



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS
BÁSICAS

ELECTRODINÁMICA NO-LOCAL
A TRAVÉS DEL FORMALISMO DIRAC-BERGMANN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS CON
ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS

PRESENTA:

ALEJANDRO GABRIEL ANDARCIA
CABALLERO

Director:

Dr. Jaime Manuel Cabrera

Codirector:

Dr. Paulin Fuentes Jorge Mauricio

Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, Tabasco, el día 01 del mes diciembre del año 2025, el que suscribe Alejandro Gabriel Andarcia Caballero, alumno del Programa de Maestría en Ciencias con Orientación en Nanociencias, con número de matrícula 232A17001, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas (DACB), de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del grado de Maestro en Ciencias con Orientación en Nanociencias y titulada “Electrodinámica No-local a través del Formalismo Dirac-Bergmann”, dirigida por el Dr. Jaime Manuel Cabrera y codirigida por el Dr. Mauricio Paulin Fuentes.

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente

Villahermosa, Tabasco a 01 de diciembre de 2025



Alejandro Gabriel Andarcia Caballero



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



2025
AÑO DE LA
Mujer
Indígena

DIRECCIÓN

04 de diciembre de 2025

ING. ALEJANDRO GABRIEL ANDARCIA CABALLERO
EGRESADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS
PRESENTE

Por medio del presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que se le **AUTORIZA** la impresión del trabajo titulado **“ELECTRODINÁMICA NO-LOCAL A TRAVÉS DEL FORMALISMO DIRAC-BERGMANN”** dirigido por el Dr. Jaime Manuel Cabrera y Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes, bajo la modalidad de titulación por Tesis.

La Comisión revisora conformada por el Dr. Richart Falconi Calderón, Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes, Dr. Jorge Alejandro Bernal Arroyo, Dr. Filiberto Ortiz Chi y Dr. José Luis Benítez Benítez, aprobó el documento en virtud de reunir los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL y obtener el grado de **Maestro en Ciencias con orientación en Nanociencias**.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.C.P.- Archivo.

Dir'Dra.HPV/JP'Dra.EAM/jkal *J*

Km.1 Carretera Conduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Conduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 26 de septiembre de 2025

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTOR en la producción, creación y/o realización de la obra denominada Electrodinámica No-local a través del Formalismo Dirac-Bergmann.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES



Alejandro Gabriel Andarcia
Caballero

Estudiante

Dr. Jaime Manuel Cabrera

Director de Tesis

Dr. Jorge Mauricio Paulin
Fuentes

Codirector de Tesis

TESTIGOS

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mi madre, Yusmary Josefina Caballero Sánchez, por enseñarme que luchar hasta el cansancio siempre vale la pena cuando es por algo que uno ama.

Te llevo siempre en mi corazón.

Descansa en paz.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi padre, el Ing. Pedro Felipe Andarcia González, uno de los pilares que sostienen mi vida, por estar presente y caminar atento a mi lado durante este trayecto.

A mi madre, la Lic. Yusmary Josefina Caballero Sánchez (†), por todas las enseñanzas que me dejó, por ayudarme a convertirme en un hombre de bien y por enseñarme a no rendirme. Gracias por ser el motor que me permite avanzar por el camino de la vida.

A mi tío, el Lic. Ramón Antonio Caballero, por ser como un segundo padre, por apoyar mis decisiones y animarme a dar más de mí mismo cada día. Por celebrar cada uno de mis logros como suyos, pero también señalar mis faltas.

A la M. en C. Stephania Guadalupe Lázaro Mass, el amor de mi vida, por darme motivación cuando no la tenía, por creer en mí cuando yo no lo hacía, por sobrellevar conmigo los miedos y dificultades, y por ser mi gran inspiración a seguir.

A mi tía Rosaina Andarcia y mi prima Daniela Andarcia por alimentar mis sueños, por comprender mi personalidad y por cuidarme tanto como pueden. Gracias por su cariño y por su amor incondicional.

A mi hermano Ricardo David, mis tíos Manuel Andarcia y Thaoly, a mis amigos y el resto de mi familia por su amor y por estar presentes en los momentos clave de mi vida.

A mis directores el Dr. Jaime Manuel Cabrera y al Dr. Mauricio Paulin Fuentes por guiarme en el mundo de la investigación de la manera más atenta y paciente. Con su ayuda logré cumplir uno de mis objetivos y encontré mi camino dentro de esta compleja área que es la investigación.

Al SECITIH por el apoyo otorgado en concepto de beca de maestría durante el periodo 2023–2025. A la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por brindarme la oportunidad de seguir con mi sueño, aun después de los problemas ocurridos durante mi ingreso a la maestría y a todos mis profesores por formarme como maestro en ciencias.

Índice general

1	Introducción	7
2	Objetivos	10
2.1	Objetivo general	10
2.2	Objetivos específicos	10
3	Mapeo de Seiberg–Witten y el espacio no conmutativo	12
3.1	Motivación y contexto histórico	12
3.2	Fundamentos de la no conmutatividad y el mapeo de Seiberg–Witten	13
3.3	Mapeo de SW en las teorías de calibre	15
3.4	Condiciones de aplicabilidad del mapa de Seiberg–Witten	15
3.5	Aplicación a la electrodinámica no conmutativa	17
3.6	Conclusión del capítulo	17
4	Mapeo de Seiberg–Witten en la Formulación de la Electrodinámica No Conmutativa	19
4.1	Acción de Maxwell en espacios no conmutativos	19
4.2	Implementación del mapeo de Seiberg–Witten	20
4.3	Expansión en $\theta^{\mu\nu}$ y correcciones efectivas	20
4.4	Tensor de campo y simetría calibre	21
4.5	Corrientes no conmutativas en la NCED	22
4.6	Relevancia para el análisis hamiltoniano	23
4.7	Conclusión del capítulo	24
5	El Formalismo de Restricciones de Dirac	25
5.1	Introducción	25
5.2	Sistemas mecánicos con restricciones	26
5.3	Momentos Canónicos y Restricciones primarias	28
5.4	Condiciones de regularidad	30
5.5	Hamiltoniano canónico	31
5.6	Restricciones Secundarias	34
5.7	Clasificación de las restricciones y fijación del calibre	36
5.7.1	Restricciones de Primera Clase	37
5.7.2	Restricciones de Segunda Clase	37

5.7.3	Restricciones efectivas	37
5.7.4	Determinación de multiplicadores de Lagrange	38
5.7.5	Conteo de grados de libertad	38
5.7.6	Fijación de calibre	39
5.7.7	Generador de transformaciones de calibre (método de Castellani)	39
5.7.8	Observables de Dirac	40
5.8	Aplicaciones a teorías de campos	40
5.9	Relevancia para la tesis	41
6	Electrodinámica de Maxwell no conmutativa	42
6.1	Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa	42
6.1.1	Hamiltoniano Canónico	45
6.1.2	Hamiltoniano primario y restricciones secundarias	46
6.1.3	Clasificación de las restricciones	49
6.1.4	Transformaciones de calibre	50
6.1.5	Fijación de calibre: calibre temporal y condición de Lorenz	51
6.1.6	Corchetes de Dirac	52
6.1.7	Ecuaciones de Hamilton	53
6.1.8	Ecuaciones de Maxwell	54
6.2	Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes	56
6.2.1	Hamiltoniano canónico	59
6.2.2	Hamiltoniano primario y restricciones secundarias	62
6.2.3	Transformaciones de norma	63
6.2.4	Clasificación de las restricciones, fijación de calibre y corchetes de Dirac	64
6.3	Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas	65
6.3.1	Hamiltoniano canónico	68
6.3.2	Hamiltoniano primario y restricciones secundarias	69
6.3.3	Transformaciones de calibre	70
6.3.4	Casos representativos para \hat{J}^μ y regularidad del algoritmo de Dirac–Bergmann	71
6.3.5	Corchetes de Dirac	77
6.3.6	Ecuaciones de Hamilton	79
	Cálculo de \dot{A}_s	80
	Cálculo de $\dot{\pi}^s$	81
6.3.7	Ecuaciones de Maxwell	82
7	Conclusión	87
8	Código MATLAB	91
8.1	Versiones disponibles	91
8.2	Software para teoría de campos	93
8.2.1	Estructura de las funciones	93
	Funciones aplicadoras	94

	Funciones auxiliares	94
	Funciones solucionadoras	95
8.3	Funciones de cálculo	95
	8.3.1 Operaciones base	96
8.4	Salidas esperadas del programa	97
8.5	Casos de error	98
8.6	Diagrama de Flujo	99
8.7	Sistemas probados	100
A	Artifugios matemáticos	101
	A.1 Distribución delta de Dirac	101
	A.2 Derivadas funcionales	103
	A.3 Corchetes de Poisson funcionales	104
B	Guia de Uso del codigo	106
	B.1 solveSingular.m	106
	Versiones disponibles de solveSingular	107
	B.2 Funciones auxiliares	108
C	Aplicacion del codigo de Matlab	112
	Bibliografía	121

Resumen

En este trabajo se aplica el algoritmo de Dirac–Bergmann para estudiar la electrodinámica de Maxwell en un espacio-tiempo no conmutativo con fuentes externas, obteniendo las ecuaciones de Maxwell con correcciones no conmutativas. Se presenta una revisión rigurosa del formalismo de restricciones de Dirac y, además del sistema principal, se analizan sistemas afines que permiten comprobar y validar los resultados, así como clarificar su interpretación. El desarrollo se apoya en una herramienta computacional implementada en MATLAB, que automatiza el procedimiento del formalismo de restricciones —desde el cálculo de los momentos canónicos y la identificación y clasificación de restricciones hasta los corchetes de Poisson/Dirac— y entrega de manera ordenada y reproducible las expresiones relevantes del sistema.

Palabras clave: Algoritmo de Dirac-Bergmann, Restricciones, Maxwell No-conmutativo, MATLAB.

Abstract

In this work, we apply the Dirac-Bergmann algorithm to study Maxwell electrodynamics in a noncommutative spacetime with external sources, thereby obtaining Maxwell's equations with noncommutative corrections. We provide a rigorous review of the Dirac constraint formalism and, in addition to the main system, analyze related systems that help verify and validate the results and clarify their interpretation. The development is supported by a computational tool implemented in this project that automates the constraint-formalism pipeline—from computing canonical momenta and identifying/classifying constraints to constructing Poisson/Dirac brackets—and produces the system's relevant expressions in an orderly and reproducible manner.

Keywords: Constraints, Dirac-Bergmann algorithm, gauge theories, Non-commutative Maxwell, MATLAB.

Capítulo 1.

Introducción

La posibilidad de que el espacio-tiempo posea una estructura no conmutativa fue sugerida por Heisenberg a finales de la década de 1930 y formalizada por Snyder en 1947. Aunque en ese momento la propuesta perdió relevancia debido al éxito del programa de renormalización, el interés resurgió con la teoría de cuerdas, donde la no conmutatividad surge de manera natural como un rasgo del espacio-tiempo a altas energías. A escalas cercanas a la longitud de Planck, la geometría conmutativa deja de ser una descripción adecuada. La introducción de conmutadores no triviales entre coordenadas espaciales abre la posibilidad de formular teorías de campos con propiedades de no localidad y con posibles violaciones controladas de Lorentz. Estas extensiones son de gran interés no solo en física de altas energías, sino también en materia condensada, donde fenómenos como el efecto Hall cuántico o la superconductividad no local ofrecen paralelismos con estructuras no conmutativas. Más específicamente, a escalas de longitud cercanas a la de Planck (10^{-33} cm), el espacio-tiempo trasciende la descripción de la física conocida. En este régimen aparecen propuestas que consideran la violación de la invariancia de Lorentz y la necesidad de introducir parámetros no conmutativos, estimados del orden de 10 TeV^{-2} . Estas ideas se apoyan en argumentos como la denominada *conjetura del aro*, que sugiere la inevitabilidad de la cuantización de la posición en distancias inferiores a la longitud de Planck, combinando principios de

relatividad general y mecánica cuántica.

La mecánica no conmutativa aparece como un marco para explorar la existencia de una longitud mínima en la naturaleza. Su estudio no solo se limita a la física de altas energías, sino que también encuentra aplicaciones en sistemas de materia condensada. Ejemplos notables incluyen el problema de Landau en la física del estado sólido y el efecto Hall cuántico, donde la no conmutatividad se manifiesta en el sector de los momentos. Asimismo, en el ámbito de la superconductividad se han desarrollado modelos no conmutativos que generalizan la teoría de London. En particular, en [Martínez-Carbajal et al., 2022] se estudia la superconductividad no local de Pippard [Pippard and Bragg, 1953], incorporando el mapeo de Seiberg–Witten [Seiberg and Witten, 1999] en la teoría clásica de London [London and London, 1935] para superconductores tipo I bajo un campo magnético externo. Al definir potenciales de Maxwell no conmutativos, se deriva la ecuación de London para la supercorriente en función del parámetro no conmutativo. Se argumenta que los efectos no conmutativos del campo magnético pueden expresarse de manera similar a la superconductividad no local de Pippard. Además, se demuestra que la cuantización del flujo sigue siendo consistente en comparación con el caso conmutativo, y que la longitud de penetración efectiva de London se reduce a la estándar en el límite conmutativo.

Un avance fundamental para el estudio de estas teorías es el mapeo de Seiberg–Witten, que permite establecer una correspondencia entre teorías de calibre definidas en espacios no conmutativos y sus equivalentes formuladas en espacios conmutativos. Este procedimiento preserva la invariancia de calibre y facilita un análisis sistemático de la electrodinámica no conmutativa (NCED), proporcionando así un marco conceptual y matemático sólido para explorar las consecuencias físicas de la no conmutatividad.

A pesar de los avances alcanzados en el marco lagrangiano, el análisis hamiltoniano de la NCED y, en particular, la identificación y clasificación de sus restricciones, ha recibido

CAPÍTULO 1. Introducción

menos atención en la literatura. En especial, el acoplamiento a fuentes y la verificación de la consistencia de la dinámica de calibre son aspectos que requieren un tratamiento más profundo y sistemático. Este vacío constituye una motivación central del presente trabajo.

La justificación de esta investigación se apoya en dos pilares complementarios. En primer lugar, se busca contribuir al entendimiento de la estructura hamiltoniana de la NCED mediante la aplicación rigurosa del formalismo de Dirac–Bergmann, que permite clasificar restricciones, construir generadores de calibre y derivar la dinámica reducida de manera consistente. En segundo lugar, se desarrolla una herramienta computacional en MATLAB que automatiza la aplicación de este formalismo a sistemas singulares. Esta implementación no solo facilita cálculos algebraicos extensos y complejos, sino que constituye en sí misma una aportación novedosa, dado que no existe en la literatura un software con estas características aplicado a NCED. El programa se plantea, por tanto, como un medio para potenciar el análisis teórico, no como un fin independiente.

El propósito de esta tesis es, por tanto, llenar el vacío en el análisis hamiltoniano de la electrodinámica no conmutativa con fuentes, al tiempo que se introduce una herramienta práctica que amplía las posibilidades de exploración de estos sistemas. Con ello se busca establecer una base sólida tanto para futuros estudios teóricos como para aplicaciones en contextos donde la no localidad juega un papel relevante.

El documento se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 3 y 4 se presentan los fundamentos de los espacios no conmutativos y el mapeo de Seiberg–Witten en la electrodinámica de Maxwell; en el Capítulo 5 se desarrolla el análisis hamiltoniano mediante el formalismo de Dirac–Bergmann; en el Capítulo 6 se estudia el acoplamiento a fuentes y las aplicaciones físicas; finalmente, en el Capítulo 7 se exponen las conclusiones y se discuten las perspectivas de extensión de este trabajo. Por último, en el capítulo 8 se exponen las características del código de MATLAB.

Capítulo 2.

Objetivos

2.1. OBJETIVO GENERAL

Estudiar la electrodinámica no conmutativa (NCED), tratada como una teoría no local efectiva, mediante el formalismo de Dirac–Bergmann. Se busca identificar y clasificar sus restricciones, construir los corchetes de Dirac y derivar las ecuaciones de movimiento en el espacio reducido. Como apoyo a este análisis, se implementarán rutinas computacionales que automaticen los cálculos y permitan obtener resultados simbólicos y numéricos contrastables con la formulación Hamiltoniana tradicional.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar rutinas computacionales en MATLAB que automaticen la aplicación del formalismo de Dirac–Bergmann a sistemas singulares.
- Formular un modelo de electrodinámica no conmutativa con fuentes externas en el

CAPÍTULO 2. Objetivos

2.2. Objetivos específicos

espacio fase completo, asegurando la consistencia de la invariancia de calibre.

- Identificar y clasificar las restricciones de la teoría, construir los corchetes de Dirac y obtener las ecuaciones de movimiento reducidas.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 3.

Mapeo de Seiberg–Witten y el espacio no conmutativo

3.1. MOTIVACIÓN Y CONTEXTO HISTÓRICO

La electrodinámica no conmutativa constituye una extensión fundamental de la teoría electromagnética clásica, surgida de manera natural en el contexto de la teoría de cuerdas. Esta formulación ha despertado un interés creciente dentro de la física teórica de altas energías, al modificar profundamente la estructura del espacio-tiempo a escalas fundamentales. Su rasgo distintivo radica en la imposición de relaciones de conmutación no triviales entre las coordenadas espaciotemporales, lo cual transforma el comportamiento de los campos y sus interacciones a escalas muy pequeñas.

En este marco, uno de los avances más relevantes fue el mapeo de Seiberg–Witten (SW), introducido en 1999 [Seiberg and Witten, 1999]. Este mapeo establece una correspondencia explícita entre teorías de calibre definidas en espacios no conmutativos y sus equivalentes en espacios conmutativos ordinarios. Esta construcción preserva la invariancia de calibre y permite describir los efectos no conmutativos en términos de campos clásicos modificados.

3.2. FUNDAMENTOS DE LA NO CONMUTATIVIDAD Y EL MAPEO DE SEIBERG–WITTEN

La hipótesis de un espacio-tiempo no conmutativo surge de manera natural en el marco de la teoría de cuerdas y de intentos modernos por reconciliar la mecánica cuántica con la relatividad general. En este contexto, las coordenadas dejan de conmutar de manera trivial y satisfacen relaciones algebraicas del tipo

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (3.2.1)$$

donde x^μ representan las coordenadas del espacio-tiempo y $\theta^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico constante que parametriza la no conmutatividad. Este tensor tiene dimensiones de (longitud)² y su magnitud determina la escala a la que los efectos no conmutativos se vuelven significativos.

La consecuencia inmediata de esta estructura es la necesidad de redefinir el producto entre funciones. El producto ordinario se reemplaza por el producto de Moyal (también denominado producto estrella o \star -producto), definido como

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x), \quad (3.2.2)$$

que puede expandirse en series de $\theta^{\mu\nu}$:

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (3.2.3)$$

Este producto asegura que la relación no conmutativa se preserve en forma consistente:

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}.$$

CAPÍTULO 3. Mapeo de Seiberg–Witten y el espacio no conmutativo
3.2. Fundamentos de la no conmutatividad y el mapeo de Seiberg–Witten

El producto de Moyal cumple además propiedades esenciales para la formulación de teorías de campos:

- **Asociatividad:** $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.
- **Ciclicidad bajo la integral:** $\int d^n x (f \star g)(x) = \int d^n x f(x)g(x)$.
- **Regla de Leibniz:** $\partial_\mu (f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + f \star (\partial_\mu g)$.

Estas propiedades son cruciales para garantizar la consistencia algebraica de la formulación no conmutativa. Sin embargo, trabajar directamente en este marco presenta serias dificultades técnicas, ya que las expresiones se vuelven rápidamente intrincadas y difíciles de manejar. Surge entonces la necesidad de contar con un mecanismo que traduzca los efectos de la no conmutatividad en términos de campos definidos en espacios conmutativos.

Ese mecanismo es el **mapeo de Seiberg–Witten (SW)**, introducido en 1999 [Seiberg and Witten, 1999]. El mapeo establece una correspondencia explícita entre teorías de calibre formuladas en espacios no conmutativos y sus equivalentes en espacios conmutativos ordinarios. En la práctica, permite expresar los campos no conmutativos en función de los campos conmutativos y del parámetro $\theta^{\mu\nu}$, a través de expansiones sistemáticas. De esta manera, los efectos de la no conmutatividad pueden analizarse empleando herramientas convencionales, preservando al mismo tiempo la equivalencia física entre ambas descripciones ¹.

El mapeo SW no solo resuelve una dificultad técnica, sino que también constituye un puente conceptual entre dos geometrías del espacio-tiempo: la clásica y la no conmutativa. Por este motivo, desempeña un papel central en esta tesis, ya que proporciona la base algebraica y geométrica necesaria para aplicar el formalismo de Dirac–Bergmann al estudio hamiltoniano de la electrodinámica no conmutativa, en particular cuando se consideran

¹En el límite $\theta = 0$, deben recuperarse las descripciones del caso conmutativo; de lo contrario, el sistema resulta inconsistente.

acciones con **fuentes no conmutativas**.

3.3. MAPEO DE SW EN LAS TEORÍAS DE CALIBRE

El mapeo SW se implementa mediante expansiones en series del parámetro de no conmutatividad $\theta^{\mu\nu}$. Dado un campo calibre A_μ definido en un espacio conmutativo, el mapeo permite obtener el correspondiente campo \hat{A}_μ en el espacio no conmutativo, según

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho,\sigma} A_\rho (\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma,\mu}) + O(\theta^2). \quad (3.3.1)$$

Esta expresión constituye la base para construir teorías efectivas en espacios no conmutativos, preservando la estructura calibre original. Cada término de la expansión refleja las correcciones introducidas por la no conmutatividad.

De manera análoga, es posible obtener expresiones para el tensor de campo $\hat{F}_{\mu\nu}$ en función de los campos conmutativos y del parámetro $\theta^{\mu\nu}$, lo cual asegura que los invariantes calibre puedan reformularse en el marco no conmutativo de forma consistente. El análisis detallado de estas expresiones resulta esencial para estudiar teorías efectivas de campo en espacios no conmutativos.

3.4. CONDICIONES DE APLICABILIDAD DEL MAPA DE SEIBERG–WITTEN

El mapa de Seiberg–Witten (SW) establece una correspondencia entre teorías gauge conmutativas y no conmutativas mediante una redefinición funcional de los campos, $\hat{A}_\mu =$

$\widehat{A}_\mu(A; \theta)$, que preserva la equivalencia gauge en el sentido

$$\widehat{A}_\mu(A) + \delta_{\widehat{\chi}} \widehat{A}_\mu(A) = \widehat{A}_\mu(A + \delta_\lambda A), \quad (3.4.1)$$

donde el producto deformado \star es asociativo y la no conmutatividad está parametrizada por $\theta^{\mu\nu}$. Este marco presenta limitaciones bien definidas; en particular, el mapa deja de ser aplicable, o pierde justificación formal, en los siguientes casos:

1. **Fallo de asociatividad del producto \star .** El mapa presupone un producto \star asociativo. Si $\theta^{\mu\nu}(x)$ no define una estructura de Poisson regular (violación de la identidad de Jacobi), presenta singularidades o cambios de rango que impiden una definición global del \star , el mapa SW no existe globalmente.
2. **Grupos de gauge fuera de $U(N)$ con cierre no finito.** Para grupos distintos de $U(N)$, el álgebra \star -deformada no cierra en un número finito de generadores. El mapa sólo es consistente si se recurre al *álgebra envolvente*, lo que introduce un número infinito de acoplamientos efectivos. Si se exige un cierre finito, el SW no es aplicable.
3. **Fuentes/corrientes externas no covariantes.** La condición de equivalencia gauge (3.4.1) requiere que las corrientes externas transformen de manera covariante. Si se acoplan fuentes que no respetan dicha covariancia, la consistencia del mapa se rompe.
4. **Régimen no perturbativo en θ .** Operativamente, el mapa se construye como una serie formal en θ . En ausencia de un parámetro pequeño o sin control de convergencia, la expansión carece de validez predictiva; no existe garantía de aplicabilidad no perturbativa.
5. **No conmutatividad tiempo–espacio en Minkowski ($\theta^{0i} \neq 0$).** En presencia de componentes tiempo–espacio, la teoría resultante es típicamente no local en el tiempo y puede comprometer la unitariedad. En contextos relativistas estándar, ello

se considera no admisible.

El mapa de Seiberg–Witten es justificable, de forma estándar, cuando se trabaja en \mathbb{R}^d con θ^{ij} constante y puramente espacial, con grupos $U(N)$, y con fuentes o campos de materia que transforman covariantemente. Fuera de este marco, su empleo requiere una justificación específica.

3.5. APLICACIÓN A LA ELECTRODINÁMICA NO CONMUTATIVA

En el marco de la electrodinámica, el mapeo SW permite expresar los campos y tensores de campo no conmutativos en términos de sus análogos conmutativos, incorporando las correcciones ordenadas en $\theta^{\mu\nu}$. Este procedimiento facilita la construcción de la acción no conmutativa y la comparación directa con la teoría convencional.

En el contexto de esta tesis, el mapeo de Seiberg–Witten desempeña un papel central. Su aplicación permitirá formular la electrodinámica no conmutativa de manera sistemática y conectar los resultados con la descripción hamiltoniana obtenida a través del formalismo de Dirac–Bergmann. Esto es particularmente relevante en el caso de acciones con **fuentes no conmutativas**, donde el análisis detallado de las restricciones y de los grados de libertad requiere una base algebraica y geométrica clara.

3.6. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

Este capítulo ha introducido los fundamentos de la no conmutatividad y el formalismo del mapeo de Seiberg–Witten, destacando su relevancia conceptual y técnica. Con esta herramienta, se establece un marco adecuado para abordar la formulación hamiltoniana de la electrodinámica no conmutativa en los capítulos siguientes, donde se aplicará de manera

explícita al análisis de restricciones y ecuaciones de movimiento.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 4.

Mapeo de Seiberg–Witten en la Formulación de la Electrodinámica No Conmutativa

4.1. ACCIÓN DE MAXWELL EN ESPACIOS NO CONMUTATIVOS

La electrodinámica no conmutativa (NCED) se construye a partir de la acción de Maxwell generalizada al espacio-tiempo no conmutativo. El punto de partida es la acción definida con el producto estrella de Moyal:

$$S_{\text{NCED}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \hat{F}_{\mu,\nu} \star \hat{F}^{\mu,\nu}, \quad (4.1.1)$$

donde el tensor de campo no conmutativo está dado por

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star. \quad (4.1.2)$$

El uso del producto \star introduce correcciones controladas por el parámetro de no conmutatividad $\theta^{\mu\nu}$, que hacen que la dinámica se desvíe de la teoría de Maxwell ordinaria y adquiera

4.2. IMPLEMENTACIÓN DEL MAPEO DE SEIBERG–WITTEN

El mapeo de Seiberg–Witten (SW) [Seiberg and Witten, 1999] permite expresar los campos no conmutativos en términos de los campos conmutativos y del parámetro $\theta^{\mu\nu}$. Para el campo calibre se tiene, a primer orden en θ ,

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} A_\rho (\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma,\mu}) + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.2.1)$$

mientras que el tensor de campo no conmutativo puede escribirse como

$$\hat{F}_{\mu,\nu} = F_{\mu,\nu} + \theta^{\rho\sigma} (F_{\mu,\rho} F_{\nu,\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu,\nu}) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (4.2.2)$$

Estas relaciones muestran con claridad cómo los efectos de la no conmutatividad se incorporan como correcciones sistemáticas sobre los campos clásicos, manteniendo la estructura calibre subyacente.

4.3. EXPANSIÓN EN $\theta^{\mu\nu}$ Y CORRECCIONES EFECTIVAS

Sustituyendo las expresiones del mapeo en la acción de Maxwell, se obtiene la acción efectiva en el espacio conmutativo:

$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} - \frac{1}{2} \theta^{\rho,\sigma} F_{\rho,\sigma} F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} + 2\theta^{\rho,\sigma} F_{\mu,\rho} F_{\nu,\sigma} F^{\mu,\nu} + \mathcal{O}(\theta^2) \right). \quad (4.3.1)$$

Desde el punto de vista físico, la NCED puede entenderse como la electrodinámica estándar con términos de interacción no lineales en el campo de Maxwell, modulados

CAPÍTULO 4. Mapeo de Seiberg–Witten en la Formulación de la Electrodinámica No Conmutativa

4.4. Tensor de campo y simetría calibre

por $\theta^{\mu\nu}$. En particular, los términos cúbicos en $F_{\mu\nu}$ representan autointeracciones del campo electromagnético, ausentes en la teoría clásica, que quebrantan la estricta linealidad de las ecuaciones de Maxwell. Además, introducen efectos no lineales, como la dispersión del campo y la modificación de la propagación de ondas.

Ejemplo conceptual

Si consideramos un campo eléctrico estático generado por una carga puntual, las correcciones de primer orden en $\theta^{\mu\nu}$ inducen una desviación de la simetría esférica del campo. Esta deformación puede interpretarse como una anisotropía efectiva, cuya huella —aunque extremadamente pequeña a escalas ordinarias— resulta conceptualmente útil para entender la naturaleza direccional que introduce la no conmutatividad.

4.4. TENSOR DE CAMPO Y SIMETRÍA CALIBRE

Un rasgo esencial del mapeo SW es que respeta la simetría calibre. Bajo una transformación calibre ordinaria $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, el campo \hat{A}_μ se transforma de manera consistente en el espacio no conmutativo:

$$\delta_\lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_\star, \quad (4.4.1)$$

donde $\hat{\lambda}$ es el parámetro calibre no conmutativo correspondiente. Esta propiedad asegura la equivalencia entre las descripciones conmutativa y no conmutativa y evita inconsistencias en la formulación dinámica.

4.5. CORRIENTES NO CONMUTATIVAS EN LA NCED

Además del sector puramente calibre, es natural considerar el acoplamiento con corrientes externas. En el marco no conmutativo, el término de interacción adopta la forma

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \hat{j}^\mu \star \hat{A}_\mu, \quad (4.5.1)$$

donde \hat{j}^μ es una corriente definida en el álgebra no conmutativa. La invariancia de calibre impone la conservación calibre-covariante de la corriente,

$$\hat{D}_\mu \hat{j}^\mu \equiv \partial_\mu \hat{j}^\mu - i [\hat{A}_\mu, \hat{j}^\mu]_\star = 0, \quad (4.5.2)$$

condición que generaliza la continuidad estándar en presencia del producto \star .

Forma más general a primer orden en θ

La literatura ha mostrado que la elección “ingenua” $\hat{j}^\mu \equiv j^\mu$ no es suficiente para garantizar, de manera consistente, la invariancia de calibre y la continuidad en el régimen no conmutativo. Siguiendo el enfoque de [Banerjee et al., 2004, Banerjee and Kumar, 2005], se puede construir el *ansatz* más general para la corriente no conmutativa a primer orden en $\theta^{\mu\nu}$ imponiendo tres criterios: (i) reducción correcta en el límite conmutativo, (ii) covariancia calibre bajo el mapeo SW y (iii) conservación calibre-covariante. Bajo estas condiciones, se obtiene una expresión de la forma

$$\hat{j}^\mu = J^\mu - A_\alpha \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta J^\mu + \theta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} J^\beta + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} J^\mu + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.5.3)$$

CAPÍTULO 4. Mapeo de Seiberg–Witten en la Formulación de la Electrodinámica No Conmutativa

4.6. Relevancia para el análisis hamiltoniano

que corresponde a una solución consistente de la familia más general a orden θ .¹

La ecuación (4.5.3) muestra que, además del término J^μ conmutativo, aparecen correcciones que mezclan derivadas de la corriente con el potencial A_μ y con el tensor de campo $F_{\mu\nu}$. Esta estructura refleja la *no localidad efectiva* introducida por la no conmutatividad y garantiza que la conservación $\hat{D}_\mu \hat{J}^\mu = 0$ sea compatible con la simetría de calibre en el espacio no conmutativo.

A la luz del mapeo SW, el acoplamiento con corrientes adopta entonces, en el espacio conmutativo, la forma efectiva

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \left[J^\mu A_\mu + \frac{1}{2} \theta^{\rho,\sigma} \partial_\rho J^\mu (\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma,\mu}) + \mathcal{O}(\theta^2) \right], \quad (4.5.4)$$

mostrando que incluso para corrientes “externas” el sector de interacción adquiere términos de derivadas cruzadas que impactan la dinámica.

Implicaciones hamiltonianas. Desde la perspectiva canónica, la presencia de \hat{J}^μ con la estructura (4.5.3) altera los momentos conjugados y, por ende, el hamiltoniano total. Esto afecta la *generación de restricciones* (primarias y secundarias) y su *clasificación* (primera/segunda clase), punto neurálgico del análisis de Dirac–Bergmann que se desarrollará en los capítulos siguientes.

4.6. RELEVANCIA PARA EL ANÁLISIS HAMILTONIANO

El desarrollo presentado en este capítulo proporciona la acción efectiva, el tensor de campo y el acoplamiento con **corrientes no conmutativas** que se emplearán en el análisis hamiltoniano de la NCED. La estructura más general de \hat{J}^μ a orden θ no es un detalle

¹Las condiciones (i)–(iii) fijan $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_3 = 0$.

CAPÍTULO 4. Mapeo de Seiberg–Witten en la Formulación de la Electrodinámica No Conmutativa

4.7. Conclusión del capítulo

accesorio: condiciona la forma del hamiltoniano, las relaciones de consistencia y la cuenta de grados de libertad físicos.

En el caso con fuentes no conmutativas, el mapeo de Seiberg–Witten ofrece un marco sistemático para formular la interacción entre corrientes externas y campos calibre en el espacio conmutativo, manteniendo la equivalencia física y la consistencia calibre. Este hecho tendrá un impacto directo en la deducción de restricciones dentro del formalismo de Dirac–Bergmann.

4.7. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se ha mostrado cómo el mapeo de Seiberg–Witten se aplica a la formulación de la electrodinámica no conmutativa. Partiendo de la acción de Maxwell en espacios no conmutativos, se implementó el mapeo SW y se derivaron expresiones efectivas para el potencial, el tensor de campo y la acción expandida en $\theta^{\mu\nu}$. Además, se incorporó y *subrayó* el papel de las **corrientes no conmutativas**, incluyendo su *forma más general a primer orden en θ* tal y como ha sido propuesta en la literatura [[Banerjee et al., 2004](#), [Banerjee and Kumar, 2005](#)].

Los resultados ponen de manifiesto que la NCED puede entenderse como una teoría efectiva con correcciones no locales al electromagnetismo clásico. Este marco constituye la base para el análisis hamiltoniano detallado que se desarrollará en el próximo capítulo, con especial énfasis en la clasificación de restricciones y en las implicaciones concretas de las fuentes no conmutativas.

Capítulo 5.

El Formalismo de Restricciones de Dirac

5.1. INTRODUCCIÓN

El formalismo de restricciones desarrollado por Paul Dirac y complementado por Peter Bergmann, también conocido como algoritmo de Dirac–Bergmann [Henneaux and Teitelboim, 1992, Sundermeyer, 1982], constituye la herramienta fundamental para el tratamiento hamiltoniano de sistemas singulares. Dicho procedimiento generaliza la mecánica hamiltoniana convencional y permite abordar sistemas cuyo lagrangiano no permite definir de forma invertible las velocidades en función de los momentos canónicos. En tales circunstancias, la definición de los momentos canónicos no determina de manera única todas las velocidades en términos de dichos momentos, lo que conduce a la aparición de restricciones.

Una primera distinción metodológica es la diferencia entre el *modelo reducido* y el *modelo completo*, resumida en la Tabla 5.1. El modelo reducido simplifica el número de variables al eliminar de entrada los grados de libertad restringidos, mientras que el modelo completo los mantiene explícitamente y los trata dentro del formalismo. Aunque el modelo reducido

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.2. Sistemas mecánicos con restricciones

puede resultar atractivo por su sencillez, el modelo completo es el único que garantiza una descripción rigurosa y sistemática.

Modelo	Acción	Variables dinámicas	Características principales
Reducido	$S(q_i, \dot{q}_i)$	q_i, \dot{q}_i	Simplifica los cálculos al considerar solo las variables con velocidades explícitas. Puede perder información sobre simetrías y grados de libertad.
Completo	$S(q_0, q_i, \dot{q}_i)$	q_0, q_i, \dot{q}_i	Incluye todas las variables dinámicas, preservando la estructura completa del sistema. Análisis más riguroso pero con mayor complejidad algebraica.

Cuadro 5.1: Comparación entre el modelo reducido y el modelo completo en el formalismo de Dirac–Bergmann.

5.2. SISTEMAS MECÁNICOS CON RESTRICCIONES

El punto de partida para comprender los sistemas singulares se encuentra en el principio de acción mínima, también conocido como principio variacional de Hamilton. Este principio establece que la trayectoria de un sistema físico en el espacio de configuraciones es aquella que hace extremal la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (5.2.1)$$

Otra forma de verlo, es que la trayectoria permanece estacionaria bajo variaciones de tipo $\delta q^n(t)$ sobre las variables q^n ($n = 1, \dots, N$).

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (5.2.2)$$

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac

5.2. Sistemas mecánicos con restricciones

para sistemas regulares, la aplicación de este principio conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.2.3), las cuales nos permiten derivar la evolución dinámica del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0. \quad (5.2.3)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden escribirse de una manera más detallada como se muestra en (5.2.4).

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \quad (5.2.4)$$

En la ecuación (5.2.4) podemos ver que las aceleraciones \ddot{q}^n están determinadas por la posición y las velocidades si y solo si la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$, la cual es conocida como matriz Hessiana, es invertible, es decir, que su determinante sea diferente de cero.

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right) \neq 0 \quad (5.2.5)$$

Cuando esta condición se cumple, el sistema se denomina regular, pues todas las aceleraciones pueden determinarse en función de las coordenadas y de las velocidades iniciales, no obstante, en los sistemas singulares, el determinante de la matriz Hessiana es cero, lo cual indica la presencia de restricciones o grados de libertad que no son independientes. Como consecuencia, estos sistemas no pueden tratarse adecuadamente con el formalismo habitual de Euler-Lagrange y requieren extender dicho formalismo para manejar correctamente las restricciones.

El concepto de restricción puede ilustrarse en sistemas sencillos de mecánica clásica. Por ejemplo, el caso del péndulo simple en dos dimensiones en donde la longitud fija de la varilla impone una relación funcional entre las coordenadas de la partícula, reduciendo así los grados de libertad. Este ejemplo, junto con el de partículas sometidas a ligaduras holonómicas o no holonómicas, muestra cómo las restricciones limitan el espacio de configuraciones

accesibles.

5.3. MOMENTOS CANÓNICOS Y RESTRICCIONES PRIMARIAS

Uno de los aspectos fundamentales del formalismo hamiltoniano es la transformación de Legendre, mediante la cual se pasa de las velocidades generalizadas \dot{q}^n a los momentos generalizados P^n , también llamados momentos canónicos. Estos se definen como:

$$P^n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} . \quad (5.3.1)$$

Dichos momentos canónicos constituyen la base de todo el formalismo hamiltoniano.

El formalismo de Dirac, al ser una extensión del formalismo hamiltoniano, conserva esta definición de momentos canónicos, sin embargo, para sistemas singulares la transformación de Legendre no es completamente invertible, es decir, no todos los momentos pueden escribirse en función de las velocidades. Este hecho origina la presencia de restricciones primarias, las cuales pueden expresarse en forma de relaciones:

$$\phi_\mu(q, p) = 0. \quad (5.3.2)$$

donde ϕ_μ representa funciones que vinculan coordenadas q y momentos P . Estas restricciones primarias son la base del formalismo de restricciones de Dirac, ya que la presencia de las mismas no solo nos confirma que estamos ante un sistema singular, si no que estas vienen siendo el punto de partida de todo el modelo, por ello es de gran importancia asegurarse que las restricciones primarias encontradas son en cantidad y forma correctas. Para asegurar que se han hallado todas las restricciones primarias y verificar su estructura, se calcula el rango de la matriz Hessiana y su dimensión. La diferencia entre la dimensión y el rango

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.3. Momentos Canónicos y Restricciones primarias

proporciona el número de restricciones primarias:

$$N_{rp} = D - R \quad (5.3.3)$$

Para determinar la estructura correcta de estas, se calculan los vectores nulos de la matriz Hessiana y contraer dichos vectores con las restricciones primarias que se han identificado.

Con ello se definen las cantidades

$$\Phi_\mu = v_\mu^\alpha \phi_\alpha \quad (5.3.4)$$

Donde Φ_μ son las restricciones primarias correctas e independientes del sistema.

Esta verificación constituye una de las sutilezas del formalismo, puesto que podría ocurrir que se identifiquen de manera errónea las restricciones primarias y aun así se proceda con los pasos subsiguientes para determinar la dinámica; aunque en apariencia todo continúe de forma “normal”, el resultado final sería incorrecto.

Por lo general, en la mayoría de los sistemas el vector nulo corresponde al vector trivial $(1,0,0,\dots,0)$ lo que conduce a las mismas restricciones obtenidas en la ecuación (5.3.2).

$$\Phi_\mu = \phi_\mu \quad (5.3.5)$$

sin embargo, existen sistemas en los que no se cumple la generalidad, lo cual afecta la forma de las restricciones primarias y puede conducir a un tratamiento más complejo dentro del algoritmo de Dirac-Bergmann.

5.4. CONDICIONES DE REGULARIDAD

Para que la formulación hamiltoniana sea consistente en presencia de restricciones, es necesario precisar condiciones de regularidad sobre la *superficie de restricciones*

$$\Gamma_c = \{(q, p) \mid \phi_m(q, p) = 0\}.$$

Estas condiciones aseguran que la superficie Γ_c sea una subvariedad suave del espacio-fase y que podamos identificar sin ambigüedad variables independientes y dependientes en una vecindad de Γ_c .

Considérese un conjunto (posiblemente redundante) de funciones de restricción $\{\phi_m(q, p)\}_{m=1}^M$.

Diremos que existe una *descomposición regular* si se puede particionar en:

1. **Restricciones independientes:** $\{\phi_{m'}\}_{m'=1}^{M'}$, que generan localmente Γ_c .
2. **Restricciones dependientes:** $\{\phi_{m''}\}_{m''=M'+1}^M$, que se anulan como consecuencia de las anteriores (combinaciones funcionales de $\phi_{m'}$).

La **condición de regularidad** afirma que el *Jacobiano* de las M' restricciones independientes respecto de las coordenadas del espacio-fase $z^A = (q^i, p_i)$ tiene *rango completo* sobre Γ_c :

$$\text{rank}\left(\frac{\partial\phi_{m'}(z)}{\partial z^A}\right) = M' \quad \text{en } \Gamma_c. \quad (5.4.1)$$

Existen caracterizaciones equivalentes útiles en la práctica:

- (i) Las funciones $\{\phi_{m'}\}$ pueden emplearse, junto con otras $2N - M'$ funciones, como *coordenadas locales* en una vecindad de Γ_c . Esto significa que Γ_c está dada localmente por $\phi_{m'} = 0$ con independencia funcional.

(ii) Los diferenciales $\{d\phi_{m'}\}$ son linealmente independientes sobre Γ_c , es decir,

$$d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_{M'} \neq 0 \quad \text{en } \Gamma_c,$$

lo que garantiza que la aplicación $z \mapsto (\phi_1, \dots, \phi_{M'})$ es regular.

(iii) El subespacio tangente $T\Gamma_c$ queda bien definido por las variaciones δz^A que satisfacen $\delta\phi_{m'} = 0$; en particular, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton restringidas permanecen en Γ_c .

5.5. HAMILTONIANO CANÓNICO

En los sistemas regulares, es posible pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana mediante una transformada de Legendre [Goldstein et al., 2002]. Esto resulta consistente porque el requisito fundamental para llevar a cabo dicha transformación es que todas las velocidades puedan expresarse en función de las coordenadas y de los momentos. Sin embargo, en los sistemas singulares, esto no se cumple. Aun así, se puede escribir la Hamiltoniana canónica de manera usual (5.5.1), la diferencia radica en que, más adelante, será necesario introducir términos adicionales para mantener la consistencia de la descripción hamiltoniana y garantizar la correcta evolución dinámica del sistema.

$$H_c = \dot{q}_i P^i - L \quad (5.5.1)$$

En este caso, debido a las relaciones (5.3.2), q y P ya no son variables independientes entre si, por lo que el hamiltoniano canonico solo esta bien definido en la subvariedad definida por las restricciones

$$H_c \rightarrow H_c + u_m \phi^m \quad (5.5.2)$$

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.5. Hamiltoniano canónico

donde ϕ^m son las restricciones del sistema (5.3.2) y u_m representa términos arbitrarios análogos a los multiplicadores de Lagrange. Esta adición no modifica la dinámica esencial del sistema, puesto que las restricciones son débilmente cero.

Con todo esto, podemos reescribir la acción en el espacio fase:

$$S = \int L dt = \int (\dot{q}_i P^i - H_c) dt \rightarrow \int (\dot{q}_i P^i - H_c - u_m \phi^m) dt \quad (5.5.3)$$

Al variar esta acción, hallamos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial P^i} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial P^i} \quad (5.5.4)$$

$$\dot{P}^i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i} \quad (5.5.5)$$

Estas ecuaciones se asemejan a las ecuaciones de Hamilton habituales, salvo por la aparición de un término adicional que involucra las restricciones ϕ^m y los multiplicadores arbitrarios u_m . El hecho de que aparezca el término arbitrario u_m refleja que las ecuaciones de movimiento no están completamente determinadas de forma única, por lo que, para alcanzar una dinámica determinista, se deben encontrar adecuadamente el valor estos multiplicadores.

En caso de que el formalismo por si solo no determine completamente dichos multiplicadores, podría implicar la existencia de una libertad de norma o calibre en el sistema, es decir, hay grados de libertad redundantes que pueden parametrizarse de diferentes maneras sin alterar los observables físicos. Para asegurar la consistencia con la mecánica clásica (o con la teoría correspondiente), es preciso fijar dicha libertad de calibre mediante condiciones adicionales de enlazado. Los sistemas estudiados en esta tesis, al poseer libertad de calibre, exhiben precisamente este fenómeno: si no se imponen condiciones de calibre, la evolución del sistema queda indeterminada en ciertos aspectos, lo que exige su resolución mediante

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.5. Hamiltoniano canónico

la fijación correspondiente.

Si se aplica la transformada de Legendre del espacio de configuración (q, \dot{q}) a la superficie $\phi(q, P) = 0$ del espacio (q, P, u) dada por:

Si aplicamos la transformada de Legendre para pasar del espacio de configuración (q, \dot{q}) a la superficie de restricciones $\phi(q, P) = 0$ en el espacio ampliado (q, P, u) , definimos inicialmente:

$$q_n = q_n \quad (5.5.6)$$

$$P^n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}(q, \dot{q}) \quad (5.5.7)$$

$$u_m = u_m(q, \dot{q}) \quad (5.5.8)$$

Bajo esto, las relaciones se transforman en:

$$q_n = q_n \quad (5.5.9)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H_c}{\partial P^n} + \frac{\partial \phi^m}{\partial P^n} \quad (5.5.10)$$

$$\phi^m(q, P) = 0 \quad (5.5.11)$$

Podemos ver que un conjunto de ecuaciones implica al otro conjunto, con ello recuperando la invertibilidad del sistema. La inclusión de los términos u_m y ϕ^m establece un puente entre la descripción lagrangiana y la hamiltoniana, aun cuando la matriz Hessiana sea singular en la formulación de partida.

5.6. RESTRICCIONES SECUNDARIAS

Las restricciones deben preservarse en el tiempo.

$$\dot{\phi}_\alpha = \{\phi_\alpha, H_T\} \approx 0, \quad (5.6.1)$$

donde H_T es el hamiltoniano total. La condición de consistencia puede dar lugar a nuevas restricciones, llamadas **secundarias**.

Las restricciones secundarias se identifican evaluando la evolución temporal de las restricciones primarias, lo cual puede realizarse usando la definición de corchetes de Poisson, que permite calcular la variación temporal de cualquier observable en el sistema.

$$\{F, H\} = \dot{F} = \frac{dF}{dt} \quad (5.6.2)$$

En este caso como la información de las restricciones se encuentra en la Hamiltoniana, por lo que la definición de los corchetes de Poisson es la usual:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial P^i} - \frac{\partial F}{\partial P^i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (5.6.3)$$

La Hamiltoniana para sistemas singulares que se introdujo en la sección anterior (5.5.2) se conoce como la Hamiltoniana Extendida, ya que incluye toda la información relacionada con las restricciones del sistema. Sin embargo, con los datos de que disponemos hasta el momento, únicamente conocemos las restricciones primarias, esto plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos saber que las restricciones primarias son las únicas restricciones que posee el sistema? Para responder esta pregunta, se propone construir una Hamiltoniana que contenga únicamente la información que tenemos en esta etapa (es decir, sólo las

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.6. Restricciones Secundarias

restricciones primarias). A dicha Hamiltoniana, se le denomina Hamiltoniana Primaria.

$$H_1 = H_c + (u_m \phi^m)_1 \quad (5.6.4)$$

donde $(u_m \phi^m)_1$ contiene toda la información de las restricciones primarias encontradas.

Podemos evaluar la evolución temporal de las restricciones primarias mediante el corchete de Poisson; si la restricción ϕ no depende explícitamente del tiempo, se tiene:

$$\{\phi^m, H_1\} = \dot{\phi}^m. \quad (5.6.5)$$

Al calcular este corchete, surgen tres casos:

$$\{\phi^m, H_1\} = \begin{cases} 0, & \text{(Caso 1)} \\ (\phi^m)_2 \approx 0, & \text{(Caso 2)} \\ \lambda + u_m \approx 0, & \text{(Caso 3)} \end{cases} \quad (5.6.6)$$

- **Caso 1:** El resultado es *fuertemente* cero, $\{\phi^m, H_1\} = 0$. En este caso, no se generan nuevas restricciones y la información existente basta para determinar la dinámica del sistema.
- **Caso 2:** El resultado es *débilmente* cero, es decir, no se anula de forma explícita, pero al provenir de una restricción primaria (que ya es débilmente cero), se genera una nueva restricción, $(\phi^m)_2 \approx 0$, denominada *restricción secundaria*.
- **Caso 3:** El resultado es débilmente cero y contiene un multiplicador de Lagrange, $\{\phi^m, H_1\} = \lambda + u_m \approx 0$. Esta situación no introduce nuevas restricciones, sino que simplemente determina el valor del multiplicador u_m .

CAPÍTULO 5. El Formalismo de Restricciones de Dirac
5.7. Clasificación de las restricciones y fijación del calibre

Si se cumplen los casos 1 y 3, se puede continuar libremente con los demás pasos del formalismo, de otra forma, si el caso que se cumple es el 2, entonces tenemos que repetir el proceso antes descrito con la nueva restricción encontrada.

$$\{(\phi^m)_2, H_1\} = (\dot{\phi}^m)_2 \quad (5.6.7)$$

Este proceso continúa indefinidamente, hasta que el resultado cumpla con el caso 1 o 3.

Cuando todas las restricciones del sistema fueron encontradas, al construir la hamiltoniana con toda la información nos da como resultado la ya antes mencionada *Hamiltoniana extendida*.

$$H_E = H_c + u_m \phi^m. \quad (5.6.8)$$

donde $u_m \phi^m$ es toda la información de las restricciones encontradas.

5.7. CLASIFICACION DE LAS RESTRICCIONES Y FIJACION DEL CALIBRE

En el formalismo de Dirac, la identificación de restricciones es un paso crucial, pues permite su posterior clasificación en restricciones de primera y segunda clase.

Para determinar si las restricciones son de primera o segunda clase, es necesario calcular el corchete de Poisson entre todas las restricciones. Los resultados de estos cálculos indicarán a qué grupo pertenece cada restricción.

5.7.1. Restricciones de Primera Clase

Una restricción es de primera clase si el corchete de Poisson de esa restricción con todas las demás es cero. Esto indica que la restricción no genera nuevas condiciones sobre el espacio fase del sistema.

$$\{\Phi, \Phi_\mu\} = 0. \quad (5.7.1)$$

Las restricciones de esta clase son las menos deseadas, puesto que esto significaría que no podemos determinar todos los multiplicadores asociados al sistema, por lo que el sistema quedaria indeterminado. Para casos mas particulares, como es el caso de los sistemas de calibre, la existencia de restricciones de primera clase va ligado a que el sistema cuenta con libertad de norma, por lo que es necesario fijarlas para que el sistema pueda ser completamente determinado, por ello para nuestro caso de estudio seria normal encontrarnos con esta clase de restricciones

5.7.2. Restricciones de Segunda Clase

Una restricción se clasifica como de segunda clase si el corchete de Poisson con al menos otra restricción es distinto de cero. Esto sugiere que las restricciones están interrelacionadas de forma que afectan la dinámica del sistema.

$$\{\Phi, \Phi_\mu\} \neq 0. \quad (5.7.2)$$

5.7.3. Restricciones efectivas

Además de estos criterios básicos, es importante considerar que las restricciones efectivas del sistema pueden ser combinaciones lineales de restricciones individuales. Por lo tanto,

el procedimiento más seguro para identificar correctamente las restricciones consiste en calcular la matriz compuesta por el corchete de Poisson de todas ellas:

$$W_{\mu\nu} = \{\Phi_\mu, \Phi_\nu\} \quad (5.7.3)$$

De manera análoga a la verificación de las restricciones primarias, se calculan los vectores nulos de esta matriz y se realiza la contracción con todas las restricciones obtenidas (primarias, secundarias, terciarias, etcétera.):

$$\gamma_i = v_{i\alpha} \Phi_\alpha. \quad (5.7.4)$$

El resultado de esta operación determinará las nuevas restricciones de primera clase. Aquellas restricciones que no aparezcan explícitamente en esta contracción se clasificarán como de segunda clase.

5.7.4. Determinación de multiplicadores de Lagrange

La condición de consistencia temporal fija, en general, parte de los multiplicadores de Lagrange. Si $\{\phi_\alpha, H_C\} + u^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0$, las componentes de u^β asociadas a restricciones de segunda clase quedan determinadas, mientras que las correspondientes a restricciones de primera clase reflejan la libertad calibre. Este punto es esencial para comprender qué parámetros del movimiento son físicos y cuáles codifican redundancias.

5.7.5. Conteo de grados de libertad

Sea N el número de variables de configuración (por tanto $2N$ dimensiones en espacio-fase), F el número de restricciones de primera clase y S el número de restricciones de segunda

clase. El número de grados de libertad físicos viene dado por

$$N_{\text{fis}} = N - F - \frac{S}{2} = \frac{1}{2} (2N - 2F - S). \quad (5.7.5)$$

Esta fórmula resume el efecto de las simetrías de calibre (primera clase) y de las ligaduras no calibre (segunda clase) sobre la dinámica efectiva.

5.7.6. Fijación de calibre

Para identificar observables y evoluciones físicas de manera unívoca, se introducen **condiciones de calibre** $\chi_a \approx 0$ tales que

$$\det \{ \chi_a, \phi_b^{(1)} \} \neq 0, \quad (5.7.6)$$

donde $\phi_b^{(1)}$ denota un conjunto independiente de restricciones de primera clase. La fijación de calibre convierte este conjunto en restricciones de segunda clase en compañía de χ_a , y permite definir un corchete de Dirac respecto del conjunto total, eliminando los grados de libertad puramente calibre.

5.7.7. Generador de transformaciones de calibre (método de Castellani)

El **generador de calibre** G [Castellani, 1982] se construye como combinación lineal de cadenas de restricciones de primera clase con parámetros (y derivadas temporales) apropiados:

$$G = \epsilon^a G_a^{(0)} + \dot{\epsilon}^a G_a^{(1)} + \dots, \quad (5.7.7)$$

donde $G_a^{(k)}$ son combinaciones de restricciones de primera clase que satisfacen condiciones de consistencia con el hamiltoniano total y las transformaciones inducidas. Una vez obtenido G , la transformación calibre de un observable O se define como $\delta O = \{O, G\}$.

5.7.8. Observables de Dirac

Se denominan **observables de Dirac** a las funciones en espacio-fase O que conmutan débilmente con todas las restricciones de primera clase,

$$\{O, \phi_a^{(1)}\} \approx 0 \quad \forall \quad a. \quad (5.7.8)$$

Esta condición caracteriza magnitudes físicas insensibles a las transformaciones de calibre, y por ello medibles de forma inequívoca.

5.8. APLICACIONES A TEORÍAS DE CAMPOS

El formalismo de Dirac no se limita a sistemas mecánicos: su aplicación a teorías de campos resulta esencial. Casos emblemáticos incluyen:

- **Electrodinámica clásica**, donde las condiciones de Gauss aparecen como restricciones de primera clase.
- **Teorías de Yang–Mills**, en las que la estructura de restricciones codifica las simetrías de calibre no abelianas.
- **Gravedad**, donde el análisis canónico muestra cómo las condiciones de difeomorfismo se interpretan como restricciones de primera clase.

Estos ejemplos ilustran la potencia y generalidad del algoritmo de Dirac–Bergmann para identificar grados de libertad físicos en sistemas con simetrías locales.

5.9. RELEVANCIA PARA LA TESIS

El formalismo de Dirac–Bergmann constituye la base sobre la cual se construirá el análisis hamiltoniano de la electrodinámica no conmutativa (NCED). En este trabajo, la novedad radica en la inclusión de **fuentes no conmutativas** en la acción, lo cual altera de manera significativa la estructura de restricciones.

En particular:

- Las restricciones primarias y secundarias se ven modificadas por los términos de interacción derivados del mapeo de Seiberg–Witten y por la estructura más general de la corriente a orden θ .
- La clasificación en primera y segunda clase requiere un análisis cuidadoso, pues los acoplamientos con corrientes no conmutativas introducen nuevos elementos en la matriz de Poisson y en la clausura del álgebra de restricciones.
- La fijación de calibre y los corchetes de Dirac adquieren una forma adaptada a tales acoplamientos, lo que será clave para la identificación de los grados de libertad físicos mediante (5.7.5).

Este capítulo, además de fijar el marco conceptual, prepara de manera directa el terreno para el análisis original del Capítulo 6, en el que se aplicará el algoritmo de Dirac–Bergmann a la acción efectiva de la NCED con **corrientes no conmutativas** a primer orden en θ .

Capítulo 6.

Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

En este capítulo se presenta el análisis hamiltoniano de la electrodinámica de Maxwell en el régimen no conmutativo (NCED). Partimos del caso conmutativo para fijar notación y mostrar la aparición de la restricción primaria $\pi^0 \approx 0$ y la ley de Gauss como restricción secundaria. A continuación incorporamos las correcciones de primer orden en $\theta^{\mu\nu}$ obtenidas mediante el mapeo de Seiberg–Witten, primero sin fuentes y después con *corrientes no conmutativas*. El objetivo es dejar explícitos: (i) la forma de los momentos canónicos, (ii) la estructura y clasificación de restricciones, (iii) el papel del potencial A_0 como multiplicador, y (iv) la modificación de la ley de Gauss en presencia de fuentes no conmutativas. Se mantiene la simetría de calibre y el número de grados de libertad físicos, tal como se justificó en los capítulos previos.

6.1. ELECTRODINAMICA DE MAXWELL SIN FUENTE EXTERNA

Para ilustrar la aplicación del formalismo de restricciones de Dirac, consideraremos primero un caso particular: la electrodinámica de Maxwell conmutativa y libre de fuentes.

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

Aplicaremos rigurosamente todo el procedimiento, de manera que los resultados obtenidos sirvan como punto de comparación directo con su análogo en el espacio no conmutativo.

Dado que este no es nuestro tema principal de estudio, y se utiliza únicamente como un ejemplo y referencia para el modelo no conmutativo, no profundizaremos en todos los detalles. Sin embargo, el tratamiento bastará para resaltar las diferencias que aparecen al pasar a un espacio no conmutativo.

$$L = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} g^{\mu,\alpha} g^{\nu,\beta} F_{\alpha,\beta} F_{\mu,\nu} d^4x. \quad (6.1.1)$$

Empezando desde la densidad Lagrangiana [Maggiore, 2023, Jackson, 1999] (6.1.1), se calcula la Hessiana del sistema

$$H^{\lambda,\sigma} = \frac{\delta^2 L}{\delta(\partial_0 A_\sigma) \delta(\partial_0 A_\lambda)} = -\sqrt{-g} (g^{\sigma,0} g^{0,\lambda} - g^{0,0} g^{\sigma,\lambda}). \quad (6.1.2)$$

Corriendo los índices en (6.1.2), es fácil ver que el determinante es cero, ya que la primera fila y columna son nulas.

$$H^{0,\sigma} = g^{\sigma,0} g^{0,0} - g^{0,0} g^{\sigma,0} = 0. \quad (6.1.3)$$

$$H^{\lambda,0} = g^{0,0} g^{0,\lambda} - g^{0,0} g^{0,\lambda} = 0. \quad (6.1.4)$$

Escribiendo la Hessiana explícitamente:

$$(H^{\rho,\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{0,1} g^{0,1} - g^{0,0} g^{1,1} & g^{0,1} g^{0,2} - g^{0,0} g^{1,2} & g^{0,1} g^{0,3} - g^{0,0} g^{1,3} \\ 0 & g^{0,2} g^{0,1} - g^{0,0} g^{2,1} & g^{0,2} g^{0,2} - g^{0,0} g^{2,2} & g^{0,2} g^{0,3} - g^{0,0} g^{2,3} \\ 0 & g^{0,3} g^{0,1} - g^{0,0} g^{3,1} & g^{0,3} g^{0,2} - g^{0,0} g^{3,2} & g^{0,3} g^{0,3} - g^{0,0} g^{3,3} \end{pmatrix} \quad (6.1.5)$$

Este resultado confirma que se trata de un sistema singular, de modo que para su resolución

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

es necesario recurrir al formalismo de restricciones de Dirac.

Podemos ver en (6.1.5) que la matriz Hessiana es de dimensión cuatro y rango tres; por lo tanto, podemos estar seguros de que esperamos tener solo una restricción primaria. Este hecho también se corrobora al calcular los vectores nulos de la matriz, que en este caso arrojan el vector nulo trivial:

$$v_{\mu}^{(1)} = (1, 0, 0, 0). \quad (6.1.6)$$

Por lo tanto, la restricción primaria se obtiene de manera directa de la siguiente expresión

$$\pi^{\lambda} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_{\lambda})} = -\sqrt{-g} F^{0,\lambda}. \quad (6.1.7)$$

La separación de los índices de (6.1.7) en su parte dinámica ($\lambda = 1, 2, 3$) y su parte temporal ($\lambda = 0$) permite reescribir las componentes como

$$\pi^i = -\sqrt{-g} F^{0,i}. \quad (6.1.8)$$

$$\pi^0 \approx 0. \quad (6.1.9)$$

Siendo (6.1.9) la primera restricción del sistema

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (6.1.10)$$

Por último, se corrobora si el sistema es compatible con el formalismo Hamiltoniano, verificando si cumple con la condición de regularidad

$$\frac{\delta \phi_1}{\delta(A_{\mu}, \pi^{\mu})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.1.11)$$

Donde en (6.1.11) podemos ver que efectivamente se cumple que el Jacobiano de la

restricción primaria ϕ_1 es constante.

6.1.1. Hamiltoniano Canónico

Teniendo el momento canónico y la confirmación de que el sistema es consistente con el formalismo, construimos la Hamiltoniana, siguiendo los lineamientos descritos en el capítulo anterior. Para ello, comenzamos con la definición de la Hamiltoniana canónica

$$H_c = \int (\dot{A}_\mu \pi^\mu - L) d^3x. \quad (6.1.12)$$

Para poder proseguir de manera correcta, se debe romper la covariancia de las ecuaciones, separando la expresión (6.1.12) en su parte temporal y dinámica

$$\dot{A}_\mu \pi^\mu - L = \dot{A}_0 \pi^0 + \dot{A}_i \pi^i + \frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{i,j} F_{i,j} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} F^{0,i} F_{0,i}. \quad (6.1.13)$$

Sustituyendo el momento canónico obtenido en (6.1.8) en la última parte de (6.1.13), se llega a una expresión en función de los momentos canónicos π^i :

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} F^{0,i} F_{0,i} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{0,0} g_{i,j} F^{0,i} F^{0,j} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} G g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j. \quad (6.1.14)$$

Quedando la expresión (6.1.13) como:

$$\dot{A}_\mu \pi^\mu - L = \dot{A}_0 \pi^0 + \dot{A}_i \pi^i + \frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{i,j} F_{i,j} + \frac{1}{2\sqrt{-g}} G g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j. \quad (6.1.15)$$

Podemos expresar \dot{A}_i en términos de los momentos (6.1.8) utilizando la definición del tensor de campo electromagnético

$$F_{\mu,\nu} = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu). \quad (6.1.16)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

Despejando de la expresión anterior \dot{A}_i , se obtiene

$$\partial_0(A_i) = F_{0,i} + \partial_i(A_0) = g_{0,0} g_{i,j} F^{0,j} + \partial_i(A_0) = -G g_{0,0} g_{i,j} \pi^j + \partial_i(A_0). \quad (6.1.17)$$

Finalmente, reemplazando esta expresión en (6.1.12), el Hamiltoniano canónico del sistema queda expresado como

$$H_c = \int \left(\pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{i,j} F_{i,j} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j \right) d^3x. \quad (6.1.18)$$

6.1.2. Hamiltoniano primario y restricciones secundarias

Calculamos el *Hamiltoniano primario* incorporando la información de la restricción primaria (6.1.10) mediante un multiplicador de Lagrange

$$H_1 = \int \left(\pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{i,j} F_{i,j} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j + u_1 \pi^0 \right) d^3x. \quad (6.1.19)$$

A fin de evaluar la evolución de las restricciones primarias, definimos los *corchetes canónicos* del sistema

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x-y), \quad (6.1.20)$$

$$\{F_{i,j}(x), \pi^k(y)\} = \delta_i^k \partial_j^x \delta^{(3)}(x-y) - \delta_j^k \partial_i^x \delta^{(3)}(x-y), \quad (6.1.21)$$

$$\{A_0(x), \pi^i(y)\} = \{A_i(x), \pi^0(y)\} = \{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = 0. \quad (6.1.22)$$

Conociendo los corchetes canónicos, es sencillo comprobar lo siguiente

$$\{\phi_1(x), H_1(y)\} = \int \pi^i(y) \{\pi^0(x), \partial_i^y A_0(y)\} d^4y. \quad (6.1.23)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

Empleando la propiedad de los corchetes, también podemos escribir

$$\{\phi_1(x), H_1(y)\} = - \int \pi^i(y) \partial_i^x \{\pi^0(x), A_0(y)\} d^4y = \int \pi^i(y) \partial_i^x \delta^{(3)}(x-y) d^4y. \quad (6.1.24)$$

y, al integrar (6.1.24), se llega a

$$\{\phi_0(x), H_1(y)\} = \partial_i^x (\pi^i(x)). \quad (6.1.25)$$

Puesto que (6.1.25) no es explícitamente cero, hemos hallado una *restricción secundaria*.

$$\phi_2 = \partial_i \pi^i \approx 0. \quad (6.1.26)$$

Con una nueva restricción encontrada, se realiza nuevamente la verificación si se sigue cumpliendo con la *condición de regularidad*¹

$$\frac{\delta \phi_m}{\delta(A_\mu, \pi^\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \delta^{(3)}(x-y) & \partial_2 \delta^{(3)}(x-y) & \partial_3 \delta^{(3)}(x-y) \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2. \quad (6.1.27)$$

Las condiciones de regularidad de Dirac exigen que el Jacobiano de las restricciones tenga rango máximo en la superficie de restricción. Esto garantiza que las restricciones sean independientes y evita redundancias que complicarían la dinámica del sistema. El rango máximo de una matriz Jacobiana asociada a restricciones significa que sus filas (o columnas) son linealmente independientes. En el contexto de sistemas Hamiltonianos con restricciones $\phi_m = 0$:

- **Independencia Lineal:** Cada restricción $\phi_{m'}$ impone una condición nueva y no redundante sobre las variables del espacio de fases (q^n, p_n) .

¹Donde $\frac{\delta \partial_i \pi^i}{\delta \pi^\mu} = \partial_i (\delta_{i,\mu} \delta^{(3)}(x-y))$.

- **Implicación Física:** Reduce la dimensionalidad del espacio de fases de manera efectiva. Por ejemplo, M' restricciones independientes reducen el espacio de $2N$ dimensiones a $2N - M'$.
- **Consecuencias de un Rango No Máximo:** Si el Jacobiano tiene rango menor, algunas restricciones son combinaciones lineales de otras, generando ambigüedades en la dinámica y problemas en la cuantización (p.ej., corchetes de Dirac mal definidos).

Para comprobar la posible existencia de mas restricciones secundarias, evolucionamos la restricción ϕ_2

$$\{\phi_2(x), H_1(y)\} = \frac{1}{4}\sqrt{-g} \int \{\partial_k^x \pi^k(x), F^{i,j}(y)F_{i,j}(y)\}d^4y. \quad (6.1.28)$$

Mediante la propiedad distributiva de los corchetes de Poisson y la propiedad de las métricas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\phi_2(x), H_1(y)\} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \int F^{i,j}(y)\{\partial_k^x \pi^k(x), F_{i,j}(y)\}d^4y. \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \int F^{i,j}(y)\partial_k^x \{\pi^k(x), F_{i,j}(y)\}d^4y. \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

Utilizando (6.1.21) podemos analizar este caso particular de corchete

$$\partial_k^x \{\pi^k(x), F_{i,j}(y)\} = -\partial_k^x \{F_{i,j}(y), \pi^k(x)\} = \partial_j^y \partial_i^x \delta^{(3)}(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \delta^{(3)}(x-y). \quad (6.1.30)$$

Cabe destacar, que la condición para poder intercambiar la variable de derivación en la delta de Dirac exige que dicha delta aparezca en una integral. En la ecuación (6.1.30) —y en los corchetes canónicos (6.1.20) y (6.1.21)— esto no se cumple. Sin embargo, tras *sustituir* (6.1.30) en (6.1.29), la delta de Dirac sí se encuentra bajo una integral, de modo

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

que la propiedad puede aplicarse, dando como resultado:

$$\int \partial_k^x \{ \pi^k(x), F_{i,j}(y) \} = \int \partial_j^x \partial_i^y \delta^{(3)}(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \delta^{(3)}(x-y) = 0. \quad (6.1.31)$$

Por consiguiente,

$$\{ \phi_2(x), H_1(y) \} = 0. \quad (6.1.32)$$

La evolución de la restricción ϕ_2 es explícitamente cero (6.1.32), lo cual implica que el sistema no presenta restricciones adicionales.

6.1.3. Clasificación de las restricciones

Recordemos que la clasificación importante de las restricciones es definir si son de primera o de segunda clase. En el capítulo anterior se discutieron las condiciones necesarias para distinguir entre ambas, sin embargo, esta clasificación también puede analizarse directamente a través del cálculo de la matriz de restricciones $W = \{ \phi_i, \phi_j \}$.

Escrita de forma explícita:

$$W = \begin{array}{c} \phi_0 \\ \phi_1 \end{array} \begin{array}{cc} \phi_0 & \phi_1 \\ \left[\begin{array}{cc} \{ \phi_0, \phi_0 \} & \{ \phi_0, \phi_1 \} \\ \{ \phi_1, \phi_0 \} & \{ \phi_1, \phi_1 \} \end{array} \right] \end{array}$$

Si tanto la fila como la columna asociadas a una restricción son completamente nulas, entonces dicha restricción se clasifica como una restricción de primera clase, de otro modo, la restricción se considera de segunda clase.

Calculamos explícitamente la matriz W :

$$W = \begin{pmatrix} \{\pi^0(x), \pi^0(y)\} & \{\pi^0(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} \\ \{\partial_i^x \pi^i(x), \pi^0(y)\} & \{\partial_i^x \pi^i(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.33)$$

Podemos apreciar en la matriz (6.1.33) que todas las restricciones son de primera clase, y como vimos en el capítulo anterior, las restricciones de esta clase están asociadas a invariancias de norma, y por tanto, la dinámica no queda completamente determinada.

6.1.4. Transformaciones de calibre

El generador de Castellani asociado al par de restricciones de primera clase se define como

$$G = \int d^3x (\epsilon_\nu \Gamma^\nu), \quad (6.1.34)$$

donde Γ^μ denota las restricciones de primera clase y ϵ_ν son los parámetros de calibre. En nuestro caso,

$$G = \int d^3x (\epsilon_0 \Gamma^0 + \epsilon \Gamma^1), \quad \Gamma^0 \equiv \pi^0, \quad \Gamma^1 \equiv \partial_i \pi^i. \quad (6.1.35)$$

Las transformaciones de calibre de las variables en el espacio de fases son²

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), G\} = \epsilon_0(x) = -\dot{\epsilon}(x), \quad (6.1.36)$$

$$\delta A_i(x) = \{A_i(x), G\} = -\partial_i \epsilon(x), \quad (6.1.37)$$

$$\delta \pi^0(x) = \{\pi^0(x), G\} = 0, \quad (6.1.38)$$

$$\delta \pi^i(x) = \{\pi^i(x), G\} = 0. \quad (6.1.39)$$

²Usaremos la convención $\epsilon_0 = -\dot{\epsilon}$.

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

En consecuencia, identificando el parámetro escalar de calibre $\lambda(x)$ mediante $\epsilon(x) = -\lambda(x)$ (equivalentemente, “hasta una elección global de signos”), se obtiene la forma covariante

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda, \quad \Rightarrow \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (6.1.40)$$

De este modo, la simetría de norma desplaza el potencial por un gradiente sin afectar a los momentos canónicos, y preserva la forma de las ecuaciones de Maxwell, lo que refleja su covariancia bajo transformaciones de calibre.

6.1.5. Fijación de calibre: calibre temporal y condición de Lorenz

Para fijar por completo la libertad de calibre del sistema, imponemos dos condiciones: el *calibre temporal* (6.1.41) y la *condición de Lorenz*³ (6.1.42):

$$A_0 = 0, \quad (6.1.41)$$

$$\nabla_k (A^k) = 0. \quad (6.1.42)$$

Como se mostró en el capítulo anterior, estas condiciones de fijación de calibre ingresan al formalismo de restricciones de Dirac como *nuevas* restricciones del sistema. En conjunto con las restricciones de Maxwell sin fuentes, el conjunto total queda

$$\phi_1 = \pi^0, \quad \phi_2 = \partial_i(\pi^i), \quad \phi_3 = A_0, \quad \phi_4 = \nabla_k(A^k) = g^{k,l} \nabla_k(A_l), \quad (6.1.43)$$

Con ello, la matriz de corchetes de Poisson entre restricciones $W_{ab}(x, y) = \{\phi_a(x), \phi_b(y)\}$

³Ortografía estándar: *Lorenz* (L. Lorenz), no *Lorentz*. En presencia de $A_0 = 0$, la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$ se reduce a $\nabla_k A^k = 0$ en un 3+1 con métrica espacial g_{kl} .

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

toma la forma

$$W = \begin{pmatrix} \{\pi^0(x), \pi^0(y)\} & \{\pi^0(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} & \{\pi^0(x), A_0(y)\} & \{\pi^0(x), g^{k,l} \nabla_k^y(A_l(y))\} \\ \{\partial_i^x \pi^i(x), \pi^0(y)\} & \{\partial_i^x \pi^i(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} & \{\partial_i^x \pi^i(x), A_0(y)\} & \{\partial_i^x \pi^i(x), g^{k,l} \nabla_k^y(A_l(y))\} \\ \{A_0(x), \pi^0(y)\} & \{A_0(x), \partial_i^y \pi^i(y)\} & \{A_0(x), A_0(y)\} & \{A_0(x), g^{k,l} \nabla_k^y(A_l(y))\} \\ \{g^{k,l} \nabla_k^x(A_l(x)), \pi^0(y)\} & \{g^{k,l} \nabla_k^x(A_l(x)), \partial_i^y \pi^i(y)\} & \{g^{k,l} \nabla_k^x(A_l(x)), A_0(y)\} & \{g^{k,l} \nabla_k^x(A_l(x)), g^{k,l} \nabla_k^y(A_l(y))\} \end{pmatrix} \quad (6.1.44)$$

Evaluando explícitamente, y usando $\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x - y)$, se obtiene

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{k,i} \nabla_k^y \partial_i^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{k,i} \nabla_k^x \partial_i^y & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (6.1.45)$$

En particular,

$$\{\pi^0(x), A_0(y)\} = -\delta^{(3)}(x - y), \quad \{\partial_i^x \pi^i(x), \nabla_k^y A^k(y)\} = -g^{k,i} \nabla_k^y \partial_i^x \delta^{(3)}(x - y),$$

y los restantes elementos no nulos se fijan por antisimetría. Se concluye que los pares (ϕ_1, ϕ_3) y (ϕ_2, ϕ_4) forman *segundas clases*, de modo que W es invertible. En consecuencia, la dinámica completa puede describirse mediante los *corchetes de Dirac*, construidos a partir de $C^{ab} = (W^{-1})^{ab}$.

6.1.6. Corchetes de Dirac

El primer paso para el cálculo de los corchetes de Dirac, es encontrar la inversa de la matriz (6.1.45), la cual es la siguiente:

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinámica de Maxwell sin fuente externa

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g^{k,i} \nabla_k^y \partial_i^x} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g^{k,i} \nabla_k^x \partial_i^y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y). \quad (6.1.46)$$

Con ello pudiendo encontrar los corchetes de Dirac canonicos del sistema como se vio en el capitulo anterior.

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0,$$

$$\{A_i(x), \pi^j(y)\}_D = \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_x^j}{\nabla_x^2} \right) \delta^{(3)}(x-y),$$

$$\{\pi^i(x), \pi^j(y)\}_D \equiv 0,$$

$$\{F_{ij}(x), \pi^k(y)\}_D = \delta_j^k \partial_i^x \delta^{(3)}(x-y) - \delta_i^k \partial_x^j \delta^{(3)}(x-y).$$

donde $\nabla_x^2 \equiv g^{mn} \partial_m^x \partial_n^x$ y $\partial_x^j \equiv g^{jn} \partial_n^x$.⁴ y con ello pudiendo determinar la dinamica del sistema.

6.1.7. Ecuaciones de Hamilton

Con los corchetes de Dirac del sistema determinados, podemos calcular la evolucion de las variables dinamicas del sistema A_μ y π^μ .

$$\{A_s, H_c\}_D = -G g_{0,0} \pi_s \quad (6.1.47)$$

$$\{\pi^s, H_c\} = -\sqrt{-g} \nabla_n F^{n,s} \quad (6.1.48)$$

⁴ ∇^{-2} denota el inverso (Green) del operador elíptico ∇^2 con condiciones de contorno adecuadas; en espacio euclídeo plano $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\nabla^2 = \delta^{mn} \partial_m \partial_n$.

6.1.8. Ecuaciones de Maxwell

Partiendo de la definición del momento canónico π^i (6.1.8) y de la relación $F^{0i} = -E^i$, podemos expresar el campo eléctrico E^i en términos de los momentos canónicos π :

$$E^i = G \pi^i \quad (6.1.49)$$

Ley de Gauss Al analizar la ecuación de movimiento (6.1.47) y la descripción del campo eléctrico (6.1.49), se obtiene:

$$\dot{A}_s = g_{0,0} E_s. \quad (6.1.50)$$

Calculamos ahora la divergencia de ambos miembros:

$$\nabla_0(\nabla^s A_s) = g_{0,0} \nabla^s E_s. \quad (6.1.51)$$

El término $\nabla^s A_s$ corresponde a la cuarta restricción del sistema (6.1.42), de modo que la expresión (6.1.51) conduce directamente a la primera ecuación de Maxwell, la ley de Gauss:

$$\nabla^s E_s = 0. \quad (6.1.52)$$

Ley de Faraday–Lenz. De la definición del campo magnético B :

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}. \quad (6.1.53)$$

Al expandir $F_{jk} = \nabla_j A_k - \nabla_k A_j$ y aprovechar la antisimetría de ε^{ijk} se simplifica a

$$B^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_k A_j. \quad (6.1.54)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinamica de Maxwell no conmutativa
6.1. Electrodinamica de Maxwell sin fuente externa

Evolucionando (6.1.53) con respecto al tiempo y usando (6.1.50) se obtiene la ley de Faraday-Lenz:

$$\nabla_0 B^i = g_{0,0} \varepsilon^{ijk} \nabla_k E_j = g_{0,0} (\nabla \times \mathbf{E})^i. \quad (6.1.55)$$

Ley de Gauss para el magnetismo. La divergencia de \mathbf{B} se calcula directamente desde su definición (6.1.53):

$$\nabla_i B^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_i \nabla_k A_j = 0. \quad (6.1.56)$$

lo que genera la ley de Gauss para campos magnéticos.

Ley de Ampère-Maxwell La ultima ecuacion Maxwell puede obtenerse a partir de la ecuación de Hamilton asociada a $\dot{\pi}$.

$$\dot{\pi}^s = \{\pi^s, H_c\} = -\sqrt{-g} \nabla_n F^{n,s} \quad (6.1.57)$$

Convertida en su forma vectorial

$$\dot{\pi}^s = \sqrt{-g} \varepsilon^{n,s,c} \nabla_n B_c \quad (6.1.58)$$

Por último, utilizamos la definición del campo eléctrico, de modo que:

$$\dot{\pi}^i = \nabla_0(\pi^i) = \sqrt{-g} \nabla_0 E^i. \quad (6.1.59)$$

De este modo obtenemos

$$\nabla_0 E^s = \varepsilon^{n,s,c} \nabla_n B_c \quad (6.1.60)$$

al reescribir todo en términos de productos vectoriales,

$$\nabla_0 E^s = (\nabla \times B)^s \quad (6.1.61)$$

que corresponde a la ley de Ampère-Maxwell.

6.2. ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL NO CONMUTATIVA SIN FUENTES

Al estudiar la versión no conmutativa de la electrodinámica de Maxwell, aparecen dos términos lagrangianos adicionales [Abe et al., 2003, Berrino et al., 2003, Kruglov, 2003], además del término estándar L_0 . Dichas lagrangianas se describen a continuación:

$$L_0 = -2 F_{\alpha,\beta} F_{\mu,\nu} J g^{\nu,\beta} g^{\mu,\alpha}, \quad (6.2.1)$$

$$L_1 = F_{\alpha,\beta} F_{\kappa,\tau} F_{\mu,\nu} J g^{\nu,\beta} g^{\mu,\alpha} \theta^{\kappa,\tau}, \quad (6.2.2)$$

$$L_2 = 4 F_{\alpha,\beta} F_{\kappa,\mu} F_{\nu,\tau} J g^{\nu,\beta} g^{\mu,\alpha} \theta^{\kappa,\tau}. \quad (6.2.3)$$

donde

$$J = \frac{\sqrt{-g}}{8}.$$

La Lagrangiana total del sistema se define como la suma de estos tres términos:

$$L = L_0 + L_1 + L_2. \quad (6.2.4)$$

Para facilitar los cálculos, trabajaremos con cada uno de estos términos de forma separada, si bien es necesario considerar conjuntamente las tres contribuciones para describir el

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.2. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes

sistema completo, aplicar el procedimiento de manera individual a cada término simplifica los pasos intermedios.

El término L_0 coincide con la Lagrangiana usual de Maxwell, la cual se analizó en la sección anterior, por ello no se realizarán cálculos explícitos para L_0 , sino que reutilizaremos los resultados obtenidos en dicho estudio, centrando nuestra atención en los nuevos términos no conmutativos L_1 y L_2 .

Lo primero que necesitamos es calcular la Matriz Hessiana del sistema completo. Sabemos que en el caso de L_0 esta matriz presenta su primera fila y columna nulas, dando como resultado un determinante nulo. Para que la Hessiana total también sea singular, los términos L_1 y L_2 deben exhibir la misma estructura de nulidad en la primera fila y la primera columna.

$$\frac{\delta^2 L_1}{\delta(\partial_0 A_\sigma)\delta(\partial_0 A_\lambda)} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\theta^{\kappa,\sigma}F_{\kappa,\tau}(g^{0,0}g^{\lambda,\sigma} - g^{0,\sigma}g^{\lambda,0}), \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\delta^2 L_2}{\delta(\partial_0 A_\sigma)\delta(\partial_0 A_\lambda)} = -\sqrt{-g}F_{\kappa,\mu}(\theta^{\kappa,\lambda}(g^{0,0}g^{\mu,\sigma} - g^{\mu,0}g^{0,\sigma}) + \theta^{\kappa,\sigma}(g^{0,0}g^{\mu,\lambda} - g^{\mu,0}g^{0,\lambda})). \quad (6.2.6)$$

En (6.2.5) se observa un caso análogo al de (6.1.3) y (6.1.4) para L_0 , por lo que también se cumple que su primera fila y columna son nulas.

$$(H^{0,\lambda})_1 = (H^{\sigma,0})_1 = 0. \quad (6.2.7)$$

Para el término $(H^{\lambda,\sigma})_2$, en principio puede no resultar evidente, de modo que se realizara un análisis más a detalle

$$(H^{0,\sigma})_2 = -\sqrt{-g}F_{\kappa,\mu}(\theta^{\kappa,\sigma}(g^{0,0}g^{\mu,0} - g^{\mu,0}g^{0,0})) = 0. \quad (6.2.8)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.2. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes

$$(H^{\lambda,0})_2 = -\sqrt{-g} F_{\kappa,\mu} (\theta^{\kappa,\lambda} (g^{0,0} g^{\mu,0} - g^{\mu,0} g^{0,0})) = 0. \quad (6.2.9)$$

Vemos, por tanto, que la primera fila y columna son nulas, al igual que en la electrodinámica de Maxwell conmutativa. Esto confirma que la matriz Hessiana tiene determinante cero, y por ende el sistema es singular. Dado lo extenso de la matriz, no se muestra su forma completa; sin embargo, el cálculo de los vectores nulos arroja nuevamente el vector trivial:

$$v_{\mu,\alpha} = (1, 0, 0, 0). \quad (6.2.10)$$

Por lo que la restricción primaria efectiva surge directamente del cálculo de los momentos canónicos.

$$\pi^\lambda = \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{k,l} - 1 \right) F^{0,\lambda} + F^{0,j} F_{j,k} J \theta^{k,\lambda} + F^{0,m} F_{k,j} J g_{l,m} g^{j,\lambda} \theta^{l,k} \right]. \quad (6.2.11)$$

La expresion (6.2.11) también puede encontrarse en otras referencias [Kruglov, 2003], pero es normalmente expresada en su forma vectorial:

$$\pi^\lambda = \sqrt{-g} [(B \cdot \theta - 1) E^\lambda + (\theta \cdot E) B^\lambda + (E \cdot B) \theta^\lambda]. \quad (6.2.12)$$

Tomando en cuenta los siguientes parametros de transformacion:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= -E_i, & F^{0i} &= -E^i, & \theta^{0i} &= 0, \\ F_{jk} &= -\varepsilon_{jki} B^i, & F^{jk} &= -\varepsilon^{jki} B_i, & \theta^{jk} &= -\varepsilon^{jki} \theta_i. \end{aligned}$$

Separamos la componente temporal ($\lambda = 0$) y la componente dinámica ($\lambda = i$) a partir de la forma tensorial (6.2.11):

$$\pi^0 = 0, \quad (6.2.13)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.2. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes

$$\pi^i = \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{k,l} - 1 \right) F^{0,i} + F^{0,j} F_{j,k} J \theta^{k,i} + F^{0,m} F_{k,j} J g_{l,m} g^{j,i} \theta^{l,k} \right]. \quad (6.2.14)$$

De esta manera, se identifica la restricción primaria del sistema como $\phi_1 = \pi^0$. Observamos que es idéntica a la obtenida en el caso conmutativo (6.1.10). Por consiguiente, esta restricción cumple con la condición de regularidad examinada previamente.

Además, nótese que si aplicamos la aproximación de espacio conmutativo $\theta \rightarrow 0$ en la ecuación (6.2.14), recuperamos la forma correspondiente al caso de Maxwell conmutativo:

$$\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \pi^i \rightarrow -\sqrt{-g} F^{0,i}. \quad (6.2.15)$$

lo cual coincide con la ecuación (6.1.8). Este resultado confirma la consistencia interna del modelo no conmutativo, ya que toda descripción física en el límite $\theta \rightarrow 0$ debe reproducir los resultados conocidos de la teoría conmutativa. De no ser así, se inferiría la presencia de un error en la formulación.

6.2.1. Hamiltoniano canónico

Para calcular el Hamiltoniano canónico, utilizamos la expresión habitual:

$$H_c = \int \dot{A}_i \pi^i - L. \quad (6.2.16)$$

donde L es la Lagrangiana total, $L = L_0 + L_1 + L_2$

Con el fin de construir H_c , primero necesitamos despejar el valor de la “velocidad” correspondiente a \dot{A}_i . En la notación de los campos electromagnéticos, esto equivale a encontrar $F^{0,i}$.

En el caso conmutativo de Maxwell, la ecuación de los momentos canónicos (6.1.8) es

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.2. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes

relativamente sencilla, y el despeje de $F^{0,i}$ puede llevarse a cabo de manera directa. Sin embargo, la ecuación análoga en el escenario no conmutativo (6.2.14), no se despeja con la misma facilidad.

Una estrategia empleada en la literatura consiste en multiplicar π^i por distintas combinaciones de θ , y puesto que los terminos cuadraticos de θ se consideran cero, es posible encontrar relaciones que permiten aislar al termino $F^{0,i}$. En nuestro enfoque, aprovechamos las capacidades de cálculo simbólico que nos proporciona MATLAB para extender todos los índices en π^i , formar una matriz que relacione π^i con $F^{0,i}$ y, a continuación, invertir esa relación.

$$\pi^i = M F^{0,i}. \quad (6.2.17)$$

La matrix extendida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^3 \end{pmatrix} = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} F_{1,2}\theta^{2,1} + F_{1,3}\theta^{3,1} - F_{3,2}\theta^{2,3} - 1 & F_{2,3}\theta^{3,1} + F_{3,1}g_{2,2}g^{1,1}\theta^{2,3} & F_{3,2}\theta^{2,1} + F_{2,1}g_{3,3}g^{1,1}\theta^{3,2} \\ F_{1,3}\theta^{3,2} + F_{3,2}g_{1,1}g^{2,2}\theta^{1,3} & F_{1,2}\theta^{2,1} - F_{1,3}\theta^{3,1} + F_{3,2}\theta^{2,3} - 1 & F_{3,1}\theta^{1,2} + F_{1,2}g_{3,3}g^{2,2}\theta^{3,1} \\ F_{1,2}\theta^{2,3} + F_{2,3}g_{1,1}g^{3,3}\theta^{1,2} & F_{2,1}\theta^{1,3} + F_{1,3}g_{2,2}g^{3,3}\theta^{2,1} & F_{1,3}\theta^{3,1} - F_{1,2}\theta^{2,1} + F_{3,2}\theta^{2,3} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{0,1} \\ F^{0,2} \\ F^{0,3} \end{pmatrix}$$

y la matriz inversa de M

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-2F_{3,2}\theta^{2,3} - 1}{\sigma_1} & \frac{F_{2,3}\theta^{3,1} + F_{3,1}g_{2,2}g^{1,1}\theta^{2,3}}{\sigma_1} & \frac{F_{3,2}\theta^{2,1} + F_{2,1}g_{3,3}g^{1,1}\theta^{3,2}}{\sigma_1} \\ \frac{F_{1,3}\theta^{3,2} + F_{3,2}g_{1,1}g^{2,2}\theta^{1,3}}{\sigma_1} & \frac{-2F_{1,3}\theta^{3,1} - 1}{\sigma_1} & \frac{F_{3,1}\theta^{1,2} + F_{1,2}g_{3,3}g^{2,2}\theta^{3,1}}{\sigma_1} \\ \frac{F_{1,2}\theta^{2,3} + F_{2,3}g_{1,1}g^{3,3}\theta^{1,2}}{\sigma_1} & \frac{F_{2,1}\theta^{1,3} + F_{1,3}g_{2,2}g^{3,3}\theta^{2,1}}{\sigma_1} & \frac{-2F_{1,2}\theta^{2,1} - 1}{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (6.2.18)$$

Donde $\sigma_1 = \sqrt{-g} (F_{1,2}\theta^{2,1} - 1 + F_{1,3}\theta^{3,1} + F_{3,2}\theta^{2,3})$

El resultado es la siguiente expresión:

$$F^{0,i} = -G \left[\pi^k \left(F_{k,l} \theta^{l,i} + F_{m,l} g^{i,m} g_{n,k} \theta^{l,n} \right) - \pi^i \left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{l,k} - 1 \right) \right]. \quad (6.2.19)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.2. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa sin fuentes

donde $G = \frac{1}{\sqrt{-g}}$.

A continuación, calculamos el valor de \dot{A}_i como se vio en (6.1.17), a partir de la definición de $F^{0,i}$

$$F_{0,i} = \partial_0(A_i) - \partial_i(A_0). \quad (6.2.20)$$

Despejando $\partial_0(A_i)$, obtenemos

$$\partial_0(A_i) = \partial_i(A_0) + F_{0,i}. \quad (6.2.21)$$

Al subir los índices de $F_{0,i}$ con $g_{0,0} g_{i,j}$, tenemos:

$$F_{0,i} = g_{0,0} g_{i,j} F^{0,j}.$$

Por consiguiente,

$$\partial_0(A_i) = \partial_i(A_0) + g_{0,0} g_{i,j} F^{0,j}. \quad (6.2.22)$$

Sustituyendo (6.2.19) en (6.2.22), se obtiene la siguiente relación:

$$\partial_0(A_i) = \partial_i(A_0) - g_{0,0} g_{i,j} \left(G \pi^j + F_{k,l} G \pi^k \theta^{l,j} - F_{k,l} G P \pi^j \theta^{l,k} + F_{m,l} G g^{j,m} g_{n,k} \pi^k \theta^{l,n} \right). \quad (6.2.23)$$

Con esta información, procedemos a construir el Hamiltoniano canónico, obteniendo:

$$\begin{aligned} H = & \pi^i \partial_i(A_0) - 2 F^{j,i} F_{i,j} J - \frac{G g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j}{2} - F^{j,i} F_{i,j} F_{l,m} J \theta^{m,l} \\ & + 4 F^{i,p} F_{l,i} F_{p,m} J \theta^{m,l} + \frac{F_{l,m} G g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j \theta^{m,l}}{4} - F_{l,i} G g_{0,0} g_{m,j} \pi^i \pi^j \theta^{m,l}. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

Sustituyendo el valor de J , simplificando y reacomodando índices:

$$\begin{aligned}
 H_c = & \pi^i \partial_i (A_0) + \frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{i,j} F_{i,j} \left(1 - \frac{1}{2} F_{m,l} \theta^{m,l} \right) - \frac{1}{2} G g_{0,0} g_{i,j} \pi^i \pi^j \left(\frac{1}{2} F_{m,l} \theta^{m,l} + 1 \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sqrt{-g} F^{i,p} F_{l,i} F_{p,m} \theta^{m,l} - F_{l,i} G g_{0,0} g_{m,j} \pi^i \pi^j \theta^{m,l}.
 \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Si utilizamos la notación vectorial, se llega a la forma:

$$H_c = \pi^i \partial_i (A_0) + \frac{1}{2} U (1 + B^j \theta_j) B^i B_i - \frac{1}{2} G g_{0,0} (1 - B^j \theta_j) \pi^i \pi_i - G g_{0,0} B^m \pi_m \pi^b \theta_b. \tag{6.2.26}$$

Donde $U = \frac{1}{G}$

La ecuación (6.2.26) concuerda con la que se reporta en la literatura para el espacio de Minkowski $(-, +, +, +)$ [Kruglov, 2003].

6.2.2. Hamiltoniano primario y restricciones secundarias

Construimos el Hamiltoniano primario

$$H_1 = \int (H_c + u_1 \pi^0) d^4 x. \tag{6.2.27}$$

A continuación, calculamos la evolución de la primera restricción.

$$\dot{\phi}_1(x) = \{\phi_1(x), H_1(y)\}. \tag{6.2.28}$$

Para ello, necesitamos los corchetes canónicos, los cuales no difieren de los vistos en su analogo conmutativo (6.1.20 - 6.1.22)

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.2.29)$$

$$\{F_{i,j}(x), \pi^k(y)\} = \delta_i^k \partial_j^x \delta^{(3)}(x - y) - \delta_j^k \partial_i^x \delta^{(3)}(x - y), \quad (6.2.30)$$

$$\{A_0(x), \pi^i(y)\} = \{A_i(x), \pi^0(y)\} = \{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = 0. \quad (6.2.31)$$

De la Hamiltoniana canónica (6.2.25) observamos que la única expresión que involucra A_0 (la cual es la única que no se anula con el corchete con π^0), es $\pi^i \partial_i(A_0)$. Por consiguiente, la restricción secundaria resultante es idéntica a la que obtuvimos en el caso conmutativo (6.1.25):

$$\dot{\phi}_1(x) = \phi_2 = \partial_i^x [\pi^i(x)] \approx 0. \quad (6.2.32)$$

Tal como se analizó en (6.1.30), el corchete de Poisson entre $\partial_i(\pi^i)$ y los tensores de campo F resulta cero, y dado que la Hamiltoniana H_c depende exclusivamente de π y de F , la evolución de la segunda restricción ϕ_2 será nula, por lo que el sistema no cuenta con mas restricciones.

$$\{\phi_2(x), H_1(y)\} = 0. \quad (6.2.33)$$

6.2.3. Transformaciones de norma

Calculamos el generador G con las restricciones

$$G = \int (\epsilon_\gamma v^\gamma) d^4x. \quad (6.2.34)$$

Donde ϵ_γ representa los parametros de norma y v^γ las restricciones primarias del sistema

Sustituyendo los valores de las restricciones encontradas:

$$G_0 = \int (\epsilon_0 \pi^0) d^4x, \quad (6.2.35)$$

$$G_j = \int \epsilon \nabla_i [\pi^i] d^4x. \quad (6.2.36)$$

Siendo $G = G_0 + G_j$

de donde

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), G_\theta\} = -\dot{\epsilon}(x), \quad (6.2.37)$$

$$\delta A_i(x) = \{A_i(x), G_\theta\} = -\partial_i \epsilon(x), \quad (6.2.38)$$

$$\delta \pi^0(x) = \{\pi^0(x), G_\theta\} = 0, \quad (6.2.39)$$

$$\delta \pi^i(x) = \{\pi^i(x), G_\theta\} = 0, \quad (6.2.40)$$

lo que confirma que el sector sin fuentes conserva la simetría abeliana efectiva $U(1)$ a $\mathcal{O}(\theta)$.

6.2.4. Clasificación de las restricciones, fijación de calibre y corchetes de Dirac

Los pasos restantes del análisis dependen únicamente del conjunto de restricciones y de la fijación de calibre, que en todos los casos considerados será la misma: *calibre temporal* (6.1.41) y *condición de Lorenz* (6.1.42). Dado que las restricciones que aparecen aquí coinciden con las obtenidas en la sección anterior, mantenemos el mismo conjunto (6.1.43):

$$\phi_1 = \pi^0, \quad \phi_2 = \partial_i(\pi^i), \quad \phi_3 = A_0, \quad \phi_4 = \nabla_k(A^k) = g^{kl} \nabla_k(A_l).$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

Como se discutió al final de [Capítulo 5](#), este conjunto implica que los pares (ϕ_1, ϕ_3) y (ϕ_2, ϕ_4) son de *segunda clase* (la matriz $W_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$ es invertible), por lo que la dinámica física se formula con *corchetes de Dirac*. Dado que el conjunto de restricciones y la fijación de calibre coinciden con el caso conmutativo, los corchetes de Dirac resultan idénticos:

$$\begin{aligned}\{A_i(x), A_j(y)\}_D &= 0, \\ \{A_i(x), \pi^j(y)\}_D &= \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_x^j}{\nabla_x^2} \right) \delta^{(3)}(x - y), \\ \{\pi^i(x), \pi^j(y)\}_D &= 0, \\ \{F_{ij}(x), \pi^k(y)\}_D &= \delta_j^k \partial_i^x \delta^{(3)}(x - y) - \delta_i^k \partial_j^x \delta^{(3)}(x - y).\end{aligned}$$

Aunque los corchetes de Dirac coincidan con los del caso conmutativo, las *ecuaciones de movimiento* no dependen sólo de los corchetes y de las restricciones, sino también de la *Hamiltoniana extendida* del sistema, que sí cambia en el contexto no conmutativo. Por ello, con una fijación de calibre y una estructura de restricciones idénticas, las diferencias dinámicas entre los modelos conmutativo y no conmutativo emergen exclusivamente a través del Hamiltoniano extendido.

6.3. ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL NO CONMUTATIVA CON FUENTES EXTERNAS

Para formular el escenario más general posible, es indispensable considerar sistemas que admiten *fuentes externas*. En el régimen conmutativo, el acoplamiento a la corriente conservada J^μ se incorpora de manera estándar en la acción mediante un término lineal en

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

el potencial A_μ :

$$L = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) - \int d^4x \sqrt{-g} J^\mu A_\mu. \quad (6.3.1)$$

En el caso no conmutativo, la Lagrangiana conserva una estructura análoga, con la diferencia de que los campos y las corrientes se reemplazan por sus contrapartes no conmutativas, \hat{A}_μ y \hat{J}^μ :

$$L = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}_{\alpha\beta} \right) - \int d^4x \sqrt{-g} \hat{J}^\mu \hat{A}_\mu. \quad (6.3.2)$$

Como se discutió en la sección precedente, emergen similitudes sustantivas con el caso *sin fuentes*. Para organizar el desarrollo, dividiremos la exposición en dos componentes: (i) el término puramente electromagnético no conmutativo (sin fuentes) ya analizado, y (ii) el término adicional que codifica el acoplamiento a fuentes no conmutativas.

Adoptaremos la forma más general de \hat{J}^μ propuesta en [Banerjee et al., 2004] y, a partir de ella, examinaremos casos representativos:

$$\hat{J}^\mu = J^\mu - c_0 A_\alpha \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta J^\mu + c_1 F_{\alpha\beta} J^\beta \theta^{\mu\alpha} + c_2 F_{\alpha\beta} J^\mu \theta^{\alpha\beta} + c_3 F_{\alpha\nu} J_\beta g^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta}, \quad (6.3.3)$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son coeficientes libres y $\theta^{\mu\nu}$ es el parámetro antisimétrico de no conmutatividad.

Con \hat{J}^μ extendida, la Lagrangiana de fuentes toma la forma

$$L_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-A_\mu J^\mu + c_0 A_\alpha A_\mu \theta^{\alpha\beta} \nabla_\beta J^\mu + \frac{1}{2} A_\alpha J^\mu \theta^{\alpha\beta} (2\nabla_\beta A_\mu - \nabla_\mu A_\beta) \right. \\ \left. - c_1 A_\mu F_{\alpha\beta} J^\beta \theta^{\mu\alpha} - c_2 A_\mu F_{\alpha\beta} J^\mu \theta^{\alpha\beta} - c_3 A_\mu F_{\alpha\nu} J_\beta g^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta} \right]. \quad (6.3.4)$$

En (6.3.4) la presencia de derivadas covariantes es esencial: sin fuentes bastaba emplear derivadas parciales, pues $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ en espacios sin torsión; sin embargo, al introducir J^μ y sus gradientes el tratamiento covariante evita ambigüedades tensoriales

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

y facilita el análisis en geometrías generales. Adoptaremos, por tanto, la convención $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ (equivalente a la definición con derivadas parciales en conexión de Levi-Civita) y la regla operativa $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ donde aparezca J^μ o combinaciones mixtas con A_μ .

La Lagrangiana total queda entonces

$$L = L_E + L_J, \quad (6.3.5)$$

donde L_E es la Lagrangiana electromagnética no conmutativa sin fuentes (ver 6,2,4). El primer paso es verificar la singularidad del sistema. Ya se mostró que L_E conduce a una Hessiana degenerada; resta evaluar la contribución de L_J . Obsérvese que L_J no contiene términos del tipo $\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta$, por lo que su aporte directo a la Hessiana es nulo: el sistema sigue siendo singular.

El momento canónico inducido por L_J resulta

$$\frac{\delta L}{\delta(\nabla_0 A_\lambda)} = \sqrt{-g} \theta^{j\lambda} [A_j J^0 (c_1 - \frac{1}{2}) - c_3 g^{00} A_0 J_j], \quad (6.3.6)$$

de donde

$$(\pi^\lambda)_J = \sqrt{-g} \theta^{j\lambda} [A_j J^0 (c_1 - \frac{1}{2}) - c_3 g^{00} A_0 J_j], \quad (6.3.7)$$

$$(\pi^i)_J = \sqrt{-g} \theta^{ji} [A_j J^0 (c_1 - \frac{1}{2}) - c_3 g^{00} A_0 J_j], \quad (\pi^0)_J = 0. \quad (6.3.8)$$

Añadiendo estas contribuciones a los momentos del sector L_E (ver 6,2,14)

$$\pi^0 = 0 \quad (6.3.9)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

$$\begin{aligned} \pi^i = \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{k,l} - 1 \right) F^{0,i} + F^{0,j} F_{j,k} J \theta^{k,i} + F^{0,m} F_{k,j} J g_{l,m} g^{j,i} \theta^{l,k} \right. \\ \left. + \theta^{j,i} \left(A_j J^0 \left(c_1 - \frac{1}{2} \right) - c_3 g^{0,0} A_0 J_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Podemos observar que se mantiene la restricción primaria ya conocida:

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (6.3.11)$$

6.3.1. Hamiltoniano canónico

El despeje de F^{0i} en función de π^i procede como en la sección previa, con la salvedad de que ahora aparece el corrimiento $(\pi^i)_J$:

$$\begin{pmatrix} \pi^1 - (\pi^1)_J \\ \pi^2 - (\pi^2)_J \\ \pi^3 - (\pi^3)_J \end{pmatrix} = \sqrt{-g} \begin{pmatrix} F_{1,2} \theta^{2,1} + F_{1,3} \theta^{3,1} - F_{3,2} \theta^{2,3} - 1 & F_{2,3} \theta^{3,4} + F_{3,1} g_{2,2} g^{1,1} \theta^{2,3} & F_{3,2} \theta^{2,1} + F_{2,1} g_{3,3} g^{1,1} \theta^{3,2} \\ F_{1,3} \theta^{3,2} + F_{3,2} g_{1,1} g^{2,2} \theta^{1,3} & F_{1,2} \theta^{2,1} - F_{1,3} \theta^{3,1} + F_{3,2} \theta^{2,3} - 1 & F_{3,1} \theta^{1,2} + F_{1,2} g_{3,3} g^{2,2} \theta^{3,1} \\ F_{1,2} \theta^{2,3} + F_{2,3} g_{1,1} g^{3,3} \theta^{1,2} & F_{2,1} \theta^{1,3} + F_{1,3} g_{2,2} g^{3,3} \theta^{2,1} & F_{1,3} \theta^{3,1} - F_{1,2} \theta^{2,1} + F_{3,2} \theta^{2,3} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{0,1} \\ F^{0,2} \\ F^{0,3} \end{pmatrix}$$

Donde la matriz obtenida, es la misma que en el caso sin fuentes (véase 6.2,18 para su inversa). En consecuencia,

$$F^{0i} = (F^{0i})_E + G (\pi^i)_J, \quad (6.3.12)$$

siendo $(F^{0i})_E$ la expresión del caso sin fuentes (6.2.19) y G el factor escalar definido previamente como $G = \frac{1}{\sqrt{-g}}$.

La evolución del potencial espacial se escribe

$$\nabla_0 A_i = \nabla_i A_0 + g_{00} g_{ij} [(F^{0j})_E + G (\pi^j)_J], \quad (6.3.13)$$

y el Hamiltoniano canónico total adopta la forma

$$H_c = \int d^3x (\dot{A}_i \pi^i - L_E - L_J) = \int d^3x (H_{sf} + H_J), \quad (6.3.14)$$

donde $H_{sf} = \dot{A}_i \pi^i - L_E$ coincide exactamente con el caso sin fuentes (6,2,24). En L_J , el único término que contiene F^{0i} aparece multiplicado por $\theta^{\mu\nu}$, por lo que a primer orden basta usar $F^{0i} = -G \pi^i + O(\theta)$.

Agrupando términos, el sector de fuentes se descompone como

$$(H_J)_{sc} = \sqrt{-g} \left[A_0 J^0 + A_k J^k - \frac{1}{2} A_j \theta^{jl} \left(J^0 \nabla_l A_0 + J^k \nabla_l A_k + J^k F_{lk} + G g_{00} g_{li} J^0 \pi^i \right) \right], \quad (6.3.15)$$

$$(H_J)_{c_0} = -c_0 \sqrt{-g} A_j \theta^{jl} \left[A_0 \nabla_l J^0 + A_k \nabla_l J^k \right], \quad (6.3.16)$$

$$(H_J)_{c_1} = c_1 \sqrt{-g} A_k \theta^{kj} \left[F_{jl} J^l + G g_{00} g_{ji} J^0 \pi^i \right], \quad (6.3.17)$$

$$(H_J)_{c_2} = c_2 \sqrt{-g} F_{jl} \theta^{jl} \left[A_0 J^0 + A_k J^k \right], \quad (6.3.18)$$

$$(H_J)_{c_3} = c_3 \sqrt{-g} J_l \theta^{jl} \left[A_k F_{jm} g^{km} + A_0 g_{ji} \pi^i \right], \quad (6.3.19)$$

de modo que $H_J = (H_J)_{sc} + (H_J)_{c_0} + (H_J)_{c_1} + (H_J)_{c_2} + (H_J)_{c_3}$.

6.3.2. Hamiltoniano primario y restricciones secundarias

Separando $H_c = H_{sf} + H_J$, la evolución de la restricción primaria queda

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_c\} = \{\phi_1, H_{sf}\} + \{\phi_1, H_J\}, \quad (6.3.20)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

donde $\{\phi_1, H_{sf}\}$ es conocida del caso sin fuentes, y

$$\{\phi_1(x), H_J(y)\} = \{\phi_1, (H_J)_{sc}\} + \{\phi_1, (H_J)_{c_0}\} + \{\phi_1, (H_J)_{c_2}\} + \{\phi_1, (H_J)_{c_3}\}, \quad (6.3.21)$$

$$\{\phi_1, (H_J)_{sc}\} = -\sqrt{-g} J^0 - \frac{1}{2} \theta^{jl} \nabla_l (A_j \sqrt{-g} J^0), \quad (6.3.22)$$

$$\{\phi_1, (H_J)_{c_0}\} = c_0 \theta^{jl} \sqrt{-g} A_j \partial_l J^0, \quad (6.3.23)$$

$$\{\phi_1, (H_J)_{c_2}\} = -c_2 \theta^{jl} \sqrt{-g} J^0 F_{jl}, \quad (6.3.24)$$

$$\{\phi_1, (H_J)_{c_3}\} = -c_3 \theta^{jl} \sqrt{-g} J_l \pi_j, \quad (6.3.25)$$

mientras que $\{\phi_1, (H_J)_{c_1}\} = 0$. Sumando la contribución $(\phi_1)_E$ se obtiene la restricción secundaria

$$\begin{aligned} \phi_2 = \theta^{j,l} & \left[-\frac{1}{2} \nabla_l (\sqrt{-g} A_j J^0) + \sqrt{-g} (c_0 A_j \nabla_l (J^0) - c_2 J^0 F_{j,l} - c_3 J_l \pi_j) \right] \\ & + \nabla_i^x [\pi^i] - J^0 \sqrt{-g} \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Esta expresión difiere del caso sin fuentes y será la base para el análisis de regularidad.

6.3.3. Transformaciones de calibre

El generador de transformaciones se escribe como

$$G = \int d^3x (\epsilon_0 \pi^0 + \epsilon \Phi),$$

donde Φ denota la combinación de restricciones espaciales equivalente a ϕ_2 . En particular,

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), G\} = \epsilon_0(x), \quad (6.3.27)$$

$$\delta A_n(x) = \{A_n(x), G\} = -\partial_n \epsilon(x) + c_3 \sqrt{-g} J_l g_{jn} \theta^{jl} \epsilon(x), \quad (6.3.28)$$

$$\delta \pi^0(x) = 0, \quad (6.3.29)$$

$$\delta \pi^n(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \theta^{nl} J^0 \nabla_l \epsilon - c_0 \sqrt{-g} \theta^{nl} \epsilon \nabla_l J^0 - 2c_2 \theta^{nl} \nabla_l (\epsilon \sqrt{-g} J^0). \quad (6.3.30)$$

6.3.4. Casos representativos para \hat{J}^μ y regularidad del algoritmo de Dirac–Bergmann

Planteamiento general. A primer orden en $\theta^{\mu\nu}$, consideramos tres variantes representativas de la corriente no conmutativa \hat{J}^μ :

- **Caso 1 (reducido; [Banerjee and Kumar, 2005]).** Coeficientes: $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. A orden $\mathcal{O}(\theta)$,

$$\hat{J}^\mu = J^\mu - A_\alpha \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta J^\mu$$

Este es el *ansatz* mínimo para la extensión no conmutativa de la corriente.

- **Caso 2 (expandido; [Banerjee et al., 2004]).** Coeficientes: $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 0$. A orden $\mathcal{O}(\theta)$,

$$\hat{J}^\mu = J^\mu - A_\alpha \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta J^\mu + F_{\alpha\beta} J^\beta \theta^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} J^\mu \theta^{\alpha\beta}.$$

Elección habitual que (bajo hipótesis estándar) preserva la conservación efectiva de la corriente a primer orden si $\nabla_\mu J^\mu = 0$.

- **Caso 3 (no expandido; [Kruglov, 2002]).** Se mantiene $\hat{J}^\mu = J^\mu$ (sin extensión en θ); sólo el potencial calibre \hat{A}_μ se expande mediante el mapeo de Seiberg-Witten.

Con la fijación $A_0 = 0$ y $\nabla_k A^k = 0$, las restricciones del sistema toman la forma estándar

$$\phi_1 = \pi^0, \quad \phi_3 = A_0, \quad \phi_4 = \nabla_k A^k,$$

y la secundaria queda modificada como

$$\phi_2 = \nabla_i \pi^i - \sqrt{-g} J^0 + \Theta[A; J, \theta], \quad (6.3.31)$$

donde $\Theta[A; J, \theta]$ es local en A (y J) y lineal en θ . En concreto, para cada caso:

$$\text{Caso 1: } \Theta = \theta^{jl} \left[-\frac{1}{2} \nabla_l (\sqrt{-g} A_j J^0) + \sqrt{-g} A_j \nabla_l J^0 \right],$$

$$\text{Caso 2: } \Theta = \theta^{jl} \left[-\frac{1}{2} \nabla_l (\sqrt{-g} A_j J^0) + \sqrt{-g} (A_j \nabla_l J^0 - J^0 F_{jl}) \right],$$

$$\text{Caso 3: } \Theta = -\frac{1}{2} \theta^{jl} \nabla_l (\sqrt{-g} A_j J^0).$$

Evaluación de regularidad (Cap. 5). Bajo la hipótesis de corrientes externas *suaves* J^μ y métrica no degenerada, los tres escenarios anteriores **no obstruyen** la aplicación del algoritmo de Dirac-Bergmann:

1. **Regularidad funcional local.** El gradiente funcional principal de ϕ_2 respecto de los momentos es $\delta\phi_2/\delta\pi^i = \nabla_i$, que *no* se anula patológicamente en la superficie constreñida. La corrección $\Theta[A; J, \theta]$, al depender de A y J pero no de π (para $c_3 = 0$), no altera esta propiedad.
2. **Rango máximo (constante).** El par (ϕ_2, ϕ_4) forma el bloque de segunda clase cuyo símbolo principal es el del Laplaciano, $\sim \nabla^2$ (i.e., $|k|^2$ en Fourier), lo que asegura

rango constante del Jacobiano en la superficie constreñida Σ para modos $k \neq 0$. Es crucial subrayar que la regularidad requiere *rango constante*, no “coeficientes constantes”: la dependencia en x o en los campos de $\delta\phi_2/\delta A_k$ no implica, por sí sola, pérdida de regularidad.

3. **No redundancia.** Los pares (ϕ_1, ϕ_3) y (ϕ_2, ϕ_4) siguen siendo de *segunda clase*. La matriz de brackets $\{\phi_a, \phi_b\}$ conserva la arquitectura invertible del caso sin fuentes, de modo que la reducción por corchetes de Dirac procede sin ambigüedades.

Comentario sobre c_3 . Si $c_3 \neq 0$, ϕ_2 adquiere un término adicional *lineal en los momentos*, del tipo $\theta^{jl} J_l \pi_j$. Al tomar el corchete con $\phi_4 = \nabla_k A^k$, ese aporte introduce una contribución *de primer orden en derivadas* que se suma al operador habitual. No obstante, el *símbolo principal* del bloque (ϕ_2, ϕ_4) sigue dominado por ∇^2 , por lo que, para J^μ *suaves*, se preservan la *elipticidad*⁵ del operador y el *rango* del par de segunda clase: $c_3 \neq 0$ deforma términos de menor orden, pero no degrada la estructura que asegura la invertibilidad microlocal del bloque.

Consecuencia práctica. El algoritmo de Dirac–Bergmann *procede sin ambigüedades* en los tres casos: la jerarquía de restricciones (primarias/secundarias) y su clasificación (primera/segunda clase) se mantiene; los corchetes de Dirac se construyen como en el sistema sin fuentes. Las diferencias físicas con respecto al caso conmutativo emergen a través de la *Hamiltoniana extendida*, no por fallas de regularidad.

Advertencias técnicas. La regularidad puede verse comprometida sólo en escenarios no genéricos: (i) si J^μ no es suave (p. ej., es *distribucional*, como una fuente puntual ideal), lo que dificulta definir derivadas funcionales y operadores de manera controlada; (ii) si las

⁵En EDP lineales, un operador P de orden m es *elíptico* si su símbolo principal $\sigma_P(x, \xi)$ es no nulo para todo $\xi \neq 0$. Equivalente en Fourier: el símbolo crece como $|\xi|^m$, garantizando invertibilidad microlocal y buen control de los problemas de contorno. El Laplaciano tiene símbolo $|\xi|^2$.

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

condiciones de contorno permiten *modos cero globales*⁶ no fijados, de modo que ∇^2 deja de ser invertible en el subespacio relevante; (iii) si la “fuente externa” deja de ser externa y pasa a depender funcionalmente de (A, π) , introduciendo dependencias entre restricciones. Estas son condiciones técnicas del planteamiento, no patologías intrínsecas de la expansión en θ .

En suma, bajo hipótesis suaves estándar⁷, las corrientes consideradas **no impiden** el formalismo de Dirac-Bergmann: la *superficie constreñida* queda bien definida, el *rango* del sistema de restricciones se preserva y la *reducción* al espacio de fases físico se realiza de forma consistente.

Ya que hemos determinado cual es la forma de \hat{J}^μ que se utilizara, se mostrara brevemente los resultados importantes de la teoría tomando dicha consideracion

Lagrangiana:

$$L_J = \int \left(-A_\mu J^\mu + \frac{1}{2} A_\mu J^\beta \theta^{\mu,\alpha} \partial_\beta (A_\alpha) - A_\mu J^\beta \theta^{\mu,\alpha} \partial_\alpha (A_\beta) \right) d^4x \quad (6.3.32)$$

Momento canonico dinamico:

$$\pi^i = \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{k,l} - 1 \right) F^{0,i} + F^{0,j} F_{j,k} J \theta^{k,i} + F^{0,m} F_{k,j} J g_{i,m} g^{j,i} \theta^{l,k} + \frac{1}{2} \theta^{j,i} (A_j J^0) \right]. \quad (6.3.33)$$

⁶Configuraciones que anulan el operador dominante con autovalor 0 en todo el dominio. Ejemplo: funciones constantes para ∇^2 con contorno periódico o de Neumann. Su presencia impide la inversión del operador sin imponer, p. ej., promedio nulo o condiciones de calibre suplementarias.

⁷Esto significa que las funciones que describen las corrientes son “bien comportadas”: suaves (infinitamente derivables), sin cambios abruptos ni singularidades, como cargas puntuales ideales. Estas condiciones garantizan que las operaciones matemáticas (derivadas, inversión de operadores) necesarias para el formalismo sean válidas.

Restricción primaria:

$$\phi_1 = \pi^0 \quad (6.3.34)$$

Hamiltoniana H_J :

$$H_c = \sqrt{-g} \left(A_0 J^0 + A_j J^j + \frac{1}{2} \theta^{j,l} (A_j J^0 \partial_l A_0 + A_j J^k \partial_l A_k + A_j G J^0 g_{00} g_{li} \pi^i - A_j F_{k,l} J^k) \right) \quad (6.3.35)$$

Restricción secundaria:

$$\phi_2 = \nabla_i (\pi^i) - \sqrt{-g} J^0 + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \theta^{k,l} \nabla_l (A_k J^0) \quad (6.3.36)$$

Una ecuación fundamental cuando se trabaja con la electrodinámica de Maxwell en presencia de fuentes externas es la *ecuación de continuidad*, la cual se obtiene a partir de las ecuaciones de movimiento del sistema. Es importante recordar que se trata de un *sistema singular*; por ello, para derivar dichas ecuaciones debemos utilizar la *acción extendida*

$$S = \int (L + u_m \phi^m) d^4x, \quad (6.3.37)$$

donde L es la Lagrangiana del sistema y el término $u_m \phi^m$ incorpora todas las restricciones. Omitiremos el hecho de que ya se han identificado algunas de las restricciones y realizaremos el cálculo considerando las que aún no están determinadas. La ecuación de continuidad se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\nabla_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\mu} - \nabla_\beta \left(\frac{\delta L}{\delta (\nabla_\beta A_\mu)} \right) \right) = 0 \quad (6.3.38)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

Para el caso del Lagrangiano sin fuentes se cumple la igualdad

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\delta L_E}{\delta A_{\mu}} - \nabla_{\beta} \left(\frac{\delta L_E}{\delta (\nabla_{\beta} A_{\mu})} \right) \right) = 0 \quad (6.3.39)$$

Calculamos ahora para L_J :

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\delta L_J}{\delta A_{\mu}} - \nabla_{\beta} \left(\frac{\delta L_J}{\delta (\nabla_{\beta} A_{\mu})} \right) \right) = \nabla_{\mu} (J^{\mu}) + \nabla_{\beta} (A_{\alpha}) \nabla_{\mu} (J^{\alpha}) \theta^{\mu, \beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} (A_{\alpha} \nabla_{\beta} (J^{\beta})) \theta^{\mu, \alpha} \quad (6.3.40)$$

Por último, para las restricciones obtenemos

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\delta (u_m \phi^m)}{\delta A_{\mu}} - \nabla_{\beta} \left(\frac{\delta (u_m \phi^m)}{\delta (\nabla_{\beta} A_{\mu})} \right) \right) = \nabla_{\mu} \left(u_m \frac{\delta \phi^m}{\delta A_{\mu}} + \phi^m \frac{\delta u_m}{\delta A_{\mu}} \right) \quad (6.3.41)$$

En consecuencia, en este caso la ecuación de continuidad no conduce a la condición $\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0$, sino que describe los multiplicadores:

$$\nabla_{\mu} \left(u_m \frac{\delta \phi^m}{\delta A_{\mu}} + \phi^m \frac{\delta u_m}{\delta A_{\mu}} \right) = \nabla_{\mu} (J^{\mu}) + \nabla_{\beta} (A_{\alpha}) \nabla_{\mu} (J^{\alpha}) \theta^{\mu, \beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} (A_{\alpha} \nabla_{\beta} (J^{\beta})) \theta^{\mu, \alpha} \quad (6.3.42)$$

Con lo anterior establecido, sólo resta verificar si el sistema presenta restricciones adicionales; para ello, se analiza la evolución de ϕ_2 .

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2(x), H_2\} \quad (6.3.43)$$

quedando:

$$\begin{aligned} \{\phi_2(x), H_2\} &= \frac{1}{2} \theta^{j, v} \nabla_v^x \left(\nabla_k^x (A_j(x) J^k(x)) \right) - \theta^{v, l} \nabla_v^x \left(J^0(x) \nabla_l (A_0(x)) \right) \\ &\quad - \nabla_v^x (J^v(x)) + \frac{1}{2} \theta^{v, l} \nabla_v^x \left(J^k(x) \nabla_k (A_l(x)) \right) \\ &\quad - \theta^{v, l} \nabla_v^x \left(J^k(x) \nabla_l (A_k(x)) \right). \end{aligned} \quad (6.3.44)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

Expresión la cual se puede escribir en una forma covariante:

$$\{\phi_2(x), H_2\} = -\nabla_v (J^v) - \theta^{\mu,\beta} \nabla_\mu (J^\alpha \nabla_\beta (A_\alpha)) - \frac{1}{2} \theta^{\mu,\alpha} \nabla_\mu (\nabla_k (J^k) A_\alpha) \quad (6.3.45)$$

Podemos observar en (6.3.45) que dicha expresión es muy similar a la ecuación de continuidad (6.3.42); por tanto, se tiene que

$$\{\phi_2(x), H_2\} = \nabla_0 (J^0) + \frac{1}{2} \theta^{\mu,\alpha} \nabla_\mu (\nabla_0 (J^0) A_\alpha) - \nabla_\mu \left(u_m \frac{\delta \phi^m}{\delta A_\mu} + \phi^m \frac{\delta u_m}{\delta A_\mu} \right). \quad (6.3.46)$$

De aquí se concluye que el sistema no presenta más restricciones, pues la evolución determina directamente los multiplicadores. Si utilizamos las restricciones ya encontradas, la ecuación queda

$$\{\phi_2(x), H_2\} = \nabla_0 (J^0) + \frac{1}{2} \theta^{k,l} \nabla_k (\nabla_0 (J^0) A_l) - \frac{1}{2} \theta^{k,l} \nabla_k (u_2 \nabla_l (J^0)). \quad (6.3.47)$$

Si se toma (6.3.47) sin los multiplicadores como una restricción adicional y se continúa el algoritmo, aunque el proceso podría prolongarse, el sistema quedaría indeterminado: sólo surgen restricciones de primera clase y el conteo de grados de libertad se vuelve fraccionario. Esto confirma que no deben aparecer restricciones adicionales después de ϕ_2 .

6.3.5. Corchetes de Dirac

Bajo este supuesto, el sistema adquiere un nuevo conjunto de *restricciones*, que reflejan la presencia de la corriente externa. Estas restricciones son:

$$\phi_1 = \pi^0, \quad (6.3.48)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

$$\phi_2 = \nabla_i(\pi^i) - \sqrt{-g} J^0 + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \theta^{k,l} \nabla_l (A_k J^0) \quad (6.3.49)$$

$$\phi_3 = A_0, \quad (6.3.50)$$

$$\phi_4 = \nabla_k(A^k) = g^{k,l} \nabla_k(A_l). \quad (6.3.51)$$

La restricción ϕ_2 puede reescribirse de forma más compacta:

$$\phi_2 = \nabla_i[\pi^i] - J^0 \sqrt{-g} + \theta^{k,l} \lambda_{l,k}, \quad (6.3.52)$$

donde definimos

$$\lambda_{l,k} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \nabla_l (A_k J^0)$$

Para construir los *corchetes de Dirac*, primero evaluamos la *matriz* de corchetes de las restricciones, W . Observando que $\lambda_{j,l}$ depende únicamente de A_j y que las demás restricciones dependen solo de A_μ y π^0 , podemos emplear los corchetes canónicos del formalismo (6.1.22) para comprobar que

$$\{\phi_2(x), \phi_n(y)\} = \{\nabla_i(\pi^i(x)), \phi_n(y)\} + \theta^{j,l} \{\lambda_{j,l}(x), \phi_n(y)\} = \{\nabla_i(\pi^i(x)), \phi_n(y)\}. \quad (6.3.53)$$

De este modo, se *recupera* la misma W que en casos anteriores (6.1.45):

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{k,i} \nabla_k^y \nabla_i^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{k,i} \nabla_k^x \nabla_i^y & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y).$$

En consecuencia, *los corchetes de Dirac* resultan ser los mismos encontrados en los capítulos anteriores:

$$\{A_i(x), \pi^j(y)\}_D = \delta_i^j \delta^{(3)}(x-y) - \frac{g^{m,j}}{\nabla^k \nabla_k} \nabla_i^x [\nabla_m^y (\delta^{(3)}(x-y))],$$

$$\{\hat{F}_{i,j}(x), \pi^k(y)\}_D = \delta_i^k \nabla_j^x \delta^{(3)}(x-y) - \delta_j^k \nabla_i^x \delta^{(3)}(x-y),$$

$$\{A_0, \pi^i\}_D = \{A_i, \pi^0\}_D = \{A_\mu, A_\nu\}_D = \{\pi^\mu, \pi^\nu\}_D = \{A_0, \pi^0\}_D = 0.$$

La presencia de la fuente no conmutativa \hat{J}^μ *no modifica* la forma de los corchetes de Dirac, sino que introduce *nuevos términos* en las restricciones —como ϕ_2 —. El sistema mantiene, por tanto, la misma estructura algebraica, pero con un contenido físico distinto.

6.3.6. Ecuaciones de Hamilton

Con los corchetes de Dirac del sistema determinados, podemos calcular la evolución de las variables dinámicas del sistema A_μ y π^μ . Para ello tenemos que hacer el cálculo de los corchetes de Dirac de lo siguiente:

$$\dot{A}_s = \{A_s, H_c\}_D \quad (6.3.54)$$

$$\dot{\pi}_s = \{\pi^s, H_c\}_D \quad (6.3.55)$$

Para esta sección resulta conveniente aplicar la propiedad presentada en *(cita del apéndice)* para reducir el corchete de Dirac entre las variables A_i y π^j . Al aplicar dicha propiedad, el corchete adopta la forma habitualmente empleada en la literatura [Kruglov, 2003, Clarkson and McKeon, 2003, Sundermeyer, 1982]:

$$\{A_i(x), \pi^j(y)\}_{DB} = \delta_i^j \delta_\perp^{(3)}(x-y) \quad (6.3.56)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

Este corchete de Dirac indica que las variables del sistema quedan restringidas únicamente a su componente transversal (\perp).

Cálculo de \dot{A}_s

Como se hizo a lo largo de todo el procedimiento, el cálculo se dividirá en dos partes; una parte con la parte sin fuentes del sistema (H_{sf}), y otra con la información de las fuentes (H_J)

$$\dot{A}_s = \{A_s, H_c\}_D = \{A_s, H_{sf}\}_D + \{A_s, H_J\}_D \quad (6.3.57)$$

Operando para el caso sin fuentes se obtiene

$$\{A_s, H_{sf}\}_D = -G g_{0,0} \left(\pi_s - \frac{1}{2} \theta^{m,l} F_{l,m} \pi_s + \theta^{m,l} F_{l,s} \pi_m + g_{m,s} \theta^{m,l} F_{l,i} \pi^i \right) \quad (6.3.58)$$

y la contribución con fuentes

$$\{A_s, H_J\} = \frac{1}{2} g_{0,0} g_{c,s} J^0 \theta^{k,c} A_k \quad (6.3.59)$$

Con ello podemos simplificar el resultado encontrado de modo que:

$$\dot{A}_s = g_{s,c} \Lambda^c \quad (6.3.60)$$

donde

$$\Lambda^c = -G g_{0,0} \left(\pi^c - \frac{1}{2} \theta^{m,l} F_{l,m} \pi^c + \theta^{c,l} F_{l,i} \pi^i + \theta^{m,l} F_l^c \pi_m \right) + \frac{1}{2} g_{0,0} \theta^{k,c} J^0 A_k. \quad (6.3.61)$$

Para su versión vectorial, se obtiene una forma muy parecida a la presentada en la literatura [Kruglov, 2003], salvo por la presencia de la contribución de la corriente externa.

En particular:

$$\Lambda^c = -G g_{0,0} \left[(1 - B^b \theta_b) \pi^c + B^m \pi_m \theta^c + \pi^b \theta_b B^c - \frac{1}{2} J^0 (A \times \theta)^c \right] \quad (6.3.62)$$

Cálculo de $\dot{\pi}^s$

Si siguiendo el mismo método que en el cálculo anterior, se calcula primero para el caso sin fuentes

$$\begin{aligned} \{\pi^s, H_{sf}\} = & \nabla_n \left[G g_{0,0} (\theta^{m,n} \pi_m \pi^s - \theta^{m,s} \pi_m \pi^n + \frac{1}{2} \theta^{n,s} \pi_m \pi^m) \right] \\ & - \sqrt{-g} \nabla_n \left[(1 + \frac{1}{2} \theta^{m,l} F_{l,m}) F^{n,s} + \frac{1}{4} \theta^{n,s} F^{p,k} F_{k,p} + \theta^{s,l} F^{i,n} F_{l,i} - \theta^{n,l} F^{m,s} F_{l,m} + g^{n,k} g^{s,i} \theta^{m,l} F_{i,m} F_{l,k} \right] \end{aligned} \quad (6.3.63)$$

En la versión vectorial, se presenta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{\pi^s, H_{sf}\}_D = & \nabla_n \left[G g_{0,0} \left(\varepsilon^{m,s,a} \pi_m \pi^n \theta_a - \varepsilon^{m,n,a} \pi_m \pi^s \theta_a - \frac{\varepsilon^{n,s,a} \pi_j \pi^j \theta_a}{2} \right) \right] \\ & - \sqrt{-g} \nabla_n \left[(1 + B^c \theta_c) F^{n,s} - \frac{B^a B_a \varepsilon^{n,s,c} \theta_c}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6.3.64)$$

Al comparar esta última expresión con la literatura [Kruglov, 2003] (una vez que se lleva todo al espacio de Minkowski con la métrica $(-+++)$), se observa que surgen diferencias en algunos términos. Esto se debe, en parte, a la forma en que se trabaja la Hamiltoniana de nuestro sistema. Si primero se realiza todo el desarrollo en la forma tensorial y luego se lleva a cabo la evolución, se obtiene el resultado de la Ecuación (6.3.64), mientras que si se utiliza la versión vectorial de la Hamiltoniana antes de la evolución, se reproducen los resultados estándar que aparecen en la literatura.

$$\{\pi^s, H_{sf}\} = - \varepsilon^{n,s,a} \partial_n \left[(1 + B^c \theta_c) F^{n,s} + (\pi^j \theta_j) \pi_a - \frac{1}{2} (g_{0,0} \pi_j \pi^j - B^j B_j) \theta_a \right] \quad (6.3.65)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

La expresión (6.3.65) no es completamente idéntica a la vista en [Kruglov, 2003] debido a que ellos toman otras reglas de transformación, $\theta^{j,k} = \varepsilon^{j,k,i} \theta_i$ y $F^{j,k} = \varepsilon^{j,k,i} B_i$, mientras que nosotros tomamos ambas transformaciones negativas. La contribución de las fuentes:

$$\{\pi^s, H_J\} = J_0 \theta^{s,l} \pi_l - \sqrt{-g} J^j \theta^{s,l} \nabla_j (A_l) - \sqrt{-g} J^s \quad (6.3.66)$$

6.3.7. Ecuaciones de Maxwell

Para derivar las ecuaciones de Maxwell a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas en la sección anterior, es preciso comparar algunas de las expresiones calculadas en las primeras etapas del modelo. Partiendo de la forma del tensor electromagnético (6.3.12) y de la relación $F^{0i} = -E^i$, podemos expresar el campo eléctrico E^i en términos de los momentos canónicos π :

$$E^i = G \left[\pi^k \left(F_{k,l} \theta^{l,i} + F_{m,l} g^{i,m} g_{n,k} \theta^{l,n} \right) - \pi^i \left(\frac{1}{2} F_{k,l} \theta^{l,k} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \theta^{j,i} A_j J^0. \quad (6.3.67)$$

Ley de Gauss Al analizar la ecuación de movimiento (6.3.60) se advierte que ésta puede simplificarse a

$$\dot{A}_s = g_{0,0} E_s. \quad (6.3.68)$$

Calculamos ahora la divergencia de ambos miembros:

$$\nabla_0 (\nabla^s A_s) = g_{0,0} \nabla^s E_s. \quad (6.3.69)$$

El término $\nabla^s A_s$ corresponde a la cuarta restricción del sistema (6.3.51). En este punto todas las restricciones son igualdades fuertes, de modo que la expresión (6.3.69) conduce

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

directamente a la primera ecuación de Maxwell, la ley de Gauss:

$$\nabla^s E_s = 0. \quad (6.3.70)$$

Nótese que este resultado difiere de los reportados en la literatura: allí la ley de Gauss para la electrodinámica no conmutativa suele escribirse en términos de un campo auxiliar D , descompuesto como

$$D = E + \lambda(\theta, E, B), \quad (6.3.71)$$

donde $\lambda(\theta, E, B)$ depende del parámetro de no conmutatividad θ y de los campos E y B . Esta discrepancia podría deberse a que, en la literatura, las ecuaciones de Maxwell se obtienen a minimizando la acción, como si de un sistema regular se tratara [Kruglov, 2002]. Aunque este procedimiento no es, en sí mismo, incorrecto, las ecuaciones de movimiento resultantes no admiten una solución bien definida cuando se parte de una acción singular sin agotar la jerarquía de restricciones. Si bien dichas expresiones reproducen el límite conmutativo $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$, ello no implica que constituyan el análogo de las ecuaciones de Maxwell en el marco no conmutativo. Como se muestra en este trabajo, al derivar explícitamente las ecuaciones de Maxwell mediante el formalismo hamiltoniano de Dirac–Bergmann, estas carecen de términos proporcionales a $\theta^{\mu\nu}$. En consecuencia, los resultados reportados en [Kruglov, 2002] para el régimen no conmutativo describen una estructura distinta de las ecuaciones de Maxwell propiamente dichas.

Además, el presente resultado también difiere con el caso conmutativo de Maxwell con corriente externa, en el cual la divergencia de E en presencia de una fuente satisface $\nabla^s E_s = J^0$. Esta discrepancia no resulta sorprendente: en el marco clásico de Maxwell con fuentes, si se aplica estrictamente el formalismo de restricciones de Dirac y se obtienen las ecuaciones de movimiento mediante corchetes de Dirac, el término J^0 también desaparece. Ello se debe al calibre adoptado ($A_0 = 0$): el término J^0 surge de la evolución de A_0 , pero

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa

6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

al fijar A_0 a cero, no aporta ninguna contribución y, por ende, no aparece en las ecuaciones de Maxwell.

Estos resultados evidencian que una aplicación rigurosa del formalismo puede modificar de manera sustancial las expresiones que definen el sistema.

Ley de Faraday–Lenz. Otra de las ecuaciones de Maxwell se obtiene a partir de la evolución del campo magnético

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}. \quad (6.3.72)$$

Al expandir $F_{jk} = \nabla_j A_k - \nabla_k A_j$ y aprovechar la antisimetría de ε^{ijk} se simplifica a

$$B^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_k A_j. \quad (6.3.73)$$

Evolucionando (6.3.72) con respecto al tiempo y usando $\nabla_0 A_j = \{A_j, H_c\} = g_{0,0} E_j$ (6.3.60) se obtiene

$$\nabla_0 B^i = g_{0,0} \varepsilon^{ijk} \nabla_k E_j = g_{0,0} (\nabla \times \mathbf{E})^i. \quad (6.3.74)$$

La ecuación (6.3.74) reproduce la ley de Faraday–Lenz sin correcciones de primer orden en θ .

Ley de Gauss para el magnetismo. La divergencia de \mathbf{B} se calcula directamente desde su definición:

$$\nabla_i B^i = \varepsilon^{ijk} \nabla_i \nabla_k A_j = 0, \quad (6.3.75)$$

ya que las derivadas covariantes conmutan en un espacio sin torsión y el objeto alternante ε^{ijk} es antisimétrico en los índices i y k . La identidad (6.3.75) preserva la forma canónica $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

Ley de Ampère-Maxwell La última ecuación de Maxwell puede obtenerse a partir de la ecuación de Hamilton asociada a $\dot{\pi}$. Para que su estructura se asemeje a la forma habitual en la teoría de Maxwell debemos emplear su versión vectorial (6.3.64). El primer paso consiste en reescribir la expresión exclusivamente en términos de los campos E y B , recordando que

$$\pi^i = -\sqrt{-g} F^{0,i} + O(\theta), \quad \pi^i = \sqrt{-g} E^i + O(\theta). \quad (6.3.76)$$

De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^s = & \nabla_n \left[\sqrt{-g} g_{0,0} (\varepsilon^{m,s,a} E_m E^n \theta_a - \varepsilon^{m,n,a} E_m E^s \theta_a - \frac{1}{2} \varepsilon^{n,s,a} E_j E^j \theta_a) \right] \\ & + \sqrt{-g} \varepsilon^{n,s,c} \nabla_n \left[(1 + B^j \theta_j) B_c + \frac{1}{2} B^a B_a \theta_c \right] \\ & + J_0 \theta^{s,l} \pi_l - \sqrt{-g} J^j \theta^{s,l} \nabla_j A_l - \sqrt{-g} J^s. \end{aligned} \quad (6.3.77)$$

Extrayendo un factor común,

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^s = & \nabla_n \left[\sqrt{-g} g_{0,0} (\varepsilon^{m,s,a} E_m E^n \theta_a - \varepsilon^{m,n,a} E_m E^s \theta_a) \right] \\ & + \sqrt{-g} \varepsilon^{n,s,c} \nabla_n \left[(1 + B^j \theta_j) B_c + \frac{1}{2} B^a B_a \theta_c - \frac{1}{2} g_{0,0} E_j E^j \theta_c \right] \\ & + J_0 \theta^{s,l} \pi_l - \sqrt{-g} J^j \theta^{s,l} \nabla_j A_l - \sqrt{-g} J^s. \end{aligned} \quad (6.3.78)$$

Podemos reescribir todo en términos de productos vectoriales,

$$\dot{\pi}^s = \sqrt{-g} (\nabla \times h)^s + T + M, \quad (6.3.79)$$

CAPÍTULO 6. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa
6.3. Electrodinámica de Maxwell no conmutativa con fuentes externas

donde

$$\begin{aligned}
 T &= J_0 \theta^{s,l} \pi_l - \sqrt{-g} J^j \theta^{s,l} \nabla_j A_l - \sqrt{-g} J^s, \\
 h &= (1 + B^j \theta_j) B_c + \frac{1}{2} B^a B_a \theta_c - \frac{1}{2} g_{0,0} E_j E^j \theta_c, \\
 M &= \sqrt{-g} g_{0,0} \left[-(E \cdot \nabla) (E \times \theta)^s + ((E \times \theta) \cdot \nabla) E^s \right].
 \end{aligned}$$

Por último, redefiniendo π^s como D^s se obtiene

$$(\nabla \times h)^s = G T + G M - G \nabla_0 D^s, \quad (6.3.80)$$

que corresponde a la ley de Ampère-Maxwell. Para reproducir exactamente la forma citada en la literatura es necesario usar la otra variante de la ecuación de Hamilton (6.3.65), con lo que se llega a

$$(\nabla \times H)^s = G T - G \nabla_0 D^s, \quad (6.3.81)$$

donde

$$H = (1 + B^j \theta_j) B_c + g_{0,0} \pi^j \theta_j \pi_c + \frac{1}{2} B^a B_a \theta_c - \frac{1}{2} g_{0,0} E_j E^j \theta_c. \quad (6.3.82)$$

Con (6.3.70), (6.3.74) y (6.3.75) y la variante no conmutativa de la ley de Ampère-Maxwell (6.3.81), hemos recuperado las cuatro ecuaciones de Maxwell en el régimen no conmutativo: tres de ellas no contienen términos de corrección proporcionales al parámetro θ , siendo la ley de Ampère-Maxwell la única de ellas que no conserva su estructura original conmutativa.

Capítulo 7.

Conclusión

Este trabajo aborda de manera integral la formulación de la electrodinámica en espacios no conmutativos y su análisis canónico mediante el formalismo de restricciones de Dirac-Bergmann. Inicialmente, se establece el mapeo de Seiberg-Witten como puente operativo entre las variables no conmutativas y su contraparte conmutativa, lo cual permite manipular de manera controlada -al menos a primer orden en el parámetro de no conmutatividad θ -campos y corrientes efectivas. Posteriormente, se desarrolla el análisis hamiltoniano sistemático de los modelos de Maxwell, tanto conmutativos como no conmutativos, en ausencia y en presencia de acoplamientos a corrientes, con el objetivo de identificar la estructura completa de restricciones, el generador de transformaciones gauge y el conteo de grados de libertad físicos.

Respecto de los objetivos metodológicos planteados, se cumplieron los tres ejes propuestos: (i) la exhibición de los momentos canónicos y la forma explícita de las restricciones primarias y secundarias; (ii) la clasificación de dichas restricciones en primera y segunda clase, destacando el papel del potencial A_0 como multiplicador de Lagrange y la emergencia

de generadores de simetría gauge; y (iii) la verificación del conteo de grados de libertad físicos, consistente con el carácter gauge del sistema. Sobre esta base, se construyeron los corchetes de Dirac correspondientes para el sector de variables reducidas, estableciendo así la dinámica efectiva y el álgebra de observables en el espacio de fases físico.

En el análisis comparativo entre los regímenes conmutativo y no conmutativo, se identificaron las deformaciones inducidas por θ en la estructura de las ecuaciones de movimiento. En particular, mientras las identidades de Gauss eléctrica y magnética preservan su forma canónica, la ley de Ampère-Maxwell exhibe correcciones explícitas dependientes de θ al introducir el acoplamiento a la corriente J_μ . Estas modificaciones emergen consistentemente a partir del mapeo de Seiberg-Witten y se reflejan, en el formalismo hamiltoniano, mediante términos adicionales en el Hamiltoniano extendido y en el cierre del álgebra de restricciones.

Un hallazgo significativo del estudio con fuentes es la clarificación de las condiciones de compatibilidad entre las simetrías gauge y la presencia de corrientes. El examen simultáneo de la invariancia gauge de la acción —vía el mapa de Seiberg-Witten— y de la estructura de restricciones de primera clase en el enfoque de Dirac-Bergmann muestra que la conservación de la simetría impone restricciones sobre la forma admisible de corrientes externas: la consistencia gauge exige que dichas corrientes transformen de manera covariante, en particular como las asociadas a campos de materia acoplados e incorporados explícitamente. Desde la perspectiva canónica, este requisito se manifiesta en el cierre del conjunto de restricciones con el hamiltoniano y en la ausencia de incompatibilidades entre restricciones; desde el punto de vista lagrangiano, en la invariancia de la acción bajo transformaciones gauge. En otros términos, en presencia de fuentes, el sistema campo-materia debe tratarse como la unidad mínima para preservar la simetría en el marco no conmutativo.

En cuanto a sus contribuciones, el manuscrito proporciona: (a) una derivación explícita de la jerarquía de restricciones en los escenarios considerados —con y sin fuentes— y de

los corchetes de Dirac asociados; (b) la identificación precisa de los puntos en los que las correcciones dependientes de θ alteran la forma de las ecuaciones dinámicas, notablemente en la ley de Ampère–Maxwell, manteniendo al mismo tiempo coherencia con la interpretación gauge; y (c) una articulación clara entre el criterio de invariancia gauge y la viabilidad del acoplamiento a corrientes, subrayando que una formulación físicamente consistente en el espacio no conmutativo requiere un tratamiento unificado del campo y sus interacciones con la materia.

El alcance de los resultados se encuentra delimitado por las hipótesis de trabajo adoptadas: la construcción se fundamenta en el mapeo de Seiberg–Witten a primer orden en θ , y el análisis de corrientes se enmarca dentro de los escenarios específicos discutidos en los capítulos técnicos. En este contexto, el conteo de grados de libertad, la clasificación de restricciones y la reconstrucción de los generadores gauge resultan robustos y reproducibles; al incorporar fuentes, las condiciones de compatibilidad quedan determinadas por el cierre del álgebra de restricciones y la invariancia de la acción.

Finalmente, el estudio sintetiza dos perspectivas complementarias –la lagrangiana, mediante el mapeo de Seiberg–Witten y la invariancia gauge, y la hamiltoniana, a través del formalismo de Dirac–Bergmann– para demostrar que la electrodinámica no conmutativa no constituye una mera deformación algebraica, sino un marco más restrictivo en el cual la simetría gauge selecciona el tipo de corrientes admisibles y organiza la dinámica efectiva mediante sus restricciones de primera clase. Bajo estas condiciones, el modelo preserva el contenido físico esperado y exhibe de manera transparente el cómo, el dónde y el porqué de las correcciones inducidas por θ . En conjunto, la investigación establece con claridad el criterio de consistencia para el acoplamiento en espacios no conmutativos y provee el andamiaje canónico necesario para analizar extensiones dentro de este mismo marco teórico.

Como perspectivas futuras, este trabajo sienta las bases para varias líneas de investigación

promisorias. Una extensión natural consistiría en generalizar el análisis a órdenes superiores en el parámetro de no conmutatividad θ , lo que permitiría capturar efectos no lineales y correcciones no perturbativas en la estructura gauge. Asimismo, resultaría de interés explorar generalizaciones no-Abelianas de la teoría, donde las no conmutatividades espacio-tiempo introducen complicaciones algebraicas adicionales en el álgebra de restricciones. Otra dirección fructífera sería incorporar el acoplo gravitatorio dentro de este formalismo, estudiando las implicaciones de la no conmutatividad en escenarios de gravedad semiclásica o en contextos de gravedad cuántica.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, sería valioso investigar las posibles manifestaciones observables de estas correcciones no conmutativas en sistemas físicos concretos, ya sea en contextos cosmológicos o en sistemas de materia condensada que admitan descripciones efectivas mediante teorías gauge. En particular, en superconductores limpios, el efecto Meissner puede abordarse dentro del marco no local de Pippard, donde la respuesta corriente-potencial vector se describe por un núcleo de susceptibilidad transversal. Las correcciones no conmutativas en la ecuación de Ampère-Maxwell se incorporan entonces como una modificación efectiva de dicho núcleo, lo que induce una profundidad de penetración *dependiente del momento* y altera el perfil de decaimiento del campo magnético cerca de la superficie. Estas variaciones, en principio contrastables mediante técnicas como μ SR, magneto-óptica o impedancia superficial, se traducen en ajustes cuantificables de parámetros macroscópicos (p. ej., λ , H_{c1}) y en cambios en la dinámica de vórtices.

Finalmente, la conexión con formalismos cuánticos, mediante la cuantización canónica o la integral de caminos de las teorías no conmutativas, constituye un desafío teórico fundamental que merece atención continuada.

Capítulo 8.

Código MATLAB

Todos los cálculos presentados en el proyecto de investigación se realizaron con ayuda de un *script* desarrollado en MATLAB. El programa cuasi-automatiza cada paso descrito en la Sección (5) sobre el formalismo de restricciones de Dirac, de modo que basta con introducir la Lagrangiana \mathcal{L} del sistema para determinar todos los aspectos dentro del formalismo.

8.1. VERSIONES DISPONIBLES

1. **Versión discreta.** Diseñada para sistemas con un número finito de coordenadas generalizadas $q^a(t)$. Aprovecha las rutinas simbólicas estándar de MATLAB para derivar funciones (*diff*), resolver ecuaciones algebraicas (*solve*), simplificar expresiones (*simplify*), entre otras tareas.

Dado que MATLAB posee la capacidad de manejar todas las operaciones que se realizan dentro de un sistema discreto, el núcleo del algoritmo se reduce a encapsular dichos comandos en subrutinas que implementan la receta del formalismo de Dirac.

2. **Versión continua.** Dirigida a teorías de campos donde las variables dependen de las coordenadas espaciales, $\phi^A(\mathbf{x}, t)$. En este régimen, MATLAB carece de utilidades nativas para cálculo tensorial (sub/superíndices), derivadas funcionales, integrales sobre el espacio-tiempo, tratamiento de índices mudos, etcétera. Se desarrolló entonces un *paquete* de funciones capaz de manejar todo lo anterior.

Un ejemplo sencillo se encuentra en la función derivada integrada *diff*; esta función entiende a la perfección derivadas de tipo puntual, por lo que puede resolver fácilmente operaciones como

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1. \quad (8.1.1)$$

No obstante, cuando se presentan operaciones tensoriales, *diff* ya no las reconoce:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0, \quad (8.1.2)$$

cuando en realidad la operación (8.1.2) debería producir una δ_{ij} .

Por ello, el núcleo de esta versión continua consiste en crear un conjunto de funciones que sustituyan a las utilizadas en el algoritmo discreto, de modo que el sistema comprenda correctamente las operaciones tensoriales (*diff* \Rightarrow *fieldDerivative*):

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \quad (8.1.3)$$

La modularidad del código permite ampliar fácilmente el conjunto de rutinas internas (por ejemplo, añadir manipulación de variedades curvadas o tensores con índices spinoriales) sin modificar la interfaz principal del usuario, que sigue siendo la Lagrangiana como única entrada.

8.2. SOFTWARE PARA TEORIA DE CAMPOS

Como se mencionó en la sección anterior, la versión para sistemas discretos consiste básicamente en aplicar las operaciones del formalismo de restricciones de Dirac mediante las funciones incorporadas en MATLAB. Por esta razón no se requiere una sección específica que explique todo el algoritmo: bastaría con repetir el procedimiento descrito en la Sección 5, pero implementado con las funciones de MATLAB. Además, dado que el tema principal de esta tesis son los sistemas continuos, nos enfocaremos únicamente en explicar la versión continua del programa.

8.2.1. Estructura de las funciones

Para la creación del programa se utilizó principalmente el *Symbolic Math Toolbox* de MATLAB dentro de un proyecto tipo *Live Script*, lo que permite programar y visualizar los resultados de forma mucho más cómoda.

Llamaremos *operación* a un *conjunto de funciones* dedicadas a ejecutar una tarea matemática. Cada operación puede dividirse en tres tipos de funciones:

1. **Funciones aplicadoras.**
2. **Funciones auxiliares.**
3. **Funciones solucionadoras.**

Dependiendo de la complejidad de la operación, cada uno de estos tipos puede estar formado por subfunciones. Las operaciones más complejas (por ejemplo, las derivadas) emplean las tres categorías anteriores; en cambio, las operaciones más sencillas (como la contracción de las deltas de Kronecker) suelen requerir únicamente las funciones auxiliares y solucionadoras.

Funciones aplicadoras

Las *funciones aplicadoras* se limitan a ejecutar de manera explícita la operación deseada sobre los argumentos proporcionados. Para el caso de las derivadas, la función

$$\text{fieldDerivative}(x_i, x_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \quad (8.2.1)$$

devuelve directamente el resultado de la derivada puntual. Además, estas funciones son responsables de aplicar las propiedades formales de la operación; en el ejemplo de las derivadas, implementan reglas como la del producto, la cadena o la linealidad. Por ejemplo,

$$\text{fieldDerivative}(x_i x_j, x_k) = x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial x_k}. \quad (8.2.2)$$

De este modo, las funciones aplicadoras constituyen la interfaz principal entre el usuario y la lógica interna de cada operación. Los resultados que producen son salidas explícitas—expresiones que se muestran directamente al ejecutar el código—lo que permite al usuario identificar con claridad las operaciones realizadas y llevar un seguimiento detallado de cada paso.

Funciones auxiliares

Las funciones buscadoras son las encargadas de buscar y/o modificar las expresiones a las cuales se les aplica una función. La construcción de las funciones auxiliares se basa en las *expresiones regulares*, las cuales son una herramienta integrada en MATLAB para la detección de patrones de texto en las expresiones de entrada. Estas expresiones se diseñan para localizar patrones específicos en la cadena de entrada: se suministra el patrón correspondiente a la operación que se desea ejecutar, el algoritmo busca coincidencias y,

cuando las encuentra, aplica individualmente las funciones solucionadoras.

Estas funciones resultan especialmente útiles cuando la expresión de entrada contiene múltiples operaciones matemáticas (por ejemplo, varias sumas, restas o productos) En tales casos localizan primero los subtérminos que coinciden con el patrón definido, sin importar que se encuentren anidados dentro de una suma, resta o multiplicación; luego los aíslan, llaman a las *funciones solucionadoras* para ejecutar la operación correspondiente y, por último, reinsertan el resultado en la expresión original, respetando la estructura algebraica y el orden inicial de las operaciones.

$$\text{fieldDerivativeAux}(x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k}) = x_i \text{ solveFieldDerivative}(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}) \quad (8.2.3)$$

Funciones solucionadoras

Por último tenemos las *funciones solucionadoras*; son las encargadas de ejecutar la operación solicitada, transformando la representación explícita de la misma en su resultado evaluado.

$$\text{solveFieldDerivative}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right) = \delta_{j,k}. \quad (8.2.4)$$

Estas funciones, al igual que las auxiliares, se apoyan en expresiones regulares: identifican el patrón, extraen de la operación los elementos relevantes (en este caso, los índices de x) y, con esa información, generan la delta de Kronecker correspondiente.

8.3. FUNCIONES DE CÁLCULO

El programa cuenta con mas de 100 funciones y 5000 líneas de código, por lo que mostrar cada una de estas funciones, y su código de manera explícita sería muy complicado, por

CAPÍTULO 8. Código MATLAB

8.3. Funciones de cálculo

ello se dará un resumen de las operaciones fundamentales y las principales funciones que lo conforman. Podemos dividir las operaciones en dos grupos, las operaciones base y las operaciones compuestas

8.3.1. Operaciones base

Estas son las operaciones explicadas en la sección anterior, es decir, son aquellas que están diseñadas exclusivamente para realizar una única operación.

Derivada parcial de índices

$$\text{fieldDerivative}(x_i, x_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}, \quad \text{solveFieldDerivative}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}.$$

Funciones: fieldDerivative, fieldDerivativeAux, solveFieldDerivative

Contracción de deltas de Kronecker

$$\text{contraction}(A_i \delta_{ij}) = A_j.$$

Funciones: contraction, contractionAux

Transposición de matrices antisimétricas

$$\text{transposeAs}(F_{ij}) = -F_{ji}.$$

Funciones: transposeAs, transposeAsAux

Conversión del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$

$$\text{electromagneticFieldM}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = F_{ij}, \quad \text{electromagneticFieldMI}(F_{ij}) = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

Funciones: electromagneticFieldM, electromagneticFieldMI

Cambio de índices mudos

$$\text{indexChange}(A_i, 'i', 'j') = A_j.$$

Funciones: indexChange, indexChangeAux

Integrales funcionales

$$\text{FInt}(\delta^{(3)}(x-y) A(y), y) = A(x).$$

Funciones: FInt, FIntAux

Con las funciones realizadas, obtenemos los primeros resultados del programa de una manera híbrida, es decir, podemos manualmente realizar los cálculos aplicando las funciones según las salidas que se están obteniendo, obteniendo así los primeros resultados, los cuales son los que se encuentran en el contexto de las ecuaciones de Maxwell conmutativas.

8.4. SALIDAS ESPERADAS DEL PROGRAMA

Las salidas del programa corresponden a los puntos esenciales del formalismo de restricciones de Dirac, expuestos en el Capítulo 5.

- **Momentos canónicos** π_i .
- **Restricciones primarias** $\phi_a \approx 0$.

- **Hamiltonianos:** *canónico* H_c y *primario* $H_p = H_c + u_a \phi_a$.
- **Restricciones por consistencia:** secundarias.
- **Clasificación de restricciones** (primera/segunda clase) y **matriz de Poisson**
 $C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$.
- **Corchete de Dirac** $\{\cdot, \cdot\}_D$ (cuando procede).

8.5. CASOS DE ERROR

- **Entradas incompletas o inconsistentes.** Si las variables a utilizar no se declaran correctamente, esto puede traducirse en resultados erróneos o salidas vacías. La forma correcta de declarar el Lagrangiano, las coordenadas canónicas y demás entradas se describe en el Apéndice B.
- **Hessiano regular.** Si el sistema introducido es regular (Hessiano no singular), el programa informa que el sistema es regular y no ejecuta el procedimiento de Dirac–Bergmann. En la versión actual esta es la conducta esperada; como trabajo futuro, se añadirá la opción de aplicar automáticamente el tratamiento hamiltoniano usual para sistemas regulares.
- **Falta de cierre del álgebra de restricciones.** Al calcular corchetes de Poisson (o de Dirac) entre cantidades que deberían anularse (por ejemplo, entre restricciones), puede ocurrir que la simplificación simbólica no las reconozca como cero debido a su forma algebraica. En tal caso, el programa puede continuar con operaciones innecesarias al tratar expresiones que son, en realidad, nulas.

8.6. DIAGRAMA DE FLUJO

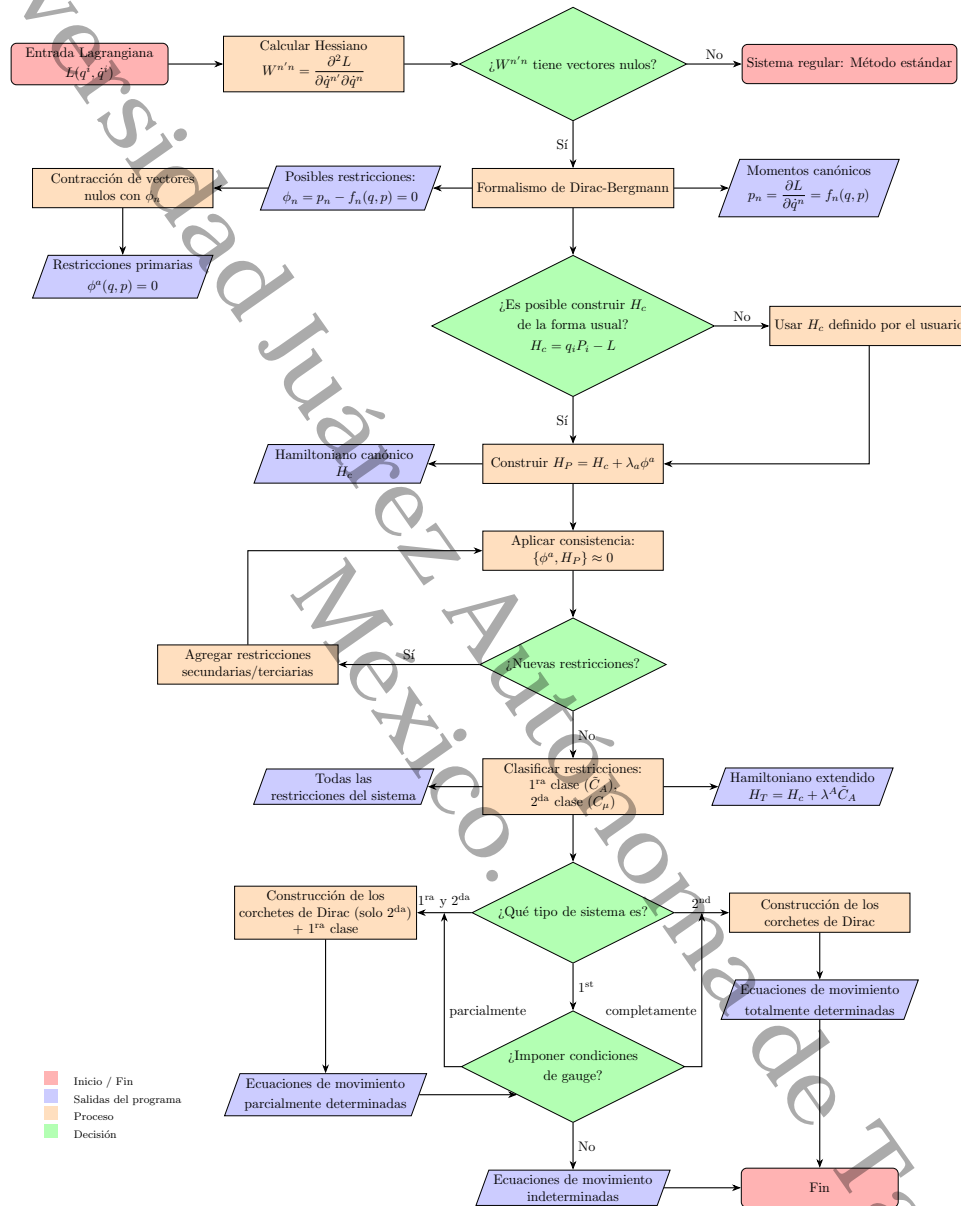


Figura 8.1: MATLAB program flowchart.

8.7. SISTEMAS PROBADOS

El programa para teoría de campos, por el momento, se realizó para resolver sistemas electrodinámicos, por lo que todos los casos probados en el código pertenecen a dicha categoría. Actualmente se encuentra optimizado para electrodinámica: los tensores implementados son los propios de esta teoría —por ejemplo $F_{\mu\nu}$ — e incorporan simetrías e identidades codificadas (antisimetría, contracciones con la métrica $g_{\mu\nu}$, identidades de Bianchi, etcétera.), lo que permite realizar simplificaciones automáticas y obtener expresiones más compactas. Si bien el programa puede aplicarse a otros tipos de sistemas y producir resultados correctos, es probable que las expresiones resultantes sean más extensas de lo deseable y que sea necesario introducir manualmente las propiedades tensoriales pertinentes para lograr simplificaciones equivalentes. Como trabajo futuro, se proyecta generalizar el código para que el usuario pueda definir sus propios tensores, especificar identidades y reglas de simplificación asociadas.

Esta lista recoge sistemas adicionales procesados con el código:

En el caso puntual, fue posible abordar un mayor número de sistemas singulares reportados en la literatura, debido a que son más simples y están ampliamente documentados:

Nombre	Lagrangiana L
Maxwell con fuente [Maggiore, 2023, Jackson, 1999]	$L(A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu,\nu} F_{\mu,\nu} + A_\mu J^\mu$
Chern-Simons [Chern and Simons, 1974]	$L(A_0, A_i) = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ij} (A_0 F_{ij} + A_j \partial_0 A_i).$
Maxwell NC con proca [Darabi and Naderi, 2011]	$L(A_\mu) = L_{NC} + \frac{1}{2} m^2 (A_\mu^2 - \theta_{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}) A_\mu)$

Cuadro 8.1: Sistemas electrodinámicos probados en el código

Apéndice A : Artilugios matemáticos

En esta sección se resumen las propiedades distributivas y de derivación que se utilizan a lo largo de la tesis. El objetivo es fijar nomenclatura y recordar los resultados que permiten manipular correctamente distribuciones, derivadas funcionales y corchetes de Poisson en el contexto de teorías de campos con restricciones.

A.1. Distribución delta de Dirac

Sea $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ la delta de Dirac en \mathbb{R}^n , definida por

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \delta^{(n)}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

CAPÍTULO 8. Código MATLAB

A. Artilugios matemáticos

Nombre	Lagrangiana L
Brown System [Brown, 2022]	$L(x, y, z, h) = \frac{1}{2}[(x + \dot{y} + \dot{z})^2 + (h - \dot{y})^2 + (x + 2y)(x + 2h)]$
Compound spring [Brown, 2023, Paulin-Fuentes et al., 2024]	$L(x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 + mg(x + y) - \frac{k_1}{2}(x - l_1)^2 - \frac{k_2}{2}(y - l_2)^2$
Pendulum and two springs [Brown, 2023, Romero Hernández et al., 2025]	$L(x, y, \theta) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + ml(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)\dot{\theta} - mg(y - l \cos \theta) - k(x^2 + y^2 + d^2)$
Masses, springs and rings [Brown, 2023, Romero Hernández et al., 2025]	$L(\theta, \omega, \psi) = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\omega}^2 + \dot{\psi}^2) - \frac{k}{2}[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (x - R \cos \omega)^2 + (y - R \sin \omega)^2 + (x - R \cos \psi)^2 + (y - R \sin \psi)^2]$
Masses, rods, and springs [Brown, 2023]	$L(x, y, z, h) = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y} + \dot{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{z} + \dot{h}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{h} + \dot{x}}{2} \right)^2 \right] - V(x, y, z, h)$
Pairs of pulleys [Romero Hernández et al., 2025]	$L(x, y, z) = \frac{mR^2}{8}[(\dot{x} - \dot{y})^2 + (\dot{y} - \dot{z})^2 + (\dot{z} - \dot{x})^2] - \frac{kR^2}{8}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$
Hyperboloid [Najafzade et al., 2022]	$L(x, y, \lambda) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2) - \lambda \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{1 - a^2} - a^2 \right)$
General Conic system [Barbosa and Thibes, 2018]	$L(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + z \left(\frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{2}By^2 + Cxy + Dx + Ey + F \right)$
Chern-Simons quantum mechanics [Bertin et al., 2014]	$L(x, y, q) = \nu q + \frac{1}{2}B[x(\dot{y} - q\dot{x}) - y(\dot{x} + q\dot{y})]$
The Christ-Lee model [Bertin et al., 2014]	$L(x, y, q) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}q^2(x^2 + y^2) - V(x^2 + y^2)$
Particle motion on a torus [Gomez et al., 2024]	$L(\eta, \theta, \phi) = \frac{m}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{m}{2}\eta^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(b + \eta \sin \theta)^2\dot{\phi}^2 - V(\eta, \theta, \phi) - l(\eta - a)$
A partially integrable system [Muslih, 2003]	$L(x, y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \frac{y^2}{x^2})$
A completely integrable system [Muslih, 2003]	$L(x, y) = \frac{1}{2}m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y - \omega(x^2 + y^2))$
BÁleanu system [BÁleanu and Güler, 2001]	$L(x, y, z) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}z^2(x^2 + y^2) - z(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
The multi-dimensional rotator [Rothe and Scholtz, 2003, Bertin et al., 2008]	$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(x\dot{x} + y\dot{y})$
Landau model [Rothe and Scholtz, 2003, Bertin et al., 2008]	$L(x, y) = \frac{1}{2}[B(x\dot{y} - \dot{x}y) - k(x^2 + y^2)]$
The Güler's example [Rabei and Güler, 1992, Bertin et al., 2008]	$L(x, y, z) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(\dot{y} - \dot{z})^2 + (x + z)\dot{y} - (x + y + z^2)$
First-class Example [Nawafleh et al., 2004]	$L(x, y, z) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \dot{x}\dot{y} + y\dot{y} - x - z$
First-class Example 2 [Nawafleh et al., 2004]	$L(x, y, z) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2z^2) + (\dot{x} + \dot{y} - x)z + \frac{1}{2}x^2$
Mixed-class Example [Nawafleh et al., 2004]	$L(x, y, z, h) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + h^2) + \dot{x}h + \dot{y}z + x\dot{x} + \frac{1}{2}z^2$
Gauge-system Example [Golovnev, 2023]	$L(x, y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2(y - x))$
The spin one-half particle. [Deriglazov, 2017]	$L(\omega, g, \phi) = \frac{1}{2g}\dot{\omega}^2 + g\frac{\dot{\phi}^2}{2a^2} + \frac{1}{6}(\omega^2 - a^2)$

Cuadro 8.2: Sistemas puntuales probados en el código

1. Integral de la delta por una función¹

$$\int d^n \mathbf{x} \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}). \quad (\text{A.1})$$

2. Integral de la derivada de la delta (por integración por partes):

$$\int d^n \mathbf{x} \partial_{x_i} [\delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{a})] f(\mathbf{x}) = -\partial_{a_i} f(\mathbf{a}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

3. Traslado de la derivada entre argumentos (útil al variar lagrangianos en teoría de campos):

$$\partial_{x_i} \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{y_i} \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{A.3})$$

Más en general, si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona con ceros simples $\{x_k\}$,

$$\delta(\phi(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|}, \quad \frac{d}{dx} \delta(\phi(x)) = -\sum_k \frac{\phi''(x_k)}{|\phi'(x_k)|^3} \delta(x - x_k) + \sum_k \frac{\delta'(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|^2}.$$

A.2. Derivadas funcionales

Sea $F[\varphi]$ un funcional de un campo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La *derivada funcional* de F respecto de φ en el punto \mathbf{x} se define como

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi + \varepsilon \delta \varphi_{\mathbf{x}}] - F[\varphi]}{\varepsilon}, \quad \delta \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \delta^{(n)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Propiedades clave:

¹Las pruebas completas pueden consultarse, por ejemplo, en [Sundermeyer, 1982].

1. Linealidad

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}(\alpha F + \beta G) = \alpha \frac{\delta F}{\delta\varphi} + \beta \frac{\delta G}{\delta\varphi}. \quad (\text{A.4})$$

2. Regla del producto

$$\frac{\delta(FG)}{\delta\varphi} = \frac{\delta F}{\delta\varphi} G + F \frac{\delta G}{\delta\varphi}. \quad (\text{A.5})$$

3. Integración por partes generalizada si $F[\varphi] = \int d^n \mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, entonces

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right). \quad (\text{A.6})$$

4. Regla de la cadena funcional para $F[\varphi] = H(G[\varphi])$,

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi} = \frac{dH}{dG} \frac{\delta G}{\delta\varphi}. \quad (\text{A.7})$$

A.3. Corchetes de Poisson funcionales

Para un sistema de campos canónicos $(\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}))$ con el corchete fundamental $\{\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, el *corchete de Poisson funcional* entre dos funcionales $F[\varphi, \pi]$ y $G[\varphi, \pi]$ se define por

$$\{F, G\} = \int d^n \mathbf{x} \left(\frac{\delta F}{\delta\varphi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta F}{\delta\pi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\varphi(\mathbf{x})} \right). \quad (\text{A.8})$$

Propiedades esenciales:

1. Bilinealidad

$$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{G, H\}. \quad (\text{A.9})$$

2. Antisimetría

$$\{F, G\} = -\{G, F\}. \quad (\text{A.10})$$

3. Identidad de Jacobi

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (\text{A.11})$$

4. Regla de Leibniz

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}. \quad (\text{A.12})$$

5. Conmutatividad con derivadas parciales

$$\{\partial_i F, G\} = \partial_i \{F, G\} = -\{F, \partial_i G\} \quad (\text{A.13})$$

Las herramientas anteriores se emplean de forma reiterada para (i) regularizar integrales con distribuciones, (ii) derivar ecuaciones de movimiento a partir de principios variacionales y (iii) clasificar y manejar restricciones de primera y segunda clase mediante corchetes de Poisson y de Dirac.

Apendice B : Guía de Uso del código

B.1. solveSingular.m

```
1 function [H_e, allRestrictions, WMatrix, DiracBracketsInd, eqMotion] = ...  
2     SolveSingular(L, H_proposed, gaugeFix, varargin)
```

Descripción breve SolveSingular realiza las siguientes tareas:

- Calcula la matriz Hessiana del Lagrangiano.
- Computa los momentos canónicos.
- Determina las restricciones primarias de forma estricta (vectores nulos de la Hessiana).
- Construye el Hamiltoniano canónico y el extendido.
- Encuentra las restricciones secundarias.
- Clasifica las restricciones en de primera y de segunda clase.
- Calcula (cuando procede) la matriz de Dirac y sus inversas de bloque.
- Devuelve las ecuaciones de movimiento resultantes.

Argumentos de entrada

Convenciones de entrada

- **Nombres de coordenadas y velocidades**

Use letras simples para las coordenadas (x, y, z) y añada `_dot` para denotar sus derivadas temporales:

Nombre	Tipo	Significado
L	<i>sym</i>	Lagrangiano simbólico $L(q_i, \dot{q}_i)$.
H_proposed	<i>sym</i>	(Opcional) conjetura de Hamiltoniano canónico simbólico. Si se omite, no es requerido y la rutina calcula H_{can} internamente.
gaugeFix	<i>cell</i> de <i>sym</i>	(Opcional) arreglo tipo <i>cell</i> con condiciones de gauge $\chi_j(q_i, p_i, t) = 0$. Déjelo vacío para omitir el gauge fixing.
varargin	<i>char</i> , ...	Lista de coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_N . Sus momentos canónicos p_i se infieren automáticamente como P_{q_i} .

Cuadro 3: SolveSingular: argumentos de entrada

```

1 syms x y z x_dot y_dot z_dot real
2 L = 1/2*(x_dot^2 + y_dot^2 + z_dot^2) - V(x,y,z);
3 [H_e, phi, W, D, EOM] = SolveSingular(L, H_can, {x*y}, 'x', 'y');
```

Versiones disponibles de solveSingular

Todas las variantes comparten los *mismos* argumentos de entrada y la misma estructura de salida; sólo difieren en sus algoritmos internos.

solveSingular

La implementación más segura y exhaustivamente probada. Aplica el formalismo completo de Dirac–Bergmann *sin* atajos algebraicos. Utilice esta variante para ejecuciones de producción; ha sido validada en múltiples sistemas de referencia y se considera la más robusta.

`solveSingularS`

Una variante aligerada que simplifica cada restricción en cuanto se detecta. Aunque está ampliamente probada, estas simplificaciones no siempre preservan la dinámica correcta. Ejecute *después* la versión estándar `solveSingular` y compare salidas para asegurarse de que los resultados siguen siendo equivalentes.

`solveSingularH`

Una versión con una rutina mejorada para construir Hamiltonianos. A diferencia de las otras dos variantes —que solicitan un Hamiltoniano propuesto por el usuario— esta intenta construir H_{can} automáticamente, reconociendo que pueden existir múltiples elecciones válidas. Pruebas preliminares confirman que produce resultados correctos pero, con frecuencia, expresiones muy extensas; por ello, úsese su salida como guía y no necesariamente como un Hamiltoniano final y amigable para el usuario.

B.2. Funciones auxiliares

`H_singular`

```
1 function [H_e, allRestrictions] = H_singular(L, H_guess, varargin)
```

Descripción breve Construye el Hamiltoniano extendido a partir de un Lagrangiano singular. Si `H_guess` se proporciona, se emplea como punto de partida; en caso contrario, se intenta deducir el Hamiltoniano canónico.

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
B. Guía de Uso del código

Nombre	Tipo	Significado
L	<i>sym</i>	Lagrangiano del sistema.
H_guess	<i>sym</i>	(Opcional) conjetura de Hamiltoniano.
varargin	<i>char</i>	Nombres de las coordenadas generalizadas que definen los momentos canónicos asociados.

Cuadro 4: H_singular: argumentos de entrada

PoissonBrackets

```
function [PoissonBracket] = PoissonBrackets(F, G, varargin)
```

Descripción breve Evalúa el corchete de Poisson $\{F, G\}$ para expresiones simbólicas, asumiendo que todas las variables son reales y que los pares canónicos (q_i, P_{q_i}) se infieren a partir de los nombres proporcionados en `varargin`.

Nombre	Tipo	Significado
F	<i>sym</i>	Primera expresión simbólica.
G	<i>sym</i>	Segunda expresión simbólica.
varargin	<i>char</i>	Nombres de las coordenadas generalizadas; la función deduce el momento canónico correspondiente P_{q_i} .

Cuadro 5: PoissonBrackets: argumentos de entrada

Nombre	Tipo	Significado
PoissonBracket	<i>sym</i>	Expresión simbólica del corchete de Poisson $\{F, G\}$.

Cuadro 6: PoissonBrackets: salida

calculateWMatrix

```
function [WMatrix, WMatrixInv, NewRestrictions,
        FirstClassRestrictions, SecondClassRestrictions]
= calculateWMatrix(allRestrictions, varargin)
```

Descripción breve Dada la colección de restricciones, construye la matriz W (de corchetes de Poisson entre restricciones), identifica las de primera y segunda clase, y calcula (si es posible) la inversa por bloques necesaria para los corchetes de Dirac.

Nombre	Tipo	Significado
<code>allRestrictions</code>	<i>cell/sym</i>	Conjunto de restricciones del sistema.
<code>varargin</code>	<i>char</i>	Lista de nombres de coordenadas para inferir pares canónicos.

Cuadro 7: `calculateWMatrix`: argumentos de entrada

Nombre	Tipo	Significado
<code>WMatrix</code>	<i>sym / num</i>	Bloques de la matriz W de corchetes entre restricciones.
<code>WMatrixInv</code>	<i>sym / num</i>	Inversa (cuando existe) de la parte relevante de W .
<code>NewRestrictions</code>	<i>cell</i>	Restricciones nuevas/derivadas.
<code>FirtsClassRestrictions</code>	<i>cell</i>	Restricciones de primera clase.
<code>SecondClassRestrictions</code>	<i>cell</i>	Restricciones de segunda clase.

Cuadro 8: `calculateWMatrix`: salidas

DiracBrackets

```

1 function [DiracBracket] = DiracBrackets(q_i, P_j, phi, Minv,
2                                     varargin)

```

Descripción breve Calcula el corchete de Dirac $\{q_i, P_j\}_D$. Si no se proporciona una inversa válida M^{-1} del bloque de restricciones de segunda clase, devuelve el corchete de Poisson estándar.

- Si M^{-1} está disponible y es numéricamente estable, aplica

$$\{q_i, P_j\}_D = \{q_i, P_j\} - \sum_{a,b} \{q_i, \phi_a\} M_{ab}^{-1} \{\phi_b, P_j\},$$

usando el conjunto de restricciones de segunda clase ϕ_a .

- Todas las derivadas intermedias se calculan con `PoissonBrackets`; cada símbolo se trata como real para evitar conjugados complejos no deseados.

Nombre	Tipo	Significado
<code>q_i</code>	<i>sym</i>	Coordenada cuyo corchete de Dirac se desea.
<code>P_j</code>	<i>sym</i>	Momento canónico a emparejar con <code>q_i</code> .
<code>phi</code>	<i>sym</i> vector o <i>cell</i>	Colección de restricciones de segunda clase ϕ_a .
<code>Minv</code>	<i>sym</i> o numérico	Inversa del bloque de la matriz de restricciones $M_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$. Si falta, es singular o no finita, sólo se devuelve el corchete de Poisson.
<code>varargin</code>	<i>char</i>	Nombres de coordenadas para inferir pares canónicos.

Cuadro 9: `DiracBrackets`: argumentos de entrada

Nombre	Tipo	Significado
<code>DiracBracket</code>	<i>sym</i>	Expresión simbólica del corchete de Dirac $\{q_i, P_j\}_D$ (o el corchete de Poisson si M^{-1} no está disponible).

Cuadro 10: `DiracBrackets`: salida

Apendice C : Aplicación del código de Matlab

Como se explicó en la sección anterior, el programa para resolver el sistema de electrodinámica no conmutativa toma como base la infraestructura desarrollada para sistemas puntuales. En particular, extiende dicha base y sustituye —cuando es necesario— ciertas funciones nativas de MATLAB por implementaciones propias que habilitan el cálculo tensorial con manejo explícito de índices y el cálculo funcional.

En las teorías de campo, las expresiones intermedias y finales resultan extremadamente extensas y complejas, por lo que su reproducción íntegra en el cuerpo del manuscrito no es práctica. Por consiguiente, a efectos expositivos, los ejemplos aplicados que se presentan en esta sección se muestran sobre sistemas puntuales.

El contenido de los recuadros grises corresponde a las entradas en el *MATLAB Live Script*, mientras que el resto muestra la salida generada automáticamente por el código (algunas salidas se omitieron por su extensión). En estos bloques basta con:

1. Definir las expresiones simbólicas (declaradas con `syms`) que componen el lagrangiano L del sistema.
2. Aplicar la función `solveSingular` junto con las coordenadas canónicas correspondientes.

De este modo, el programa implementa el formalismo de restricciones de Dirac y determina automáticamente la dinámica completa del sistema.

```
clear

syms x y x_dot y_dot lambda m a_y Omega omega a_x e u real
```

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
C. Aplicación del código de Matlab

```
L = (1/2)*m*(x_dot^2 + y_dot^2)
+ lambda*((y - a_y)^2 + Omega*x^2 - 2*(omega)*x + a_x^2 - u^2*e^2)
```

$$L = \lambda (a_x^2 + a_y^2 - 2a_y y - e^2 u^2 + \Omega x^2 - 2\omega x + y^2) + \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}$$

```
[HH, R, WW, DB] = SolveSingular(L,'x', 'y', 'lambda');
```

Hessian matrix:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hessian determinant:

0

Hessian is singular.

--- Canonical momenta P_i ---

$$P_x = m \dot{x}$$

$$P_y = m \dot{y}$$

$$P_\lambda = 0$$

Null vector:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primary constraints:

$$P_\lambda$$

Canonical Hamiltonian obtained:

$$\frac{P_x^2}{m} - \lambda (a_x^2 + a_y^2 - 2a_y y - e^2 u^2 + \Omega x^2 - 2\omega x + y^2) - \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m}$$

--- All constraints ---

Constraint 1:

P_x

Constraint 2:

$$a_x^2 + a_y^2 - 2 a_y y - e^2 u^2 + \Omega x^2 - 2 \omega x + y^2$$

Constraint 3:

$$\frac{2 (P_y a_y + P_x \omega - P_y y - \Omega P_x x)}{m}$$

Constraint 4:

$$\frac{2 (2 \lambda m \Omega^2 x^2 + \Omega P_x^2 - 4 \lambda m \Omega \omega x + P_y^2 + 2 \lambda m a_y^2 - 4 \lambda m a_y y + 2 \lambda m \omega^2 + 2 \lambda m y^2)}{m^2}$$

Initial W matrix:

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
C. Aplicación del código de Matlab

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & -\frac{8(-P_x x \Omega^2 + P_x \omega \Omega + P_y a_y - P_y y)}{m^2} \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \frac{8(-P_x x \Omega^2 + P_x \omega \Omega + P_y a_y - P_y y)}{m^2} & -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{4(\Omega^2 x^2 - 2\Omega \omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2)}{m}$$

$$\sigma_2 = \frac{8(-2\lambda m \Omega^3 x^2 + \Omega^2 P_x^2 + 4\lambda m \Omega^2 \omega x - 2\lambda m \Omega \omega^2 + P_y^2 - 2\lambda m a_y^2 + 4\lambda m a_y y - 2\lambda m y^2)}{m^3}$$

Null vectors of W:

0

Null vectors empty/trivial → original constraints are kept.

Second-class constraints:

$$\left(\begin{array}{c} P_\lambda \\ a_x^2 + a_y^2 - 2a_y y - e^2 u^2 + \Omega x^2 - 2\omega x + y^2 \\ -\frac{2(P_y a_y + P_x \omega - P_y y - \Omega P_x x)}{m} \\ \frac{2(2\lambda m \Omega^2 x^2 + \Omega P_x^2 - 4\lambda m \Omega \omega x + P_y^2 + 2\lambda m a_y^2 - 4\lambda m a_y y + 2\lambda m \omega^2 + 2\lambda m y^2)}{m^2} \end{array} \right)$$

Degrees of freedom: 1

Inverse of the W matrix:

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
C. Aplicacion del codigo de Matlab

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \frac{m}{4\sigma_3} \\ -\sigma_1 & 0 & -\frac{m}{4\sigma_3} & 0 \\ -\sigma_2 & \frac{m}{4\sigma_3} & 0 & 0 \\ -\frac{m}{4\sigma_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{-2\lambda m \Omega^3 x^2 + \Omega^2 P_x^2 + 4\lambda m \Omega^2 \omega x - 2\lambda m \Omega \omega^2 + P_y^2 - 2\lambda m a_y^2 + 4\lambda m a_y y - 2\lambda m y^2}{2m\sigma_3^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{-P_x x \Omega^2 + P_x \omega \Omega + P_y a_y - P_y y}{2\sigma_3^2}$$

$$\sigma_3 = \Omega^2 x^2 - 2\Omega \omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2$$

 Equations of motion (Poisson, extended Hamiltonian):

$\dot{x} =$

$$\frac{P_x m + 4\Omega P_x u_4 - 2m\omega u_3 + 2\Omega m u_3 x}{m^2}$$

$\dot{y} =$

$$\frac{P_y m + 4P_y u_4 - 2a_y m u_3 + 2m u_3 y}{m^2}$$

$$\dot{\lambda} =$$

$$u_1$$

$$\dot{P}_x =$$

$$\frac{2(\Omega P_x u_3 + \lambda m \omega - 4\Omega \lambda \omega u_4 - \Omega \lambda m x + 4\Omega^2 \lambda u_4 x)}{m}$$

$$\dot{P}_y =$$

$$\frac{2(P_y u_3 + a_y \lambda m - 4a_y \lambda u_4 - \lambda m y + 4\lambda u_4 y)}{m}$$

$$\dot{P}_\lambda =$$

$$\frac{4u_4(\Omega^2 x^2 - 2\Omega \omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2)}{m}$$

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
C. Aplicacion del codigo de Matlab

All constraints are SECOND class.

Showing canonical Dirac brackets

$\{x, \text{lambda}\}_D =$

$$\frac{(a_y - y) (P_y \omega - \Omega P_x a_y - \Omega P_y x + \Omega P_x y)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)^2}$$

$\{x, P_x\}_D =$

$$\frac{(a_y - y)^2}{\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2}$$

$\{x, P_y\}_D =$

$$\frac{(\omega - \Omega x) (2 a_y - 2 y)}{2 (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

$\{y, \text{lambda}\}_D =$

$$\frac{(\omega - \Omega x) (P_y \omega - \Omega P_x a_y - \Omega P_y x + \Omega P_x y)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)^2}$$

$\{y, P_x\}_D =$

CAPÍTULO 8. Código MATLAB
C. Aplicacion del codigo de Matlab

$$\frac{(2\omega - 2\Omega x)(a_y - y)}{2(\Omega^2 x^2 - 2\Omega\omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

{y, P_y}_D =

$$\frac{(\omega - \Omega x)^2}{\Omega^2 x^2 - 2\Omega\omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2}$$

{P_x, P_y}_D =

$$\frac{P_y \omega - \Omega P_x a_y - \Omega P_y x + \Omega P_x y}{\Omega^2 x^2 - 2\Omega\omega x + a_y^2 - 2a_y y + \omega^2 + y^2}$$

Zero Dirac brackets:

{x, y}, {x, P_lambda}, {y, P_lambda}, {lambda, P_lambda}, {P_x, P_lambda},
 {P_y, P_lambda}

 Reduced Hamiltonian:

$$\frac{P_x^2}{m} - \frac{P_x^2 - P_y^2}{2m}$$

 Equations of motion (Dirac, all constraints):

\dot{x} =

$$\frac{(a_y - y) (P_x a_y - P_y \omega - P_x y + \Omega P_y x)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

$$\dot{y} =$$

$$\frac{(\omega - \Omega x) (P_x a_y - P_y \omega - P_x y + \Omega P_y x)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

$$\dot{P}_x =$$

$$\frac{P_y (P_y \omega - \Omega P_x a_y - \Omega P_y x + \Omega P_x y)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

$$\dot{P}_y =$$

$$\frac{P_x (P_y \omega - \Omega P_x a_y - \Omega P_y x + \Omega P_x y)}{m (\Omega^2 x^2 - 2 \Omega \omega x + a_y^2 - 2 a_y y + \omega^2 + y^2)}$$

$$\dot{P}_{\lambda} =$$

$$0$$

Bibliografía

- [Abe et al., 2003] Abe, Y., Banerjee, R., and Tsutsui, I. (2003). Duality symmetry and plane waves in non-commutative electrodynamics. *Physics Letters B*, 573:248–254.
- [Băleanu and Güler, 2001] Băleanu, D. and Güler, Y. (2001). Hamilton—jacobi quantization of constrained systems. *Czechoslovak journal of physics*, 51(12):1260–1265.
- [Banerjee and Kumar, 2005] Banerjee, R. and Kumar, K. (2005). Maps for currents and anomalies in noncommutative gauge theories. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 71(4):045013.
- [Banerjee et al., 2004] Banerjee, R., Lee, C., and Yang, H. S. (2004). Seiberg-witten-type maps for currents and energy-momentum tensors in noncommutative gauge theories. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 70(6):065015.
- [Barbosa and Thibes, 2018] Barbosa, G. D. and Thibes, R. (2018). A gauge invariant description for the general conic constrained particle from the FJBW iteration algorithm. *Brazilian Journal of Physics*, 48:380–389.
- [Berrino et al., 2003] Berrino, G., Cacciatori, S. L., Celi, A., Martucci, L., and Vicini, A. (2003). Noncommutative electrodynamics. *Physical Review D*, 67(6):065021.

- [Bertin et al., 2008] Bertin, M., Pimentel, B., and Valcárcel, C. (2008). Non-involutive constrained systems and hamilton–jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323(12):3137–3149.
- [Bertin et al., 2014] Bertin, M., Pimentel, B., and Valcárcel, C. (2014). Involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism. *Journal of Mathematical Physics*, 55(11).
- [Brown, 2022] Brown, J. D. (2022). Singular lagrangians, constrained hamiltonian systems and gauge invariance: An example of the dirac–bergmann algorithm. *Universe*, 8(3):171.
- [Brown, 2023] Brown, J. D. (2023). Singular lagrangians and the dirac–bergmann algorithm in classical mechanics. *American Journal of Physics*, 91(3):214–224.
- [Castellani, 1982] Castellani, L. (1982). Symmetries in constrained hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 143(2):357–371.
- [Chern and Simons, 1974] Chern, S.-S. and Simons, J. (1974). Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, 99(1):48–69.
- [Clarkson and McKeon, 2003] Clarkson, R. and McKeon, D. (2003). Quantum field theory. In *lecture notes*.
- [Darabi and Naderi, 2011] Darabi, F. and Naderi, F. (2011). Dirac quantization of noncommutative abelian proca field. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(11):3432–3441.
- [Deriglazov, 2017] Deriglazov, A. (2017). *Hamiltonian Formalism for Singular Theories*, pages 271–351. Springer International Publishing, Cham.
- [Goldstein et al., 2002] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison Wesley.

- [Golovnev, 2023] Golovnev, A. (2023). On the role of constraints and degrees of freedom in the hamiltonian formalism. *Universe*, 9(2):101.
- [Gomez et al., 2024] Gomez, I. S., Pandey, V. K., and Thibes, R. (2024). Symplectic quantization and general constraint structure of a prototypical second-class system. *The European Physical Journal C*, 84(12):1–9.
- [Henneaux and Teitelboim, 1992] Henneaux, M. and Teitelboim, C. (1992). *Quantization of Gauge Systems*. Princeton paperbacks. Princeton University Press.
- [Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers.
- [Kruglov, 2002] Kruglov, S. I. (2002). Maxwell’s theory on noncommutative spaces and quaternions. *Annales Fond. Broglie*, 27:343–358.
- [Kruglov, 2003] Kruglov, S. I. (2003). Dirac’s quantization of Maxwell’s theory on noncommutative spaces. *Electromagn. Phenom.*, 3:18–24.
- [London and London, 1935] London, F. and London, H. (1935). The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71–88.
- [Maggiore, 2023] Maggiore, M. (2023). *A modern introduction to classical electrodynamics*. Oxford University Press.
- [Martínez-Carbajal et al., 2022] Martínez-Carbajal, D., de La Cruz, M., Patiño-López, S., and Herrera-Zúñiga, L. D. (2022). Implications of seiberg–witten map on type-i superconductors. *International Journal of Modern Physics A*, 37(35):2250218.
- [Muslih, 2003] Muslih, S. I. (2003). Completely and partially integrable systems of total differential equations. *Il Nuovo Cimento B*, 118(5):505–511.

- [Najafizade et al., 2022] Najafizade, A., Panahi, H., Akbari, S., and Jahangiri, L. (2022). Dirac approach in review of the classical and quantum motion on the surface of the hyperboloid of one sheet. *Indian Journal of Physics*, 96(11):3201–3209.
- [Nawafleh et al., 2004] Nawafleh, K. I., Rabei, E. M., and Ghassib, H. B. (2004). Hamilton–jacobi treatment of constrained systems. *International Journal of Modern Physics A*, 19(03):347–354.
- [Paulin-Fuentes et al., 2024] Paulin-Fuentes, J. M., López Arellano, C. M., and Cabrera, J. M. (2024). Singular lagrangians and the faddeev-jackiw formalism in classical mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 63(5):111.
- [Pippard and Bragg, 1953] Pippard, A. B. and Bragg, W. L. (1953). An experimental and theoretical study of the relation between magnetic field and current in a superconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 216(1127):547–568.
- [Rabei and Güler, 1992] Rabei, E. M. and Güler, Y. (1992). Hamilton-jacobi treatment of second-class constraints. *Physical Review A*, 46(6):3513.
- [Romero Hernández et al., 2025] Romero Hernández, L. G., Manuel Cabrera, J., Chan López, R. E., and Paulin Fuentes, J. M. (2025). Singular lagrangians and the hamilton-jacobi formalism in classical mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 64(2):36.
- [Rothe and Scholtz, 2003] Rothe, K. and Scholtz, F. (2003). On the hamilton–jacobi equation for second-class constrained systems. *Annals of Physics*, 308(2):639–651.
- [Seiberg and Witten, 1999] Seiberg, N. and Witten, E. (1999). String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09):032.

[Sundermeyer, 1982] Sundermeyer, K. (1982). *Constrained Dynamics: With Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Lecture notes in physics. Springer-Verlag.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de la Tesis:	Electrodinámica No-local a través del Formalismo Dirac-Bergmann
Autor de la Tesis:	Alejandro Gabriel Andarcia Caballero
ORCID:	https://orcid.org/0009-0003-0333-8402
Resumen de la Tesis:	<p>En este trabajo se aplica el algoritmo de Dirac-Bergmann para estudiar la electrodinámica de Maxwell en un espacio-tiempo no conmutativo con fuentes externas, obteniendo las ecuaciones de Maxwell con correcciones no conmutativas. Se presenta una revisión rigurosa del formalismo de restricciones de Dirac y, además del sistema principal, se analizan sistemas afines que permiten comprobar y validar los resultados, así como clarificar su interpretación. El desarrollo se apoya en una herramienta computacional implementada en este proyecto, que automatiza el procedimiento del formalismo de restricciones —desde el cálculo de los momentos canónicos y la identificación y clasificación de restricciones hasta los corchetes de Poisson/Dirac— y entrega de manera ordenada y reproducible las expresiones</p>

	relevantes del sistema.
Palabras claves de la Tesis:	Algoritmo de Dirac-Bergmann ,Restricciones, Maxwell No-conmutativo, MATLAB.
Referencias citadas:	<p>[Abe et al., 2003] Abe, Y., Banerjee, R., and Tsutsui, I. (2003). Duality symmetry and plane waves in non-commutative electrodynamics. <i>Physics Letters B</i>, 573:248–254.</p> <p>[Băleanu and Güler, 2001] Băleanu, D. and Güler, Y. (2001). Hamilton—jacobi quantization of constrained systems. <i>Czechoslovak journal of physics</i>, 51(12):1260–1265.</p> <p>[Banerjee and Kumar, 2005] Banerjee, R. and Kumar, K. (2005). Maps for currents and anomalies in noncommutative gauge theories. <i>Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology</i>, 71(4):045013.</p>

[Banerjee et al., 2004] Banerjee, R., Lee, C., and Yang, H. S. (2004). Seiberg-witten-type maps for currents and energy-momentum tensors in noncommutative gauge theories. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 70(6):065015.

[Barbosa and Thibes, 2018] Barbosa, G. D. and Thibes, R. (2018). A gauge invariant description for the general conic constrained particle from the FJBW iteration algorithm. *Brazilian Journal of Physics*, 48:380–389.

[Berrino et al., 2003] Berrino, G., Cacciatori, S. L., Celi, A., Martucci, L., and Vicini, A. (2003). Noncommutative electrodynamics. *Physical Review D*, 67(6):065021.

[Bertin et al., 2008] Bertin, M., Pimentel, B., and Valcárcel, C. (2008). Non-involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323(12):3137–3149.

[Bertin et al., 2014] Bertin, M., Pimentel, B., and Valcárcel, C. (2014). Involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism. *Journal of Mathematical Physics*, 55(11).

[Brown, 2022] Brown, J. D. (2022). Singular lagrangians, constrained hamiltonian systems and gauge invariance: An example of the dirac-bergmann algorithm. *Universe*, 8(3):171.

[Brown, 2023] Brown, J. D. (2023). Singular lagrangians and the dirac-bergmann algorithm in classical mechanics. *American Journal*

of Physics, 91(3):214–224.

[Castellani, 1982] Castellani, L. (1982). Symmetries in constrained hamiltonian systems.

Annals of Physics, 143(2):357–371.

[Chern and Simons, 1974] Chern, S.-S. and Simons, J. (1974).

Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, 99(1):48–69.

[Clarkson and McKeon, 2003] Clarkson, R. and McKeon, D. (2003). Quantum field theory.

In *lecture notes*.

[Darabi and Naderi, 2011]

Darabi, F. and Naderi, F. (2011). Dirac quantization of noncommutative abelian proca field. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(11):3432–3441.

[Deriglazov, 2017] Deriglazov, A.

(2017). *Hamiltonian Formalism for Singular Theories*, pages 271–351.

<p style="text-align: center; font-size: 2em; opacity: 0.2; transform: rotate(-45deg);"> Universidad Juárez Autónoma de México </p>	<p>Springer International Publishing, Cham.</p> <p>[Goldstein et al., 2002] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). <i>Classical Mechanics</i>. Addison-Wesley series in physics. Addison Wesley.</p> <p>[Golovnev, 2023] Golovnev, A. (2023). On the role of constraints and degrees of freedom in the hamiltonian formalism. <i>Universe</i>, 9(2):101.</p> <p>[Gomez et al., 2024] Gomez, I. S., Pandey, V. K., and Thibes, R. (2024). Symplectic quantization and general constraint structure of a prototypical second-class system. <i>The European Physical Journal C</i>, 84(12):1–9.</p> <p>[Henneaux and Teitelboim, 1992] Henneaux, M. and Teitelboim, C. (1992). <i>Quantization of Gauge Systems</i>. Princeton paperbacks. Princeton University Press.</p>
--	---

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers.

[Kruglov, 2002] Kruglov, S. I. (2002). Maxwell's theory on noncommutative spaces and quaternions. *Annales Fond. Broglie*, 27:343–358.

[Kruglov, 2003] Kruglov, S. I. (2003). Dirac's quantization of Maxwell's theory on noncommutative spaces. *Electromagn. Phenom.*, 3:18–24.

[London and London, 1935] London, F. and London, H. (1935). The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*,

149(866):71–88.

[Maggiore, 2023] Maggiore, M. (2023). *A modern introduction to classical electrodynamics*.

Oxford University Press.

[Martínez-Carbajal et al., 2022]

Martínez-Carbajal, D., de La Cruz, M., Patiño-López, S., and Herrera-Zúñiga, L. D.

(2022). Implications of seiberg–witten map on type-i superconductors. *International Journal of Modern Physics A*, 37(35):2250218.

[Muslih, 2003] Muslih, S. I. (2003).

Completely and partially integrable systems of total differential equations. *Il Nuovo Cimento B*, 118(5):505–511.

[Najafizade et al., 2022] Najafizade,

A., Panahi, H., Akbari, S., and Jahangiri, L. (2022). Dirac approach in review of the classical and quantum motion on

the surface of the hyperboloid of one sheet. *Indian Journal of Physics*, 96(11):3201–3209.

[Nawafleh et al., 2004] Nawafleh, K. I., Rabei, E. M., and Ghassib, H. B. (2004). Hamilton–jacobi treatment of constrained systems. *International Journal of Modern Physics A*, 19(03):347–354.

[Paulin-Fuentes et al., 2024] Paulin-Fuentes, J. M., López Arellano, C. M., and Cabrera,

J. M. (2024). Singular lagrangians and the faddeev-jackiw formalism in classical mechanics.

International Journal of Theoretical Physics, 63(5):111.

[Pippard and Bragg, 1953]

Pippard, A. B. and Bragg, W. L.

(1953). An experimental and theoretical study of the relation between magnetic field and current in a superconductor.

Proceedings of the Royal Society

of London. Series A. *Mathematical and Physical Sciences*, 216(1127):547–568.

[Rabei and Güler, 1992] Rabei, E. M. and Güler, Y. (1992). Hamilton-jacobi treatment of second-class constraints. *Physical Review A*, 46(6):3513.

[Romero Hernández et al., 2025] Romero Hernández, L. G., Manuel Cabrera, J., Chan López, R. E., and Paulin Fuentes, J. M. (2025). Singular lagrangians and the hamilton-jacobi formalism in classical mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 64(2):36.

[Rothe and Scholtz, 2003] Rothe, K. and Scholtz, F. (2003). On the hamilton–jacobi equation for second-class constrained systems. *Annals of Physics*,

308(2):639–651.

[Seiberg and Witten, 1999]

Seiberg, N. and Witten, E.
(1999). String theory and
noncommutative geometry.

*Journal of High Energy
Physics*, 1999(09):032.

[Sundermeyer, 1982]

Sundermeyer, K. (1982).
*Constrained Dynamics: With
Applications to Yang-Mills*

*Theory, General Relativity,
Classical Spin, Dual String
Model.* Lecture notes in
physics. Springer-Verlag.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.