



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas



MÉTODO DE NEWTON
PARA BÚSQUEDAS EN LÍNEA
EN EL ESPACIO $(L^2)^3$

Tesis
Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
CINTHIA NATY CORTAZAR CORTAZAR

Director de tesis:
Dr. Jorge López López

Cunduacán, Tabasco.

Marzo 2021



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

18 de marzo de 2021

IC. CINTHIA NATY CORTZAR CORTAZAR
PASANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS APLICADAS
PRESENTE.

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**MÉTODO DE NEWTON PARA BÚSQUEDAS EN LÍNEA EN EL ESPACIO (L^2)³**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR

3

DR'GDP/M'NLBA
C.c.p.- Archivo.

Miembro CUMEX desde 2008

**Consortio de
Universidades
Mexicanas**

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada " **MÉTODO DE NEWTON PARA BÚSQUEDAS EN LÍNEA EN EL ESPACIO $(L^2)^3$** ", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

³ Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 30 días del mes de Marzo de año 2021.

AUTORIZÓ



CINTHIA NATY CORTAZAR CORTAZAR
182A15001

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	IV
1. Preliminares: Teoría Básica	1
1.1. Espacios vectoriales y transformaciones lineales	1
1.2. Producto interno, normas y métricas	3
1.3. Espacios de Hilbert	6
1.4. Espacio $(L^2(0, T))^3$	10
2. Problemas de búsqueda en línea en $L^2(0, T)$	17
2.1. Un problema de búsqueda en línea en $L^2(0, T)$	17
2.2. Un problema de búsqueda en línea es un problema de minimización en $\mathbb{R}$	18
2.3. Método de Newton para resolver el problema de búsqueda en línea	26
3. Problemas de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$	27
3.1. Un problema de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$	27
3.2. El problema de búsqueda en línea como un problema de minimización en $\mathbb{R}$	28
3.3. Método de Newton para resolver el problema de búsqueda en línea	35
4. Discretización	36
4.1. Discretización del problema de búsqueda en línea	36
4.2. Discretización del Funcional	38

4.3. Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.2)	39
4.4. Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias Adjunto	39
4.5. Discretización del producto interno	39
4.6. Discretización de $g'(\rho)$ y $g''(\rho)$	40
4.7. Programa	41
4.8. Resultados numéricos	41
Conclusión	51
Bibliografía	52
Apéndice A.1: Adimensionalización del sistema	54
Apéndice A.2: Derivando con respecto a ρ los sistemas diferenciales	55

Agradecimientos

Dedicado a:

A Dios todopoderoso, por su inmensa bondad, por el amor que me ha dado, por el don de la vida, por las oportunidades y por fortalecerme en todas mis dificultades, hoy, alcanzo otra de mis metas, ¡Gracias Dios mío, por acompañarme siempre!

Agradezco a mi Director de tesis al **Dr. Jorge López López** que con sus conocimientos me orientó acertadamente a través de cada una de las etapas de este proyecto hasta alcanzar este resultado, Gracias Doctor, por el soporte y discusión crítica que me permitió un buen aprovechamiento en este trabajo realizado, hoy vemos culminada nuestra tesis.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**) por brindarme el apoyo económico con número de becario 934671 para realizar mis estudios de maestría, gracias por el apoyo que brindan, es una institución increíblemente comprometida con la formación de profesionales.

A la familia **CORTAZAR CORTAZAR**, MI FAMILIA, gracias por impulsarme, por brindarme cobijo y amor, porque a pesar de las dificultades que hemos enfrentado, hemos reforzado cada día, los lazos fuertes del amor y el respeto, me siento feliz de formar parte, de esta maravillosa familia.

A todos mis amigos, pues son una parte importante en mi vida, gracias por acompañarme a lo largo de este trabajo de tesis, por eso menciono de manera especial a María Fernanda y Nashiely Juanita por impulsarme a cada momento, mi vida ha sido mejor desde que les conozco, soy muy afortunada de contar con ustedes. ¡Chicas, hemos terminado!

A mis profesores, por enriquecer mis conocimientos y así, poder realizarme profesionalmente, de manera particular **Profesora Tachi**, las mejores lecciones las aprendí de usted, logró inspirarme y darme confianza en mí misma y en mi futuro, gracias por dejar sus huellas plasmadas en mi corazón.

A todos: Muchas gracias.

Cinthia Naty Cortazar Cortázar

Introducción

En este trabajo vamos a considerar un modelo para la dinámica de un circuito de 3 juntas de Josephson acopladas inductivamente, como el que muestra la Figura 1.

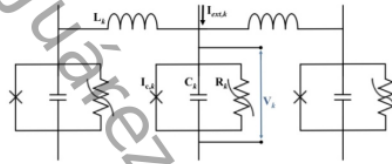


Figura 1: El circuito considerado de tres juntas de Josephson.

En este circuito, en cada junta de Josephson se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} V &= \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}, \\ I &= I_c \sin(\phi), \end{aligned} \quad (1)$$

donde

- $V(t)$ e $I(t)$ son el voltaje y la corriente a través de la junta de Josephson al tiempo $t > 0$.
- ϕ es la 'diferencia de fase' a través de la junta.
- I_c es una constante, la corriente crítica de la junta.
- $\frac{\hbar}{2e}$ es el flujo cuántico magnético, el inverso de la constante de Josephson.

En el caso que se tuviera un circuito con una sola junta, la ecuación de balance es

$$C \frac{d}{dt} V + \frac{1}{R} V + I_J = I_{ext}, \quad (2)$$

donde el primer término corresponde a la función de la junta como capacitor, el segundo a la función de la junta como una simple resistencia y el tercero a que la junta genera corriente aún en ausencia de voltaje.

El circuito que se muestra en la Figura 1 involucra para cada junta un voltaje, una resistencia, una capacitancia, una corriente externa y una corriente propia de la junta, pero todas ellas pueden describirse en términos de la fase de la junta, gracias a la relación (1). Podemos entonces reescribir la ecuación (2) solo en términos de ϕ como

$$\frac{hC}{2e} \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{h}{2eR} \frac{d\phi(t)}{dt} + I_c \sin(\phi(t)) = I_{ext} \quad (3)$$

y si consideramos los siguientes cambios de variable

$$\tau = \omega_J t, \quad \omega_J^2 = \frac{2e I_c}{h C}, \quad i = \frac{I_{ext}}{I_c}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{hC}{2e I_c}} \frac{1}{RC} = (\omega_J RC)^{-1},$$

podemos obtener la versión adimensional de la ecuación de balance

$$\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \gamma \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \sin(\psi(\tau)) = i. \quad (4)$$

En el caso cuando se tienen 3 juntas, el sistema se escribe como

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi_1}{d\tau^2} + \gamma_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} + \kappa_1(\psi_1 - \psi_2) + \sin \psi_1 = i_1, \\ \frac{d^2\psi_2}{d\tau^2} + \gamma_2 \frac{d\psi_2}{d\tau} + \kappa_1(\psi_2 - \psi_1) + \kappa_2(\psi_2 - \psi_3) + \sin \psi_2 = i_2, \\ \frac{d^2\psi_3}{d\tau^2} + \gamma_3 \frac{d\psi_3}{d\tau} + \kappa_2(\psi_3 - \psi_2) + \sin \psi_3 = i_3, \end{cases} \quad (5)$$

Si la capacitancia de las juntas puede ser despreciada, entonces los términos de segundo orden del sistema (5) pueden despreciarse para obtener

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} + \kappa_1(\psi_1 - \psi_2) + \sin \psi_1 = i_1, \\ \gamma_2 \frac{d\psi_2}{d\tau} + \kappa_1(\psi_2 - \psi_1) + \kappa_2(\psi_2 - \psi_3) + \sin \psi_2 = i_2, \\ \gamma_3 \frac{d\psi_3}{d\tau} + \kappa_2(\psi_3 - \psi_2) + \sin \psi_3 = i_3. \end{cases} \quad (6)$$

En este trabajo nos interesa estudiar el sistema (6) desde el punto de vista de controlabilidad para optimizar la transición del estado del sistema de una

configuración estable a otra. Es decir, nos interesa resolver el problema de minimización siguiente:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u} \text{ en } (L^2(0, T))^3 \text{ tal que} \\ J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in (L^2(0, T))^3, \end{cases} \quad (7)$$

donde,

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|^2, \quad (8)$$

con $k, \eta > 0$ y $\|\cdot\|$ la norma euclideana canónica, donde $\mathbf{v}$ es una función vectorial, $\mathbf{v} = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))^T$, $\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ y $\mathbf{y} = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ es la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + \kappa_1(y_1 - y_2) + \sin y_1 = i_1 + v_1 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{dy_2}{dt} + \kappa_1(y_2 - y_1) + \kappa_2(y_2 - y_3) + \sin y_2 = i_2 + v_2 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{dy_3}{dt} + \kappa_2(y_3 - y_2) + \sin y_3 = i_3 + v_3 \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (9)$$

donde $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, $\kappa_i, i = 1, 2$, $i_m, m = 1, 2, 3$ son conocidos. En (8)–(9), $\mathbf{y}_0$ y $\mathbf{y}_T$ son estados de equilibrio inicial y final, respectivamente, k es un parámetro de penalización y η un parámetro de regularización. Este modelo representa la dinámica de un circuito de 3 juntas Josephson acopladas inductivamente, y que está influenciado por 3 controles, cada uno de los cuales actúa en una junta. Entonces en general nos interesa resolver el problema de minimización (7)–(9). Para esto se pretende usar el método de gradiente conjugado, el cual en cada iteración involucra la solución de un problema de búsqueda en línea de la forma

$$\begin{cases} \text{Determinar } \rho^* \text{ en } \mathbb{R} \text{ tal que} \\ J(\mathbf{v} - \rho^* \mathbf{w}) \leq J(\mathbf{v} - \rho \mathbf{w}), \forall \rho \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (10)$$

con $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ fijos en $(L^2(0, T))^3$. En este trabajo de tesis nos concentraremos particularmente en resolver computacionalmente con el método de Newton estos problemas de búsqueda en línea.

Preliminares: Teoría Básica

En este capítulo abordaremos definiciones y resultados básicos de álgebra lineal, análisis y análisis funcional: desde la definición de espacio vectorial, pasando por normas y sucesiones de Cauchy hasta espacios de Hilbert, los cuales serán utilizados en el desarrollo de este trabajo.

1.1. Espacios vectoriales y transformaciones lineales

Definición 1.1.1. Sea $\mathbf{K}$ un campo (puede ser real $\mathbb{R}$ o complejo $\mathbb{C}$). Un conjunto $\mathbf{V}$ se llama **espacio vectorial** si se tienen definidas dos operaciones:

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \text{ y}$$

$$\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

que satisfacen

1. Si $v_1, v_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathbf{V}$ (Cerradura con la suma).
2. Si $v_1, v_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \in \mathbf{V}$ (Conmutatividad con la suma).
3. Existe $e \in \mathbf{V}$ tal que $v + e = v, \forall v \in \mathbf{V}$ (Neutro aditivo).
4. Dado $v \in \mathbf{V} \exists -v \in \mathbf{V} \ni v + (-v) = e$ (Inverso aditivo).
5. Para todo $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V}, v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (Asociativa con la Suma).
6. Si $r \in \mathbf{K}$ y $v \in \mathbf{V} \Rightarrow rv \in \mathbf{V}$ (Cerradura con el Producto Escalar).
7. Si $r \in \mathbf{K}, v_1, v_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$ (Distributiva con la suma).

8. Si $r_1, r_2 \in \mathbf{K}$ y $v \in \mathbf{V} \Rightarrow r_1(r_2v) = (r_1r_2)v$ (Asociativa con el producto por escalar).
9. Si $r_1, r_2 \in \mathbf{K}, v \in \mathbf{V} \Rightarrow (r_1 + r_2)v = r_1v + r_2v$ (Distributiva con dos escalares).

Definición 1.1.2. $L^2(0, T)$ es el conjunto de clases de equivalencia de las funciones medibles $\mathbf{F}$ que son cuadrado integrable en $(0, T)$. Esto es,

$$L^2(0, T) = \{\tilde{f} : f \in \mathbf{F} \text{ y } \int_0^T |f|^2 dx < \infty\}$$

donde $\tilde{f} = \{g \in \mathbf{F} : f(x) = g(x) \text{ casi donde quiera}\}$.

Para verificar que todas las funciones de una clase de equivalencia son cuadrado integrables basta verificar que una de ellas es cuadrado integrable, ya que estas son casi iguales, es decir, varían en un conjunto tan pequeño que no afecta la integral. Formalmente se dice que difieren en un conjunto de medida cero. En lo sucesivo y cuando no haya lugar a confusión usaremos f para función o para clase de equivalencia según el contexto.

Ejemplo 1.1.3. El conjunto $L^2(0, T)$ con las operaciones:

$$+ : L^2(0, T) \times L^2(0, T) \Rightarrow L^2(0, T)$$

$$\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f + g},$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$$

$$\lambda \tilde{f} = \widetilde{\lambda f},$$

es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.4. Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales reales. Una **Transformación Lineal** $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es una función que asigna a cada vector $v \in \mathbf{V}$ un vector único $\mathbf{T}v \in \mathbf{W}$ y que satisface, para cada u, v en $\mathbf{V}$ y cada escalar α ,

$$\text{i) } \mathbf{T}(u + v) = \mathbf{T}(u) + \mathbf{T}(v).$$

$$\text{ii) } \mathbf{T}(\alpha v) = \alpha \mathbf{T}(v).$$

Se escribe $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ para indicar que $\mathbf{T}$ toma el espacio vectorial real $\mathbf{V}$ y lo lleva al espacio vectorial real $\mathbf{W}$; esto es, $\mathbf{T}$ es una función con $\mathbf{V}$ como dominio y un subconjunto de $\mathbf{W}$ como su imagen.

Ejemplo 1.1.5. Sean los espacios vectoriales

$$\mathbf{V} = L^2(0, T) \text{ y } \mathbf{W} = L^2(0, T)$$

y la transformación $\mathbf{T} : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ definida por $\mathbf{T}(\tilde{f}) = k\tilde{f}$, donde k es fijo en $\mathbb{R}$; esta transformación es lineal.

Definición 1.1.6. (Espacio dual algebraico). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbf{K}$. El espacio dual algebraico de $\mathbf{V}$ denotado por $\mathbf{V}^*$ se define como el conjunto de todas las transformaciones lineales $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}$ equipado con una operación suma y una multiplicación por escalar definidas para $\varphi, \psi \in \mathbf{V}^*$ por:

- $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \forall v \in \mathbf{V}.$
- $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v), \forall v \in \mathbf{V}.$

Con estas operaciones, $\mathbf{V}^*$ es un espacio vectorial.

Caracterización de la continuidad: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos espacios normados, una transformación lineal $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es continua si y sólo si

$$\text{Existe } M \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ tal que } \|\mathbf{T}(v)\| \leq M\|v\|, \forall v \in \mathbf{V}.$$

Nota: La transformación lineal del ejemplo 1.2.3 es continua.

Definición 1.1.7. (Espacio dual continuo). Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial normado (por ejemplo un espacio de Banach o un espacio de Hilbert) sobre un campo $\mathbf{K}$. El espacio dual continuo de $\mathbf{V}$ denotado por $\mathbf{V}'$ se define como el conjunto de todas las transformaciones lineales continuas $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}$.

Nota: En el caso de espacios de dimensión finita, el dual continuo o topológico coincide con el dual algebraico. En general, el espacio algebraico siempre es mas grande ya que no pide continuidad solo que sean lineales, en cambio el dual continuo o topológico consiste de funciones lineales que son continuas con respecto a la norma dada.

1.2. Producto interno, normas y métricas

Definición 1.2.1. Un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ se denomina **espacio con producto interno** si para cada par ordenado de vectores u y v en $\mathbf{V}$, existe un número real único (u, v) , denominado **producto interno** de u y v , tal que si u, v y w están en $\mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

1. $(v, v) \geq 0$.
2. $(v, v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.
3. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$.
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.
5. $(u, v) = (v, u)$.
6. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$.

Ejemplo 1.2.2. El espacio vectorial $L^2(0, T)$ se puede equipar con el siguiente producto interno:

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_0^T f g dx.$$

A este producto interno lo llamaremos el producto interno usual.

Ejemplo 1.2.3. Sean los espacios vectoriales

$$\mathbf{V} = L^2(0, T) \text{ y } \mathbf{W} = \mathbb{R}.$$

Sean $\tilde{u}, \tilde{v} \in L^2(0, T)$. Sea $\tilde{f}$ fija en $L^2(0, T)$. Consideramos la transformación $T(\tilde{v}) = (\tilde{f}, \tilde{v})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\tilde{u} + \tilde{v}) &= (\tilde{f}, \tilde{u} + \tilde{v}) \\ &= (\tilde{f}, \tilde{u}) + (\tilde{f}, \tilde{v}) \\ &= \mathbf{T}(\tilde{u}) + \mathbf{T}(\tilde{v}). \end{aligned}$$

Así que se cumple *i)* en la definición 1.1.4. Además

$$\mathbf{T}(\alpha \tilde{v}) = (\tilde{f}, \alpha \tilde{v}) = (\alpha \tilde{f}, \tilde{v}) = \alpha (\tilde{f}, \tilde{v}) = \alpha \mathbf{T}(\tilde{v}),$$

por lo que se cumple *ii)* en la definición 1.1.4 y por lo tanto la transformación $\mathbf{T}$ es lineal. ■

Definición 1.2.4. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real. Una **norma** en $\mathbf{V}$ es una función $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\|u\| \geq 0, \forall u \in \mathbf{V}$ y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$.
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall u \in \mathbf{V}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in \mathbf{V}$.

Nota: Usaremos una notación especial para ciertas normas:

- $|\cdot|$ para la norma en $\mathbb{R}$, es decir cuando la norma es el valor absoluto,
- $\|\cdot\|_E$ para la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$,
- $\|\cdot\|_\infty$ para la norma infinito en $\mathbb{R}^n$,
- $\|\cdot\|_{L^2}$ para la norma en $L^2(0, T)$ que se definirá más adelante en (1.1),
- $\|\cdot\|_{(L^2)^3}$ para la norma en $(L^2(0, T))^3$ que se definirá en (1.2).

Ejemplo 1.2.5. En el espacio vectorial $L^2(0, T)$ la función

$$\|\tilde{f}\|_{L^2} = (\tilde{f}, \tilde{f})^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

es una norma.

Definición 1.2.6. Sea $\mathbf{S}$ un conjunto no vacío, una función $d: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una métrica si cumple:

- (a) $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in \mathbf{S}$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- (b) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in \mathbf{S}$.
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in \mathbf{S}$.

A la pareja $(\mathbf{S}, d)$ se le llama **espacio métrico**.

Ejemplo 1.2.7. En el espacio de las funciones cuadrado integrables, $L^2(0, T)$, definimos la función

$$d(\tilde{f}, \tilde{g}) = \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^2} = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta función es una métrica. Notemos que cumple (a) de la definición 1.2.6, puesto que $d(\tilde{f}, \tilde{g}) > 0$ ya que es el resultado de integrar una función positiva

y el caso de que sea cero solo ocurre cuando $f = g$; además cumple (b) $d(\tilde{f}, \tilde{g}) = d(\tilde{g}, \tilde{f})$ ya que

$$d(\tilde{f}, \tilde{g}) = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T |g(t) - f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = d(\tilde{g}, \tilde{f}).$$

Para probar (c) tenemos que ver que se cumple

$$d(\tilde{f}, \tilde{g}) \leq d(\tilde{f}, \tilde{h}) + d(\tilde{h}, \tilde{g}),$$

sabemos que

$$d(\tilde{f}, \tilde{g}) = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si agregamos un cero dentro de la integral de la forma $-h(t) + h(t)$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}, \tilde{g}) &= \left(\int_0^T |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T |(f(t) - h(t)) + (h(t) - g(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando la **desigualdad de Minkowski** tenemos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}, \tilde{g}) &= \left(\int_0^T |(f(t) - h(t)) + (h(t) - g(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \left(\int_0^T |f(t) - h(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T |h(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= d(\tilde{f}, \tilde{h}) + d(\tilde{h}, \tilde{g}). \\ &\therefore d(\tilde{f}, \tilde{g}) \leq d(\tilde{f}, \tilde{h}) + d(\tilde{h}, \tilde{g}), \end{aligned}$$

con lo cual verificamos que efectivamente d es una métrica. ■

1.3. Espacios de Hilbert

Definición 1.3.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbf{V}$. Sea $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbf{V}$. Diremos que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, si para todo número real $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los números naturales $m, n > N$

$$\|v_n - v_m\| < \epsilon.$$

Ejemplo 1.3.2. Sea $\mathbb{R}$ un espacio vectorial con norma $|\cdot|$. Considere la sucesión $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, esta sucesión es de Cauchy, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces para $n, m \geq N$ tenemos

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \text{ (por definición)} \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| \text{ (por propiedades del valor absoluto)} \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \text{ (ya que } n, m \geq N) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3. Sea $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|_E$. Consideremos la sucesión $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$, x_n es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $N = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$, entonces para $n, m \geq N$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_E &= \|x_n - (0, 1) + (0, 1) - x_m\|_E \\ &= \|(x_n - (0, 1)) + ((0, 1) - x_m)\|_E \\ &\leq \|x_n - (0, 1)\|_E + \|(0, 1) - x_m\|_E \\ &< \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{\sqrt{2}}{m} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$ para $n, m \geq N$.

Ejemplo 1.3.4. Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n(x)\} = \frac{nx}{x+n}$ en $[0, 1]$. Con la norma infinito, $f_n(x)$ es de Cauchy, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$. Sea $f(x) = x$ y notemos que

$$\begin{aligned}\|f_n - f(x)\|_\infty &= \sup \left\{ \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| : x \in [0, 1] \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{-x^2}{n+x} \right| : x \in [0, 1] \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geq N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_\infty &= \|f_n - f(x) + f(x) - f_m\|_\infty \\ &= \|(f_n - f(x)) + (f(x) - f_m)\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f(x)\|_\infty + \|f(x) - f_m\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n, m \geq N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5. Consideremos la sucesión $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$. $\{x_n\}$ es de Cauchy, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$. Para ver esto notemos que dado $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|x_n - e| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq N = \left\lceil e + \frac{\varepsilon}{2} \right\rceil.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_m| &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right| \\
 &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right| \\
 &= \left| \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right) + \left(e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right) \right| \\
 &\leq \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| + \left| e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n, m \geq N = \left\lceil e + \frac{\varepsilon}{2} \right\rceil \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Con esto probamos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy usando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

lo cual nos dice que la sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$, puesto que el número e no es racional.

Definición 1.3.6. Un espacio métrico X , es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

Ejemplo 1.3.7. El espacio $L^2(0, T)$ es un espacio completo con $\|\tilde{x}\| = \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Definición 1.3.8. Un espacio vectorial real V se llama espacio prehilbertiano, si está equipado con un producto interior (y por lo tanto con la norma asociada).

Ejemplo 1.3.9. $L^2(0, T)$ es un espacio prehilbertiano.

Definición 1.3.10. Sea V un espacio vectorial con producto interior y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por este producto. Si V es completo respecto a $\|\cdot\|$, es decir, si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V , entonces V se llama un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.3.11. $L^2(0, T)$ es un espacio de Hilbert con $\|\tilde{f}\|_{L^2} = (\tilde{f}, \tilde{f})^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 1.3.12. ¹⁴ **Teorema de representación de Riesz:** Sea H un espacio de Hilbert con el producto interno $(\cdot, \cdot)$. Para todo F en H' (El dual continuo de H : los mapeos lineales y continuos de H en $\mathbb{R}$), existe un único f en H tal que $\langle F, w \rangle \equiv F(w) = (f, w)$, $\forall w \in H$.

Nota: La demostración tanto para el ejemplo 1.3.11 como para el teorema 1.3.12 puede verse en [9].

1.4. Espacio $(L^2(0, T))^3$

Definición 1.4.1. $(L^2(0, T))^3$ son todas las triadas de funciones en $L^2(0, T)$. Esto es

$$\begin{aligned}(L^2(0, T))^3 &= L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times L^2(0, T) \\ &= \{(f_1, f_2, f_3) : f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T)\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.4.2. El conjunto $(L^2(0, T))^3$ es un **espacio vectorial** con

$$\begin{aligned}\mathbf{f} + \mathbf{g} &= (f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \\ \lambda \mathbf{f} &= \lambda(f_1, f_2, f_3) = (\lambda f_1, \lambda f_2, \lambda f_3).\end{aligned}$$

Verifiquemos que se cumplen las propiedades de espacio vectorial.

Sean $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ y $\mathbf{e} = (0, 0, 0)$.

1. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g} \in (L^2(0, T))^3$ (Cerradura con la suma).

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = (f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \in (L^2(0, T))^3.$$

2. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3$ (Conmutatividad con la suma).

$$\begin{aligned}\mathbf{f} + \mathbf{g} &= (f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3) \\ &= (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \\ &= (g_1 + f_1, g_2 + f_2, g_3 + f_3) \\ &= (g_1, g_2, g_3) + (f_1, f_2, f_3) \\ &= \mathbf{g} + \mathbf{f}.\end{aligned}$$

3. Existe $\mathbf{e} \in (L^2(0, T))^3$ tal que $\mathbf{f} + \mathbf{e} = \mathbf{f}$, $\forall \mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3$ (Neutro aditivo).

$$\mathbf{f} + \mathbf{e} = (f_1, f_2, f_3) + (0, 0, 0) = (f_1 + 0, f_2 + 0, f_3 + 0) = (f_1, f_2, f_3)$$

4. Dado $\mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3 \exists -\mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3 \ni \mathbf{f} + (-\mathbf{f}) = \mathbf{e}$ (Inverso aditivo).

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + (-\mathbf{f}) &= (f_1, f_2, f_3) + (-(f_1, f_2, f_3)) \\ &= (f_1, f_2, f_3) + (-f_1, -f_2, -f_3) \\ &= (f_1 + (-f_1), f_2 + (-f_2), f_3 + (-f_3)) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= \mathbf{e}. \end{aligned}$$

5. Para todo $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in (L^2(0, T))^3$, $\mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h}) = (\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h}$ (Asociativa con la Suma).

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h}) &= (f_1, f_2, f_3) + (g_1 + h_1, g_2 + h_2, g_3 + h_3) \\ &= (f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3) + (h_1, h_2, h_3) \\ &= (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) + (h_1, h_2, h_3) \\ &= (\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h}. \end{aligned}$$

6. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow \lambda \mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3$ (Cerradura con el Producto Escalar).

$$\lambda \mathbf{f} = \lambda(f_1, f_2, f_3) = (\lambda f_1, \lambda f_2, \lambda f_3) \in (L^2(0, T))^3.$$

7. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow \lambda(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \lambda \mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}$ (Distributiva con la suma).

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= \lambda(f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \\ &= (\lambda(f_1 + g_1), \lambda(f_2 + g_2), \lambda(f_3 + g_3)) \\ &= (\lambda f_1 + \lambda g_1, \lambda f_2 + \lambda g_2, \lambda f_3 + \lambda g_3) \\ &= (\lambda f_1, \lambda f_2, \lambda f_3) + (\lambda g_1, \lambda g_2, \lambda g_3) \\ &= \lambda(f_1, f_2, f_3) + \lambda(g_1, g_2, g_3) \\ &= \lambda \mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}. \end{aligned}$$

8. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow \lambda_1(\lambda_2 \mathbf{f}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{f}$ (Asociativa con el producto por escalar).

$$\begin{aligned}\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{f}) &= \lambda_1(\lambda_2 f_1, \lambda_2 f_2, \lambda_2 f_3) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 f_1, \lambda_1 \lambda_2 f_2, \lambda_1 \lambda_2 f_3) \\ &= ((\lambda_1 \lambda_2) f_1, (\lambda_1 \lambda_2) f_2, (\lambda_1 \lambda_2) f_3) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2)(f_1, f_2, f_3) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{f}.\end{aligned}$$

9. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{f} = \lambda_1 \mathbf{f} + \lambda_2 \mathbf{f}$ (Distributiva con dos escalares).

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{f} &= ((\lambda_1 + \lambda_2) f_1, (\lambda_1 + \lambda_2) f_2, (\lambda_1 + \lambda_2) f_3) \\ &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1, \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_2, \lambda_1 f_3 + \lambda_2 f_3) \\ &= (\lambda_1 f_1, \lambda_1 f_2, \lambda_1 f_3) + (\lambda_2 f_1, \lambda_2 f_2, \lambda_2 f_3) \\ &= \lambda_1 (f_1, f_2, f_3) + \lambda_2 (f_1, f_2, f_3) \\ &= \lambda_1 \mathbf{f} + \lambda_2 \mathbf{f}. \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1.4.3. El espacio $(L^2(0, T))^3$ tiene el producto interior

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = ((f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3)) = \int_0^T (f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3) dt = \int_0^T \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dt$$

con norma,

$$\|\mathbf{f}\|_{(L^3)^2} = \|(f_1, f_2, f_3)\|_{(L^3)^2} = \sqrt{\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2} = (\mathbf{f}, \mathbf{f})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Verifiquemos que el producto interno cumple las propiedades de la definición 1.2.1.

Sean $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ y $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$

1. $(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \geq 0$.

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})(t) dt = \int_0^T f^2(t) dt = \|f\|^2 \geq 0.$$

2. $(f, f) = 0$ si y sólo si $f = 0$.

$$(f, f) = \int_0^T f^2(t) dt = \|f\|^2 = 0,$$

esto solo puede ser cero cuando $f = 0$.

$$3. (\mathbf{f}, \mathbf{g} + \mathbf{h}) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + (\mathbf{f}, \mathbf{h}).$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{g} + \mathbf{h}) &= \int_0^T (\mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} + \mathbf{h}))(t) dt \\ &= \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{h})(t) dt \\ &= \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) dt + \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h})(t) dt \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + (\mathbf{f}, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

$$4. (\mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{h}) = (\mathbf{f}, \mathbf{h}) + (\mathbf{g}, \mathbf{h}).$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{h}) &= \int_0^T ((\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{h})(t) dt \\ &= \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{h})(t) dt \\ &= \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h})(t) dt + \int_0^T (\mathbf{g} \cdot \mathbf{h})(t) dt \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{h}) + (\mathbf{g}, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

$$5. (\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) dt = \int_0^T (\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})(t) dt = (\mathbf{g}, \mathbf{f}).$$

$$6. (\alpha \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

$$(\alpha \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_0^T (\alpha \mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) dt = \int_0^T \alpha (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) dt = \alpha \int_0^T (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) dt = \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

con todo lo anterior verificamos que

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = ((f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3)) = \int_0^T (f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3) dt,$$

es un producto interno. ■

Ahora verifiquemos que la norma cumple las propiedades de la definición 1.2.4.

1. $\|\mathbf{f}\| \geq 0, \forall \mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3$ y $\|\mathbf{f}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{f} = 0$.

Se tiene que $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{|\mathbf{f}|^2} = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}$. Como ya se probó que $(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \geq 0$, entonces lo que está dentro de raíz es positivo y en el caso que sea cero solo ocurre cuando $\mathbf{f} = 0$, por lo tanto se cumple la primera propiedad de la norma.

2. $\|\lambda \mathbf{f}\| = |\lambda| \|\mathbf{f}\|, \forall \mathbf{f} \in (L^2(0, T))^3$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda \mathbf{f}\| = \sqrt{(\lambda \mathbf{f}, \lambda \mathbf{f})} = \sqrt{\lambda^2 (\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = |\lambda| \|\mathbf{f}\|.$$

3. $\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|, \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in (L^2(0, T))^3$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|^2 &= (\mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{f} + \mathbf{g}), \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{f}) + 2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + (\mathbf{g}, \mathbf{g}), \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 + 2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \|\mathbf{g}\|^2. \end{aligned}$$

Además

$$(\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|)^2 = \|\mathbf{f}\|^2 + 2\|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| + \|\mathbf{g}\|^2, \text{ así que}$$

usando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\|$$

resulta que

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|^2 \leq (\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|)^2$$

y tenemos finalmente

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|. \blacksquare$$

Teorema 1.4.4. $(L^2(0, T))^3$ es un espacio de Hilbert con la norma dada en (1.2).

Bosquejo de la demostración. Queremos demostrar que $(L^2(0, T))^3$ es un espacio de Hilbert entonces se debe probar que es un espacio completo respecto a la norma dada en (1.2), es decir, que toda sucesión de Cauchy en $(L^2(0, T))^3$ converge a un elemento de $(L^2(0, T))^3$.

Para probar que es completo tomamos una sucesión de Cauchy en $(L^2(0, T))^3$ como

$$\{(f_1^n, f_2^n, f_3^n)\}. \quad (1.3)$$

Que sea de Cauchy significa que dado $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ tenemos

$$\|(f_1^n, f_2^n, f_3^n) - (f_1^m, f_2^m, f_3^m)\|_{(L^2)^3}^2 < \varepsilon^2.$$

Recordemos que estamos en $(L^2(0, T))^3$ entonces la norma en este espacio se obtiene con la integral por lo que tenemos para cada $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \|f_i^n - f_i^m\|_{(L^2)}^2 &= \int_0^T (f_i^n - f_i^m)^2(t) dt, \\ &\leq \int_0^T [(f_1^n - f_1^m)^2 + (f_2^n - f_2^m)^2 + (f_3^n - f_3^m)^2](t) dt \\ &< \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que la sucesión asociada con las funciones de cada entrada son a su vez una sucesión de Cauchy pero en L^2 . Para demostrar que toda sucesión de Cauchy (1.3) converge a un elemento de $(L^2(0, T))^3$ basta con probar que cada una de las entradas de la sucesión de Cauchy convergen a un elemento en $L^2(0, T)$. Pero esto es obvio ya que sabemos que L^2 es completo.

Si cada una de las entradas de la sucesión de Cauchy converge a un elemento de $L^2(0, T)$ se cumple que la sucesión de triadas converge a (f_1, f_2, f_3) en $(L^2)^3$, o sea

$$\|(f_1^n, f_2^n, f_3^n) - (f_1, f_2, f_3)\|^2 < \varepsilon^2, \quad \forall n \geq K$$

si consideramos que

$$\blacksquare f_1^n \longrightarrow f_1 \text{ y}$$

$$\int_0^T (f_1^n - f_1)^2(t) dt < \frac{\varepsilon^2}{3} \quad \forall n \geq N_1,$$

$$\blacksquare f_2^n \longrightarrow f_2 \text{ y}$$

$$\int_0^T (f_2^n - f_2)^2(t) dt < \frac{\varepsilon^2}{3} \quad \forall n \geq N_2,$$

$$\blacksquare f_3^n \longrightarrow f_3 \text{ y}$$

$$\int_0^T (f_3^n - f_3)^2(t) dt < \frac{\varepsilon^2}{3} \quad \forall n \geq N_3,$$

y tomamos $K = \max\{N_1, N_2, N_3\}$.

Nota. En el espacio $(L^2(0, T))^3$ también aplica el teorema de representación de Riesz.

Teorema 1.4.5. Para todo F en $((L^2(0, T))^3)'$, existe un único f en $(L^2(0, T))^3$ tal que $\langle F, w \rangle \equiv F(w) = (f, w)$, $\forall w \in (L^2(0, T))^3$.

Problemas de búsqueda en línea en $L^2(0, T)$

En este capítulo describimos someramente un problema de búsqueda en línea en $L^2(0, T)$, resuelto como tesis de licenciatura [11]. A grandes rasgos, un problema de búsqueda en línea en este contexto no es mas que minimizar un funcional J restringido a la “recta” $u - \rho w$ para u y w fijos en L^2 y ρ real. Estos problemas se pueden resolver por diferentes métodos pero nosotros los resolvimos vía el método de Newton, donde la idea principal fue definir una función $g(\rho) = J(u - \rho w)$ (el funcional restringido a la recta $u - \rho w$ se puede ver como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), derivar g y resolver $g'(\rho) = 0$, usando el método de Newton. Así el problema original se reduce a uno de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y podemos aplicar el método de Newton, calculando $g'(\rho)$ y $g''(\rho)$ en términos del funcional restringido a la recta. En este capítulo se explica a detalle estas ideas.

2.1. Un problema de búsqueda en línea en $L^2(0, T)$

Sea $J : L^2(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\|\cdot\|_E$ la norma euclideana con

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T v^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \quad (2.1)$$

donde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

es solución del sistema diferencial

$$\begin{cases} \Gamma \frac{dy}{dt} + K\mathbf{y} + \text{sen } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} i_1 + v \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

con

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -\kappa_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{sen } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \text{sen } y_1 \\ \text{sen } y_2 \\ \text{sen } y_3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

con $\gamma_1 = 0.7, \gamma_2 = 1.1, \gamma_3 = 0.7, \kappa_1 = \kappa_2 = 0.1, i_1 = 1, i_2 = 0.8$ e $i_3 = -1$.

2.2. Un problema de búsqueda en línea es un problema de minimización en $\mathbb{R}$

Sean u y w fijos en $L^2(0, T)$. Consideremos la “recta” que pasa por u y tiene la dirección de w (en realidad, de $-w$). Estamos interesados en el problema de minimizar J restringida a esta “recta”. Este problema se puede escribir

$$\text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(u - \rho w) \quad (2.5)$$

ó

$$\begin{aligned} & \text{Mín } J(v), \\ & \text{sujeto a } v = u - \rho w, \forall \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como queremos resolverlo por el método de Newton, la idea principal es definir una función g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como

$$g(\rho) = J(u - \rho w), \quad (2.6)$$

con lo cual el problema se convierte en encontrar ρ^* tal que

$$\begin{aligned} g(\rho^*) &= \text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(u - \rho w), \\ &= \text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \int_0^T (u - \rho w)^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2 \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $y(T)$ es la solución al tiempo T del sistema (2.3) tomando $v = u - \rho w$. Suponiendo que g es diferenciable (lo cual probaremos mas adelante) el mínimo de g se dará en un ρ^* que sea solución de

$$g'(\rho) = 0. \quad (2.8)$$

Resolveremos esta ecuación por el método de Newton. Para describir $g'(\rho)$ en términos de J necesitamos las siguientes definiciones y los siguientes teoremas:

Definición 2.2.1. Sea V un espacio vectorial. Para toda $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\delta f(v) \approx f(v + \delta v) - f(v),$$

donde, δv es una perturbación para la variable v .

Definición 2.2.2. ¹ Sea V un espacio de Hilbert. Un funcional J sobre V es Frechet-diferenciable si, para todo $v, z \in V$, existe $DJ(v) \in V'$, la derivada o el diferencial de J en v , tal que

$$J(v + z) - J(v) = \langle DJ(v), z \rangle + \|z\| \varepsilon(v, z), \quad (2.9)$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando par de dualidad, y $\varepsilon(v, z)$ tendiendo a cero cuando $\|z\| \rightarrow 0$.

Teorema 2.2.3. Sea J un funcional Frechet-diferenciable sobre V , entonces

$$g'(\rho) = \frac{d}{d\rho} J(u - \rho w) = -\langle DJ(u - \rho w), w \rangle. \quad (2.10)$$

Demostración. Tomamos $v = u - \rho w$ y $z = \Delta \rho w$. Por la definición (2.2.2) tenemos

$$J(u - \rho w + \Delta \rho w) - J(u - \rho w) = \langle DJ(u - \rho w), \Delta \rho w \rangle + \|\Delta \rho w\| \varepsilon(v, \Delta \rho w),$$

$$J(u - (\rho - \Delta \rho)w) - J(u - \rho w) = \Delta \rho \langle DJ(u - \rho w), w \rangle + \|\Delta \rho w\| \varepsilon(v, \Delta \rho w)$$

y luego dividimos ambos lados de la igualdad por $\Delta \rho$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{J(u - (\rho - \Delta \rho)w) - J(u - \rho w)}{\Delta \rho} &= \frac{\Delta \rho \langle DJ(u - \rho w), w \rangle + \|\Delta \rho w\| \varepsilon(v, \Delta \rho w)}{\Delta \rho}, \\ -\frac{J(u - (\rho + (-\Delta \rho))w) - J(u - \rho w)}{-\Delta \rho} &= \langle DJ(u - \rho w), w \rangle \pm \|w\| \varepsilon(v, \Delta \rho w), \end{aligned}$$

en donde aplicamos el límite en ambos lados obteniendo

$$-\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{J(u - (\rho + (-\Delta \rho))w) - J(u - \rho w)}{-\Delta \rho} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \langle DJ(u - \rho w), w \rangle \pm \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \|w\| \varepsilon(v, \Delta \rho w).$$

Como

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \|w\| \varepsilon(v, \Delta\rho w) = 0,$$

y (por definición de derivada)

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{J(u - (\rho + (-\Delta\rho))w) - J(u - \rho w)}{-\Delta\rho} = g'(\rho),$$

se tiene

$$-g'(\rho) = \langle DJ(u - \rho w), w \rangle$$

ó

$$g'(\rho) = -\langle DJ(u - \rho w), w \rangle. \quad (2.11)$$

Definición 2.2.4. Si J es Frechet-diferenciable definimos

$$\delta J(v) = \langle DJ(v), \delta v \rangle.$$

Esto es pensando en $\delta J(v)$ como una aproximación para la diferencia

$$J(v + \delta v) - J(v), \quad (2.12)$$

ya que si J es Frechet-diferenciable se cumple que

$$J(v + w) - J(v) = \langle DJ(v), w \rangle + \|w\| \varepsilon(v, w),$$

y en particular si $w = \delta v$ se tendría

$$J(v + \delta v) - J(v) = \langle DJ(v), \delta v \rangle + \|\delta v\| \varepsilon(v, \delta v).$$

Además el límite de $E(v, \delta v) \rightarrow 0$ cuando $\|\delta v\| \rightarrow 0$, por lo cual si tomamos

$$\delta J(v) = \langle DJ(v), \delta v \rangle$$

entonces $\delta J(v)$ es una aproximación adecuada para la diferencia (2.12).

Teorema 2.2.5. Sea V un espacio vectorial. Para toda $v \in V$ se tiene que

$$\delta(v^2(t)) = 2v(t) \delta v(t)$$

Demostración. Por un lado sabemos que $\delta(v^2(t))$ representa una aproximación para la diferencia entre $(v + \delta v)^2(t)$ y $v^2(t)$. Por otro lado, si fijamos un t^* entonces

$$\delta(v^2(t^*)) \approx (v(t^*) + \delta v(t^*))^2 - v^2(t^*).$$

En este caso a $v(t^*)$ lo podemos ver como una sola variable y es válido aplicar el siguiente resultado

$$dx^2 = 2x dx,$$

tomando $x = v(t^*)$, obteniendo así

$$\delta(v^2(t^*)) = 2v(t^*) \delta v(t^*).$$

Notemos que para cada t que tomemos ocurrirá algo similar, por lo tanto

$$\delta(v^2(t)) = 2v(t) \delta v(t).$$

Teorema 2.2.6. Sea la función vectorial $\mathbf{y}(t)$ la solución del sistema diferencial (2.3), entonces se tiene que

$$\delta(k\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}_T) = k\mathbf{y}_T \cdot \delta\mathbf{y}(t),$$

donde $k > 0$, $\mathbf{y}_T$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^3$ (es un estado de equilibrio que se quiere alcanzar en el tiempo T) y $\delta\mathbf{y}(t)$ resuelve el sistema

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\delta y_1}{dt} + \kappa_1(\delta y_1 - \delta y_2) + \delta y_1 \cos y_1 = \delta v \text{ en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{d\delta y_2}{dt} + \kappa_1(\delta y_2 - \delta y_1) + \kappa_2(\delta y_2 - \delta y_3) + \delta y_2 \cos y_2 = 0 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{d\delta y_3}{dt} + \kappa_2(\delta y_3 - \delta y_2) + \delta y_3 \cos y_3 = 0 \text{ en } (0, T), \\ \delta\mathbf{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Demostración. Sea $\mathbf{y}_T = (\mathbf{y}_{T1}, \mathbf{y}_{T2}, \mathbf{y}_{T3})$ y $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t))$, para toda t ; se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(k\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}_T) &= \delta(k\mathbf{y}_1(t)\mathbf{y}_{T1} + k\mathbf{y}_2(t)\mathbf{y}_{T2} + k\mathbf{y}_3(t)\mathbf{y}_{T3}), \\ &= k(\mathbf{y}_{T1} \delta\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_{T2} \delta\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_{T3} \delta\mathbf{y}_3(t)), \\ &= k\mathbf{y}_T \cdot \delta\mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.7. Sea $\mathbf{y}(t)$ solución del sistema (2.3), entonces

$$\delta(\|\mathbf{y}(t)\|_E^2) = 2\mathbf{y}(t) \cdot \delta\mathbf{y}(t),$$

donde $\delta\mathbf{y}$ resuelve el sistema (2.13).

Demostración. Para cada t se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(\|\mathbf{y}(t)\|^2) &= \delta(\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}(t)), \\ &= \delta(\mathbf{y}_1(t)\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_3(t)\mathbf{y}_3(t)), \\ &= \delta(\mathbf{y}_1^2(t) + \mathbf{y}_2^2(t) + \mathbf{y}_3^2(t)), \\ &= \delta\mathbf{y}_1^2(t) + \delta\mathbf{y}_2^2(t) + \delta\mathbf{y}_3^2(t), \\ &= 2\mathbf{y}_1 \delta\mathbf{y}_1(t) + 2\mathbf{y}_2 \delta\mathbf{y}_2(t) + 2\mathbf{y}_3 \delta\mathbf{y}_3(t), \\ &= 2\mathbf{y}(t) \cdot \delta\mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.8. Si J está definido como en (2.1), entonces es Frechet-diferenciable y su diferencial $DJ(v)$ es

$$DJ(v) = v + p_1, \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{y}$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ se obtiene al resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}}{dt} + K\mathbf{y} + \sin \mathbf{y} = \begin{pmatrix} i_1 + v \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \\ \begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K\mathbf{p} + \cos \mathbf{y} \mathbf{p} = 0 \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \end{cases}$$

Demostración. Por definición tenemos que si J fuera diferenciable:

$$\delta J(v) = \langle DJ(v), \delta v \rangle = (DJ(v), \delta v) = \int_0^T DJ(v) \delta v \, dt.$$

Por otro lado tenemos

$$\delta J(v) = \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^T v^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
\delta J(v) &= \frac{1}{2} \delta \int_0^T ((v + \delta v)^2 - v^2) dt + \frac{k}{2} \delta \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T 2v\delta v dt + \frac{k}{2} \delta[(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot (\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T)], \\
&= \int_0^T v\delta v dt + \frac{k}{2} \delta[\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}_T + \mathbf{y}_T \cdot \mathbf{y}_T], \\
&= \int_0^T v\delta v dt + \frac{k}{2} \delta[\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}_T], \\
&= \int_0^T v\delta v dt + \frac{k}{2} [2\mathbf{y}(T) \cdot \delta\mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}_T \cdot \delta\mathbf{y}(T)], \\
&= \int_0^T v\delta v dt + k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta\mathbf{y}(T).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta J(v) = \int_0^T v\delta v dt + k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta\mathbf{y}(T). \quad (2.15)$$

La función $\delta\mathbf{y} = (\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3)$ es la solución del sistema (2.13). En forma matricial este sistema queda como

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta\mathbf{y}}{dt} + K\delta\mathbf{y} + C(\mathbf{y})\delta\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \delta v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \delta\mathbf{y}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

con

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -\kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad C(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora introducimos una función vectorial $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, que suponemos diferenciable sobre todo $(0, T)$. Integrando sobre $(0, T)$ y multiplicando por la función vectorial $\mathbf{p}$ ambos lados del sistema diferencial (2.16) obtenemos:

$$\int_0^T \Gamma \frac{d}{dt} \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt + \int_0^T K \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt + \int_0^T C(\mathbf{y}) \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt = \int_0^T p_1 \delta v \, dt \text{ en } (0, T).$$

Integrando por partes resulta que

$$\begin{aligned} & \Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) + \int_0^T -\Gamma \frac{d}{dt} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \\ & + \int_0^T K \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt + \int_0^T C(\mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt \\ & = \int_0^T p_1 \delta v \, dt \text{ en } (0, T), \end{aligned}$$

por lo que

$$\Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) + \int_0^T \left\{ -\Gamma \frac{d}{dt} \mathbf{p} + K \mathbf{p} + C(\mathbf{y}) \mathbf{p} \right\} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt = \int_0^T p_1 \delta v \, dt \text{ en } (0, T). \quad (2.17)$$

Supóngase que la función $\mathbf{p}$ es solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K \mathbf{p} + C(\mathbf{y}) \mathbf{p} = 0, \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (2.18)$$

De (2.17), (2.18) se obtiene

$$k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) = \int_0^T p_1 \delta v \, dt. \quad (2.19)$$

Combinando (2.15) y (2.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T DJ(v) \delta v \, dt &= \int_0^T v \delta v \, dt + k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) \\ &= \int_0^T v \delta v \, dt + \int_0^T p_1 \delta v \, dt = \int_0^T (v + p_1) \delta v \, dt, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$DJ(v) = v + p_1.$$

De este teorema resulta que $DJ(u - \rho w) = u - \rho w + p_1$, con p_1 solución de (2.18) una vez que $\mathbf{y}(t)$ es solución del sistema (2.3) tomando $v = u - \rho w$.

Entonces de acuerdo a (2.8), la ecuación que tenemos que resolver para $\dot{\rho}$ es

$$g'(\rho) = -\langle DJ(u - \rho w), w \rangle = 0, \quad (2.20)$$

Como estamos trabajando en $L^2(0, T)$, ¹ los pares de dualidad coinciden con el producto interno gracias al teorema de representación de Riesz 1.3.12. Dado que el teorema 2.2.8 proporciona el representante de la transformación $DJ(v)$, podemos escribir

$$g'(\rho) = -(u - \rho w + p_{1\rho}, w) = - \int_0^T (u - \rho w + p_{1\rho}) w \, dt ; \quad (2.21)$$

donde $p_{1\rho}$ se obtiene resolviendo primero

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \frac{dy_{1\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{1\rho} - y_{2\rho}) + \sin y_{1\rho} = i_1 + u - \rho w \text{ en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{dy_{2\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{2\rho} - y_{1\rho}) + \kappa_2(y_{2\rho} - y_{3\rho}) + \sin y_{2\rho} = i_2 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{dy_{3\rho}}{dt} + \kappa_2(y_{3\rho} - y_{2\rho}) + \sin y_{3\rho} = i_3 \text{ en } (0, T), \\ y_\rho(0) = y_0, \end{array} \right. \quad (2.22)$$

y luego el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Gamma \frac{dp_\rho}{dt} + K p_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} p_\rho = 0 \text{ en } (0, T), \\ \Gamma p_\rho(T) = k(y_\rho(T) - y_T). \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Solo nos falta calcular $g''(\rho) = \frac{dg'}{d\rho}$. Por la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral tenemos:

$$\frac{dg'(\rho)}{d\rho} = - \int_0^T \frac{\partial}{\partial \rho} (u - \rho w + p_{1\rho}) w \, dt, \quad (2.24)$$

lo cual nos da

$$g''(\rho) = \int_0^T [w - \dot{p}_{1\rho}] w \, dt, \quad (2.25)$$

que por similitud con $g'(\rho)$ lo escribimos como

$$g''(\rho) = \langle D^2 J(u - \rho w) w, w \rangle, \quad (2.26)$$

y donde $\dot{p}_{1\rho}$ se obtiene resolviendo primero

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\dot{y}_\rho}{dt} + K \dot{y}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{y}_\rho = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ en } (0, T) \\ y_\rho(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.27)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\dot{p}_\rho}{dt} + K \dot{p}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{p}_\rho = \\ \begin{pmatrix} \sin y_{1\rho} \dot{y}_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \sin y_{2\rho} \dot{y}_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \sin y_{3\rho} \dot{y}_{3\rho} \end{pmatrix} p_\rho \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \dot{p}_\rho(T) = k \dot{y}_\rho(T). \end{cases} \quad (2.28)$$

2.3. Método de Newton para resolver el problema de búsqueda en línea

Con todo lo mencionado en secciones anteriores, el método de Newton para aproximar ρ^* queda de la siguiente manera: para ρ_0 dado e $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \rho_{i+1} &= \rho_i - \frac{g'(\rho_i)}{g''(\rho_i)}, \\ \rho_{i+1} &= \rho_i - \frac{-\langle DJ(u - \rho w), w \rangle}{\langle D^2 J(u - \rho w) w, w \rangle}, \\ \rho_{i+1} &= \rho_i + \frac{\langle DJ(u - \rho w), w \rangle}{\langle D^2 J(u - \rho w) w, w \rangle}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el capítulo siguiente veremos el problema de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$ donde el funcional J no dependerá solo de una función v en L^2 , sino de tres funciones en L^2 : v_1, v_2 y v_3 , de tal manera que los argumentos en el dominio de J serán de la forma $\mathbf{v} = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ y entonces lo que se hará en el capítulo 3 será generalizar las ideas vistas en este capítulo, pero siguiendo la misma estructura: definir $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en términos de J , calcular DJ , calcular g' y g'' y resolver por el método de Newton $g'(\rho) = 0$. En términos del problema de control asociado y descrito en la introducción, estaríamos en el problema de controlar el circuito vía las tres juntas, el control u_i actuando en la junta i , $i = 1, 2, 3$.

Problemas de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$

En este capítulo abordaremos un problema de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$. Estamos interesados en minimizar la restricción de un funcional a una “recta” en $(L^2(0, T))^3$. Estos problemas se pueden resolver por diferentes métodos pero nosotros estamos interesados en resolverlos vía el método de Newton, así que en este capítulo nuestro interés es extender las ideas del capítulo anterior en el cual minimizamos un funcional a la restricción de una “recta” en $L^2(0, T)$ usando Newton.

3.1. Un problema de búsqueda en línea en $(L^2(0, T))^3$

Sea $J : (L^2(0, T))^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{v} = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$, $\|\cdot\|_E$ es la norma euclídeana en $\mathbb{R}^3$ y se aplica para cada valor de t , $\mathbf{y}_T$ es un estado de equilibrio final, η es un parámetro de regularización, k es un parámetro de penalización y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}}{dt} + K\mathbf{y} + \text{sen } \mathbf{y} = I + \mathbf{v} & \text{en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

con las matrices Γ, K, I y $\mathbf{y}_0$ definidos como en (2.4).

3.2. El problema de búsqueda en línea como un problema de minimización en $\mathbb{R}$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ fijos en $(L^2(0, T))^3$. Consideremos la “recta” que pasa por $\mathbf{u}$ y tiene la dirección de $\mathbf{w}$. Estamos interesados en el problema de minimizar J restringida a esta “recta”. Este problema se puede escribir

$$\text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) \quad (3.3)$$

ó

$$\begin{aligned} & \text{Mín } J(\mathbf{v}), \\ & \text{s.a. } \mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}, \forall \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como queremos resolverlo por el método de Newton, la idea principal es definir una función g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como

$$g(\rho) = J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \quad (3.4)$$

con lo cual el problema se convierte en encontrar ρ^* tal que

$$\begin{aligned} g(\rho^*) &= \text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \\ &= \text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} \left(\frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2 \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ y $\mathbf{y}(T)$ es la solución al tiempo T del sistema (3.2) (tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$). Para aproximar ρ^* por el método de Newton necesitamos encontrar los puntos críticos que son los que resuelven

$$g'(\rho) = 0. \quad (3.6)$$

Para describir $g'(\rho)$ en términos de J necesitamos la definición 2.2.2 aplicada al funcional (3.1) sobre el espacio de Hilbert $(L^2(0, T))^3$, los siguientes teoremas y definición:

Definición 3.2.1. Si J es Frechet-diferenciable definimos

$$\delta J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle,$$

y usamos $\langle, \rangle$ para denotar el par de dualidad en $(L^2(0, T))^3$ mientras que $\delta \mathbf{v}$ es una perturbación para la variable $\mathbf{v}$.

Esto es pensando en $\delta J(\mathbf{v})$ como una aproximación para la diferencia

$$J(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}), \quad (3.7)$$

dado que si J es Frechet-diferenciable se cumple que

$$J(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

y en particular si $\mathbf{w} = \delta \mathbf{v}$ se tendría

$$J(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle + \|\delta \mathbf{v}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}).$$

Ademas el límite de $\varepsilon(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) \rightarrow 0$ cuando $\|\delta \mathbf{v}\| \rightarrow 0$, por lo cual si tomamos

$$\delta J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle,$$

entonces $\delta J(\mathbf{v})$ es una aproximación adecuada para la diferencia (3.7).

Teorema 3.2.2. Si $\mathbf{v} \in (L^2(0, T))^3$ entonces

$$\delta(\|\mathbf{v}(t)\|_E^2) = 2\mathbf{v}(t) \cdot \delta \mathbf{v}(t).$$

Demostración. Para cada t se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(\|\mathbf{v}(t)\|_E^2) &= \delta(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)), \\ &= \delta(v_1(t)v_1(t) + v_2(t)v_2(t) + v_3(t)v_3(t)), \\ &= \delta(v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)), \\ &= \delta v_1^2(t) + \delta v_2^2(t) + \delta v_3^2(t), \\ &= 2v_1 \delta v_1(t) + 2v_2 \delta v_2(t) + 2v_3 \delta v_3(t), \\ &= 2\mathbf{v}(t) \cdot \delta \mathbf{v}(t). \end{aligned}$$

Teorema 3.2.3. El funcional J definido en (3.1) ¹ es Frechet-diferenciable y su diferencial $DJ(\mathbf{v})$ es

$$DJ(\mathbf{v}) = \eta \mathbf{v} + \mathbf{p}, \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{p}$ se obtiene al resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}}{dt} + K\mathbf{y} + \text{sen } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} i_1 + v_1 \\ i_2 + v_2 \\ i_3 + v_3 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K\mathbf{p} + C(\mathbf{y}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (3.9)$$

Demostración. Por definición tenemos que si J fuera diferenciable:

$$\delta J(\mathbf{v}) = \langle DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v} \rangle = (DJ(\mathbf{v}), \delta \mathbf{v}) = \int_0^T DJ(\mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dt$$

donde el producto interno en $(L^2(0, T))^3$ se denota como $(,)$. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{v}) &= \delta \left(\frac{\eta}{2} \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2 \right), \\ &= \frac{\eta}{2} \delta \left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt \right) + \frac{k}{2} \delta \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \\ &= \frac{\eta}{2} \left(\int_0^T \|\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}\|_E^2 - \int_0^T \|\mathbf{v}\|_E^2 dt \right) + \frac{k}{2} \delta \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T (\|\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}\|_E^2 - \|\mathbf{v}\|_E^2) dt + \frac{k}{2} \delta \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T \delta(\|\mathbf{v}\|_E^2) dt + \frac{k}{2} \delta \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|_E^2, \\ &= \frac{\eta}{2} \int_0^T 2\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt + \frac{k}{2} \delta[(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot (\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T)], \\ &= \eta \int_0^T \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt + \frac{k}{2} \delta[\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}_T + \mathbf{y}_T \cdot \mathbf{y}_T], \\ &= \eta \int_0^T \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt + \frac{k}{2} \delta[\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}(T) \cdot \mathbf{y}_T]. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\delta J(\mathbf{v}) = \eta \int_0^T \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt + \frac{k}{2} [2\mathbf{y}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) - 2\mathbf{y}_T \cdot \delta \mathbf{y}(T)],$$

donde $\delta \mathbf{y}$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\delta \mathbf{y}}{dt} + K\delta \mathbf{y} + C(\mathbf{y})\delta \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \\ \delta v_3 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \delta \mathbf{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Así que

$$\delta J(\mathbf{v}) = \eta \int_0^T \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt + k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta \mathbf{y}(T). \quad (3.11)$$

Ahora introducimos una función vectorial $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, que suponemos diferenciable sobre todo $(0, T)$. Integrando sobre $(0, T)$ y multiplicando por la función vectorial $\mathbf{p}$ ambos lados del sistema diferencial (3.10) obtenemos:

$$\int_0^T \Gamma \frac{d}{dt} \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt + \int_0^T K \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt + \int_0^T C(\mathbf{y}) \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \, dt = \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt \text{ en } (0, T).$$

Integrando por partes resulta que

$$\begin{aligned} & \Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) + \int_0^T -\Gamma \frac{d}{dt} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \\ & + \int_0^T K \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt + \int_0^T C(\mathbf{y}) \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt \\ & = \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt \text{ en } (0, T), \end{aligned}$$

por lo que

$$\Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) + \int_0^T \left\{ -\Gamma \frac{d}{dt} \mathbf{p} + K\mathbf{p} + C(\mathbf{y})\mathbf{p} \right\} \cdot \delta \mathbf{y} \, dt = \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} \, dt \text{ en } (0, T). \quad (3.12)$$

Supóngase que la función $\mathbf{p}$ es solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K\mathbf{p} + C(\mathbf{y})\mathbf{p} = 0, \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (3.13)$$

De (3.12), (3.13) se obtiene

$$k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) = \Gamma \mathbf{p}(T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) = \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt. \quad (3.14)$$

Combinando (3.11) y (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T DJ(\mathbf{v}) \delta \mathbf{v} dt &= \int_0^T \eta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dt + k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T) \cdot \delta \mathbf{y}(T) \\ &= \int_0^T \eta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dt + \int_0^T \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dt \\ &= \int_0^T (\eta \mathbf{v} + \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{v} dt, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$DJ(\mathbf{v}) = \eta \mathbf{v} + \mathbf{p}. \blacksquare$$

De este teorema resulta que $DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \mathbf{p}$, con $\mathbf{p}$ solución de (3.13) una vez que $\mathbf{y}(t)$ es solución del sistema (3.2) tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$.

Teorema 3.2.4. Sea J un funcional Frechet-diferenciable sobre $(L^2(0, T))^3$, entonces

$$g'(\rho) = \frac{d}{d\rho} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) = -\langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle. \quad (3.15)$$

Demostración. Tomamos $v = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ y $z = \Delta \rho \mathbf{w}$, en la definición (2.2.2) para obtener

$$J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \Delta \rho \mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) = \langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \Delta \rho \mathbf{w} \rangle + \|\Delta \rho \mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta \rho \mathbf{w}),$$

y

$$J(\mathbf{u} - (\rho - \Delta \rho) \mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) = \Delta \rho \langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle + |\Delta \rho| \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta \rho \mathbf{w}),$$

y luego dividimos ambos lados de la igualdad por $\Delta \rho$ para obtener

$$\frac{J(\mathbf{u} - (\rho - \Delta \rho) \mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w})}{\Delta \rho} = \frac{\Delta \rho \langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle + |\Delta \rho| \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta \rho \mathbf{w})}{\Delta \rho},$$

ó

$$-\frac{J(\mathbf{u} - (\rho + (-\Delta \rho)) \mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w})}{-\Delta \rho} = \langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle \pm \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta \rho \mathbf{w}),$$

de donde aplicando el límite en ambos lados obtenemos

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u} - (\rho + (-\Delta\rho))\mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w})}{-\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \langle DJ(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle \pm \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta\rho\mathbf{w}),$$

y como

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \|\mathbf{w}\| \varepsilon(\mathbf{v}, \Delta\rho\mathbf{w}) = 0,$$

y por definición de derivada

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u} - (\rho + (-\Delta\rho))\mathbf{w}) - J(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w})}{-\Delta\rho} = g'(\rho)$$

se tiene

$$-g'(\rho) = \langle DJ(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$$

ó

$$g'(\rho) = -\langle DJ(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle. \quad (3.16)$$

Entonces la ecuación que tenemos que resolver para ρ es

$$g'(\rho) = -\langle DJ(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle = 0, \quad (3.17)$$

Con lo cual la iteración de Newton para un ρ_0 dado es

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{g'(\rho_i)}{g''(\rho_i)}. \quad (3.18)$$

² Como estamos trabajando en $(L^2(0, T))^3$, ¹ los pares de dualidad coinciden con el producto interno gracias al teorema de representación de Riesz 1.4.5. Dado que el teorema 3.2.3 proporciona el representante de la transformación $DJ(\mathbf{v})$, podemos escribir

$$g'(\rho) = -(\eta(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}) + \mathbf{p}, \mathbf{w}) = -\int_0^T (\eta(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \, dt, \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{p}$ se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{dy_{1\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{1\rho} - y_{2\rho}) + \text{sen } y_{1\rho} = u_1 - \rho w_1 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{dy_{2\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{2\rho} - y_{1\rho}) + \kappa_2(y_{2\rho} - y_{3\rho}) + \text{sen } y_{2\rho} = u_2 - \rho w_2 \text{ en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{dy_{3\rho}}{dt} + \kappa_2(y_{3\rho} - y_{2\rho}) + \text{sen } y_{3\rho} = u_3 - \rho w_3 \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} + K\mathbf{p}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho = \mathbf{0} \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}_\rho(T) = k(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (3.21)$$

Solo nos falta calcular $g''(\rho) = \frac{dg'}{d\rho}$ para poder aplicar la iteración de Newton. Por la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral tenemos:

$$\frac{dg'(\rho)}{d\rho} = - \int_0^T \frac{\partial}{\partial \rho} (\eta(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \, dt, \quad (3.22)$$

lo cual nos da

$$g''(\rho) = \int_0^T [\eta \mathbf{w} - \dot{\mathbf{p}}_\rho] \cdot \mathbf{w} \, dt, \quad (3.23)$$

que denotaremos como

$$g''(\rho) = \langle D^2 J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle, \quad (3.24)$$

y donde $\dot{\mathbf{p}}_\rho$ se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{y}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho = \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix} \text{ en } (0, T), \\ \dot{\mathbf{y}}_\rho(0) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{p}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho = \\ \begin{pmatrix} \sin y_{1\rho} \dot{y}_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \sin y_{2\rho} \dot{y}_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \sin y_{3\rho} \dot{y}_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) = k\dot{\mathbf{y}}_\rho(T). \end{cases} \quad (3.26)$$

3.3. ¹Método de Newton para resolver el problema de búsqueda en línea

Con ésto el método de Newton para aproximar ρ^* queda para $i = 0, 1, \dots$ y ρ_0 dado:

$$\begin{aligned}\rho_{i+1} &= \rho_i - \frac{g'(\rho_i)}{g''(\rho_i)}, \\ \rho_{i+1} &= \rho_i - \frac{-\langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle}{\langle D^2 J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}, \\ \rho_{i+1} &= \rho_i + \frac{\langle DJ(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle}{\langle D^2 J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

En el capítulo siguiente veremos cómo discretizar el problema de búsqueda en línea tratado aquí, para llevar a cabo computacionalmente la iteración de Newton (3.27).

Discretización

En este capítulo abordaremos la aproximación o discretización utilizada para resolver computacionalmente el problema de búsqueda en línea descrito en el capítulo anterior.

4.1. Discretización del problema de búsqueda en línea

La idea principal es sustituir el espacio $L^2(0, T)$ por un espacio de funciones más práctico. A grandes rasgos este espacio será el de las funciones lineales por pedazos en $(0, T)$, que además ofrecen la ventaja de poder ser representadas por eneadas de números.

1 Para describir esto con mayor precisión, comenzamos haciendo una partición uniforme del intervalo $(0, T)$ con

- N número de subintervalos de la partición uniforme.
- $h = \frac{T}{N}$ tamaño de cada subintervalo.
- tt un vector de $N + 1$ puntos espaciados uniformemente en el intervalo $(0, T)$ de la forma

$$tt = [0, \dots, tt_N].$$

Con $tt_i = i * h, i = 0, 1, 2, \dots, N$. Esto significa que en el arreglo tt se almacena la partición en el tiempo.

1 Dada esta partición, una función $f(t)$ en $L^2(0, T)$ puede ser aproximada por la función lineal por pedazos $f_h(t)$ cuyo valor en t_i es $f_h(t_i) = f(t_i)$. En la figura 4.1 se muestra una f y su aproximación lineal f_h por pedazos, con $N = 10$.

Note que entonces una función f puede ser representada computacionalmente por dos $(N + 1)$ -eadas:

$$f \approx \begin{cases} (tt_0 = 0, \dots, tt_i, \dots, tt_N), \\ (f(0), \dots, f(tt_i), \dots, f(tt_N)). \end{cases}$$

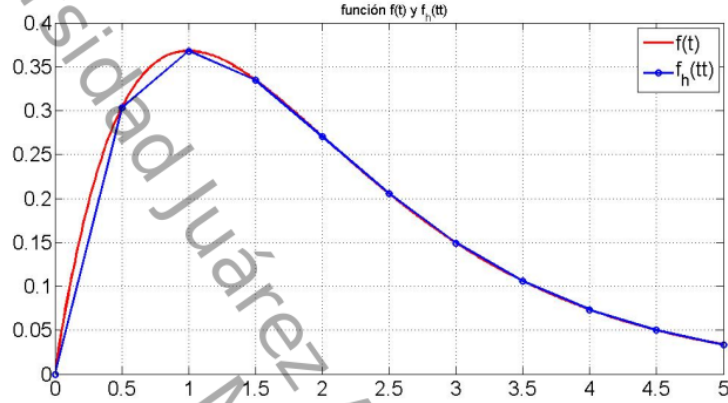


Figura 4.1: Función $f(t) = t \exp(-t)$ y $f_h(tt) = tt \exp(-tt)$, con $N = 10$, $T = 5$ y $h = 0.5$.

Con esto, está claro que podemos aproximar las funciones $\mathbf{v}$ en $(L^2(0, T))^3$ por triadas de funciones lineales por pedazos, es decir por matrices de la

$$\text{forma } \mathbf{v}(t) \approx (v_1, v_2, v_3)(tt) = \begin{pmatrix} v_1(0) & \cdots & v_1(tt_N) \\ v_2(0) & \cdots & v_2(tt_N) \\ v_3(0) & \cdots & v_3(tt_N) \end{pmatrix},$$

mientras que las funciones $\mathbf{u}$ de nuestra teoría quedarían aproximada o representadas por la matriz

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(0) & \cdots & u_1(tt_N) \\ u_2(0) & \cdots & u_2(tt_N) \\ u_3(0) & \cdots & u_3(tt_N) \end{pmatrix},$$

y las funciones $\mathbf{w}$ de nuestra teoría quedarían aproximadas o representadas por la matriz

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1(0) & \cdots & w_1(tt_N) \\ w_2(0) & \cdots & w_2(tt_N) \\ w_3(0) & \cdots & w_3(tt_N) \end{pmatrix}.$$

También a partir de ahora, estaremos usando la notación $\mathbf{v}^n$ para denotar el valor de la función $\mathbf{v}$, lineal por pedazos, en el tiempo nh . Esta notación

también aplica para las funciones $\mathbf{y}$ y $\mathbf{p}$, es decir, con $\mathbf{y}^n$ denotamos el valor de la función $\mathbf{y}$ en el tiempo nh y similarmente para $\mathbf{p}$. Esto se resume en decir que en este capítulo damos los valores de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ en la partición tt y debemos minimizar una version discreta del funcional, para lo cual es necesario encontrar los valores aproximados de

$$\mathbf{y} \approx (y_1, y_2, y_3)(tt) = \begin{pmatrix} y_1(0) & \cdots & y_1(tt_N) \\ y_2(0) & \cdots & y_2(tt_N) \\ y_3(0) & \cdots & y_3(tt_N) \end{pmatrix},$$

y de

$$\mathbf{p} \approx (p_1, p_2, p_3)(tt) = \begin{pmatrix} p_1(0) & \cdots & p_1(tt_N) \\ p_2(0) & \cdots & p_2(tt_N) \\ p_3(0) & \cdots & p_3(tt_N) \end{pmatrix}$$

en la partición tt . En lo que sigue detallamos cómo hacemos todas estas discretizaciones.

4.2. Discretización del Funcional

Para discretizar el funcional J , aproximamos la integral por su suma de Riemman en la partición tt , mientras que en el término de la norma lo único que se hace es usar la aproximación y^N para $y(T)$

$$J^h(\mathbf{v}) = \frac{\eta h}{2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{v}^n\|_E^2 + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}^N - \mathbf{y}_T\|_E^2, \quad (4.1)$$

con $\|\mathbf{v}^n\|^2 = |v_1^n|^2 + |v_2^n|^2 + |v_3^n|^2$. Aquí, como ya dijimos, $\mathbf{y}^N$ es la aproximación de $\mathbf{y}$ en el tiempo N ($tt_N = Nh = T$), que mas adelante especificamos cómo calcular.

4.3. Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.2)

Aproximamos el sistema (3.2) por un esquema de Euler explícito que se expresa como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \mathbf{y}^0 = \mathbf{y}_0, \\ \text{para } n = 0, \dots, N-1 \text{ resolver} \\ \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n - h\Gamma^{-1}K\mathbf{y}^n - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \sin y_1^n \\ \sin y_2^n \\ \sin y_3^n \end{pmatrix} + h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} i_1 + v_1^n \\ i_2 + v_2^n \\ i_3 + v_3^n \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

4.4. Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias Adjunto

El sistema adjunto (3.9) lo aproximamos por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^N = k\Gamma^{-1}(\mathbf{y}^N - \mathbf{y}_T), \\ \text{para } n = N-1, \dots, 0 \text{ resolver} \\ \mathbf{p}^n = \mathbf{p}^{n+1} - h\Gamma^{-1}K\mathbf{p}^{n+1} - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \cos y_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_3^n \end{pmatrix} \mathbf{p}^{n+1}. \end{array} \right.$$

4.5. Discretización del producto interno

Las discretizaciones mencionadas implican que estamos considerando el siguiente producto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_h = h \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{w}^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in (\mathbb{R}^3)^N.$$

4.6. Discretización de $g'(\rho)$ y $g''(\rho)$

Para resolver la ecuación $g(\rho^*) = 0$ con el método de Newton se requiere el conocimiento de $g'(\rho)$ que estará dada en los nuevos espacios vectoriales por

$$g'(\rho) = h\eta \sum_{n=1}^N [\mathbf{u}^n - \rho \mathbf{w}^n + \mathbf{p}_\rho^n] \cdot \mathbf{w}^n, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{p}_\rho^n$ se obtiene resolviendo, primero, el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \mathbf{y}_\rho^0 = \mathbf{y}_\rho(0), \\ \text{para } n = 0, \dots, N-1 \text{ resolver} \\ \mathbf{y}_\rho^{n+1} = \mathbf{y}_\rho^n - h\Gamma^{-1}K\mathbf{y}_\rho^n - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \sin y_{\rho 1}^n \\ \sin y_{\rho 2}^n \\ \sin y_{\rho 3}^n \end{pmatrix} + h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} i_1 + u_1^n - \rho w_1^n \\ i_2 + u_2^n - \rho w_2^n \\ i_3 + u_3^n - \rho w_3^n \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

y luego resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_\rho^N = k\Gamma^{-1}(\mathbf{y}_\rho^N - \mathbf{y}_T), \\ \text{para } n = N-1, \dots, 0 \text{ hacer} \\ \mathbf{p}_\rho^n = \mathbf{p}_\rho^{n+1} - h\Gamma^{-1}K\mathbf{p}_\rho^{n+1} - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \cos y_{\rho 1}^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{\rho 2}^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{\rho 3}^{n+1} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho^{n+1}. \end{array} \right.$$

La representación de $g''(\rho)$ en los nuevos espacios esta dada por:

$$g''(\rho) = h \sum_{n=1}^N [\eta \mathbf{w}^n - \dot{\mathbf{p}}_\rho^n] \cdot \mathbf{w}^n, \quad (4.3)$$

con $\dot{\mathbf{p}}_\rho^n$, obtenido al resolver primero

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}_\rho^0 = \mathbf{0}, \\ \text{para } n = 0, \dots, N-1 \text{ hacer} \\ \dot{\mathbf{y}}_\rho^{n+1} = \dot{\mathbf{y}}_\rho^n - h\Gamma^{-1}K\dot{\mathbf{y}}_\rho^n - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho}^n \\ \cos y_{2\rho}^n \\ \cos y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho^n - h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

y luego resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}_\rho^N = k\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{y}}_\rho^N, \\ \text{para } n = N-1, \dots, 0 \text{ resolver} \\ \dot{\mathbf{p}}_\rho^n = \dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1} + h\Gamma^{-1}K\dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1} \\ + h\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho}^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1} \\ - \begin{pmatrix} \dot{y}_{1\rho}^n \sin y_{1\rho}^n & 0 & 0 \\ 0 & \dot{y}_{2\rho}^n \sin y_{2\rho}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dot{y}_{3\rho}^n \sin y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho^{n+1}. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Con esto podemos ya aplicar el método de Newton para resolver (3.3): Dado ρ^0 , iterar con

$$\rho^{m+1} = \rho^m - \frac{g'(\rho^m)}{g''(\rho^m)}. \quad (4.6)$$

Usamos el criterio de paro $\frac{|\rho^{m+1} - \rho^m|}{|\rho^{m+1}|} < \varepsilon$, para ε mayor que cero dado.

4.7. Programa

Para resolver computacionalmente (3.3) realizamos un programa que itera con la fórmula de Newton (4.6) considerando todas las discretizaciones mencionadas.

4.8. Resultados numéricos

Ilustramos los resultados numéricos mostrando algunos ejemplos donde intervienen en $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ solo una, dos o tres componentes significativas, es decir, donde trabajamos con L^2 , $L^2 \times L^2$ o con $(L^2)^3$. En cada ejemplo se muestran las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, el valor aproximado para el mínimo ρ y la gráfica para el funcional $J(\mathbf{u} - \rho\mathbf{w})$ y su derivada con respecto a ρ para contrastar gráficamente el resultado encontrado por el método de Newton. Para graficar J y su derivada con respecto a ρ , se escogen varios valores de ρ y se calcula en cada uno de ellos el valor respectivo de J y de su derivada.

Ejemplo 4.8.1. En este ejemplo tomamos $u_1(t) = t \exp(-t)$, $u_2(t) = 0$, $u_3(t) = 0$ y $w_1(t) = \exp(-t)/10$, $w_2(t) = 0$ y $w_3(t) = 0$. Las gráficas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3 respectivamente. Tomamos también los valores siguientes para los parámetros en la iteración de Newton:

- $T = 20$.
- $k = 1.0e + 4$.
- $\rho^0 = -10$.
- $h = 1/500$.
- $\eta = 1$.
- $\mathbf{y}_0 = [1.2514; 0.7456; -0.9753]$.
- $\mathbf{y}_T = [7.4207; 6.4958; -0.3236]$.

En la tabla 4.1 se muestran los resultados para cada iteración. En la columna 1 se especifica el número de iteración; en la columna 2 se muestran las aproximaciones ρ_i a la solución en la iteración respectiva; en la última columna se especifica la diferencia relativa dr_i entre la aproximación nueva a la raíz y la aproximación anterior.

No. Iteraciones	ρ_i	dr_i
0	-1.0000000000000000e+01	
1	3.046965133149923e+00	4.28195e+00
2	4.852739935680783e+00	3.72114e-01
3	5.062380290750529e+00	4.14114e-02
4	5.086141768006492e+00	4.67181e-03
5	5.088827518131024e+00	5.27774e-04

Tabla 4.1: Resultados numérico del ejemplo 4.8.1.

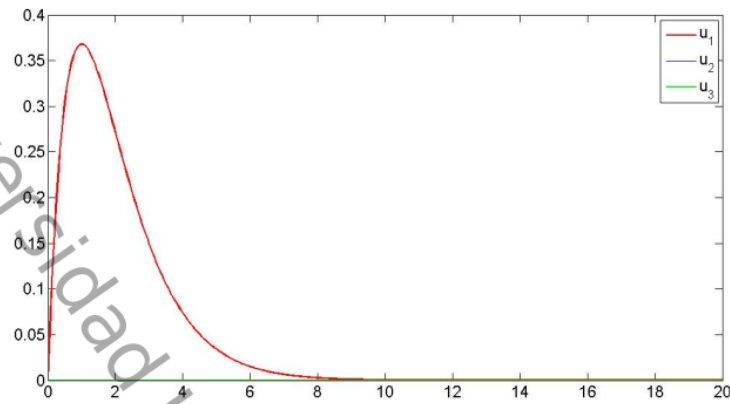


Figura 4.2: Funciones $u_1(t) = t \exp(-t)$, $u_2(t) = 0$, $u_3(t) = 0$ del ejemplo 4.8.1.

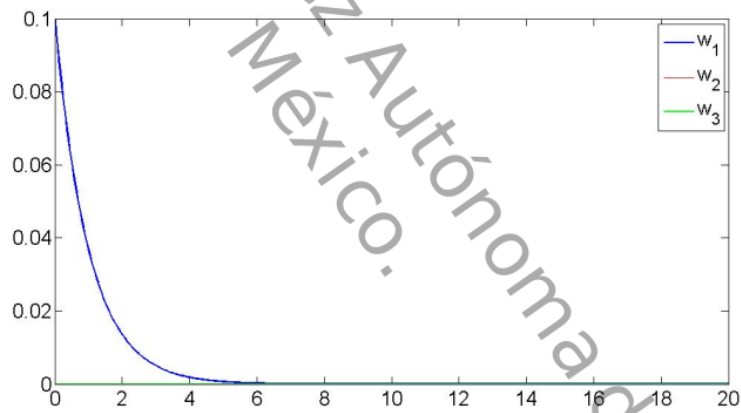


Figura 4.3: Funciones $w_1(t) = \exp(-t)/10$, $w_2(t) = 0$ y $w_3(t) = 0$ del ejemplo 4.8.1.

Dadas las funciones $\mathbf{u} = (t \exp(-t), 0, 0)$ y $\mathbf{w} = (\exp(-t)/10, 0, 0)$, minimizamos el funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ sobre ρ y en 5 iteraciones se obtuvo el valor $\rho^* = 5.088827518131024$. La gráfica del funcional J restringido a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.4.

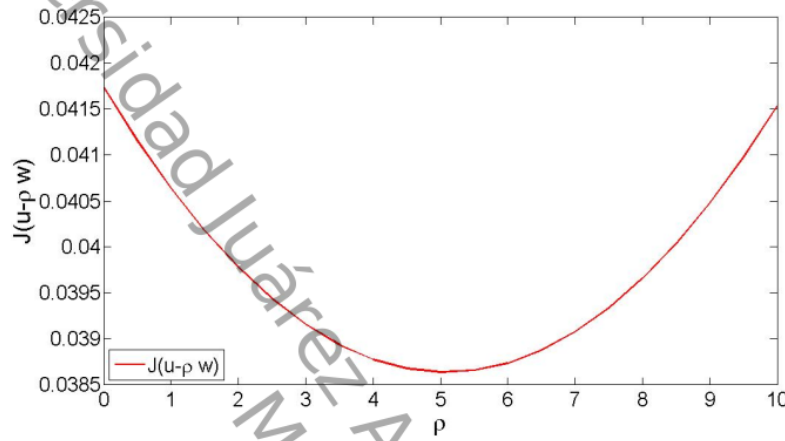


Figura 4.4: Funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

La derivada con respecto a ρ de la restricción de J a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.5.

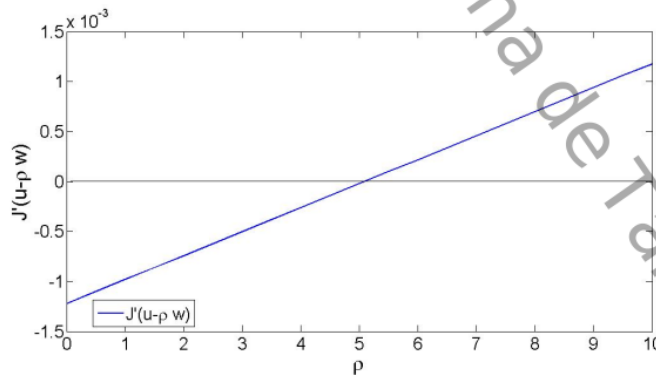


Figura 4.5: Derivada con respecto a ρ de $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

Ejemplo 4.8.2. En este ejemplo tomamos $u_1(t) = t \exp(-t)$, $u_2(t) = t^3$, $u_3(t) = 0$ y $w_1(t) = \exp(-t)/10$, $w_2(t) = 3t - t^3$ y $w_3(t) = 0$. Las gráficas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3 respectivamente. Se tomaron los valores siguientes para los parámetros en la iteración de Newton:

- $T = 16$.
- $k = 1.0e + 3$.
- $\rho^0 = 0$.
- $h = T/500$.
- $\eta = 1$.
- $\mathbf{y}_0 = [1.2514; 0.7456; -0.9753]$.
- $\mathbf{y}_T = [7.4207; 6.4958; -0.3236]$.

En la tabla 4.2 se muestran los resultados para cada iteración. En la columna 1 se especifica el número de iteración; en la columna 2 se muestran las aproximaciones ρ_i a la solución en la iteración respectiva; en la última columna se especifica la diferencia relativa dr_i entre la aproximación nueva a la raíz y la aproximación anterior.

No. Iteraciones	ρ_i	dr_i
0	0.0000000000000000e+00	
1	-1.021440514455108e+00	1.00000e+00
2	-1.016589739167547e+00	4.77162e-03
3	-1.016592553265594e+00	2.76817e-06

Tabla 4.2: Resultados numérico del ejemplo 4.8.2.

Dadas las funciones $\mathbf{u} = (t \exp(-t), t^3, 0)$ y $\mathbf{w} = (\exp(-t)/10, 3t - t^3, 0)$, minimizamos el funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ sobre ρ y en 3 iteraciones se obtuvo el valor $\rho^* = -1.016592553265594$. La gráfica del funcional J restringido a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.8.

La derivada con respecto a ρ de la restricción de J a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.9.

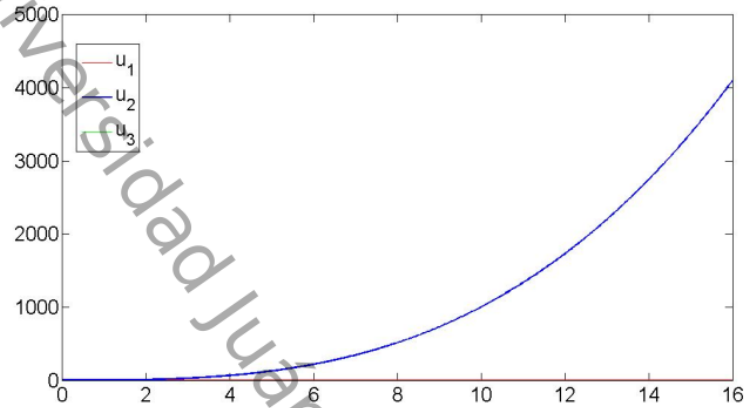


Figura 4.6: Funciones $u_1(t) = t \exp(-t)$, $u_2(t) = t^3$; y $u_3(t) = 0$ del ejemplo 4.8.2.

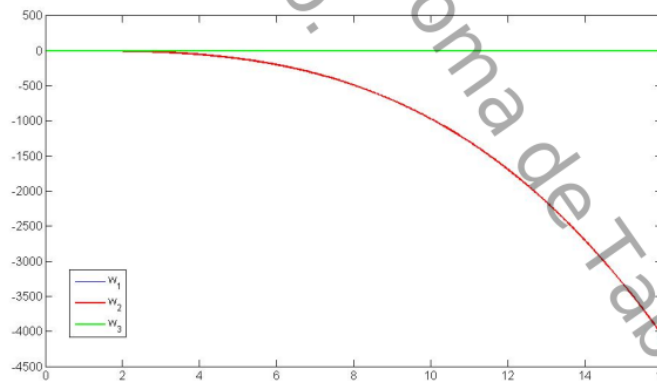


Figura 4.7: Funciones $w_1(t) = \exp(-t)/10$, $w_2(t) = 3t - t^3$ y $w_3(t) = 0$ del ejemplo 4.8.2.

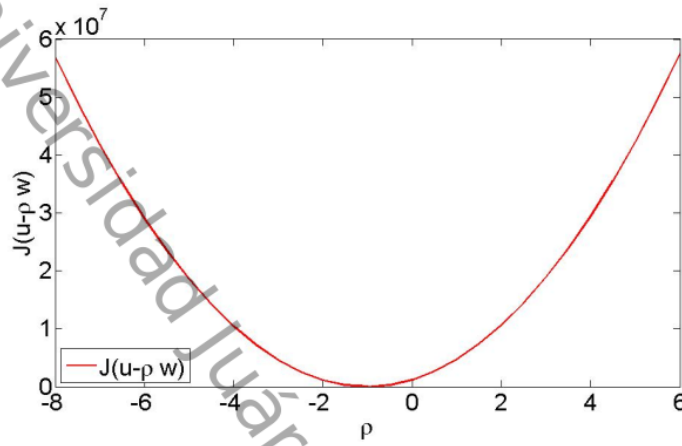


Figura 4.8: Funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$, para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.6 y 4.7.

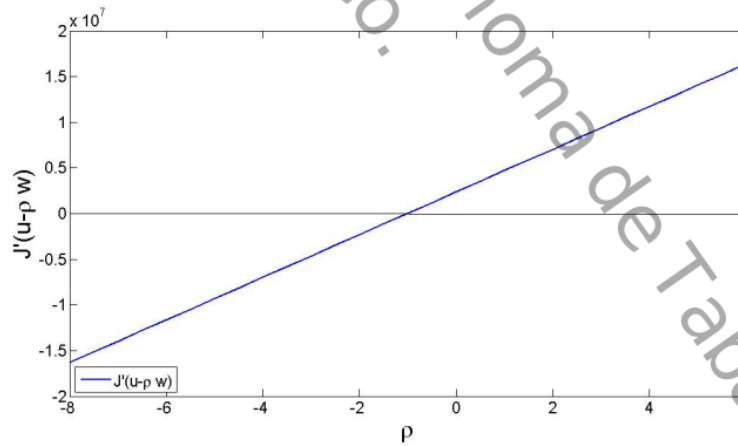


Figura 4.9: Derivada con respecto a ρ de $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.6 y 4.7.

Ejemplo 4.8.3. En este ejemplo tomamos $u_1(t) = -(t-2)\exp(-t)$, $u_2(t) = 3t^2 + 1$, $u_3(t) = (t-1)^2 + 1$ y $w_1(t) = t^3 + t - 1$, $w_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$ y $w_3(t) = \exp(-t)/10$. Las gráficas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11 respectivamente. Tanto para las aproximaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ como para las iteraciones de Newton se tomaron los valores siguientes:

- $T = 12$.
- $k = 1.0e - 3$.
- $\rho^0 = 0.5$.
- $h = T/500$.
- $\eta = 1$.
- $\mathbf{y}_0 = [0.1992; 0.1187; -0.1552]$.
- $\mathbf{y}_T = [0.1810; 0.0338; -0.0515]$.

En la tabla 4.3 se muestran los resultados para cada iteración. Dadas las funciones $\mathbf{u} = (-(t-2)\exp(-t), 3t^2 + 1, (t-1)^2 + 1)$ y $\mathbf{w} = (t^3 + t - 1, \frac{1}{3}t^3 - t, \exp(-t)/10)$, minimizamos el funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho\mathbf{w}(t))$ sobre ρ y en 6 iteraciones se obtuvo el valor $\rho^* = 8.447195090624485$. La gráfica del funcional J restringido a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho\mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.12.

No. Iteraciones	ρ_i	dr_i
0	5.000000000000000e-01	
1	-6.881596623522688e-01	1.72658e+00
2	-4.429644748170876e-01	5.53532e-01
3	1.718731853731353e-01	3.57728e+00
4	8.329014321354104e-02	1.06355e+00
5	8.447147261638241e-02	1.39850e-02
6	8.447195090624485e-02	5.66211e-06

Tabla 4.3: Resultados numérico del ejemplo 4.8.3.

La derivada con respecto a ρ de la restricción de J a la recta $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho\mathbf{w}$ se muestra en la Figura 4.13.

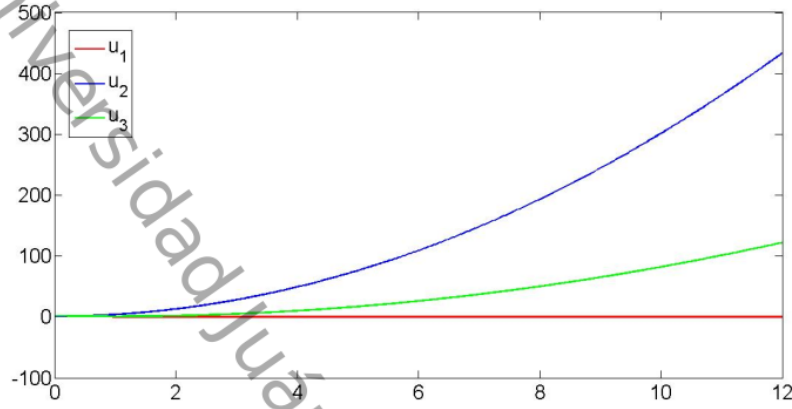


Figura 4.10: Funciones $u_1(t) = -(t-2)\exp(-t)$, $u_2(t) = 3t^2 + 1$, $u_3(t) = (t-1)^2 + 1$ del ejemplo 4.8.3.

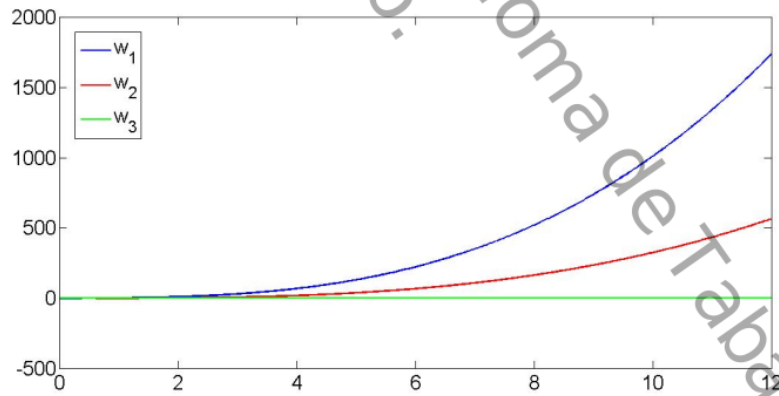


Figura 4.11: Funciones $w_1(t) = t^3 + t - 1$, $w_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$ y $w_3(t) = \exp(-t)/10$ del ejemplo 4.8.3.

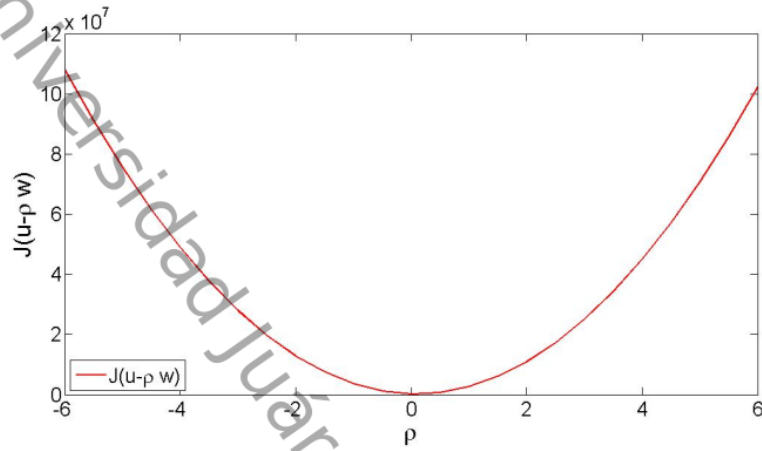


Figura 4.12: Funcional $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11.

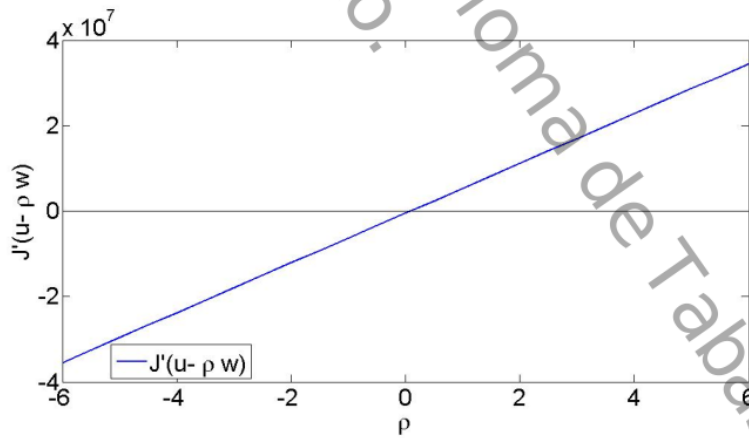


Figura 4.13: Derivada con respecto a ρ de $J(\mathbf{u}(t) - \rho \mathbf{w}(t))$ para las funciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ que se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11.

Conclusión

En este trabajo de tesis logramos implementar en MatLab un programa en donde aplicamos el método de Newton que resuelve computacionalmente los problemas de búsquedas en línea de la forma

$$\text{Mín}_{\rho \in \mathbb{R}} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son elementos conocidos de $(L^2(0, T))^3$, ó equivalentemente

$$\begin{aligned} &\text{Mín } J(\mathbf{v}), \\ &\text{s.a. } \mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w}, \forall \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para ello la idea básica fué definir la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(\rho) = J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \quad (4.8)$$

con lo cual pudimos aplicar el método de Newton para aproximar la raíz de g' (el mínimo de g) una vez conocidas expresiones para g' y g'' en términos del funcional J . Con el programa resultado de estas ideas se realizaron experimentos variando los elementos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ de $(L^2(0, T))^3$, así como el parámetro de penalización k , $\mathbf{y}_0$ y $\mathbf{y}_T$ los estados de equilibrio inicial y final y η un parámetro de regularización.

No contamos con un ejemplo para el cual se conozca la solución exacta, así que nuestra validación se basa en el desempeño del método como se muestra en los tres ejemplos del **capítulo 4**, dado que es posible tener una visualización detallada del funcional J restringido a la recta que pasa $\mathbf{u}$ y tiene dirección $\mathbf{w}$, pero sobre todo se ha aplicado ya con éxito, dentro de gradiente conjugado, en la solución del problema de minimización sin restricciones al que se hace referencia en la introducción y que tiene asociado un problema de control que consiste en llevar un sistema de un estado inicial a un estado final, es decir, se conoce el resultado [12].

Como trabajo futuro esperamos comparar varios métodos como Newton, secante, métodos sin derivadas, etc, para resolver el problema de búsqueda en línea y su posible aplicación al problema (7).

Bibliografía

- [1] Y. Braiman, B. Neschke, N. Nair, N. Imam and R. Glowinski, Memory States in Small Arrays of Josephson Junctions, PHYSICAL REVIEW E 94, 052223 (2016).
- [2] R. Glowinski, J. L. Lions and J.W. He, Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems: A Numerical Approach (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press (2008).
- [3] R. Glowinski, Finite element methods for incompressible viscous flow. In Handbook of Numerical Analysis, Vol. IX, P.G. Ciarlet & J.L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 2003, 3-1176.
- [4] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and nonlinear equation, SIAM, Vol 16 (1996).
- [5] J. L. Lions, Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer Verlag, New York, New York (1971).
- [6] R. L. Burden and J. D. Faires, Análisis Numérico. International Thompson Editorers, 6a Edición, México (1998).
- [7] H. L. Royden, Real Analysis. Pearson Education, Third Edition, New Jersey, (1988).
- [8] D. Poole, Álgebra lineal, una introducción moderna. Tercera Edición, Trent University, (2011).
- [9] H. F. Nathansky y B. Gamboa de Buen, Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach. Centro de investigación de Matemáticas, (2008).

- [10] J. López . Métodos variacionales, optimización y control: aplicación a la recuperación de campos vectoriales y estabilización de arreglos de memoria de juntas de Josephson. (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, (2016).
- [11] C. N. Cortazar. Método de Newton para búsquedas en línea en el espacio L^2 . (Tesis de licenciatura). Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, (2019).
- [12] R. Glowinski, J. López, H. Juarez, Y. Braiman, On the controllability of transitions between equilibrium states in small inductively coupled arrays of josephson junctions: A computational approach, Journal of Computational Physics, 403, (2020).

Apéndice A.1: Adimensionalización del sistema

Multiplicando la ecuación (3) por $\frac{1}{I_c}$ obtenemos

$$\frac{hC}{2eI_c} \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{h}{2eRI_c} \frac{d\phi(t)}{dt} + \sin(\phi(t)) = \frac{I_{ext}}{I_c}, \quad (9)$$

Sea $\phi(t) = \psi(t\omega_J)$. Considerando los cambios de variable propuestos y aplicando la regla de la cadena tenemos que si $\phi(t) = \psi(\tau)$ y $t = \frac{\tau}{\omega_J}$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} &= \frac{d\phi(t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} \frac{1}{\omega_J} \\ \therefore \frac{d\phi(t)}{dt} &= \omega_J \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

De esto, derivando otra vez con respecto de τ :

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = \omega_J^2 \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}. \quad (11)$$

sustituyendo (10) y (11) en (9) obtenemos

$$\frac{hC}{2eI_c} \omega_J^2 \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \frac{h\omega_J}{2eRI_c} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \sin(\psi(\tau)) = i, \quad (12)$$

que si el segundo término se multiplica por $\frac{\omega_J^2}{\omega_J^2}$ entonces llegamos a

$$\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \gamma \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \sin(\psi(\tau)) = i. \quad (13)$$

Apéndice A.2: Derivando con respecto a ρ los sistemas diferenciales

Tenemos que

$$g'(\rho) = -(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \mathbf{p}, \mathbf{w}) = - \int_0^T (\mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \, dt ,$$

donde $\mathbf{p}$ se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} + K\mathbf{y}_\rho + \text{sen } \mathbf{y}_\rho = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w} \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (14)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} + K\mathbf{p}_\rho + C(\mathbf{y}_\rho)\mathbf{p}_\rho = 0 \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}_\rho(T) = k(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (15)$$

Aplicando la regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo integral tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho}(g'(\rho)) &= \frac{d}{d\rho} \left(- \int_0^T (\mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \, dt \right) \\ g''(\rho) &= - \int_0^T \frac{d}{d\rho} [(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}] \, dt \\ &= \int_0^T [-\mathbf{w} + \dot{\mathbf{p}}_\rho] \cdot \mathbf{w} \, dt \end{aligned}$$

Para el sistema (14) aplicamos análisis de perturbación, derivando término a término

$$\frac{d}{d\rho} \left(\begin{cases} \Gamma \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} + K\mathbf{y}_\rho + \text{sen } \mathbf{y}_\rho = \mathbf{u} - \rho \mathbf{w} \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \right)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left(\Gamma \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) = \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \\ \gamma_2 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \\ \gamma_3 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} \left(\gamma_1 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \\ \frac{d}{d\rho} \left(\gamma_2 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \\ \frac{d}{d\rho} \left(\gamma_3 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \\ \gamma_2 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \\ \gamma_3 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{d\rho} \right) \\ \gamma_2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{d\rho} \right) \\ \gamma_3 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{y}_\rho}{d\rho} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{y}}_\rho) \\ \gamma_2 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{y}}_\rho) \\ \gamma_3 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{y}}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{d\rho} \left(\Gamma \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \right) = \Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\rho} (K \mathbf{y}_\rho) = \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} K_1 \cdot \mathbf{y}_\rho \\ K_2 \cdot \mathbf{y}_\rho \\ K_3 \cdot \mathbf{y}_\rho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} (K_1 \cdot \mathbf{y}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (K_2 \cdot \mathbf{y}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (K_3 \cdot \mathbf{y}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{y}_\rho) \\ K_2 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{y}_\rho) \\ K_3 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{y}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \\ K_2 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \\ K_3 \cdot \frac{d\mathbf{y}_\rho}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \dot{\mathbf{y}}_\rho \\ K_2 \cdot \dot{\mathbf{y}}_\rho \\ K_3 \cdot \dot{\mathbf{y}}_\rho \end{pmatrix}$$

$$= K \dot{\mathbf{y}}_\rho$$

$$\therefore \frac{d}{d\rho} (K \mathbf{y}_\rho) = K \dot{\mathbf{y}}_\rho, \quad (17)$$

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \text{sen } y_{1\rho} \\ \text{sen } y_{2\rho} \\ \text{sen } y_{3\rho} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \text{sen } y_{1\rho} \\ \text{sen } y_{2\rho} \\ \text{sen } y_{3\rho} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} \text{sen } y_{1\rho} \\ \frac{d}{d\rho} \text{sen } y_{2\rho} \\ \frac{d}{d\rho} \text{sen } y_{3\rho} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} \frac{d}{d\rho}(y_{1\rho}) \\ \cos y_{2\rho} \frac{d}{d\rho}(y_{2\rho}) \\ \cos y_{3\rho} \frac{d}{d\rho}(y_{3\rho}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho}(y_{1\rho}) \\ \frac{d}{d\rho}(y_{2\rho}) \\ \frac{d}{d\rho}(y_{3\rho}) \end{pmatrix}$$

$$= \cos \mathbf{y}_\rho \dot{\mathbf{y}}_\rho$$

$$\therefore \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \text{sen } y_{1\rho} \\ \text{sen } y_{2\rho} \\ \text{sen } y_{3\rho} \end{pmatrix} = \cos \mathbf{y}_\rho \dot{\mathbf{y}}_\rho, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\rho} (\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}) &= \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} u_1 - \rho w_1 \\ u_2 - \rho w_2 \\ u_3 - \rho w_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho}(u_1 - \rho w_1) \\ \frac{d}{d\rho}(u_2 - \rho w_2) \\ \frac{d}{d\rho}(u_3 - \rho w_3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho}(u_1) - \frac{d}{d\rho}(\rho w_1) \\ \frac{d}{d\rho}(u_2) - \frac{d}{d\rho}(\rho w_2) \\ \frac{d}{d\rho}(u_3) - \frac{d}{d\rho}(\rho w_3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix} \\
 \therefore \frac{d}{d\rho} (\mathbf{u} - \rho\mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix} \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\rho} (\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0)$$

$$\frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}(0)) = \frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}_0)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(0) = 0. \tag{20}$$

De (16), (17), (18), (19) y (20) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{y}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho = \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix}, \text{ en } (0, T) \\ \dot{\mathbf{y}}_\rho(0) = 0. \end{array} \right.$$

Ahora para el sistema (15) aplicamos análisis de perturbación, derivando término a término

$$\frac{d}{d\rho} \left(\left\{ \begin{array}{l} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} + K\mathbf{p}_\rho + C(\mathbf{y}_\rho)\mathbf{p}_\rho = 0 \text{ en } (0, T), \\ \Gamma\mathbf{p}_\rho(T) = k(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T). \end{array} \right. \right)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left(-\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) = \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} -\gamma_1 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \\ -\gamma_2 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \\ -\gamma_3 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} \left(-\gamma_1 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \\ \frac{d}{d\rho} \left(-\gamma_2 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \\ \frac{d}{d\rho} \left(-\gamma_3 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma_1 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \\ -\gamma_2 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \\ -\gamma_3 \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma_1 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{d\rho} \right) \\ -\gamma_2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{d\rho} \right) \\ -\gamma_3 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{p}_\rho}{d\rho} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma_1 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{p}}_\rho) \\ -\gamma_2 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{p}}_\rho) \\ -\gamma_3 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{p}}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{d\rho} \left(\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \right) = -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt}, \quad (21)$$

$$\frac{d}{d\rho} (K \mathbf{p}_\rho) = \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} K_1 \cdot \mathbf{p}_\rho \\ K_2 \cdot \mathbf{p}_\rho \\ K_3 \cdot \mathbf{p}_\rho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} (K_1 \cdot \mathbf{p}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (K_2 \cdot \mathbf{p}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (K_3 \cdot \mathbf{p}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{p}_\rho) \\ K_2 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{p}_\rho) \\ K_3 \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{p}_\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \\ K_2 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \\ K_3 \cdot \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho \\ K_2 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho \\ K_3 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho \end{pmatrix}$$

$$= K \dot{\mathbf{p}}_\rho$$

$$\therefore \frac{d}{d\rho} (K \mathbf{p}_\rho) = K \dot{\mathbf{p}}_\rho, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_\rho) \mathbf{p}_\rho) &= \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} C(\mathbf{y}_{1\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho \\ C(\mathbf{y}_{2\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho \\ C(\mathbf{y}_{3\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{1\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{2\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho) \\ \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{3\rho}) \cdot \mathbf{p}_\rho) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{12\rho}) p_{1\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{12\rho}) p_{2\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{13\rho}) p_{3\rho}) \\ \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{21\rho}) p_{1\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{22\rho}) p_{2\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{23\rho}) p_{3\rho}) \\ \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{31\rho}) p_{1\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{32\rho}) p_{2\rho}) + \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{33\rho}) p_{3\rho}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [p_{1\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{11\rho})) + C(\mathbf{y}_{11\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{1\rho})] + [p_{2\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{12\rho})) + C(\mathbf{y}_{12\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{2\rho})] + [p_{3\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{13\rho})) + C(\mathbf{y}_{13\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{3\rho})] \\ [p_{1\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{21\rho})) + C(\mathbf{y}_{21\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{1\rho})] + [p_{2\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{22\rho})) + C(\mathbf{y}_{22\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{2\rho})] + [p_{3\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{23\rho})) + C(\mathbf{y}_{23\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{3\rho})] \\ [p_{1\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{31\rho})) + C(\mathbf{y}_{31\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{1\rho})] + [p_{2\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{32\rho})) + C(\mathbf{y}_{32\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{2\rho})] + [p_{3\rho} \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{33\rho})) + C(\mathbf{y}_{33\rho}) \frac{d}{d\rho} (p_{3\rho})] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [-p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{11\rho} \dot{\mathbf{y}}_{11\rho} + C(\mathbf{y}_{11\rho}) \dot{p}_{1\rho}] + [-p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{12\rho} \dot{\mathbf{y}}_{12\rho} + C(\mathbf{y}_{12\rho}) \dot{p}_{2\rho}] + [-p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{13\rho} \dot{\mathbf{y}}_{13\rho} + C(\mathbf{y}_{13\rho}) \dot{p}_{3\rho}] \\ [-p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{21\rho} \dot{\mathbf{y}}_{21\rho} + C(\mathbf{y}_{21\rho}) \dot{p}_{1\rho}] + [-p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{22\rho} \dot{\mathbf{y}}_{22\rho} + C(\mathbf{y}_{22\rho}) \dot{p}_{2\rho}] + [-p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{23\rho} \dot{\mathbf{y}}_{23\rho} + C(\mathbf{y}_{23\rho}) \dot{p}_{3\rho}] \\ [-p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{31\rho} \dot{\mathbf{y}}_{31\rho} + C(\mathbf{y}_{31\rho}) \dot{p}_{1\rho}] + [-p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{32\rho} \dot{\mathbf{y}}_{32\rho} + C(\mathbf{y}_{32\rho}) \dot{p}_{2\rho}] + [-p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{33\rho} \dot{\mathbf{y}}_{33\rho} + C(\mathbf{y}_{33\rho}) \dot{p}_{3\rho}] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} [C(\mathbf{y}_{1\rho})\dot{p}_{1\rho} + C(\mathbf{y}_{12\rho})\dot{p}_{2\rho} + C(\mathbf{y}_{13\rho})\dot{p}_{3\rho}] - [p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{11\rho} \dot{\mathbf{y}}_{11\rho} + p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{12\rho} \dot{\mathbf{y}}_{12\rho} + p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{13\rho} \dot{\mathbf{y}}_{13\rho}] \\ [C(\mathbf{y}_{21\rho})\dot{p}_{1\rho} + C(\mathbf{y}_{22\rho})\dot{p}_{2\rho} + C(\mathbf{y}_{23\rho})\dot{p}_{3\rho}] - [p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{21\rho} \dot{\mathbf{y}}_{21\rho} + p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{22\rho} \dot{\mathbf{y}}_{22\rho} + p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{23\rho} \dot{\mathbf{y}}_{23\rho}] \\ [C(\mathbf{y}_{31\rho})\dot{p}_{1\rho} + C(\mathbf{y}_{32\rho})\dot{p}_{2\rho} + C(\mathbf{y}_{33\rho})\dot{p}_{3\rho}] - [p_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{31\rho} \dot{\mathbf{y}}_{31\rho} + p_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{32\rho} \dot{\mathbf{y}}_{32\rho} + p_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{33\rho} \dot{\mathbf{y}}_{33\rho}] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C(\mathbf{y}_{1\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \\ C(\mathbf{y}_{2\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \\ C(\mathbf{y}_{3\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{1\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \\ \dot{\mathbf{y}}_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{2\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \\ \dot{\mathbf{y}}_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{3\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \end{pmatrix} \\
 &\therefore \frac{d}{d\rho} (C(\mathbf{y}_{\rho}) \mathbf{p}_{\rho}) = \begin{pmatrix} C(\mathbf{y}_{1\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \\ C(\mathbf{y}_{2\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \\ C(\mathbf{y}_{3\rho}) \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\rho} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{1\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{1\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \\ \dot{\mathbf{y}}_{2\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{2\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \\ \dot{\mathbf{y}}_{3\rho} \text{sen } \mathbf{y}_{3\rho} \cdot \mathbf{p}_{\rho} \end{pmatrix} \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\rho}(\Gamma \mathbf{p}_\rho(T)) &= \frac{d}{d\rho}(k(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T)) \\
 \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \cdot \mathbf{p}_\rho(T) \\ \Gamma_2 \cdot \mathbf{p}_\rho(T) \\ \Gamma_3 \cdot \mathbf{p}_\rho(T) \end{pmatrix} &= k \frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T) \\
 \begin{pmatrix} \frac{d}{d\rho}(\Gamma_1 \cdot \mathbf{p}_\rho(T)) \\ \frac{d}{d\rho}(\Gamma_2 \cdot \mathbf{p}_\rho(T)) \\ \frac{d}{d\rho}(\Gamma_3 \cdot \mathbf{p}_\rho(T)) \end{pmatrix} &= k \left(\frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}_\rho(T)) - \frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}_T) \right) \\
 \begin{pmatrix} \Gamma_1 \cdot \frac{d}{d\rho}(\mathbf{p}_\rho(T)) \\ \Gamma_2 \cdot \frac{d}{d\rho}(\mathbf{p}_\rho(T)) \\ \Gamma_3 \cdot \frac{d}{d\rho}(\mathbf{p}_\rho(T)) \end{pmatrix} &= k \frac{d}{d\rho}(\mathbf{y}_\rho(T)) \\
 \begin{pmatrix} \Gamma_1 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) \\ \Gamma_2 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) \\ \Gamma_3 \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) \end{pmatrix} &= k \dot{\mathbf{y}}_\rho(T) \\
 \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) &= k \dot{\mathbf{y}}_\rho(T) \\
 \therefore \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) &= k \dot{\mathbf{y}}_\rho(T) \tag{24}
 \end{aligned}$$

De (21), (22), (23) y (24) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{p}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho = \\ \begin{pmatrix} y_{1\rho} \sin \dot{y}_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & y_{2\rho} \sin \dot{y}_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & y_{3\rho} \sin \dot{y}_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) = k\dot{\mathbf{y}}_\rho(T). \end{array} \right. \quad (25)$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

METODO DE NEWTON PARA BUSQUEDAS EN LINEA EN EL ESPACIO (L 2) 3

INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	www.scipedia.com Internet	263 palabras — 3%
2	revistas.ujat.mx Internet	125 palabras — 1%
3	ri.ujat.mx Internet	97 palabras — 1%
4	www.coursehero.com Internet	90 palabras — 1%
5	pt.scribd.com Internet	61 palabras — 1%
6	es.wikipedia.org Internet	55 palabras — 1%
7	qdoc.tips Internet	55 palabras — 1%
8	www.fcfm.buap.mx Internet	25 palabras — < 1%
9	docslib.org Internet	20 palabras — < 1%
10	dspace.unitru.edu.pe Internet	13 palabras — < 1%

11	www.slideshare.net Internet	12 palabras — < 1%
12	dokumen.pub Internet	10 palabras — < 1%
13	es.answers.yahoo.com Internet	8 palabras — < 1%
14	hdl.handle.net Internet	8 palabras — < 1%
15	laurent.claessens-donadello.eu Internet	7 palabras — < 1%

EXCLUIR CITAS

ACTIVADO

EXCLUIR FUENTES

DESACTIVADO

EXCLUIR BIBLIOGRAFÍA

ACTIVADO

EXCLUIR COINCIDENCIAS < 5 PALABRAS