, y vectores tangentes de forma abstracta, en este apartado colectaremos algunos resultados sobre la noción de derivada de un mapeo suave (clase C^r) cuyo nombre en inglés es “push-forward”. Esto nos ayudara a precisar una base tratable para los espacios tangentes T_pM , usando sus propiedades como derivaciones, ver definición 1.1.33.

Definición 1.1.35. Sean M, N variedades suaves y $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave. Para cada $p \in M$ definamos el mapeo $F_{*,p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, llamado el **pushforward** asociada con F mediante

$$(F_{*,p}X)(f) = Y(f) := X(f \circ F).$$

Afirmación 1.1.36. $Y \in T_{F(p)}N$.

¹Es decir, cumple la regla del producto: $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$, para cada $f, g \in C^r(M)$.

Demostración. Para demostrar esta afirmación debemos ver que Y es lineal y que cumple la regla del producto en $F(p)$. Observemos primero lo siguiente:

1. Sean $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces, para todo $p \in M$ se sigue que $F(p) \in N$, y por tanto,

$$\begin{aligned} [(f + g) \circ F](p) &= (f + g)(F(p)) \\ &= f(F(p)) + g(F(p)) \\ &= (f \circ F)(p) + (g \circ F)(p) \\ &\Rightarrow (f + g) \circ F = f \circ F + g \circ F. \end{aligned}$$

2. Sean $f \in C^\infty(M)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $p \in M$ se tiene $F(p) \in N$, y por tanto,

$$\begin{aligned} [(\alpha f) \circ F](p) &= (\alpha f)(F(p)) \\ &= \alpha f(F(p)) \\ &= \alpha(f \circ F)(p) \\ &\Rightarrow (\alpha f) \circ F = \alpha(f \circ F). \end{aligned}$$

Visto esto, procedamos a demostrar que Y es lineal:

$$\begin{aligned} Y(\alpha f + \beta g) &= X((\alpha f + \beta g) \circ F) \\ &= X((\alpha f \circ F) + (\beta g \circ F)) \text{ (Aplicando 1.)} \\ &= X((\alpha f \circ F)) + X((\beta g \circ F)) \\ &= \alpha X(f \circ F) + \beta X(g \circ F) \text{ (Aplicando 2.)} \\ &= \alpha Y(f) + \beta Y(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y es lineal.

Finalmente, veamos que satisface la regla del producto, es decir,

$$Y(f \cdot g) = f(F(p))Yg + g(F(p))Yf.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} [(fg) \circ F](p) &= (fg)(F(p)) = f(F(p)) \cdot g(F(p)) \\ &= (f \circ F)(p) \cdot (g \circ F)(p). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y(fg) &= X((fg) \circ F) = X((f \circ F) \cdot (g \circ F)) \\ &= (f \circ F)(p)X(g \circ F) + (g \circ F)(p)X(f \circ F) \\ &= f(F(p))Yg + g(F(p))Yf. \end{aligned}$$

Así, Y cumple la regla del producto en $F(p)$. Por lo tanto, $Y \in T_{F(p)}N$. \square

Proposición 1.1.37. (Propiedades del push-forwards).

Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ mapeos suaves y sea $p \in M$

- a) $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es lineal.
- b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_p M \rightarrow T_{G(F(p))} P$.
- c) $(Id_M)_* = Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.
- d) Si F es un difeomorfismo, entonces $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo.

Proposición 1.1.38. Sean M una variedad suave, $U \subseteq M$ un abierto e $i : U \hookrightarrow M$ la función inclusión. Para cualquier $p \in U$, $i_* : T_p U \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo lineal.

1.2. Noción de campos vectoriales

En este apartado, se desarrolla el concepto de campo vectorial, como las secciones del haz tangente a una variedad. Se precisará este material usando [Lee2013].

1.2.1. Descripción de una base para $T_p M$

Describiremos una base de $T_p M$, usando los resultados y notación presentados previamente, a través de la base dada para $T_x \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ (ver corolario 1.1.32).

De forma concreta se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1 (Base para los espacios tangentes a una variedad). Sea M una n -variedad suave (de clase C^r) con una estructura suave dada por el atlas \mathcal{A}_M . Entonces:

- Para cada $p \in M$, se tiene que el \mathbb{R} -espacio vectorial de derivaciones $T_p M$ es de dimensión finita n .
- Más aún, por cada carta suave $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M$, se tiene una base $v_1|_p, \dots, v_n|_p$ para $T_p M$, la cual depende de dicha carta.

Demostración. La idea central está en el uso adecuado de la estructura suave que se esté considerando. Veamos, sea M una n -variedad suave (de clase C^r) con una estructura suave dada por el atlas \mathcal{A}_M . Entonces, dado $p \in M$, existe una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M$ con $p \in U$, y donde por definición,

$\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo entre variedades suaves, ya que U es un subconjunto abierto de M y V un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Sea φ_α^{-1} el difeomorfismo inverso de φ_α e i_α el mapeo inclusión de U_α en M . Sea $(x_1, \dots, x_n) = \varphi_\alpha$ las coordenadas al rededor de p . Entonces, cada $x_j : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave (de clase C^r). Ahora bien, sean $\hat{p} := \varphi_\alpha(p)$, y consideramos la composición de mapeos:

$$V \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \xrightarrow{i_U} M.$$

Por lo tanto, de los incisos a) y b) de la proposición 1.1.37, se tiene una composición (a nivel de push-forwards) de transformaciones lineales:

$$L_3 : T_{\hat{p}}V \xrightarrow{L_1} T_pU_\alpha \xrightarrow{L_2} T_pM,$$

donde $L_1 = (\varphi_\alpha^{-1})_*$, $L_2 = (i_\alpha)_*$ y $L_3 = L_2 \circ L_1$.

Por el inciso d) de la proposición 1.1.38, se sigue que L_1 es un isomorfismo lineal, y por incisos b) y c), aplicados a φ_α y su inversa, se tiene que $L_1 = (\varphi_\alpha^{-1})_* = ((\varphi_\alpha)_*)^{-1}$. Asimismo, por la proposición 1.1.38 se sigue que L_2 es un isomorfismo lineal. Entonces, se sigue que L_3 es un isomorfismo lineal de espacios vectoriales. Asimismo, de la proposición 1.1.38, se tiene que, por la inclusión $i_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe un isomorfismo lineal $L_4 := (i_V)_*^{-1} : T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n \simeq T_{\hat{p}}V$. Por lo tanto, definimos el isomorfismo lineal $L := L_3 \circ L_4$, de tal forma que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{\hat{p}}V & \xrightarrow{L_1} & T_pU_\alpha \\ \uparrow L_4 & & \downarrow L_2 \\ T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{L} & T_pM \end{array}$$

Entonces, definimos $v_j|_p := L \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\hat{p}} \right)$, donde cada $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\hat{p}}$ son los elementos de una base dada como en el corolario 1.1.32. Como L es un isomorfismo lineal, esto completa la demostración. \square

Nota 1.2.2. De acuerdo con la demostración de la proposición 1.2.1, el mapeo $L = (i_\alpha)_* \circ (\varphi_\alpha^{-1})_* \circ (i_V)_*^{-1}$ es obtenido de mapeos inclusión, y por tanto podemos hacer una convención, al introducir el siguiente abuso en notación:

$$v_j|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p := (\varphi_\alpha^{-1})_{*,p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi_\alpha(p)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Esto es:

$$T_p M := \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : i = 1, \dots, n \right\rangle.$$

1.2.2. Representación coordenada de push-forwards

La nota 1.2.2 nos ayuda a dar un resultado práctico para comprender, en términos matriciales, el push-forward de un mapeo suave entre variedades suaves.

En efecto, sean $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave entre variedades suaves (clase C^r), $p \in M$ y $F(p) \in N$. Consideramos dos cartas suaves (U, φ) en M y (V, ψ) en N tales que $(p, F(p)) \in U \times V$. Por lo tanto, se tiene la representación coordenada:

$$\widehat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V). \quad (1.1)$$

De lo cual se tiene que $\widehat{F}_* := \psi_* \circ F_* \circ \varphi_*^{-1}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{\varphi(p)} \varphi(U \cap F^{-1}(V)) & \xrightarrow{\widehat{F}_{*, \varphi(p)}} & T_{\psi(F(p))} \psi(V) \\ \uparrow \varphi_*^{-1} & & \downarrow \psi_* \\ T_p M & \xrightarrow{F_{*, p}} & T_{F(p)} N, \end{array}$$

donde por proposición 1.1.38 y el inciso d) en la proposición 1.1.37 se tiene que ψ_* y φ_*^{-1} son isomorfismos lineales.

Por lo tanto, denotamos por $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ y $\psi = (y_1, \dots, y_n)$, las coordenadas² en M y N . Entonces, usando la nota 1.2.2, consideramos las bases correspondientes para los espacios tangentes:

$$T_p M = \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : i = 1, \dots, m \right\rangle \text{ y } T_{F(p)} N = \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)} : j = 1, \dots, n \right\rangle.$$

Definimos

$$\mathcal{B}_M := \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : i = 1, \dots, m \right\} \text{ y } \mathcal{B}_N := \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)} : j = 1, \dots, n \right\}.$$

²Aquí, donde $m = \dim M$ y $n = \dim N$, son las dimensiones como variedades suaves, respectivamente.

Finalmente, es así que tenemos el siguiente resultado cuyos detalles de la demostración pueden ser consultados en [Lee2013, pág. 71].

Proposición 1.2.3 (Representación coordenada de push-forwards). Dado un vector tangente $X_p \in T_pM$, su imagen bajo $\mathcal{L} := F_{*,p}$ está dada por:

$$[\mathcal{L}(X_p)]_{\mathcal{B}_N} = \mathbf{A}([X_p]_{\mathcal{B}_M}).$$

Aquí, la matriz \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_m}(\hat{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial x_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial x_m}(\hat{p}) \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

1.2.3. Haz tangente en el 2-toro \mathbb{T}^2

Primeramente, podemos considerar el haz tangente de una 2-variedad M como la unión disjunta

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

De hecho, se tiene una definición más precisa que puede ser consultada en [Lee2013, pág. 81]. En efecto, la estructura que será más adelante útil en la definición de campo vectorial, es que TM puede ser dotado de una estructura diferenciable de clase C^r ; comenzamos por definir la función proyección canónica

$$\Pi : TM \rightarrow M, X_p \mapsto p,$$

donde $X_p \in T_pM$, para cada $p \in M$. Para que exista un atlas en TM , se puede usar un método de construcción dado en el siguiente resultado para el caso especial de 2-variedades, ver lema1.1.6 y cf. [Lee2013, Lemma 4.1]:

Proposición 1.2.4. Para una 2-variedad M suave (de clase C^r) con atlas \mathcal{A}_M se tiene:

- i) una topología natural \mathfrak{T}_{TM} y
- ii) un atlas \mathcal{A}_{TM} suave (de clase C^r),

tales que TM es una 4-dimensional variedad suave (de clase C^r). Más aún, con respecto a las estructuras \mathcal{A}_{TM} y \mathcal{A}_M , la proyección $\Pi : TM \rightarrow M$ es un mapeo suave (de clase C^r).

Demostración. Daremos una idea de la demostración. El punto importante en esta prueba es usar el lema 1.1.6 de construcción de variedades suaves (de clase C^r). El primer paso es proponer los candidatos para ser las cartas coordenadas en \mathcal{A}_{TM} : dada $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, consideramos $\tilde{U}_\alpha := \Pi^{-1}(U_\alpha) \subset TM$. Por conveniencia, sea $\varphi_\alpha(p) = (x, y)$, $p \in U_\alpha$. Entonces, se define un mapeo

$$\tilde{\varphi}_\alpha: \tilde{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

tal que para cada $v_p = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x}|_p + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}|_p$,

$$\tilde{\varphi}_\alpha(v_p) := (x, y, a(x, y), b(x, y)).$$

Notamos que $\text{Im} \tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^2$, el cual es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, ya que φ_α es un difeomorfismo. Más aún, $\tilde{\varphi}_\alpha$ es una biyección sobre su imagen, ya que su inverso está dado por:

$$\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y, v, w) \mapsto \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x, y, v, w) := v \frac{\partial}{\partial x}|_q + w \frac{\partial}{\partial y}|_q, \quad (1.2)$$

donde $q = \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \in \tilde{U}_\alpha = \Pi^{-1}(U_\alpha)$.

Por lo tanto, se tiene la colección $\left\{ (\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) \right\}_{\alpha \in \Lambda}$ que satisface las hipótesis en lema 1.1.6, y determina el atlas \mathcal{A}_{TM} . La topología que se menciona en el inciso i), se consigue tomando como base de ella a la colección $\left\{ \tilde{U}_\alpha \right\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Finalmente, se tiene que Π es suave ya que su representación coordenada

$$\hat{\Pi} = \varphi_\beta \circ \Pi \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1},$$

pero $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo³, en el particular suave (de clase C^r). Estos completa la demostración. \square

Por la proposición 1.2.4, dada una estructura suave (clase C^r) para M , con respecto a un atlas \mathcal{A}_M , se tiene una estructura suave (clase C^r) para TM , dada por un atlas \mathcal{A}_{TM} . Con respecto a dichos atlas \mathcal{A}_M y \mathcal{A}_{TM} , respectivamente, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.5 (Campo vectorial en una 2-variedad). Sea M una 2-variedad suave (de clase C^r). Un campo vectorial de clase C^r en M es una **sección** del mapeo proyección $\Pi : TM \rightarrow M$, esto es, una función $X : M \rightarrow TM$ suave (de clase C^r) tal que $\Pi \circ X = Id_M$.

³Pues las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}_M$ son cartas suavemente compatibles.

Nota 1.2.6. A la colección de campos vectoriales de clase \mathcal{C}^r en una variedad suave M , se le denotara por $\mathfrak{X}^r(M)$. Cabe destacar que un campo vectorial se puede describir en coordenadas locales: En efecto, dado $p \in M$ y $X_p = X(p) \in TM$, podemos considerar cartas coordenadas⁴ (U_β, φ_β) y $(\Pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)$ para M y TM , respectivamente, con $p \in U_\beta$ y $X_p \in \Pi^{-1}(U_\alpha)$. La representación coordenada de un campo vectorial $X : M \rightarrow TM$ está dada de la siguiente manera:

$$\hat{X} = \tilde{\varphi}_\alpha \circ X \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Es decir, si $(x, y) = \varphi_\beta(q)$, $q \in U_\beta$ y $\tilde{\varphi}_\alpha(X_q) := (x, y, a(x, y), b(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $X_q \in \Pi^{-1}(U_\beta)$ entonces

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \tilde{\varphi}_\alpha \circ X \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y) \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha (X (\varphi_\beta^{-1}(x, y))) \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha (X (q)) \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha (X_q) = (x, y, a(x, y), b(x, y)), \end{aligned}$$

de donde, el vector de coordenadas lineales es $[X] = [\hat{X}] = (a(x, y), b(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Otro abuso en notación que se usa comúnmente es: En coordenadas locales, $X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$, con $a, b \in \mathcal{C}^r(U_\beta)$, lo que significa si $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}_{\mathbb{T}^2}$ $\varphi_\beta(q) = (x, y)$, $q \in U_\beta \subset \mathbb{T}^2$, entonces:

$$X : q \mapsto X_q = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.3)$$

1.2.4. Noción de campo vectorial en \mathbb{T}^2

En este apartado, se definirá de forma explícita, el espacio tangente para cada punto en el 2-toro: $T_p \mathbb{T}^2$, $p \in \mathbb{T}^2$ y el haz tangente $T(\mathbb{T}^2)$.

Consideremos la notación y resultados como antes, y el apéndice A.1.2. Sea $M = \mathbb{T}$ y sea $p \in \mathbb{T}$. Entonces existe una carta $(U_\alpha = U_i^\pm \times U_j^\pm, \varphi_\alpha = \varphi_i^\pm \times \varphi_j^\pm)$. Dado $p = (p_1, p_2) \in U_i^\pm \times U_j^\pm$, tenemos coordenadas locales

$$\varphi_\alpha(p) = (\varphi_i^\pm(p_1), \varphi_j^\pm(p_2)) = (x(p_1), y(p_2)).$$

Sin perder generalidad, esto lo podemos denotar como $\varphi_\alpha = (x, y)$.

Ahora bien, por la nota 1.2.2, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p := (\varphi_\alpha^{-1})_{*,p} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\varphi_\alpha(p)} \right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p := (\varphi_\alpha^{-1})_{*,p} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\varphi_\alpha(p)} \right).$$

⁴Ver (1.2) en la demostración de la proposición 1.2.4.

Entonces

$$T_p\mathbb{T}^2 := \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\rangle,$$

esto es, para todo $v_p \in T_p\mathbb{T}^2$, $v_p = a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Notamos que de la proposición 1.1.31, dado $p \in \mathbb{T}^2$ con coordenadas (x, y) , se tiene que $T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial. Más aún, se tiene que $\mathbb{R}^2_{(x,y)} \cong T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$ como \mathbb{R} -espacios vectoriales.

Por otra parte, dado que, para todo $p \in \mathbb{T}$ existe una carta coordenada suave $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que $p \in W_\alpha$ y $\varphi_\alpha(W_\alpha) \simeq \tilde{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, entonces por la demostración de proposición 1.2.1 y la nota 1.2.6, se tienen isomorfismos canónicos dependientes de esta carta coordenada, tales que:

$$T_p(\mathbb{T}^2) \simeq T_p W_\alpha \simeq T_{\varphi(p)} \tilde{W}_\alpha \simeq T_{\varphi(p)} \tilde{W}_\alpha \simeq T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2_{\varphi(p)}.$$

Nota 1.2.7. Es importante establecer que en coordenadas locales, y como consecuencia de lo realizado en la nota 1.2.6 en (1.3), los campos vectoriales suaves (o clase C^r) $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$, son tales que todo valor que toma X en un punto p , $X_p \in T_p\mathbb{T}^2$ se corresponde con un elemento $v_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ y, a su vez, $X_{\varphi(p)}$ se corresponde con un elemento en coordenadas lineales $[X_{\varphi(p)}] = v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1.2.5. Caracterización de campos vectoriales en \mathbb{T}^2

Más adelante, vamos a dar ejemplos de campos vectoriales en el toro \mathbb{T}^2 . Para esto, son necesarios algunos resultados o hechos importantes que nos harán falta, en los que hacemos uso del “push-forward”, y que pueden consultarse en [Pa-De M2012].

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}_T \sim \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{T}^2$ la parametrización como en apéndice A.3. Entonces, φ es un cubriente suave de tal forma que localmente, su derivada $d\varphi_p$ es un isomorfismo para cada $p \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, se tiene el siguiente método para determinar campos vectoriales en \mathbb{T}^2 , así como la comprensión de un campo vectorial dado en el toro, a través de campos vectoriales llevados al plano.

Proposición 1.2.8. Vía el mapeo φ :

- i) Si $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$, entonces $Y = \varphi_* X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$.
- ii) Si $Y \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$, entonces $X = \varphi^* Y \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$. Aquí, $\varphi^* Y$ es el campo vectorial pull-back definido tal que

$$X = \varphi^* Y \quad \text{si y sólo si} \quad Y(q) = (\varphi_{*,q})^{-1} X_\varphi(q), \forall q.$$

Más aún, podemos utilizar los resultados de la proposición 1.2.8 para establecer el siguiente resultado–definición, el cual es práctico y elegante, y que podemos encontrar en [Pa-De M2012] (cf. [Siegel1945, Sternberg1957]).

Proposición 1.2.9. Un campo vectorial clase \mathcal{C}^r , $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow T(\mathbb{R}^2)$, determina un campo vectorial en el toro⁵, $X = \pi \circ Y : \mathbb{T}^2 \rightarrow T(\mathbb{T}^2)$, si y sólo si se satisface que $Y(x + k, y + l) = Y(x, y)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y cada $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.

⁵Aquí π es la proyección de \mathbb{R}^2 al toro como el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Curvas integrales para campos no-singulares en \mathbb{T}^2

En este capítulo, primeramente daremos los conceptos y resultados básicos sobre el flujo asociado a un campo vectorial en una 2-variedad. Después, vamos definir el concepto de conjunto ω -límite y α -límite de trayectorias sobre \mathbb{T}^2 , seguidamente el concepto de conjunto invariante, y algunos resultados importantes, los cuales pueden ser consultados en [Ta1992].

2.1. Sistemas dinámicos continuos no-singulares

En este apartado, se presentan algunos conceptos y resultados básicos para comprender el flujo asociado a un campo vectorial en una 2-variedad suave (o de clase C^r), y posteriormente su aplicación para campos vectoriales no singulares en \mathbb{T}^2 .

2.1.1. Sistema de EDOs asociado a un campo vectorial

Para el material contenido en esta parte, usaremos los textos [Ta1992], [Bu-Gi2005] y [Lee2013]. Vamos a comenzar definiendo conceptos básicos que generalizan los conocidos para EDO en un espacio euclidiano. Como es de interés en esta tesis trabajar con el 2-toro, nos restringiremos en este apartado a 2-variedades suaves (o de clase C^r). Por lo tanto, en lo subsecuente, a menos que se indique lo contrario, todas las variedades son dos dimensionales, solo se especificará su clase C^r correspondiente.

Definición 2.1.1 (Flujo en una 2-variedad). Sea M una 2-variedad suave (o clase C^r). Un flujo en M , es una función continua

$$\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi(0, p) = p$, para cada $p \in M$;
2. $\phi(t_1 + t_2, p) = \phi(t_1, \phi(t_2, p))$, para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y cada $p \in M$.

Un flujo en M define un sistema dinámico continuo (en el tiempo).

Nota 2.1.2 (Curvas en una 2-variedad). Un caso particular de mapeos suaves entre variedades suaves es el caso de una curva. Para explicar esto, suponemos que $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva continua que manda un intervalo en una 2-variedad suave (clase C^r). Si γ es suave¹ (o clase C^r) entonces su derivada o push-forward está dado de la siguiente manera (ver [Lee2013, pág. 75]): Dado $t_0 \in J$,

$$\gamma_{*,t_0}: T_{t_0}J \longrightarrow T_{\gamma(t_0)}M, \quad v_{t_0} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \longmapsto w_{\gamma(t_0)} := \gamma_{*,t_0}(v_{t_0}),$$

donde dada una función suave o clase C^r , se tiene que

$$w_{\gamma(t_0)}(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (f \circ \gamma) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0).$$

La matriz de coordenadas² con respecto a una carta suave $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M$ de γ_{*,t_0} es

$$[\gamma_{*,t_0}] = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0)),$$

es decir, $[\gamma_{*,t_0}]$ es la curva paramétrica en $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ dada por la representación coordenada

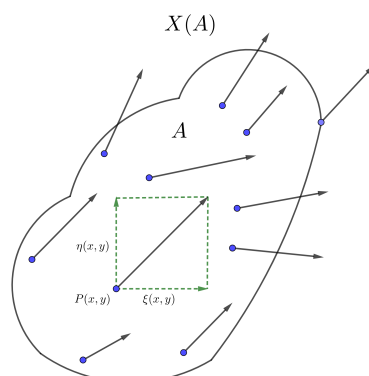
$$\hat{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) = \varphi_\alpha \circ \gamma \circ Id_J^{-1} = \varphi_\alpha \circ \gamma.$$

Abusando en notación, decimos que en coordenadas locales $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ y $[w_{\gamma(t_0)}] = \gamma'(t_0)$.

A continuación, sea X un campo vectorial en una 2-variedad M . Dado $p \in M$ denotaremos por $(\xi(x, y), \eta(x, y)) = [X_p]$, la x -componente y la y -componente de X_p , respectivamente, de acuerdo con la nota 1.2.6, ver figura 2.1.

¹Aquí estamos suponiendo que J tiene la estructura suave heredada de \mathbb{R} con la estructura usual con las cartas cuyos mapeos de coordenadas son la identidad.

²Ver [Lee2013]

Figura 2.1: Componentes de $X_p \in X$.

Definición 2.1.3. Un campo vectorial X es **no-singular** si cada X_p es un vector distinto de cero. Diremos que X es singular, si la imagen de X contiene al vector cero.

De la nota 1.2.6 y de (1.3) se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.4. Sea X un campo vectorial sobre $U \subset M$, y $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ las funciones componentes de X . Entonces X es diferenciable de clase C^r en $P(x, y)$, si $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ son diferenciables de clase C^r .

Esto significa, que todas las derivadas parciales, de orden menor a r , de $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ existen y son continuas en $P(x, y) = \varphi_\alpha(p)$.

De acuerdo con la nota 1.2.6, en el caso cuando U es un conjunto abierto y X es clase C^r en cada punto de U , diremos que X es un campo vectorial C^r , $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Un campo vectorial de clase C^0 tiene funciones componentes continuas $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$. Ahora, para un campo vectorial C^∞ las r -ésimas derivadas parciales de $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ existen para todo entero no negativo r .

En el caso de una curva γ como en la nota 2.1.2, cuando γ_1 y γ_2 son de clase C^r , $r = 0, 1, \dots, \infty$, diremos que γ es una curva de clase C^r definida en el intervalo abierto J . Aquí, con los ajustes técnicos adecuados, J puede ser de la forma: $[\alpha, \beta]$, (α, β) , $(\alpha, \beta]$, (α, ∞) , $(-\infty, \beta)$, $(-\infty, \beta]$.

Para tener una referencia más adelante, de la nota 2.1.2 también colectamos la siguiente definición:

Definición 2.1.5. Sea φ una curva de clase C^r , $r \geq 1$, en el intervalo (α, β) . Usando coordenadas locales, el **vector tangente** a φ en $\varphi(t)$ está definido como el vector geométrico $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t))_{\varphi(t)} \in \mathbb{R}^2_{\varphi(t)}$, donde $\varphi'_i(t)$ es la derivada de φ_i con respecto a t , $i = 1, 2$, ver figura 2.2.

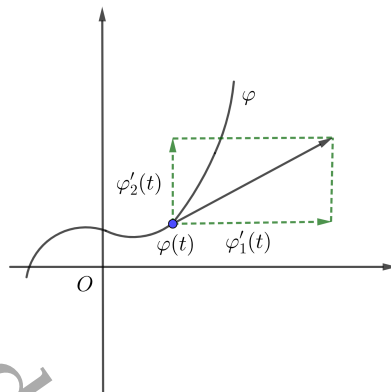


Figura 2.2: Vector tangente a φ en $\varphi(p)$.

De la nota 2.1.2 se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.6 (Curva integral en un subconjunto de una 2-variedad). *Sea A un subconjunto abierto en una 2-variedad M y sea X un campo vectorial sobre A . Diremos que γ una curva de clase C^{r+1} definida sobre un intervalo (α, β) es una **curva integral** de X , si para todo $\alpha < t < \beta$ se satisface que:*

- i) $\gamma(t) \in A$.
- ii) $w_{\gamma(t)} = X_{\gamma(t)}$, o bien, en coordenadas locales $\gamma'(t) = [X_{\gamma(t)}]$, ver figura 2.3.

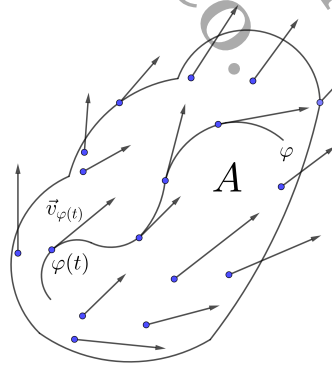


Figura 2.3: Curva integral de X .

2.1.2. Existencia de curvas integrales para un campo vectorial

En esta sección mostraremos resultados de ecuaciones diferenciales definidas para campos vectoriales en 2-variedades, para lo que usaremos [Ta1992].

Sea (M, \mathcal{A}) una 2-variedad suave de clase C^r cerrada³ y sea p un punto en M .

Teorema 2.1.7 (Existencia y unicidad de curvas integrales). *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que $2 \leq r + 1 \leq s$. Entonces,*

- i) *Para todo $p \in M$, existe una única curva integral $\phi(t, p)$ que pasa por p , $\phi(-, p) : (-\infty, \infty) \rightarrow M$ de clase C^{r+1} .*
- ii) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos $\Psi_t : M \rightarrow M$, $\Psi_t(p) = \phi(t, p)$. Entonces, Ψ_0 es el mapeo identidad y $\Psi_{t_1} \circ \Psi_{t_2} = \Psi_{t_1+t_2}$.*
- iii) *$\phi_{\{\phi_p(t_2)\}}(t_1) = \phi_{\{p\}}(t_1 + t_2)$, $\phi(t_1, \phi(t_2, p)) = \phi(t_1 + t_2, p)$.*
- iv) *El mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ definido por*

$$\Psi(t, p) = \phi(t, p),$$

es diferenciable de clase C^r .

De forma alternativa y más elegante, podemos reformular el resultado anterior (para n -variedades de hecho) de la siguiente manera. Para esto se puede consultar [Abraham et al. 2012, pág. 220] y [Bu-Gi2005, Thm 2.3.3].

Teorema 2.1.8. Un campo vectorial clase C^r en una n -variedad diferenciable compacta es completo, es decir, sus curvas integrales están definidas en todo \mathbb{R} .

De este teorema se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.1.9. Las curvas integrales para un campo vectorial clase C^r en \mathbb{T}^2 están definidas en todo \mathbb{R} .

Teorema 2.1.10 (Coordenadas de caja de flujo). Sea X un campo vectorial suave en una variedad suave M , tal que $X_{p_0} \neq 0$ en algún punto p_0 . Entonces, existe un sistema de coordenadas local cerca de p_0 tal que las trayectorias del flujo de X , en estas coordenadas locales, son líneas rectas paralelas.

Demostración. Para una demostración completa de este resultado puede consultarse [Bu-Gi2005, pág. 85, Thm 2.3.6]. \square

Sea (M^n, \mathcal{A}) una variedad de dimensión n de clase C^s y consideremos un campo vectorial sobre M^n dado por $X = \{X(p) : p \in M\}$, $1 \leq r \leq s - 1$. Dicho campo vectorial se le conoce como un sistema dinámico C^r , aunque para decir lo mismo, mantendremos la notación $X \in \mathfrak{X}^r(M)$.

³Es decir, una variedad diferenciable clase C^r sin variedad frontera, ver [Ta1992, pág. 66].

2.2. Conjuntos ω -límite y α -límite en \mathbb{T}^2

Antes de dar las nociones de conjuntos límite en \mathbb{T}^2 , recordamos del teorema 2.1.7 que las curvas integrales de un campo vectorial en \mathbb{T}^2 están definidas en todo \mathbb{R} .

Definición 2.2.1. Sea X un campo vectorial de clase C^r sobre \mathbb{T}^2 y sea $\phi(t, p)$ su curva integral. Definamos la **trayectoria** de X a través de p como sigue:

$$\mathcal{C}(p) := \{\phi(t, p) : -\infty < t < \infty\}.$$

Lema 2.2.2. Si $p' \in \mathcal{C}(p) \Rightarrow \mathcal{C}(p') = \mathcal{C}(p)$.

Demostración. Sea X un campo vectorial no singular de clase C^r sobre \mathbb{T}^2 . Dada una curva integral $\phi(t, p)$ que pasa por p .

Notemos que, si $p' = \phi(t', p)$ es un punto sobre la curva integral $\phi(t, p)$ del campo vectorial X .

Entonces, la curva $\bar{\varphi}$ definida por $\bar{\varphi}(t) = \phi(t + t', p)$ con parámetro t también es una curva integral de X , y $\bar{\varphi}(0) = \phi(t', p) = p'$; así por la unicidad de curvas integrales (ver inciso iii) de teorema 2.1.7) tenemos que $\bar{\varphi}(t) = \phi(t, p')$.

Por lo tanto,

$$\phi(t, \phi(t', p)) = \phi(t, p') = \bar{\varphi}(t) = \phi(t + t', p). \quad (2.1)$$

□

Sea $\phi(-, p) : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{T}^2$ una curva integral de X a través de p . Asumir que $X(p) \neq 0$ y que $\phi(t, p) = p$ para algún $t > 0$. Entonces, existe $t_0 = \min\{t : \phi(t, p) = p\}$. Por lo tanto, $\phi(t_0, p) = p$ y $\phi(t, p) \neq p \forall 0 < t < t_0$. Además diremos que:

1. Una curva integral $\phi(t, p)$ es llamada **periódica** si para algunos t_1 y t_2 , $t_1 < t_2$,

$$\phi(t_1, p) = \phi(t_2, p),$$

pero $\phi(t, p) \neq \phi(t_1, p)$ para todo t , $t_1 < t < t_2$. En este caso diremos que la trayectoria es **periódica** o cerrada.

2. Una trayectoria $\mathcal{C}(p)$ es **ergódica** sobre \mathbb{T}^2 si es densa en \mathbb{T}^2 , es decir, $\overline{\mathcal{C}(p)} = \mathbb{T}^2$.

Ahora, dado X un campo vectorial de clase C^r sobre el toro \mathbb{T}^2 , $r \geq 1$, y sea $\phi(t, p)$ su curva integral que pasa por p , definamos los siguientes dos conjuntos:

1. El conjunto ω -**límite** de la trayectoria $\mathcal{C}(p)$ que pasa por p , denotado por $L^+(p)$ es definido por

$$L^+(p) := \bigcap_{0 \leq s < \infty} \overline{C_s},$$

donde $C_s = \{\phi(t, p) : s \leq t < \infty\} \subset \text{Im}\phi(t, p)$.

2. El conjunto α -**límite** de la trayectoria $\mathcal{C}(p)$ que pasa por p , denotado por $L^-(p)$ es definido por

$$L^-(p) := \bigcap_{-\infty < s \leq 0} \overline{D_s},$$

donde $D_s = \{\phi(t, p) : -\infty < t \leq s\}$.

Ambos conjuntos son no vacíos y cerrados.

2.3. Conjuntos invariantes en \mathbb{T}^2

Lo siguiente que vamos a definir será el concepto de un conjunto invariante en \mathbb{T}^2 .

Definición 2.3.1. Sea A un subconjunto de \mathbb{T}^2 . Diremos que A es un **conjunto invariante** si para cada punto $p \in A$ la curva integral $\phi(t, p)$ está contenida en A , es decir,

$$\bigcup_{p \in A} \{\phi(t, p) : -\infty < t < \infty\} = A.$$

Proposición 2.3.2. Los conjuntos $L^+(p)$ y $L^-(p)$ son invariantes.

Demostración. Partiremos de las siguientes observaciones.

- i) La invarianza de $L^+(p)$ se demuestra verificando que si $q \in L^+(p)$ entonces $\phi(t, q) \subset L^+(p)$, para cada t .
- ii) La invarianza de $L^-(p)$ se demuestra verificando que si $q' \in L^-(p)$, entonces $\phi(t, q') \subset L^-(p)$ para cada t .

Veamos. *i)* Sea $q \in L^+(p)$, entonces por definición existe una sucesión de números $\{t_i\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t_i, p) = q.$$

Si $\phi(\bar{t}, q)$ es un punto sobre la trayectoria $\phi(t, q)$ que pasa por q . Entonces usando la ecuación (2.1) y la continuidad de las trayectorias ϕ se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t_i + \bar{t}, p) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(\bar{t}, \phi(t_i, p)) \\ &= \phi(\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{t}, \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t_i, p)) \\ &= \phi(\bar{t}, q). \end{aligned}$$

Por lo que, $\phi(\bar{t}, q) \in L^+(p)$, para todo punto $\phi(\bar{t}, q)$ en la curva integral $\phi(t, q)$. Así,

$$\phi(t, q) \subset L^+(p).$$

Por lo tanto, $L^+(p)$ es un conjunto invariante.

Ahora, demostremos *ii)*.

Sea $q' \in L^-(p)$, entonces por definición existe una sucesión de números $\{t_n\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = q'.$$

Si $\phi(\tilde{t}, q')$ es un punto sobre la trayectoria $\phi(t, q')$ que pasa por q' . Entonces usando la ecuación (2.1) y la continuidad de las trayectorias ϕ se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n + \tilde{t}, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\tilde{t}, \phi(t_n, p)) \\ &= \phi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{t}, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p)) \\ &= \phi(\tilde{t}, q'). \end{aligned}$$

Por lo que, $\phi(\tilde{t}, q') \in L^-(p)$, para todo punto $\phi(\tilde{t}, q')$ en la curva integral $\phi(t, q')$. Así,

$$\phi(t, q') \subset L^-(p).$$

Por lo tanto, $L^-(p)$ es un conjunto invariante. \square

Una consecuencia directa del teorema 2.1.7 y por la proposición 2.3.2 es el siguiente resultado, ver [Ta1992, pág. 68].

Proposición 2.3.3. Los conjuntos $L^+(p)$ y $L^-(p)$ son conexos.

Enunciaremos un resultado que nos será de utilidad de aquí en adelante.

Lema 2.3.4. *Existe una función Φ de clase C^∞ , definida sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ que satisface lo siguiente:*

$$i) \quad \Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geq 2, \\ 1, & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$ii) \quad 0 \leq \Phi(x) \leq 1 \text{ para } 1 \leq |x| \leq 2.$$

$$iii) \quad \Phi'(x) \geq 0 \text{ para } x \in [-2, -1], \quad \Phi'(x) \leq 0 \text{ para } x \in [1, 2].$$

2.4. Ejemplos genéricos de campos vectoriales

En este apartado, se darán algunos ejemplos de campos vectoriales en el toro \mathbb{T}^2 .

Es pertinente comenzar este apartado con la siguiente nota.

Nota 2.4.1. En este trabajo no se consideran los campos vectoriales que poseen puntos de equilibrio, como podrá verse en los apartados subsecuentes, y como se ha mostrado en las hipótesis de los resultados precedentes. Sin embargo, mencionaremos ahora un aspecto importante: Si p es un punto de equilibrio para el campo vectorial suave X , entonces por definición, se tiene que $X_p = 0$. Por lo tanto, la curva integral que pasa por p es constante, es decir, $\phi(t, p) = p$, para cada t , lo que implica que la trayectoria correspondiente es $C(p) = \{p\}$.

En la medida de lo posible, daremos ejemplos de campos vectoriales con y sin puntos de equilibrio, y algunos retratos fase, para lo que usaremos los libros clásicos con un enfoque a variedades suaves [Pa-De M2012], [Lee2013] y [Bu-Gi2005].

Ejemplo 2.4.2 (La esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3). Primeramente, para las cartas coordenadas, consideramos las usuales donde los puntos tienen las mismas coordenadas (x, y, z) en \mathbb{R}^3 . Sean P_N, P_S los polos norte y sur de \mathbb{S}^2 , respectivamente. Considerese el campo vectorial:

$$X : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x, y, z) := (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

Entonces:

- X es de clase \mathcal{C}^∞ ;
- X tiene como únicos puntos singulares a P_N y P_S .
- X es tangente a los meridianos de \mathbb{S}^2 y apunta hacia arriba.
- Los conjuntos invariantes ω y α límites son: Dado $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{P_N, P_S\}$, se tiene que $\omega(p) = P_N$ y $\alpha(p) = P_S$.

Ver figura 2.4.

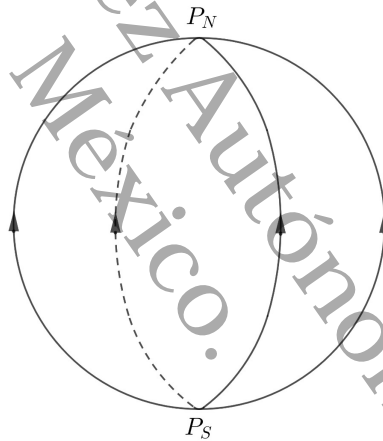


Figura 2.4: Ejemplo de campo vectorial en la esfera \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 2.4.3 (Campos vectoriales F -relacionados, ver [Lee2013] pág. 87). Sean $F : M \rightarrow N$ un mapeo suave entre 2-variedades suaves, y Y un campo vectorial en M . Suponer que Z es un campo vectorial en N tal que

$$F_{*,p}Y_p = Z_{F(p)}, \quad \text{para cada } p \in M.$$

En este caso, decimos que Y y Z son F -relacionados (ver figura 2.5). Veamos un ejemplo concreto:

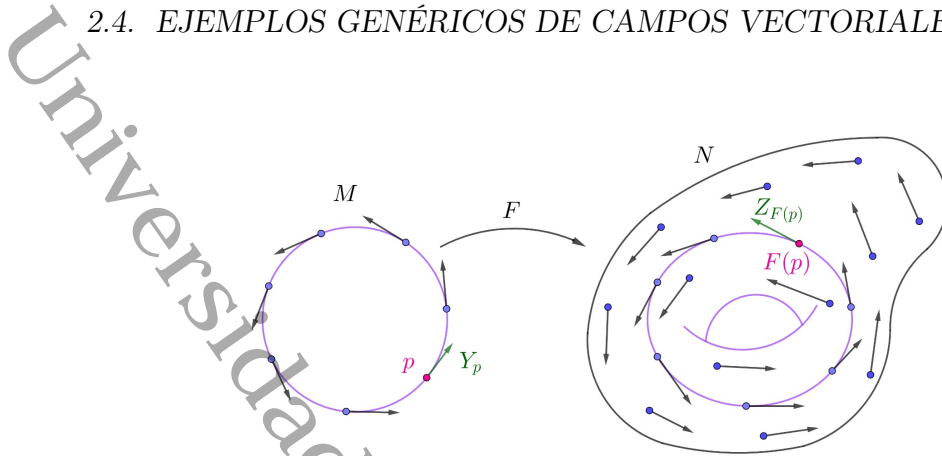


Figura 2.5: Campos vectoriales F -relacionados.

Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Entonces, el campo vectorial $\frac{d}{dt}$ es F -relacionado con el campo vectorial $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Efectivamente: sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto, $f \circ F \in C^\infty(\mathbb{R})$ y así, se sigue que

$$\begin{aligned} F_* \frac{d}{dt}(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ F) \text{ (por definición 1.1.35 de pushforward.)} \\ &= \nabla f(F(t)) \cdot \frac{dF}{dt}(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(\cos(t), \sin(t))} \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(\cos(t), \sin(t))} \\ &= Z_{F(t)}. \end{aligned}$$

Para el siguiente ejemplo se puede consultar [Pa-De M2012] y [Bu-Gi2005].

Ejemplo 2.4.4 (Campos vectoriales gradiente en \mathbb{T}^2). Consideremos la descripción del toro \mathbb{T}^2 como se tiene en el apéndice A.3. Sea $\mathbf{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Consideremos el push-forward

$$\mathbf{h}_{*,p} : T_p \mathbb{T}^2 \rightarrow T_{h(p)} \mathbb{R}.$$

Ahora bien, sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_{\mathbb{T}^2}$ (la estructura suave para \mathbb{T}^2 como en apéndice A.1.2). Por lo tanto, dado un punto $p \in \mathbb{T}^2$ con $\hat{p} := \varphi_\alpha(p)$, se tiene que en coordenadas lineales, por la proposición 1.2.3 la matriz asociada a $\mathbf{h}_{*,p}$ está dada por el gradiente de la representación coordenada de \mathbf{h} en la carta.

$\varphi_\alpha = (x, y)$ (ver sección 1.2.4):

$$[\mathbf{h}_{*,p}] = \nabla(\mathbf{h} \circ \varphi_\alpha^{-1})(\hat{p}) = \left(\frac{\partial(\mathbf{h} \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x}(\hat{p}), \frac{\partial(\mathbf{h} \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial y}(\hat{p}) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalmente, definimos el campo vectorial en coordenadas, dado por:

$$X : \mathbb{T}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2, \quad p \mapsto v_p,$$

donde

$$v_p := \frac{\partial(\mathbf{h} \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\hat{p}} + \frac{\partial(\mathbf{h} \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial y}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\hat{p}} \in T_p \mathbb{T}^2.$$

Este campo vectorial es llamado campo gradiente. Abusando en notación, se escribe como $X = \text{Grad}(\mathbf{h})$. Observamos que X tiene puntos de equilibrio siempre que \mathbf{h} tiene puntos críticos. Luego, X es no singular si \mathbf{h} no posee puntos críticos.

2.4.1. Ejemplos de campos vectoriales no constantes en \mathbb{T}^2

Consideramos los siguientes campos vectoriales suaves no-singulares en \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \mapsto X_{(x,y)} = \sin(2\pi x) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)};$$

$$(x, y) \mapsto Y_{(x,y)} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \sin(2\pi x) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)};$$

$$(x, y) \mapsto Z_{(x,y)} = \cos(2\pi(x+y)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \sin(2\pi(x+y)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}.$$

De acuerdo con la proposición 1.2.9, tenemos que X , Y y Z determinan campos vectoriales en \mathbb{T}^2 , ya que

$$X_{(x,y)} = X_{(x+k,y+l)}, \quad Y_{(x+k,y+l)} = Y_{(x,y)}, \quad \text{y} \quad Z_{(x+k,y+l)} = Z_{(x,y)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Usando el software Mathematica, resolvemos los sistemas de EDO asociados en el plano. Es decir, resolvemos el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, y), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= b(x, y), & y(0) &= y_0; \end{aligned}$$

donde (a, b) son las coordenadas para cada campo, respectivamente:

$$(a, b) \in \{[X_{(x,y)}], [Y_{(x,y)}], [Z_{(x,y)}]\}.$$

Dada una condición inicial (x_0, y_0) , la curva integral explícita

$$\phi_{(x_0, y_0)}(t) = (x(t), y(t))$$

para X puede ser de dos tipos:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \cot^{-1} \left(e^{-2\pi \left(t + \frac{\log\left(-\frac{1}{\sqrt{\cot(\pi x_0)}}\right)}{\pi}\right)} \right), \text{ y } y(t) = 2t + y_0;$$

O bien,

$$x(t) = \frac{\cot^{-1} \left(e^{-2\pi \left(t - \frac{\log(\cot(\pi x_0))}{2\pi} \right)} \right)}{\pi}, \text{ y } y(t) = 2t + y_0.$$

En la figura 2.6 se muestran las curvas integrales para X en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

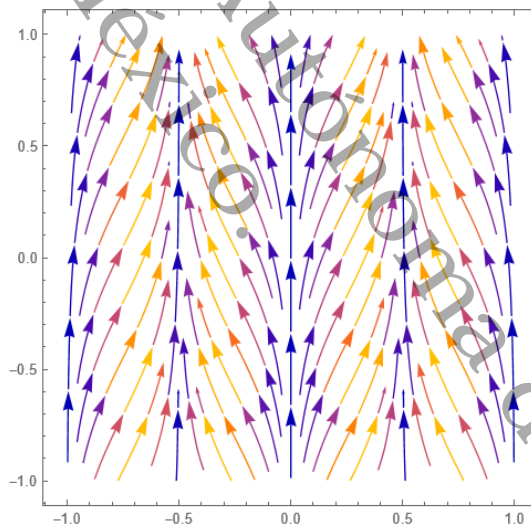


Figura 2.6: Curvas integrales para X en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Ahora bien, para Y la curva integral explícita $\phi_{(x_0, y_0)}(t) = (x(t), y(t))$ es:

$$x(t) = 2t + x_0, \text{ y}$$

$$y(t) = \frac{\sin(4\pi t) \sin(2\pi x_0) - \cos(4\pi t) \cos(2\pi x_0) + \cos(2\pi x_0) + 4\pi y_0}{4\pi}.$$

En la figura 2.7 se muestran las curvas integrales para Y en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

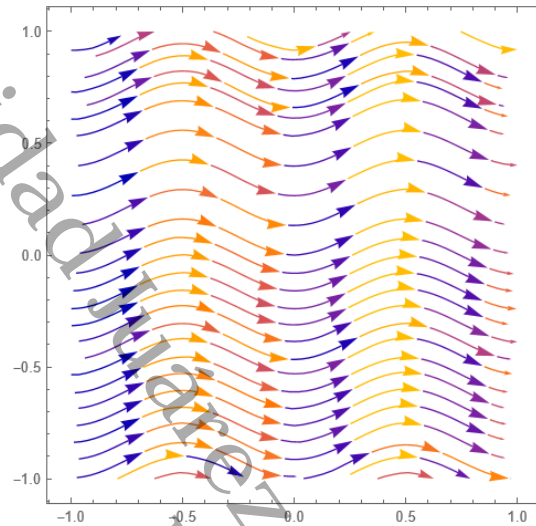


Figura 2.7: Curvas integrales para Y en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Para el campo vectorial Z , no tenemos una fórmula explícita para las curvas integrales, sin embargo, se pueden ver en la figura 2.8 los retratos de fase en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

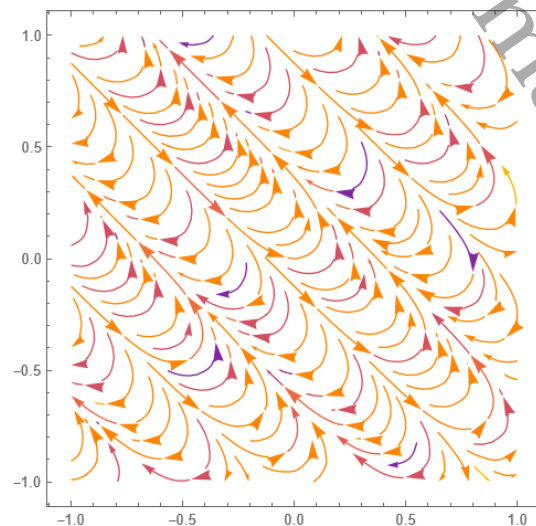


Figura 2.8: Curvas integrales para Z en $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

2.5. Trayectorias para campos $X_{a,b}$ constantes

En este apartado mostraremos, de forma detallada, el siguiente resultado para campos vectoriales no-singulares y constantes de clase C^r en \mathbb{T}^2 . Su demostración es interesante, para lo que seguiremos el texto en [Ta1992]. Otra demostración alternativa que complementa la aquí presentada, puede consultarse en [Pa-De M2012, Example 2, pág. 12].

Teorema 2.5.1. Sea $X = X_{a,b}$ un campo vectorial constante⁴ sobre \mathbb{T}^2 , tal que para cada $p \in \mathbb{T}^2$ el vector de coordenadas es

$$[X(p)] := a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p,$$

donde $a(x, y) = a, b(x, y) = b$ son constantes con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(a, b) \neq 0$. Entonces,

- i) Toda trayectoria de $X_{a,b}$ es periódica cuando $a = 0$ o $\frac{b}{a}$ es un número racional.
- ii) Toda trayectoria de $X_{a,b}$ es ergódica cuando $\frac{b}{a}$ es un número irracional.

Demostración. Comenzamos notando que, de acuerdo con la nota 1.2.7, en coordenadas locales, $Y := [X_{a,b}] = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $Y(x, y) = (a, b) = Y(x + k, y + l)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y cada $(k, l) \in \mathbb{R}^2$. Por la proposición 1.2.8 y proposición 1.2.9, se tiene que $X_{a,b}$ está bien definido en el toro.

Para demostrar este resultado, empecemos observando que el campo vectorial $X_{a,b}$ es no singular, ya que no contiene al vector cero.

Por otra parte, una curva integral en el toro tiene la siguiente forma:

$$\phi(t, (x, y)) = [(x(t), y(t))].$$

En este caso, se resuelve un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{x} = a, \quad x(0) = x_0 \tag{2.2}$$

$$\dot{y} = b, \quad y(0) = y_0 \tag{2.3}$$

Resolviendo las ecuación (2.2) por variable separable, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = a &\Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{dt} dt = \int a dt \\ &\Rightarrow x(t) - x(0) = at \\ &\Rightarrow x(t) - x_0 = at \\ &\Rightarrow x(t) = at + x_0. \end{aligned}$$

⁴Para evitar confusión con la notación, para este caso del campo constante, para el valor de X en p escribiremos $X_p := X(p) = X_{a,b}(p)$.

Análogamente, resolviendo la ecuación (2.3) por variable separable, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = b &\Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dy}{dt} dt = \int b dt \\ &\Rightarrow y(t) - y(0) = bt \\ &\Rightarrow y(t) - y_0 = bt \\ &\Rightarrow y(t) = bt + y_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra curva integral está dada por:

$$[\phi_{(x_0, y_0)}(t)] = [(at + x_0, bt + y_0)] = [t(a, b) + (x_0, y_0)] \in \mathbb{T}^2.$$

Demostremos el inciso i):

Sea $p \in \mathbb{T}^2$. Entonces, el punto p es de la forma $p = [(x + m, y + n)]$ para $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$, esto depende en que representante estemos.

En el caso de que $\phi(t, (x, y))$ sea periódica, por la definición 2.2.1 debe existir t, t_1 con $t_1 < t$ tal que

$$\phi(t, (x, y)) = \phi(t_1, (x, y)) + (m, n), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

es decir,

$$t(a, b) + (x, y) = t_1(a, b) + (x, y) + (m, n),$$

entonces

$$(t - t_1)(a, b) = (m, n),$$

así,

$$(t - t_1)a = m \quad \text{y} \quad (t - t_1)b = n,$$

haciendo el cociente, se tiene que

$$\frac{(t - t_1)b}{(t - t_1)a} = \frac{n}{m} \quad a \neq 0,$$

por lo que

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0.$$

En el caso de que $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ se debe cumplir que existan m, n enteros y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{b}{a} = \frac{n\lambda}{m\lambda} = \frac{n}{m}.$$

Notemos que $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{1}{\lambda}$ son tales que

$$\begin{aligned} \phi(t_1, (x, y)) &= \phi(0, (x, y)) \\ &= [(x + a(0), y + b(0))] = [(x, y)] = p. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \phi(t_2, (x, y)) &= \phi\left(\frac{1}{\lambda}, (x, y)\right) \\ &= \left[\left(x + a\left(\frac{1}{\lambda}\right), y + b\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \right] = [(x + m, y + n)] = p. \end{aligned}$$

Es decir, $t_1 < t_2$ y cumplen que

$$\phi(t_1, (x, y)) = \phi(t_2, (x, y)).$$

Por lo tanto, la trayectoria $\mathcal{C}(p) = \square\phi(t)$ es periódica.

A continuación, mostramos algunas simulaciones numéricas que se hicieron en \mathbb{R}^2 y luego vistas en el toro \mathbb{T}^2 .

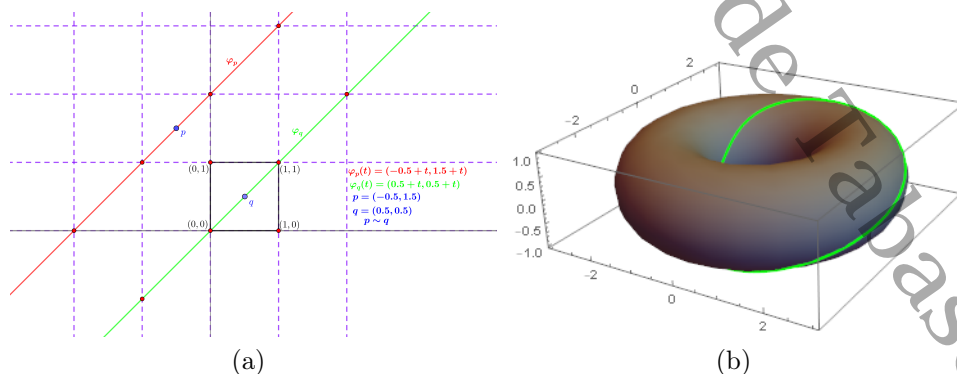
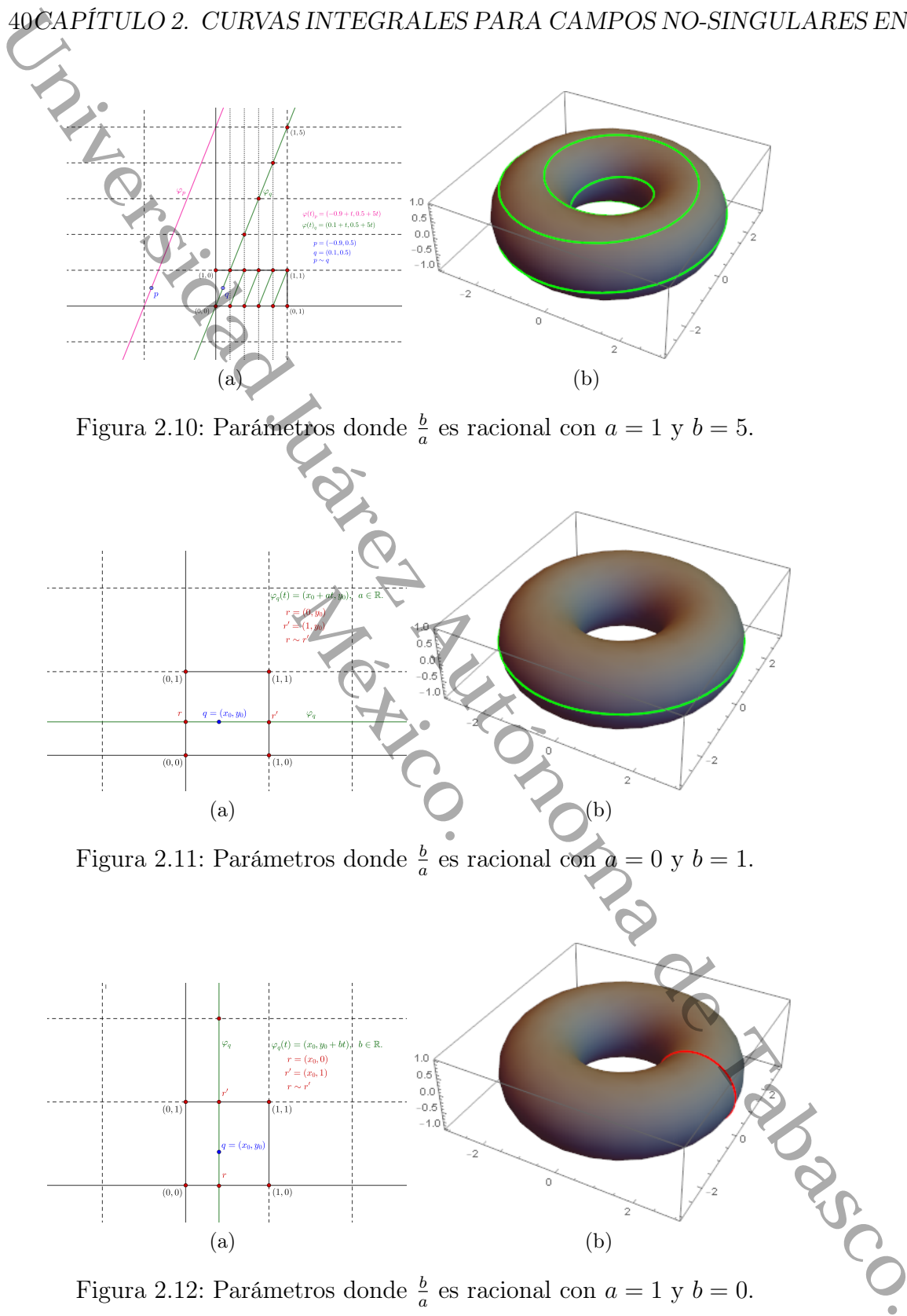


Figura 2.9: Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es racional con $a = 1$ y $b = 1$.



Ahora, demostremos el inciso ii): Supongamos que $\frac{b}{a}$ es irracional. Aquí ninguna trayectoria es periódica. Ya se demostró que si existe una trayectoria periódica entonces $\frac{b}{a}$ es racional, por lo que sería una contradicción de nuestro supuesto.

Por lo que basta con demostrar que $\overline{\mathcal{C}(p)} = \mathbb{T}^2$.

Siempre se tiene que

$$\mathcal{C}(p) \subset \mathbb{T}^2 \Rightarrow \overline{\mathcal{C}(p)} \subset \overline{\mathbb{T}^2} = \mathbb{T}^2.$$

Ahora, veamos que

$$\mathbb{T}^2 \subset \overline{\mathcal{C}(p)}$$

Sea $p' \in \mathbb{T}^2$, si $p' \in \mathcal{C}(p)$, entonces $p' \in \overline{\mathcal{C}(p)}$.

Ahora, supongamos entonces que $p' \notin \mathcal{C}(p)$. Veamos que p' es punto límite, es decir, $p' \in \overset{\circ}{\mathcal{C}(p)}$.

Sea $p' = [(x', y')] \in \mathbb{T}^2$. La curva integral $\phi(t, p)$ de $X_{a,b}$ que comienza en p pasa por $P_n = [(x', y' + (y - y') + \frac{b}{a}(x' - x) + \frac{b}{a}n)]$. Veamos que efectivamente la curva integral $\phi(t, p)$ pasa por P_n .

Se tiene que $x + at = x' + n \Rightarrow at = x' - x + n \Rightarrow t = \frac{x' - x + n}{a}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t, p) &= \left[x + a \left(\frac{x' - x + n}{a} \right), y + b \left(\frac{x' - x + n}{a} \right) \right] \\ &= \left[x' + n, y + \frac{b}{a}(x' - x + n) \right] \\ &= \left[x' + n, y' + (y - y') + \frac{b}{a}(x' - x) + \frac{b}{a}n \right]. \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideramos el conjunto

$$\omega(x) := \{x + m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

El conjunto $\omega(x)$ parametriza el conjunto $x + \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Se define $\langle x \rangle$ como el número del conjunto $\omega(x)$ con valor absoluto más pequeño, es decir,

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &:= \min\{|\beta| : \beta \in \omega(x)\} \\ &= \min\{x - [x], x - [x] - 1\}, \end{aligned}$$

ver Figura 2.13.

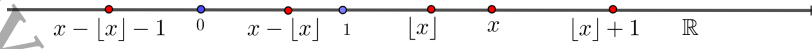


Figura 2.13: Función Piso.

Sea $P_n = [(x', y' + (y - y') + \frac{b}{a}(x' - x) + \frac{b}{a}n)] := [(x', y' + T_n)]$.

Afirmación 2.5.2 ([Ta1992, Miller2002, Sós1958]). $\langle T_n(x, y) \rangle$ posee una subsucesión convergente⁵ a 0.

Demostración. Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(p', P_n) &= \min_{\substack{Q \in [p'] = p' \\ Q' \in [P_n] = P_n}} \rho(Q, Q') \\ &= \min_{\substack{Q \in [(x', y') + (m_1, m_2)] \\ Q' \in [(x' + m_3, y' + T_n + m_4)] = P_n}} \rho(Q, Q') \\ &= \min_{m_1, m_3, m_2, m_4 \in \mathbb{Z}} \{|(m_1 - m_3, m_2 - m_4 + T_n)|\} \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}} \{|(0, T_n + k)|\} \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}} \{|T_n + k|\} \\ &= \langle T_n \rangle, \quad \forall n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Luego,

$$\tilde{\rho}(p', P_{n_k}) = \langle T_{n_k} \rangle \rightarrow 0 \text{ cuando } n_k \rightarrow \infty.$$

□

Como $X_n := \langle T_n(x, y) \rangle = T_n(x, y) + k$, para un $k \in \mathbb{Z}$ fijo, posee una subsucesión convergente a 0, digamos $X_{n_k} = T_{n_k} + k$.

Por lo cual, para cada $\epsilon > 0$ existe un punto $X_{n_{k_1}}$, el cual a su vez nos da la existencia del punto $P_{n_{k_1}} = [(x', y' + X_{n_{k_1}})] = [(x', y' + T_{n_{k_1}} + k_1)]$ tal que

$$\rho(p', P_{n_{k_1}}) < \epsilon.$$

Si consideramos ahora $\epsilon_2 < \epsilon$ existe $P_{n_{k_2}}$ tal que

$$\rho(p', P_{n_{k_2}}) < \epsilon_2 < \epsilon.$$

⁵En el plano T_n converge a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$.

Siguiendo con este proceso conseguimos una sucesión

$$P_{n_{k_1}}, P_{n_{k_2}}, P_{n_{k_3}}, P_{n_{k_4}}, \dots, P_{n_{k_l}}, \dots$$

tal que $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{n_{k_l}} = p'$. Por lo tanto, $p' \in \overline{\mathcal{C}(p)}$, de lo cual se tiene que $\mathbb{T}^2 = \overline{\mathcal{C}(p)}$.

A continuación, se muestra una simulación numérica donde vemos que la trayectoria se hace densa en el toro, para el caso donde $\frac{b}{a}$ es irracional.

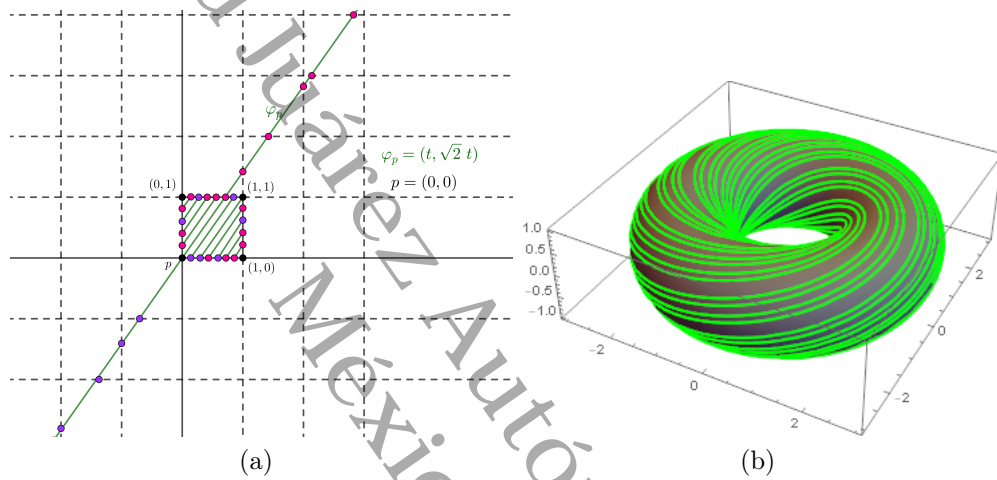


Figura 2.14: Parámetros donde $\frac{b}{a}$ es irracional con $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$

□

Nota 2.5.3. De lo anterior, se tiene que las trayectorias de $X_{a,b}$ tienen que ser o todas periódicas o bien, todas ergódicas, dependiendo de la pendiente de la curva integral, $\frac{b}{a}$, de acuerdo con el teorema 2.5.1. Sin embargo, este no es el caso para un campo vectorial no singular de clase C^r en \mathbb{T}^2 , lo que se verá de forma precisa en el siguiente capítulo, con la demostración del celebre teorema de Denjoy-Siegel.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Teoremas de Denjoy y de Siegel

En este capítulo se desarrollará la teoría básica que permite comprender el bien conocido teorema de Denjoy-Siegel, en honor a los trabajos en [Denjoy1932] de Denjoy, lo cual conlleva a asimilar cada una de las condiciones que garantizan la existencia de trayectorias periódicas o bien densas, asociadas al flujo de un campo vectorial no singular en el toro \mathbb{T}^2 ; y a la par pero independiente, también en honor a los trabajos en [Siegel1945] de Siegel. Denjoy resolvió un problema propuesto por Poincaré usando la noción de número de rotación y de fracciones continuas, mientras que Siegel dió otra prueba alternativa al teorema de Denjoy, sin usar el número de rotación, y generalizando el teorema de Denjoy.

Los resultados presentados en este capítulo están basados principalmente en el texto de I. Tamura [Ta1992]; se tienen también consideradas las referencias auxiliares [C-N2013, Lee2013, Pa-De M2012], mismas que se citarán puntualmente, de ser necesario, para complementar la presentación de cada uno de los apartados contenidos en este capítulo.

3.1. Difeomorfismos en \mathbb{S}^1 como “mapeos de Poincaré”

Necesitamos resaltar la relación entre la dinámica discreta de un difeomorfismo $f \in \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ y la dinámica continua asociada a el flujo de un campo vectorial no-singular definido en \mathbb{T}^2 .

3.1.1. Dinámica discreta en \mathbb{S}^1 : enfoque de Denjoy

En este apartado consideramos las ideas de Denjoy, que están discutidas en [Ta1992, págs. 17–20]. Dichas ideas serán discutidas a continuación.

Es pertinente comenzar con la siguiente observación, que será de utilidad para comprender parte de la demostración del teorema de Denjoy-Siegel.

Nota 3.1.1. De acuerdo con la estructura de \mathbb{T}^2 como espacio cociente (ver apéndice A.2) vamos a usar “un modelo” que está en la figura 3.1.

En efecto, sean S_0^1 y S_1^1 , dos copias de \mathbb{S}^1 , vía un difeomorfismo canónico h y su inverso h^{-1} :

$$h : \mathbb{S}^1 \simeq S_0^1 \text{ y } h^{-1} : S_1^1 \simeq \mathbb{S}^1. \quad (3.1)$$

Es decir, consideramos que $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 / \sim$ es obtenido al identificar (a priori, con un homeomorfismo \mathfrak{F} , cf. apéndice A.2) las copias S_0^1 y S_1^1 (es decir, $\mathfrak{F} : S_0^1 \sim S_1^1$), de tal forma que se tiene el diagrama conmutativo:

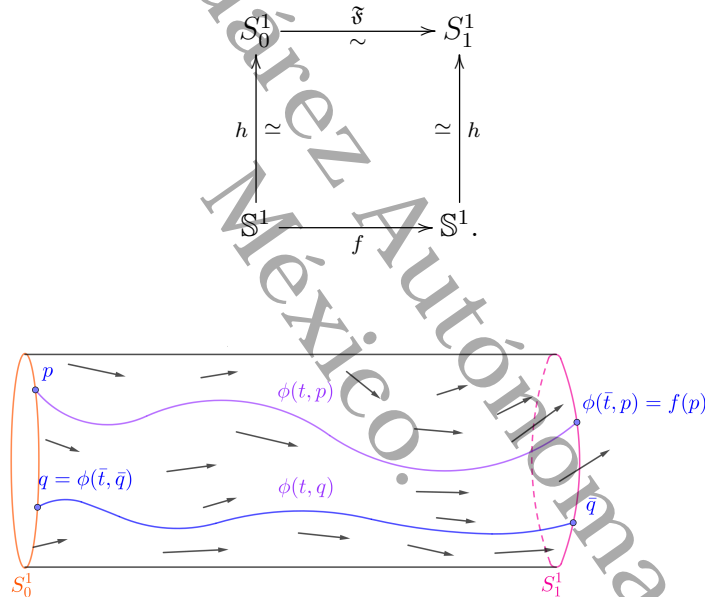


Figura 3.1: Modelo de \mathbb{T}^2 .

3.1.2. Difeomorfismos en \mathbb{S}^1 que preservan orientación

Sea $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un mapeo que manda \mathbb{S}^1 sobre sí mismo. Por lo tanto, por definición, y conveniencia, usaremos la descripción en \mathbb{C} de \mathbb{S}^1 y con ello se dará una caracterización de algunas propiedades que se le pueden pedir a g , como ser difeomorfismo, entre otras.

En efecto, consideramos

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, de forma alternativa, caracterizamos los valores que toma g de la siguiente manera:

$$g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad z = e^{2\pi i\theta} \mapsto g(z) = w.$$

Para w existe $\bar{\theta} \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = w = e^{2\pi i\bar{\theta}}$. Notar que

$$e^{2\pi i\bar{\theta}} = e^{2\pi i(\bar{\theta}+k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

es decir, $\bar{\theta}$ es único “salvo sumarle enteros”.

Definición 3.1.2. Definimos $\bar{g}(\theta) = \bar{\theta}$ de tal forma que $g(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\bar{\theta}}$.

Lema 3.1.3 (Continuidad de la función angular \bar{g}). La función $\theta \mapsto \bar{g}(\theta) = \bar{\theta}$ es continua.

Demostración. Notemos que el mapeo exponencial

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$$

es un cubriente suave ([Lee2013]). Por lo tanto, localmente se tiene que usando coordenadas locales (por ejemplo, usamos coordenada angular en \mathbb{S}^1 , ver [Lee2013, pág. 29]) arcos pequeños en \mathbb{S}^1 se corresponden con segmentos pequeños en \mathbb{R} , de hecho:

$$|\theta - \eta| \sim |\exp(\theta) - \exp(\eta)|.$$

Por lo tanto, de la definición 3.1.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} |\bar{g}(\theta) - \bar{g}(\eta)| &\sim |\exp(\bar{g}(\theta)) - \exp(\bar{g}(\eta))| \\ &= |\exp(\bar{\theta}) - \exp(\bar{\eta})|. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que g es continua en $z = e^{2\pi i\theta}$. Por lo tanto, $g \circ \exp$ es continua en θ . Luego, por definición, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g \circ \exp(\theta) - g \circ \exp(\eta)| < \epsilon, \quad \text{siempre que } |\theta - \eta| < \delta.$$

En consecuencia, nuevamente de la definición 3.1.2,

$$\begin{aligned} |\bar{g}(\theta) - \bar{g}(\eta)| &\sim |\exp(\bar{\theta}) - \exp(\bar{\eta})| \\ &= |g \circ \exp(\theta) - g \circ \exp(\eta)| < \epsilon, \quad \text{siempre que } |\theta - \eta| < \delta. \end{aligned}$$

Aquí, la condición $|\theta - \eta| < \delta$ determina a $\bar{g}(\eta)$ de forma única. De esto, se sigue que \bar{g} es una función continua. \square

Usando la definición 3.1.2 y el lema 3.1.3 se tienen las siguientes definiciones-resultados¹.

En la notación previamente introducida tenemos:

Definición 3.1.4.

Decimos que $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es:

- i) Diferenciable de clase C^r en el punto $\exp(\theta)$, si el mapeo \bar{g} es C^r diferenciable en el punto θ .
- ii) Diferenciable de clase C^r , si el mapeo \bar{g} es C^r diferenciable en cada punto θ .

Definición 3.1.5.

Decimos que $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$:

- ii) Preserva orientación si para cada punto $\exp(\theta) \in \mathbb{S}^1$, se tiene que

$$\bar{g}(\theta) < \bar{g}(\eta), \text{ siempre que } \theta < \eta < \theta + \delta,$$

donde δ es elegido de la continuidad de \bar{g} en θ , de acuerdo con la demostración del lema 3.1.3.

- iii) Es un difeomorfismo clase C^r de \mathbb{S}^1 , si g es diferenciable de clase C^r , biyectivo, y la inversa² $g^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es diferenciable de clase C^r . El conjunto de estos difeomorfismos lo denotaremos por $\text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$.

A continuacion, definiremos dos conceptos relevantes en este trabajo de tesis: puntos periódicos y ergódicos para $g \in \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$.

Veamos algo de notación. Dado $g \in \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ y $p \in \mathbb{S}^1$, definimos la iteración $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de g y g^{-1} como las composición de funciones:

$$g^0 = Id_{|\mathbb{S}^1}$$

$$g^m := g \circ g \cdots \circ g \text{ y } g^{-m} := g^{-1} \circ g^{-1} \cdots \circ g^{-1}$$

para $m > 0$.

Definición 3.1.6. Sea $g \in \text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$. Un punto $p \in \mathbb{S}^1$ es:

¹Estos resultados son adaptados para mapeos en \mathbb{S}^1 , y son consistentes con la teoría de variedades suaves orientables, y difeomorfismos que preservan orientación, ver [Lee2013], [Bu-Gi2005] y [Pa-De M2012].

²Notar que g^{-1} tiene una descripción análoga a la realizada en el lema 3.1.3 para g .

- a) Periódico relativo a g si existe un entero positivo n tal que $g^n(p) = p$.
- b) Periódico ergódico relativo a g si su órbita

$$\mathcal{O}(p) := \{g^m(p) : m \in \mathbb{Z}\}$$

es densa en \mathbb{S}^1 , es decir, $\overline{\mathcal{O}(p)} = \mathbb{S}^1$.

De acuerdo con los resultados y notación anteriores, podemos enunciar el siguiente resultado de Denjoy, ver [Ta1992, Thm 1.7] y cf. [Denjoy1932]. Para una demostración atribuida a Siegel, se puede consultar en [Ta1992, pág. 20].

Teorema 3.1.7 (de Denjoy discreto). *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un difeomorfismo que preserva la orientación de clase C^r , $r \geq 2$. Entonces ocurre exactamente una de las siguientes propiedades:*

1. f tiene puntos periódicos.
2. Todo punto de \mathbb{S}^1 es ergódico con respecto a f .

Nota 3.1.8. El teorema 3.1.7 será usado más adelante para demostrar el teorema de Denjoy-Siegel.

3.1.3. Dinámica continua en \mathbb{S}^1 : enfoque de Denjoy

Sea $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$ un campo vectorial no-singular. Para cada $p \in \mathbb{T}^2$, en coordenadas locales (U_p, φ_p) alrededor de p , las componentes de X en p son: $[X_p] = (\xi, \mu)$, es decir, $\xi, \mu \in C^r(U_p)$. La componente ξ toma valores positivos o negativos en todo³ U_p (i.e., $\xi(q) \geq 0$, para cada $q \in U_p$; o bien, $\xi(q) < 0$, para cada $q \in U_p$).

Sin perder generalidad, supongamos que ξ es positiva en todo U_p .

De los supuestos anteriores el siguiente hecho se cumple.

Nota 3.1.9. Sea $p \in S_0^1$. Se tiene que la curva integral $\gamma(t) := \phi(t, p)$ de X en p , es tal que en coordenadas locales la representación coordenada $\hat{\gamma}(t)$ satisface: $\hat{\gamma}(t) = \xi(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) > 0$, ya que el campo X es no-singular, y por lo tanto, X_p es transverso a S_0^1 , que al ser una copia identificada en \mathbb{T}^2 de S_1^1 , se sigue que en una vecindad $(-\epsilon_p, \epsilon_p) \subset \mathbb{R}$ se satisface que $\gamma(t) = \phi(t, p)$ llega a S_1^1 conforme t se incrementa empezando en 0. Al no cambiar en signo de $\hat{\gamma} > 0$, se tiene que el punto de llegada no necesariamente es el mismo que p , si no un $p_1 := \phi(t_1, p) \in S_0^1$, donde $t_1 := \min\{\bar{t} : \phi(\bar{t}, p) \in S_0^1\}$. En estos términos, al variar el punto p , definimos (ver la Figura 3.1):

$$f : S_0^1 \rightarrow S_1^1, \quad f(p) = \phi(t_1, p). \quad (3.2)$$

³Se sigue de la continuidad de las componentes de X_p , en p , ya que X es no-singular.

El siguiente resultado se demuestra esencialmente, con la misma idea que se siguió en la demostración del teorema 3.3.1, por esta razón omitimos aquí los detalles, que se presentarán más tarde en la sección 3.4.

Lema 3.1.10. El mapeo $f : S_0^1 \rightarrow S_1^1$, $f(p) = \phi(t_1, p)$, dado en (3.2) es un difeomorfismo que preserva orientación.

Ahora bien, del teorema 3.1.7 y lema 3.1.10, se tiene el siguiente resultado que es considerado un caso particular del teorema de Denjoy-Siegel 3.3.1 que mostraremos enseguida en las secciones subsecuentes y que es la parte fundamental de este capítulo.

Corolario 3.1.11 (Teorema de Denjoy continuo). *Sea X un campo vectorial no singular de clase C^r en el toro \mathbb{T}^2 con componente (en coordenadas) ξ nunca nula. Si $r \geq 2$, entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

- a) X tiene trayectorias periódicas.
- b) Cada trayectoria de X es densa⁴ en el toro \mathbb{T}^2 .

Nota 3.1.12. De acuerdo con la construcción del difeomorfismo dado en el lema 3.1.10, se puede observar que éste no es precisamente un mapeo de Poincaré (o de primer retorno para el flujo de X), asociado con S^1 , o mejor dicho, de acuerdo con la nota 3.1.1, con $S_0^1 = S_1^1$, puesto que S_0^1 no es órbita periódica del campo vectorial X . Sin embargo, por la técnica y analogía, usadas, así les llamamos en la sección: “difeomorfismos como mapeos de tipo Poincaré”.

3.2. Campo vectorial no-singular de Denjoy

En esta sección se enunciarán dos resultados: El primero, es propio de la teoría de dinámica discreta, pues trata sobre la existencia de un difeomorfismo f_D en el círculo, el cual no posee puntos periódicos ni puntos ergódicos. El segundo resultado, usa precisamente f_D para construir un campo vectorial no-singular X_D que no posee órbitas periódicas ni órbitas densas en \mathbb{T}^2 . Aquí se hace uso de técnicas como las discutidas en la sección 3.1.

Se dará un bosquejo de la demostración de los siguientes resultados de Denjoy, para lo cual nos basamos en [Ta1992].

Comenzamos con el siguiente lema de Denjoy con el cual se garantiza la existencia de difeomorfismos en S^1 que preservan orientación, ver [Ta1992, Thm 1.11].

⁴O bien, se dice que se tiene una trayectoria ergódica.

Lema 3.2.1. Existe un difeomorfismo clase C^1 que preserva orientación $f_D: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, el cual no tiene órbitas periódicas ni órbitas ergódicas.

Demostración. Consideremos un colección contable $\{I_m : m \in \mathbb{Z}\}$ de intervalos cerrados de la forma $I_m := [0, l_m] \subset [0, 1]$, donde $l_m = \frac{1}{(1+m^2)} < 1$, tal que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} l_m = l < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{l_m}{l_{m+1}} \right) = 1. \quad (3.3)$$

Por otra parte, consideramos α un número racional. Definimos para cada $m \in \mathbb{Z}$ un número racional

$$\alpha_m := m\alpha - \kappa_m, \quad \kappa_m \in \mathbb{Z},$$

donde los enteros κ_m se eligen tales que $\alpha_m \in [0, 1)$, para cada m , ver figura 3.2. De esta propiedad y la dada en (3.3), se tiene que se puede construir un intervalo J_{1+l} de longitud $1+l$, donde $l_m = \frac{1}{1+m^2}$, es tal que⁵:

$$l_0 = 1; \quad 0 < l_m < 1, \forall m.$$



Figura 3.2: Distribución de los números $\alpha_m \in [0, 1)$.

De hecho, $\alpha_0 = 0$. Por lo tanto, J_{1+l} se construye de la siguiente manera:

- i) se “corta el intervalo” $[0, 1)$ en α_m , para tener dos copias de α_m (“una derecha y otra izquierda”);
- ii) después se inserta I_m de tal manera que los extremos de I_m se conviertan (salvo un pegado o identificación) a dos copias de α_m , ver figura 3.3.

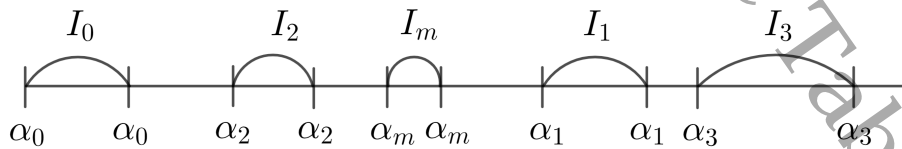


Figura 3.3: Intervalo J_{1+l} : Inserción de los intervalos I_m en los números $\alpha_m \in [0, 1)$.

⁵Aquí, el intervalo J_{1+l} será útil para usar las gráficas de los f_m en la definición del mapeo de Denjoy, como se muestra en la ecuación (3.4).

Del proceso anterior, se obtiene lo siguiente.

Afirmación: Del intervalo J_{1+l} consideramos el espacio cociente, J_{1+l}/\sim , que se obtiene al pegar sus extremos: $0 \sim 1$. De esta forma se obtiene un círculo $S_1 \simeq J_{1+l}/\sim$ con perímetro $1+l$. Más aún, la familia de intervalos cerrados $\{I_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ particiona a S_1 en unión disjunta, es decir,

$$I_m \subset S_1, m \in \mathbb{Z}; S_1 \simeq [0, 1] \sqcup \left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m \right).$$

Ahora bien, para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe un mapeo

$$f_m : I_m \longrightarrow I_{m+1}$$

de clase C^1 (ver definición 3.1.4), cuya gráfica se puede ver en la figura 3.4. De forma precisa, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f_m : I_m \longrightarrow I_{m+1}$ cumple las siguientes propiedades:

- i) La derivada $\frac{df_m}{dt}$ es positiva.
- ii) Existe $\delta_m > 0$ tal que $\frac{df_m(t)}{dt}$ toma el valor de 1 en los intervalos $[0, \delta_m)$ y $(l_m - \delta_m, l_m]$.
- iii) Se cumple que

$$\min \left\{ 1, \frac{l_{m+1}}{l_m} \right\} - \left(1 - \frac{l_{m+1}}{l_m} \right)^2 \leq \frac{df_m}{dt} \leq \max \left\{ 1, \frac{l_{m+1}}{l_m} \right\} + \left(1 - \frac{l_{m+1}}{l_m} \right)^2.$$

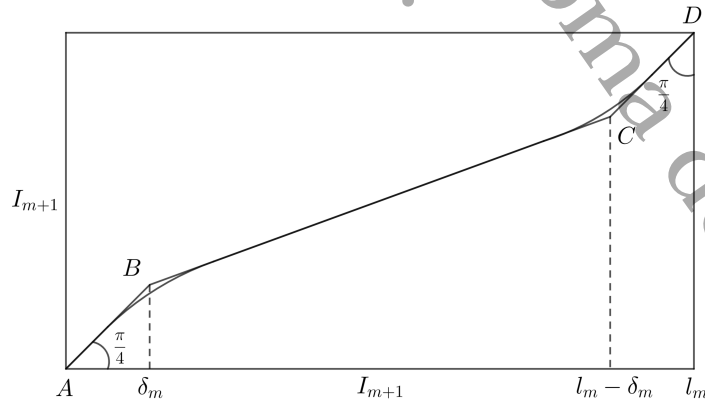


Figura 3.4: Gráfica de los mapeos f_m .

Es importante observar que, de acuerdo con la figura 3.4, δ_m es suficientemente pequeño de tal forma que la gráfica de cada f_m es una curva suave

en los puntos B y C , respectivamente.

Finalmente, se puede definir el mapeo (de Denjoy): Usando la notación de coordenada angular

$$\Theta_D(\theta) = \begin{cases} f_m(\theta) \in I_{m+1}, & \theta \in I_m \subset J_{1+l}; \\ \theta + \alpha - (\text{entero}) \in [0, 1] \subset S_1, & \theta \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notamos que en esta definición de Θ_D , se usaron las gráficas de las funciones f_m inducidas en los conjuntos I_m , vistos en el espacio cociente S_1 .

Observar que Θ_D es un mapeo definido en S_1 . Por lo tanto, el mapeo de Denjoy en notación compleja (como en sección 3.1.2) es⁶:

$$S_1 \ni p = \exp(\theta) \mapsto f_D(p) = \exp \circ \Theta_D(\theta) \in S_1. \quad (3.5)$$

Por construcción, se tiene que f_D es un difeomorfismo clase C^1 que preserva orientación. Esto completa la demostración. □

Teorema 3.2.2. *Existe un campo vectorial no-singular $X := X_D$ definido y de clase C^1 en \mathbb{T}^2 , para el cual no existen órbitas periódicas ni ergódicas.*

Demostración. Pasos para la demostración de este teorema.

Paso 1: Recordemos que a partir de $S^1 \times I$ podemos obtener el espacio cociente $S^1 \times I / \sim$, pegando $S^1 \times \{0\}$ con $S^1 \times \{1\}$ punto a punto, ver figuras 3.5, 3.6.

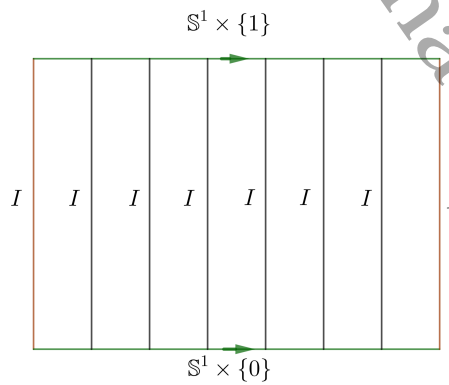


Figura 3.5: Construcción usual de \mathbb{T}^2 como cuadrado en el plano módulo la retícula de enteros.

⁶De hecho, vía una conjugación, se puede definir el mapeo de Denjoy en S^1 .

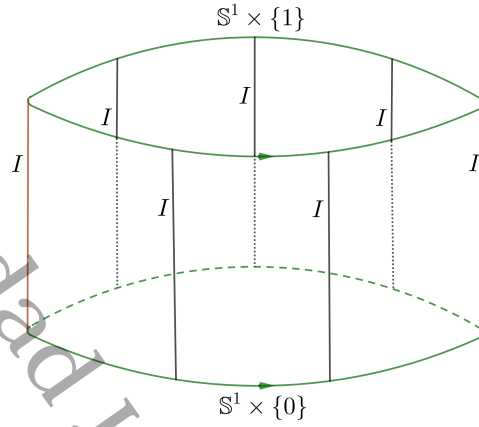


Figura 3.6: Construcción usual de \mathbb{T}^2 como superficie: $\mathbb{S}^1 \times I / \{\mathbb{S}^1 \times 0 \sim \mathbb{S}^1 \times 1\}$.

Paso 2: Sea $s \in [0, 1)$. Definimos las curvas suaves

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_s : I &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I \\ t &\longmapsto \bar{\gamma}_s(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\bar{\gamma}_s(t) = (e^{2\pi\theta(s,t)i}, t)$, con $\theta(s, t) := (s + \Phi(t - 2)(\bar{f}_D(s) - s))$.

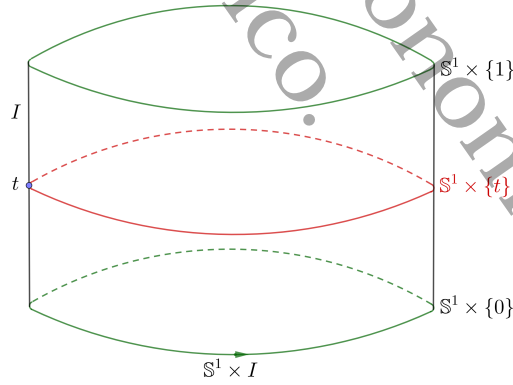


Figura 3.7: El parámetro t como punto en el dominio de las curvas $\bar{\gamma}_s$.

Tenemos un mapeo $H : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I$, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \bar{\gamma}_s(t) \\ &:= (q_D^{s,t}, t) \\ &:= (e^{2\pi\theta(s,t)i}, t) \in \mathbb{S}^1 \times I, \end{aligned}$$

donde el parámetro s determina la curva γ_s y el parámetro t los puntos en el dominio de cada curva. Notar que este mapeo es C^∞ , y puede ser considerado como un análogo a la noción de homotopía en topología algebraica, ver figura 3.9. Asimismo, en notación compleja (como en la sección 3.1.2) por construcción se tiene que:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \bar{\gamma}_s(0) = (\exp(s), 0); \\ H(s, 1) &= \bar{\gamma}_s(1) = (\exp(\bar{f}_D(s)), 1). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \text{Im} \bar{\gamma}_s \cap \text{Im} \bar{\gamma}_{s'} \\ &= \{H(s, t) : t \in [0, 1]\} \cap \{H(s', t) : t \in [0, 1]\}, \text{ si } s \neq s' \text{ (ver figura 3.8)}. \end{aligned}$$

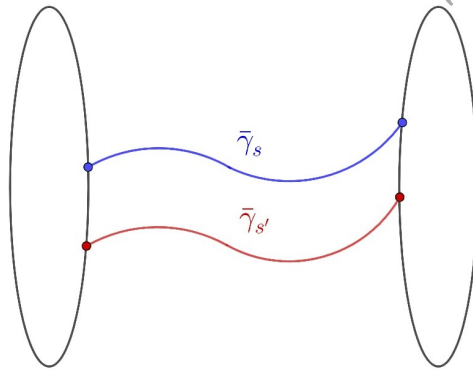


Figura 3.8: Familia de curvas suaves disjuntas $\{\bar{\gamma}_s\}_{s \in [0,1]} \subset \mathbb{T}^2$.

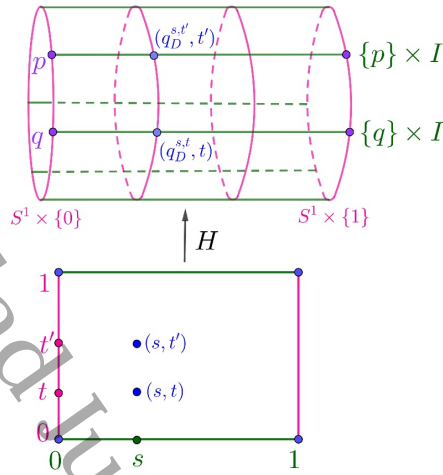


Figura 3.9: Familia de curvas suaves $\{\tilde{\gamma}_s\}_{s \in [0,1]} \subset \mathbb{T}^2$.

Ahora bien, consideramos el difeomorfismo que preserva orientación $f_D : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ determinado por (3.4) y (3.5) en la demostración del lema 3.2.1. En notación hacemos $\tilde{f}_D(\eta) := \Theta_D(\eta)$, (ver (3.4)) y por tanto,

$$f_D(e^{2\pi i \eta}) = e^{2\pi i \tilde{f}_D(\eta)} \tag{3.7}$$

El mapeo H , en sí, a través del difeomorfismo f_D , nos da un método para conectar, mediante curvas suaves, puntos $Q = e^{2\pi i \eta} \in \mathbb{S}^1$ con puntos $P = e^{2\pi i \tilde{f}_D(\eta)} \in \mathbb{S}^1$, como se muestra en las figuras 3.10 y 3.11.

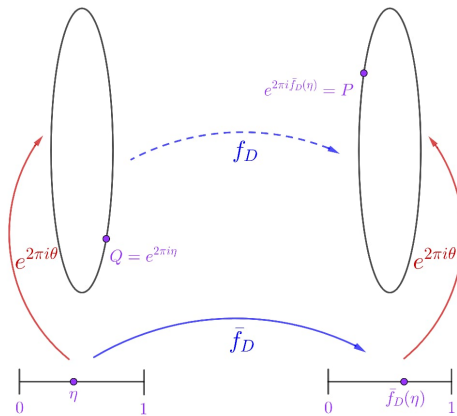


Figura 3.10: Mapeos de Denjoy f_D y \tilde{f}_D .

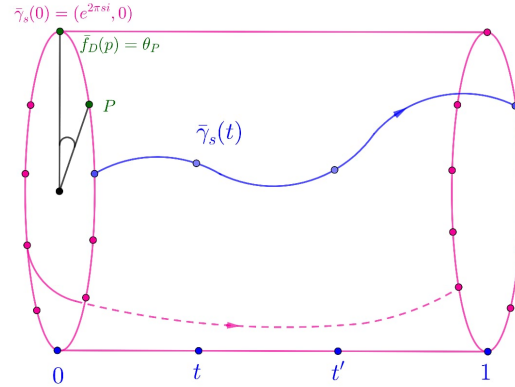


Figura 3.11: Conectando los puntos $\bar{\gamma}_s(0)$ con $\bar{\gamma}_s(1)$ en \mathbb{S}^1 .

Paso 3: Usando (3.7) se pueden elegir números s_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, tales que $s_k \in [0, 1)$ y para cada $s \in [0, 1]$, se cumple que:

$$f_D^k(e^{2\pi is}) = e^{2\pi is_k}.$$

Por lo tanto, en notación de números complejos de la sección 3.1.2, sea

$$s_0 = s, \quad Q_k := e^{2\pi is_k} = \exp(s_k).$$

Entonces, en términos de sucesión, se tiene que:

$$\begin{aligned} \exp(s) &=: Q_0 \mapsto Q_1 = f_D(Q_0) \mapsto \\ &Q_2 = f_D(Q_1) \mapsto Q_3 = f_D(Q_2) \mapsto \\ &Q_4 = f_D(Q_3) \mapsto Q_5 = f_D(Q_4) \mapsto \\ &Q_6 = f_D(Q_5) \mapsto Q_7 = f_D(Q_6) \mapsto \dots \end{aligned}$$

Para cada k se tiene una curva $\bar{\gamma}_{s_k}$, que conecta los puntos conforme se va moviendo el parámetro t de acuerdo con (3.7), ver figuras 3.10 y 3.12. En efecto, se puede describir la elección de los s_k de la siguiente manera:

- Para k vía el mapeo f_D , se conectan el punto $Q_k := \exp(s_k) \in S_0^1$ con $Q_{k+1} := \exp(s_{k+1}) \in S_0^1$ con la curva $\bar{\gamma}_{s_k}$.

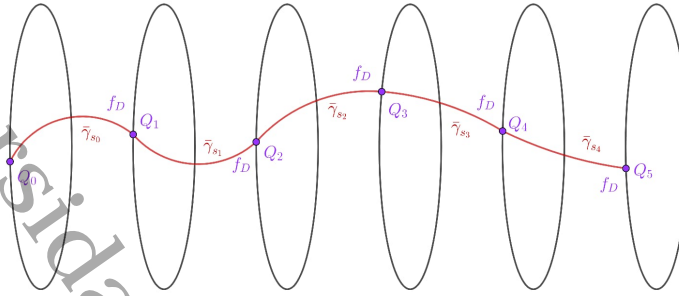


Figura 3.12: Copias de S^1 para ilustrar la conexión de puntos Q_k con la familia de curvas suaves $\{\tilde{\gamma}_{s_k}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbb{T}^2$.

Paso 4: Existe una curva suave (de clase C^∞)

$$\gamma_s : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{T}^2.$$

Por otra parte, se pueden considerar sus push-forwards, esto es,

$$X_t := (\gamma_s)_{*,t} = \frac{d}{dt}(\gamma_s)|_t : T_t\mathbb{R} \longrightarrow T_{\gamma_s(t)}\mathbb{T}^2.$$

Luego, haciendo $p = \gamma_s(t)$, se define el campo vectorial (de Denjoy)

$$\begin{aligned} X_D : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow T\mathbb{T}^2 \\ p &\mapsto X_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_p := (\gamma_s)_{*,t} \frac{d}{dt}|_t$. Esto es, en coordenadas, $[X] = [(\gamma_s)_{*,t}]$ es el vector tangente a la curva γ_s en el punto $\gamma_s(t)$.

Ahora bien, por el lema 3.2.1, f_D es de clase C^1 , lo que implica, por construcción, que X_D es también clase C^1 (ya que las curvas $\tilde{\gamma}_s$ son clase C^1 , pues f_D lo es, ver (3.6) y (3.5)). Luego, del lema 3.2.1 se sigue que al ser γ_s curva integral de X_D (pues así se construyó X_D) se tiene que al no tener f_D ni órbitas periódicas ni órbitas densas, se sigue que X_D no tiene ni órbitas periódicas ni órbitas ergódicas. Esto completa la demostración. \square

3.3. Formulación del teorema de Denjoy-Siegel

El resultado principal para analizar en el presente trabajo y que ocupa la mayor parte de nuestra atención es el siguiente, el cual es una evolución

de los trabajos pioneros arriba mencionados de Denjoy⁷ y posteriormente de Siegel⁸, ver [Ta1992, Pág. 17, Thm. 1.6].

Teorema 3.3.1 (de Denjoy-Siegel). *Sea X un campo vectorial no singular de clase C^r en el toro \mathbb{T}^2 . Si $r \geq 2$, entonces se tiene una de las siguientes afirmaciones:*

- a) X posee algunas trayectorias periódicas.
- b) Cada trayectoria de X es densa⁹ en el toro \mathbb{T}^2 .

Ejemplo 3.3.2 (Ejemplo genérico inmediato del teorema 3.3.1). Es importante mencionar que en el estudio de campos vectoriales constantes realizado de manera exhaustiva en el apartado 2.5 y más específicamente, en el teorema 2.5.1, ya se tiene un ejemplo del teorema 3.3.1. En efecto, dado $X_{a,b} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$ constante, entonces:

1. Si $a = 0$ o bien $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, entonces todas las curvas integrales son periódicas, y por lo tanto, para $X_{a,b}$ se cumple el teorema 3.3.1 a).
2. Si $\frac{b}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces todas las curvas integrales son ergódicas, y por lo tanto, para $X_{a,b}$ se cumple el teorema 3.3.1 b).

Ejemplo 3.3.3 (Ideas de cómo usar el teorema de Denjoy-Siegel). Si consideramos los campos vectoriales, dados en el ejemplo 2.4.4 y la sección 2.4.1, se tienen campos vectoriales no-singulares. Para el primer ejemplo de campos gradiente, basta pedir que la función \mathbf{h} no tenga puntos críticos. En los otros casos ya tenemos campos no-singulares. Entonces, a “priori” por el teorema 3.3.1 se tiene que dichos campos poseen órbitas periódicas o todas sus trayectorias son ergódicas. Pueden ser un punto de inicio, para obtener resultados paralelos a los del campo constante, lo que complementaría este trabajo de tesis. Por lo tanto, en este trabajo, ya no se consideró mostrar en qué caso se está de las dos posibilidades del teorema de Denjoy-Siegel, sin embargo, se considerará para un trabajo futuro.

⁷En su trabajo, Denjoy consideró campos vectoriales de clase C^r , a diferencia de los trabajos de Poincaré, en los que trabajaba un enfoque con campos vectoriales analítico reales u holomorfos, ver [Sternberg1957] y cf. [Denjoy1932].

⁸Él mejora el trabajo de Denjoy, generalizando su principal teorema, lo que termina en el resultado de nuestro interés que está descrito en notación contemporánea, ver [Ta1992, Pág. 17, Thm. 1.6] y cf. [Siegel1945].

⁹O bien, se dice que se tiene una trayectoria ergódica.

3.4. Enfoque de Siegel: transversalidad de curvas

En este apartado, se presentarán varios resultados que posteriormente ayudan a dar una demostración del teorema 3.3.1, usando el enfoque de Siegel. En los siguientes resultados se establece una relación entre curvas cerradas no singulares especiales que son transversas a las curvas integrales de un campo vectorial no singular, propiedad que será clave en la demostración antes mencionada.

Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$, $r \geq 1$ un campo vectorial no-singular. Sea también γ una curva cerrada simple de clase C^s en \mathbb{T}^2 definida sobre el intervalo cerrado $[0, \alpha]$. Decimos que γ (o bien su imagen $\text{Im}\gamma$) es una *curva cerrada simple transversa a X* si: dado $t_0 \in [0, \alpha]$, entonces los vectores tangentes

$$w_{\gamma(t_0)} := \gamma'(t_0) := \gamma_{*,t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in \text{Im}\gamma_{*,t_0} \subset T_{\gamma(t_0)}\mathbb{T}^2;$$

$$X_{\gamma(t_0)} \in T_{\gamma(t_0)}\mathbb{T}^2,$$

son linealmente independientes, es decir, no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ no cero tal que

$$\gamma'(t_0) = \lambda X_{\gamma(t_0)}.$$

En otras palabras, los dos vectores tangentes forman una base para el espacio tangente: $T_{\gamma(t)}\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}\langle w_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)} \rangle$. Una definición análoga se obtiene para curvas no cerradas ni simples, la condición impuesta a los vectores tangentes es exactamente la misma. Por definición, dos campos vectoriales son transversos si sus curvas integrales son transversas al campo correspondiente, es decir, si las curvas integrales de uno son transversas a las del otro, y viceversa.

Lema 3.4.2. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$, $r \geq 1$. Entonces existe una curva cerrada simple $L(X)$ de clase C^{r+1} transversa a X .*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$, $r \geq 1$ un campo vectorial no-singular. Dado $p \in \mathbb{T}^2$, elegimos coordenadas locales (U_p, φ_p) alrededor de p , cuyas componentes de X en p son: $[X_p] = (\lambda_p, \mu_p)$, es decir, $\lambda_p, \mu_p \in C^r(U_p)$. Denotaremos $v_p := X_p$.

Por lo tanto, usando coordenadas locales, definimos un campo vectorial $\bar{X} \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{T}^2)$:

$$\bar{X}_p: p \mapsto \bar{v}_p = [\bar{X}_p] := (-\mu_p, \lambda_p),$$

donde $(-\mu_p, \lambda_p)$ son clase C^r . Denotamos $\bar{v}_p := \bar{X}_p$.

Nota 3.4.3. Notamos que v_p y \bar{v}_p son ortogonales: $\langle \bar{v}_p, v_p \rangle = (-\mu_p)\lambda_p + \lambda_p \cdot \mu_p = 0$. Entonces

$$\bar{X} = \{\bar{v}_p : p \in \mathbb{T}^2\}$$

es un campo vectorial no singular de clase C^r en \mathbb{T}^2 , ver figura 3.13, cuyas curvas integrales $\phi(t, p)$ y $\bar{\phi}(t, p)$ son transversas por la ortogonalidad de sus vectores tangentes.

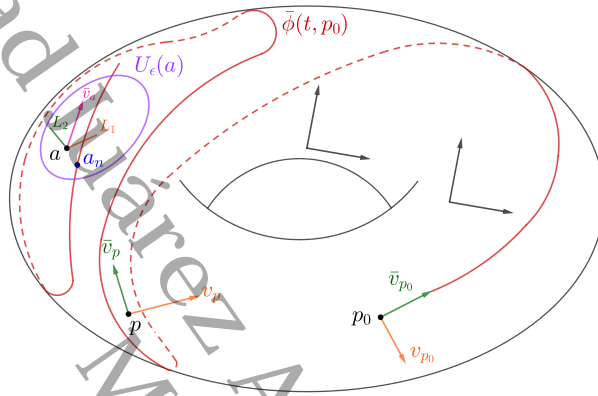


Figura 3.13: Objetos relevantes para la prueba: Campo X transverso al campo $\bar{X} : v_p \perp \bar{v}_p$; curva integral $\bar{\phi}(t, p_0)$ de \bar{X} ; vecindad $U_\epsilon(a)$; sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$; conjuntos L_1 y L_2 .

Ahora bien, fijemos un punto $p_0 \in \mathbb{T}$ y consideremos la curva integral $\phi(t, p_0)$ de X a través de p_0 .

Caso 1: Si $\bar{\phi}(t, p_0)$ es periódica, en particular, es una curva cerrada simple que es transversa a X , de acuerdo con la nota 3.4.3 y la definición 3.4.1. En este caso $L(X)$ es $\bar{\phi}(t, p_0)$, y por lo tanto, se tiene la demostración del resultado deseado.

Caso 2: si $\bar{\phi}(t, p_0)$ no es periódica, podemos construir la curva cerrada simple $L(X)$ usando un segmento de $\bar{\phi}(t, p_0)$ como se muestra a continuación.

Como $\bar{\phi}(t, p_0)$ no es periódica, el conjunto

$$C = \{\bar{\phi}(n, p_0) : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{T}^2,$$

está formado por infinitos puntos de \mathbb{T}^2 que pertenecen a la curva integral $\bar{\phi}(t, p_0)$ del campo vectorial no-singular \bar{X} , en el punto $p \in \mathbb{T}^2$.

Por lo tanto, existe al menos un punto de acumulación, a de este conjunto C .

Luego, por definición de punto de acumulación, existe una sub-sucesión $\{\bar{s}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, donde

$$\{a_k := \bar{\phi}(\bar{s}_k, p_0)\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \subset C \subset \mathbb{T}^2.$$

Por la definición de límite, aplicada al punto a , podemos elegir $0 < \epsilon \ll 1$, de tal forma que la ϵ -vecindad de p , $U_\epsilon(a) \subset \mathbb{T}^2$, satisface las siguientes dos propiedades¹⁰:

- (i) los cambios en las funciones C^r $\bar{\lambda}_p$ y $\bar{\mu}_p$ para puntos en $U_\epsilon(a)$ son suficientemente pequeños. En particular, los cambios en la pendiente se miden con los cambios en la función $\tan^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_p}{\bar{\mu}_p} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\mu_p}{\lambda_p} \right)$, son menores que $\frac{\pi}{8}$.
- (ii) el arco $a_n a_{n+1}$ entre a_n , y a_{n+1} en $\bar{\phi}(t, p_0)$ nunca está contenido enteramente en $U_\epsilon(a)$, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Ahora bien, sean $[\bar{v}_a] = (\bar{\lambda}_a, \bar{\mu}_a)$, las componentes del vector tangente \bar{X}_a en $a \in U_\epsilon(a) \subset \mathbb{T}^2$. Sea L_1, L_2 subconjuntos de $U_\epsilon(a) \subset \mathbb{T}^2$ definidos de la siguiente manera: Consideremos la notación del apéndice A.2,

$$q_a^{1,t} := [Q_a^{1,t}] := [((\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)t, (-\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)t)] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2;$$

$$q_a^{2,t} := [Q_a^{2,t}] := [((\bar{\lambda}_a - \bar{\mu}_a)t, (\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)t)] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2.$$

Definimos los subconjuntos de $U_\epsilon(a)$:

$$L_1 = \{q_a^{1,t} \in U_\epsilon(a) : 0 \leq t < \epsilon'\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{q_a^{2,t} \in U_\epsilon(a) : 0 \leq t < \epsilon'\}$$

en coordenadas locales en $U_\epsilon(a)$, es decir, en conjuntos de la forma $U_p \cap U_\epsilon(a)$ tales que $U_\epsilon(a) = \bigcup_{p \in U_\epsilon(a)} U_p \cap U_\epsilon(a)$, donde (U_p, φ_p) es una carta coordenada alrededor de p en $U_\epsilon(a)$. Los conjuntos L_1, L_2 son líneas que parten cada una de a y forman ángulos $\pm \frac{\pi}{4}$ con \bar{v}_a , ver figuras 3.13 y 3.14.

¹⁰Como antes, en coordenadas locales, el campo vectorial \bar{X} transversal a X (por la nota 3.4.3) tiene funciones de coordenadas lineales dadas por

$$[\bar{v}_p] := [\bar{X}_p] := (\bar{\lambda}_p, \bar{\mu}_p) = (-\mu_p, \lambda_p) \quad \text{para cada } p \in U_\epsilon(a).$$

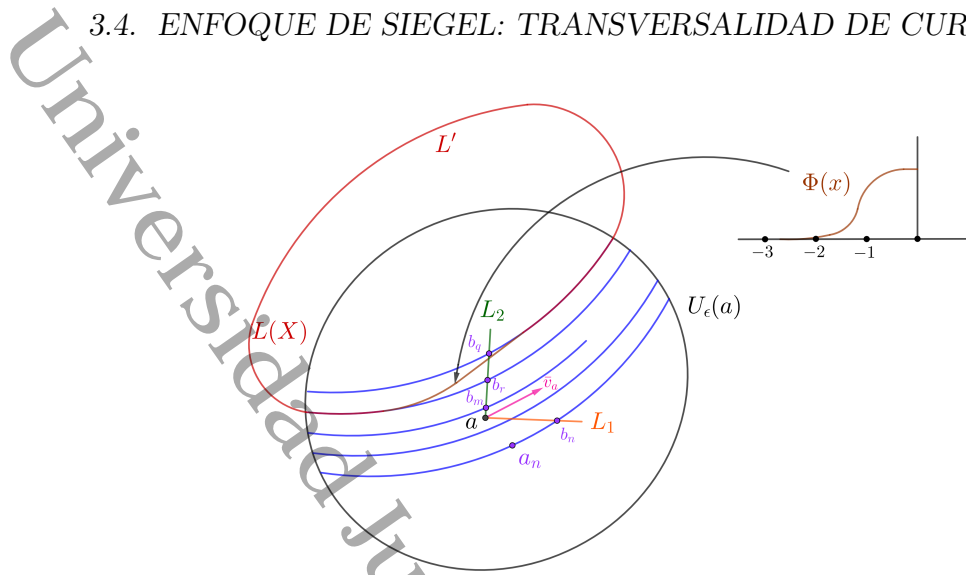


Figura 3.14: Conjuntos L_1, L_2 ; curva cerrada simple $L(X)$ transversa a X ; vecindad $U_\epsilon(a)$; sucesiones $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, se tiene que la curva integral $\bar{\phi}(t, p_0)$ interseca a L_1 o a L_2 cerca de a_n para algún n suficientemente grande; por lo tanto, denotamos dicho punto de intersección por $b_n := \bar{\phi}(s_n, p_0)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer¹¹ que el arco $a_n b_n$ está contenido en $U_\epsilon(a)$.

De las propiedades (i), (ii) de $U_\epsilon(a)$ mencionadas arriba, se sigue que:

- para cada a_n , la elección de b_n es única;
- la secuencia $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es monótona creciente;
- los puntos $\{b_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ son todos distintos.

Ahora construiremos una curva cerrada simple: Dado que elegimos $\{b_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ de puntos en $L_1 \cup L_2$, entonces se tiene que L_1 o bien L_2 , debe contener un número infinito de dichos puntos b_n . Por lo tanto, existen números enteros m, q tales que $q < m$ y $b_m \in \overline{a b_q}$, el segmento que une a con b_q . Sea b_r , el punto en el que $\bar{\phi}(t, p_0)$, $s_q < t \leq s_m$, interseca el segmento $\overline{b_q b_m}$ por primera vez. Entonces, la unión del arco $b_q b_r$, en la trayectoria de $\bar{\phi}(t, p_0)$ y el segmento $\overline{b_r b_q}$ en $L_1 \cup L_2$, es una curva cerrada simple L' . Por lo tanto, por construcción, L' es transversal a X y de clase C^{r+1} , excepto en b_q, b_r .

¹¹En efecto, considerando una nueva subsucesión, de ser necesario, podemos suponer que para cada número a_n , $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se puede seleccionar el b_n como se está suponiendo.

Curva cerrada simple suavizada: Para suavizar L' en b_q y b_r , usamos la gráfica $\{(x, \Phi(x)) : -3 \leq x \leq 0\}$, donde $\Phi(x)$ es la función C^∞ dada en el lema 2.3.4.

Modificamos L' colocando el segmento $\{(x, \Phi(x)) : -3 \leq x \leq 2, -1 \leq x \leq 0\}$ en el arco $b_q b_r$, y aproximando el segmento $\overline{b_q b_r}$ con el segmento $\{(x, \Phi(x)) : -2 \leq x \leq -1\}$.

Finalmente, la curva resultante será denotada por $L(X)$, la cual es una curva cerrada simple clase C^{r+1} transversa a X buscada en el caso en que $\bar{\phi}(t, p_0)$ no es periódica. Esto completa la demostración. \square

Lema 3.4.4 ([Ta1992]). Dado un campo vectorial no singular de clase C^r , $r \geq 2$. La curva $L(X)$ no divide a \mathbb{T}^2 en dos dominios¹².

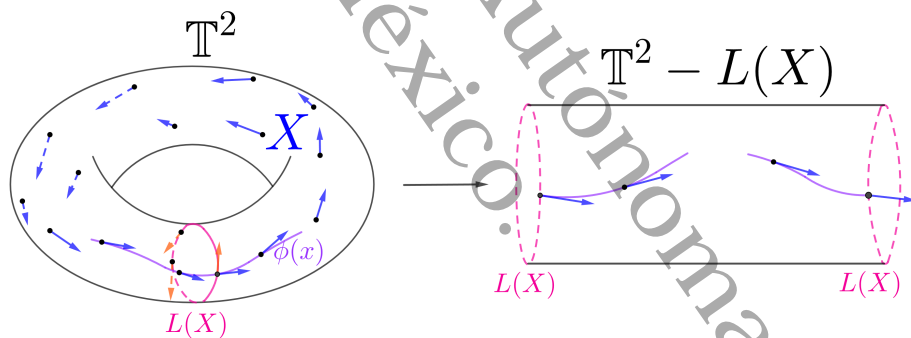


Figura 3.15: $L(X)$ transversa a X .

Lema 3.4.5 ([Ta1992]). Si L es una curva cerrada simple de clase C^0 en \mathbb{T}^2 que no interseca a $L(X)$, entonces L divide a $\mathbb{T}^2 - L(X)$ en dos dominios, ver figura 3.16.

¹²Ver figura 3.15.

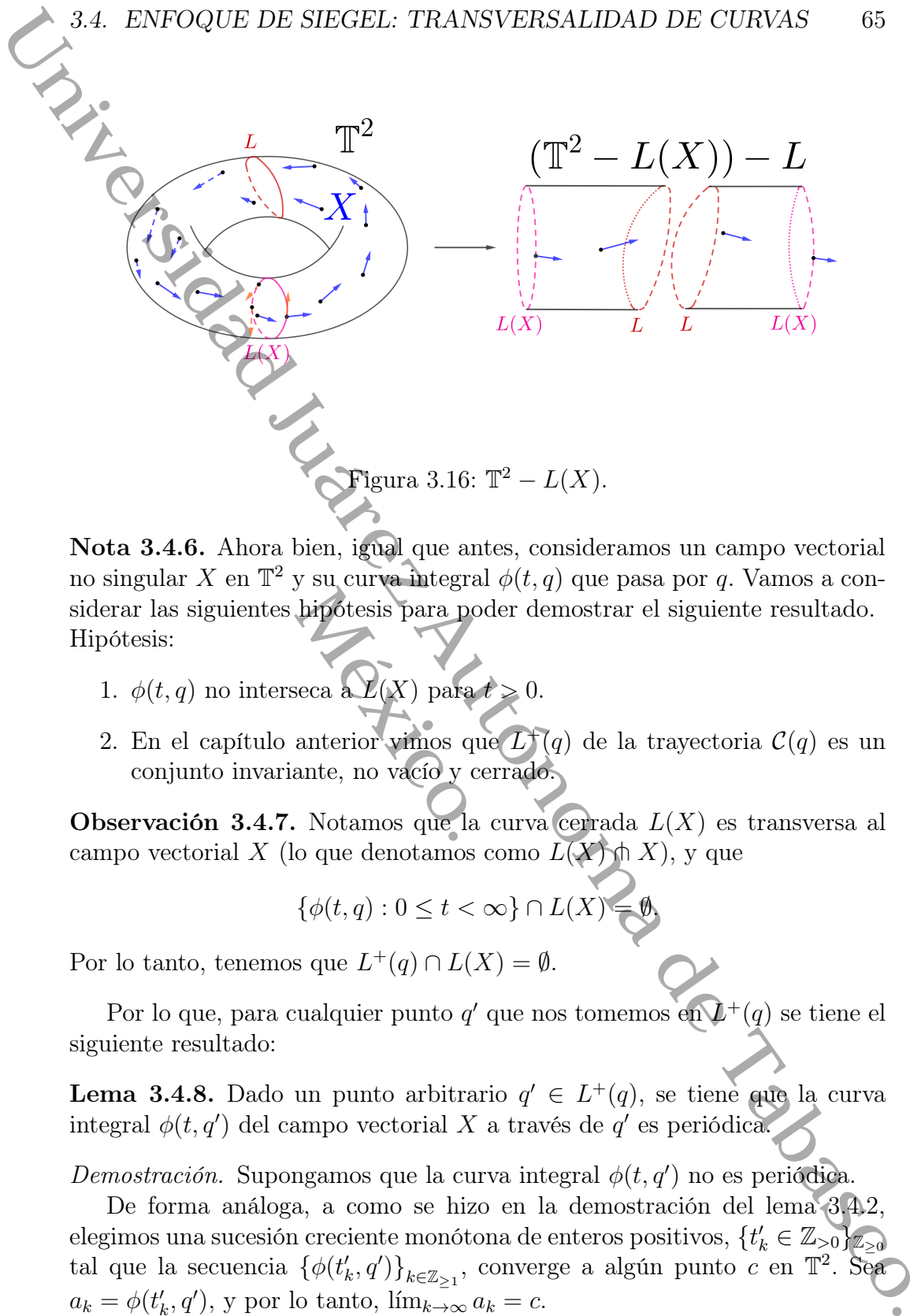


Figura 3.16: $\mathbb{T}^2 - L(X)$.

Nota 3.4.6. Ahora bien, igual que antes, consideramos un campo vectorial no singular X en \mathbb{T}^2 y su curva integral $\phi(t, q)$ que pasa por q . Vamos a considerar las siguientes hipótesis para poder demostrar el siguiente resultado. Hipótesis:

1. $\phi(t, q)$ no interseca a $L(X)$ para $t > 0$.
2. En el capítulo anterior vimos que $L^+(q)$ de la trayectoria $\mathcal{C}(q)$ es un conjunto invariante, no vacío y cerrado.

Observación 3.4.7. Notamos que la curva cerrada $L(X)$ es transversa al campo vectorial X (lo que denotamos como $L(X) \pitchfork X$), y que

$$\{\phi(t, q) : 0 \leq t < \infty\} \cap L(X) = \emptyset.$$

Por lo tanto, tenemos que $L^+(q) \cap L(X) = \emptyset$.

Por lo que, para cualquier punto q' que nos tomemos en $L^+(q)$ se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.4.8. Dado un punto arbitrario $q' \in L^+(q)$, se tiene que la curva integral $\phi(t, q')$ del campo vectorial X a través de q' es periódica.

Demostración. Supongamos que la curva integral $\phi(t, q')$ no es periódica.

De forma análoga, a como se hizo en la demostración del lema 3.4.2, elegimos una sucesión creciente monótona de enteros positivos, $\{t'_k \in \mathbb{Z}_{>0}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ tal que la secuencia $\{\phi(t'_k, q')\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$, converge a algún punto c en \mathbb{T}^2 . Sea $a_k = \phi(t'_k, q')$, y por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = c$.

De la proposición 2.3.2, se sigue que L^+ es un conjunto invariante, y consecuentemente, $a_k \in L^+(q)$, $k = 1, 2, \dots$; entonces al ser un conjunto cerrado se tiene que $c \in L^+(q)$.

De esto y la nota 3.4.6, se deduce que $c \notin L(X)$. Por tanto, de forma análoga, a como se hizo en la demostración del lema 3.4.2, para una ϵ suficientemente pequeña, la vecindad $U_\epsilon(c)$ de c satisface las siguientes propiedades:

1. $U_\epsilon(c) \cap L(X) = \emptyset$, ver figura 3.17.
2. Si $(\lambda_{p'}, \mu_{p'})$ son las coordenadas del vector $v'_p = X_{p'}$ en $p' \in U_\epsilon(c)$, el cambio en el vector de coordenadas lineales $(\lambda_{p'}, \mu_{p'})$ variando p' es suficientemente pequeño en $U_\epsilon(c)$.

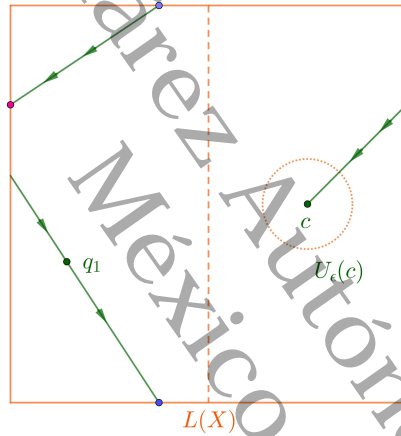


Figura 3.17: $U(c) \cap L(x)$.

3. Comparado con $|\lambda_{p'}| + |\mu_{p'}|$, ϵ es suficientemente pequeño.

Ahora bien, de forma análoga, a como se hizo en la demostración del lema 3.4.2, centraremos la atención en el punto límite c . Bien, sean $[X_c] = (\lambda_c, \mu_c)$ las coordenadas lineales del vector X_c . Por otra parte, definimos el segmento de línea l con respecto a las coordenadas locales de $U_\epsilon(c)$: Sea $q^{t,c} := [(-\mu_c t, \lambda_c t)] \in \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2$, y

$$l := \{q^{t,c} \in \mathbb{T}^2 : -\delta < t < \delta\},$$

donde tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $l \subset U_\epsilon(c)$.

El segmento de línea l corta a v ortogonalmente¹³ en c , ver figura 3.18.

¹³De hecho es una curva cuyo vector tangente es ortogonal a (λ_c, μ_c) , ya que $g(t) := (-\mu_c t, \lambda_c t)$, es tal que $g'(t) = (-\mu_c, \lambda_c)$, y por lo tanto, $\langle g'(t), [X_c] \rangle = 0$.

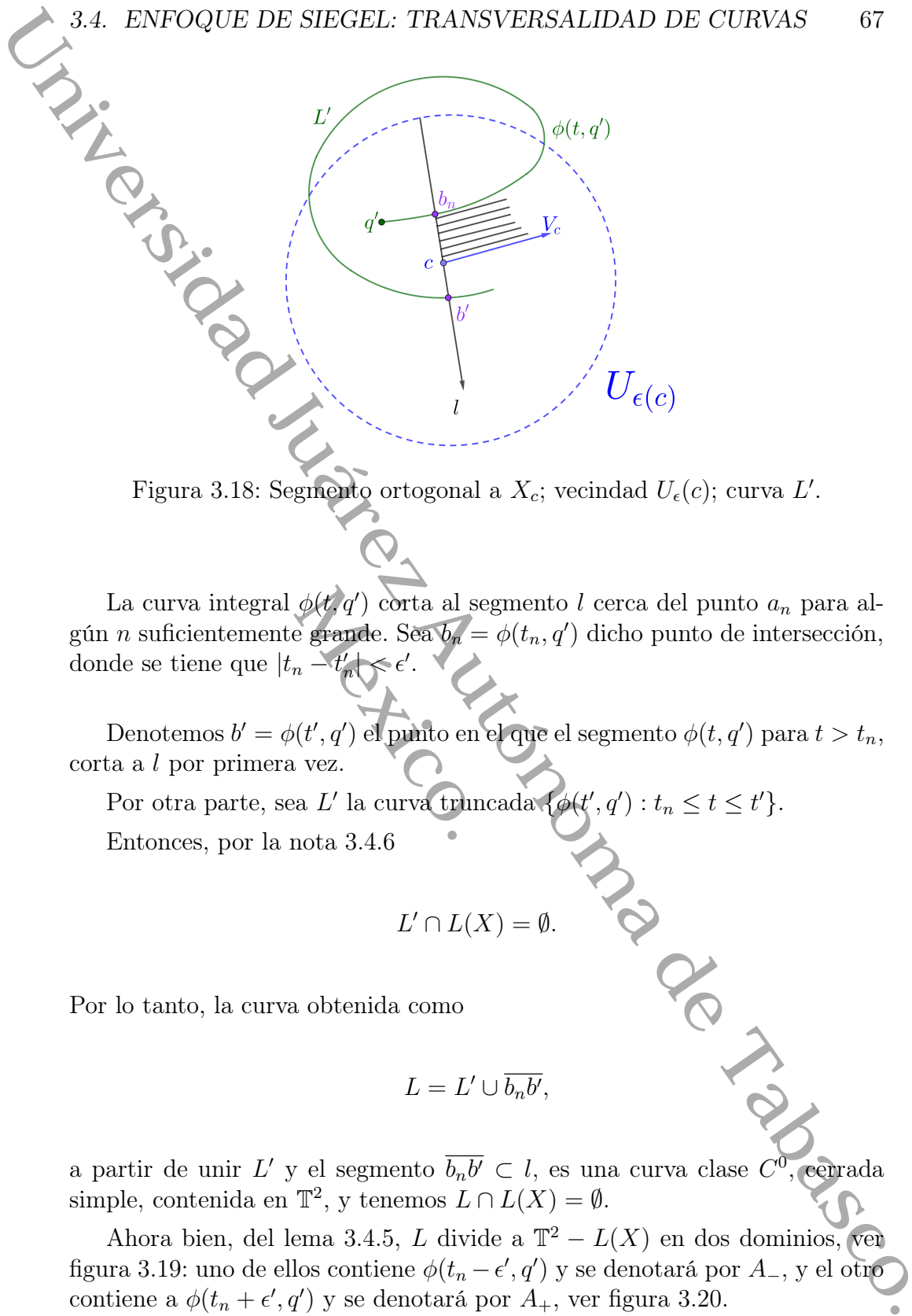


Figura 3.18: Segmento ortogonal a X_c ; vecindad $U_\epsilon(c)$; curva L' .

La curva integral $\phi(t, q')$ corta al segmento l cerca del punto a_n para algún n suficientemente grande. Sea $b_n = \phi(t_n, q')$ dicho punto de intersección, donde se tiene que $|t_n - t'_n| \leq \epsilon'$.

Denotemos $b' = \phi(t', q')$ el punto en el que el segmento $\phi(t, q')$ para $t > t_n$, corta a l por primera vez.

Por otra parte, sea L' la curva truncada $\{\phi(t, q') : t_n \leq t \leq t'\}$.

Entonces, por la nota 3.4.6

$$L' \cap L(X) = \emptyset.$$

Por lo tanto, la curva obtenida como

$$L = L' \cup \overline{b_n b'},$$

a partir de unir L' y el segmento $\overline{b_n b'} \subset l$, es una curva clase C^0 , cerrada simple, contenida en \mathbb{T}^2 , y tenemos $L \cap L(X) = \emptyset$.

Ahora bien, del lema 3.4.5, L divide a $\mathbb{T}^2 - L(X)$ en dos dominios, ver figura 3.19: uno de ellos contiene $\phi(t_n - \epsilon', q')$ y se denotará por A_- , y el otro contiene a $\phi(t_n + \epsilon', q')$ y se denotará por A_+ , ver figura 3.20.

$$(\mathbb{T} - L(X)) - L$$

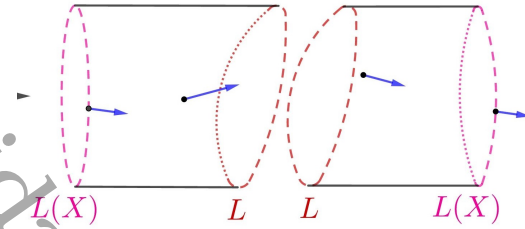


Figura 3.19: L divide a $\mathbb{T}^2 \setminus L(X)$.

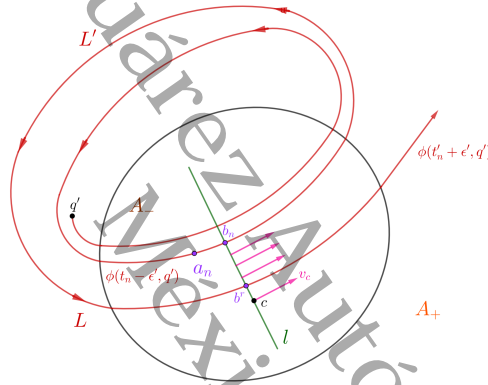


Figura 3.20: Conjuntos A_- y A_+ y curvas L' y L .

Observamos que como $L^+(q)$ es un conjunto invariante, entonces $\phi(t' + \epsilon', q') \in L^+(q)$. Luego, para algún \bar{t} , se tiene que el punto $\phi(\bar{t}, q)$ está muy cerca de $\phi(t' + \epsilon', q')$, y además se cumple que $\phi(\bar{t}, q) \in A_+$.

Para concluir la demostración, sea

$$L_1 = \{\phi(t, q); \bar{t} < t < \infty\},$$

el cual es un segmento de la curva integral de $\phi(t, q)$. Por la nota 3.4.6, $L_1 \cap L(X) = \emptyset$.

Más aún, L_1 no cruza a L' y se cumple que $L_1 \subset A_+$. Por lo tanto, debemos tener que $L^+(q) \subset A_+$, pero $\phi(t - \epsilon', q') \in A_-$, lo que lleva a una contradicción, pues $\phi(t - \epsilon', q')$ es un punto de $L^+(q)$. Por tanto, la curva integral $\phi(t, q')$ es periódica. Esto completa la demostración. \square

Lema 3.4.9. Supongamos que ninguna de las curvas integrales de X es periódica. Entonces la curva integral $\phi(t, q)$, restringida a $t > 0$, interseca a $L(x)$. Si reemplazamos $t > 0$ por $t < 0$ llegamos a la misma conclusión.

Demostración. Se sigue del lema 3.4.8, para los detalles de la demostración ver [Ta1992, pág. 32]. \square

3.4.1. Demostración del teorema de ergodicidad de Denjoy-Siegel

Ahora sí, usando los resultados de la sección 3.4 veremos una demostración del teorema 3.3.1 (de Denjoy-Siegel).

Demostración del teorema 3.3.1. Supongamos que X no posee curvas integrales periódicas.

Sea $q \in \mathbb{T}^2$. Consideramos la curva integral pasando por q , es decir, $\phi(t, q)$. Por el lema 3.4.2 dado que $L(X) \pitchfork \phi(t, q)$, entonces por el lema 3.4.9 la curva $\phi(t, q)$ interseca a $L(X)$, es decir,

$$\{\phi(t, q) : t \in \mathbb{R}_+\} \cap L(X) = \{q_1\} \neq \emptyset, \text{ ver figura 3.21.}$$

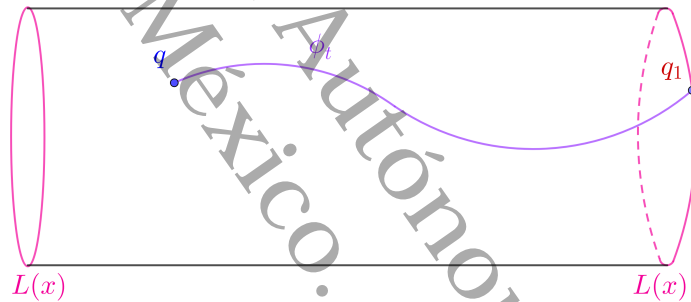


Figura 3.21: Intersección de la curva $\phi(t, q)$ con $L(X)$.

Por lo que es suficiente considerar las trayectorias a través de los puntos de $L(X)$, ver figura 3.22.

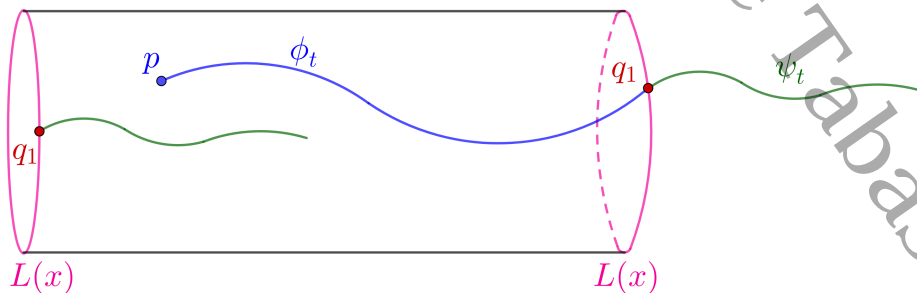


Figura 3.22: Trayectoria a través de $L(X)$.

* Definamos el difeomorfismo $f_1 : L(X) \rightarrow L(X)$.

Dado $q \in L(X)$ por lo anterior se tiene que

$$L(X) \cap \phi(t, q) \text{ y } \{q_1\} = \{\phi(t, q) : t \in \mathbb{R}_+\} \cap L(X) \neq \emptyset.$$

Entonces, $\exists! q_1 = \phi(t', q)$, t' más pequeño tal que

$$f_1(q) = q_1 \text{ y } q_1 \in L(x) \cap \{\phi(t, q) : t \in \mathbb{R}_+\}, \text{ ver figura 3.23.}$$

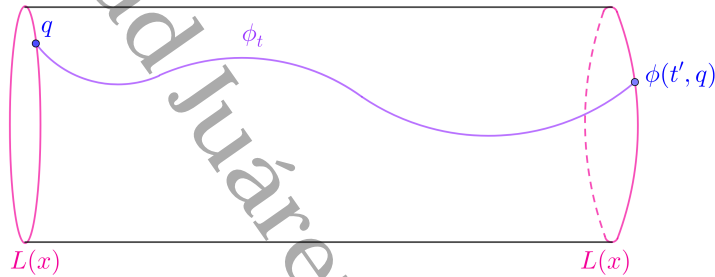


Figura 3.23: Definición de f_1 .

Luego, $f = h^{-1} \circ f_1 \circ h$ es el difeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama (cf. ecuación (3.1)).

$$\begin{array}{ccc} L(X) & \xrightarrow{f_1} & L(X) \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

1. Si f tiene punto fijo, entonces

$$f(q) = q \Leftrightarrow \phi(t', q) = f(q) = q_1 = q = \phi(0, q),$$

así ϕ es cerrada.

2. Si f tiene punto periódico de periodo m , se tiene que $f^m(q) = q$.
Notemos que

$$\phi(t'_0, q) = q_1 \text{ y } q_1 = f(q).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \phi(t'_1, q_1) &= q_2 =: f(q_1) \\ &= f(f(q)) \\ &= f^2(q) = q = \phi(0, q). \end{aligned}$$

Pero

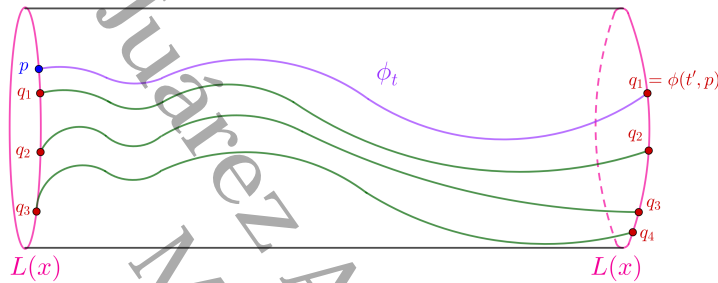
$$\phi(t'_1, q_1) = \phi(t'_1, \phi(t'_0, q)) = q = \phi(0, q)$$

por propiedades del flujo $\phi(t'_0 + t'_1, q) = q = \phi(0, q)$.

Entonces,

$$\phi(t'_0 + t'_1 + \dots + t'_m, q) = f^m(q) = q = \phi(0, q)$$

Por lo que ϕ es cerrada.



Por lo que si f tiene puntos periódicos, entonces f_1 los tendrá vía h lo cual da una contradicción por lo anterior.

Ahora, por el teorema 3.1.7, todo punto de \mathbb{S}^1 es ergódico, es decir,

$$\overline{\{f^m(p) : m \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{S}^1.$$

Si p es ergódico respecto a f , entonces para cada punto $p' \in \mathbb{S}^1$, $\phi(t, p)$ pasa por un punto $f^m(p)$ arbitrariamente cerca a p' por lo que los puntos $\phi(t, p')$ y $\phi(t, f^m(p))$ son arbitrariamente cercanos. Así, por el teorema de la caja de flujo se sigue que $\overline{C(p)} = \mathbb{T}^2$. Por lo tanto, la trayectoria $C(p)$ es ergódica. Esto completa la demostración.

□

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Foliaciones vía el Teorema de Denjoy–Siegel

En este capítulo se mostrarán ejemplos de foliaciones de codimensión 1, usando las curvas integrales de campos vectoriales suaves (o de clase C^r). Para los contenidos de este capítulo se consideró I. Tamura [Ta1992] así como las referencias [C-N2013, Lee2013, Pa-De M2012].

4.1. Noción de foliación de co-dimensión 1

Se puede definir una foliación de dimensión k sobre una n -variedad suave o de clase C^r , pero para nuestro trabajo, nos vamos a restringir a una foliación de dimensión 1 sobre una 2-variedad. Podemos decir que una foliación es una partición en subvariedades diferenciables de una variedad diferenciable. En el último capítulo se mostrará que dado un campo vectorial $X = X_{a,b}$ (no confundir esta notación con la evaluación de X en un punto p) no singular en el toro \mathbb{T}^2 , con coordenadas $[X_{a,b}] = (a, b)$ constantes, se tiene que la familia de curvas integrales $\mathcal{F}_{a,b}$ es un ejemplo de una 1-foliación.

A continuación, definamos lo que es una foliación en una variedad.

Definición 4.1.1. Una foliación de dimensión 1 sobre la 2-variedad (M, \mathcal{A}) , es una familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos arcoconexos de M de dimensión 1 que cumple las siguientes propiedades:

F_1 : para cada $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha \neq \beta$ se tiene que $\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{L}_\beta = \emptyset$.

F_2 : $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{L}_\alpha$.

F_3 : Para cada punto $p \in M$ existe una carta $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{A}$ de clase C^r de M la cual cumple que $p \in U_\lambda$ y cada componente conexa de $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha)$.

son de la forma

$$\{(x_1, x_2) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : x_2 = c\}$$

para cada \mathcal{L}_α con $\mathcal{L}_\alpha \cap U_\lambda \neq \emptyset$.

Nota 4.1.2.

- i) Llamamos a \mathcal{L}_α una hoja de la foliación \mathcal{F} .
- ii) Una foliación k -dimensional de clase C^r también se le conoce como foliación de codimensión $n - k$ de clase C^r .

A continuación, mostraremos un ejemplo de una foliación en \mathbb{R}^2 de codimensión 1. Este ejemplo y su descripción explícita, será útil como veremos más adelante, para describir otros ejemplos de foliaciones.

Ejemplo 4.1.3. Supongamos que $M = \mathbb{R}^2$, y pensamos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2-k}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2$ se tiene la carta coordenada $(U_\epsilon(p) \subset \mathbb{R}^2, Id)$ con el atlas suave definido por

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^2} = \{(p, U_\epsilon(p)) : p \in \mathbb{R}^2\}.$$

Por lo que la estructura suave de \mathbb{R}^2 está definido por

$$(M, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{\mathbb{R}^2})$$

Ahora, de acuerdo con la definición 4.1.1 se define la familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos arconexos de \mathbb{R}^2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I}, I = \{p : p \in \mathbb{R}^2\}, \\ \mathcal{L}_\alpha &:= L_p = l_0 + p \\ \alpha &= p, \end{aligned}$$

donde, l_0 es la recta que pasa por 0 con pendiente $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, dependiendo el k .

- 1) Sea $k = 1$, $\mathbf{m} = \tan(\theta) = \tan 0 = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha &= L_0 + p = \{(\mathbb{R} \times \{0\}) + p\} \\ &= \{(x, 0) + (p_1, p_2) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x + p_1, p_2) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Veamos la propiedad 2) de la definición 4.1.1, es decir,

$$\begin{aligned} \sqcup \mathcal{L}_\alpha &= \mathbb{R}^2 \\ \forall p \in \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \mathcal{L}_\alpha = L_0 + p. \end{aligned}$$

Para la propiedad 3) de la definición se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(U_\epsilon(p), Id|_{U_\epsilon(p)})\} \\ \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} &= \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda = p \in \mathbb{R}^2, \Lambda = \mathbb{R}^2\}, \\ \{\mathcal{L}\}_{\alpha \in I} &= \{\mathcal{L}_\alpha := L_0 + q | q \in \mathbb{R}^2, \alpha = q; I = \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_0 + q)) \\ &= U_\epsilon(p) \cap (L_0 + q) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada componente conexa de $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha)$ es de la forma

$$\{(p_1, p_2) \in \varphi_\lambda \in (U_\lambda) : p_2 = c\}, \text{ ver figura 4.1.}$$

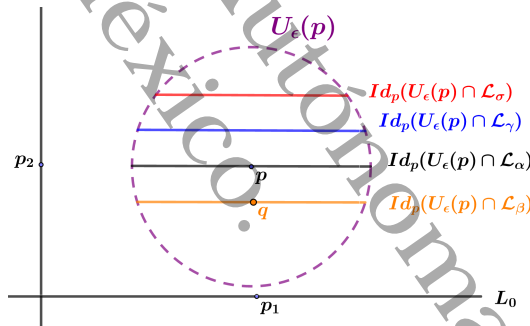


Figura 4.1: Componente conexa de $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha)$.

- 2) Sea $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Elegimos $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ fijo. Entonces la familia \mathcal{F} de subconjuntos son de la forma:

$$\begin{aligned} F &= \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I} \\ &= \{L_\theta + q : q \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2\}, \text{ ver figura 4.2(a)}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q)) \\ &= U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q), \text{ ver figura 4.2(b)}. \end{aligned}$$

Para que cada componente conexa sea de la forma de acuerdo con la definición 4.1.1 debemos aplicar una función rotación \mathcal{R}_θ , es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta^{-1} \circ \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= \mathcal{R}_\theta^{-1}(Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q))) \\ &= \mathcal{R}_\theta^{-1}(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada componente conexa es de la forma: $\{(p_1, p_2) \in \varphi_\lambda \in (U_\lambda) : p_2 = c\}$, ver Figura 4.2(c).

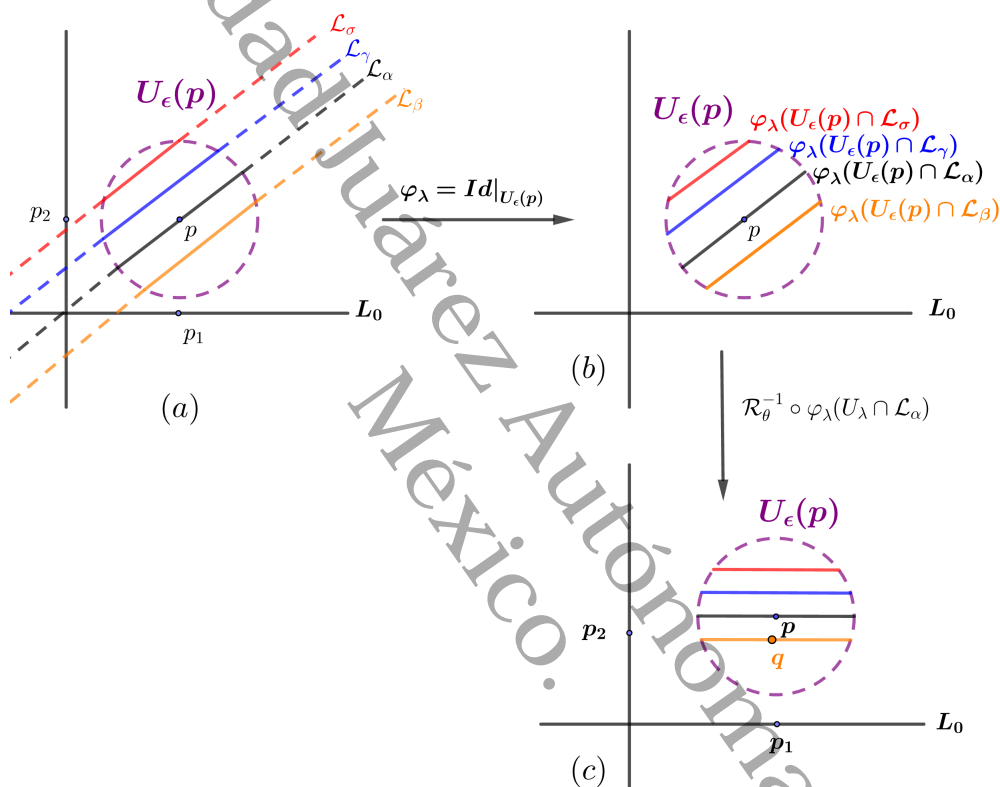


Figura 4.2: Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- 3) Sea $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$. Elegimos $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Entonces la familia \mathcal{F} de subconjuntos está conformado por rectas con pendiente $\tan(\theta)$, es decir,

$$\begin{aligned} F &= \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I} \\ &= \{L_{\frac{\pi}{2}} + q\}_{q \in \mathbb{R}^2}, \text{ ver figura 4.3(a)}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_{\frac{\pi}{2}} + q)) \\ &= U_\epsilon(p) \cap (L_{\frac{\pi}{2}} + q), \text{ ver figura 4.3(b)}. \end{aligned}$$

Para que cada componente conexa sea de la forma de acuerdo con la definición 4.1.1 debemos aplicar una función rotación $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1} \circ \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1}(Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_{\frac{\pi}{2}} + q))) \\ &= \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1}(U_\epsilon(p) \cap (L_{\frac{\pi}{2}} + q)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada componente conexa es de la forma:

$$\{(p_1, p_2) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : p_2 = c\}, \text{ ver figura 4.3(c).}$$

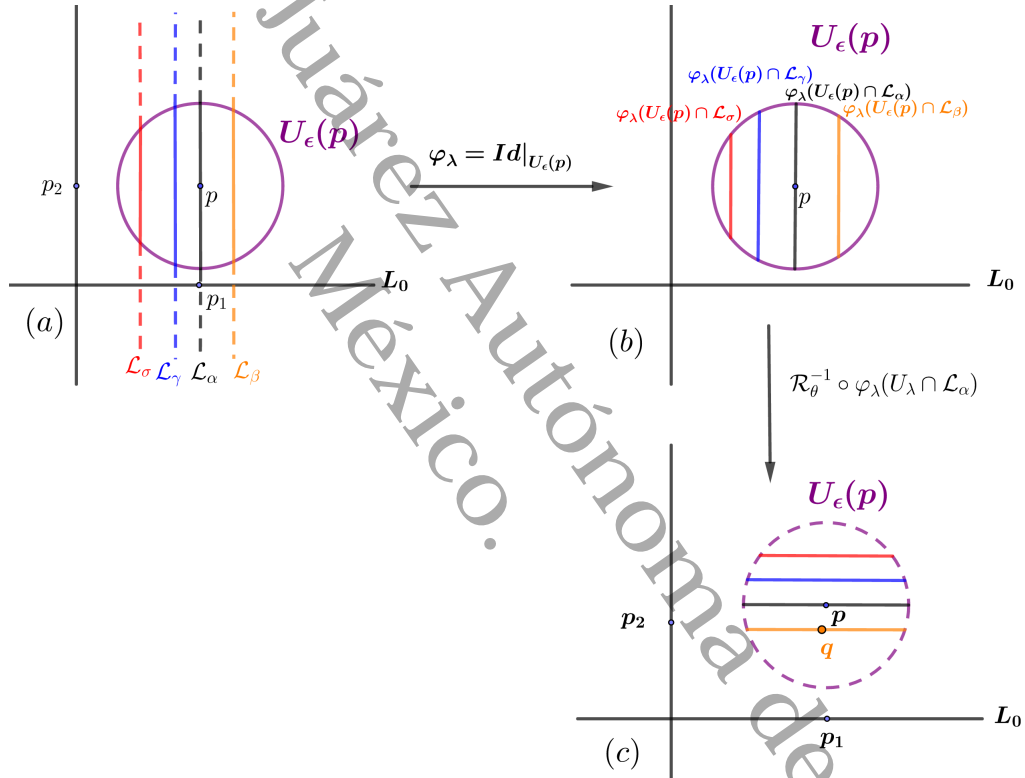


Figura 4.3: Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta) = \frac{\pi}{2}$.

- 4) Sea $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \pi$. Elegimos $\theta \in (0, \pi)$ fijo. Entonces la familia de subconjuntos \mathcal{F} está conformado por rectas con pendiente \mathbf{m} , es decir,

$$\begin{aligned} F &= \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in I} \\ &= \{L_\theta + q\}_{q \in \mathbb{R}^2}, \text{ ver figura 4.4(a).} \end{aligned}$$

Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q)) \\ &= U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q), \text{ ver figura 4.4(b)}.\end{aligned}$$

Para que cada componente conexa sea de la forma de acuerdo con la definición 4.1.1 debemos aplicar una función rotación \mathcal{R}_θ , es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\theta^{-1} \circ \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \mathcal{L}_\alpha) &= \mathcal{R}_\theta^{-1}(Id_p(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q))) \\ &= \mathcal{R}_\theta^{-1}(U_\epsilon(p) \cap (L_\theta + q)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, cada componente conexa es de la forma: $\{(p_1, p_2) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : p_2 = c\}$, ver figura 4.4(c).

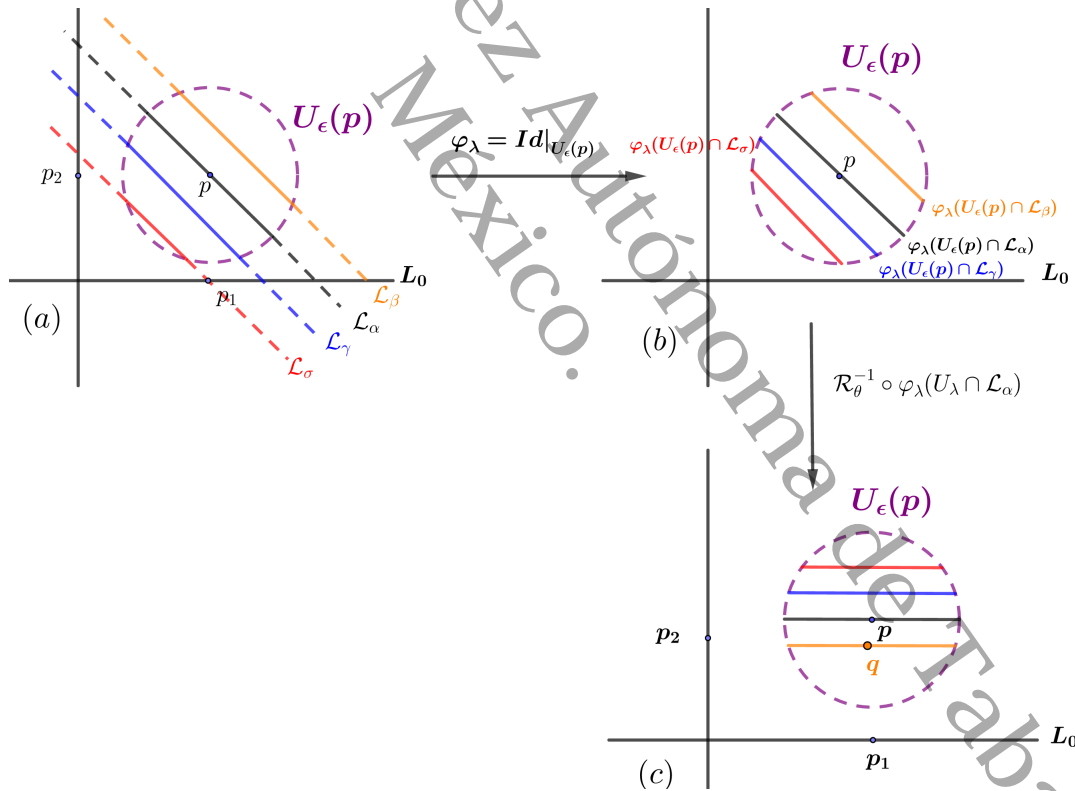


Figura 4.4: Carta foliada caso $k = 1$ y $\mathbf{m} = \tan(\theta)$, $0 < \theta < \pi$.

Así, \mathbb{R}^2 tiene una foliación de codimensión 1 de clase C^r .

4.2. Foliaciones para $X_{a,b}$ en el toro \mathbb{T}^2

En este apartado, se utilizarán los resultados obtenidos sobre las expresiones explícitas de las curvas integrales, dadas por rectas¹ en \mathbb{R}^2 proyectadas a el toro \mathbb{T}^2 , lo que se puede apreciar en la demostración del teorema establecido para el caso especial de campos vectoriales constantes $X_{a,b}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.2.1. Dado un campo vectorial constante $X_{a,b}$ como en el teorema 2.5.1 en el toro \mathbb{T}^2 , se tiene la existencia de una foliación $\mathcal{F}_{a,b}$ de co-dimensión 1.

Demostración. Dado un punto $p \in \mathbb{T}^2$, consideramos su curva integral definida en todo² \mathbb{R} , $\mathcal{C}(p) = \{\phi(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$.

De forma explícita, de la demostración del teorema 2.5.1 se tiene que si (U_p, φ_p) (con $\varphi_p(\bullet) = (x(\bullet), y(\bullet))$) o bien, $\varphi_p = (x, y)$ son coordenadas locales cerca de p , y (x_0, y_0) las correspondientes para p , entonces la curva integral que pasa por p esta dada por:

$$\phi(t, (x_0, y_0)) = [(at + x_0, bt + y_0)] = [t(a, b) + (x_0, y_0)] \in \mathbb{T}^2.$$

Para construir una foliación como se afirma, con respecto a estas coordenadas locales cerca de p , notamos que dichas curvas integrales son llevadas al plano como rectas paralelas³ en \mathbb{R}^2 , a decir, todas tienen la misma pendiente o dirección $v := \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|} \in S^1$.

Por lo tanto, definamos las hojas de la foliación que estamos buscando como:

- El conjunto de índices es $\Lambda := \mathbb{R}^2$;
- Haciendo $\alpha := p$, las hojas las definimos tales que si

$$L_\alpha = L_p := \{(x, y) : (x, y) = t(a, b) + (x_0, y_0), \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\},$$

entonces $\mathcal{L}_\alpha := \varphi(L_p) = \mathcal{C}(p)$, donde φ es el cubriente suave dado en A.3.

¹Recordamos que se distinguieron dos casos: i) cuando la recta en cuestión tiene pendiente racional, lo que da curvas integrales periódicas; y las rectas con pendiente irracional, lo que da órbitas densas en el toro.

²Como se vio antes, este hecho se obtiene de que \mathbb{T}^2 es una variedad compacta cerrada.

³Lo que es consistente con proposición 1.2.8 y la proposición 1.2.9.

Entonces con respecto al abierto $U_\alpha \ni p$, si $\tilde{\gamma}_p(\bullet) := \varphi_\beta(\phi(\bullet, p))$ se tiene que φ_α es un diffeomorfismo que cumple:

$$\varphi_\beta\left(\bigsqcup_{p \in U_\beta} U_\beta \cap \mathcal{C}(p)\right) = \bigsqcup_{\varphi_\beta(p) \in \varphi_\beta(U_\beta)} \phi(U_\beta) \cap \tilde{\gamma}_p; \quad \tilde{\gamma}_p(t) = \varphi_\beta(\phi(t, p)).$$

Por lo tanto, la carta foliada (ver figura 4.5) alrededor de p es de la forma

$$(U_\beta, \varphi_{\lambda(p)} = R_{\theta_1} \circ \varphi_{\beta(p)}),$$

donde θ_1 es un ángulo que haya que rotar, y que depende de la dirección de las rectas, para que éstas tengan un “acomodo horizontal”, lo cual es precisamente las interpretaciones geométrica y analítico-topológica que se realizó en el ejemplo 4.1.3.

Así, tomando p arbitrario, y repitiendo el método anterior, se tiene que $\mathcal{F}_{a,b} := \{\mathcal{C}(p) : p \in \mathbb{T}^2\}$ es una 1-foliación con respecto al atlas $\mathcal{A}_{\mathbb{T}^2} = \{(U_\beta, \varphi_{\lambda(p)})\}$. Esto completa la demostración.

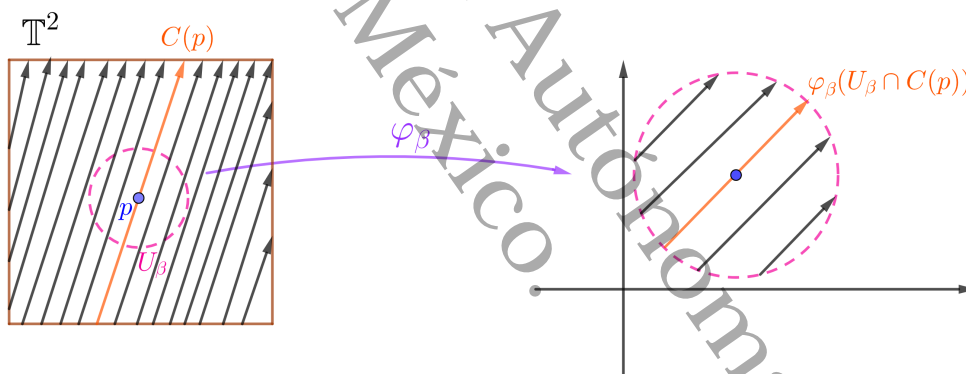


Figura 4.5: Carta foliada para un punto dado $p \in \mathbb{T}^2$.

□

4.3. Foliaciones para un sistema dinámico discreto

En este apartado, y con la finalidad de enriquecer esta tesis, a diferencia de todo el trabajo realizado para sistemas dinámicos continuos provenientes de campos vectoriales, presentaremos un ejemplo de foliación que se pueden construir en el toro \mathbb{T}^2 , mediante la teoría elemental de sistemas dinámicos

discretos. En este apartado nos enfocaremos en el sistema dinámico asociado a una matriz 1-modular, es decir, con entradas enteras y determinante igual a uno. El material aquí presentado, puede consultarse en [Pa-De M2012, pág. 157].

Proposición 4.3.1. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz con entradas enteras y determinante $\det(A) = 1$. Entonces:

- i) Los valores propios de A son $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donde $|\lambda| < 1$.
- ii) Los espacios estable E^s e inestable E^u son dados por rectas que pasan por el origen cuya pendiente es irracional.
- iii) Como $\det(A) = 1$, entonces A^{-1} posee las mismas propiedades i) y ii) como A .

Ahora bien, el hecho de que φ sea un cubriente suave, implica que es un difeomorfismo local, y por ende, como A tiene entradas enteras, se tiene que $A(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$; y por lo tanto, existe un difeomorfismo (de hecho \mathcal{C}^∞) inducido A_3 (al cual para ahorrar notación le seguiremos llamando A) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 & & \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\
 \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{A_1} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & & \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2 & \xleftarrow{\cong} \mathcal{S}_T \xrightarrow{A_2} \mathcal{S}_T \xrightarrow{\cong} & \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & & \\
 & \searrow A_3=A & \nearrow & &
 \end{array} \tag{4.1}$$

de acuerdo con las identificaciones dadas en el lema A.3.2. Lo anterior es con la finalidad de que estas identificaciones usadas en la literatura indistintamente, sean puntualizadas lo mejor posible.

Lema 4.3.2. Sea $p \in \mathbb{T}^2$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = p$. Entonces, las curvas

$$W^s(p) = \varphi((x, y) + E^s) \text{ y } W^u(p) = \varphi((x, y) + E^u)$$

son densas en \mathbb{T}^2 .

Demostración. Sean $L_u := tv + B_u$ una recta que coincide con el espacio inestable E^u , y $L_w := tw + B_u$ una recta que coincide con el espacio estable E^s , para la matriz A . Consideremos el campo vectorial constante $X_1 := X_{a_u, b_u}$, de tal forma que en coordenadas $[X_{a_u, b_u}] = (a_u, b_u) = v$. Asimismo, considérese el campo vectorial constante $X_2 := X_{a_s, b_s}$, de tal forma que en coordenadas $[X_{a_s, b_s}] = (a_s, b_s) = w$. Luego, las rectas L_u y L_s tienen pendientes $\frac{b_u}{a_u}$ y $\frac{b_s}{a_s}$ que son irracionales. Por lo tanto, del teorema 2.5.1 b), aplicado a cada uno de estos campos vectoriales X_1 y X_2 se sigue el resultado deseado. \square

Proposición 4.3.3 (Foliación estable e inestable para A). Las colecciones

$$\mathcal{F}_{a_s, b_s} := \{W^s(p) : p \in \mathbb{T}^2\} \text{ y } \mathcal{F}_{a_u, b_u} := \{W^u(p) : p \in \mathbb{T}^2\}$$

definen foliaciones en \mathbb{T}^2 de co-dimensión 1.

Demostración. Usando el lema 4.3.2, podemos aplicar a cada campo vectorial X_j , $j = 1, 2$ la proposición 4.2.1 para obtener la demostración. \square

Nota 4.3.4. Tenemos que \mathcal{F}_{a_s, b_s} y \mathcal{F}_{a_u, b_u} son llamadas las foliaciones estables e inestables del sistema dinámico discreto (\mathbb{T}^2, A) .

4.4. 1-foliaciones en una 2-variedad suave

En la sección 4.2 se mostró que las curvas integrales de un campo no singular constante en el toro \mathbb{T}^2 determinan una foliación de co-dimensión 1.

Ahora bien, en este apartado describiremos un método⁴ que consiste en que dada una 2-variedad diferenciable y un campo vectorial no-singular en ella, se puede dar la construcción de una foliación de co-dimensión 1, la cual estará determinada por las curvas integrales de un campo vectorial no-singular, ver [Ta1992, p. 83] y cf. [C-N2013, p. 28, Example 4].

Sea X un campo vectorial no-singular de clase⁵ C^r , $r \geq 1$, definido en una 2-variedad diferenciable M .

Definimos

$$\mathcal{F}_X := \{\mathcal{L}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}, \quad (4.2)$$

donde para cada $p \in M$, $C(p)$ es una trayectoria de X que pasa por p ; además, $\Lambda := M$, así que $\mathcal{L}_\alpha := C(p)$ y $\alpha = p$ para cada $p \in M$.

Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

⁴Dicho método será parte de la demostración de la proposición 4.4.1.

⁵Se incluyen los casos analítico e infinito diferenciable.

Proposición 4.4.1. La familia \mathcal{F}_X es una foliación de co-dimensión 1 en M .

Demostración. A continuación, describiremos el proceso para una demostración de la proposición 4.4.1.

Paso 1 : Se satisfacen las propiedades F_1 y F_2 de la definición 4.1.1. En efecto, del teorema 2.1.7 (de existencia y unicidad de curvas integrales) y del corolario 2.1.9, se tiene que las curvas integrales tienen dominio todo \mathbb{R} . Por lo tanto, de la proposición 2.3.3 (sobre la conexidad de los conjuntos α -límite y ω -límite) se tiene que los \mathcal{L}_α , considerados en la definición de \mathcal{F}_X cumplen las propiedades deseadas.

Paso 2 : Se construye un encaje \mathcal{C}^r (o bien \mathcal{C}^∞) del intervalo $[-1, 1]$ (que es una 1-variedad con frontera) con imagen dentro de M . En efecto, se tiene el siguiente resultado para el cual se puede consultar [Ta1992, pág. 84]:

Lema 4.4.2. Sea $p \in M$. Entonces existe un encaje suave⁶

$$g : [-1, 1] \longrightarrow M,$$

tal que $g(0) = p$. Más aún, para cada $q \in \text{Im } g = g([-1, 1])$ se tiene que la curva integral que pasa por q , $\phi(t, q)$ interseca a $\text{Im } g$ transversalmente, ver figura 4.6.

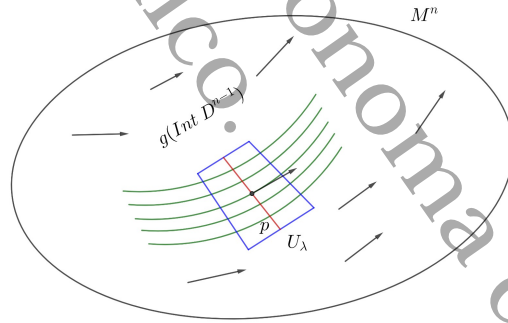


Figura 4.6: Carta foliada $(U_\lambda, \phi_\lambda)$: $n = 2$, $M^n = M$, $D = [-1, 1]$.

Paso 3: Para $0 < \varepsilon \ll 1$, sea $\mathbf{I} := (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-1, 1)$. Entonces se tiene un encaje clase \mathcal{C}^r inducido por g , que está definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{g}: \mathbf{I} &\longrightarrow M, \\ (t, x) &\longmapsto \tilde{g}(t, x) := \phi(t, g(x)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

⁶Es decir, una inmersión que también es un encaje topológico, ver [Lee2013].

Paso 4: Se verifica que la propiedad F_3 en la definición 4.1.1 se cumple: Es decir, vamos a demostrar la existencia de un “atlas foliado”. En efecto, bajo las hipótesis de los Pasos 1-3, tenemos que una carta foliada $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ asociada al punto p esta definida de la siguiente manera: Definir $\Lambda := M$, $\lambda := p$, y $U_\lambda := \tilde{g}(\mathbf{I})$. Entonces,

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tilde{g}(t, x) \mapsto (t, x).$$

Por lo tanto, el atlas foliado que obtenemos es $\mathcal{A}_M = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

Con los Pasos 1-4, se completa la demostración de la proposición 4.4.1. \square

Nota 4.4.3. Consideremos a X un campo vectorial no-singular como antes. La información relevante en la demostración anterior, es la que se obtiene de la composición del push-forward del encaje suave $g : [-1, 1] \rightarrow M$. En efecto, dado un punto $x_0 \in [-1, 1]$, se tiene que existe un abierto coordenado $J_{x_0} \subset [-1, 1]$ y $U_{g(x_0)} \subset M$ que contienen a x_0 y $g(x_0) \in M$, respectivamente. Por otro lado, se tiene un mapeo \mathcal{G} que relaciona los haces tangentes correspondientes, lo cual se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} J_{x_0} & \xrightarrow{g} & U_{g(x_0)} ; \\ \downarrow A(x_0) \frac{d}{dx} \Big|_{x_0} & & \downarrow X \\ T[-1, 1] & \xrightarrow{\mathcal{G}} & TM \end{array}$$

y más específicamente, en espacios tangentes:

$$\begin{array}{ccccc} \{x_0\} & \xrightarrow{g} & \{g(x_0)\} & & \\ \downarrow A(x_0) \frac{d}{dx} \Big|_{x_0} & & \downarrow Y & & \searrow X \\ T_{x_0} J_{x_0} & \xrightarrow{g_{*,x_0}} & T_{g(x_0)} U_{g(x_0)} & & \\ \downarrow \simeq (\iota_{J_{x_0}})_* & & \downarrow \simeq (\iota_{U_{g(x_0)}})_* & & \\ T_{x_0} [-1, 1] & \xrightarrow{g_{*,x_0}} & T_{g(x_0)} M & \xrightarrow{=} & T_{g(x_0)} M \\ & & & & \text{Id}_{T_{g(x_0)} M} \end{array}$$

4.5. FOLIACIONES EN \mathbb{T}^2 VÍA EL TEOREMA DE DENJOY-SIEGEL⁸⁵

donde $\iota_{J_{x_0}}$ y $\iota_{U_{g(x_0)}}$ son las inclusiones correspondientes⁷. También $\text{rang}(g_{*,x_0}) = 1$, es decir, g_{*,x_0} es un mapeo lineal inyectivo, de lo cual se tiene que $\text{Im} g_{*,x_0}$ es un subespacio vectorial de $T_{g(x_0)}U_{g(x_0)} \simeq T_{g(x_0)}M$ de dimensión 1.

Sea $v_{g(x_0)} := g_{*,x_0}(A(x_0)\frac{d}{dx}|_{x_0}) \in T_{g(x_0)}M$. Entonces, en la figura 4.7, se muestra la curva integral $\phi_t(g(x_0))$ que pasa por $g(x_0) \in M$ con vector tangente $X_{g(x_0)} \in T_{g(x_0)}M$. Entonces, como $\text{Im} g$ tiene intersección transversal con $\phi_t(g(x_0))$, se sigue que estos vectores tangentes son linealmente independientes y por tanto forman una base para el espacio tangente, es decir, $T_{g(x_0)}M = \mathbb{R}\langle v_{g(x_0)}, X_{g(x_0)} \rangle$.

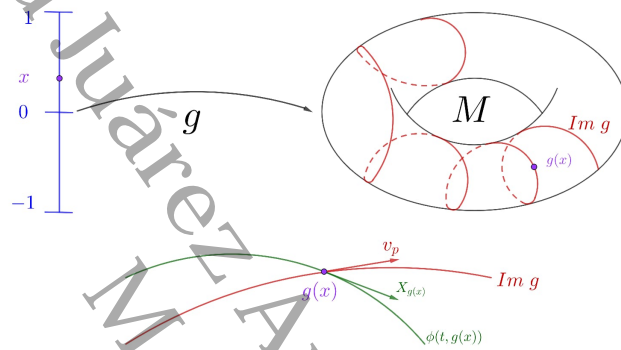


Figura 4.7: X_p transverso a $\text{Im} g$ en $p = g(x)$ con $x = x_0$.

4.5. Foliaciones en \mathbb{T}^2 vía el Teorema de Denjoy-Siegel

Los siguientes resultados son aplicaciones directas de la Proposición 4.4.1 para $M = \mathbb{T}^2$.

Corolario 4.5.1. Suponer que X es un campo vectorial no-singular de clase C^r , $r \geq 1$ en \mathbb{T}^2 . Entonces, la familia

$$\mathcal{F} = \{\text{Trayectorias de } X\} = \{C(p) : p \in \mathbb{T}^2\} = \{L_\alpha : \alpha \in \Lambda\},$$

es una foliación de co-dimensión 1.

En el siguiente resultado, al campo vectorial se le impone una condición más fuerte que antes, el ser de clase C^r , $r \geq 2$. Notar en el corolario 4.5.1, que r puede ser 1, lo que dará pauta a proporcionar un campo vectorial para

⁷Los push-forwards correspondientes son isomorfismos lineales, de acuerdo con la proposición 1.1.38.

el que no hay ni órbitas periódicas ni densas, pero sin embargo si tiene una foliación asociada de dimensión 1, y sera precisamente usando el campo de Denjoy X_D , como veremos en breve.

Corolario 4.5.2. Dado X como el teorema 3.3.1 (de Denjoy-Siegel) (i.e. no singular y de clase C^r , $r \geq 2$), se tiene que

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C}(p) : p \in \mathbb{T}^2\}$$

define una foliación de co-dimensión 1 en \mathbb{T}^2 .

Ejemplo 4.5.3 (1-foliacion para el campo X_D de Denjoy). Sea X_D el campo vectorial no-singular de Denjoy de clase C^1 dado en teorema 3.2.2. Entonces, de la proposicion 4.4.1, se obtiene una 1-foliación dada por las curvas integrales de X_D .

Resultados y Conclusiones

5.1. Resultados

En este trabajo de tesis, se abordaron variados temas concernientes al estudio y análisis de la dinámica de flujos asociados a campos vectoriales que están definidos en un 2-toro; dentro de los contenidos más relevantes tenemos los que a continuación precisamos.

Se comenzó con algunos preliminares sobre 2-variedades diferenciables, lo que permitió estudiar un objeto importante en esta tesis, que es la noción y caracterización de campos vectoriales (en particular los no-singulares, es decir, aquellos que no tienen puntos de equilibrio, hipótesis que fue crucial para establecer los principales resultados de este trabajo) en el 2-toro \mathbb{T}^2 como una sección suave del haz tangente en la variedad, ver las secciones 1.2.4 y 1.2.5.

En la sección 2.1.2 se presentó el teorema 2.1.7 sobre la existencia y unicidad de curvas integrales definidas en todo \mathbb{R} , es decir, las trayectorias asociadas a un campo vectorial en una 2-variedad diferenciable cerrada, lo cual, vía el teorema 2.1.8 y el corolario 2.1.9, se particularizó considerando campos vectoriales no singulares en el toro \mathbb{T}^2 . Se eligieron algunos ejemplos interesantes no triviales para presentar en este trabajo, lo que se puede apreciar en la sección 1.2.4, en particular, en la sección 2.5, se desarrolló de forma exhaustiva el análisis para campos vectoriales no-singulares constantes, $X_{a,b}$, cuyas curvas integrales son las proyecciones de rectas paralelas, con pendiente obtenida de las componentes del campo $X_{a,b}$. De hecho en el teorema 2.5.1, se determinó que son dos tipos de curvas integrales, o bien puras órbitas periódicas, o bien, se tienen solamente órbitas densas en \mathbb{T}^2 . El teorema 3.3.1 es parte central de este trabajo, ya que en el se muestran las condiciones para garantizar una generalización del teorema 2.5.1 para campos vectoriales no singulares no constantes y clase al menos C^2 en \mathbb{T}^2 .

Estos teoremas que describen las curvas integrales de los campos vec-

toriales no singulares, permitieron formular resultados sobre la temática de foliaciones por curvas, que se pueden apreciar tanto en las proposiciones 4.2.1, 4.3.3, y 4.4.1, como en los corolarios 4.5.2 y 4.5.1.

Lo anterior permite responder positivamente a la pregunta de investigación, como también comprobar la hipótesis y los supuestos planteados.

5.2. Conclusiones y recomendaciones

Como parte de la contribución en este trabajo de tesis, se tiene que las demostraciones y conceptos sobre 2-variedades suaves, se ejemplificaron de forma concreta, realizando los detalles puntualmente en cada demostración, haciéndolas lo más precisas posibles para el caso del toro 2-dimensional.

En general, muchas afirmaciones y conceptos no están en una sola referencia, ni en una misma notación, lo que hace que nuestra tarea haya sido trabajar el material, de tal forma que el desarrollo de los temas fuera paulatino, usando variadas referencias y poniendo los resultados y definiciones en un mismo tenor. Es en este sentido, que este trabajo de tesis se considera como una fuente de información de buen nivel y no trivial, para que los lectores interesados en estas temáticas tengan acceso tangible a través del trabajo global que se ha hecho.

De forma más específica, este trabajo unifica la noción de curvas integrales y de foliaciones (por curvas) en el toro \mathbb{T}^2 , explicando, en la medida de lo posible, los detalles técnicos, a través de los teoremas de Denjoy, y de Denjoy-Siegel, en los que encontramos una relación estrecha de la dinámica discreta para difeomorfismo en el círculo y los flujos asociados a campos vectoriales no singulares en \mathbb{T}^2 .

Cabe destacar, que existen teorías más elaboradas y avanzadas, como se puede ver en [C-N2013, Miller2002, Niv2001] sobre foliaciones en superficies, y que no necesariamente provienen de campos vectoriales; sin embargo, las técnicas empleadas en estas teorías guardan una relación estrecha con las ideas usadas en lo que se mostró para el campo vectorial de Denjoy X_D (ver teorema 3.2.2 y corolario 4.5.2), lo cual se convierte en un punto de partida para los lectores no expertos y aquellos interesados en estas temáticas.

Bibliografía

- [Abraham et al. 2012] Abraham, R., Marsden, J. E., & Ratiu, T. (2012). Manifolds, tensor analysis, and applications (Vol. 75). Springer Science & Business Media.
- [Bu-Gi2005] Burns, K., & Gidea, M. (2005). Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems. Chapman and Hall/CRC.
- [Br 2010] Brunella, M. (2010). Codimension one foliations on complex tori. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques* (Vol. 19, No. 2, pp. 405–418)
- [C-N2013] Camacho, C., & Neto, A. L. (2013). Geometric Theory of Foliations. Springer Science & Business Media.
- [Denjoy1932] Denjoy, A. (1932). Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11, 333-375.
- [Ku1998] Kuznetsov, A. (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition, Springer, New York.
- [Lee2013] Lee, J. M. (2013). Introduction to Smooth Manifolds. Springer, New York, NY.
- [Miller2002] Miller, S., Takloo-Bighash, R., Helfgott, H., & Spina, F. (2002). Junior Research Seminar: Diophantine Analysis and Approximations.
- [Niv2001] Nikolaev, I. (2001). Foliations on 2-Manifolds: In *Foliations on Surfaces* (pp. 1-18). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Perko2013] Perko, L. (2013). Differential Equations and Dynamical Systems (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
- [Pa-De M2012] Palis, J. J., & De Melo, W. (2012). Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction. Springer Science & Business Media.

- [Siegel1945] Siegel, C. L. (1945). Note on differential equations on the torus. *Annals of Mathematics*, 46(3), 423-428.
- [Sós1958] Sós, V. T. (1958). On the theory of diophantine approximations. II (inhomogeneous problems). *Acta Mathematica Hungarica*, 9(1-2), 229-241.
- [Sternberg1957] Sternberg, S. (1957). On differential equations on the torus. *American Journal of Mathematics*, 79(2), 397-402.
- [Ta1992] Tamura, I. (1992). *Topology of Foliations: An Introduction* (Vol. 97). American Mathematical Soc..

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Diferentes estructuras del 2-Toro

A.1. Estructura de 2-variedad

A.1.1. \mathbb{S}^1 como una 1-variedad suave

En esta sección veamos que \mathbb{S}^1 es una 1-variedad topológica. Primero, observemos que \mathbb{S}^1 es un espacio topológico con la topología relativa heredada de \mathbb{R}^2 , esto es,

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}^1}^{rel} = \{B \cap \mathbb{S}^1 : B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}\}.$$

- * \mathbb{S}^1 es Hausdorff y segundo contable, ya que \mathbb{R}^2 es un espacio Hausdorff y segundo contable.
- * Localmente euclidiano: Sean U_i^\pm , $i = 1, 2$, los subconjuntos de \mathbb{S}^1 (ver figura A.1), definidos como:

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1 : x_i > 0\}, \quad i = 1, 2,$$

$$U_i^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1 : x_i < 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Notemos que

$$\mathbb{S}^1 = U_1^+ \cup U_1^- \cup U_2^+ \cup U_2^-.$$

Se tienen las funciones φ_i^\pm , $i = 1, 2$, ver figura A.1, que son homeomorfismos:

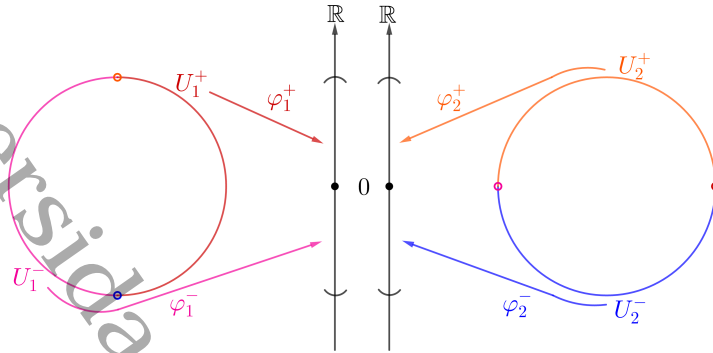
$$\varphi_1^\pm : U_1^\pm \longrightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad \varphi_1^\pm(x_1, x_2) = x_2,$$

$$\varphi_2^\pm : U_2^\pm \longrightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad \varphi_2^\pm(x_1, x_2) = x_1.$$

Cuyas inversas son:

$$(\varphi_1^\pm)^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow U_1^\pm, \quad (\varphi_1^\pm)^{-1}(y) = (\pm\sqrt{1-|y|^2}, y),$$

$$(\varphi_2^\pm)^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow U_2^\pm, \quad (\varphi_2^\pm)^{-1}(y) = (y, \pm\sqrt{1-|y|^2}).$$

Figura A.1: Cartas de \mathbb{S}^1 .

Tenemos que $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^1} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i = 1, 2\}$ es un atlas para \mathbb{S}^1 .

Ya vimos que \mathbb{S}^1 es una 1-variedad topológica con respecto al atlas $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^1} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i = 1, 2\}$. Para ver que M es una 1-variedad suave, tenemos que verificar que todas las cartas de $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^1}$ son suavemente compatibles entre sí. En efecto,

$$\varphi_1^\pm \left((\varphi_2^\pm)^{-1}(y) \right) = \varphi_1^\pm \left(y, \pm \sqrt{1 - |y|^2} \right) = \pm \sqrt{1 - |y|^2},$$

$$\varphi_2^\pm \left((\varphi_1^\pm)^{-1}(y) \right) = \varphi_2^\pm \left(\pm \sqrt{1 - |y|^2}, y \right) = \pm \sqrt{1 - |y|^2}.$$

Consecuentemente:

$$\varphi_1^\pm \circ (\varphi_1^\pm)^{-1} = Id,$$

$$\varphi_2^\pm \circ (\varphi_2^\pm)^{-1} = Id.$$

De donde se observa que las funciones de transición son difeomorfismos.

En la siguiente sección se muestra que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una 2-variedad suave.

A.1.2. $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como 2-variedad

La definición de una 2-variedad suave, es análoga a la definición 1.1.3.

En la **subsección A.1.1** le dimos la topología relativa a \mathbb{S}^1 , a decir $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^1}^{rel} = \{B \cap \mathbb{S}^1 : B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}\}$. Por lo cual, la topología con la que consideramos al toro (\mathbb{T}^2) es la topología producto, es decir,

$$\mathcal{T}_{\mathbb{T}^2} = \{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{S}^1}^{rel}\}.$$

Por la proposición 1.1.7, dado que \mathbb{S}^1 es una 1-variedad suave, tenemos que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una 2-variedad suave.

Sea

$$\Lambda := \{(+, -, i, j), (+, +, i, j), (-, +, i, j), (-, -, i, j) : i, j = 1, 2\}.$$

Para $\alpha = (+, -, i, j) \in \Lambda$, definimos:

$$U_\alpha = U_i^+ \times V_j^- \text{ y } \varphi_\alpha := \varphi_i^+ \times \psi_j^-.$$

Análogamente definimos U_β y φ_β , para toda $\beta \in \Lambda$.

Así, por la proposición 1.1.7, un atlas suave de \mathbb{T}^2 está dado por:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{T}^2} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}.$$

A.2. \mathbb{T}^2 como espacio cociente y métrico

En esta sección definiremos una métrica en \mathbb{T}^2 , daremos un ejemplo concreto de como medir una distancia entre dos puntos en nuestro espacio, para esto nos basamos en [Ta1992].

Definición A.2.1. Sea $P(x, y)$ y $P'(x', y')$ dos puntos en el plano. Decimos que P está relacionado con P' , $P \sim P'$, si $x - x', y - y' \in \mathbb{Z}$.

Proposición A.2.2. La relación \sim es una **relación de equivalencia**, esto es, satisface las propiedades siguientes:

1. $P \sim P'$,
2. Si $P \sim P'$ entonces $P' \sim P$,
3. Si $P \sim P'$ y $P' \sim P''$, entonces $P \sim P''$.

Dado que \sim es una relación de equivalencia, denotamos las clases de equivalencias de un punto P por

$$[P] := \{P' \in \mathbb{R}^2 : P' \sim P\}, \quad \forall P \in \mathbb{R}^2$$

Además, diremos que P es un **representante** de la clase de equivalencia.

Proposición A.2.3. Una clase $[P(x, y)]$ es el conjunto de puntos en el plano de la forma $(x + m, y + n)$, con $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Demostración. Sea $P(x, y)$ un punto en el plano, entonces

$$\begin{aligned} [P(x, y)] &= \{P'(x', y') \in \mathbb{R}^2 : P'(x', y') \sim P(x, y)\} \\ &= \{P'(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' - x \in \mathbb{Z} \text{ y } y' - y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{P'(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' - x = m \text{ y } y' - y = n, m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{P'(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = x + m \text{ y } y' = y + n, m, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

□

Los puntos en el plano se descomponen en clases de equivalencias. En la figura A.2 se muestran las clases de $[P(0, 0)]$, $[Q(x, 0)]$, $[R(0, y)]$ y $[S(x, y)]$.

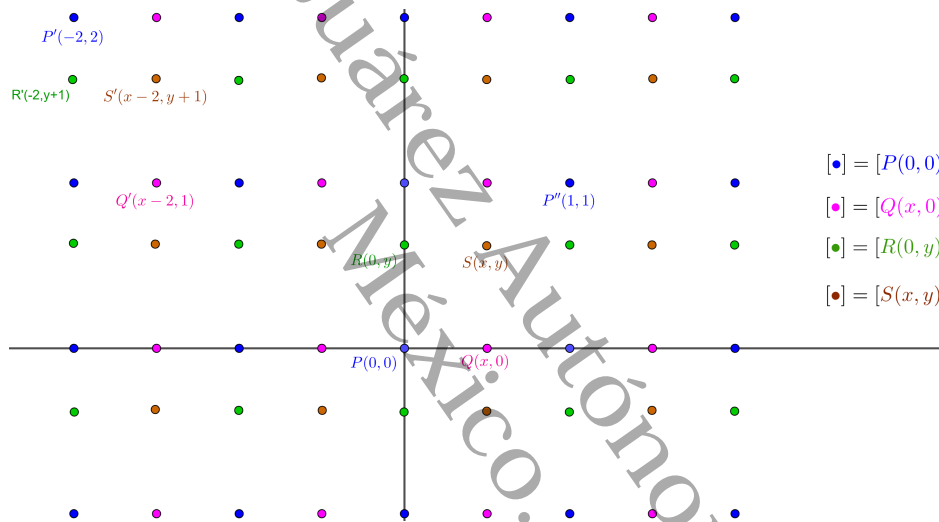


Figura A.2: Clases del cero y otros puntos genéricos.

Definición A.2.4. El conjunto cociente del plano por la relación de equivalencia \sim es un toro, denotado por $T := \mathbb{R}^2 / \sim$, ver figura A.3.

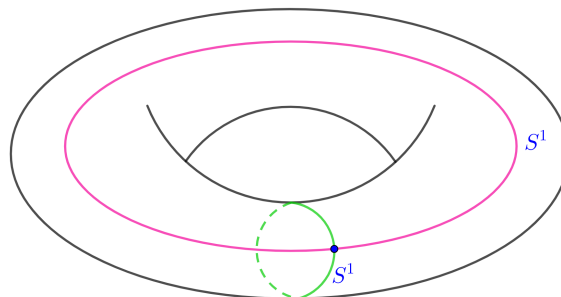


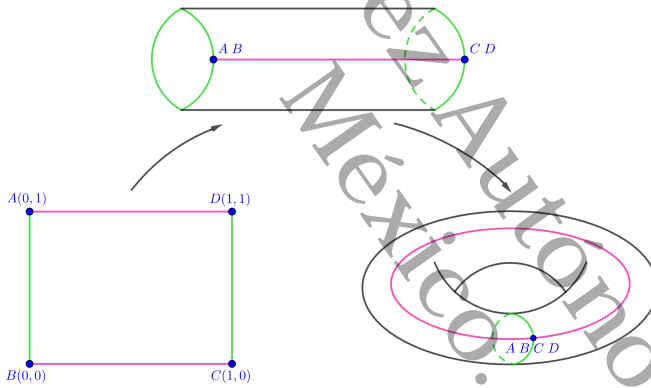
Figura A.3: Toro $T^2 = S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2 / \sim$.

Afirmación A.2.5. De la clasificación de superficies compactas tenemos que \mathbb{T}^2 es difeomorfo al espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim . Por lo tanto, podemos inducir la estructura suave de \mathbb{T}^2 al espacio cociente.

• Podemos considerar el siguiente cuadrado $ABCD$ con vértices en $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$ y $D(1, 1)$. Para un punto arbitrario $P(x, y)$ en el plano elegimos números enteros m, n tal que $0 \leq x - m \leq 1$, $0 \leq y - n \leq 1$, $Q(x - m, y - n)$ está en el cuadrado $ABCD$ y satisface que

$$P(x, y) \sim Q(x - m, y - n).$$

Por lo tanto, si pegamos el lado AB con el lado DC y el lado AD con el lado BC , de acuerdo con la relación de equivalencia el resultado nos dará un toro. Uno puede pensar en el toro como el resultado de identificar los círculos finales del cilindro.



Definición A.2.6. Sean $p = [P]$ y $p' = [P']$. Definimos la distancia de P a P' como el mínimo de las distancias $\rho(Q, Q')$, con $Q \in [P]$ y $Q' \in [P']$, es decir,

$$\tilde{\rho}(p, p') = \min_{\substack{Q \in [P]=p \\ Q' \in [P']=p'}} \rho(Q, Q').$$

$\tilde{\rho}(p, p')$, denotará la distancia entre p y p' en T .

La siguiente proposición muestra que T con la distancia $\tilde{\rho}$ es un espacio métrico.

Proposición A.2.7. Sean $p, p', p'' \in T$. La distancia $\tilde{\rho}$ satisface lo siguiente:

- i) $\tilde{\rho}(p, p') \geq 0$, y $\tilde{\rho}(p, p') = 0$ si y sólo si $p = p'$,
- ii) $\tilde{\rho}(p, p') = \tilde{\rho}(p', p)$,

$$\text{iii)} \quad \tilde{\rho}(p, p') \leq \tilde{\rho}(p, p'') + \tilde{\rho}(p'', p').$$

Demostración. i) Por definición tenemos

$$\tilde{\rho}(p, p') = \min_{\substack{Q \in [P]=p \\ Q' \in [P']=p'}} \rho(Q, Q') = \rho(Q_1, Q'_1); \text{ para algunos } Q_1 \in [P], Q'_1 \in [P'].$$

Supongamos que $\tilde{\rho}(p, p') = \rho(Q_1, Q'_1) \geq 0$.

Como $\rho(Q_1, Q'_1) \geq 0$, por ser ρ distancia euclidiana, entonces

$$\tilde{\rho}(p, p') = \rho(Q_1, Q'_1) \geq 0.$$

Dado que, ρ es distancia, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(p, p') = \rho(Q_1, Q'_1) = 0, \\ \Leftrightarrow Q_1 = Q'_1 \\ \Leftrightarrow [Q_1] = [P] = [P'] = [Q'_1] \\ \Leftrightarrow p = p'. \end{aligned}$$

ii) Queremos demostrar que $\tilde{\rho}(p, p') = \tilde{\rho}(p', p)$.

Notemos que $\rho(Q, Q') = \rho(Q', Q)$ para todo $Q \in [P], Q' \in [P']$.

Entonces, $\tilde{\rho}(p, p') = \min_{\substack{Q \in [P]=p \\ Q' \in [P']=p'}} \rho(Q, Q') = \min_{\substack{Q' \in [P']=p' \\ Q \in [P]=p}} \rho(Q', Q) = \tilde{\rho}(p', p)$.

iii) Por definición existen $Q \in [P] = p, Q' \in [P'] = p', Q'' \in [P''] = p''$ y $Q''' \in [P'''] = p''$, satisfaciendo que

$$\tilde{\rho}(p, p'') = \rho(Q, Q'') \text{ y } \tilde{\rho}(p'', p') = \rho(Q''', Q').$$

Si Q', Q'', Q''' son de la forma $Q'(x', y'), Q''(x'', y'')$ y $Q'''(x''', y''')$ respectivamente, como Q'' y Q''' pertenecen a $[P'']$, es decir, $x'' - x''' = m$ y $y'' - y''' = n$ son enteros. Entonces

$$Q'(x', y') \sim \tilde{Q}'(x' + m, y' + n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(p, p') &\leq \rho(Q, \tilde{Q}') \leq \rho(Q, Q'') + \rho(Q'', \tilde{Q}') \\ &= \rho(Q, Q'') + \rho(Q''', Q') \\ &= \tilde{\rho}(p, p'') + \tilde{\rho}(p'', p'). \end{aligned}$$

□

A.3. SUPERFICIE PARAMETRIZADA POR UN CUBRIENTE SUAVE 97

Dado un punto $P \in T$, definamos una ϵ -vecindad como

$$U_\epsilon(P) = \{P' \in T : \rho(P, P') < \epsilon\}.$$

Las siguientes definiciones son exactamente análogas a las definidas para el plano.

Definición A.2.8. *Sea A un subconjunto de T .*

1. *Un punto $P \in T$ es un **punto interior** de A , si $U_\epsilon(P) \subset A$, para algún $\epsilon > 0$.*
2. *Un punto $P' \in T$ es un **punto cerradura** de A , si para cada $\epsilon > 0$ $A \cap U_\epsilon(P') \neq \emptyset$.*
3. *Decimos que $P' \in T$ es un **punto de acumulación** de A , si para cada $\epsilon > 0$, $A \cap U_\epsilon(P')$ contiene finitos puntos.*

A.3. Superficie parametrizada por un cubriente suave

En este apartado haciendo uso de [Pa-De M2012, pág. 12, Example 2] y [Bu-Gi2005, pág. 13, Example 1.3.3], describimos al toro como una superficie parametrizada \mathcal{S}_T , la cual es la imagen del mapeo

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S}_T \subset \mathbb{R}^3$$

definido por

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos(2\pi v)) \cos(2\pi u), (2 + \cos(2\pi v)) \sin(2\pi u), \sin(2\pi v)).$$

Se tiene que φ es un difeomorfismo local (de hecho es un cubriente suave), el cual:

1. Manda las líneas horizontales en \mathbb{R}^2 a los paralelos de latitud en \mathcal{S}_T , ver figura A.4.

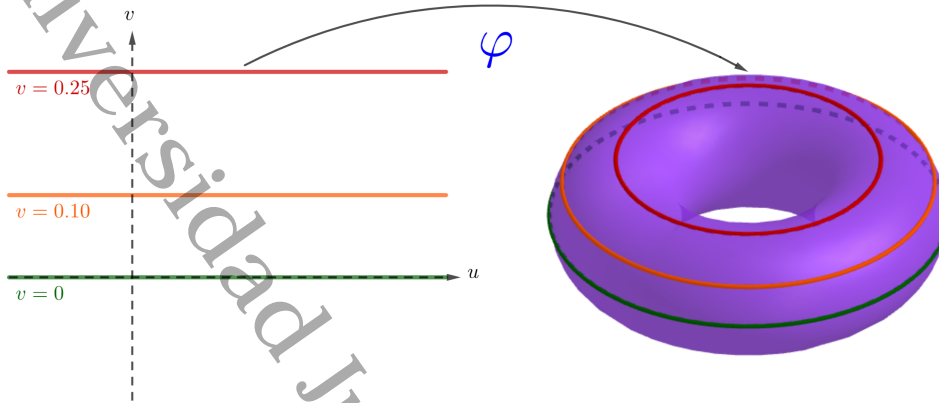


Figura A.4: Parametrización de latitudes.

2. Manda las líneas verticales en \mathbb{R}^2 a los meridianos en \mathcal{S}_T , ver figura A.5.

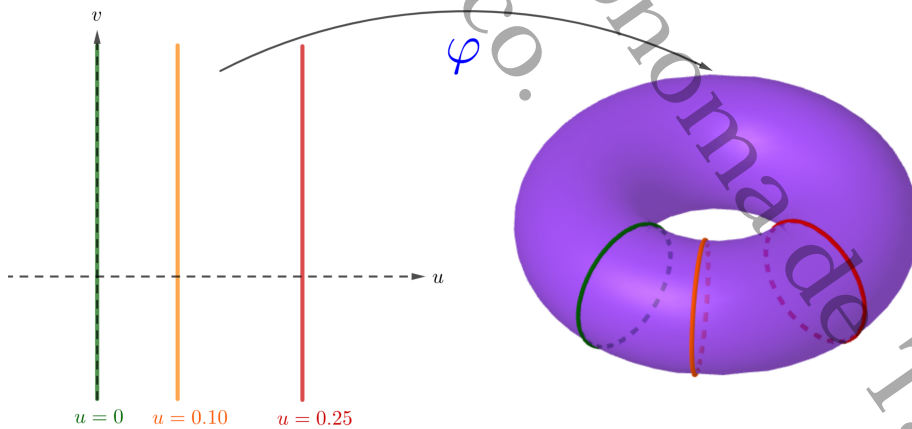


Figura A.5: Parametrización de meridianos.

3. Manda el cuadro $[0, 1] \times [0, 1]$ sobre \mathcal{S}_T , ver figura A.6.

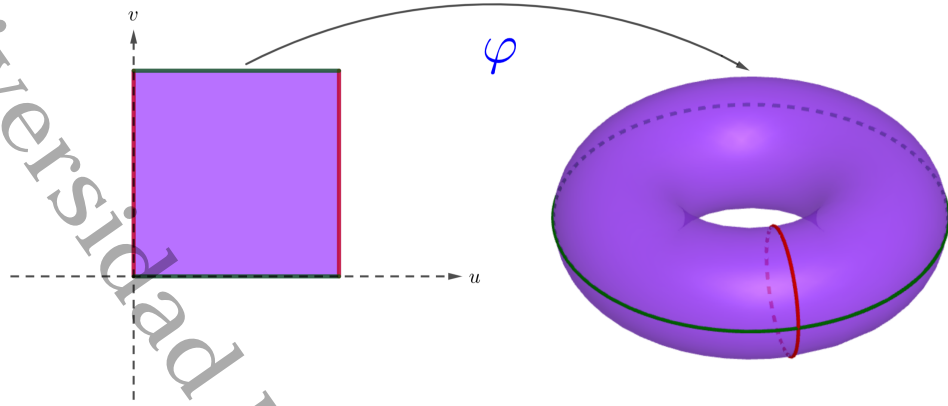


Figura A.6: Parametrización del Toro como superficie.

Observamos que $\varphi(u, v) = \varphi(u_1, v_1)$ si y solo si $(u, v) - (u_1, v_1) = (u - u_1, v - v_1) \in \mathbb{Z}^2$.

Por lo tanto, si tomamos $[(u, v)] \in \frac{[0,1] \times [0,1]}{\mathbb{Z}^2} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, tal que $[(0,0)] \neq [(u, v)]$. Entonces existe un único $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$\pi((x, y)) = [(u, v)],$$

donde π es el mapeo cociente $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$. Esto permite definir una aplicación (de conjuntos)

$$\Phi: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{S}_T, \quad \Phi([(u, v)]) := \varphi(x, y).$$

Lema A.3.1. $\Phi([(u, v)]) = \Phi([(u_1, v_1)])$ si $[(u, v)] = [(u_1, v_1)]$.

Demostración. Notemos que

$$\Phi([(u, v)]) = \varphi(x, y) \text{ y } \Phi([(u_1, v_1)]) = \varphi(x, y).$$

Entonces $\Phi([(u, v)]) = \Phi([(u_1, v_1)])$. □

A.3.1. Estructura diferencial en \mathcal{S}_T vía φ

Usando el hecho de que φ es un cubriente suave, definiremos en \mathcal{S}_T un atlas de la siguiente manera.

Sea $J = [0, 1]$. Se tiene que $\varphi: J \times J \rightarrow \mathcal{S}_T$ se convierte en una parametrización de \mathcal{S}_T . Entonces, dado $Q \in \mathcal{S}_T$, existe un abierto $V_Q \subset \mathcal{S}_T$ tal que el mapeo restricción $\varphi_{V_Q}: W := \varphi(V_Q) \rightarrow V_Q$, es un difeomorfismo. Entonces,

variando el punto Q en \mathcal{S}_Q como conjunto de índices, se tiene el siguiente atlas

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_T} = \{(V_Q, \psi_Q) : Q \in \mathcal{S}_T\}$$

donde los mapeos de coordenadas son $\psi_Q := (\varphi_Q)^{-1}$, los cuales denotaremos simplemente como $(u, v) = \psi_Q$.

Lema A.3.2. *Como variedades suaves \mathcal{S}_T y \mathbb{T}^2 son difeomorfos.*

Usando Φ se puede dar a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ la estructura de variedad suave, usando la de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ o equivalentemente la de \mathcal{S}_T .

México.

Autónoma de Tabasco.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional

Título de Tesis:	FOLIACIONES DETERMINADAS POR SISTEMAS DINÁMICOS NO-SINGULARES EN UN 2-TORO
Autora de la Tesis:	Marcela Guadalupe Morales Alvarez
ORCID:	0009-00006-2944-7043
Resumen de la Tesis:	<p>Resumen: En este trabajo, se estudia la teoría básica de 2-variedades diferenciables y su aplicación para comprender el teorema de Denjoy-Siegel en el toro 2-dimensional \mathbb{T}^2, el cual establece que las curvas integrales asociadas a un campo vectorial no-singular X de clase C^r, $r \geq 2$, pueden ser algunas periódicas o bien todas ergódicas. Asimismo, se aborda la teoría básica de foliaciones, y derivado del análisis de dicho teorema, se obtiene un ejemplo del concepto de foliación de codimensión 1, donde las hojas son dadas por las curvas integrales correspondientes al campo X. Finalmente, para enriquecer el tema, se explica un ejemplo de Denjoy de un campo vectorial no-singular de clase C^1, cuyas curvas integrales forman una 1-foliación, pero para el que el teorema de Denjoy-Siegel no aplica. Abstract: In the present work, the basic 2-differentiable manifolds theory and its application to the understanding of the Denjoy-Siegel Theorem in the 2-torus \mathbb{T}^2 are studied.</p>

	<p>Such a Theorem states that the integral curves for a given C^r, $r \geq 2$, non-singular vector field X, are such that some of them can be periodic or all of them are ergodic. Besides, the basic theory of foliations is studied, and derived from the analysis of the Denjoy-Siegel theorem, an example of the concept of codimension 1 foliation is given, where the leaves are given by the integral curves corresponding to X. Finally, in order to provide an enrichment of the present topic, a Denjoy example of a non-singular C^1 vector field is given, whose integral curves form a 1-dimensional foliation but the Denjoy-Siegel Theorem does not apply.</p>
<p>Palabras claves de la Tesis</p>	<p>Campo vectorial no-singular, curvas integrales, teorema de Denjoy-Siegel, foliaciones de codimension 1.</p>
<p>Referencias citadas:</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Abraham, R., Marsden, J. E., & Ratiu, T. (2012). <i>Manifolds, tensor analysis, and applications</i> (Vol. 75). Springer Science & Business Media. 2. Burns, K., & Gidea, M. (2005). <i>Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems</i>. Chapman and Hall/CRC. 3. Brunella, M. (2010). Codimension one foliations on complex tori. In <i>Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques</i> (Vol. 19, No. 2, pp. 405-418). 4. Camacho, C., & Neto, A. L. (2013). <i>Geometric Theory of Foliations</i>. Springer Science & Business Media.

5. Denjoy, A. (1932). Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11, 333-375.
6. Kuznetsov, A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, Springer, New York.
7. Lee, J. M. (2013). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, NY.
8. Miller, S., Takloo-Bighash, R., Helfgott, H., & Spinu, F. (2002). Junior Research Seminar: Diophantine Analysis and Approximations.
9. Nikolaev, I. (2001). Foliations on 2-Manifolds: In *Foliations on Surfaces* (pp. 1-18). Springer, Berlin, Heidelberg.
10. Perko, L. (2013). *Differential Equations and Dynamical Systems* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
11. Palis, J. J., & De Melo, W. (2012). *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer Science & Business Media.
12. Siegel, C. L. (1945). Note on differential equations on the torus. *Annals of Mathematics*, 46(3), 423-428.

13. Sós, V. T. (1958). On the theory of diophantine approximations. II (inhomogeneous problems). *Acta Mathematica Hungarica*, 9(1-2), 229-241.
14. Sternberg, S. (1957). On differential equations on the torus. *American Journal of Mathematics*, 79(2), 397-402.
15. Tamura, I. (1992). *Topology of Foliations: An Introduction* (Vol. 97). American Mathematical Soc..