UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

FUNTORES REPRESENTABLES Y PROBLEMAS MODULI

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

LIC. ISAAC JAVIER DÍAZ

DIRECTOR

DR. CARLOS ARIEL POMPEYO GUTIÉRREZ

CUNDUACÁN, TABASCO. JUNIO 2025

Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, el día 21 del mes de mayo del año 2025, el que suscribe **Isaac Javier Díaz**, alumno del Programa de la Maestría en Ciencias Matemáticas, con número de matrícula 222a21002, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del grado de Maestría en Ciencias y titulada **"Funtores representables y problemas moduli"** dirigida por Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 21 de mayo de 2025

Lic. Isaac Javier Díaz

DIRECCIÓN

26 de mayo de 2025

LIC. ISAAC JAVIER DIAZ
EGRESADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRESENTE

Por medio del presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que, proceda a la impresión del trabajo titulado "**FUNTORES REPRESENTABLES Y PROBLEMAS MODULI**" dirigido por el Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez bajo la modalidad de titulación por **Tesis**.

La Comisión revisora conformada por el Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez, Dr. Francisco Eduardo Castillo Santos, Dr. Gamaliel Blé González, Dr. Víctor Castellanos Vargas y Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo aprobó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** y obtener el grado de *Maestro en Ciencias Matemáticas*.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA

C.C.P.- Archivo.

*Dir´Dra.HPV/JP´Dra.EAM/jkal***

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 23 de octubre 2024.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTOR(A) y/o AUTORES(RAS) en la producción, creación y/o realización de la obra denominada **"Funtores representables y problemas moduli"**.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES

Egresado	Director
Lic. Isaac Javier Díaz	Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez

TESTIGOS

Domingo González Martinez	Jair Remigio Juarez

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo, paciencia y por una infinidad de cosas más; a mi asesor de tesis, de quien he aprendido mucho y que ha sido paciente conmigo; agradezco también a mis profesores y compañeros de la maestría, quienes han sido fuente de conocimiento; a los administrativos de la Jefatura de Posgrado de la DACB, por todo el apoyo brindado y, finalmente, mi agradecimiento y disculpas a todos aquellos de quienes me olvido.

Índice general

Capítulo 1

PROTOCOLO DE INVESTIGACIÓN

Título de la tesis:

Funtores representables y problemas moduli

Resumen: En este trabajo se estudia la relación que hay entre los funtores representables y los problemas moduli. El resultado principal presentado en esta tesis es que el funtor Grassmanniano está representado por un esquema.

Abstract: In this work we study the relation between representable functors and moduli problems. The main result in this thesis is that the Grassmann's functor is represented by a scheme.

Palabras clave: Teoría de categorías, problema moduli, funtor representable, espacio moduli, funtor de Grassmann.

1.1. Introducción

Un problema común en matemáticas es el de clasificar objetos de acuerdo a una propiedad de interés, para esto, dicha propiedad se suele plasmar como una relación de equivalencia entre los objetos. Por ejemplo, podemos suponer que estamos estudiando el conjunto de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita, al cual vamos a denotar por A. Así, en este conjunto tendríamos a $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{40}$, $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (el espacio vectorial de las matrices de dimensión $n \times m$ con entradas en los números reales), etc. La dimensión de los espacios vectoriales es una característica de interés, así que vamos a clasificar a los elementos del conjunto de acuerdo a esto: definimos una relación de equivalencia en A conforme a dicha propiedad: como dos espacios vectoriales (de dimensión finita y sobre el mismo campo) son ismorfos si y solo si tienen la misma dimensión, entonces decimos que dos espacios vectoriales son equivalentes si son isomorfos entre sí, de manera que las clases de equivalencia son clases de isomorfismos. Observamos que a cada clase de equivalencia le corresponde a un número natural: la dimensión de los espacios vectoriales en dicha clase de isomorfismo.

En este sentido, podemos pensar a $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ como un conjunto de parámetros para las clases de isomorfismo de espacios vectoriales de dimensión finita. Pero no solamente queremos un conjunto de parámetros, queremos un conjunto equipado con la misma estructura de los objetos que está parametrizando. Sin embargo, esto no ocurrre, ya que $\mathbb{N}_0$ no cuenta con una estructura de espacio vectorial que sea compatible con la asignación de un número n con su clase de isomorfismo.

Si generalizamos y en lugar de considerar el conjunto de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ consideramos una categoría arbitraria $\mathscr{C}$, surge entonces la siguiente pregunta: ¿bajo qué condiciones podemos pensar al conjunto de clases de equivalencia como un objeto en dicha categoría? La formalización de esta pregunta conduce a los conceptos de funtores representables y espacios de moduli.

La primera teoría que abordaremos será la de categorías, desarollada por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en su libro 'Categories for the Working Mathematician' [Mac13]. Esta teoría pretende dar una mirada panorámica de las matemáticas. En este trabajo nos centraremos, principalmente, en dos conceptos: el de transformación natural y funtor representable y en un resultado: el lema de Yoneda. Los funtores representables son los funtores que son como el funtor de morfismos $\mathrm{Mor}(-,X)$, mientras que el lema de Yoneda nos dice cuántas transformaciones naturales hay entre un funtor $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathit{Set}$ y el funtor $\mathrm{Mor}(-,X)$. La bibliografía principal es [Fan05, Lei14].

Luego viene la teoría de moduli, la cual trata sobre problemas de clasificación. Introduciremos la definición de problema moduli y de espacio moduli fino y grueso (los cuales son las soluciones de un problema moduli). Veremos, también, que no todo problema moduli tiene solución. Además expondremos la relación que hay entre los funtores representables y la teoría moduli, con lo cual podemos probar algunas cosas, como que un espacio móduli, si existe, es único (salvo isomorfismo). La fuente sobre la teoría de los problemas moduli utilizada en este trabajo es principalmente la que expone Peter Newstead en [New78], aunque también consideramos un trabajo más reciente, el de Victoria Hoskins [Hos15].

Finalmente, para poder desarrollar el primer ejemplo de problema moduli tendremos que utilizar los haces vectoriales, para lo cual consultamos [Hus66] y [Hat03]. Mientras que para nuestro ejemplo principal, el del funtor de Grassmann, habremos de introducir gavillas y esquemas, conceptos básicos en la moderna teoría de la Geometría Algebraica desarrollada por Alexander Grothendieck; en este caso la bibliografía principal es el libro de Robin Hartshorne [Har13], aunque también utilizaremos [Vak17] y [Eis00]. Para la demostración de la representabilidad del funtor consultaremos el trabajo de Johan de Jong et al. [SP23].

La estructura de la tesis es como sigue: en el capítulo 2 desarrollamos la teoría de categorías relevante para nuestro trabajo, introducimos los haces vectoriales y las gavillas. Después hablamos de esquemas y de gavillas de módulos. En el capítulo 3 introducimos los conceptos que dan el nombre a nuestra tesis: los funtores representables y los problemas moduli. Además presentamos y discutimos un resultado fundamental en la teoría de categorías: el Lema de Yoneda. Posteriormente, en el capítulo 4 presentamos dos ejemplos de problemas moduli con su solución: el de clasificación de endomorfismos de espacios vectoriales y el de clasificación de subespacios de un espacio vectorial, es aquí donde utilizamos lo visto en los capítulos 2 y 3.

Por último, tenemos los capítulos 1 y 5, que están relacionados con la metodología de la investigación utilizada para esta tesis; se presentan cosas como la hipótesis de investigación, pregunta de investigación, discusiones, etc.

1.2. Marco Teórico

En esta sección proporcionamos un resumen del marco teórico pues la desarrollaremos en su totalidad en los capítulos 2 y 3.

La teoría de categorías, desarollada por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en su libro "Categories for the Working Mathematician" [Mac13] nos proporciona una mirada panorámica de las matemáticas. Los orígenes de esta teoría pueden rastrearse hasta el año 1942, cuando Eilenberg, que estaba interesado en calcular grupos de homología, cohomología y homotopía, notó similitudes con las investigaciones de Mac Lane, las cuales estaban relacionadas con las extensiones de grupos. La investigación de tales coincidencias los llevó a las nociones de *funtor* y de *transformación natural* [Mar06].

La teoría de categorías nos servirá con un doble propósito: será el lenguaje en el cual nos expresaremos (e.g. un *espacio moduli fino* es un par que consta de una transformación natural y de un objeto que *representa* a cierto funtor), pero también nos servirá para demostrar resultados a partir de hechos categóricos (e.g. un *objeto univsersal* es único salvo isomorfismo, lo cual demuestra que un *espacio moduli fino es único*).

La teoría de moduli trata sobre problemas de clasificación. Tiene sus orígenes en los trabajos de Bernhard Riemann sobre las (ahora llamadas) superficies de Riemann, concretamente, en su artículo de 1857 *The theory of Abelian functions*, en donde introduce el problema de *clasificación birracional de curvas algebraicas planas*. No obstante, la formulación precisa de problemas moduli vino alrededor de un siglo después, en los trabajos de Alexander Grothendieck, quien definió los problemas moduli utilizando el recientemente desarrollado lenguaje de categorías [Ji15]. La fuente sobre la teoría de los problemas moduli utilizada en este trabajo es principalmente la que expone Peter Newstead en [New78], aunque también consideramos un trabajo más reciente, el de Victoria Hoskins [Hos15].

También aparece en este trabajo teoría de Geometría Algebraica, particularmente la relacionada con gavillas y esquemas. Las gavillas tienen sus orígenes en el estudio de las *cadenas de complejos*, un área de la topología algebraica y es aceptado que fue J. Leray quien inventó las gavillas, en un artículo que data de 1945. Sin embargo, en dicho artículo, no se menciona la palabra *gavilla*, sino que aparece la noción de "complejo concreto" (concrete complex). En poco más de una década, la noción fue refinada por H. Cartan y fue R. Godement en un trabajo de 1958 quien estandarizó las definiciones utilizando la teoría de categorías (e.g. definió una *pregavilla* como un funtor contravariante) [Gray06].

El concepto de gavilla trascendió la topología algebraica, llegando a ser un concepto básico en Geometría Algebraica, necesario incluso para definir los *esquemas*. La noción de esquema, que desarrollaron Grothendieck y sus colaboradores (aunque fue C. Chevalley quién acuñó el término) logra generalizar la idea de variedad (algebraica) y unifica la geometría algebraica con la teoría de números. [Car15, Eis00].

Los esquemas, como veremos, consisten de un espacio topológico junto con una estructura de gavilla y gracias a esta última podremos probar las propiedades locales necesarias (enunciadas en el *Criterio de los Esquemas*, véase el Cap. 4). Particularmente, probaremos que el funtor de Grassmann está representado localmente por *esquemas afines*, y gracias a la propiedad de pegado que tienen las gavillas, concluiremos que el funtor de Grassmann es representable.

1.3. Justificación

Para clasificar objetos en Geometría Algebraica surge el concepto de espacio moduli fino, el cual está basado en definiciones de la teoría de categorías: funtor, funtor representable, transformaciones naturales, morfismos, etc.

La justificación para estudiar los espacios moduli es que es una teoría conveniente para resolver problemas de clasificación debido a que permiten usar las herramientas de la categoría específica en la cual se está trabajando. En consecuencia, como la defnición de espacio moduli fino está basada en términos de la teoría de categorías, es necesario realizar un estudio de ésta [New78].

Por otra parte, en este trabajo se pretende explicar las definiciones relacionadas con espacios moduli, así como desarrollar ejemplos que se encuentran en la literatura, de manera que este trabajo puede servir como una fuente más accesible para abordar este tema.

1.4. Pregunta de investigación

Un espacio moduli fino es la solución ideal para un problema moduli, sin embargo, la mayoría de las veces no es posible tenerlo. Es por ello que nos preguntamos bajo qué condiciones un funtor $\mathscr{F}: Sch \to Set$ es representable. Siendo que el funtor de Grassmann va de la categoría de esquemas a la de conjuntos, nos preguntamos entonces ¿el funtor de Grassmann cumple las condiciones para ser representable?

1.5. Hipótesis o supuesto

La definición de funtor representable está dada en términos bastante generales, por lo que es difícil dar criterios de representabilidad para funtores arbitrarios. No obstante, si restringimos nuestro estudio a una categoría en particular, podemos utilizar hechos de ésta para encontrar algún criterio. Esto es posible cuando consideramos la categoría de esquemas. Por lo que partimos de la hipótesis de que el funtor de Grassmann, $Sch \to Set$, que es un funtor contravariante, está representado por un esquema.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo general.

1. Presentar ejemplos de problemas de clasificación que puedan plantearse mediante un funtor representable, en particular, el del funtor Grassmanniano.

1.6.2. Objetivos específicos.

1. Estudiar la teoría relativa a categorías y funtores.

2. Comprender la categoría de transformaciones naturales y el Lema de Yoneda.

3. Analizar la noción de funtor representable y presentar ejemplos de los mismos.

4. Estudiar la teoría de problemas de moduli en Geometría Algebraica y presentar un ejemplo de espacio moduli fino que se encuentre en la literatura.

1.7. Metodología

La tesis es de tipo cualitativo, más específicamente, es una investigación documental. El objetivo principal es mostrar que el funtor de Grassman es un ejemplo de espacio moduli fino, por lo tanto, habremos de consultar bibliografía acerca de los problemas moduli, lo cual nos lleva a estudiar la teoría de categorías (el lenguaje que se propone para la teoría de moduli); además de información acerca de las gavillas y los esquemas.

Capítulo 2

PRELIMINARES

La teoría de categorías nos da una mirada panorámica de las matemáticas, permitiendo así establecer puentes (funtores) entre distintas áreas de las matemáticas (categorías). Más adelante en este trabajo nos interesaremos en relacionar la *categoría de esquemas* con la *categoría de conjuntos*. Además, el lenguaje de las categorías nos permite resaltar características comunes que se comparten en diferentes ramas de las matemáticas.
Por otra parte, se introducirá la noción de gavilla, que de alguna manera nos permite *ordenar o parametrizar* cierto conjunto de estructuras. Este concepto de gavilla nos llevará al de esquema, que puede entenderse como una generalización del espacio de ceros de un sistema de ecuaciones polinómicas.
En la primera sección de este capítulo introduciremos las nociones básicas de la teoría de categorías, siguiendo principalmente el trabajo de [Lei14], pero también [Mac13]. Posteriormente hablaremos de la categoría de haces vectoriales sobre una base B, en donde la bibliografía consultada es [Hus66] y [Hat03]. Finalmente presentaremos las nociones de gavillas y esquemas, con un poco de énfasis en las gavillas de $\mathscr{O}_S$-módulos. La bibliografía de este sección es, principalmente, [Har13], que es un texto estándar en Geometría Algebraica. También se consultaron [Eis00], [Vak17] y se presentan algunos resultados de [SP23].

2.1. Conceptos básicos de Teoría de Categorías y algunos ejemplos

Comenzaremos esta sección introduciendo el concepto de categoría:

Definición 2.1 *Una **categoría** $\mathscr{A}$ consta de*

i) *una clase* $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *de objetos en* $\mathscr{A}$*;*

ii) *para cada par de objetos* A,B *existe un conjunto* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B)$ *(también denotado por* $\mathrm{Mor}(A,B)$*, si no hay riesgo de confusión) de morfismos que van de* A *a* B*;*

iii) *para objetos* A,B,C *en la categoría existe una función*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(B,C)\times\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,C) \\ (g,f) & \mapsto & g\circ f, \end{array}$$

*que es llamada **composición de morfismos**;*

iv) *para cada objeto* A *existe un elemento* 1_A *en* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,A)$*, que es llamado **morfismo identidad** en* A*.*

Las funciones composición y los morfismos identidad satisfacen los siguientes axiomas:

a) ***asociatividad de la composición**: para cada* $f\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B)$*,* $g\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(B,C)$ *y* $h\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(C,D)$ *tenemos*

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f);$$

b) ***ley de identidad:** para cada* $f\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B)$ *tenemos*

$$f\circ 1_A = f = 1_B\circ f.$$

c) *Los conjuntos* $\mathrm{Mor}(A,B)$ *son disjuntos por pares.*

Para mayor facilidad, también podemos escribir a una categoría $\mathscr{A}$ como una cuádrupla $\mathscr{A} = (\mathrm{ob}(\mathscr{A}),\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}},1,\circ)$, donde $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ son los objetos de la categoría, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}$ son los morfismos entre los objetos, 1 son los morfismos identidad y $\circ$ las funciones composición. El concepto de categoría es bastante general, de manera que existen numerosos ejemplos de objetos matemáticos que son categorías. A continuación damos algunos:

Ejemplo 2.1 1) ***Categoría*** *Set****:*** *La colección de conjuntos y las funciones entre ellos son una categoría. En efecto: en esta categoría los objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones. La composición de morfismos es la composición usual de funciones, la cual satisface la ley de asociatividad. Por último, para todo conjunto X existe una función f que va de X en X definida por $f(x) = x$ (que es llamada función identidad). Esta función cumple con la ley de la identidad de la definición de categoría.*

2) ***Categoría*** Vec_K***:*** *El conjunto de espacios vectoriales sobre un campo K con las transformaciones lineales forman una categoría, la composición de morfismos es la composición usual de transformaciones lineales y el morfismo identidad es la transformación lineal identidad.*

3) ***Categoría*** *Ring****:*** *La colección de anillos con los homomorfismos, la composición de homomorfismos (que es la composición usual de funciones) y el homomorfismo identidad conforman esta categoría.*

4) ***Categoría*** Top_X***:*** *Sea X un espacio topológico. Los componentes de esta categoría son:*

   i) *Los abiertos de la topología serán los objetos de la categoría.*

   ii) *Si U_0, U_1 son abiertos en X tales que $U_0 \subset U_1$, entonces se define la función inclusión $i : U_0 \to U_1$ con regla de correspondencia $i(x) = x$, para todo $x \in U_0$; las funciones inclusión serán los morfismos de la categoría.*

   iii) *La composición de los morfismos es la composición usual de funciones.*

   iv) *El morfismo identidad es la función identidad $I : U_0 \to U_0$.*

Definición 2.2 *Diremos que una categoría $\mathscr{A}$ es una* **subcategoría** *de una categoría $\mathscr{B}$ siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:*

1. $\mathrm{ob}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{ob}(\mathscr{B})$;
2. *para cada $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, A') \subset \mathrm{Mor}_{\mathscr{B}}(A, A')$;*
3. *para cada $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, la identidad $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, A)$ coincide con 1_A en $\mathrm{Mor}_{\mathscr{B}}(A, A)$.*
4. *la regla de composición en $\mathscr{A}$ es la restricción en los morfismos de $\mathscr{A}$ de la composición en $\mathscr{B}$.*

Si además, para cada $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ se tiene la igualdad

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, A') = \mathrm{Mor}_{\mathscr{B}}(A, A'),$$

se dirá que $\mathscr{A}$ es una **subcategoría completa** *de $\mathscr{B}$.*

En teoría de grupos podemos decir cuándo dos grupos son isomorfos, y lo mismo para espacios vectoriales y anillos, etc. Luego, es pertinente que tengamos la siguiente:

Definición 2.3 *Un morfismo $f : A \to B$ en la categoría $\mathscr{A}$ es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.*

Al morfismo g le llamamos el (morfismo) **inverso** de f. Decimos que es "el", porque es el único morfismo. Para mostrarlo, supongamos que $f : A \to B$ es un isomorfismo, y que por lo tanto existe un morfismo $g : B \to A$, tal que $g \circ f = 1_A$ y que $f \circ g = 1_B$. Supongamos que existe g' que también cumple con que $g' \circ f = 1_A$ y $f \circ g' = 1_B$. Luego, por la ley de la identidad tenemos $1_A \circ g = g$, lo cual implica que

$$g' \circ f \circ g = 1_A \circ g = g.$$

Pero también $f \circ g = 1_B$ y $g' \circ 1_B = g'$, entonces

$$g = g' \circ f \circ g = g' \circ 1_B = g'.$$

El siguiente es un ejemplo relacionado con isomorfismos y que además es diferente a los dados anteriormente pues muestra que no solamente podemos definir una categoría a partir de una colección de *objetos con estructura*.

Ejemplo 2.2 *Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría que consta de un solo objeto, A, y que todos sus morfismos son isomorfismos. Afirmamos que la función asociatividad de la categoría $\mathscr{A}$, que denotamos por $\circ$, y los morfismos de A en A, que denotamos por $\mathrm{Mor}(A,A)$ forman un grupo cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Mor}(A,A)$ bajo la operación $\circ$.*
El elemento neutro será el morfismo 1_A, ya que para todo $f \in \mathrm{Mor}(A,A)$ se cumple

$$1_A \circ f = f \circ 1_A = f.$$

Por otra parte, estamos tomando como hipótesis que todos los morfismos son isomorfismos, de manera que dado $f \in \mathrm{Mor}(A,A)$ *existe un* $g \in \mathrm{Mor}(A,A)$ *tal que*

$$f \circ g = 1_A = g \circ f.$$

Por último, como $\mathscr{A}$ *es una categoría, se cumple de manera axiomática que*

$$(f \circ g) \circ g = f \circ (g \circ h),$$

para todo $f, g, h \in \mathrm{Mor}(A,A)$.
Con ello hemos probado que una categoría con un solo elemento y cuyos morfismos son todos isomorfismos tiene una estructura de grupo.

Una vez que tenemos definidas las categorías, el siguiente paso consiste en decir cuáles van a ser los puentes entre ellas y qué propiedades deben cumplir.

Definición 2.4 *Sean* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *categorías. Un* ***funtor covariante*** $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *consiste de*

1. *una asignación*

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{B}),$$

dada por $A \mapsto \mathscr{F}(A)$;

2. *para* A, A' *objetos de* $\mathscr{A}$*, una función*

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,A') \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}(A), \mathscr{F}(A')),$$

definida por $f \mapsto \mathscr{F}(f)$*, que satisface los siguientes axiomas:*

- $\mathscr{F}(f' \circ f) = \mathscr{F}(f') \circ \mathscr{F}(f)$ *siempre que* $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ *pertenezca a* $\mathscr{A}$*;*
- $\mathscr{F}(1_A) = 1_{\mathscr{F}(A)}$.

Definición 2.5 *Dada una categoría* $\mathscr{A} = (\mathrm{ob}, \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}, 1, \circ)$*, definimos la categoría* ***opuesta****,* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} = (\mathrm{ob}(\mathscr{A}), \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}, 1, \circ^{\mathrm{op}})$*, en donde*

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(B,A)$$

y

$$g \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ g.$$

Observemos que 1_A *en* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ *coincide con* 1_A *en* $\mathscr{A}$.

Definición 2.6 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Un **funtor contravariante** $\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ es un funtor*

$$\mathscr{F} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}.$$

Lo que nos dice esta definición es que un funtor contravariante ″cambia la dirección de las flechas″, en el sentido de que si tenemos un morfismo $f : A \to B$, al aplicar el funtor contravariante $\mathscr{F}$ tendremos $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(B) \to \mathscr{F}(A)$ y $\mathscr{F}(f \circ g) = \mathscr{F}(g) \circ \mathscr{F}(f)$.

Ejemplo 2.3 *Considerar la categoría Top_X y la categoría Ring de anillos. Vamos a construir un funtor contravariante $\mathscr{F} : Top_X \to Ring$ de la siguiente forma: a cada objeto U de Top_X le asignará el anillo de funciones continuas definidas en U con valores en $\mathbb{R}$, que denotamos por $\mathscr{F}(U)$. Los morfismos de la categoría Top_X son las funciones inclusión, por supuesto, siempre que un conjunto esté contenido en el otro. Luego, si U, V son objetos de Top_X tales que $U \subset V$ y $\iota_{U,V} : U \to V$, entonces el funtor $\mathscr{F}$ manda el morfismo ι al homomorfismo de anillos*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}(\iota) : & \mathscr{F}(V) & \longrightarrow & \mathscr{F}(U) \\ & f & \longmapsto & f|_U, \end{array}$$

donde $f|_U$ es la restricción de la función f en U.

Observemos que tanto $\mathscr{F}(\iota_{V,W} \circ \iota_{U,V})$ como $\mathscr{F}(\iota_{V,W}) \circ \mathscr{F}(\iota_{U,V})$ van de $\mathscr{F}(W)$ en $\mathscr{F}(U)$, siempre que $U \subset V \subset W$. Además, si $f \in \mathscr{F}(W)$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\iota_{V,W} \circ \iota_{U,V})(f) &= f|_U \\ &= (f|_V)|_W \\ &= [\mathscr{F}(\iota_{V,W}) \circ \mathscr{F}(\iota_{U,V})](f). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{F}(\iota_{V,W} \circ \iota_{U,V}) = \mathscr{F}(\iota_{V,W}) \circ \mathscr{F}(\iota_{U,V})$. Ahora notemos que $\iota_{U,U} = 1_U$, y si $f \in \mathscr{F}(U)$, entonces $\mathscr{F}(\iota_{U,U})(f) = f|_U = f$, por lo que $\mathscr{F}(\iota_{U,U})\mathscr{F}(1_U) = 1_{\mathscr{F}(U)}$.

Con esto concluimos que $\mathscr{F} : Top_X \to Ring$ es un funtor contravariante (los funtores contravariantes también son conocidos como pregavillas, en particular, este funtor es la pregavilla de anillos de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$).

Ya tenemos la manera de comunicar categorías. Ahora, aunque parezca una exageración, podemos girar más la tuerca y dar una ″función″ entre funtores.

Definición 2.7 *Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ categorías y F, G funtores covariantes de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. Una* ***transformación natural*** $\tau : F \longrightarrow G$ *es una familia*

$$(F(A) \xrightarrow{\tau_A} G(A))_{A \in \mathscr{A}}$$

de morfismos en $\mathscr{B}$ tales que para cada morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathscr{A}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A') & \xrightarrow{\tau_{A'}} & G(A') \end{array} \tag{2.1}$$

Los morfismos τ_A son los ***componentes*** *de τ.*

Ejemplo 2.4 *Si $B \xrightarrow{f} C$ es un morfismo en una categoría $\mathscr{A}$, entonces*

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(C, -) \xrightarrow{\tau_f} \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(B, -),$$

definido por $\tau_f(g) = g \circ f$ es una transformación natural.

Se tiene que probar que si $A \xrightarrow{f} A$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(C,A) & \xrightarrow{\tau_{f,A}} & \mathrm{Mor}(B,A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(C,h)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(B,h)} \\ \mathrm{Mor}(C,A) & \xrightarrow{\tau_{f,A'}} & \mathrm{Mor}(B,A') \end{array} \tag{2.2}$$

conmuta. Esto se reduce a demostrar la siguiente igualdad:

$$\tau_{f,D} \circ \mathrm{Mor}(C,h) = \mathrm{Mor}(B,h) \circ \tau_{f,A}.$$

Esto es,

$$(\tau_{f,D} \circ \mathrm{Mor}(C,h))(g) = (\mathrm{Mor}(B,h) \circ \tau_{f,A})(g),$$

para todo $g \in \mathrm{Mor}(C,A)$, y esto es lo que vamos a demostrar.

Tengamos presente que $h : A \to D$*,* $f : B \to C$ *y*

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{Mor}(C,h) & : & \mathrm{Mor}(C,A) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(C,D) \\ & & g & \longmapsto & h \circ g. \end{array}$$

Sea $g \in \mathrm{Mor}(C,A)$*. Entonces*

$$\begin{aligned} \tau_f \circ \mathrm{Mor}(C,h)(g) &= \tau_f(\mathrm{Mor}(C,h)(g)) \\ &= \tau_f(h \circ g) \\ &= (h \circ g) \circ f. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Mor}(B,h) \circ \tau_f)(g) &= \mathrm{Mor}(B,h)(\tau_f(g)) \\ &= \mathrm{Mor}(B,h)(g \circ f) \\ &= h \circ (g \circ f). \end{aligned}$$

Que era lo que se quería demostrar.

Si las funciones componentes de una transformación natural son todas isomorfismos, entonces la transformación natural recibirá un nombre especial:

Definición 2.8 *Sean* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *categorías,* F, G *funtores entre ellas y* $F \xrightarrow{\tau} G$ *una transformación natural. Si los componentes* τ_A *de la transformación natural son isomorfismos, entonces se dirá que* τ *es un* **isomorfismo natural** *y que* F, G *son* **naturalmente isomorfos.**

El siguiente objeto que introduciremos es el *pullback* (realmente es un objeto con dos morfismos), que puede o no existir en una categoría, pero que de existir, es único salvo isomorfismo [Lei14]. Este objeto nos interesa porque existe en la categoría de haces vectoriales sobre una base B y en la categoría de esquemas de las cuales hablaremos más adelante.

Definición 2.9 *([Lei14]) Consideremos una categoría* $\mathscr{C}$ *y dos morfismos en ella:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

Un **pullback** *o* **producto fibrado** *de este diagrama es un objeto P en $\mathscr{C}$ junto con morfismos $p_1 : P \to X$ y $p_2 : P \to Y$ que hacen conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z, \end{tikzcd}$$

y que además tienen la propiedad de que para cualquier diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z, \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\bar{f} : A \to P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d, "t"] \\ & Y \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd} .$$

es conmutativo.

2.2. Haces vectoriales

En este apartado vamos a hablar sobre los haces vectoriales. El objetivo es presentar la categoría de haces vectoriales sobre una base B, a la que denotaremos por $\mathbf{VB}_B$ y definir el funtor $f^* : \mathbf{VB}_{B_1} \to \mathbf{VB}_{B_2}$, pero primero hablaremos de los fibrados en general. Construiremos la categoría Bun_B de haces sobre una base B y el funtor $f^* : Bun_{B_1} \to Bun_{B_2}$; será en esta última categoría en donde haremos las cuentas.

Las referencias para esta sección son [Hat03] y [Hus66].

Definición 2.10 *Un* **fibrado** ξ *es una tripleta (E, p, B), donde $p : E \to B$ es una función continua entre espacios topológicos. Al espacio B se le llama* **espacio base***, a E el* **espacio total** *y a la función p se le denomina la* **proyección** *del haz. Para cada $b \in B$, al espacio $E_b = p^{-1}(b)$ se le llama la* **fibra** *del haz sobre b.*

A partir de esta definición, podemos intuir que el espacio B de cierta forma está parametrizando a E, y que E puede pensarse como la unión disjunta de las fibras.

Ya tenemos nuestro objeto, ahora definiremos los morfismos entre ellos:

Definición 2.11 *Sean $\xi = (E,p,B)$ y $\eta = (E',p',B')$ dos haces. Un* **morfismo de haces**

$$(u,f):(E,p,B) \longrightarrow (E',p',B')$$

es un par de funciones $u : E \to E'$ y $f : B \to B'$ tales que $p' \circ u = f \circ p$, es decir, que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B'. \end{tikzcd}$$

Por otra parte, un **morfismo de haces sobre** B **(o** B**-morfismo)** *$u : (E,p,B) \to (E',p',B)$ es una función $u : E \to E'$ tal que $1_B \circ p = p' \circ u$, y el diagrama que hacen conmutar es*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd},$$

Observemos que u manda la fibra sobre $b \in B$ en la fibra sobre $f(b) \in B'$: Si $p'(u(E_b)) = f(p(E_b)) = f(b)$, entonces $u(E_b) \subset (p')^{-1}(f(b)) = E'_{f(b)}$.

Si $(u,v) : (E,p,B) \to (E',p',B')$ y $(u',v') : (E',p',B') \to (E'',p'',B'')$ son morfismos de haces, entonces la **composición de** (u',v') **con** (u,v) se define como

$$(u' \circ u, v' \circ v) : (E,p,B) \to (E'',p'',B'').$$

De manera análoga, para B-morfismos $r : (E,p,B) \to (E',p',B)$ y $s : (E',p',B) \to (E'',p'',B)$ se tiene la composición de s con r definida como

$$s \circ r : (E,p,B) \to (E'',p'',B).$$

Ejemplo 2.5 *Sea $\xi = (E, p, B)$ un haz. El morfismo identidad de ξ, 1_ξ, es un B-morfismo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "1_\xi"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

2.2.1. La categoría Bun_B

Con lo anterior podemos definir la **categoría** *Bun*, que tiene como objetos a todos los haces y como morfismos a los morfismos de haces junto con la composición definida anteriormente. Por otra parte, también podemos definir a la **categoría** Bun_B, que tiene como objetos a todos los haces cuyo espacio base es el conjunto B y los morfismos en esta categoría son los B-morfismos.

Dada una función $f : B_2 \to B_1$ vamos a construir el funtor $f^* : Bun_{B_1} \to Bun_{B_2}$, que es llamado el **pullback de** f.

Tomamos un objeto $\xi = (E, p, B_1)$ en Bun_{B_1}. Definimos el conjunto

$$f^*E := \{(b_2, x) \in B_2 \times E | f(b_2) = p(x)\}$$

y la función

$$\begin{array}{rcccl} f^*p & : & f^*E & \to & B_2 \\ & & (b_2, x) & \mapsto & b_2. \end{array}$$

Con esto hacemos

$$f^*(\xi) := (f^*E, f^*p, B_2).$$

Ahora, consideremos dos fibrados $\xi_1 = (E_1, p_1, B_1)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B_1)$ y un B_1-morfismo $u : \xi_1 \to \xi_2$:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B_1 & \end{tikzcd},$$

con $\xi_1 = (E_1, p_1, B_1)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, B_1)$. Definimos $f^*u : f^*\xi_1 \to \xi_2$ haciendo

$$\begin{array}{rcccl} f^*u & : & f^*E_1 & \to & f^*E_2 \\ & & (b_2, x) & \to & (b_2, u(x)). \end{array}$$

Comprobaremos que f^*u es un B_2-morfismo, lo cual se reduce a verificar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} f^*E_1 \arrow[rr, "f^*u"] \arrow[dr, "f^*p_1"'] & & f^*E_2 \arrow[dl, "f^*p_2"] \\ & B_1 & \end{tikzcd},$$

es decir, vamos a mostrar que $f^*p_1 = f^*p_2 \circ f^*u$. Entonces, sea $(b_2, x) \in f^*E_1$, luego

$$\begin{aligned} (f^*p_1 \circ f^*u)(b_2,x) &= f^*p_2(f^*u(b_2,x)) \\ &= f^*p_2(b_2,u(x)) \\ &= b_2 \\ &= f^*p_1(b_2,x). \end{aligned}$$

En consecuencia f^*u es un B_1-morfismo.

De manera directa se demuestra que $f^*Id_\xi = Id_{f^*\xi}$.

Por último veremos que f^* abre composiciones. Sean $r : (E,p,B_1) \to (E',p',B_1)$ y $s : (E',p',B_1) \to (E'',p'',B)$ B_1-morfismos, y $s \circ r : (E,p,B_1) \to (E'',p'',B_1)$ su composición. Queremos ver que $f^*(s \circ r) = f^*s \circ f^*r$. Esto se verifica directamente: sea $(b,x) \in f^*E$. Entonces

$$\begin{aligned} (f^*s \circ f^*r)((b,x)) &= f^*s((b,r(x))) \\ &= (b,s(r(x))) \\ &= f^*(s \circ r)((b,x)). \end{aligned}$$

Puesto de manera gráfica, cada vez que tenemos un diagrama conmutativo en Bun_{B_1}

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p_1"'] & E_2 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p_2"] & E_3 \arrow[dl, "p_3"] \\ & B_1, & \end{tikzcd}$$

el funtor f^* induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^*E_1 \arrow[r, "f^*r"] \arrow[dr, "f^*p_1"'] & f^*E_2 \arrow[r, "f^*s"] \arrow[d, "f^*p_2"] & f^*E_3 \arrow[dl, "f^*p_3"] \\ & B_2, & \end{tikzcd}$$

en Bun_{B_2}.

Ahora especializaremos la construcción anterior, ya que un haz vectorial es un haz con una estructura adicional de espacio vectorial en las fibras. La idea detrás de este objeto es una generalización del espacio tangente: si consideramos una circunferencia (en $\mathbb{R}^2$), a cada punto en la circunferencia se le puede asociar un espacio vectorial, a saber, la recta tangente en dicho punto. Entonces nuestro haz tiene como espacio base a la circunferencia, el espacio total es la unión disjunta de las rectas tangentes y la función entre ellos es la que manda cada recta tangente en su punto de tangencia.

Definición 2.12 *Sea $k = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Un* **haz vectorial n-dimensional** ξ *en el campo k es un haz (E,p,B) junto con la estructura de k-espacio vectorial n-dimensional sobre cada fibra $p^{-1}(b)$ tal que se satisface la siguiente condición de trivialidad local: cada punto $b \in B$ tiene una vecindad abierta U y un U-isomorfismo $h : U \times k^n \to p^{-1}(b)$ de manera que la restricción $\{b\} \times k^n \to p^{-1}(b)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $b \in B$.*

La estructura de espacio vectorial en $\{b\} \times k^n$ está dada por

$$(b,a_1)+(b,a_2) = (b,a_1+a_2) \quad \text{para todos } (b,a_1),(b,a_2) \in \{b\} \times k^n$$
$$c \cdot (b,a_1) = (b,ca_1) \quad \text{para todo } (b,a_2) \in \{b\} \times k^n \text{ y } c \in k$$

Sean $\xi = (E,p,B)$ y $\xi' = (E',p',B')$ dos haces vectoriales. Un **morfismo de haces vectoriales** es un morfismo de haces $(u,f) : \xi \to \xi'$ tal que la restricción $u : p^{-1}(b) \to p^{-1}(f(b))$ es una transformación lineal para cada $b \in B$.

Cuando dos haces vectoriales tienen el mismo espacio base B, por decir, $\xi = (E,p,B)$ y $\xi' = (E',p',B)$, se define un **B-morfismo de haces vectoriales** como un B-morfismo de haces para el cual la restricción $u : p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$ es una transformación lineal.

Como antes, la colección de haces vectoriales con los morfismos (de haces vectoriales en un campo k) y la composición forman una categoría, a la que denotamos por $\mathbf{VB}^k$. Por su parte, la colección de haces vectoriales sobre el espacio B junto con los B-morfismos y sus composiciones forma una categoría, la categoría $\mathbf{VB}^k_B$.

Además, si $f : B_2 \to B_1$ es una función continua y ξ es un haz vectorial sobre B_1, entonces $f^*\xi$ admite una estructura de haz vectorial y $f^* : \mathbf{VB}_{B_1} \to \mathbf{VB}_{B_2}$ es un funtor ([Hus66]).

2.3. Gavillas y Esquemas

Pensemos en lo siguiente: consideremos la recta real como un espacio topológico (con la topología euclidiana). Luego, supongamos que tenemos dos abiertos no disjuntos A y B en $\mathbb{R}$, que tenemos dos funciones continuas $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ y que ambas funciones coinciden en su intersección: $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Entonces sabemos, por el lema del pegado, que tenemos una función continua F en $A \cup B$ definida por $F(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $F(x) = g(x)$ si $x \in B$ (Véase Cap. 2, Secc.18 de [Mun00]). Que esta función esté bien definida es consecuencia de que $f(A\cap B) = g(A\cap B)$. Pero además, cada abierto U de $\mathbb{R}$ está en relación con un anillo: el anillo de funciones continuas que van de U en $\mathbb{R}$. Entonces a cada abierto se le puede asignar un anillo. Esto último permite *parametrizar u ordenar* un conjunto de anillos, como lo podría hacer un conjunto de índices, con la diferencia de que un conjunto de índices no tiene una topología subyacente.

De aquí se rescatan varias ideas: la primera es que una topología puede funcionar como un conjunto de índices, la segunda es que cada vez que tenemos una contención de abierto en la topología, esto va a relacionar a los respectivos anillos, y por último, que podemos pegar cosas de manera local para definir, de manera única, algo global. Esto se formaliza con la definición de gavilla.

Definición 2.13 *[SP23] Sea X un espacio topológico. Una* **gavilla de anillos sobre** *X es una asignación que cumple con lo siguiente:*

1. *a cada abierto $U \subset X$ se le asigna un anillo $\mathscr{F}(U)$;*
2. *a cada inclusión $V \subset U$ una función*

$$\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V),$$

que satisface

a) $\rho_{UU} = id_{\mathscr{F}(U)}$ *y*

b) *siempre que se tengan las contenciones $W \subset V \subset U$ se cumple $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$. Por último,*

3. *dada cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y cualquier colección $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ con $i \in I$ que satisfagan*

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \tag{2.3}$$

para cualesquiera $i, j \in I$, entonces existe una única $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_i = \rho_{UU_i}(s)$ para todo $i \in I$.

Algunos comentarios:

- Si en la definición anterior solo se cumplen los primeros dos puntos, entonces lo que tenemos es una **pregavilla**.
- Así como hay gavillas de anillos, también hay gavillas de conjuntos, grupos, etc.
- Los elementos del conjunto $\mathscr{F}(U)$ son llamados **secciones** de $\mathscr{F}$ sobre U. Para cada $V \subset U$ la función $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ es llamada **función restricción**.

Notación: Escribiremos $s|_V$ en lugar de $\rho_{UV}(s)$ si $s \in \mathscr{F}(U)$.

Una vez dado el concepto de gavillas, tenemos que definir los morfismos entre ellas:

Un **morfismo** $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ **de gavillas de anillos sobre** X es una regla que asigna a cada abierto $U \subset X$ un morfismo de anillos $\phi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ que es compatible con la restricción de funciones. Es decir, siempre que $V \subset U \subset X$ sean abiertos, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathscr{G}(U) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \rho_{UV}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_{UV}} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathscr{G}(V) \end{array} \tag{2.4}$$

conmuta.

No toda pregavilla es una gavilla; pero hay una forma de asociar a una pregavilla una gavilla que "mejor" se le aproxime. Una de las razones por las que nos interesa este resultado-definición, es porque queremos dar una noción de imagen de morfismo de gavillas, y queremos que dicha imagen sea, nuevamente, una gavilla.

Proposición 2.1 *([Har13]) Dada una pregavilla $\mathscr{F}$, existe una gavilla $\mathscr{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, con la propiedad de que para cualquier gavilla $\mathscr{G}$ y cualquier morfismo $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, existe un único morfismo $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que $\phi = \psi \circ \theta$. Además, el par $(\mathscr{F}, \theta)$ es único salvo isomorfismo.*

$\mathscr{F}^+$ *es llamada la* **gavilla asociada a la pregavilla** $\mathscr{F}$.

Un conjunto abierto U de un espacio topológico X puede considerarse, también, un espacio topológico con la *topología de subconjunto* ([Mun00]). A partir de este hecho, podemos definir la restricción de una (pre)gavilla: dada una pregavilla $\mathscr{F}$ sobre un espacio topológico X y un abierto $U \subset X$, vamos a definir la **restricción de** $\mathscr{F}$ en U haciendo $\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(V)$ para todo abierto $V \subset U$. Los morfismos restricción de $\mathscr{F}|_U$ son los mismos que los de $\mathscr{F}$. Además, si $\mathscr{F}$ es una gavilla, entonces su restricción $\mathscr{F}|_U$ también es una gavilla ([Eis00]).

Ya hemos visto que una gavilla asocia a cada abierto de una topología una estructura, y podemos preguntarnos si a cada punto del espacio se le puede asignar algo. La respuesta es sí:

Definición 2.14 *([Eis00]) Consideremos una gavilla $\mathscr{F}$ sobre el espacio X y $x \in X$. El* **tallo de la gavilla** $\mathscr{F}$ **en el punto** *x, que denotamos por $\mathscr{F}_x$, se define como*

> *El conjunto de las uniones disjuntas de los $\mathscr{F}(U)$ (en donde U es una vecindad abierta de x), junto con la relación de equivalencia siguiente: $\sigma \sim \tau$, si $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ y $\tau \in \mathscr{F}(V)$, y existe una vecindad de x, W, tal que $W \subset U \cap V$ y*
>
> $$\sigma|_W = \sigma|_V.$$

En símbolos:

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U),$$

o en la forma abreviada $\mathscr{F}_x = \lim\limits_{x \in U} \mathscr{F}(U)$.

De hecho, los tallos nos pueden decir cosas acerca de las gavillas. Por ejemplo, dado un morfismo de gavillas $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ (ambas gavillas sobre X), tenemos un morfismo inducido en los tallos $\phi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$. Luego, ϕ es un isomorfismo, si y solo si, ϕ_x es un isomorfismo para todo $x \in X$. ([Har13]).

Ahora introduciremos la noción de esquema, que puede entenderse como una generalización del espacio de soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas. Una mejora con respecto a estos últimos, es que no solo considera el espacio (topológico), sino que también considera todas las funciones 'relevantes' que pueden definirse en dicho espacio, esto se logra mediante el uso de gavillas. En la definición que presentamos omitimos cierta información relacionada con los morfismos de espacios localmente anillados; para una exposición más completa puede consultarse [Har13].

Recordemos que el espectro de un anillo R, $Spec(R)$, es el conjunto de ideales primos de un anillo equipado con la topología de Zariski. Un **espacio anillado** es un par $(X, \mathscr{O}_X)$ es donde X es un espacio topológico y $\mathscr{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X. Un espacio anillado es un **espacio localmente anillado** si para cada $p \in X$ el tallo $\mathscr{O}_{X,p}$ es un anillo local.

Definición 2.15 *Un* **esquema afín** *es un espacio localmente anillado de la forma $(X, \mathscr{O}_X)$, donde $X = Spec(R)$ y $\mathscr{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X, para algún anillo R. Un* **esquema** *es un espacio localmente anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ en el que, para cada punto $p \in X$, existe un abierto $U \subset X$ tal que cuando se restringe $\mathscr{O}_X$ en U, $\mathscr{O}_X|_U$, el par $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ es un esquema afín. Es decir, un esquema es un espacio localmente anillado que es localmente afín.*

Aunque la definición es mucho más técnica que la de gavillas, podemos dar un ejemplo sencillo de esquema y que, de hecho, será relevante para entender la construcción del funtor de Grassmann que se hará en el último capítulo.

Ejemplo 2.6 *El espacio topológico que consideraremos es $X = Spec(k)$, donde k es un campo. Como un campo solo tiene un ideal primo, el ideal cero, entonces $X = Spec(k) = \{pt\}$. Ahora, la* *gavilla $\mathscr{O}_X$ queda definida por*

$$\mathscr{O}_X(X) = k$$
$$\mathscr{O}_X(\emptyset) = el\ anillo\ trivial.$$

Este par es un espacio localmente anillado porque

$$\mathscr{O}_{X,pt} = \varinjlim_{pt \in U} \mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_X(X) = k,$$

y k solo tiene un ideal primo, que por tanto también es máximo. En consecuencia, $\mathscr{O}_{X,pt}$ es un anillo local y concluimos que $(X, \mathscr{O}_X)$ es un esquema afín.

En el ejemplo anterior vimos que $\mathscr{O}_{X,pt} = k$, lo cual fue sencillo de calcular pero no siempre será así. Por ello es pertinente tener en cuenta que para $(X, \mathscr{O}_X)$, donde $X = Spec(R)$ para algún anillo R, tenemos

$$\mathscr{O}_{X,x} \simeq R_x$$
$$\mathscr{O}(X) \simeq R,$$

donde R_x es la localización en x. Notar que aquí x es un ideal primo de R ([Har13]).

2.3.1. Gavillas de módulos

En este apartado daremos una serie de definiciones y resultados acerca de las gavillas de módulos. Las referencias de este apartado son [Har13] y [SP23].

Primero diremos a qué nos referimos con gavillas de módulos. Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Una **gavilla de $\mathscr{O}_X$-módulos** (o simplemente un $\mathscr{O}_X$-módulo) es una gavilla $\mathscr{F}$ de grupos abelianos sobre X tal que para cada abierto $U \subset X$, $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{O}_X(U)$-módulo, y para cada inclusión de abiertos $V \subset U$, el homomorfismo restricción es compatible con la estructura de módulo vía el homomorfismo de anillos $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$; esto es, cuando restringimos el $\mathscr{O}_X(U)$-módulo $\mathscr{F}(U)$ en V, tenemos un $\mathscr{O}_X(V)$-módulo $\mathscr{F}(V)$.

Un **morfismo** $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ **de gavillas de** $\mathscr{O}_X$**-módulos** es un morfismo de gavillas tal que para cada abierto $U \subset X$ el mapeo $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos.

Dado un esquema X, el conjunto de los $\mathscr{O}_X$-módulos con sus morfismos forman una categoría. Además, la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos es una **categoría preaditiva**, lo cual significa que cada conjunto $\mathrm{Mor}(A,B)$ está equipado con una estructura de grupo abeliano de tal manera que la composición

$$\mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) \to \mathrm{Mor}(A,C)$$

es bilineal [SP23].
Así como existe una noción de imagen inversa de una función, también existe cierta noción de imagen inversa de una gavilla, aunque esta última requiera un poco más de cuidado. A continuación mencionamos cómo se llega a la definición.

Vamos a pensar en una función continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$. Dada una gavilla $\mathscr{G}$ sobre Y, se define la **gavilla imagen inversa** $f^{-1}\mathscr{G}$ **sobre** X como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathrm{lím}_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(V)$, donde U es cualquier abierto en X y el límite se toma sobre todos los abiertos $V \subset Y$ que contienen a $f(U)$.

Definidos $f^{-1}\mathscr{F}$ y $f^{-1}\mathscr{G}$, lo siguiente será definir morfismos entre ellos. Dado un morfismo $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de gavillas definiremos el morfismo $f^{-1}\alpha : f^{-1}\mathscr{F} \to f^{-1}\mathscr{G}$ (seguimos con la f del párrafo anterior). Para un abierto $U \subset X$, hacemos

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & \underset{V \supset f(U)}{\mathrm{lím}} \mathscr{F}(V) & \to & \underset{V \supset f(U)}{\mathrm{lím}} \mathscr{G}(V) \\ & & [(V,p)] & \mapsto & [(V, \alpha(V)(p))], \end{array}$$

en donde $\alpha(V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$, $V \supset f(U)$ y $p \in \mathscr{F}(V)$, por lo que $\alpha(V)(p) \in \mathscr{G}(V)$. Luego, utilizamos la proposición 2.1 para obtener

$$\begin{tikzcd} \mathrm{lím}\,\mathscr{F} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr] & \mathrm{lím}\,\mathscr{G} \arrow[r] & (\mathrm{lím}\,\mathscr{G})^+ = f^{-1}\mathscr{G} \\ & & (\mathrm{lím}\,\mathscr{F})^+ = f^{-1}\mathscr{F}, \arrow[u, dashed, "\exists!\theta"'] \end{tikzcd}$$

Finalmente, hacemos $f^{-1}\alpha := \theta$.

Sea $\mathscr{G}$ una gavilla de $\mathscr{O}_Y$-módulos. Entonces $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo. Por la propiedad de adjunción de f^{-1}, se tiene un morfismo $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ de gavillas de anillos sobre X. Se define $f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ ([Har13]). Así, por la bilinealidad del producto tensorial, $f^*\mathscr{G}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo al cual se le denomina la **imagen inversa de $\mathscr{G}$ por el morfismo f**.

Con estos ingredientes construimos un funtor entre la categoría de $\mathscr{O}_S$-módulos y la categoría de $\mathscr{O}_T$-módulos: consideremos un morfismo de esquemas $f : (\mathscr{O}_T, T) \to (\mathscr{O}_S, S)$. Definimos el funtor f^* que va de la categoría de $\mathscr{O}_S$-módulos a la categoría de $\mathscr{O}_T$-módulos:

- f^* manda el $\mathscr{O}_S$-módulo $\mathscr{F}$ al $\mathscr{O}_T$-módulo $f^*\mathscr{F} := f^{-1}\mathscr{F} \bigotimes_{f^{-1}\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T$,
- y un morfismo $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_S$-módulos lo relaciona con el morfismo de $\mathscr{O}_T$-módulos:

$$f^*\alpha : f^*\mathscr{G} \to f^*\mathscr{F},$$

donde $f^*\alpha := f^{-1}\alpha \bigotimes Id_T$.

Tengamos presente que partimos de un morfismo de esquemas y acabamos con un funtor entre las categorías de $\mathscr{O}_S$-módulos y de $\mathscr{O}_T$-módulos. Podemos expresarlo con un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(f^*\mathscr{G} \arrow[r, "f^*\alpha"] \arrow[dr] & f^*\mathscr{G}) \arrow[d] & (\mathscr{F} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathscr{G}) \arrow[dl] \\
 & T \arrow[r, "f"] & S &
\end{tikzcd}$$

Dado un morfismo de gavillas $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, definimos la imagen de ϕ, imϕ, como la gavilla asociada a la pregavilla imagen de ϕ. Decimos que el morfismo ϕ es suprayectivo si im$\phi = \mathscr{G}$.

Consideremos dos morfismos suprayectivos de gavillas $q : \mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \to Q$ y $q' : \mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \to Q'$. Podemos definir un morfismo de suprayecciones entre q y q' como un morfismo $\alpha : Q \to Q'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "Id"] & Q \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \arrow[r, "q'"] & Q'
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.7 *Consideremos al esquema $S = Spec(\mathbb{R})$ con su gavilla estructural $\mathscr{O}_S$ y supongamos que Q es un $\mathscr{O}_S$-módulo. Como espacio topológico, S tiene solamente dos abiertos, el total y el vacío. Recordemos que por definición de la gavilla estructural, $\mathscr{O}_S(S) = \mathbb{R}$ y $\mathscr{O}_S(\emptyset) = \{0\}$ es el anillo trivial. Entonces para un abierto $U \subset S$ tenemos dos opciones: $Q(U)$ es un $\mathbb{R}$-módulo, o bien, $Q(U)$ es el espacio vectorial trivial. De la misma forma, $\mathscr{O}_S^{\bigoplus n}(U) = \mathbb{R}^n$ o bien, $\mathscr{O}_S^{\bigoplus n}(U)$ es el espacio vectorial trivial.*

Además, si consideramos dos suprayecciones (de gavillas) $q : \mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \to Q$ y $q' : \mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \to Q'$ (donde Q y Q' son $\mathscr{O}_S$-módulos localmente libres, finitos de rango $n-k$), para $U = S$ obtenemos transformaciones lineales $q(U)$ y $q'(U)$, cuyos contradominios serán $\mathbb{R}$-módulos localmente libres, finitos de rango $n-k$, es decir, espacios vectoriales de dimensión $n-k$, o bien, si $U = \emptyset$, $q(U)$ y $q'(U)$ serán transformaciones lineales entre espacios vectoriales triviales.

Luego, dado un morfismo de suprayecciones, α, para $U = S$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{q(S)} & Q(S) \\ \big\downarrow{\scriptstyle Id} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{q'(S)} & Q'(S), \end{array}$$

de espacios vectoriales y transformaciones lineales.

Terminaremos este capítulo con una serie de definiciones y resultados:

Definición 2.16 *Sean $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathscr{O}_X$-módulos.*

- *Decimos que $\mathscr{F}$ es* **localmente libre** *si para cada punto $x \in X$ existe un conjunto I y una vecindad abierta $U \subset X$, con $x \in X$ tal que $\mathscr{F}|_U$ es isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} \mathscr{O}_X|_U$ como un $\mathscr{O}_X|_U$-módulo.*
- *Si puede escogerse el conjunto I con cardinalidad r, entonces se dirá que $\mathscr{F}$ es* **localmente libre y (finito) de rango** *r.*
- *$\mathscr{F}$ es de* **tipo finito** *si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $\mathscr{F}|_U$ está generado por un número finito de secciones.*

Lema 2.1 *Sea $(f, f^\sharp) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados, $\mathscr{G}$ una gavilla de $\mathscr{O}_Y$-módulos y $x \in X$. Entonces*

$$(f^*\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,f(x)}} \mathscr{O}_{X,x},$$

como un $\mathscr{O}_{X,x}$- módulo, donde el producto tensorial de la derecha utiliza $f_x^\sharp : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$.

Lema 2.2 *Sean $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, $r \geq 0$ y $\varphi : F \to G$ un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos libres localmente finitos de rango r. Entonces φ es un isomorfismo si y solo si φ es sobreyectiva.*

Lema 2.3 *Sean X un espacio anillado, $\varphi : G \to F$ un homomorfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos y $x \in X$. Si F es de tipo finito y el mapeo en los tallos $\varphi_x : G_x \to F_x$ es suprayectivo. Entonces existe una vecindad abierta $U \subset X$, con $x \in U$ tal que $\varphi|_U$ es suprayectiva.*

Capítulo 3

FUNTORES REPRESENTABLES Y PROBLEMAS MODULI

En este capítulo proporcionaremos las definiciones relativas a los funtores representables y se presentarán algunos ejemplos. Después se enunciará un resultado central en la teoría de categorías: el lema de Yoneda. Posteriormente analizaremos los problemas moduli y cómo éstos se pueden definir de manera más formal utilizando el lenguaje de las categorías.

Las definiciones y los resultados relativos a funtores representables han sido obtenidos principalmente de [Mac13], [Fan05] y [Lei14]. En cuanto a los problemas y espacios moduli, la bibliografía básica es [New78].

3.1. Sobre funtores representables

Los morfismos juegan un papel muy importante dentro de una categoría. Este capítulo bien puede ser un estudio de los funtores $\mathrm{Mor}(-,A)$, o de lo que se puede deducir acerca de los morfismos. Vamos a estudiar a los funtores $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathit{Set}$ que son isomorfos a un funtor de la forma $\mathrm{Mor}(-,A)$, para algún $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$.

Definición 3.1 *Un funtor $\mathscr{F} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathit{Set}$ contravariante se llamará* **representable** *(por un objeto A en $\mathscr{A}$) siempre que $\mathscr{F}$ sea naturalmente isomorfo al funtor $\mathrm{Mor}(-,A) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathit{Set}$.*

Nota: *La definición de funtor representable que hemos dado es para funtores contravariantes, pero puede darse también para funtores covariantes cambiando* $\mathrm{Mor}(-,A)$ *por* $\mathrm{Mor}(A,-)$*. La mayoría de los resultados y definiciones siguientes serán dados para el caso contravariante, aunque lo mismo es válido para los funtores covariantes, haciendo el cambio necesario.*
Una implicación inmediata de la definición es que para cada objeto X en $\mathscr{C}$ tenemos una biyección $\mathscr{F}(X) \simeq \mathrm{Mor}(X,A)$. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Consideremos al funtor olvidadizo*

$$\mathscr{F} : Vec_{\mathbb{R}} \to Set.$$

Mostraremos que existe un isomorfismo natural entre $\mathscr{F}$ *y* $\mathrm{Mor}(\mathbb{R},-)$*. Haciendo la observación de que toda función lineal* $T : \mathbb{R} \to V$ *cumple* $T(r) = rT(1)$*, basta con decir quién es* $T(1)$ *para que la función lineal quede determinada. Así, la transformación natural* α *que se propone está definida por*

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_V & : & \mathscr{F}(V) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathbb{R},V) \\ & & v & \longmapsto & T_v, \end{array}$$

en donde T_v *es una transformación lineal que cumple que* $T(1) = v$*.*
Luego, sea

$$\begin{array}{rcccl} \beta_V & : & \mathrm{Mor}(\mathbb{R},V) & \longrightarrow & \mathscr{F}(V) \\ & & T & \longmapsto & T(1). \end{array}$$

Como $(\beta_V \circ \alpha_V)(v) = v$ *y* $(\alpha_V \circ \beta_V)(T) = T$*, tenemos que* α_V *es una función biyectiva para cualquier* V*, luego, la transformación natural* α *es un isomorfismo natural y por consiguiente* $\mathscr{F}$ *es un funtor que está representado por* $\mathbb{R}$*.*

Resaltamos la biyección $\mathscr{F}(V) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbb{R},V)$ *para cada objeto* V*: hay tantas transformaciones lineales* $\mathbb{R} \to V$ *como elementos en* $\mathscr{F}(V)$*, o bien, tantas como vectores en* V*.*

3.2. Lema de Yoneda

Como hemos dicho antes, el lema de Yoneda es muy importante en la teoría de categorías. Veremos más adelante que nos dice cuántas transformaciones naturales hay entre un funtor $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to Set$ y

$\mathrm{Mor}(-,A) : \mathscr{A} \to Set$, y a partir de aquí obtendremos resultados bastante interesantes, por ejemplo, que un objeto queda determinado por los morfismos que llegan a o salen de él.
Comenzamos esta sección con una proposición importante acerca de las transformaciones naturales.

Proposición 3.1 *Para cualquier funtor contravariante $\mathscr{F} : \mathscr{A} \longrightarrow Set$, cualquier objeto $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y cualquier elemento $a \in \mathscr{F}(A)$, existe una única transformación natural $\tau : \mathrm{Mor}(-,A) \longrightarrow \mathscr{F}$ con $\tau_A(1_A) = a$*

Demostración: Para cualquier objeto B en $\mathscr{A}$ definimos una función

$$\begin{array}{rccc} \tau_B & : & \mathrm{Mor}(B,A) & \to & \mathscr{F}(B) \\ & & f & \mapsto & \mathscr{F}(f)(a). \end{array}$$

Notemos que $f : B \to A$ y $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$ (pues $\mathscr{F}$ es contravariante), por lo que $\mathscr{F}(f)(a) \in \mathscr{F}(B)$ y entonces la función τ_B está bien definida. Queremos construir una transformación natural τ cuyos morfismos componentes son las funciones τ_B. Para ello, consideramos el morfismo $h : C \to B$ en $\mathscr{A}$ y verificamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(B,A) \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(h,A)"] & \mathscr{F}(B) \arrow[d, "\mathscr{F}(h)"] \\ \mathrm{Mor}(C,A) \arrow[r, "\tau_C"] & \mathscr{F}(C). \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Tengamos presente que $\mathscr{F}(h) \circ \tau_B$ y $\tau_C \circ \mathrm{Mor}(h,A)$ son funciones entre conjuntos y para mostrar que son iguales, debemos ver que tienen el mismo dominio y contradominio (lo cual es evidente) y regla de correspondencia. Comprobaremos esto último.

Por una parte

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}(h) \circ \tau_B)(f) &= \mathscr{F}(h)(\mathscr{F}(f)(a)) \\ &= (\mathscr{F}(h) \circ \mathscr{F}(f))(a) \\ &= \mathscr{F}(f \circ h)(a), \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}(\tau_C \circ \mathrm{Mor}(h,A))(f) &= \tau_C(\mathrm{Mor}(h,A)(f))\\ &= \tau_C(f \circ h)\\ &= \mathscr{F}(f \circ h)(a).\end{aligned}$$

Así, $\mathscr{F}(h) \circ \tau_B = \tau_C \circ \mathrm{Mor}(h,A)$ y por consiguiente el diagrama 3.1 conmuta. En consecuencia, τ es una transformación natural.

Observemos también que $\tau_A(1_A) = \mathscr{F}(1_A)(a) = 1_{\mathscr{F}(A)}(a) = a$. Ya encontramos la transformación natural que cumple la condición del enunciado, falta probar que es única. Supongamos que $\delta : \mathrm{Mor}(-,A) \to \mathscr{F}$ es otra transformación natural que satisface $\delta_A(1_A) = a$. Probaremos que $\delta_B = \tau_B$ para cualquier objeto B en $\mathscr{A}$, concluyendo así que $\delta = \tau$ y que por lo tanto τ es única. Consideramos un morfismo $g : B \to A$ y el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(A,A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(g,A)"] & \mathscr{F}(A) \arrow[d, "\mathscr{F}(g)"] \\ \mathrm{Mor}(B,A) \arrow[r, "\delta_B"] & \mathscr{F}(B). \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

De la conmutatividad del diagrama tenemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(g)(a) = \mathscr{F}(g)(\delta_A(1_A)) &= (\mathscr{F}(g) \circ \delta_A)(1_A)\\ &= (\delta_B \circ \mathrm{Mor}(g,A))(1_A)\\ &= \delta_B(1_A \circ g)\\ &= \delta_B(g).\end{aligned}$$

Pero como $\tau_B(g) = \mathscr{F}(g)(a)$, entonces $\tau_B(g) = \delta_B(g)$, y eso se puede probar para cualesquiera $g \in \mathrm{Mor}(B,A)$ y objeto B en $\mathscr{A}$, por lo que se concluye que $\delta = \tau$. Con esto se termina la demostración. □

El lema de Yoneda se sigue de manera inmediata de la proposición anterior. Aunque para enunciarlo introduciremos un poco de notación: dado un objeto A en una categoría $\mathscr{A}$ y $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to Set$ un funtor contravariante, se denotará por $[\mathrm{Mor}(-,A), \mathscr{F}]$ al conjunto de todas las transformaciones naturales de $\mathrm{Mor}(-,A)$ en $\mathscr{F}$.

Corolario 3.1 (Lema de Yoneda) *Si $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to Set$ es un funtor y A es un objeto de $\mathscr{A}$, entonces la función*

$$\begin{array}{rcccc} Y & : & [\mathrm{Mor}(-,A),\mathscr{F}] & \longrightarrow & \mathscr{F}(A) \\ & & \sigma & \longmapsto & \sigma_A(1_A), \end{array} \tag{3.3}$$

es una función biyectiva.

A partir de este resultado vamos a buscar una forma de *encajar* una categoría $\mathscr{A}$ en otra categoría más grande, y la manera de hacerlo será *convertir* a los objetos de $\mathscr{A}$ en funtores mediante $\mathrm{Mor}(-,A)$. Comenzamos definiendo a la categoría $Fun(\mathscr{A}^{op}, Set)$ que tiene por objetos a todos los funtores que van de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ en Set y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Luego, sean A, A' objetos en $\mathscr{A}^{op}$ y $f : A \to A'$ un morfismo (en $\mathscr{A}^{op}$). Se define el funtor

$$\mathscr{Y} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow Fun(\mathscr{A}^{op}, Set),$$

mediante

$$\mathscr{Y}(A \xrightarrow{f} B) = \mathrm{Mor}(-,A) \xrightarrow{\sigma_f} \mathrm{Mor}(-,B),$$

donde $\sigma_f(g) = f \circ g$. Al funtor $\mathscr{Y}$ se le llama **encaje de Yoneda**.

Dado un funtor covariante $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y A, A' objetos en $\mathscr{A}$, vamos a definir **la restricción del funtor** $\mathscr{F}$ en $\mathrm{Mor}(A,A')$, como

$$\begin{array}{rcccc} \mathscr{F}_{A,A'} & : & \mathrm{Mor}(A,A') & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(A')) \\ & & f & \longmapsto & \mathscr{F}(f), \end{array}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcccc} \mathscr{F}_{A,A'} & : & \mathrm{Mor}(A,A') & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathscr{F}(A'),\mathscr{F}(A)) \\ & & f & \longmapsto & \mathscr{F}(f), \end{array}$$

si $\mathscr{F}$ es contravariante.

Definición 3.2 *Diremos que*

1. *$\mathscr{F}$ es* **fiel** *si $\mathscr{F}_{A,A'}$ es inyectiva para todo* $\mathrm{Mor}(A,A')$
2. *$\mathscr{F}$ es* **pleno** *si $\mathscr{F}_{A,A'}$ es suprayectiva para todo* $\mathrm{Mor}(A,A')$.

Corolario 3.2 *Para cualquier categoría $\mathscr{A}$, el funtor de Yoneda*

$$\mathscr{Y} : \mathscr{A} \to Fun(\mathscr{A}^{op}, Set)$$

es un funtor fiel y pleno.

Demostración: Aplicamos el Lema de Yoneda al funtor $\mathrm{Mor}(-,A)$ y tenemos la biyección

$$[\mathrm{Mor}(-,A), \mathrm{Mor}(-,A')] \simeq \mathrm{Mor}(A',A).$$

(Para el caso covariante tenemos $[\mathrm{Mor}(A,-), \mathrm{Mor}(A',-)] \simeq \mathrm{Mor}(A,A')$). □

Este teorema es la razón por la cual al funtor de Yoneda, $\mathbb{Y}$, también se le conoce como *Encaje de Yoneda.*

Si en el teorema anterior hacemos $\mathscr{B} = Fun(\mathscr{A}^{op}, Set)$ y consideramos un objeto $\mathscr{F}$ en $\mathscr{B}$ entonces

$$\mathscr{Y}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mor}(-,\mathscr{F}) : \mathscr{B} \to Set,$$

así, de manera trivial $\mathscr{Y}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mor}(-,\mathscr{F})$ es un funtor representable, por lo que una interpretación del teorema 3.2 es que todo funtor es representable cuando se extiende a la categoría adecuada ([Fan05]).

Por otra parte, los funtores representables también nos dicen algo acerca del objeto que los representa:

Corolario 3.3 *Consideremos un funtor contravariante $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to Set$. Si $Mor(-,X) \simeq \mathscr{F} \simeq Mor(-,Y)$, entonces $X \simeq Y$.*

Demostración: La demostración consistirá en encontrar morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$, es decir, probar que existe un isomorfismo entre X y Y. En principio de cuentas no sabemos cuál es el isomorfismo natural que hay entre $\mathrm{Mor}(-,X)$ y $\mathrm{Mor}(-,Y)$, pero sabemos que para todo objeto A en $\mathscr{A}$ existe una biyección $\mathrm{Mor}(A,X) \simeq \mathrm{Mor}(A,Y)$. Denotemos al isomorfismo natural por $\tau : \mathrm{Mor}(-,X) \to \mathrm{Mor}(-,Y)$ y por $\tau^{-1} : \mathrm{Mor}(-,Y) \to \mathrm{Mor}(-,X)$ a su inversa. En particular tenermos las biyecciones

$$\tau_Y^{-1} : Mor(Y,Y) \to Mor(Y,X) \tag{3.4}$$

y

$$\tau_X : Mor(X,X) \to Mor(X,Y), \tag{3.5}$$

Por la segunda sabemos que existe un único morfismo $g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ tal que $\tau_X(1_X) = g$ y por la primera tenemos un único $f \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ tal que $\tau_Y^{-1}(1_Y) = f$.

Por otra parte (seguimos considerando $g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ y $f \in \mathrm{Mor}(Y,X)$), notemos que la transformación natural $\mathrm{Mor}(-,g) : \mathrm{Mor}(-,X) \to \mathrm{Mor}(-,Y)$ definida por

$$\mathrm{Mor}(Z,g)(h) = g \circ h,$$

para todo objeto Z en $\mathscr{A}$ y $h \in \mathrm{Mor}(Z,X)$ satisface

$$\mathrm{Mor}(X,g)(1_X) = g \circ 1_X = g = \tau_X(1_X).$$

Mientras que la transformación natural $\mathrm{Mor}(-,f) : \mathrm{Mor}(-,Y) \to \mathrm{Mor}(-,X)$ definida por

$$\mathrm{Mor}(Z,f)(h) = f \circ h$$

cumple que

$$\mathrm{Mor}(X,f)(1_Y) = f \circ 1_Y = f = \tau_Y^{-1}(1_Y).$$

Luego, por la proposición 3.1, $\tau = \mathrm{Mor}(-,g)$ y $\tau^{-1} = \mathrm{Mor}(-,f)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1_X = \tau_X^{-1}(\tau_X(1_X)) &= \tau_X^{-1}(g) \\ &= \mathrm{Mor}(X,f)(g) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} 1_Y = \tau_Y(\tau_Y^{-1}(1_Y)) &= \tau_Y(f) \\ &= \mathrm{Mor}(Y,g)(f) \\ &= g \circ f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \simeq Y$.

□

A continuación daremos una caracterización de los funtores representables a través de la definición de *objeto universal*, y veremos que está relacionado con el objeto que representa al funtor.

Definición 3.3 *Sea $\mathscr{F}:\mathscr{C}^{op}\to$ Set un funtor. Un* **objeto universal** *para $\mathscr{F}$ es un par (A,a), donde $a\in\mathscr{F}(A)$, el cual tiene la propiedad de que para cada objeto X de $\mathscr{C}$ y cada $x\in\mathscr{F}(X)$, existe un único morfismo $f:X\to A$ tal que $(\mathscr{F}(f))(a)=x\in\mathscr{F}(X)$.*

Proposición 3.2 *Un funtor $\mathscr{F}:\mathscr{C}^{op}\to$ Set es representable si y solo si tiene un objeto universal.*

Demostración: Primero supongamos que $\mathscr{F}$ es representable por A. Si eso ocurre, entonces

$$\mathscr{F}(A)\to \mathrm{Mor}(A,A)$$

es una biyección, por lo tanto existe un único $a\in A$ tal que $a\mapsto 1_A$. Afirmamos que el par (A,a) es un objeto universal. Consideramos un objeto X en $\mathscr{C}$ y $x\in\mathscr{F}(X)$. Nuevamente, por la representabilidad de $\mathscr{F}$ sabemos que existe un (único) morfismo f tal que $x\to f\in\mathrm{Mor}(X,A)$. Queremos ver que $\mathscr{F}(f)(a)=x$. Esto último se puede comprobar gracias al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}(A)\ni a & \xmapsto{\mathscr{F}(f)} & x\in\mathscr{F}(X) \\
\big\downarrow & & \big\uparrow \\
\mathrm{Mor}(A,A)\ni 1_A & \xmapsto[\mathrm{Mor}(f,A)]{} & f\in\mathrm{Mor}(X,A).
\end{array}$$

Ahora vamos a probar el recíproco: vamos a suponer que (A,a) es un objeto universal para $\mathscr{F}$. Definimos una transformación natural $\Phi:\mathscr{F}\to\mathrm{Mor}(-,A)$, en donde, para cada objeto X en $\mathscr{C}$ tenemos

$$\begin{array}{cccc}
\Phi_X : & \mathscr{F}(X) & \to & \mathrm{Mor}(X,A) \\
& x & \mapsto & f_x,
\end{array}$$

en donde f_x es tal que $\mathscr{F}(f_x)(a)=x$.

Tomemos X,Y objetos y $h:Y\to X$ en $\mathscr{C}$ y demostremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & \mathrm{Mor}(X,A) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}(h)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(h,A)} \\
\mathscr{F}(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \mathrm{Mor}(Y,A)
\end{array}$$

es conmutativo. Sea $x\in\mathscr{F}(X)$. Entonces

$$(\Phi(Y)\circ\mathscr{F}(h))(x)=f_{\mathscr{F}(h)(x)},$$

en donde $\mathscr{F}(f_{\mathscr{F}(h)(x)})(a) = \mathscr{F}(h)(x)$. Por otra parte,

$$(\mathrm{Mor}(h,A) \circ \Phi(X))(x) = f_x \circ h.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f_x \circ h)(a) &= \mathscr{F}(h)(\mathscr{F}(f_x)(a)) \\ &= \mathscr{F}(h)(x),\end{aligned}$$

y por la unicidad de $f_{\mathscr{F}(h)(x)}$, se sigue que $f_x \circ h = f_{\mathscr{F}(h)(x)}$. En consecuencia el diagrama es conmutativo y Φ es una transformación natural.

Finalmente probamos que $\Phi_X : \mathscr{F}(X) \to \mathrm{Mor}(X,A)$ es una biyección. Considerar $x,y \in \mathscr{F}(X)$. Si $\Phi_X(x) = \Phi_X(y)$, entonces $x = \mathscr{F}(f_x)(a) = \mathscr{F}(f_y)(a) = y$, por lo tanto Φ_X es inyectiva.
Por otro lado, si $g \in \mathrm{Mor}(X,A)$, entonces $\mathscr{F}(g) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(X))$ y como $a \in \mathscr{F}(A)$, se sigue que $\mathscr{F}(g)(a) \in \mathscr{F}(X)$. Luego, $\Phi_X(\mathscr{F}(g(a))) = g_{\mathscr{F}(g)(a)}$ y g cumple con $\mathscr{F}(g_{\mathscr{F}(g)(a)})(a) = \mathscr{F}(g)(a)$, en consecuencia $g_{\mathscr{F}(g)(a)} = g$ y $\Phi_X(\mathscr{F}(g(a))) = g$, lo cual prueba que Φ_X es biyectiva.

Así concluimos que Φ es un isomorfismo natural y por consiguiente $\mathscr{F} \simeq \mathrm{Mor}(-,A)$.

□

Recordemos que el Lema de Yoneda nos dice que $[\mathrm{Mor}(-,A),\mathscr{F}] \leftrightarrow \mathscr{F}(A)$ es una biyección. En la demostración anterior queda implícito que $a \in \mathscr{F}(A)$ es el elemento que se corresponde con Φ, el isomorfismo natural.

Por el Lema de Yoneda y el corolario 3.3 tenemos que

Corolario 3.4 *Un objeto universal para un funtor $\mathscr{F}$ es único (salvo isomorfismo).*

El siguiente ejemplo que presentaremos ilustra por qué nos interesan los funtores representables y los objetos universales:

Ejemplo 3.2 *([Fan05]) Considerar la categoría Top. Definimos un funtor $\mathscr{F} : Top^{op} \to Set$ que manda cada espacio topológico S a la colección $\mathscr{F}(S)$ de todos sus subespacios abiertos, y dado* *un morfismo (i.e. una función continua) $f : X \to Y$, se tiene la función de conjuntos*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}(f) & : \mathscr{F}(Y) & \to & \mathscr{F}(X) \\ & U & \mapsto & f^{-1}(U). \end{array}$$

Equipemos con la topología mas gruesa al conjunto $\{0,1\}$ en la cual el subconjunto $\{0\} \subset \{0,1\}$ sea cerrado; los subconjuntos abiertos en esta topología son $\emptyset$, $\{1\}$ y $\{0,1\}$. Observemos que si $f : S \to \{0,1\}$ es continua, entonces $f^{-1}(\{1\})$ es abierto. Recíprocamente, si suponemos que $f^{-1}(\{1\})$ es abierto en S, entonces $f^{-1}(\{0,1\}), f^{-1}(\{1\})$ y $f^{-1}(\{\emptyset\})$ son abiertos en S, por lo tanto f es continua. Luego, tenemos la equivalencia: una función $S \to \{0,1\}$ es continua si y solo si $f^{-1}(\{1\})$ es abierto en S.

Demostremos que el par $(\{0,1\},\{1\})$ es un objeto universal para este funtor. Consideremos un objeto X en Top y $U \in \mathscr{F}(X)$ un abierto de X. Queremos probar que existe una única función continua $f : X \to \{0,1\}$ con la propiedad de que

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}(f) & : \mathscr{F}(\{0,1\}) & \to & \mathscr{F}(X) \\ & \{1\} & \mapsto & U. \end{array} \tag{3.6}$$

Definimos

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & 1 \quad \text{si } x \in U \\ & & x & \mapsto & 0 \quad \text{si } x \notin U, \end{array}$$

y notamos que esta función cumple 3.6. ¿Es la única? Supongamos que existe otra función $\bar{f}$ que satisface 3.6. Entonces $\mathscr{F}(\bar{f})(\{1\}) = \bar{f}^{-1}(\{1\}) = U$, que implica $\bar{f}(x) = 1$ si $x \in U$ y $\bar{f}(x) = 0$ si $x \notin U$. Por consiguiente, $f = \bar{f}$.

Por la proposición 3.2 (y su demostración), sabemos que el funtor $\mathscr{F}$ está representado por $\{0,1\}$, con ello sabemos que para todo espacio topológico X tenemos la biyección $\mathscr{F}(X) \simeq$ $\mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$*, y podemos concluir que hay tantas funciones continuas $X \to \{0,1\}$ como abiertos en X. La idea que debemos resaltar es que* $\mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ *está "parametrizando" a los abiertos de X: en primer lugar, tenemos la biyección $\mathscr{F}(X) \simeq \mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ y además, dado un morfismo $f \in \mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ podemos saber cuál es su abierto correspondiente.*

Finalmente presentamos un ejemplo (de geometría algebraica) de funtor representable que será utilizado cuando discutamos la representabilidad del funtor de Grassmann. Utilizamos el siguiente resultado [SP23]:

Lema 3.1 *Sean X un espacio localmente anillado y Y un esquema afín. La función*

$$\mathrm{Mor}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y),\Gamma(X,\mathscr{O}_X))$$

que manda un morfismo f en $f^\sharp$ (donde $f^\sharp$ es el morfismo entre las gavillas de los esquemas) es biyectiva.

Ejemplo 3.3 *([SP23]) Vamos a definir un funtor $\mathscr{F} : Sch \to Set$, el cual manda un esquema T al conjunto $\mathscr{F}(T) = \Gamma(T,\mathscr{O}_T)$, donde $\Gamma(T,\mathscr{O}_T)$ es el conjunto subyacente del anillo $\mathscr{O}_T(T)$ ($\mathscr{O}_T$ es la gavilla estructural del esquema T). Luego, dado un morfismos de esquemas $f : T' \to T$ obtenemos la función de conjuntos*

$$\mathscr{F}(f) = f^\sharp,$$

donde $f^\sharp : \Gamma(T,\mathscr{O}_T) \to \Gamma(T',\mathscr{O}_{T'})$ es el morfismo de gavillas pero pensado como una función de conjuntos. Luego, dado un anillo con unitario R y $t \in R$ existe un único homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[x] & \to & R \\ x & \mapsto & t. \end{array}$$

Así, utilizando el lema 3.1, tenemos

$$\mathrm{Mor}(T,Spec(\mathbb{Z}[x])) = \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[x],\Gamma(T,\mathscr{O}_T)) = \Gamma(T,\mathscr{O}_T) = \mathscr{F}(T).$$

Esto nos provee de un isomorfismo natural $\mathrm{Mor}(T,Spec(\mathbb{Z}[x])) \to \mathscr{F}$. ¿Cuál es la familia universal? Para obtenerla tenemos que aplicar las identidades de arriba a $1_{Spec(\mathbb{Z}[x])}$, lo cual nos da que

$$\xi = x \in \Gamma(Spec(\mathbb{Z}[x]),\mathscr{O}_{Spec(\mathbb{Z}[x])}) = \mathbb{Z}[x].$$

Lo cual implica que $\mathbb{Z}[x]$ representa a $\mathscr{F}$.

3.3. Problemas y espacios moduli

Un problema moduli es, en esencia, un problema de clasificación que tiene varios componentes: en primer lugar, tenemos los objetos que queremos clasificar. Al clasificar debemos decir cuándo dos objetos están relacionados, de aquí surge una relación de equivalencia en el conjunto. Pero también necesitaremos la noción de familia, que responde a la pregunta de cómo permitiremos que nuestros objetos varíen [Ben08]. Definido un problema moduli, ¿cómo se resuelve? Si un problema moduli es un problema de clasificación entonces su solución es encontrar un espacio clasificante al que se le llamará *espacio moduli*.

Definición 3.4 *Un* **problema moduli** *consta de una colección A de objetos, una relación de equivalencia $\sim$ en A y una noción de familia de objetos de A parametrizados por una variedad S, los cuales deben cumplir que*

1. *Una familia parametrizada por una variedad $\{pt\}$ (variedad con un solo punto) es un único objeto en A.*

2. *Existe una noción de equivalencia de familias parametrizadas por alguna variedad S. Cuando $S = \{pt\}$ la equivalencia se reduce a la misma relación de equivalencia $\sim$ que se definió en A.*

3. *Para cualquier morfismo $\phi : S' \to S$ y cualquier familia X parametrizada por S, existe una familia inducida $\phi^* X$ parametrizada por S'. Aún más, esta operación (de inducir una nueva familia) satisface las propiedades funtoriales*

   - $(\phi \circ \phi')^* = \phi'^* \circ \phi^*$ *y*
   - $1_S^* = \text{identidad}$*, en el sentido de que si X es una familia parametrizada por S, entonces $1_S^* X = X$.*

   Además, es compatible con $\sim$, es decir:

$$X \sim X' \Rightarrow \phi^* X \sim \phi^* X'.$$

Un problema consiste en dotar al conjunto $M = A/\sim$ de una estructura de variedad algebraica, de tal manera que la variedad M refleje la estructura de las familias de objetos de A. A continuación veremos cómo esta idea se puede precisar mediante conceptos de la teoría de categorías.

En primer lugar, con la información del problema moduli vamos a construir un funtor $\mathscr{F}$ de la categoría de variedades a la de conjuntos. Si S es una variedad, $\mathscr{F}(S)$ se define como el conjunto de todas las clases de equivalencia de las familias parametrizadas por S, y si $\phi : S \to S'$ es un morfismo de variedades, entonces $\mathscr{F}(\phi) : \mathscr{F}(S') \to \mathscr{F}(S)$ es una función de conjuntos que está definida por $\mathscr{F}(\phi)([X]) = [\phi^* X]$. No obstante, cometeremos un abuso de notación y escribiremos $\phi^*[X] := \mathscr{F}(\phi)([X])$ y haremos notar que esto no causa ambigüedad, ya que si $[X] = [Y]$ (aun si $X \neq Y$), entonces, por la propiedad (3) de la definición de problema moduli,

$$\phi^*[X] = [\phi^* X] = [\phi^* Y] = \phi^*[Y]$$

.

Nuevamente, por la propiedad (3) de la definición de problema moduli tenemos

$$\mathscr{F}(\phi \circ \psi) = (\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^* = \mathscr{F}(\psi) \circ \mathscr{F}(\phi)$$

y

$$\mathscr{F}(Id_S) = Id_{\mathscr{F}(S)}.$$

Con esto queda definido el funtor (contravariante) $\mathscr{F}$.

• ¿Por qué nos interesa que M tenga una estructura de variedad?

Vamos a suponer que M es una variedad y que la función

$$\begin{array}{rcccc} v_X & : & S & \longrightarrow & M \\ & & s & \longmapsto & [X_s], \end{array}$$

es un morfismo de variedades.

Si esto ocurre, puede definirse una transformación natural $\Phi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-, M)$ con

$$\begin{array}{rcccc} \Phi(S) & : & \mathscr{F}(S) & \longrightarrow & Mor(S, M) \\ & & [X] & \longmapsto & v_X, \end{array}$$

para cualquier variedad S.

Como $\Phi(S)$ es una función entre conjuntos, lo mejor que puede pasar es que sea una biyección, para toda variedad S. Si esto último ocurriera, entonces Φ sería naturalmente isomorfo a $Mor(-,M)$, y en consecuencia, $\mathscr{F}$ sería un funtor representable, y estaría representado por M. Con esto llegamos a nuestra primera definición de espacio moduli:

Definición 3.5 *Un espacio moduli fino es un par (Φ,M) que representa al funtor $\mathscr{F}$. Es decir, $\Phi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-,M)$ es un isomorfismo natural.*

Recordando la definición de familia universal vista en la sección anterior, damos una definición alternativa a la anterior: supongamos que tenemos un espacio moduli fino (Φ,M). Entonces $\Phi(M) : \mathscr{F}(M) \to \mathrm{Mor}(M,M)$ es una biyección, y como $1_M \in \mathrm{Mor}(M,M)$, existe una única (salvo equivalencia) familia U parametrizada por M que corresponde a 1_M. Luego, sea X cualquier familia parametrizada por una variedad S y consideremos el morfismo $\nu_X : S \to M$. Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(M) \arrow[r, "\Phi(M)"] \arrow[d, "\mathscr{F}(\nu_X)"] & \mathrm{Mor}(M,M) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\nu_X,M)"] \\ \mathscr{F}(S) \arrow[r, "\Phi(S)"] & \mathrm{Mor}(S,M) \end{tikzcd}$$

obtenemos que

$$(\Phi(S)\circ\mathscr{F}(\nu_X))([U]) = (\mathrm{Mor}(\nu_X,M)\circ\Phi(M))([U]),$$

de donde

$$\Phi(S)([\nu_X^* U]) = 1_M \circ \nu_X = \nu_X.$$

Pero también

$$\Phi(S)([X]) = \nu_X,$$

y como $\Phi(S)$ es una biyección, entonces

$$[X] = [\nu_X^* U].$$

Así hemos llegado a una definición alternativa de espacio moduli fino:

Definición 3.6 *Un* **espacio moduli fino** *consiste de una variedad M y una familia U parametrizada por M tal que, para cada familia X parametrizada por una variedad S, existe un único morfismo $\phi : S \to M$ con $X \sim \phi^* U$.*

Tal familia es llamada **universal** para el problema dado.

Notemos que con esta definición se responde a la pregunta de cómo parametriza un espacio moduli (Φ, M): toda clase de equivalencia de una familia X proviene de la clase de equivalencia del pullback de la familia universal $\nu_X^* U$.

A veces tener un espacio moduli fino no es posible, de manera que se necesitan relajar las hipótesis para obtener algún espacio clasificante. Es por ello que tenemos la siguiente

Definición 3.7 *Un* **espacio moduli grueso** *para un problema moduli dado es una variedad M junto con una transformación natural*

$$\Phi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-, M),$$

tal que

1. *$\Phi(pt)$ es una biyección,*

2. *para cualquier variedad N y cualquier transformación natural $\psi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-, N)$, existe una única transformación natural*

$$\Omega : \mathrm{Mor}(-, M) \to \mathrm{Mor}(-, N),$$

tal que $\psi = \Omega \circ \Phi$.

Al igual que con los espacios moduli fino, también tenemos una definición alternativa:

Definición 3.8 *Un espacio moduli grueso consiste de una variedad M y una biyección $\alpha : A/\sim \to M$ tal que*

- *para cada familia parametrizada por una variedad X, la composición $\alpha \circ \nu_X$ es un morfismo;*
- *para cualquier variedad N y cualquier transformación natural $\psi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-, N)$, la función*

$$\mu = \psi(pt) \circ \alpha^{-1} : M \to N$$

es un morfismo.

En lo que sigue daremos algunos resultados generales sobre los espacios moduli. Las referencias son [New78, Hos15].

Proposición 3.3 *Un espacio moduli grueso es único salvo (un único) isomorfismo.*

Sabemos que todo espacio moduli fino es también grueso, sin embargo, al revés no siempre es cierto. El siguiente teorema nos dice cuándo un espacio moduli grueso es también un espacio moduli fino.

Proposición 3.4 *Sea (M,Φ) un espacio moduli grueso para un problema moduli dado. Entonces (M,Φ) es un espacio moduli fino si y solo si*

- *Existe una familia U parametrizada por M tal que $\Phi_M(U) = 1_M$,*
- *para familias X e Y parametrizadas por un esquema S tenemos $X \sim_S Y$ si y solo si $\Phi_S(X) = \Phi_S(Y)$.*

Como veremos en el primer ejemplo del capítulo siguiente, no todo problema moduli tiene un espacio solución. Existen al menos dos patologías:

1. *El fenómeno del salto:* ocurre cuando tenemos una familia X parametrizada por una variedad (irreducible) S de dimensión mayor que 1, y un $s_0 \in S$ tal que $X_s \sim X'_s$ para todo $s,s' \in S/\{s_0\}$ pero $X_{s_0} \nsim X_s$ para $s \neq s_0$.
2. Que no haya una familia X sobre una variedad que parametrice a todos los objetos del problema moduli. En este caso se dice que el problema no está acotado.

3.3.1. Los ejemplos 3.2 y 3.3 revisitados

Hemos visto la relación que hay entre los funtores representables y los espacios moduli. En este pequeño apartado queremos presentar los ejemplos 3.2 y 3.3 como si fueran problemas moduli, sabiendo ya que los funtores de esos ejemplos son representables y que tales problemas moduli tendrían un espacio moduli fino como solución. No obstante, tenemos que tener en cuenta que 3.2 es un tanto diferente a los otros problemas moduli que trataremos porque el funtor que estamos considerando no va de los esquemas a los conjuntos.

El ejemplo 3.2 como problema moduli. Por conveniencia, escribimos un espacio topológico como el par (X, τ_X), donde X es el conjunto y τ_X su topología. Recordemos que $\mathscr{F} : Top \to Set$ manda el espacio topológico X en el conjunto τ_X, y para una función continua $f : X \to Y$, se tiene la función de conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}(f) \ : \mathscr{F}(Y) & \to & \mathscr{F}(X) \\ U & \mapsto & f^{-1}(U). \end{array}$$

Con este funtor describimos el siguiente ″Problema moduli″:

- El conjunto que queremos parametrizar es el de los conjuntos abiertos de espacios topológicos
- Una familia parametrizada por un espacio topológico X es la colección de subconjuntos abiertos de X, es decir, una topología de X.
- La relación de equivalencia es la igualdad (también en la familia)
- Dada una familia parametrizada por X y una función continua $f : Y \to X$, se induce una familia parametrizada por Y mediante $\mathscr{F}(f)(Y) = f^*Y = \{f^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } Y\}$.

El ejemplo 3.3 como problema moduli. Recordemos que $\mathscr{F} : Sch \to Set$ manda un esquema T al conjunto $\mathscr{F}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, donde $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)$ es el conjunto subyacente del anillo $\mathscr{O}_T(T)$ ($\mathscr{O}_T$ es la gavilla estructural del esquema T), y que dado un morfismo de esquemas $f : T' \to T$ obtenemos la función de conjuntos

$$\mathscr{F}(f) = f^\sharp,$$

donde $f^\sharp : \Gamma(T, \mathscr{O}_T) \to \Gamma(T', \mathscr{O}_{T'})$ es el morfismo de gavillas pero pensado como una función de conjuntos. Nuevamente, a partir del funtor construimos nuestro problema moduli:

- El conjunto que queremos parametrizar es el de las ″funciones regulares″ en un esquema.
- La noción de familia parametrizada por un esquema es el conjunto $\mathscr{F}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$
- La relación de equivalencia es la igualdad

- Dada una familia parametrizada por un esquema T y un morfismo de esquemas $f : S \to T$, tenemos una familia parametrizada por S inducida por T dada por $\mathscr{F}(f)(T) = f^\sharp(T) = \mathscr{O}_{f^{-1}T}(f^{-1}(S)) = \mathscr{O}_S(S)$, pero como estamos considerando $f^\sharp$ como una función de conjuntos, escribimos $\mathscr{F}(f)(T) = f^\sharp(T) = \Gamma(S, \mathscr{O}_T)$.

En ambos casos, el proceso de inducir una familia satisface de manera directa las propiedades funtoriales pues se utiliza un funtor para definir una familia inducida. Además, inducir una familia es compatible con la relación de equivalencia puesto que la relación de equivalencia es la igualdad.

Capítulo 4

Ejemplos de problemas y espacios moduli

4.1. Endomorfismos de espacios vectoriales

En este apartado vamos a desarrollar un ejemplo de problema moduli relacionado con espacios vectoriales. En este ejemplo veremos que no todo problema moduli tiene solución (se presenta el fenómeno del salto, una patología mencionada en el capítulo anterior), pero que si hacemos más pequeño el conjunto que queremos parametrizar sí podemos obtener resultados positivos; pasaremos de no tener un espacio moduli, a tener un espacio moduli grueso y finalmente uno fino. Este ejemplo (junto con los resultados) es presentado en [New78] y [Mum70]; aquí lo desarrollamos un poco más.

Consideraremos los pares (V,T) donde $T : V \to V$ es una transformación lineal y V es un K-espacio vectorial n-dimensional. Diremos que (V,T) y (V',T') son isomorfos si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $h : V \to V'$ tal que $h \circ T = T' \circ h$. El problema consistirá en clasificar a los pares (V,T) salvo isomorfismo.

A continuación definimos, para este problema particular, el concepto de familia, de isomorfismo entre ellas y de familia inducida.

Definición 4.1 *Una* **familia** *de endomorfismos de espacios n-dimensionales* **parametrizada por una variedad** *S es un par* (ξ, u)*, donde* ξ *es un haz vectorial de rango n sobre S y u es un endomorfismo de* ξ*. Para dos familias* $(\xi, u), (\xi', u')$ *parametrizadas por S, un* **isomorfismo** *de* (ξ, u) *en* (ξ', u') *es un isomorfismo* $h : \xi \to \xi'$ *tal que* $h \circ u = u' \circ h$*. Finalmente, para cualquier familia parametrizada por S y cualquier morfismo* $f : S' \to S$ *de variedades, se tiene una* **familia inducida** $f^*(\xi, u) = (f^*\xi, f^*u)$ *para metrizada por* S'*.*

Aquí f^* es el funtor que va de la categoría haces vectoriales sobre S a la categoría de haces vectoriales sobre S', el cual se definió en el Capítulo 2.

Veamos que se satisfacen las condiciones de un problema moduli que se mencionaron en la definición 3.4:

- Contamos con una familia A de objetos en geometría algebraica: el conjunto de pares (V, T),
- tenemos una relación de equivalencia $\sim$: (V, T) y (V', T') están relacionados si y solo si hay un isomorfismo entre ellos y
- existe un concepto de una familia parametrizada por una variedad y una noción de equivalencia entre familias: en este caso la familia es el par (ξ, u) de la definición 4.1 y dos pares (ξ, u) y (ξ', u') son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo h (de haces vectoriales) entre ξ y ξ' tal que $h \circ u = u' \circ h$.

Consideremos la variedad $S = \{pt\}$ ¿quién es la familia de endomorfismos parametrizada por S? Tiene que ser un par (ξ, u) en donde $\xi = (E, p, S)$ es un haz vectorial de rango n sobre S y u es un endomorfismo (de haces vectoriales). Notemos que E es un espacio vectorial puesto que $E = p^{-1}(S)$ y $p^{-1}(S)$ tiene que ser un espacio vectorial (de acuerdo con la definición 2.12). Además, u es un S-morfismo y por lo tanto consta de una sola transformación lineal (que denotaremos nuevamente por) u, de manera que u se comporta como un endomorfismo del espacio vectorial E. Por lo tanto, una familia de endomorfismos parametrizada por una variedad que consta de un solo punto vuelve a ser un elemento del conjunto A.

Para cualquier morfismo $f : S' \to S$ y cualquier familia X parametrizada por S se tiene una familia inducida f^*X, esto es por la definición 4.1. Además, como f^* es un funtor, la operación de inducir una nueva familia satisface las propiedades funtoriales.

Por último, consideremos un morfismo de variedades $f : S' \to S$. Supongamos que $(\xi_1, u_1) \sim (\xi_2, u_2)$, entonces existe un isomorfismo $h : \xi_1 \to \xi_2$ tal que $h \circ u_1 = u_2 \circ h$. Luego, aplicamos f^* y obtenemos $f^*h \circ f^*u_1 = f^*u_2 \circ f^*h$, en donde $f^*h : f^*\xi_2 \to f^*\xi_2$ es un isomorfismo, por lo tanto $(f^*\xi_1, f^*u_1) \sim (f^*\xi_2, f^*u_2)$ y la operación de inducir una nueva familia es compatible con $\sim$.

Denotamos por (End_n) al problema planteado y por $\mathscr{F}$ al funtor moduli correspondiente.

Ejemplo 4.1 *Queremos dar un ejemplo de familia, para ello vamos a considerar a los automorfismos de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que decir cuál es la variedad que va a parametrizar a la familia, lo cual implica también especificar el haz vectorial $\xi = (E, p, \mathbb{R}^3)$ y la estructura de espacio vectorial para las fibras. Además, tenemos que definir también cuál va a ser el automorfismo de ξ.*
La variedad que vamos a considerar es $\mathbb{R}^3$. Comenzamos definiendo ξ. Hacemos

$$E := \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

De esta forma, hacemos

$$\begin{array}{cccc} p & : & E & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (t,a) & \mapsto & t, \end{array}$$

De aquí tenemos que a la fibra $E_t = p^{-1}(t) = \{t\} \times \mathbb{R}^3$ le podemos dar una estructura de espacio vectorial con las operaciones $(t,a) + (t,a') = (t, a+a')$ y $c(t,a) = (t, ca)$, para cualesquiera $a, a' \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$.

Ahora debemos definir un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u_1} & E \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{u_2} & \mathbb{R}^3 \end{array} \tag{4.1}$$

especificando quienes son u_1 y u_2. Recordemos que u_2 debe ser un morfismo de variedades. Por simplicidad, podemos hacer $u_2(t) = 2t$, para todo t en $\mathbb{R}^3$. Por otra parte, definimos

$$\begin{array}{rccc} u_1 & : & E & \rightarrow & E \\ & & (t,x) & \rightarrow & (u_2(t), T_t x) \end{array},$$

donde $t = (t_1,t_2,t_3)$ y $x = (x_1,x_2,x_3)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$ y $T_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 \\ 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 1 & t_3 \end{pmatrix}$. Hacemos énfasis en que para cada punto $t \in \mathbb{R}^3$ hay una matriz T_t.

De aquí tenemos

$$\begin{aligned} u_2 \circ p(t,x) &= u_2(t) \\ &= p(u_2(t), T_t(x)) \\ &= (p \circ u_1)(t,x), \end{aligned}$$

y esto es para todo $(t,x) \in E$. Por lo que el diagrama 4.1 es conmutativo.

Además, u_1 define una transformación lineal $u_{2,t} : E_t \rightarrow E_{u_1(t)}$ en cada fibra, la cual está dada por la matriz T_t.

Así, la familia de endomorfismos de espacios vectoriales parametrizada por la variedad $\mathbb{R}^3$ con el endomorfismo de haces (u_1,u_2), es la clase de equivalencia de las matrices de la forma $T_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 \\ 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 1 & t_3 \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

Para este problema moduli tenemos los siguientes resultados:

Proposición 4.1 *[New78]*

1. *No existe un espacio moduli fino para (End_n).*

2. *Para $n > 1$ no existe un espacio moduli grueso para (End_n). De hecho, si M es una variedad y $\mathscr{F} \rightarrow \mathrm{Mor}(-,M)$ es una transformación natural, entonces cualesquiera dos endomorfismos con el mismo polinomio característico están representadas por el mismo punto de M.*

En la demostración de esta proposición (que puede encontrarse en [New78]) quedan de manifiesto algunos problemas. Para la demostración de 4.1.1 se encuentran dos familias no isomorfas que determinan el mismo morfismo de una variedad S en cualquier espacio moduli, es decir, que hay muchas familias. Mientras que en 4.1.2 el problema es que hay demasiados endomorfismos.
No obstante, sí podemos construir una transformación natural entre $\mathscr{F}$ y $\mathrm{Mor}(-,k^n)$, que es el primer paso para construir un espacio moduli.

Proposición 4.2 *[New78] Existe una transformación natural $\Phi : \mathscr{F} \to \mathrm{Mor}(-,k^n)$ tal que $\Phi(pt)$ está dado por*

$$(V,T) \longmapsto (a_1,\ldots,a_n),$$

en donde $a_1,\ldots,a_n$ son los coeficientes del polinomio característico de T, $P_T = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$.

4.1.1. Endomorfismos semi-simples: un ejemplo de espacio moduli grueso

Ya vimos que para el problema (End_n) no existe un espacio moduli. Para paliar esa situción, haremos más pequeño el conjunto que queremos parametrizar; trabajaremos solamente con los endomorfismos semi-simples.

Definición 4.2 *Consideremos un espacio vectorial V. Decimos que un endomorfismo T de V es un endomorfismo semi-simple si la matriz asociada a T es diagonal para alguna base de V.*

Como estamos estudiando un conjunto más pequeño, en términos de la teoría de categorías significa que definiremos un subfuntor de $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}_d : Var \longrightarrow Set,$$

en donde, si S es una variedad, tenemos

$$\mathscr{F}_d(S) = \{[(\xi,T)] \in \mathscr{F}(S) : T_s \text{ es semi-simple para todo } s \in S.\}.$$

Denotemos por $(End_n)_d$ al problema moduli correspondiente. De este problema moduli podemos decir dos cosas, una buena y una mala:

Proposición 4.3 *[New78]*

- k^n *es un espacio moduli grueso para* $(End_n)_d$
- *No existe un espacio moduli fino para los endomorfismos semi-simples con respecto a cualquier relación de equivalencia admisible sobre las familias.*

4.1.2. Endomorfismos cíclicos: Ejemplo de espacio moduli fino

Nuevamente, hacemos más pequeño al conjunto que queremos parametrizar: ahora solo consideraremos a los endomorfismos *cíclicos*:

Definición 4.3 *Un endomorfismo* T *de un espacio n-dimensional* V *es* **cíclico** *si existe* $v \in V$ *tal que* $\{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ *es una base de* V. *Al vector* v *se le llama* **vector cíclico** *de* V.

Para este problema moduli el funtor correspondiente es

$$\mathscr{F}_c(S) = \{[(\xi, T)] \in \mathscr{F}(S) : (\xi, T) \text{ tenga una sección cíclica}\},$$

que es un subfuntor de $\mathscr{F}$. Que (ξ, u) tenga una sección cíclica significa que existe una sección $\sigma : S \to E$ tal que la fibra E_s esté generada por $\{\sigma(s), u_s\sigma(s), \dots, u_s^{n-1}\sigma(s)\}$, para toda $s \in S$, i. e. que $\sigma(s)$ sea un vector cíclico para u_s.

Adaptemos la transformación natural Φ de la proposición 4.2 para el funtor $\mathscr{F}_c$. Recordemos que Φ cumple con que $\Phi(pt) : \mathscr{F}(pt) \to \mathrm{Mor}(pt, k^n)$ es una función, pero $\mathscr{F}(pt)$ vuelve a ser el conjunto $A/\sim$, luego, cuando restringimos la transformación natural a $\mathscr{F}_c$, vamos a estar considerando solamente a los pares (V, T) en donde T es un endomorfismo cíclico.

Ahora vamos a construir una familia C en $\mathscr{F}_c(k^n)$. Es sabido que si un haz vectorial tiene una sección cíclica, entonces el haz es trivial (véase [Hat03], p.8 o bien [New78], p. 29). Así pues, si $C = [(\Gamma, u)] \in \mathscr{F}_c(k^n)$, entonces

$$\Gamma = (k^n \times k^n, p, k^n).$$

Para completar la definición de la familia, nos falta dar el endomorfismo $u = (u_1, u_2)$ de haces vectoriales. Si $u_2 : k^n \to k^n$ es un morfismo de variedades, definimos

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & : & k^n \times k^n & \longrightarrow & k^n \times k^n \\ & & (t,a) & \longmapsto & (u_2(t), C_t a). \end{array},$$

en donde

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -t_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -t_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -t_1 \end{pmatrix}.$$

La importancia de la familia C es que

Proposición 4.4 *[New78] C es una familia universal para $(End_n)_c$, lo cual hace que k^n sea un espacio moduli fino para este problema.*

Ejemplo 4.2 *Hay algunas cosas que podemos decir una vez que sabemos que C es una familia universal para el problema $(End_n)_c$.*
En primer lugar, como k^n es un espacio moduli fino para el problema $(End_n)_c$, entonces para cada $x \in k^n$ tenemos un endomorfismo (de espacio vectorial) cíclico, a saber, el endomorfismo definido por la matriz C_x.

Por otra parte, siempre que tengamos un morfismo de variedades $S \to k^n$, tenemos una familia de endomorfismos $f^*C = [(\xi, u)]$, en donde ξ es un haz vectorial trivial y las transformaciones lineales en cada fibra están dadas por una matriz de la forma C_t, con $t \in S$. Por ejemplo, si regresamos a $k^n = \mathbb{R}^3$ y tenemos el morfismo $S^1 \to \mathbb{R}^3$ entre la esfera unitaria y $\mathbb{R}^3$, entonces la familia parametrizada por S^1 inducida por C es la clase de isomorfismo del haz $(S^1 \times \mathbb{R}^3, p, S^1)$ con el endomorfismo (de haces) u definido por las transformaciones lineales C_s (con $s \in S^1$) en cada fibra. Por lo tanto, tal familia de endomorfismos de transformaciones lineales es la clase de equivalencia de

$$\{\textit{Las transformaciones lineales } T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \textit{ tales que } T = C_t \quad y \quad ||t|| = 1\},$$

y un endomorfismo de dicha familia sería

$$C_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

4.2. El funtor de Grassmann

En esta sección se desarrolla un último ejemplo de espacio moduli: la variedad de Grassmann. El problema en cuestión es clasificar los subespacios de una dimensión fija de un espacio vectorial de dimensión finita.

Dado un espacio vectorial V de dimensión n y un número (positivo) $d \leq n$, podemos pensar en el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión d. A este conjunto se le puede dotar de estructura de variedad algebraica mediante el encaje de Plücker; a dicha variedad se le conoce como variedad de Grassmann [Hud07] .

En este ejemplo vamos a presentar el funtor de Grassmann, que es un funtor que va de la categoría de esquemas a la categoría de conjuntos. Demostraremos que está representado por un esquema, y ese esquema recibirá el nombre de variedad de Grassmann. En un principio se perderá el enfoque clásico de la variedad de Grassmann debido a que se clasificarán *isomorfismos de suprayecciones*.

Los conceptos y algunos resultados que utilizaremos se encuentran en la sección 2.3. Este capítulo se basa en la exposición hecha en [SP23], y también en los textos de [Har13] y [Vak17].

4.3. El problema moduli y la construcción del funtor Grassmanniano

Vamos a fijar dos enteros no negativos n y d tales que $0 \leq d \leq n$. El problema moduli consta de los siguientes datos:

1. El conjunto que queremos clasificar es el de las suprayecciones de módulos localmente libres de rango fijo d. La relación de equivalencia estará dada por los isomorfismos de suprayecciones.

2. La familia parametrizada por un esquema S será una suprayección de gavillas de $\mathscr{O}_S$-módulos
$$\mathscr{O}_S^{\bigoplus} \to Q,$$
donde Q es un modulo localmente libre finito de rango d. Notemos que por cada suprayección de gavillas tenemos un conjunto de suprayecciones de módulos
$$\{\mathscr{O}_S^{\bigoplus n}(U) \to Q(U) : U \subset S \quad \text{es abierto}\}.$$
La relación de equivalencia de las familias está dada por los isomorfismo de suprayecciones de gavillas de $\mathscr{O}_S$-módulos.

3. Dado un morfismo de esquemas $f : S \to T$ y una familia parametrizada por T, $\alpha : \mathscr{O}_T^{\bigoplus n} \to Q$, la noción de familia inducida está dada por el pullback de f, así, la familia inducida por f y parametrizada por S es
$$f^*\alpha : \mathscr{O}_S^{\bigoplus n} \to f^*Q.$$

El funtor f^* fue abordado en la sección 2.3 y además cumple con lo siguiente [SP23]:

i) $\mathscr{O}_S = f^*\mathscr{O}_T$,

ii) f^* es aditivo, lo cual significa que
$$f^* \quad : \quad \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(f^*A, f^*B)$$
es un homomorfismo de grupos abelianos (recordemos que la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos es preaditiva).

iii) f^* preserva módulos localmente libres y

iv) f^* es exacto derecho. Es decir, que si tenemos una sucesión exacta de $\mathscr{O}_S$-módulos
$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$
al aplicar el funtor tenemos una sucesión exacta de $\mathscr{O}_T$-módulos
$$f^*A \to f^*B \to f^*C \to 0.$$

Una vez establecido el problema moduli, definimos el funtor asociado. A este funtor le llamaremos funtor de Grassmann o Grassmanniano.

Definición 4.4 *Consideramos n,d enteros no negativos que cumplen $0 \leq d \leq n$. El* **funtor de Grassmann***, que denotamos por $G(d,n)$, asocia a un esquema S el conjunto $G(d,n)(S)$ de las clases de isomorfismo de sobreyecciones*

$$q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to Q,$$

donde $\mathscr{O}_S^{\oplus n} = \mathscr{O}_S \bigoplus \ldots \bigoplus \mathscr{O}_S$ y Q es un $\mathscr{O}_S$-módulo localmente libre finito de rango $n-d$.

Sea $f : T \to S$ un morfismo de esquemas. Entonces definimos una función

$$G(d,n)(f) : G(d,n)(S) \to G(d,n)(T),$$

la cual envía la clase de isomorfismo de $q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to Q$ a la clase de isomorfismo de $f^*q : \mathscr{O}_T^{\oplus n} \to f^*Q$.

Como las clases de isomorfismo de una suprayección están determinadas por su kernel, podemos realizar dicha parametrización. En particular, cuando $S = \mathrm{Spec}k$, con k un campo, se puede identificar de manera canónica a $Gr(d,n)(S)$ con la colección de subespacios de dimensión d de k^n, puesto que una gavilla localmente libre sobre $\mathrm{Spec}k$ de rango $n-d$ es k^{n-d}, y una suprayección $k^n \to k^{n-d}$ está determinada, salvo isomorfismo, por un subespacio d-dimensional de k^n (véase el ejemplo 2.7).

4.3.1. El funtor de Grassmann es representable

Este problema tiene como solución un espacio moduli fino. Para probar que tenemos dicho espacio se demostrará que el funtor de Grassmann es representable. Las definiciones presentadas a continuación son un conjunto de propiedades que nos permitirán establecer un criterio de representabilidad para funtores que van de la categoría de esquemas a la de conjuntos, que es el que utilizaremos para $Gr(d,n)$.

Definición 4.5 *Sea $\mathscr{F}$ un funtor contravariante que va de la categoría de esquemas a la categoría de conjuntos.*

1. *Diremos que $\mathscr{F}$* **satisface la propiedad de gavilla para la topología de Zariski** *si para cualquier esquema T y cualquier cubierta abierta $\{U_i\}$ de T, y para cualquier colección de elementos $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ existe $f \in \mathscr{F}(T)$ tal que $f|_{U_j} = f_j$ en $\mathscr{F}(U_j)$.*

2. *Un* **subfuntor** *$\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ es una regla que asocia a cada esquema T un subconjunto $\mathscr{H}(T) \subset \mathscr{F}(T)$ tal que los mapeos*

$$\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(T) \longmapsto \mathscr{F}(T')$$

mandan $\mathscr{H}(T)$ en $\mathscr{H}(T')$ para todos los morfismos de esquemas $f : T' \to T$.

3. *Sea $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ un subfuntor. Diremos que $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ está* **representado por inmersiones abiertas** *si para todo par (T,t), donde T es un esquema y $t \in \mathscr{F}(T)$ existe un subesquema abierto $U_t \subset T$ con la siguiente propiedad: un morfismo $f : T' \to T$ se factoriza a través de U_t si y solo si $\mathscr{F}(f)(t) \in \mathscr{H}(T')$.*

4. *Sea I un conjunto. Para cada $i \in I$, sea $\mathscr{H}_i \subset \mathscr{F}$ un subfuntor. Diremos que la colección $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$* **cubre** *a $\mathscr{F}$ si y solo si para cada $f \in \mathscr{F}(T)$ existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ de T tal que $f|_{U_i} \in \mathscr{H}_i(U_i)$.*

Lema 4.1 (Criterio de los esquemas.) *Sea $\mathscr{F}$ un funtor contravariante que va de la categoría de esquemas en la categoría de conjuntos. Suponer que*

1. *$\mathscr{F}$ satisface la propiedad de gavillas en la topología de Zariski;*

2. *existe un conjunto de índices I y una colección de subfuntores $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}$ (subfuntores de $\mathscr{F}$) tales que*

   - *cada $\mathscr{F}_i$ es representable*
   - *cada $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}$ está representado por inmersiones abiertas y*
   - *la colección $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ cubre a $\mathscr{F}$.*

Entonces $\mathscr{F}$ es representable.

El resultado anterior puede ser encontrado en [SP23] o en [Eis00] junto con sus demostraciones, aunque la versión que escribimos es la de la primera bibliografía.
Finalmente, tenemos la siguiente versión del lema de Nakayama relativa a los morfismos de módulos, la cual puede ser encontrada en [SP23].

Lema 4.2 *Consideremos un anillo R con ideal de Jacobson* $\mathrm{rad}(R)$*, M un R-módulo e $I \subset R$ un ideal. Si $N \to M$ es un morfismo de módulos, $N/(IN) \to M/(IM)$ es suprayectivo, M es finitamente generado e $I \subset$* $\mathrm{rad}(R)$*, entonces $N \to M$ es suprayectiva.*

Con esto ya podemos demostrar que el funtor de Grassmann es representable:

Teorema 4.1 *Sea $0 < d < n$. El funtor $\mathscr{F} = Gr(d,n)$ definido anteriormente es representable por un esquema.*

Demostración: • **$\mathscr{F}$ es una gavilla en la topología de Zariski.** Consideremos un esquema S, una cubierta abierta $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ y cualquier colección de elementos $f_i \in \mathscr{G}$ que cumplan

$$f_i|_{S_i \cap S_j} = f_j|_{S_i \cap S_j}.$$

Si $f_i|_{S_i \cap S_j} = f_j|_{S_i \cap S_j}$, entonces f_i y f_j definen suprayecciones isomorfas cuando se restringen a $S_i \cap S_j$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{S_i \cap S_j}^{\oplus n} \arrow[r, "f_i|_{S_i \cap S_j}"] \arrow[dr, "f_j|_{S_i \cap S_j}"'] & Q_i|_{S_i \cap S_j} \arrow[d, "\beta"] \\
& Q_j|_{S_i \cap S_j}
\end{tikzcd}$$

por consiguiente

$$\mathscr{O}_{S_i \cap S_j}^{\oplus n}/\ker(f_i|_{S_i \cap S_j}) \cong Q_i|_{S_i \cap S_j} \cong Q_j|_{S_i \cap S_j} \cong \mathscr{O}_{S_i \cap S_j}^{\oplus n}/\ker(f_j|_{S_i \cap S_j}),$$

en donde Q_i y Q_j son gavillas de módulos localmente libres de rango d.
Por las equivalencias anteriores y el axioma del pegado de las gavillas, podemos pegar los Q_i para obtener una gavilla Q definida sobre todo S, es localmente libre de rango d puesto que cada Q_i lo es y además obtenemos una suprayección global $f : \mathscr{O}_S^n \to Q$ que está definida localmente por los

f_i. Por cómo se construye f se deduce que es la única tal que $f_i = f|_{S_i}$ en $\mathscr{G}$. Con esto se prueba que $\mathscr{G}$ es una gavilla en la topología de Zariski.

• **Definición de los funtores $\mathscr{F}_i$ y demostración de que son subfuntores de $\mathscr{F}$.** Sea I el conjunto de subconjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinalidad $n-k$. Dado un esquema S y $j \in \{1,\ldots,n\}$, denotamos por e_j a la sección global

$$e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \quad 1 \text{ en la } j\text{-ésima entrada}$$

de $\mathscr{O}_S^{\oplus n}$. Estas secciones generan libremente a $\mathscr{O}_S^{\oplus n}$. Similarmente para $j \in \{1,\ldots,n-k\}$, se denota por f_j a la sección global de $\mathscr{O}_S^{\oplus n-k}$ cuyas entradas son todas cero excepto la j-ésima entrada, donde es 1. Para $i \in I$, consideramos el morfismo de $\mathscr{O}_S$-módulos

$$s_i : \mathscr{O}_S^{\oplus n-k} \to \mathscr{O}_S^{\oplus n},$$

que, para cada abierto $U \subset S$, está definido por

$$\begin{array}{rccc} s_i|_U & : & \mathscr{O}_S^{\oplus n-k}(U) & \longrightarrow & \mathscr{O}_S^{\oplus n}(U) \\ & & f_j & \longmapsto & e_{i_j}, \end{array}$$

el cual es la suma directa de las coproyecciones $\mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_S^{\oplus n}$ correspondientes a los elementos de i. Pongamos un ejemplo: hagamos $n=6$, $k=3$, $j=1$ e $i=\{i_1=4, i_2=5, i_3=6\}$. Entonces

$$f_j = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto e_{i_j} = e_{i_1} = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora definimos el subfuntor $\mathscr{F}_i$. Con esta notación, para cada esquema S se escribe

$$\mathscr{F}_i(S) = \{q : \mathscr{O}^{\oplus n} \to Q \in \mathscr{F}(S) :\ q \circ s_i \text{ es suprayectiva }\} \subset \mathscr{F}(S).$$

Luego, dado un morfismo $f : T \to S$ de esquemas queremos ver que

$$\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(S) \to \mathscr{F}(T)$$

manda $\mathscr{F}_i(S)$ en $\mathscr{F}_i(T)$. Lo que sabemos es que f^* es un funtor exacto derecho, por tanto, para cualquier sucesión exacta de S módulos

$$0 \to E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \to 0,$$

se tiene la sucesión exacta derecha

$$f^*E_1 \xrightarrow{f^*f_1} E_2 \xrightarrow{f^*f_2} f^*E_3 \to 0,$$

de donde se deduce que si f_2 es suprayectiva, entonces f^*f_2 también lo es. Dado el morfismo de esquemas $f : S \to T$, el pullback f^*s_i es el análogo de s_i en T, es decir, que el morfismo $f^*s_i : \mathscr{O}_T^{\oplus n-k} \to \mathscr{O}_T^{\oplus n}$, está definido por

$$\begin{array}{rcccc} f^*s_i(V) & : & \mathscr{O}_T^{\oplus n-k}(V) & \longrightarrow & \mathscr{O}_T^{\oplus n}(V) \\ & & f_j & \longmapsto & e_{i_j}, \end{array}$$

para cada abierto $V \subset T$. Por consiguiente, el pullback de la composición $f^*(q \circ s_i) = f^*q \circ f^*s_i$ es suprayectiva y por tanto pertenece a $\mathscr{F}_i(T)$. En consecuencia, $\mathscr{F}_i$ es un subfuntor de $\mathscr{F}$.

• $\mathscr{F}_i$ **es representable.** Recordemos que I es el conjunto de subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ que tienen cardinalidad $n-k$. Para cada abierto U de un esquema X, vamos a hacer

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X) := \text{el conjunto subyacente del anillo } \mathscr{O}_X(U).$$

Tomamos $i \in I$, y como i tiene cardinalidad $n-k$, de manera conveniente reescribimos i como $i = \{1,\ldots,n-k\}$. De esta forma s_i es la inclusión de los primeros $n-k$ sumandos. Observemos que que $q \circ s_i$ es un mapeo suprayectivo entre módulos libres localmente finitos del mismo rango. Aplicamos el lema 2.2, y concluimos que $q \circ s_i$ es un isomorfismo.
Así, si $q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to Q$ es un elemento de $\mathscr{F}_i(S)$, entonces puede utilizarse $q \circ s_i$ para identificar a Q con $\mathscr{O}_S^{\oplus n-k}$, y entonces $q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to \mathscr{O}_S^{\oplus n-k}$ está definida por

$$\begin{array}{rcccc} q|_U & : & \mathscr{O}_S^{\oplus n}(U) & \longrightarrow & \mathscr{O}_S^{\oplus n-k}(U) \\ & & e_j & \longmapsto & f_j, \end{array}$$

para $j = 1,\ldots,n-k$. Visto en forma matricial sería

$$q = \begin{pmatrix} I_{n-k\times n-k} & M \end{pmatrix},$$

donde M es una matriz de $n-k \times k$ con coeficientes en $\mathscr{O}_S(U)$. De aquí podemos ver que hay tantas funciones q como matrices de $n-k \times k$ con coeficientes en $\mathscr{O}_X(U)$. Ahora queremos ver que $\mathscr{F}_i$ es isomorfo al funtor

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mathscr{F}}_i \ : \ Sch & \longrightarrow & Set \\ X & \longmapsto & \prod_{j=n-k+1}^{n} \Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k}) \end{array}.$$

Como la categoría de llegada de $\mathscr{F}_i$ y $\bar{\mathscr{F}}_i$ es la categoría de conjuntos, ver que ambos funtores son isomorfos consiste en probar que para todo esquema X existe una biyección entre $\mathscr{F}_i(X)$ y $\bar{\mathscr{F}}_i(X)$. Observemos que $\prod_{j=n-k+1}^{n} \Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k})$ es el producto cartesiano de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k})$ k-veces, de manera que un elemento de $\prod_{j=n-k+1}^{n} \Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k})$ se ve como $(a_1, \ldots, a_k)$, en donde cada a_i pertenece a $\Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k})$, que recordemos es el conjunto subyacente de $\mathscr{O}_X^{\oplus n-k}(X)$. Luego, podemos pensar en que un elemento de $\prod_{j=n-k+1}^{n} \Gamma(X, \mathscr{O}_X^{\oplus n-k})$ es una matriz de dimensión $n-k \times k$ con coeficientes en el anillo $\mathscr{O}_X(X)$. En consecuencia tenemos una biyección dada por $q \mapsto M$ y por tanto $\mathscr{F}_i$ es isomorfo al funtor $\bar{\mathscr{F}}_i$.

Luego, $\bar{\mathscr{F}}_i$ es isomorfo al producto del funtor

$$\begin{array}{rcl} \Lambda \ : \ Sch & \to & Set \\ S & \mapsto & \Gamma(S, \mathscr{O}_S) \end{array}$$

$k(n-k)$ veces consigo mismo, y además el funtor Λ está representado por $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ (véase el ejemplo 3.3). Se sigue que $\mathscr{F}_i$ está representado por $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{k(n-k)}$, puesto que el producto fibrado sobre $Spec(\mathbb{Z})$ es el producto en la categoría de los esquemas.

• **La inclusión $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}$ está representada por inmersiones abiertas.** Sea S un esquema y sea $q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to Q$ un elemento de $\mathscr{F}(S)$. Vamos a utilizar el lema 2.3 para mostrar que el conjunto

$$U_i = \{ s \in S : \ (q \circ s_i)_s \text{ es suprayectivo } \}$$

es abierto en S. Vamos a considerar el morfismo $(q \circ s_i)$. Por hipótesis tenemos que Q es de tipo finito y además tomaremos un $s \in U_i \subset S$, de manera que $(q \circ s_i)_s$ es suprayectivo. Por el lema 2.3, sabemos que existe una vecindad abierta de s, U_s tal que $(q \circ s_i)|_{U_s}$ es sobreyectiva. Pero $(q \circ s_i)|_{U_s}$ es suprayectiva si y solo si lo es en cada uno de sus tallos, lo cual implica que para todo $t \in U_s$ el morfismo $(q \circ s_i)_t$ es suprayectivo, y se sigue que $t \in U_i$, por lo tanto $s \in U_s \subset U_i$. Con esto hemos

demostrado que para cualquier elemento de U_i podemos encontrar una vecindad abierta que está contenida en U_i y podemos decir que U_i es un abierto.
El morfismo $(q\circ s_i)_s : \mathscr{O}_{S,s}^{\bigoplus n-k} \to Q_s$ induce

$$\begin{array}{rccc} \overline{(q\circ s_i)_s} & : & k(s)^{\bigoplus n-k} & \longrightarrow & Q_s/\mathfrak{m}_s Q_s \\ & & [a] & \longmapsto & [(q\circ s_i)_s(a)], \end{array}$$

en donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal del anillo local $\mathscr{O}_{S,s}$ y $k(s)=\mathscr{O}_{S,s}^{\bigoplus n-k}/\mathfrak{m}$ es el campo de residuos. Observemos que si $s\in U_i$, entonces $(q\circ s_i)_s$ es suprayectiva, lo cual implica que $\overline{(q\circ s_i)_s}$ también es suprayectiva. Por otra parte, como Q_s es un $\mathscr{O}_{S,s}$-módulo y $(q\circ s_i)$ es un morfismo de módulos, si suponemos que $\overline{(q\circ s_i)_s}$ es suprayectiva, entonces por el lema de Nakayama tenemos que $(q\circ s_i)_s$ es suprayectiva, pero esto implica que $s\in U_i$.
Con esto probamos que tenemos la equivalencia:

$$s\in U_i \Leftrightarrow \text{el mapeo } k(s)^{\oplus n-k} \to Q_s/\mathfrak{m}_s Q_s \text{ inducido por } (q\circ s_i)_s \text{ es suprayectiva. .}$$

Sea $f: T\to S$ un morfismo de esquemas y sea $t\in T$ un elemento que se corresponde con $s\in S$. Por el lema 2.1 tenemos

$$(f^*Q)_t = Q_s\otimes_{\mathscr{O}_{S,s}}\mathscr{O}_{T,t},$$

así, el morfismo

$$k(t)^{\oplus n-k}\to (f^*Q)_t/\mathfrak{m}_t(f^*Q)_t$$

inducido por $f^*(q\circ s_i)_t$ es el cambio de base del mapeo $k(s)^{\oplus n-k}\to Q_s/m_S Q_s$ de arriba mediante la extensión de campo $k(t)/k(s)$. Se sigue que $s\in U_i$ si y solo si t está en el abierto correspondiente a f^*q. En particular, $T\to S$ se factoriza a través de U_i si y solo si $f^*q\in\mathscr{F}_i(T)$, con lo cual tenemos que $\mathscr{F}_i$ está representado por inmersiones abiertas .

• **La colección $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ cubre a $\mathscr{F}$.** Para probar esto, debemos tomar una $q\in\mathscr{F}(S)$, para cualquier esquema S, y ver que existe una cubierta abierta $\{S_i\}$ de S tal que $q|_{S_i}$ pertenezca a $\mathscr{F}_i(S_i)$. Vamos a precisar a qué nos referimos, en este caso, con $q|_{S_i}$: la inclusión $\imath : S_i\hookrightarrow S$ induce la función de conjuntos:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}(\imath) & : & \mathscr{F}(S) & \longrightarrow & \mathscr{F}(S_i) \\ & & q & \longmapsto & q|_{S_i}, \end{array}$$

(recordemos que $q|_{S_i}$ es el elemento correspondiente a q en el morfismo inducido por la inclusión, no necesariamente significa que sea una restricción de funciones)
Pero queremos que $q|_{S_i}$ no solo pertenezca a $\mathscr{F}(S_i)$, aún más, queremos que $q|_{S_i}$ esté en $\mathscr{F}_i(S_i)$, es decir, que $q \circ s_i$ sea un morfismo suprayectivo.
Así pues, sea $q : \mathscr{O}_S^{\oplus n} \to Q$ un elemento de $\mathscr{F}(S)$. Tenemos que mostrar que para cada punto s de S existe un $i \in I$ tal que s_i es sobreyectiva en una vecindad de s. La unión de tales vecindades será nuestra cubierta abierta. Comencemos observando que

$$\overline{(q \circ s_i)_s} : k(s)^{\oplus n-k} \to k(s)^{\oplus n} \to Q_s/m_s Q_s$$

es suprayectiva, y esto es cierto porque el morfismo $k(s)^{\oplus n} \to Q_s/m_s Q_s$ induce en $Q_s/m_s Q_s$ una estructura de espacio vectorial de dimensión $n-k$. Entonces, como $\overline{(q \circ s_i)_s}$ es suprayectiva, por el lema de Nakayama, $(q \circ s_i)_s$ también lo es, y como un morfismo de gavillas es suprayectivo si es suprayectivo en cada morfismo inducido en sus fibras ([Eis00], p.15), tenemos en consecuencia que $(q \circ s_i)$ es suprayectivo. Por consiguiente, la colección $\{\mathscr{F}_i\}_{i \in I}$ cubre a $\mathscr{F}$.

Con esto concluye la demostración de que el funtor de Grassmann es representable.

$\square$

Capítulo 5

Epílogo

5.1. Resultados

Vimos que para los funtores contravariantes $Sch \to Set$ existe un criterio de representabilidad, el cual se basa en aprovechar las caracterísiticas locales (por ejemplo, nos fijamos en cubiertas abiertas de esquemas y en subfuntores y la representabilidad de éstos) para luego concluir con la representabilidad de manera general.

Demostramos, utilizando el criterio de representabilidad, que el funtor de Grassmann está representado, con lo cual pudimos responder a la pregunta de investigación de manera positiva.

5.2. Discusión

En los ejemplos de espacios moduli, pudimos observar que los haces vectoriales y las gavillas son objetos matemáticos que permiten parametrizar y 'guardar' cierta información de otros objetos matemáticos. Es muy importante notar que las gavillas permiten dar resultados globales a partir de resultados locales.

Vimos también que existen patologías en la teoría y que por lo tanto no todo problema moduli tiene un espacio solución, si bien modificando un poco el problema inicial pudimos encontrar resultados favorables. Por esta misma razón y dado que un encontrar un espacio moduli fino equivale a demostrar que el funtor moduli es representable, nos interesó encontrar propiedades o criterios que debe cumplir el funtor para saber si es representable o no.

De igual forma, es notable cómo el lenguaje de las categorías permite expresar en términos convenientes a los problemas moduli. Además, el lema de Yoneda y la representabilidad de funtores nos dan una idea de lo importante que son los morfismos en un categoría y de las cosas que nos permiten decir acerca de los objetos; por ejemplo, gracias al lema de Yoneda sabemos que el objeto que representa a un funtor es único (salvo isomorfismo), y en consecuencia un espacio moduli fino es único.

5.3. Conclusiones y Recomendaciones

En primer lugar, mencionamos que la teoría de categorías es un lenguaje apropiado para expresar los problemas moduli. Pero también hicimos uso de otras teorías: utilizamos las propiedades de los haces vectoriales y de las gavillas de módulos para parametrizar a las familias.

También vimos que el problema de clasificar endomorfismos de espacios vectoriales puede tener como solución un espacio moduli grueso o fino, dependiendo de qué tanto acotemos a las familias. Por otra parte, el problema de clasificar los subespacios vectoriales y una dimensión fijada tiene como solución un problema moduli fino. Esto último responde a nuestra pregunta de investigación e hipótesis.

En cuanto a la metodología utilizada, podemos decir que fue la metodología ideal, debido a que estos resultados son puramente teóricos y están basados en bibliografía ya existente.

Bibliografía

[SP23] Authors of The Stacks Project (2023) The Stacks Project. Obtenido de `ttps://stacks.mat`.columbia.edu

[Ben08] Ben-Zvi, D. (2008). Moduli spaces. The Princeton companion to mathematics, 42, 111-156.

[Car15] Cartier, P. (2015). Alexander Grothendieck: A Country Known Only by Name. *Notices of the AMs*, 62(4).

[Eis00] Eisenbud, D., Harris, J. (2000) *Geometry of Schemes* (Vol. 197) Springer Science & Business Media.

[Fan05] Fantechi, B., Göttsche, L., Illusie, L., Kleiman, S., Nitsure, N., & Geometry, A. V. F. A. (2005). Grothendieck's FGA Explained. In *Amer. Math. Soc.*

[Gray06] Gray, J. W. (2006). Fragments of the history of sheaf theory. In *Applications of Sheaves: Proceedings of the Research Symposium on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra, and Analysis,* Durham, July 9?21, 1977 (pp. 1-79). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[Har13] Hartshorne, R. (2013) *Algebraic geometry*. Springer Science & Business Media.

[Hat03] Hatcher, A. (2003). Vector bundles and K-theory. Obtenido de `ttp://www.mat`.cornell.edu/ hatcher.

[Hos15] Hoskins, V. (2015). Moduli problems and geometric invariant theory. *Lecture notes 2016*, 7(28), 12.

[Hud07] Hudec, D. A. (2007) The Grassmannian as a Projective Variety. *Proccedings VIGRE REU 2007*.

[Hus66] Husemöller, D. (1966) *Fibre Bundles* New York: McGraw-Hill.

[Ji15] Ji, L. (2015). The Story of Reimann's Moduli Space. *Notices of the International Consortium of Chinese Mathematicians*, 3(2), 46-73.

[Mac13] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

[Mar06] Marquis, J.P.(2006) "What is Category Theory?". Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy.

[Mum70] Mumford, D. (1970) *Introduction to theory of moduli*. Proceedings of the 5th Nordic Summer-School in Mathematics

[Mum15] Mumford, D. & Oda, T. (2015) *Algebraic Geometry II*.

[Mun00] Munkres, J. (2000) *Topology* Prentice Hall.

[New78] Newstead, P. E. (1978). Introduction to moduli problems and orbit spaces. TIFR Lect. *Notes* , 51.

[Lei14] Leinster, T. (2014). *Basic category theory* (Vol. 143). Cambridge University Press.

[Vak17] Vakil, R. (2017). The rising sea: Foundations of algebraic geometry. it preprint.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de Tesis:	Funtores representables y problemas moduli
Autor de la Tesis:	Isaac Javier Díaz
ORCID:	0009-0007-9532-8824
Resumen de la Tesis:	**Resumen:** En este trabajo se estudia la relación que hay entre los funtores representables y los problemas moduli. El resultado principal presentado en esta tesis es que el funtor Grassmanniano está representado por un esquema. **Abstract:** In this work we study the relation between representable functors and moduli problems. The main result in this thesis is that the Grassmann's functor is represented by a scheme.
Palabras claves de la Tesis:	Teoría de categorías, problema moduli, funtor representable, espacio moduli, funtor de Grassmann.
Referencias citadas:	1. Authors of The Stacks Project (2023) The Stacks Project. Obtenido de `ttps://stacks.mat.columbia.edu` 2. Ben-Zvi, D. (2008). Moduli spaces. The Princeton companion to mathematics, 42, 111-156. 3. Cartier, P. (2015). Alexander Grothendieck: A Country Known Only by Name. *Notices of the AMs*, 62(4).

4. Eisenbud, D., Harris, J. (2000) *Geometry of Schemes* (Vol. 197) Springer Science & Business Media.

5. Fantechi, B., Göttsche, L., Illusie, L., Kleiman, S., Nitsure, N., & Geometry, A. V. F. A. (2005). Grothendieck's FGA Explained. In *Amer. Math. Soc.*

6. Gray, J. W. (2006). Fragments of the history of sheaf theory. In *Applications of Sheaves: Proceedings of the Research Symposium on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra, and Analysis,* Durham, July 9?21, 1977 (pp. 1-79). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

7. Hartshorne, R. (2013) *Algebraic geometry*. Springer Science & Business Media.

8. Hatcher, A. (2003). Vector bundles and K-theory. Obtenido de `ttp://www.mat.`cornell.edu/ hatcher.

9. Hoskins, V. (2015). Moduli problems and geometric invariant theory. *Lecture notes 2016*, 7(28), 12.

10. Hudec, D. A. (2007) The Grassmannian as a Projective Variety. *Proccedings VIGRE REU 2007*.

11. Husemöller, D. (1966) *Fibre Bundles* New York: McGraw-Hill.

12. Ji, L. (2015). The Story of Reimann's Moduli Space. *Notices of the International Consortium of Chinese Mathematicians*, 3(2), 46-73.

13. Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

14. Marquis, J.P.(2006) "What is Category Theory?". Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy.

15. Mumford, D. (1970) *Introduction to theory of moduli*. Proceedings of the 5th Nordic Summer-School in Mathematics

16. Mumford, D. & Oda, T. (2015) *Algebraic Geometry II*.

17. Munkres, J. (2000) *Topology* Prentice Hall.

18. Newstead, P. E. (1978). Introduction to moduli problems and orbit spaces. TIFR Lect. *Notes* , 51.

19. Leinster, T. (2014). *Basic category theory* (Vol. 143). Cambridge University Press.

20. Vakil, R. (2017). The rising sea: Foundations of algebraic geometry. it preprint.