UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DIVERSOS ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DEL COLECCIONISTA DE CUPONES Y APLICACIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

AMAYRANI LEÓN GARCÍA

DIRECTORES

DRA. ADDY MARGARITA BOLIVAR CIMÉ
DR. AROLDO PÉREZ PÉREZ

Cunduacán, Tab. Junio 2021

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

División Académica de Ciencias Básicas

México 2021 Año de la Independencia

DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 12 de mayo de 2021.

C. AMAYRANI LEÓN GARCÍA
PASANTE DE LA LIC. EN MATEMÁTICAS
P R E S E N T E

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"DIVERSOS ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DEL COLECCIONISTA DE CUPONES Y APLICACIONES"** bajo la modalidad de titulación por **TESIS**, en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR

C.c.p. Pasante.
C.c.p. Archivo.

Miembro CUMEX desde 2008
Consorcio de Universidades Mexicanas
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "**DIVERSOS ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DEL COLECCIONISTA DE CUPONES Y APLICACIONES**", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 3 días del mes de junio del año 2021.

AUTORIZÓ

AMAYRANI LEÓN GARCÍA
162A11019

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice general

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, por la vida que me ha dado, por ser mi fortaleza en los momentos más difíciles de mi carrera profesional, pues el me ilumina con su infinita sabiduría y entendimiento. Él me ha permitido cumplir esta meta. También agradezco a mi familia por sus oraciones, comprensión y apoyo incondicional durante este proceso de mi formación profesional.
A los amigos y maestros que Dios me ha dado el privilegio de tener, que compartieron conmigo experiencias y conocimientos, contribuyendo así a mi formación académica.
Por otra parte, me complace en agradecerle especialmente:

- Al M.C. Gregorio Soberanes Cerino, por sus acertados consejos y brindarme las facilidades para escribir este trabajo de tesis.

- Al M.C. José del Carmen Alberto Domínguez, por su motivación, su paciencia y dedicación en las asesoría brindadas, por ser un soporte en mi etapa universitaria y porque no dejó de creer en mí.

- A mi apreciable amigo Cesar García Guzmán, que compartió conmigo muchas circunstancias complicadas, en las que me ví necesitada de mucha ayuda, y él me brindo su mano amiga; lo recuerdo con mucho cariño. Este logro también es de él, pues su amistad y apoyo impulsaron significativamente a mi superación profesional.

- A mis directores de tesis, la Dra. Addy Margarita y el Dr. Aroldo, por su paciencia, esfuerzo, dedicación y entrega en la dirección de esta tesis, ya que no solamente me brindaron su ayuda sino también su amistad.

Finalmente, agradezco a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por la formación profesional durante varios años, por permitirme participar en diversos foros y congresos. También, porque esta casa de estudios me brindo las facilidades para concluir satisfactoriamente mi carrera universitaria.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Introducción

El problema del coleccionista de cupones es un problema clásico de la probabilidad, específicamente, del área de combinatoria y se remonta al tratado de De Moivre *De Mensura Sortis* de 1712 y al trabajo de Laplace *Theorie Analytique des probabilites* de 1812 (ver [9] o [24]). Este problema estaba relacionado con la Dixie Cup Company, ya que en la década de 1930 la compañía introdujo un procedimiento muy exitoso mediante el cual los niños recolectaban las tapas de Dixie para recibir “premios”, comenzando con ilustraciones de sus personajes favoritos de Dixie Circus, luego estrellas de Hollywood y jugadores de béisbol de la Major League (ver [9] o [18]). Este problema consiste en lo siguiente: existen N tipos diferentes de cupones, tales como tarjetas de béisbol, de lucha libre, etc. y se desea recolectarlos todos; los cupones se adquieren uno por uno en secuencia. Por simplicidad, denotaremos a los cupones por los números $1, 2, \ldots, N$, y por p_k denotaremos a la probabilidad de adquirir un cupón de tipo k, $k = 1, \ldots, N$; obviamente, debe tenerse $p_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, N$ y $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$. Suponiendo independencia entre las adquisiones (compras) de los cupones, este problema se modela por una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes, tales que para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$, $P(X_n = k) = p_k$, $n = 1, 2, \ldots$. El interés en este trabajo consiste en determinar el número esperado de cupones que deben adquirirse para completar la colección. En este contexto se analizarán los siguientes casos:

1. El caso en que cada cupón tiene la misma probabilidad de ser adquirido por el coleccionista, es decir, $p_k = \frac{1}{N}$, para $k = 1, \ldots, N$; tanto para cuando el interés es completar una única colección, como cuando el interés es completar $m \geq 2$ colecciones.

2. El caso en que las probabilidades p_k, $k = 1, \ldots, N$ no son todas iguales. Este caso, el cual es el más realista, es más complicado que el primero. Aquí también se considerará el caso de una única colección y el caso de múltiples colecciones.

Los casos anteriores serán abordados mediante varios enfoques. En uno de estos enfoques se hace uso de la identidad de máximos-mínimos para valores esperados y, debido a la naturaleza markoviana del problema del coleccionista de cupones (el número de cupones diferentes recolectados hasta la $(n+1)$-ésima compra, solo depende del número de cupones diferentes recolectados hasta la n-ésima compra), el problema se aborda también mediante el uso de la teoría de las cadenas de Markov. Este último enfoque tiene la desventaja de que el espacio de estados crece rápidamente cuando el número de cupones diferentes, N, es grande y se desea completar más de una colección.

El estudio del problema del coleccionista de cupones es importante debido a que tiene aplicaciones en varias áreas de la ciencia, tales como la programación matemática, optimización, algoritmos de búsqueda de información, procesos de aprendizaje, ingeniería, ecología, así

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

como en lingüística (ver [6] y [16]). Además, el problema del coleccionista de cupones es también fácilmente adaptable a problemas de muestreo industrial (ver [17]). En efecto, en un entorno industrial, el problema puede reformularse de la manera siguiente. Se tiene una población (proceso) de extensión ilimitada o muy grande que consiste de N diferentes tipos de unidades. Un tipo de unidad puede no ser más que una marca de algún tipo que indica qué máquina o estación produjo la unidad. Toda la producción de las distintas estaciones está mezclada. En cada tiempo se elige una unidad para su análisis, y como la población es muy grande y está además mezclada, puede asumirse que las unidades de tipo específico aparecen en la muestra independientemente una de la otra. En este contexto será de interés conocer, por ejemplo, el tamaño promedio de muestra requerida para obtener al menos una de cada una de los N tipos de unidades.

Este trabajo de tesis se distribuye en cuatro capítulos. Aunque se asumen conocimientos básicos de la teoría de probabilidad, en el capítulo 1 se hace un recordatorio de los conceptos de espacio de probabilidad, probabilidad condicional e independencia, variables aleatorias y, por último, algo elemental de la teoría de procesos estocásticos. Luego en el capítulo 2, se dan los conceptos de cadenas de Markov y matriz de transición. Así mismo, en las últimas tres secciones de este capítulo, se estudian los conceptos de clases comunicantes, estados recurrentes y estados transitorios; necesarios para el estudio de las probabilidades de transición que servirán tanto para el análisis de una colección única como para la de múltiples colecciones, y finalmente se presenta una sección de tiempos y probabilidades de absorción. Ya en el capítulo 3 se establece el problema del coleccionista de cupones bajo la condición de que cada cupón tiene la misma probabilidad de ser adquirido por el coleccionista, en tal caso se suponen N diferentes tipos de cupones con la probabilidad de comprar cualquier cupón en un tiempo cualquiera igual a $\frac{1}{N}$. En primera instancia, se realiza el análisis de este caso para una colección única de N cupones mediante la distribución geométrica y el uso de cadenas de Markov. Después, se hace el análisis directo para más de una colección de N cupones, aproximando el número esperado de compras que se requieren realizar para completar tales colecciones, y de nueva cuenta, pero solo para los casos de dos y de tres colecciones de N cupones, se usa el enfoque de cadenas de Markov. En el capítulo 4, se aborda un análisis directo para una colección única de N cupones con probabilidades desiguales, cuyo fin es determinar el tamaño esperado o cuantos cupones se requieren comprar para completar dicha colección. Además, a través de la identidad de máximos-mínimos, se analiza el problema del coleccionista de cupones para una y más de una colección de N cupones con probabilidades desiguales; y de forma similar al capítulo 3, se da el enfoque de cadenas de Markov para los casos de dos colecciones con 2 y con 3 cupones. También, en este capítulo, se anexa una sección que presenta una comparación entre los casos con probabilidades iguales y desiguales para una colección única de N cupones. Al final de los capítulos 3 y 4 se presenta un ejemplo de aplicación de los resultados presentados.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 1

Preliminares sobre la probabilidad

El propósito de este capítulo es proporcionar los conceptos y resultados básicos de la teoría de probabilidad que serán utilizados a lo largo de esta tesis.

1.1. Definición y propiedades básicas de la probabilidad

En esta sección se estudian los conceptos y resultados básicos de la probabilidad; especificando solo aquellos que utilizaremos en las próximas secciones. Las definiciones y resultados que se presentan fueron consultados en [15], [23] y [24].

Definición 1.1.1. *El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es llamado* ***espacio muestral****.*

Generalmente el espacio muestral de un experimento aleatorio se denota por Ω, y a un elemento cualquiera de dicho conjunto por ω.

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos el experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de dos monedas. El espacio muestral, en este caso, está dado por los siguientes cuatro puntos*

$$\Omega = \{(s,s), (s,a), (a,s), (a,a)\}.$$

Las entradas son (s,s) si ambas monedas son soles, (s,a) si la primera moneda es sol y la segunda es águila, (a,s) si la primera es águila y la segunda es sol, y (a,a) si ambas monedas son águilas.

Después de haberse realizado el experimento aleatorio, generalmente se desea saber si los resultados obtenidos pertenecen o no a un subconjunto dado del espacio muestral.

Ejemplo 1.1.3. *Retomando el ejemplo 1.1.2, supongamos que estamos interesados en conocer únicamente los resultados donde la primera entrada es sol; obtenemos entonces el subconjunto del espacio muestral $A = \{(s,s), (s,a)\}$.*

En cada situación en particular, existirá una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω a los que se podrá asociar una “probabilidad” de ocurrencia. A los elementos en esta familia $\mathcal{F}$ se les llamará **eventos** y los denotaremos con letras mayúsculas, A, B, C, etc. Es decir, los eventos son subconjuntos A del espacio muestral para los que una vez realizado el experimento se puede verificar si el resultado $\omega \in \Omega$ pertenece o no a cada $A \in \mathcal{F}$. Si $\omega \in A$ diremos que A **ha ocurrido**, contrariamente si $\omega \notin A$ diremos que A **no ha ocurrido**. De manera rigurosa, se tiene lo siguiente.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Definición 1.1.4. *Una σ-**álgebra** $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de Ω que cumple las siguientes condiciones*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

2) Si $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$.

3) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

La primera condición se establece debido a que si el resultado del experimento es ω, se sabe que $\omega \in \Omega$. La segunda condición se establece debido a que si se sabe que $\omega \in A$, entonces sabemos que $\omega \notin A^c$ y recíprocamente. Finalmente, la tercera condición se debe a que si puede determinarse si ω pertenece o nó a cada A_n, entonces puede determinarse si $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ocurrió o nó.

Ejemplo 1.1.5. *Una σ-álgebra que será de gran utilidad en la siguiente sección es la σ-álgebra de **Borel**; para la cual tomaremos a $\mathbb{R}$ como el espacio muestral, y definimos la σ-álgebra de **Borel** como la σ-álgebra* mas pequeña *(en sentido de contención) que contiene a todos los intervalos. A esta σ-álgebra la denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, y a sus eventos los llamaremos **conjuntos de Borel**.*

En relación a cualquier evento $A \in \mathcal{F}$, cada uno de ellos tendrá asociada una probabilidad de ocurrencia, que denotaremos por $P(A)$, que debe satisfacer las siguientes propiedades: $P(\Omega) = 1$ pues la ocurrencia del espacio muestral es segura; para cualquier evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$; y la probabilidad de ocurrencia de una unión, ya sea finita o infinita numerable, de eventos ajenos es la suma de las probabilidades relacionadas a cada evento de dicha unión. Así es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 1.1.6. *Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Una **probabilidad en $\mathcal{F}$** es una función $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades*

1) $P(\Omega) = 1$.

2) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ son ajenos por pares, esto es, $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

*A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le llama **espacio de probabilidad**.*

El propósito esencial es relacionar un espacio de probabilidad con un experimento aleatorio de interés. En general los experimentos aleatorios se asocian con varios tipos de espacios, siendo los espacios de probabilidad continuos y los espacios de probabilidad discretos los más frecuentemente utilizados. Para los experimentos que vamos a estudiar en este trabajo únicamente usaremos los espacios de probabilidad discretos, que enseguida presentamos su definición.

Definición 1.1.7. *Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es **discreto** si Ω es un conjunto finito o numerable y $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de todos los subconjuntos de Ω.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Usando un espacio de probabilidad discreto, si deseamos encontrar la probabilidad de cualquier evento A, se requerirá conocer $P(\omega) := P(\{\omega\})$ para cada $\omega \in \Omega$, pues por la segunda propiedad de la definición 1.1.6 se sigue que $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Ahora nos enfocaremos en las sucesiones infinitas de eventos, recordemos que si estas sucesiones son crecientes o decrecientes, su límite se define como la unión de los eventos o la intersección de los eventos, respectivamente. A continuación presentaremos un teorema importante que establece una igualdad entre la probabilidad del límite de la sucesión y el límite de las probabilidades.

Teorema 1.1.8. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{F}$.*

a) *Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente, es decir, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, entonces*
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

b) *Similarmente, si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente, esto es, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, entonces*
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración. Mostremos primero a). Supongamos que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente. Entonces
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \cdots,$$
donde los conjuntos $A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash A_2, \ldots$ son ajenos por pares. Por lo tanto, por definición de probabilidad,
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) &= P(A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1) + P(A_3 \backslash A_2) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple porque las sumas parciales en la serie anterior son
$$\begin{aligned} P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1) + \cdots + P(A_n \backslash A_{n-1}) &= P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= P(A_n), \end{aligned}$$

probando de esta manera a).

Por último demostremos b). Asumamos ahora que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente. La igualdad
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
se obtiene tomando los complementos de A_n en Ω y aplicando la Ley de De Morgan para la intersección, esto es
$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

En consecuencia, dado que $\{A_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente, pues $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente, aplicamos a) para obtener

$$P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c),$$

o, en forma equivalente,

$$1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

y así obtenemos b). ■

1.2. Probabilidad condicional e independencia

En esta sección vamos a estudiar dos conceptos muy importantes de la teoría de la probabilidad. Intuitivamente podemos decir que el concepto de probabilidad condicional representa la probabilidad de ocurrencia de un evento modificada con la información adicional de que otro evento ha ocurrido. El concepto de independencia nos indica que la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento. Daremos ahora las definiciones formales de estos dos conceptos.

Definición 1.2.1. *Para cualesquiera eventos $A, B \in \mathcal{F}$ con $P(B) > 0$, la* ***probabilidad condicional de*** *A* ***dado*** *B está definida por*

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 1.2.2. *Se lanzan dos dados balanceados y se quiere encontrar la probabilidad de que la suma sea al menos 10 dado que el primer dado es 6. En este ejemplo el espacio muestral Ω consiste de 36 pares ordenados (x, y), donde $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Ya que los dados están balanceados, la probabilidad de cada par ordenado es $\frac{1}{36}$. Una lista de puntos muestrales en Ω está dada por*

$$\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6),\\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6),\\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6),\\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6),\\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6),\\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6). \end{matrix} \tag{1.1}$$

La probabilidad de que la suma de dos dados balanceados sea al menos 10, es de $\frac{6}{36}$ ya que 6 de los 36 pares suman 10 o más, estos pares son

$$\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Sin embargo, si se sabe que el primer dado es 6, el espacio muestral bajo estas consideraciones se convierte en la sexta fila de (1.1). Observando la sexta fila vemos que 3 de los 6 pares ordenados tienen una suma de al menos 10. Por lo tanto la probabilidad de conseguir una suma de al menos 10 dado que el primer dado es 6 es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ahora, esta técnica de encontrar el nuevo espacio muestral bajo condiciones dadas, está bien para problemas simples, sin embargo en muchos casos hacer esto es más complejo. Esto es debido a que puede ser complicado definir el nuevo espacio muestral y la nueva medida de probabilidad bajo las condiciones dadas. La definición dada anteriormente proporciona la forma de calcular probabilidades condicionales usando el espacio muestral original. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P[\,suma \geq 10 \mid primer\ dado\ es\ 6\,] &= \frac{P[\,suma \geq 10\ y\ el\ primer\ dado\ es = 6\,]}{P[\,primer\ dado\ es = 6\,]} \\ &= \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definición 1.2.3. *Dos eventos $A, B \in \mathcal{F}$ son llamados **independientes** si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

En general, decimos que n eventos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ son independientes si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

para cualesquiera índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Ejemplo 1.2.4. *Dos monedas son lanzadas y asumimos que el espacio muestral (ver ejemplo 1.1.2) es equiprobable. Sea A el evento donde el resultado de la primera moneda es sol y B el evento donde el resultado de la segunda moneda es águila, entonces A y B son independientes, ya que $P(A \cap B) = P(\{(s,a)\}) = \frac{1}{4}$, $P(A) = (\{(s,s),(s,a)\}) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = (\{(s,a),(a,a)\}) = \frac{1}{2}$, por lo que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Ejemplo 1.2.5. *Se lanzan dos dados. Denotamos a U como el evento de que la suma de los dados es 6 y A denota el evento de que el primer dado sea igual a 4 (ver el espacio muestral en el ejemplo 1.2.2). Entonces $P(U \cap A) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{36}$ mientras que $P(U)P(A) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{216}$. Por lo tanto U y A no son independientes. Intuitivamente la razón de esto es clara, debido a que estamos interesados en la posibilidad de tener un 6 (con dos dados), estaremos muy felices si el primer dado cae en 4 (o de hecho en alguno de los números 1,2,3,4 y 5) ya que tendriamos la posibilidad de obtener un total de 6. Pero si en el primer dado obtenemos 6, entonces no tendriamos oportunidad de que el total sea 6. En otras palabras nuestra oportunidad de conseguir un total de 6 depende del resultado del primer dado, entonces U y A no pueden ser independientes.*

Observación 1.2.6. *En particular, si A y B son eventos independientes y $P(B) > 0$, entonces*

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A),$$

lo que significa que conociendo que B ha ocurrido, no cambia la probabilidad de ocurrencia de A.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Finalmente como consecuencia de la probabilidad condicional e independencia de eventos se establece el siguiente teorema, cuya prueba se omite pero puede ser consultada en [4, teorema 4.5.1, pág. 172].

Teorema 1.2.7. *Para cualesquiera eventos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ se cumplen las afirmaciones siguientes*

a) *Si A_1 y A_2 son eventos independientes y $P(A_1) > 0$, entonces $P(A_2|A_1) = P(A_2)$.*

b) *Si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, entonces*
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

1.3. Variables aleatorias y esperanza

En esta sección estudiaremos la definición de variable aleatoria, algunos ejemplos de variables aleatorias discretas, y conceptos relevantes relacionados a la esperanza de una variable aleatoria discreta.

Definición 1.3.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Diremos que una función $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una **variable aleatoria** si*
$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F},$$
para cada intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

De las definiciones dadas de variable aleatoria e independencia de eventos, podemos establecer el concepto de variables aleatorias independientes. Intuitivamente la independencia de $X_1, \ldots, X_n$ significa que una declaración acerca de una o más variables X_i no afecta las probabilidades de las restantes X_i. Una declaración acerca de X_i corresponde a un evento de la forma $A_i = \{X_i \in B_i\}$; entonces los eventos $A_1, \ldots, A_n$ serán independientes. A continuación presentamos la definición formal del concepto de variables aleatorias independientes.

Definición 1.3.2. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se dice que son **independientes** si para todos los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene*
$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n).$$

*En general, se dice que una colección (finita o infinita) de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ son **independientes** si todo subconjunto finito de esta colección son variables aleatorias independientes.*

Cada variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad tiene asociada una función $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, llamada **función de distribución**, definida por $F(x) = P(\omega\colon X(\omega) \leq x)$. Esta función contiene toda la información de la variable aleatoria y su correspondiente probabilidad. Por lo tanto, dada una función de distribución específica, existirá un espacio de probabilidad y una variable aleatoria definida sobre él y cuya función de distribución es la específicada. En la práctica podemos observar variables aleatorias con distribuciones distintas o iguales, si esto último sucede, se dice que estas variables aleatorias están **idénticamente distribuidas**. Ahora bien, si asumimos que las variables aleatorias son independientes y además idénticamente distribuidas se tiene el siguiente concepto.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Definición 1.3.3. *Si las variables aleatorias independientes $X_1, X_2 \ldots, X_n$ tienen todas la misma distribución, serán llamadas* ***idénticamente distribuidas****. La frase independiente e idénticamente distribuida se puede abreviar como i.i.d.*

Las variables aleatorias se clasifican en varios tipos dependiendo de las características que presente su función de distribución. Los dos tipos de variables aleatorias más frecuentemente utilizadas son las variables aleatorias continuas y las variables aleatorias discretas; siendo esta última la que mayormente se utilizará en este trabajo, por lo que a continuación se proporciona su definición.

Definición 1.3.4. *Diremos que una variable aleatoria X es* ***discreta*** *si su rango $R(X)$ es finito o numerable, es decir $R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.*

Observación 1.3.5. *Si X es discreta y los valores x_n de X se ordenan de tal manera que $x_n < x_{n+1}$, para todo n, entonces la función de distribución F es una función escalonada con una discontinuidad en cada x_n de magnitud $f(x) = P(X = x_n)$. A la función $f(x)$ que indica estos incrementos se le conoce como* ***función masa de probabilidad****.*

Para una variable aleatoria discreta X, las propiedades de X son completamente determinadas por su función masa de probabilidad, $f\colon R(X) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = P(X = x)$. La función masa de probabilidad $f(x)$ debe cumplir dos condiciones, la primera es que sea positiva, es decir $f(x) > 0$ para todo $x \in R(X)$. La segunda condición es que si el rango de X consiste de los valores x_i, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Enseguida daremos ejemplos de dos variables aleatorias discretas con sus correspondientes funciones masa de probabilidad. Un **experimento Bernoulli** es uno que solamente tiene dos resultados posibles, llamados **éxito** y **fracaso**. Supongamos que se realizan experimentos Bernoulli independientes hasta tener un éxito y que la probabilidad de éxito de cada uno de estos experimentos está dada por p, $0 < p < 1$. Estamos interesados en una variable aleatoria que nos cuente el número de ensayos o experimentos requeridos para obtener el primer éxito, lo que nos lleva a introducir el concepto de variable aleatoria geométrica.

Definición 1.3.6. *Una variable aleatoria X cuya función masa de probabilidad está dada por $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$, $n = 1, 2 \ldots$, se dice que es una* ***variable aleatoria geométrica*** *con parámetro p.*

Nótese que para que X sea igual a n, es necesario y suficiente que los primeros $n-1$ ensayos sean fracasos y el n-ésimo ensayo sea un éxito, por lo que como los experimentos son independientes $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$. Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1,$$

por lo que se sigue que con probabilidad 1 un éxito eventualmente ocurrirá.

Ahora estudiaremos la variable aleatoria binomial negativa, y de manera similar a como se realizó con la variable aleatoria geométrica, empezamos con suponer que se realizan experimentos Bernoulli independientes hasta tener un total de r éxitos acumulados. Cada uno de estos ensayos tiene una probabilidad de éxito dada por p, $0 < p < 1$. Estamos interesados en la variable aleatoria que nos cuenta el número de ensayos requeridos para obtener r éxitos. Esto nos conduce a definir la siguiente variable aleatoria.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Definición 1.3.7. *Una variable aleatoria con función masa de probabilidad dada por* $P(X=n) = \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$, $n = r, r+1, \ldots$ *se dice que es una* ***variable aleatoria binomial negativa*** *con vector de parámetros* (r, p).

La función masa de probabilidad se obtiene del hecho de que para que el r-ésimo éxito ocurra en el n-ésimo ensayo, debe haber $r-1$ éxitos en los primeros $n-1$ ensayos y en el n-ésimo ensayo se debe tener un éxito. Por lo que, por la independencia de los experimentos y la propiedad 2) de la definición de probabilidad (definición 1.1.6), la probabilidad de obtener exactamente r éxitos en los primeros n esayos es

$$\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}.$$

Para verificar que eventualmente se debe acumular un total de r éxitos, podemos probar analíticamente que

$$\sum_{n=r}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} = 1, \tag{1.2}$$

o podemos dar un argumento probabilístico como sigue: el número de ensayos requeridos para obtener r éxitos puede ser expresado como $Y_1+Y_2+\cdots+Y_r$, donde Y_1 es igual al número de ensayos requeridos para obtener el primer éxito, Y_2 el número de ensayos adicionales después del primer éxito hasta que el segundo éxito ocurra, Y_3 el número de ensayos adicionales hasta que el tercer éxito ocurra y así sucesivamente. Ya que los ensayos son independientes y todos tienen la misma probabilidad de éxito, se sigue que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ son todas variables aleatorias geométricas. Por lo tanto cada Y_i es finita con probabilidad 1, entonces $\sum_{i=1}^{r} Y_i$ también es finita con probabilidad 1, lo cual demuestra (1.2).

Observación 1.3.8. *Una variable aleatoria geométrica es justamente una variable aleatoria binomial negativa con parámetro* $(1, p)$.

El concepto que vamos a definir a continuación es fundamental en la teoría de probabilidad y estadística, nos referimos a la esperanza de una variable aleatoria discreta.

Definición 1.3.9. *Sea* X *una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad* $f(x)$. *La* ***esperanza*** *de* X *se define como el número*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x f(x),$$

donde la sumatoria es sobre todos los valores que toma X.

En otra palabras el valor esperado de X es un promedio ponderado de los posibles valores que X puede tomar, cada valor se pondera con la probabilidad de que X tome ese valor.

Observación 1.3.10. *Otra motivación de la definición de esperanza es provista por la interpretación frecuentista de la probabilidad. Esta interpretación parcialmente justificada por la ley fuerte de los grandes números (concepto que se presentará más adelante en este capítulo), supone que si se realiza un gran número de replicaciones independientes de un experimento, entonces para cualquier evento* E, *la proporción de veces en que ocurre* E, *será*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

una aproximación a $P(E)$. Ahora consideremos una variable aleatoria X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con sus respectivas probabilidades $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ y supongamos que X representa las ganancias en un juego de azar. Es decir, con probabilidad $f(x_i)$ ganaremos x_i unidades, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por la interpretación frecuentista, si jugamos este juego continuamente, entonces la proporción de veces que ganemos x_i será aproximadamente $f(x_i)$. Ya que esto es cierto para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se sigue que nuestra ganancia promedio por juego será

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i).$$

En la siguiente proposición presentamos tres propiedades esenciales que facilitan el cálculo de la esperanza de cualquier variable aleatoria discreta. La demostración de dicha proposición puede ser consultada en [23, proposición 2.7, pág. 166].

Proposición 1.3.11. *Para una constante c y variables aleatorias X_1, X_2 discretas con esperanza finita se satisfacen las siguientes propiedades generales*

1) $\mathbb{E}[c] = c, \ \mathbb{E}[cX_1] = c\mathbb{E}[X_1]$.
2) *Si* $X_1 \geq 0$, *entonces* $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$.
3) $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$.

Claramente la esperanza matemática de las variables aleatorias discretas es un operador lineal. Además cuando se realizan estudios correspondientes a las variables aleatorias no negativas, se tienen diversos resultados para la esperanza matemática, pero un resultado muy práctico se puede ver a continuación.

Teorema 1.3.12. *Si X es una variable aleatoria no negativa con valores enteros, entonces*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

Demostración. Sea una X variable aleatoria no negativa con valores enteros, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) P(X = n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).\end{aligned}$$

Intercambiar el orden de la sumatoria no es un problema ya que todos los términos son mayores o iguales a cero. ■

Enseguida presentamos un teorema relacionado con la convergencia del promedio de una sucesión de variables i.i.d. En efecto nos referimos a la **ley fuerte de los grandes números**. Antes de presentar este teorema y dar su prueba, presentaremos la **desigualdad de Chebyshev**, y como veremos, tal resultado hace sencilla la demostración del teorema de la ley fuerte de los grandes números. Veremos dicha desigualdad sin demostración, pero una prueba de ésta puede ser encontrada en [24, proposición 2.2, pág. 368].

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Proposición 1.3.13 (Desigualdad de Chebyshev). *Sea X una variable aleatoria con media finita μ y varianza σ^2, entonces para cualquier valor $k > 0$,*

$$P\left(|X-\mu| \geq k\right) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Ahora, usando la proposición anterior, podemos mostrar cómodamente el siguiente teorema importante.

Teorema 1.3.14 (Ley fuerte de los grandes números). *Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una media finita $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$,*

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Probaremos el teorema solo bajo la suposición de que las variables aleatorias tienen una varianza finita. Como

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] = \mu \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n},$$

se sigue por la desigualdad de Chebyshev que

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

y el resultado queda probado, ya que cuando $n \to \infty$ el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0, por tanto también el lado izquierdo tiende a cero al ser no negativo. ■

En resumen el teorema de la ley fuerte de los grandes números dice que el promedio aritmético converge a la media μ cuando n tiende a infinito, sin importar la distribución de las variables aleatorias.

Para concluir esta sección veamos una proposición necesaria para el desarrollo de este trabajo, la cual consiste de una identidad que relaciona al máximo de un conjunto de números con los mínimos de los subconjuntos de ellos, nos referimos a la **identidad de máximos-mínimos**. La demostración de tal proposición puede ser encontrada en [24, proposición 2.2, pág. 295].

Proposición 1.3.15. *Para números arbitrarios x_i, con $i = 1, \ldots, n$, se cumple que*

$$\max_{1\leq i\leq n} x_i = \sum_i x_i - \sum_{i<j} \min(x_i, x_j) + \sum_{i<j<k} \min(x_i, x_j, x_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\min(x_1, \ldots, x_n).$$

1.4. Procesos estocásticos

Pasemos ahora a la parte de procesos estocásticos; presentaremos definiciones fundamentales y algunos ejemplos que serán útiles para los próximos capítulos. Estas definiciones fueron tomadas de [15] y [22].

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México

Definición 1.4.1. *Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias* $\{X_t, t \in T\}$ *definidas en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, donde* $T \subset \mathbb{R}$*. Cuando* $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *diremos que* $\{X_t, t \in T\}$ *es **un proceso estocástico a tiempo discreto**. Cuando* T *es un intervalo en* $\mathbb{R}$ *(comunmente* $T = [0, \infty)$*) diremos que* $\{X_t, t \in T\}$ *es un **proceso estocástico a tiempo continuo**.*

Definición 1.4.2. *Llamaremos **espacio de estados** al conjunto* S *de valores distintos asumidos por un proceso estocástico* $\{X_t, t \in T\}$*. A los elementos de* S *los llamaremos **estados**.*

Observación 1.4.3. *Diremos que un proceso estocástico* $\{X_t, t \in T\}$ *es una **cadena** si su espacio de estados* S *es finito o numerable.*

Es sabido que podemos considerar un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ como una función de dos variables $X : T \times \Omega \to S$, es decir, a la pareja (t, ω) se le asocia el valor o estado $X(t, \omega)$, que también se denota por $X_t(\omega)$. Para cada valor $t \in T$, el mapeo $\omega \to X_t(\omega)$ es una variable aleatoria; mientras que para $\omega \in \Omega$ fijo, la función $t \to X_t(\omega)$ es llamada una **trayectoria** o **realización** del proceso. Es decir, a cada ω del espacio muestral le corresponde una trayectoria del proceso. Es por esta razón que en ocasiones un proceso estocástico se puede definir como una función aleatoria.

Por otra parte recordemos (definición 1.4.1), que de acuerdo al tipo de espacio parametral (conjunto T), hay dos grandes clases de procesos estocásticos de especial relevancia, los procesos estocásticos a tiempo discreto y los procesos estocásticos a tiempo continuo. Otra importante clasificación corresponde al tipo de espacio de estados S. Si S es numerable o finito obtenemos una cadena (ver observación 1.4.3). Si una cadena surge de algún proceso estocástico a tiempo discreto se le llama **cadena a tiempo discreto**, y si surge de un proceso estocástico a tiempo continuo se le llama **cadena a tiempo continuo**. Para finalizar este capítulo veamos un ejemplo de cada una de estas cadenas con sus respectivas trayectorias.

Ejemplo 1.4.4. *Supongamos que se realizan repetidos lanzamientos de un dado, y que cada vez que el dado cae en un número par ganamos* 1 *peso y cada vez que el dado cae en un número impar perdemos* 1 *peso. Este experimento puede modelarse de la siguiente manera: consideramos una sucesión de variables aleatorias independientes* X_n, $n = 1, 2, \ldots$ *con probabilidades de éxito y fracaso de cada una de estas variables, dadas por* $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$*. Definamos* $Y_0 = 0$ *y* $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$*. Obsérvese que* Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *es un proceso estocástico a tiempo discreto cuyo espacio de estados* S *es numerable, ya que la cardinalidad de* S *es equivalente al conjunto de los números enteros* $\mathbb{Z}$*. Por lo tanto* $\{Y_n\}$ *es una cadena a tiempo discreto y representa las ganancias o pérdidas del jugador en el tiempo* n*. Un resultado* ω *posible para este experimento es* $\omega = \{2, 1, 5, 4, 6, 3, 6, 5, \ldots\}$*. La trayectoria para este* ω *está representada por la figura* 1.1*. La gráfica consiste únicamente de puntos, sin embargo se incluyen las líneas para obtener una interpretación más clara. Observemos que cuando* $n = 3$*, el proceso estocástico se reduce a la variable aleatoria* $Y_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i$*, la cual toma valores en* $\{-3, -1, 1, 3\}$*.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

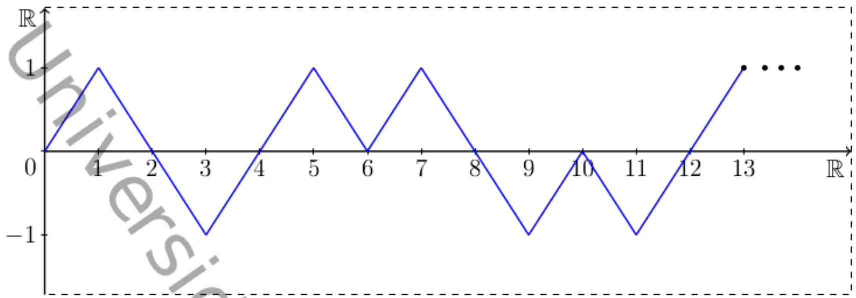

Figura 1.1: Trayectoria de $Y(n, \omega)$

La distribución de Y_3 *está dada por*

$$P_{Y_3}(-3) \equiv P(Y_3 = -3) = \binom{3}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}, \qquad P_{Y_3}(-1) \equiv P(Y_3 = -1) = \binom{3}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{8},$$

$$P_{Y_3}(1) \equiv P(Y_3 = 1) = \binom{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{8}, \qquad P_{Y_3}(3) \equiv P(Y_3 = 3) = \binom{3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}.$$

Ejemplo 1.4.5. *Supongamos que se observa el número de accidentes que ocurren en una intersección en particular durante 30 días. Asumimos que los tiempos de espera entre accidentes son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con media* $\frac{1}{\lambda}$ *y que* $N_t = N(t, \omega)$ *denota el número de accidentes que ocurrieron en un tiempo* t*. En este caso* N_t *es llamado un* ***proceso de Poisson*** *(cadena a tiempo continuo) con parámetro* λ *ya que para cada* t^* *fijo,* N_{t^*} *tiene una distribución Poisson con parámetro* λt^**. La trayectoria asociada con este proceso estocástico es no decreciente con saltos aleatorios unitarios ubicados en el intervalo* $[0, 30]$*. La figura* 1.2 *muestra una trayectoria típica para un proceso de Poisson.*

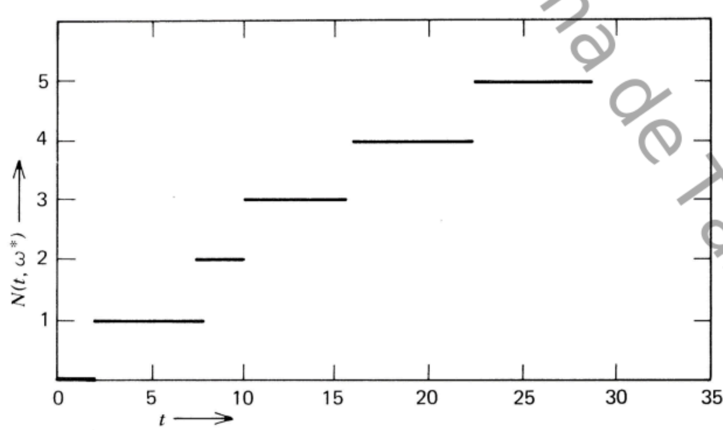

Figura 1.2: Trayectoria típica para un proceso de Poisson

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 2

Preliminares sobre las cadenas de Markov

En el presente capítulo daremos algunas definiciones básicas que abarca la teoría de las cadenas de Markov, así como ciertas propiedades y clasificaciones de los estados correspondientes a estas cadenas. Además mencionaremos dos teoremas relacionados a las probabilidades de absorción y tiempos medios de absorción de una cadena de Markov a tiempo discreto, los cuales servirán para el desarrollo de los capítulos posteriores. Para este capítulo nos basamos en [15], [21] y [22].

2.1. Definición y propiedades básicas de las cadenas de Markov

Recordemos del capítulo 1 (ver sección 1.4, pág. 12), que existen dos tipos de cadenas, cadenas a tiempo continuo y cadenas a tiempo discreto, sin embargo, en este trabajo solo haremos uso de las cadenas a tiempo discreto; específicamente, de las cadenas de la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *Una **cadena de Markov a tiempo discreto** es una cadena a tiempo discreto $\{X_n\}$ con espacio de estados S, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $i_1, i_2, \ldots, i_n \in S$ se satisface la siguiente propiedad*

$$P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}). \qquad (2.1)$$

Observación 2.1.2. *Como el espacio de estados S es finito o numerable, por conveniencia de notación, se asume con mucha frecuencia que $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$ para algún $N \in \mathbb{N}$, en el caso en que S es finito, o que $S = \{0, 1, 2, ...\}$ en el caso en que S es numerable.*

Nótese que en la **propiedad de Markov** (propiedad (2.1) de la definición 2.1.1), el tiempo futuro está dado por n, el tiempo presente por $n-1$ y los tiempos pasados por $0, 1, \ldots, n-2$. Entonces la probabilidad del estado en el tiempo futuro depende exclusivamente del estado en el tiempo presente, es decir, no importa la información que puedan tener los estados en los tiempos pasados. El movimiento que realizan los estados en la cadena se puede expresar mediante probabilidades condicionales, a las cuales se les conoce como probabilidades de transición.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Definición 2.1.3. *Sean i y j dos estados de la cadena de Markov a tiempo discreto $\{X_n\}$. La probabilidad*

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i),$$

que denotaremos como $p_{ij}^{(n-1,n)}$, representa la ***probabilidad de trancisión*** *del estado i en el tiempo $n-1$, al estado j en el tiempo n. A estas probabilidades comúnmente se les llama probabilidades de transición en un paso.*

Se sabe que las probabilidades de transición $p_{ij}^{(n-1,n)}$, no dependen unicamente de los estados sino también del tiempo n, en que se realiza la transición. Cuando estas probabilidades son independientes del tiempo se dice que las cadenas de Markov a tiempo discreto son estacionarias u homogéneas en el tiempo, como se detalla a continuación.

Definición 2.1.4. *Una cadena de Markov a tiempo discreto $\{X_n\}$ es* ***estacionaria*** *u* ***homogénea*** *si para cualesquiera estados i y j*

$$p_{ij}^{(n-1,n)} = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i) \tag{2.2}$$

para $k = -(n-1), -(n-2), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Si la condición (2.2) no se cumple se dice que la cadena de Markov es ***no estacionaria****.*

En las cadenas de Markov estacionarias a tiempo discreto se puede simplificar la notación de las probabilidades de transición, esto debido a que las probabilidades $p_{ij}^{(n-1,n)}$ son todas iguales para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo que se puede escribir como p_{ij}, es decir, p_{ij} representa la probabilidad de ir de i a j en un paso.

Siguiendo con las probabilidades de transición p_{ij} de alguna cadena de Markov estacionaria a tiempo discreto, obsérvese que como sus índices i y j están en el espacio de estados S de dicha cadena, sus valores varian sobre este espacio, de modo que el número exacto de estas probabilidades está dado por $|S|^2$, donde $|S|$ denota la cardinalidad del espacio de estados S. Enseguida veremos esto de manera más concreta en la siguiente definición y además en la misma se proporcionará la herramienta matemática más conveniente para el acomodo de estas probabilidades.

Definición 2.1.5. *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov estacionaria a tiempo discreto con espacio de estados finito $S = \{0, 1, \ldots, N\}$. Para esta cadena existen $(N+1)^2$ probabilidades de transición p_{ij}. La manera más accesible de trabajar con estas probabilidades es usando una matriz P, cuyo elemento ij-ésimo es p_{ij}. De esta manera*

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es llamada ***matriz de transición*** *de la cadena de Markov $\{X_n\}$ y contiene toda la información importante con respecto al movimiento del proceso entre los estados de S.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

México.

De la definición anterior, el elemento ij-ésimo de la matriz P está denotado por p_{ij}, y se ubica en la fila $i -$ ésima y en la columna $j -$ ésima de P. Este valor y los demás valores de esta matriz satisfacen ciertas propiedades enunciadas en la proposición que a continuación se presenta.

Proposición 2.1.6. *La matriz de probabilidades de trancisión P satisface las siguientes condiciones*

(1) *Cada elemento de P es no negativo, es decir $p_{ij} \geq 0$ para todo $i,\ j \in S$.*

(2) *Los elementos en cada fila de P suman 1, es decir $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$.*

Demostración. El inciso (1) es obvio ya que todas las probabilidades están en el intevalo $[0, 1]$. El inciso (2) se prueba de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} p_{ij} &= P[X_k = 0|X_{k-1} = i] + P[X_k = 1|X_{k-1} = i] + P[X_k = 2|X_{k-1} = i] \\ &\quad + \cdots + P[X_k = N|X_{k-1} = i] \\ &= P\left[(X_k = 0) \cup (X_k = 1) \cup (X_k = 2) \cup \cdots \cup (X_k = N)|X_{k-1} = i\right] \\ &= P\left[X_k \in S|X_{k-1} = i\right] = 1.\end{aligned}$$

■

Definición 2.1.7. *Decimos que una matriz es **estocástica** si cumple todas las condiciones de la proposición 2.1.6.*

Ejemplo 2.1.8. *Consideremos dos urnas A y B dentro de las cuales se encuentran distribuidas N bolas. Asumamos que una bola es elegida al azar, con probabilidad $\frac{1}{N}$ (se considera que las bolas han sido enumeradas y se elige un número al azar). Se busca la bola con ese número y se cambia de urna. Sea X_n el número de bolas en la urna A en el tiempo n. Entonces la colección $\{X_n\}$ constituye una cadena de Marvok estacionaria a tiempo discreto con espacio de estados finito $\{0, 1, \ldots, N\}$ y cuya matriz de transición es la siguiente:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como existen N bolas distribuidas en las urnas, entonces $\frac{i}{N} \geq 0$ y $\frac{N-i}{N} > 0$, también $\frac{i+N-i}{N} = 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así la matriz P es estocástica. Este modelo fue propuesto por Ehrenfest, para describir el intercambio aleatorio de moléculas en dos regiones separadas por una membrana porosa.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Definición 2.1.9. *Un vector* $\mathbf{a_0} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *es llamado un* ***vector inicial****, si* $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ *y* $\alpha_i \geq 0$ *para toda* $i = 0, 1, \ldots, n$.

En el caso en que una cadena de Markov inicia determinísticamente en un estado, a_0 tiene un uno en la coordenada correspondiente a este estado y ceros en los demás lugares. Por ejemplo

$$\mathbf{a_0} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

expresa que la cadena inicia en el estado 0, es decir $X_0 = 0$ con probabilidad 1. Por conveniencia notacional nos referiremos al vector inicial como la distribución en el tiempo cero, esto es

$$\alpha_k = P\left(X_0 = k\right), \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

La expresión para $P\left(X_1 = i\right)$ es simplemente la i-ésima coordenada del vector $\mathbf{a_0}P$. Llamamos a este vector $\mathbf{a_1}$. Este vector representa la distribución de la cadena de Markov después de un paso. De manera análoga es fácil ver que $\mathbf{a_2} = \left(\mathbf{a_0}P\right)P = \mathbf{a_0}P^2$, donde la i-ésima coordenada de $\mathbf{a_2}$ es $P\left(X_2 = i\right)$. En general si uno desea la distribución del proceso después de n pasos, dado que el vector inicial es $\mathbf{a_0}$, simplemente hallamos $\mathbf{a_n} = \mathbf{a_0}P^n$. La matriz P^n que aparece en esta expresión tiene también un significado especial. Se puede demostrar que P^n es una matriz de transición que representa las probabilidades de transición en n pasos, cuyos elementos están representados por $p_{ij}^{(n)}$, donde $p_{ij}^{(n)} = P\left(X_{k+n} = j | X_k = i\right)$.

Las probabilidades $p_{ij}^{(n)}$ son fundamentales en diversos resultados, en especial en la **ecuación de Chapman-Kolmogorov**, la cual nos da una descomposición de la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos. Para la expresión de esta ecuación requerimos la definición de $p_{ij}^{(0)}$.

Definición 2.1.10. $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, *donde* $\delta_{ij} = 1$ *si* $i = j$ *y* $\delta_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$.

Proposición 2.1.11 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). *Para cualquier par de números enteros* r *y* n *tales que* $0 \leq r \leq n$ *y para cualesquiera estados* i *y* j *se cumple que*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}.$$

Demostración. En la prueba usaremos el hecho de que el espacio muestral Ω se puede escribir como la unión disjunta $\Omega = \bigcup_{k \in S} \{X_r = k\}$ con $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, así como la propiedad de Markov (2.1), y que la cadena de Markov es estacionaria. Dadas estas hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P\left(X_n = j | X_0 = i\right) \\ &= \sum_{k \in S} P\left(X_n = j, X_r = k, X_0 = i\right) / P\left(X_0 = i\right) \\ &= \sum_{k \in S} P\left(X_n = j | X_r = k, X_0 = i\right) P\left(X_r = k, X_0 = i\right) / P\left(X_0 = i\right) \\ &= \sum_{k \in S} P\left(X_r = k | X_0 = i\right) P\left(X_n = j | X_r = k\right) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrada la ecuación de Chapman-Kolmogorov. ∎

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

2.2. Clases comunicantes

De aquí en adelante, nos enfocaremos únicamenta en cadenas de Markov estacionarias a tiempo discreto, y definiremos que son las clases comunicantes, pero antes debemos hacer una pausa para definir el concepto de comunicación entre estados. Las definiciones y ejemplos fueron tomadas de [21] y [22].

Definición 2.2.1. *Se dice que el estado j es* ***accesible*** *desde el estado i si existe un entero $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, esto se escribe como $i \to j$. Se dice además que los estados i y j son* ***comunicantes****, se escribe como $i \leftrightarrow j$, si se cumple que $i \to j$ y $j \to i$.*

Observación 2.2.2. *Notemos que se cumple que $i \to i$, ya que por definición $p_{ii}^{(0)} = 1$. Además es importante aclarar que el número de pasos en el que se accede al estado j desde el estado i puede ser distinto al acceso que se tiene al estado i desde el estado j. Es fácil notar que la comunicación es una relación de equivalencia ya que satisface las siguientes propiedades*

1. *Es reflexiva: $i \leftrightarrow i$.*
2. *Es simétrica: si $i \leftrightarrow j$, entonces $j \leftrightarrow i$.*
3. *Es transitiva: si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$, entonces $i \leftrightarrow k$.*

Por lo que la comunicación genera una partición del espacio de estados de una cadena de Markov, dada por los subconjuntos de estados comunicantes, es decir dos estados pertenecen al mismo elemento de la partición si y solo si los estados se comunican entre sí. Así, el espacio de estados de una cadena de Markov se subdivide en **clases de comunicación**.

Ejemplo 2.2.3. *Encontrar las clases de comunicación asociada a la siguiente matriz estocástica con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,*

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nótese que $0 \to 1$ en un paso y $1 \to 0$ en dos pasos, por lo tanto $0 \leftrightarrow 1$. Se tiene que $1 \to 2$ en un paso y $2 \to 1$ en dos pasos, por lo tanto $1 \leftrightarrow 2$. Luego por transitividad de la comunicación, $0 \leftrightarrow 2$. Como además, nunca sucede que $3 \to 0$, $4 \to 0$ y $5 \to 0$, se tiene que la primer clase de comunicación está dada por $C_1 = \{0, 1, 2\}$. Ahora analicemos el estado 3, $3 \to 4$ y $3 \to 5$ pero nunca sucede que $4 \to 3$ y $5 \to 3$, por lo tanto únicamente $3 \leftrightarrow 3$, así $C_2 = \{3\}$. Por último nótese que $4 \to 5$ en un paso y $5 \to 4$ en un paso, por lo tanto $4 \leftrightarrow 5$, así $C_3 = \{4, 5\}$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Definición 2.2.4. *Diremos que C es una* ***clase cerrada*** *si para cualquier $i \in C$ y cualquier $j \notin C$, $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.2.5. *Del ejemplo 2.2.3 vemos que la clase C_3 es cerrada ya que los estados $0, 1, 2, 3$ no son accesibles desde los estados de C_3.*

Definición 2.2.6. *Un estado $i \in S$ se dice que es* ***absorbente****, si $\{i\}$ es una clase cerrada.*

Ejemplo 2.2.7. *De nuevo del ejemplo 2.2.3, el estado 3 no es un estado absorbente, ya que aunque sea un elemento único en la clase de comunicación C_2, esta clase no es cerrada, ya que el estado 4 es accesible desde el estado 3, explícitamente, $p_{34}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$.*

Ejemplo 2.2.8. *Consideremos la cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición*

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Esta cadena tiene tres clases de comunicación dadas por $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1, 2\}$ y $C_3 = \{3\}$. Claramente el 0 es un estado absorbente, ya que es el único elemento de su clase C_1, la cual es cerrada.

Por último, debido a que la comunicación es una relación de equivalencia, induce una partición del espacio de estados, esta partición puede ser no trivial o trivial, es decir, puede haber más de una clase de comunicación o solo haber una (S misma).

Definición 2.2.9. *Se dice que una cadena de Markov es* ***irreducible*** *si todos los estados se comunican entre sí.*

Ejemplo 2.2.10. *Retomando el ejemplo 2.1.8, se puede conocer dada su matriz de transición*

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

que no existen estados absorbentes. También se contempla que $0 \to 1$, $1 \to 0, 2$, así mismo $2 \to 1, 3$; análogamente se observa la accesibilidad de los otros estados hasta llegar a que

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México

$N-1 \to N-2, N$ y por último $N \to N-1$. Realizando un análisis con respecto a la comunicación de los estados se hace notable lo siguiente $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 2$, así sucesivamente hasta $N-1 \leftrightarrow N$. Por la propiedad transitiva de la comunicación se tiene $0 \leftrightarrow 1, 2, \ldots, N$, ya que cualquier estado de la cadena se comunica con el estado 0, es evidente que todos los estados de la cadena se comunican entre sí, es decir, existe una única clase de comunicación y por lo tanto tenemos una cadena irreducible.

2.3. Estados recurrentes y transitorios

A continuación veremos clasificaciones para los estados de una cadena de Markov. Estas clasificaciones dependerán de la capacidad de retorno de una cadena a su estado de partida. Para poder conocerlas, es necesario ver primero las siguientes notaciones y definiciones.

Vamos a denotar como $f_{ij}^{(n)}$ a la probabilidad de que la cadena inicie en el estado i y visite por primera vez al estado j en el tiempo n. Es decir,

$$f_{ij}^{(n)} = P\left[X_{n+k} = j | X_{n+k-1} \neq j, X_{n+k-2} \neq j, \ldots, X_{k+1} \neq j, X_k = i\right].$$

Nótese que si $i = j$, $f_{ii}^{(n)}$ es la probabilidad de retornar por primera vez al estado i en el tiempo n. Por definición $f_{ij}^{(0)} \equiv 0$, $i, j \in S$.

Dados dos estados i, j, claramente $f_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad de iniciar en el estado i y visitar al estado j en algún momento; y si $i = j$, $f_{ii}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar al estado i en algún momento.

Definición 2.3.1. *Un estado j se dice que es **recurrente** si $f_{jj}^* = 1$. Un estado j es **transitorio** si $f_{jj}^* < 1$.*

Ejemplo 2.3.2. *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso $f_{33}^{(n)} = 0$ para todo n, así el estado 3 es transitorio. Para el estado 2 tenemos que $f_{22}^{(1)} = \frac{2}{3}$, $f_{22}^{(n)} = 0$ para todo $n \geq 2$, así el estado 2 también es transitorio. Los estados 0 y 1 son recurrentes como se muestra en los siguientes argumentos:

$$\begin{aligned} f_{00}^* &= f_{00}^{(1)} + f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\ f_{11}^* &= f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + f_{11}^{(3)} + f_{11}^{(4)} + \cdots = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Nótese que cuando el estado j es recurrente, los números $f_{jj}^{(n)}$ forman una distribución de probabilidad sobre los tiempos del primer retorno. Esto es $f_{jj}^{(n)} \geq 0$ para todo n y $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$. Por lo tanto es razonable considerar el tiempo esperado sobre el primer retorno.

Definición 2.3.3. *Si $f_{jj}^{*} = 1$, el* ***tiempo de retorno esperado*** *al estado j está definido por $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$.*

Los estados recurrentes de una cadena de Markov se clasifican en dos clases, dependiendo del valor de su tiempo de retorno esperado.

Definición 2.3.4. *Se dice que un estado recurrente es* ***recurrente positivo*** *si su tiempo de retorno esperado es finito y es* ***recurrente nulo*** *si su tiempo de retorno esperado es infinito.*

Ejemplo 2.3.5. *Consideremos la cadena de Markov del ejemplo 2.3.2. Fue demostrado que los estados 0 y 1 son recurrentes, así los tiempos esperados de retorno a estos estados pueden ser calculados:*

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\
\mu_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto ambos estados son recurrentes positivos.

2.4. Tiempos y probabilidades de absorción

En la presente sección veremos la definición de tiempo de llegada y probabilidad de absorción, también estudiaremos dos teoremas importantes, los cuales guardan una estrecha relación con estas definiciones. Dichos teoremas son herramientas útiles para el desarrollo de nuestro objetivo.

Definición 2.4.1. *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con matriz de transición P. Diremos que* ***el tiempo de llegada*** *a un subconjunto A de S es la variable aleatoria $H^A \colon \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ dada por*

$$H^A(\omega) = \inf\{n \geq 0 \colon X_n(\omega) \in A\},$$

donde el ínfimo del conjunto vacío $\emptyset$ es ∞.

Definiendo $P_i(B) := P(B|X_0 = i)$, $B \subset \Omega$, $i \in S$, se tiene que la probabilidad de que $\{X_n\}$ inicie en i y eventualmente llegue a $A \subset S$ es $h_i^A = P_i(H^A < \infty)$. Cuando A es una clase cerrada, h_i^A es llamada la **probabilidad de absorción** en A.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Definición 2.4.2. *El **tiempo esperado** o **tiempo medio** que le toma a $\{X_n\}$ llegar a A iniciando en i está dado por*

$$k_i^A \equiv \mathbb{E}_i(H^A) := \sum_{n<\infty} nP_i(H^A = n) + \infty P_i(H^A = \infty).$$

*Si A es una clase cerrada, a k_i^A se le llama el **tiempo medio de absorción** en A.*

A menudo escribiremos, de manera menos formal, como $h_i^A = P_i(\text{llegar a } A)$ a la probabilidad de llegada a A, habiendo iniciado en i; y al tiempo esperado para llegar a A iniciando en i como $k_i^A = \mathbb{E}_i(\text{tiempo para llegar a } A)$. Se mostrará que estas cantidades pueden ser calculadas explícitamente por medio de ecuaciones lineales asociadas con la matriz de transición P.

Ejemplo 2.4.3. *Consideremos la cadena con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición P dada por*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta cadena tiene tres clases de comunicación $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1, 2\}$ y $C_3 = \{3\}$. De las cuales las clases C_1, C_3 son cerradas y además con un solo elemento, por lo que hay dos estados absorbentes, 0 y 3, en la cadena. Ahora bien, si la cadena inicia en 1, ¿cuál es la probabilidad de absorción a 3?, ¿cuánto tiempo es requerido para que la cadena sea absorbida en alguno de los estados absorbentes?

Sean

$$h_i \equiv P_i\,(\text{llegar a } 3)\,, \quad k_i \equiv \mathbb{E}_i\,(\text{tiempo para llegar a } \{0,3\})\,.$$

Claramente $h_0 = 0$, $h_3 = 1$ y $k_0 = k_3 = 0$. Supongamos ahora que la cadena inicia en 1, entonces, en un paso, la cadena salta a 0 con probabilidad $1/2$ y a 2 con probabilidad $1/2$. Así

$$h_1 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_2, \quad k_1 = 1 + \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_2.$$

El 1 aparece en la segunda fórmula porque contamos el tiempo del primer paso. Similarmente,

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3, \quad k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3.$$

Por lo tanto

$$h_1 = \frac{1}{2}h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow h_1 = \frac{1}{3},$$
$$k_1 = 1 + \frac{1}{2}k_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_1\right) \Rightarrow k_1 = 2.$$

Así, empezando desde 1, la probabilidad de absorción a 3 es $\frac{1}{3}$ y el tiempo medio para la absorción en $\{0, 3\}$ es 2.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Observación 2.4.4. *Nótese que en las primeras ecuaciones para h_1 y k_1 hicimos uso implícito de la propiedad de cadena de Markov, al asumir que la cadena empieza de nuevo en su nueva posición después del primer paso.*

En el siguiente teorema se presenta un resultado general para las probabilidades de absorción.

Teorema 2.4.5. *El vector de probabilidades de absorción $h^A \equiv (h_i^A : i \in S)$ es una solución no negativa mínimal al sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{para } i \in A, \\ h_i^A = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^A & \text{para } i \notin A. \end{cases} \tag{2.4}$$

(Donde solución minimal significa que si $x = (x_i \colon i \in S)$ es otra solución con $x_i \geq 0$ para todo i, entonces $x_i \geq h_i^A$ para todo i).

Demostración. Primero veamos que h^A satisface (2.4). Consideremos los siguientes casos:

1) Si $X_0 = i \in A$. Entonces, por definición de $H^A(\omega)$, se sigue que $H^A(\omega) = 0$. Esto implica que $h_i^A = P_i(\text{llegar a A}) = 1$.

2) Si $X_0 = i \notin A$. De nuevo, por la definición de $H^A(\omega)$, se sigue que $H^A(\omega) \geq 1$. Notemos que, por la propiedad de Markov,

$$P_i(H^A < \infty | X_1 = j) = P_j(H^A < \infty) = h_j^A.$$

Como $\Omega = \cup_{j \in S}\{X_1 = j\}$, donde $\{X_1 = j\} \cap \{X_1 = k\} = \emptyset$ si $j \neq k$, se sigue por 2) de la definición de probabilidad (definición 1.1.6) y la definición de probabilidad condicional (definición 1.2.1) que

$$\begin{aligned} h_i^A = P_i(H^A < \infty) &= \sum_{j \in S} P_i(H^A < \infty, X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in S} P_i(H^A < \infty | X_1 = j) P_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^A. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple que h^A satisface el sistema de ecuaciones lineales (2.4).

Supongamos ahora que $x = (x_i : i \in S)$ es una solución típica de (2.4).

1) Si $i \in A$, entonces $x_i = 1$.

2) Si $i \notin A$, entonces, debido a que x_i satisface el sistema de ecuaciones (2.4) se sigue que

$$x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Sustituyendo x_j obtenemos

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij}\left(\sum_{k\in S} p_{jk}x_k\right) \\ &= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij}\left(\sum_{k\in A} p_{jk} + \sum_{k\notin A} p_{jk}x_k\right) \\ &= P_i(X_1\in A) + P_i(X_1\notin A, X_2\in A) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{ij}p_{jk}x_k. \end{aligned}$$

Luego mediante una sustitución repetida de x en el término final, después de n pasos obtenemos

$$\begin{aligned} x_i =& P_i(X_1\in A) + \cdots + P_i(X_1\notin A, \ldots, X_{n-1}\notin A, X_n\in A) + \sum_{j_1\notin A}\cdots\sum_{j_n\notin A} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j_n}x_{j_n} \\ =& P_i\left(H^A\le n\right) + \sum_{j_1\notin A}\cdots\sum_{j_n\notin A} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j_n}x_{j_n}. \end{aligned}$$

Ahora si x es no negativa, entonces el último término de la derecha también lo es. Por lo que $x_i \ge P_i(H^A\le n)$ para todo n. De aquí, por el inciso a) del teorema 1.1.8, se sigue que

$$x_i \ge \lim_{n\to\infty} P_i(H^A\le n) = P_i(\cup_{n=1}^{\infty}(H^A\le n)) = P_i(H^A<\infty) = h_i^A.$$

Por lo tanto h^A es la solución minimal del sistema (2.4). ■

Ejemplo 2.4.6. *Retomemos el ejemplo 2.4.3. El sistema de ecuaciones lineales* (2.4) *para* $h \equiv h^{\{3\}}$ *está dado por*

$$\begin{aligned} &h_3 = 1 \\ &h_1 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_2, \quad h_2 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3. \end{aligned}$$

Luego

$$h_1 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}\right)$$

y así

$$h_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}h_0, \quad h_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}h_0.$$

El valor de h_0 *no está determinado por el sistema* (2.4), *pero la condición de minimalidad nos lleva a tomar* $h_0 = 0$, *y se obtiene, nuevamente, que* $h_1 = 1/3$. *Se obtiene además que* $h_2 = 2/3$, *y* $h_3 = 1$.

Ahora, en el siguiente teorema se presenta un resultado general para los tiempos medios de llegada. Recordemos que $k_i^A = \mathbb{E}_i\left(H^A\right)$, donde H^A es el primer tiempo en que $\{X_n\}$ llega a A. Usaremos la notación $\mathbb{1}_B$ para la función indicadora de B, así, por ejemplo $\mathbb{1}_{\{X_1=j\}}$ es la variable aleatoria igual a 1 si $X_1 = j$ e igual a 0 en otro caso.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Teorema 2.4.7. *El vector de tiempos medios de llegada $k^A \equiv (k_i^A : i \in S)$ es la solución no negativa minimal del sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{para } i \in A, \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & \text{para } i \notin A. \end{cases} \tag{2.5}$$

Demostración. Para demostrar que k^A es solución del sistema (2.5), consideremos los siguientes casos.

1) Si $X_0 = i \in A$, entonces $H^A(\omega) = \text{ínf}\{n \geq 0 \colon X_n(\omega) \in A\} = 0$, así $k_i^A = 0$.

2) Si $X_0 = i \notin A$, entonces $H^A(\omega) = \text{ínf}\{n \geq 0 \colon X_n(\omega) \in A\} \geq 1$. Luego por la propiedad de Markov,
$$\mathbb{E}_i\left(H^A | X_1 = j\right) = 1 + \mathbb{E}_j(H^A).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) &= \sum_{j \in S} \mathbb{E}_i\left(H^A \mathbb{1}_{\{X_1 = j\}}\right) = \sum_{j \in S} \mathbb{E}_i\left(H^A | X_1 = j\right) P_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in S}\left(1 + \mathbb{E}_j\left(H^A\right)\right) p_{ij} = 1 + \sum_{j \in S} \mathbb{E}_j\left(H^A\right) p_{ij} = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A. \end{aligned}$$

Así se cumple que k^A es solución del sistema (2.5).

Demostraremos ahora que k_i^A es la solución minimal del sistema (2.5). Supongamos que $y = (y_i \colon i \in S)$ es una solución típica del sistema (2.5) y consideremos los siguientes casos:

1) Si $i \in A$, entonces $k_i^A = y_i = 0$.

2) Si $i \notin A$, entonces

$$y_i = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij}\left(1 + \sum_{k \notin A} p_{jk} y_k\right) = P_i\left(H^A \geq 1\right) + P_i\left(H^A \geq 2\right) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} y_k.$$

Así, realizando repetidamente sustituciones de y en el término final obtenemos, después de n pasos

$$y_i = P_i\left(H^A \geq 1\right) + \cdots + P_i\left(H^A \geq n\right) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} y_{j_n}.$$

De esta manera, si y es no negativo, entonces el último término de la derecha es no negativo. Por lo tanto $y_i \geq P_i\left(H^A \geq 1\right) + \cdots + P_i\left(H^A \geq n\right)$, y finalmente, si hacemos tender n a infinito, se sigue que

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(H^A \geq n\right) = \mathbb{E}_i\left(H^A\right) = k_i^A.$$

Por lo tanto se cumple lo deseado. ■

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Capítulo 3
Colección de cupones equiprobables

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

En el presente capítulo, estudiaremos el primer caso del problema del coleccionista de cupones, el cual involucra una o más personas que desean completar colecciones de cupones equiprobables. Al número de colecciones lo representaremos con la letra m y asumimos que cada una de estas m colecciones estará compuesta por un número finito, por decir N, de diferentes tipos de cupones, que por simplicidad denotaremos con los números $1, 2, \ldots, N$. Los cupones aparecen de uno en uno en secuencia de forma independiente, por lo que la adquisición es de un cupón por unidad de tiempo. Asumiremos que la probabilidad de adquisición de un cupón cualquiera está dada por $\frac{1}{N}$, por lo que cada uno de los diferentes tipos de cupones serán en cualquier unidad de tiempo igualmente verosímiles, es decir, siguen una distribución uniforme. Nuestro objetivo será determinar el número esperado de cupones que se deben adquirir para completar las m colecciones. Al final de este capítulo se muestra un ejemplo de aplicación de los resultados presentados. Lo que veremos en este capítulo se basa en su mayoría en [12].

3.1. Análisis de una colección mediante la distribución geométrica

En esta sección analizaremos el primer caso del problema del coleccionista de cupones, el cual se describe de la siguiente manera. Consideraremos una persona que desea completar una colección de cupones, es decir, $m = 1$. Para hallar el número esperado de cupones que dicha persona necesita comprar para completar su colección, usaremos el enfoque de la distribución geométrica. Iniciamos definiendo a X como el número aleatorio de cupones que esta persona necesita comprar para completar su colección. Representamos a X de la siguiente manera

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{3.1}$$

donde cada X_i representa el número adicional de cupones que se necesita comprar para pasar de tener $i - 1$ a i diferentes tipos de cupones. Es claro que el número adicional de cupones que necesita comprar para pasar de tener cero cupones a un cupón es 1, es decir, $X_1 = 1$. En general, cuando se han recolectado i diferentes tipos de cupones, se tiene que la probabilidad de adquirir en la siguiente compra un cupón distinto a estos i cupones está dada por el número de casos favorables de obtener un cupón distinto entre el total de cupones existentes, es decir,

$$\frac{N-i}{N}, \quad i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Ahora bien, debido a que los cupones aparecen de forma independiente, las variables X_i, $i = 1, 2, \dots, N$, son independientes y para cada $i \in \{2 \dots, N\}$, X_i tiene una distribución geométrica, donde el parámetro está dado por $p_i = \frac{N-i+1}{N}$. En consecuencia, podemos determinar los valores esperados para cada una de estas X_i, como se muestra enseguida

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{N}{N-i+1}, \quad i \in \{2, \dots, N\}.$$

Notemos que lo único que nos falta obtener es $\mathbb{E}[X_1]$. Dado que $X_1 = 1$, usando la proposición 1.3.11 inciso 1), se sigue que $\mathbb{E}[X_1] = 1$.

En vista de que ya conocemos los valores esperados de las variables aleatorias X_i, $i = 1, 2, \dots, N$, podemos determinar el número esperado de cupones que una persona tiene que comprar para completar su colección, esto se obtiene calculando $\mathbb{E}[X]$, donde X está dado por (3.1). Aplicando la proposición 1.3.11 inciso 3), se tiene que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_N].$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 1 + \frac{1}{\frac{N-1}{N}} + \frac{1}{\frac{N-2}{N}} + \cdots + \frac{1}{\frac{2}{N}} + \frac{1}{\frac{1}{N}} \\
&= \frac{N}{N} + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + \frac{N}{2} + \frac{N}{1} \\
&= N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número esperado de cupones que debe comprar una persona para completar una colección es

$$\mathbb{E}[X] = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}. \tag{3.2}$$

Por otra parte, cabe mencionar que podemos calcular la varianza de X, considerando de nuevo a X como en (3.1). En efecto, notemos primero que $\operatorname{Var}[X_1] = 0$, pues $\mathbb{E}[X_1] = 1$. Luego, como las variables aleatorias X_i son independientes y $\operatorname{Var}[X_i] = \frac{1-p_i}{p_i^2}$ (ya que tienen distribución geométrica), con $p_i = \frac{N-i+1}{N}$, para toda $i \in \{2, \dots, N\}$, sucede que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X] = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Var}[X_i] &= \sum_{i=2}^{N} \frac{1-p_i}{p_i^2} = \sum_{i=2}^{N} \frac{1 - \left(\frac{N-i+1}{N}\right)}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} \\
&= \sum_{i=2}^{N} \frac{N^2(i-1)}{N(N-i+1)^2} = N \sum_{i=2}^{N} \frac{(i-1)}{(N-i+1)^2}.
\end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Por lo tanto

$$\mathrm{Var}[X] = N \sum_{i=2}^{N} \frac{(i-1)}{(N-i+1)^2}. \tag{3.3}$$

Así mismo, utilizando la distribución geométrica también podemos calcular el valor esperado y la varianza del número de cupones para obtener $k \leq N$ cupones distintos de la colección. Estas fórmulas son obtenidas de forma análoga a (3.2) y (3.3), y están dadas por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_N(k)] &= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_k] \\ &= 1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + \frac{N}{N-k+1} = N \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N-i+1},\end{aligned}$$

donde $X_N(k) = \sum_{i=1}^{k} X_i$ es el número de cupones requeridos para obtener k cupones distintos. Es decir,

$$\mathbb{E}[X_N(k)] = N \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N-i+1}. \tag{3.4}$$

Este valor esperado representa el tamaño promedio de la muestra para obtener los k cupones distintos. La expresión para la varianza de $X_N(k)$, con $k \leq N$ cupones distintos, está dada por

$$\mathrm{Var}[X_N(k)] = N \sum_{i=2}^{k} \frac{(i-1)}{(N-i+1)^2}. \tag{3.5}$$

Observación 3.1.1. *Notemos que cuando $k = N$ en (3.4) se tiene que $\mathbb{E}[X_N(N)] = 1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + N$, es precisamente la solución del problema del coleccionista de cupones para el caso de una distribución uniforme; análogamente se puede observar de (3.5) que $Var[X_N(N)] = Var[X]$.*

Por último, veamos la distribución de X (el número de cupones requeridos para obtener toda la colección de N cupones), como se menciona en [17], esta distribución fue determinada en [24] y está dada por la expresión

$$F(n) = P(X \leq n) = 1 - P(X > n) = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n (-1)^{i+1}, \quad n \geq N.$$

Por su parte, la función masa de probabilidad de X, está dada por

$$f(n) = \begin{cases} F(n), & \text{para } n = N, \\ F(n) - F(n-1), & \text{para } n > N. \end{cases} \tag{3.6}$$

3.2. Análisis de una colección mediante cadenas de Markov

A continuación consideraremos nuevamente el primer caso del problema del coleccionista de cupones visto en la sección 3.1, pero ahora usando el enfoque de las cadenas de Markov.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Recordemos que se requiere encontrar N diferentes tipos de cupones para completar una colección. Dado que se obtiene un cupón por cada unidad de tiempo, denotemos por Y_n a el número de tipos diferentes de cupones que se han recolectado después de n unidades de tiempo y supongamos otra vez que la probabilidad de encontrar un cupón de cualquier tipo en un tiempo cualquiera está dado por $\frac{1}{N}$. Claramente $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es una cadena a tiempo discreto con espacio de estados $S_1 = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Esta cadena también satisface la propiedad de Markov, ya que por ejemplo, la probabilidad de que en el tiempo n se tengan exactamente 5 cupones distintos, depende únicamente del número de cupones distintos en el tiempo $n-1$.

Dado que $\{Y_n\}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto, para calcular el valor esperado y la varianza de Y_n para un valor fijo de n, tomamos $a_n = \left(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}\right)$ donde $a_i^{(n)} = P(Y_n = i)$, el vector de probabilidades de Y_n que se obtiene como se indica en la sección 2.1. Utilizando este vector se tiene que

$$\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{i=1}^{N} i a_i^{(n)} \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}[Y_n] = \sum_{i=1}^{N} i^2 a_i^{(n)} - \left[\sum_{i=1}^{N} i a_i^{(n)}\right]^2. \tag{3.7}$$

Nótese que el valor esperado de Y_n representa el número esperado de tipos diferentes de cupones que se recolectan en una muestra de tamaño n (o al tiempo n).

Ahora bien, de acuerdo a lo visto en la sección 2.1, como el espacio de estados S_1 tiene cardinalidad $|S_1| = N + 1$, esto implica que existen $(N+1)^2$ probabilidades de transición para la cadena. A continuación se presentan las probabilidades de transición.

Para $i, j \in S_1$ se cumple que

$$p_{ij} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{si } i = j, \\ \\ \frac{N-i}{N}, & \text{si } i + 1 = j, \\ \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{3.8}$$

En la siguiente matriz de transición P_1 de dimensión $(N+1) \times (N+1)$ se pueden observar todos los valores de las probabilidades de transición de S_1 obtenidas usando la expresión (3.8):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} & \frac{N-2}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{N-1}{N} & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la matriz P_1, notemos que la única clase cerrada de la cadena $\{Y_n\}$ es $\{N\}$, por lo que el estado N es absorbente. Esto nos indica que la cadena $\{Y_n\}$ debe alcanzar a este estado

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

absorbente. Es de nuestro interés conocer el tiempo medio que tarda en completar dicha acción ya que es equivalente a encontrar el número esperado de cupones que se necesitan recolectar para completar una colección de N cupones. Para poder determinar este tiempo medio, usaremos el teorema 2.4.7, lo que nos conduce a resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} k_N = 0, \\ k_i = 1 + \sum_{j \neq N} p_{ij} k_j, \quad i \neq N, \end{cases}$$

donde k_i es el tiempo esperado para llegar al estado N cuando se inicia en el estado i. Del sistema anterior y los elementos de la matriz de transición P_1, obtenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} k_0 = 1 + k_1 \\ k_1 = 1 + \frac{1}{N}k_1 + \frac{N-1}{N}k_2 \\ k_2 = 1 + \frac{2}{N}k_1 + \frac{N-2}{N}k_3 \\ \vdots \\ k_{N-2} = 1 + \frac{N-2}{N}k_{N-2} + \frac{2}{N}k_{N-1} \\ k_{N-1} = 1 + \frac{N-1}{N}k_{N-1} \\ k_N = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_N = 0 \\ \frac{1}{N}k_{N-1} = 1 \\ \frac{2}{N}k_{N-2} = 1 + \frac{2}{N}k_{N-1} \\ \vdots \\ \frac{N-2}{N}k_2 = 1 + \frac{N-2}{N}k_3 \\ \frac{N-1}{N}k_1 = 1 + \frac{N-1}{N}k_2 \\ k_0 = 1 + k_1. \end{cases}$$

De este sistema es fácil ver que el tiempo esperado para obtener los N cupones de una colección está dada por $k_0 = N\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$.

3.3. Análisis directo de múltiples colecciones

En esta sección veremos el problema de recolectar múltiples colecciones de N cupones equiprobables. Supongamos que m hermanos coleccionan cupones con el objetivo de completar m colecciones con N cupones distintos. La completación de sus m colecciones la hacen a través de un entorno colaborativo, usando una regla que es válida para completar un número finito de colecciones. Ilustraremos esta regla mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.1. *Consideramos dos hermanos que desean completar dos colecciones de N cupones. Sus colecciones se irán completando mediante el siguiente orden. Supongamos que cada vez que se compra un cupón, si el hermano mayor no lo encuentra en su colección se queda con él, en caso contrario se lo pasa al hermano menor.*

De acuerdo al orden para completar estas colecciones podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número esperado de cupones necesarios para formar m colecciones usando el proceso colaborativo mencionado anteriormente?, con seguridad este número es menor que m veces el número promedio de cupones necesarios para completar una única colección (ver

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

sección 3.1 y sección 3.2). Para responder a esta pregunta presentaremos la solución exacta encontrada en 1960 por D. J. Newman y L. Shepp, que consiste en determinar el tiempo esperado que se necesita para completar m colecciones de N cupones igualmente probables. Empezamos con suponer que deseamos obtener m colecciones de N cupones igualmente probables. Para esto, vamos a denotar por X al número aleatorio de cupones necesarios para completar m colecciones y por p_i a la probabilidad de fracasar en obtener las m colecciones dentro de los primeros i cupones recolectados. Notemos que $p_i = P(X > i)$, ya que hasta el tiempo i aún no se logra completar las m colecciones. Luego, por el teorema 1.3.12 se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X > i) = \mathbb{E}[X]. \tag{3.9}$$

Como nuestro objetivo es determinar el valor de $\mathbb{E}[X]$, resulta de vital importancia encontrar una expresión para calcular el valor de las p_i. Se tiene que

$$p_i = \frac{M_i}{N^i}, \tag{3.10}$$

donde M_i es el número de maneras en que se pueden adquirir i-cupones de tal forma que se falle en obtener m copias de cada uno de los N cupones y, claramente, N^i es el número de secuencias distintas de i cupones. Por lo anterior, necesitamos conocer como se calculan las M_i, para lo cual, sin pérdida de generalidad denotamos los cupones por $x_1, \ldots, x_N$. Por el **teorema multinomial** (ver [24, pág. 10]) se sigue que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)^i = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_N=i} \binom{i}{r_1, r_2, \cdots, r_N} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_N^{r_N}.$$

El valor de M_i resulta después de eliminar todos los términos de la expresión anterior para los cuales cada variable tiene exponente mayor que $m-1$ y haber evaluado en $(1, \ldots, 1)$. Para esclarecer mejor este procedimiento, daremos enseguida un ejemplo.

Ejemplo 3.3.2. *Supongamos que deseamos $m = 3$ colecciones de $N = 2$ cupones diferentes. Estamos interesados en calcular M_6, es decir, el número de formas en que en los primeros 6 cupones adquiridos no se obtengan tres copias de cada uno de los dos cupones distintos. Por el teorema multinomial, tenemos que*

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^6 &= \sum_{r_1+r_2=6} \binom{6}{r_1, r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \\ &= \binom{6}{0,6} x_1^0 x_2^6 + \binom{6}{6,0} x_1^6 x_2^0 + \binom{6}{1,5} x_1^1 x_2^5 + \binom{6}{5,1} x_1^5 x_2^1 \\ &\quad + \binom{6}{2,4} x_1^2 x_2^4 + \binom{6}{4,2} x_1^4 x_2^2 + \binom{6}{3,3} x_1^3 x_2^3.\end{aligned}$$

Luego buscamos los términos donde las dos variables tengan exponente mayor a $m - 1 = 2$ y se eliminan. Realizando lo anterior obtenemos,

$$\binom{6}{0,6} x_1^0 x_2^6 + \binom{6}{6,0} x_1^6 x_2^0 + \binom{6}{1,5} x_1^1 x_2^5 + \binom{6}{5,1} x_1^5 x_2^1 + \binom{6}{2,4} x_1^2 x_2^4 + \binom{6}{4,2} x_1^4 x_2^2.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Por último, evaluando la expresión anterior en $(x_1, x_2) = (1, 1)$ *tenemos que*

$$M_6 = \binom{6}{0,6} + \binom{6}{6,0} + \binom{6}{1,5} + \binom{6}{5,1} + \binom{6}{2,4} + \binom{6}{4,2} = 44.$$

Ahora bien, considerando un número m fijo, denotamos por $P(x_1, \ldots, x_N)$ a un polinomio o una serie de potencia, y denotamos por $\{P(x_1, \ldots, x_N)\}$ al polinomio resultante cuando todos los términos con todos los exponentes mayores o iguales a m son eliminados. De esta notación y (3.10) tenemos que

$$p_i = \frac{\{(x_1 + \cdots + x_N)^i\}}{N^i}, \quad \text{evaluado en } x_1 = \cdots = x_n = 1. \tag{3.11}$$

Definamos $S_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}$ y consideremos la expresión dada a continuación

$$F = e^{x_1 + \cdots + x_N} - (e^{x_1} - (S_m(x_1)) \times \cdots \times (e^{x_N} - (S_m(x_N)).$$

Entonces de la definición de $S_m(t)$ y de la definición de función exponencial vista como serie de potencias se tiene que

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \cdots + x_N)^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_1^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_1^k}{k!} \right) \times \cdots \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_N^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_N^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \cdots + x_N)^k}{k!} - \left(\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_1^k}{k!} \times \cdots \times \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_N^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

Es evidente que todos los exponentes en todos los términos de $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_1^k}{k!}$, $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_2^k}{k!}$, $\ldots$, $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_N^k}{k!}$ son mayores o iguales a m, por lo que todos los exponentes en todos los términos de $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_1^k}{k!} \times \cdots \times \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_N^k}{k!}$ también son mayores o iguales a m. Como se remueven todos los términos con todos los exponentes mayores o iguales a m de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \cdots + x_N)^k}{k!}$, entonces F se reduce a

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \cdots + x_N)^k}{k!} \right\} = \{e^{x_1 + \cdots + x_N}\}.$$

Notemos que, como consecuencia de (3.9) y (3.11), tenemos una nueva expresión para $\mathbb{E}[X]$ dada por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\{(x_1 + \cdots + x_N)^i\}}{N^i}, \text{ evaluado en } x_1 = \cdots = x_N = 1. \tag{3.12}$$

Enseguida presentamos una identidad (la cual puede ser fácilmente verificada, usando, repetidamente, integración por partes) que nos será de mucha utilidad para encontrar otra expresión para $\mathbb{E}[X]$,

$$\frac{1}{N^i} = N \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-Nt} dt.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

De esta identidad y (3.12), tenemos de inmediato la expresión siguiente

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\{(x_1 + \cdots + x_N)^i\} N \int_0^{\infty} \frac{t^i}{i!} e^{-Nt} dt \right), \tag{3.13}$$

evaluado en $x_1 = \cdots = x_N = 1$.

Nótese que en el lado derecho de (3.13) es posible intercambiar la integral y la sumatoria, debido a que podemos aplicar el teorema de Tonelli para funciones no negativas (ver [5, teorema 5.2.1, pág. 152]). Obtenemos así que el lado derecho de (3.13) es igual a

$$\begin{aligned} N \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} & \frac{\{(x_1 + \cdots + x_N)^i\} t^i}{i!} e^{-Nt} dt \\ &= N \int_0^{\infty} \left[e^{t(x_1 + \cdots + x_N)} - (e^{tx_1} - S_m(tx_1)) \times \cdots \times (e^{tx_N} - S_m(tx_N)) \right] e^{-Nt} dt. \end{aligned}$$

Evaluando la expresión anterior en $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= N \int_0^{\infty} \left[e^{tN} - (e^t - S_m(t))^N \right] e^{-Nt} dt = N \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-Nt}(e^t - S_m(t))^N \right] dt \\ &= N \int_0^{\infty} \left[1 - (e^{-t}(e^t - S_m(t)))^N \right] dt = N \int_0^{\infty} \left[1 - (1 - e^{-t} S_m(t))^N \right] dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X] = N \int_0^{\infty} \left[1 - (1 - e^{-t} S_m(t))^N \right] dt. \tag{3.14}$$

Por último, para determinar el valor explícito de (3.14) se deberá sustituir el valor correspondiente de $S_m(t)$ e integrar.

Ejemplo 3.3.3. *Supongamos que queremos completar $m = 2$ colecciones de $N = 2$ cupones, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 2 \int_0^{\infty} \left[1 - (1 - S_2(t) e^{-t})^2 \right] dt = 2 \int_0^{\infty} \left[1 - (1 - (1+t) e^{-t})^2 \right] dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left[2(1+t) e^{-t} - (1+t)^2 e^{-2t} \right] dt = 4 \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} (1+t) e^{-t} dt - 2 \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} (1+t)^2 e^{-2t} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\mathbb{E}[X] = \frac{11}{2} = 5.5.$$

Por otra parte, usando la fórmula (3.2), es fácil ver que el tiempo esperado para completar solo una colección de $N = 2$ cupones es 3. De manera que en el entorno colaborativo aquí contemplado, el tiempo esperado para completar dos colecciones de dos cupones es menor al tiempo esperado para completar ambas colecciones sin colaboración.

Ejemplo 3.3.4. *Supongamos ahora que queremos completar $m = 2$ colecciones de $N = 3$ cupones, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 3\int_0^\infty \left[1-(1-S_2(t)e^{-t})^3\right] dt = 3\int_0^\infty \left[1-(1-(1+t)e^{-t})^3\right] dt\\ &= 3\int_0^\infty \left[(1+t)^3e^{-3t} - 3(1+t)^2e^{-2t} + 3(1+t)e^{-t}\right] dt\\ &= 3\lim_{a\to\infty}\int_0^a (1+t)^3e^{-3t}dt - 9\lim_{a\to\infty}\int_0^a (1+t)^2e^{-2t}dt + 9\lim_{a\to+\infty}\int_0^a (1+t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\mathbb{E}[X] \approx 9.64.$$

De nuevo por (3.2), es fácil ver que el tiempo esperado para completar solo una colección de $N = 3$ cupones es 5.5. De manera que nuevamente se observa que, en nuestro ambiente colaborativo, el tiempo esperado para completar dos colecciones de tres cupones es menor al tiempo esperado para completar ambas colecciones sin colaboración alguna.

3.4. Análisis de múltiples colecciones mediante cadenas de Markov

En esta sección presentaremos un análisis de la misma situación vista en la sección 3.3, pero ahora bajo el enfoque de las cadenas de Markov. Consideremos m colecciones de N cupones, donde $m = 2$ o $m = 3$. De manera general, denotamos a X_n, $n \geq 0$, como la variable aleatoria que representa el número de cupones diferentes en las colecciones después de n adquisiciones. De este modo $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov cuyo espacio de estados son parejas ordenadas en el caso de $m = 2$ y son tripletas ordenadas en el caso de $m = 3$ como se muestra a continuación:

- Para $m = 2$ y $N \in \mathbb{N}$ se tiene que el espacio de estados de la cadena es

  $$S_{2N} = \{(i,j) \colon i,j \in \{0,1,\ldots,N\}, i \geq j\},$$

  donde i representa el número de cupones diferentes que tiene el hermano mayor y j representa el número de cupones diferentes que tiene el hermano menor.

- Para $m = 3$ y $N \in \mathbb{N}$ se tiene que el espacio de estados es

  $$S_{3N} = \{(i,j,k) \colon i,j,k \in \{0,1,\ldots,N\}, i \geq j \geq k\},$$

  donde i representa el número de cupones diferentes que tiene el hermano mayor, j representa el número de cupones diferentes que tiene el hermano de enmedio y k representa el número de cupones diferentes que tiene el hermano menor.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

3.4.1. El caso de dos colecciones

Empecemos con suponer que tenemos dos colecciones, $m = 2$, de $N = 3$ cupones distintos. En este caso, el espacio de estados es

$$S_{23} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Notemos que S_{23} tiene 10 elementos. Enseguida vamos a obtener una fórmula general que nos permita calcular la cardinalidad del espacio de estados S_{2N} para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Obsérvese la siguiente tabla:

i \ j	0	1	2	3	$\cdots$	N	No. de estados
0	$(0,0)$						1
1	$(1,0)$	$(1,1)$					2
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$				3
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$			4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
N	$(N,0)$	$(N,1)$	$(N,2)$	$(N,3)$	$\cdots$	(N,N)	$N+1$

Tabla 3.1: Tabla de estados de S_{2N}

Para encontrar la suma del número de estados en la última columna de la tabla anterior, se usará la famosa fórmula de Gauss aplicada a los primeros $N + 1$ números naturales, por lo que la cardinalidad de S_{2N} estará dada por

$$|S_{2N}| = \frac{(N+1)(N+2)}{2},$$

donde N representa el número de cupones diferentes de la colección. Así, por ejemplo

$$|S_{23}| = \frac{(3+1)(3+2)}{2} = \frac{(4)(5)}{2} = 10,$$

como ya se había observado.

Hallaremos ahora una expresión general que nos permita calcular todas las probabilidades de transición en el espacio de estados S_{2N} para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Para tal fin, veamos algunas probabilidades de transición para los elementos (i, j) de S_{23}.

- Iniciamos en $(0, 0)$ y adquirimos un cupón, el cual se añade a la colección del hermano mayor, por lo que se pasa al estado $(1, 0)$ con probabilidad 1.

- Si estamos en $(1, 1)$ y obtenemos un cupón distinto al que tiene en su colección el hermano mayor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, por lo que se pasa al estado $(2, 1)$ con probabilidad $\frac{N-1}{N}$. Similarmente, si estamos en $(1, 0)$ y obtenemos un cupón distinto al que tiene en su colección el hermano mayor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, así se pasa al estado $(2, 0)$ con probabilidad $\frac{N-1}{N}$. Así mismo, si estamos en $(2, 0)$ y obtenemos un cupón distinto a los que tiene en su colección el hermano mayor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, por lo que se pasa al estado $(3,0)$ con probabilidad $\frac{N-2}{N}$. Observemos también que si estamos en $(2,1)$ y obtenemos un cupón distinto a los que tiene en su colección el hermano mayor, el cupón comprado se añade a esta colección, así pasamos al estado $(3,1)$ con probabilidad $\frac{N-2}{N}$. Análogamente, si estamos en $(2,2)$ y obtenemos un cupón distinto a los que tiene en su colección el hermano mayor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, por lo que pasamos al estado $(3,2)$ con probabilidad $\frac{N-2}{N}$.

- Si iniciamos en $(1,0)$ y obtenemos el mismo cupón que tiene en su colección el hermano mayor, el cupón comprado se añade a la colección del hermano menor, así se pasa al estado $(1,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{1-0}{N}$. De la misma manera si estamos en $(2,1)$ y obtenemos uno de los cupones existentes en la colección del hermano mayor, entonces el cupón comprado se añade a la colección del hermano menor, así pasamos al estado $(2,2)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{2-1}{N}$. Vemos también que si estamos en $(3,0)$ y obtenemos un cupón, éste se añade a la colección del hermano menor, así pasamos al estado $(3,1)$ con probabilidad $\frac{3}{N} = \frac{N}{N} = 1$. Así mismo, si estamos en $(3,1)$ y obtenemos un cupón distinto al que tiene en su colección el hermano menor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, por lo que pasamos al estado $(3,2)$ con probabilidad $\frac{2}{N} = \frac{3-1}{N}$. Análogamente si estamos en $(3,2)$ y obtenemos un cupón distinto a los existentes en la colección del hermano menor, entonces el cupón comprado se añade a esta colección, así pasamos al estado $(3,3)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{3-2}{N}$.

- Si iniciamos en $(1,1)$ y obtenemos el cupón que tienen en común el hermano mayor y el hermano menor, el cupón comprado no se queda en ninguna colección, así permanecemos en el estado $(1,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N}$. De la misma manera si estamos en $(2,1)$ y obtenemos el mismo cupón que tiene el hermano menor, entonces el cupón comprado no se queda en ninguna colección, de manera que nos quedamos en el estado $(2,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N}$. Vemos también que si estamos en $(3,1)$ y obtenemos el cupón existente en la colección del hermano menor, entonces el cupón comprado no se añade a esta colección, así permanecemos en el mismo estado $(3,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N}$. Análogamente, si estamos en $(3,2)$ y obtenemos uno de los cupones existentes en la colección del hermano menor, entonces el cupón comprado no se añade a esta colección, por lo que permanecemos en el estado $(3,2)$ con probabilidad $\frac{2}{N}$.

- Por último, si estamos en $(3,3)$ y obtenemos un cupón, no se añade a ninguna colección, ya que las colecciones están completas, así permanecemos en el estado $(3,3)$ con probabilidad 1.

Siguiendo la misma idea que en el caso anterior para S_{23}, se tienen las siguientes probabilidades de transición en S_{2N} para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

$$
\begin{array}{rcl}
(0,0) & \longrightarrow & (1,0), \quad \text{con probabilidad } 1, \\
(i,j) & \longrightarrow & \begin{cases} (i+1,j), & \text{con probabilidad } \frac{N-i}{N}, \\ (i,j+1), & \text{con probabilidad } \frac{i-j}{N}, \\ (i,j), & \text{con probabilidad } \frac{j}{N}, \end{cases} \\
(N,N) & \longrightarrow & (N,N), \quad \text{con probabilidad } 1.
\end{array}
$$

Notemos que $\{(N,N)\}$ es una clase cerrada, por lo que el estado (N,N) es absorbente, mientras que el resto de los estados son transitorios. Suponiendo que $i = N$ (cuando completamos la colección del hermano mayor) se obtiene que

$$
(N,j) \longrightarrow \begin{cases} (N,j+1), & \text{con probabilidad } \frac{N-j}{N}, \\ (N,j), & \text{con probabilidad } \frac{j}{N}. \end{cases}
$$

Usando las expresiones anteriores tenemos todas las probabilidades de transición en S_{23}, las cuales se pueden observar en la matriz de transición P_{23} que enseguida se presenta.

$$
P_{23} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Dada ya la matriz P_{23}, para $m = 2$ y $N = 3$, nos interesa saber el tiempo medio que se tarda la cadena $\{X_n, n \geq 0\}$ en alcanzar al estado absorbente (N,N), pues dicho valor es el tiempo esperado para completar las dos colecciones de tres cupones distintos equiprobables. Esto se logra determinando el valor de $k_{(0,0)}^{(N,N)}$ al resolver el sistema (2.5) del teorema 2.4.7, de manera análoga a como se resolvió para el caso de una sola colección bajo el enfoque de las cadenas de Markov. Enseguida se presentan los resultados obtenidos después de ciertos cálculos.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$\begin{cases} k_{(0,0)} = 1 + k_{(1,0)} \\ k_{(1,0)} = 1 + \frac{1}{3}k_{(1,1)} + \frac{2}{3}k_{(2,0)} \\ k_{(1,1)} = 1 + \frac{1}{3}k_{(1,1)} + \frac{2}{3}k_{(2,1)} \\ k_{(2,0)} = 1 + \frac{2}{3}k_{(2,1)} + \frac{1}{3}k_{(3,0)} \\ k_{(2,1)} = 1 + \frac{1}{3}k_{(2,1)} + \frac{1}{3}k_{(2,2)} + \frac{1}{3}k_{(3,1)} \\ k_{(2,2)} = 1 + \frac{2}{3}k_{(2,2)} + \frac{1}{3}k_{(3,2)} \\ k_{(3,0)} = 1 + k_{(3,1)} \\ k_{(3,1)} = 1 + \frac{1}{3}k_{(3,1)} + \frac{2}{3}k_{(3,2)} \\ k_{(3,2)} = 1 + \frac{2}{3}k_{(3,2)} \\ k_{(3,3)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_{(3,3)} = 0 \\ k_{(3,2)} = 3 \\ k_{(3,1)} = \frac{9}{2} = 4.5 \\ k_{(3,0)} = \frac{11}{2} = 5.5 \\ k_{(2,2)} = 6 \\ k_{(2,1)} = \frac{27}{4} = 6.75 \\ k_{(2,0)} = \frac{22}{3} \approx 7.33 \\ k_{(1,1)} = \frac{33}{4} = 8.25 \\ k_{(1,0)} = \frac{311}{36} \approx 8.64 \\ k_{(0,0)} = \frac{347}{36} \approx 9.64 \end{cases}$$

Por lo anterior, se sigue que el tiempo esperado para completar dos colecciones de $N = 3$ cupones distintos equiprobables es $k_{(0,0)} = \frac{347}{36} \approx 9.64$.

3.4.2. El caso de tres colecciones

Ahora se considerará el caso de $m = 3$ colecciones con $N = 2$ cupones distintos. Como ya se ha mencionado, este problema se puede modelar usando una cadena de Markov, $\{X_n, n \geq 0\}$, cuyo espacio de estados S_{32} consiste en tripletas ordenadas; específicamente

$$S_{32} = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (2,0,0), (2,1,0), (2,1,1), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

En este caso, tenemos que el número de estados de S_{32} es de 10, esto es, $|S_{32}| = 10$. A continuación, obtendremos una fórmula general que nos permitirá calcular el número de elementos de S_{3N}, es decir, la cardinalidad de S_{3N}, $|S_{3N}|$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, de acuerdo al orden a como se fueron presentando las parejas ordenadas del espacio de estados S_{2N} para el caso $m = 2$ y cualquier N (véase la tabla 3.1) se formarán las tripletas ordenadas del espacio de estados S_{3N} para algunos N específicos. Este proceso se lleva a cabo para conseguir la fórmula general para la cardinalidad de S_{3N}. Notemos que a los tres pares ordenados de la primera columna de la tabla 3.1 (con $N = 2$) podemos agregarles un cero al final para conseguir una tripleta ordenada (i, j, k) con $1 \leq k \leq j \leq i \leq 2$, por lo que obtenemos $(3)(1) = 3$ estados de S_{3N}. Siguiendo el mismo razonamiento, a los dos pares ordenados de la segunda columna de la tabla 3.1 podemos agregarles al final el 0 ó el 1 para conseguir otros estados de S_{3N}, por lo que obtenemos $(2)(2) = 4$ estados de S_{3N}. Análogamente, al par ordenado de la tercera columna podemos agregarle al final el 0, 1 ó 2 para obtener otros estados de S_{3N}, así se obtienen $(1)(3) = 3$ estados de S_{3N}. Observamos que estos son los únicos estados de S_{3N} con $N = 2$, por lo que este procedimiento nos proporciona una forma de organizarlos para contarlos, dicha organización se muestra en la siguiente tabla.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Estados				No. Estados
$(0,0,0)$	$(1,0,0)$	$(2,0,0)$		$(3)(1)$
$(1,1,0)$	$(2,1,0)$	$(1,1,1)$	$(2,1,1)$	$(2)(2)$
$(2,2,0)$	$(2,2,1)$	$(2,2,2)$		$(1)(3)$
				TOTAL $= 10$

Tabla 3.2: Conteo de los estados en S_{32}

Siguiendo un procedimiento análogo al del caso $m = 3$ y $N = 2$, obtenemos la siguiente tabla donde se organizan los estados de S_{3N} con $N = 3$, S_{33}.

Estados						No. Estados
$(0,0,0)$	$(1,0,0)$	$(2,0,0)$	$(3,0,0)$			$(4)(1)$
$(1,1,0)$	$(2,1,0)$	$(3,1,0)$	$(1,1,1)$	$(2,1,1)$	$(3,1,1)$	$(3)(2)$
$(2,2,0)$	$(3,2,0)$	$(2,2,1)$	$(3,2,1)$	$(2,2,2)$	$(3,2,2)$	$(2)(3)$
$(3,3,0)$	$(3,3,1)$	$(3,3,2)$	$(3,3,3)$			$(1)(4)$
						TOTAL$= 20$

Tabla 3.3: Conteo de los estados en S_{33}.

De la tabla 3.2 y tabla 3.3, notemos que la suma del número de estados (No. Estados) se puede obtener de manera general con la siguiente expresión que es igual a la cardinalidad de S_{3N}

$$|S_{3N}| = (N+1)(1) + (N)(2) + (N-1)(3) + \cdots + (1)(N+1).$$

Enseguida simplificaremos la expresión dada anteriormente usando las fórmulas conocidas $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)(n)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ aplicadas a los $N+1$ primeros números naturales. Notemos que

$$\begin{aligned}
|S_{3N}| &= \sum_{k=1}^{N+1} k(N+2-k) = (N+2)\left(\sum_{k=1}^{N+1} k\right) - \sum_{k=1}^{N+1} k^2 \\
&= (N+2)\left(\frac{(N+2)(N+1)}{2}\right) - \left(\frac{(N+1)(N+2)(2(N+1)+1)}{6}\right) \\
&= \frac{(N+2)(N+1)}{2}\left((N+2) - \frac{(2(N+1)+1)}{3}\right) \\
&= \frac{(N+2)(N+1)}{2}\left(\frac{3N+6-2N-3}{3}\right) = \frac{(N+2)(N+1)}{2}\left(\frac{N+3}{3}\right) \\
&= \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ se tiene que la cardinalidad de S_{3N} está dada por la siguiente fórmula

$$|S_{3N}| = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}.$$

Para el caso $N = 2$ tenemos

$$|S_{32}| = \frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{6} = 10,$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

como se había observado con anterioridad. También, para el caso $N = 3$, tenemos

$$|S_{33}| = \frac{(3+1)(3+2)(3+3)}{6} = 20,$$

como se había obtenido con anterioridad de manera directa.

Ahora hallaremos una expresión general que nos permita calcular todas las probabilidades de transición en el espacio de estados S_{3N} para cualquier $N \in \mathbb{N}$, en particular para S_{32}. Para tales fines calculemos algunas probabilidades de transición entre los elementos (i, j, k) de S_{32} :

- Iniciamos en $(0,0,0)$ y obtenemos un cupón, el cual se añade a la colección del hermano mayor, por lo que se pasa al estado $(1,0,0)$ con probabilidad 1.

- Si estamos en $(2,2,2)$ y obtenemos un cupón, este no se añade a ninguna de las colecciones, ya que las colecciones están completas, por lo que nos quedamos en el estado $(2,2,2)$ con probabilidad 1.

- Si estamos en $(1,1,1)$ y obtenemos el mismo cupón que tienen en común los tres hermanos, este cupón no se añade a ninguna de las colecciones, por lo que permanecemos en el estado $(1,1,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N}$.

- Si estamos en $(1,0,0)$ y obtenemos un cupón distinto al cupón existente en la colección del hermano mayor, este cupón se añade a la colección del hermano mayor, por lo que pasamos al estado $(2,0,0)$ con probabilidad $\frac{N-1}{N}$.

- Si estamos en $(1,0,0)$ y obtenemos el mismo cupón existente en la colección del hermano mayor, entonces el cupón se añade a la colección del hermano de enmedio, así pasamos al estado $(1,1,0)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{1-0}{N}$. De igual manera, si estamos en $(2,1,0)$ y obtenemos un cupón distinto al que tiene el hermano de enmedio, entonces el cupón obtenido se añade a la colección del hermano de enmedio, por lo que se pasa al estado $(2,2,0)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{2-1}{N}$.

- Si estamos en $(1,1,0)$ y obtenemos el mismo cupón existente en las colecciones del hermano mayor y la del hermano de enmedio, entonces el cupón obtenido se añade a la colección del hermano menor, así pasamos al estado $(1,1,1)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{1-0}{N}$. De la misma manera, si estamos en $(2,2,1)$ y obtenemos un cupón distinto al cupón existente en la colección del hermano menor, entonces el cupón comprado se añade a su colección, por lo que pasamos al estado $(2,2,2)$ con probabilidad $\frac{1}{N} = \frac{2-1}{N}$.

Siguiendo la misma idea que en el caso anterior para S_{32}, se tienen las siguientes probabilidades de transición en S_{3N} para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$
\begin{array}{lcll}
(0,0,0) & \longrightarrow & (1,0,0), & \text{con probabilidad } 1, \\
(N,N,N) & \longrightarrow & (N,N,N), & \text{con probabilidad } 1,
\end{array}
$$

$$
(i,j,k) \longrightarrow \begin{cases} (i,j,k), & \text{con probabilidad } \frac{k}{N}, \\ (i+1,j,k), & \text{con probabilidad } \frac{N-i}{N}, \\ (i,j+1,k), \quad j<i & \text{con probabilidad } \frac{i-j}{N}, \\ (i,j,k+1), \quad k<j & \text{con probabilidad } \frac{j-k}{N}. \end{cases}
$$

Notemos que el estado (N,N,N) es absorbente, mientras que todos los otros estados son transitorios. Obsérvese que si $i=N$ (cuando completamos la colección del hermano mayor) se tienen las siguientes probabilidades de transición

$$
(N,j,k) \longrightarrow \begin{cases} (N,j,k), & \text{con probabilidad } \frac{k}{N}, \\ (N,j+1,k), \quad j<N, & \text{con probabilidad } \frac{N-j}{N}, \\ (N,j,k+1), \quad k<j, & \text{con probabilidad } \frac{j-k}{N}. \end{cases}
$$

Tenemos por lo tanto todas las probabilidades de trancisión en S_{32}, las cuales se pueden observar en la matriz de transición P_{32} que enseguida se presenta.

$$
P_{32} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Ahora nos interesa conocer el tiempo medio que se tarda la cadena $\{X_n, n \geq 0\}$ en alcanzar al estado absorbente (N,N,N), pues dicho valor es el tiempo esperado para completar las tres colecciones con $N=2$ cupones distintos equiprobables. Para lo anterior se debe determinar el valor de $k_{(0,0,0)}^{(N,N,N)}$, esto nos lleva a resolver el sistema (2.5) del teorema 2.4.7, para lo cual será de mucha utilidad la matriz P_{32}. A continuación presentamos los cálculos con los que se resuelve este sistema y el resultado final.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$\begin{cases} k_{(0,0,0)} = 1 + k_{(1,0,0)} \\ k_{(1,0,0)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(1,1,0)} + \frac{1}{2}k_{(2,0,0)} \\ k_{(1,1,0)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(1,1,1)} + \frac{1}{2}k_{(2,1,0)} \\ k_{(1,1,1)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(1,1,1)} + \frac{1}{2}k_{(2,1,1)} \\ k_{(2,0,0)} = 1 + k_{(2,1,0)} \\ k_{(2,1,0)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(2,1,1)} + \frac{1}{2}k_{(2,2,0)} \\ k_{(2,1,1)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(2,1,1)} + \frac{1}{2}k_{(2,2,1)} \\ k_{(2,2,0)} = 1 + k_{(2,2,1)} \\ k_{(2,2,1)} = 1 + \frac{1}{2}k_{(2,2,1)} + \frac{1}{2}k_{(2,2,2)} \\ k_{(2,2,2)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_{(2,2,2)} = 0 \\ k_{(2,2,1)} = 2 \\ k_{(2,2,0)} = 3 \\ k_{(2,1,1)} = 4 \\ k_{(2,1,0)} = \frac{9}{2} = 4.5 \\ k_{(2,0,0)} = \frac{11}{2} = 5.5 \\ k_{(1,1,1)} = 6 \\ k_{(1,1,0)} = \frac{25}{4} = 6.25 \\ k_{(1,0,0)} = 6.875 \\ k_{(0,0,0)} = \frac{55}{8} = 7.875 \end{cases}$$

Por lo anterior se sigue que el tiempo esperado para completar tres colecciones de $N = 2$ cupones distintos equiprobables es $k_{(0,0,0)} = 7.875$.

3.5. Ejemplo de aplicación

Como se mencionó en la introducción de este trabajo, existen diversas aplicaciones del problema del coleccionista de cupones. En esta sección se muestra un ejemplo de aplicación a muestreo industrial para el control de calidad, análogo a un ejemplo presentado en [17].

Se tiene una población (proceso) de extensión ilimitada o muy extensa que consiste de N diferentes tipos de unidades. Un tipo de unidad es una marca que indica la máquina que produjo la unidad. Toda la producción de las diversas máquinas está mezclada. En cada tiempo se elige una unidad para su análisis o verificación de su calidad, la probabilidad de obtener cualquier tipo de unidad específica es de $\frac{1}{N}$. Las unidades de un tipo específico aparecen en la muestra de manera independiente a las demás. En las siguientes tres subsecciones supondremos $N = 10$.

3.5.1. Obtención de una muestra que contenga al menos una unidad de cada una de las N máquinas

Es de nuestro interés conocer el tamaño promedio de la muestra requerida para obtener al menos uno de cada uno de los N tipos de unidades. El tamaño promedio de la muestra requerida para obtener todos los N tipos de unidades es equivalente a obtener el número esperado de cupones que necesita comprar una persona para completar una colección, el cual se calcula con la fórmula (3.2). Entonces, si $N = 10$, el tamaño promedio de la muestra es de

$$E[X] = 10 \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 10(2.928968) = 29.28968 \approx 29,$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

donde X es el tamaño de muestra requerido para obtener, por primera vez, al menos una unidad de cada una de las diez máquinas.

Ahora bien, también es posible calcular la varianza del número de unidades requeridas para obtener los N tipos de unidades, mediante la fórmula (3.3). Por lo que, para $N = 10$ tenemos que

$$\mathrm{Var}[X] = 10 \sum_{i=2}^{10} \frac{(i-1)}{(10-i+1)^2} = 10(12.56871) = 125.6871.$$

También, usando la fórmula (3.6), podemos generar el gráfico de la función masa de probabilidad de X, $f(n) = P(X = n)$. Dicho gráfico se presenta en la figura 3.1.

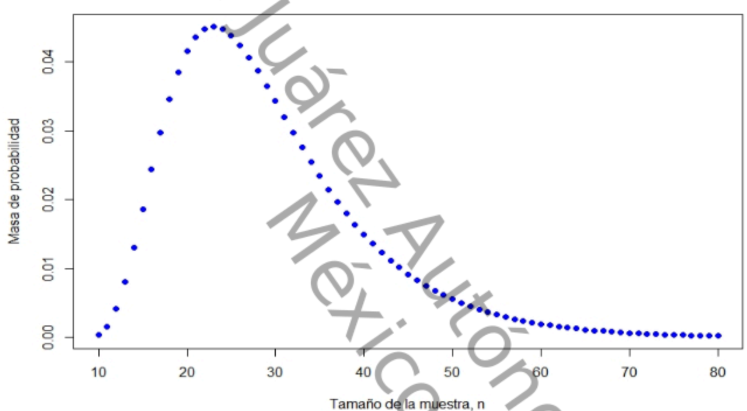

Figura 3.1: Función masa de X.

La figura 3.1 representa las probabilidades de obtener, por primera vez, al menos una unidad de cada una de las $N = 10$ máquinas en una muestra de tamaño n.
En la tabla 3.4 se muestran varios valores de $F(n) = P(X \leq n)$. En dicha tabla se observa, por ejemplo, que existe una probabilidad del 95.41 % de que el tamaño de muestra requerido para obtener al menos una unidad de cada una de las diez máquinas no excede de 51.

n	$F(n)$	n	$F(n)$
15	0.0460	43	0.8953
20	0.2147	44	0.9055
26	0.4790	50	0.9491
27	0.5196	51	0.9541
28	0.5583	65	0.9894
29	0.5948	66	0.9905

Tabla 3.4: Valores seleccionados para $F(n)$, caso $N = 10$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

3.5.2. Obtención de una muestra que contenga al menos una unidad de $k \leq N$ máquinas

Notemos que si deseamos obtener una muestra con $k \leq N = 10$ tipos de unidades de la población, es decir, al menos una unidad de $k \leq N$ máquinas, la fórmula para calcular el tamaño promedio de la muestra está dada por (3.4) y la varianza está dada por (3.5). Enseguida daremos algunos valores para el número de tipos de unidades, k, y calcularemos el tamaño promedio y varianza de la muestra correspondiente a cada valor.

- Si deseamos obtener $k = 4$ tipos de unidades, entonces el tamaño promedio y varianza de la muestra son

$$\mathbb{E}[X_N(4)] = 10 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{10 - i + 1} = 10(0.4789683) = 4.789683,$$

$$\mathrm{Var}[X_N(4)] = 10 \sum_{i=2}^{4} \frac{(i-1)}{(10 - i + 1)^2} = 10(0.1048202) = 1.048202.$$

- Si deseamos obtener $k = 6$ tipos de unidades, entonces el tamaño promedio y varianza de la muestra son

$$\mathbb{E}[X_N(6)] = 10 \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{10 - i + 1} = 10(0.8456349) = 8.456349,$$

$$\mathrm{Var}[X_N(6)] = 10 \sum_{i=2}^{6} \frac{(i-1)}{(10 - i + 1)^2} = 10(0.4159313) = 4.159313.$$

- Si deseamos obtener $k = 8$ tipos de unidades, entonces el tamaño promedio y varianza de la muestra son

$$\mathbb{E}[X_N(8)] = 10 \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{10 - i + 1} = 10(1.428968) = 14.28968,$$

$$\mathrm{Var}[X_N(8)] = 10 \sum_{i=2}^{8} \frac{(i-1)}{(10 - i + 1)^2} = 10(1.568709) = 15.68709.$$

3.5.3. Número de tipos diferentes de unidades que se encuentran en una muestra de tamaño n

Ahora deseamos conocer el número esperado y la varianza del número de tipos diferentes de unidades (el tipo especificado por la máquina que produce la unidad) que se pueden encontrar en una muestra de tamaño fijo n. Esto puede ser calculado con las fórmulas en (3.7). Para $N = 10$, debido a que siempre iniciamos con cero unidades, tomamos como vector inicial a

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

La matriz de transición P_1 de Y_n (número de tipos diferentes de unidades en una muestra de tamaño n), dada en la sección 3.2, es la siguiente

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.2 & 0.0 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Enseguida presentaremos algunos valores para el tamaño de muestra n y calcularemos el número promedio de tipos diferentes de unidades en la muestra, así como la varianza del número de tipos diferentes de unidades.

- Dada una muestra de tamaño $n = 4$, tenemos la siguiente matriz de transición de 4 pasos

$$P_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0.001 & 0.063 & 0.432 & 0.504 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.0001 & 0.0135 & 0.180 & 0.504 & 0.302 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.0016 & 0.052 & 0.308 & 0.470 & 0.168 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.008 & 0.122 & 0.407 & 0.378 & 0.084 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0256 & 0.221 & 0.453 & 0.264 & 0.036 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.062 & 0.335 & 0.434 & 0.156 & 0.012 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.129 & 0.442 & 0.354 & 0.072 & 0.002 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.240 & 0.508 & 0.231 & 0.0204 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.4096 & 0.493 & 0.097 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.656 & 0.3439 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el vector de probabilidades de Y_4 está dado por

$$a_4 = a_0 P_1^4 = \begin{pmatrix} 0, & 0.001, & 0.063, & 0.432, & 0.504, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_4] &= \sum_{i=0}^{10} i a_i^{(4)} = a_1^{(4)} + 2a_2^{(4)} + 3a_3^{(4)} + 4a_4^{(4)} \\ &= 1(0.001) + 2(0.063) + 3(0.432) + 4(0.504) = 3.439.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y_4] &= \sum_{i=0}^{10} i^2 a_i^{(4)} - \left[\sum_{i=0}^{10} i a_i^{(4)}\right]^2 \\ &= (1(0.001) + 4(0.063) + 9(0.432) + 16(0.504)) - (3.439)^2 \\ &= 12.205 - 11.82672 = 0.37828.\end{aligned}$$

Esto nos dice que en una muestra de tamaño 4 se obtiene en promedio aproximadamente 3 tipos diferentes de unidades.

- Dada una muestra de tamaño $n = 6$, tenemos la siguiente matriz de transición de 6 pasos

$$P_1^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0.00001 & 0.0027 & 0.064 & 0.327 & 0.453 & 0.151 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000001 & 0.0005 & 0.021 & 0.176 & 0.423 & 0.317 & 0.060 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.00006 & 0.0053 & 0.075 & 0.305 & 0.411 & 0.181 & 0.020 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.0007 & 0.023 & 0.171 & 0.396 & 0.319 & 0.083 & 0.0050 & 0.000 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.004 & 0.069 & 0.292 & 0.409 & 0.196 & 0.0280 & 0.0007 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0156 & 0.155 & 0.399 & 0.335 & 0.088 & 0.005 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.046 & 0.283 & 0.441 & 0.205 & 0.023 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.117 & 0.433 & 0.374 & 0.074 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.262 & 0.538 & 0.199 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.531 & 0.468 \\ 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el vector de probabilidades de Y_6 está dado por

$$a_6 = a_0 P_1^6 = \begin{pmatrix} 0, & 0.00001, & 0.0027, & 0.0648, & 0.3276, & 0.4536, & 0.1512, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_6] &= \sum_{i=0}^{10} i a_i^{(6)} = a_1^{(6)} + 2a_2^{(6)} + 3a_3^{(6)} + 4a_4^{(6)} + 5a_5^{(6)} + 6a_5^{(6)} \\ &= 1(0.00001) + 2(0.00279) + 3(0.0648) + 4(0.3276) + 5(0.4536) \\ &\quad + 6(0.1512) = 4.68559.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y_6] &= \sum_{i=0}^{10} i^2 a_i^{(6)} - \left[\sum_{i=0}^{10} i a_i^{(6)}\right]^2 = 22.61917 - (4.68559)^2 \\ &= 22.61917 - 21.95475 = 0.66442.\end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Esto nos dice que en una muestra de tamaño 6 se obtiene en promedio aproximadamente 5 tipos diferentes de unidades.

3.5.4. Obtención de una muestra que contenga al menos m unidades de cada una de las N máquinas

Supongamos $m = 2$ y $N = 3$. Obtener una muestra que contenga al menos m unidades de cada una de las N máquinas es equivalente a obtener m colecciones de N cupones diferentes. Como se vió en la sección 3.4.1, el número esperado de realizaciones necesarias para obtener $m = 2$ colecciones de $N = 3$ cupones equiprobables es

$$k_{(0,0)} = 9.64.$$

Por lo que se requieren en promedio aproximadamente 10 unidades para obtener al menos $m = 2$ unidades de cada una de las $N = 3$ máquinas.

Por otro lado, los valores de $k_{(i,j)}$, con $3 \geq i \geq j \geq 0$, obtenidos en la sección 3.4.1, representan el número promedio de cupones necesarios para obtener las $m = 2$ colecciones de los $N = 3$ cupones diferentes cuando ya se tienen i y j cupones diferentes en la primera y segunda colección, respectivamente. Por lo que, por ejemplo, $k_{(2,1)} = 6.75$ representa el número esperado de unidades necesarias para obtener al menos $m = 2$ unidades de cada una de las $N = 3$ máquinas cuando ya se tienen unidades provenientes de 2 máquinas diferentes en la primera colección, y en la segunda colección se tienen unidades solo de una de las dos máquinas de la primera colección.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 4

Colección de cupones no equiprobables

En este capítulo abordaremos el segundo caso del problema del coleccionista de cupones, se trata del estudio de los cupones con probabilidades desiguales, con el objetivo de determinar el número esperado de cupones que se tienen que recolectar para completar una o más colecciones. Consideraremos a los diferentes tipos de cupones existentes como variables aleatorias independientes y además asumiremos que la probabilidad de adquirir cualesquiera de estos cupones no es constante; por p_k denotaremos a la probabilidad de obtener al cupón k-ésimo, para $k = 1, 2, \ldots, N$. En las secciones 4.1 y 4.2 se analiza el caso de una sola colección, mediante un cálculo directo y mediante la identidad de máximos-mínimos para obtener expresiones generales y explícitas para calcular el número esperado de cupones. En la sección 4.3 se presenta una comparación entre el número esperado para completar una colección cuando los cupones son igualmente probables y el número esperado para completar una colección cuando los cupones tienen probabilidades desiguales. En las secciones 4.4 y 4.5 se considera el caso de múltiples colecciones, mediante la identidad de máximos-mínimos y mediante cadenas de Markov. Finalmente, en la sección 4.6 se presenta un ejemplo de aplicación. Lo que veremos en este capítulo se basa en su mayoría en [12].

4.1. Análisis directo de una colección única

El problema del coleccionista de cupones está relacionado con el siguiente problema más general. Determinar, dada una distribución discreta, el tamaño mínimo de una muestra aleatoria de la distribución, necesario para observar un número dado de diferentes registros. El tamaño esperado de tal muestra se puede ver como un método alternativo para calcular el número esperado de cupones necesarios para completar una colección. Denotamos por $S = \{1, \ldots, N\}$ al conjunto de los posibles valores de esta distribución y por $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ al vector de probabilidades. Supongamos que los elementos son extraídos, en secuencia, aleatoriamente de esta distribución; las variables aleatorias en la muestra serán independientes y el resultado de cada una de ellas será igual a k con probabilidad p_k. Nuestro objetivo es calcular el número esperado de extracciones necesarias para obtener k diferentes realizaciones de la distribución dada.

Sea X_1 el número de extracciones necesarias para obtener un primer resultado de la distribución, sea X_2 el número aleatorio de extracciones adicionales para obtener un segundo

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

resultado, diferente al primero, y en general sea X_i el número de extracciones necesarias para pasar de $i-1$ a i resultados diferentes en la muestra, para cada $i \leq N$. Se sigue que el número aleatorio $X_N(k)$ de extracciones necesarias para obtener k diferentes resultados, se puede expresar como

$$X_N(k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k. \tag{4.1}$$

Veamos que $P(X_N(k) < \infty) = 1$. Denotemos por $j_1, \ldots, j_{i-1}$ a los primeros $i-1$ resultados diferentes en aparecer. Entonces por propiedades de la probabilidad condicional se tiene que

$$P(X_i > n) = \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1}} P(X_i > n | j_1, \ldots, j_{i-1}) \, P(j_1, \ldots, j_{i-1}).$$

Luego aplicando en ambos lados de la igualdad el límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_i > n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1}} P(X_i > n | j_1, \ldots, j_{i-1}) \, P(j_1, \ldots, j_{i-1}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1}} \lim_{n\to\infty} (p_{j_1} + \cdots + p_{j_{i-1}})^n \, P(j_1, \ldots, j_{i-1}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_{i-1}} 0 \, P(j_1, \ldots, j_{i-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $P(X_i = \infty) = \lim_{n\to\infty} P(X_i > n) = 0$ y por como está dado $X_N(k)$ en (4.1) obtenemos que $P(X_N(k) = \infty) = 0$, en consecuencia $P(X_N(k) < \infty) = 1$. Como hemos visto hasta ahora, este problema es muy similar al problema clásico del coleccionista de cupones, pero en ese caso las variables aleatorias X_i denotan al número de cupones que se necesitan comprar para pasar de tener $(i-1)$ a i tipos distintos de cupones en la colección, y $X_N(N)$ representa el número de cupones que se tiene que comprar para completar la colección.

En el caso de la distribución uniforme $p_k = \frac{1}{N}$, para cualquier $k \in \{1, \ldots, N\}$. La variable aleatoria X_i, para $i \in \{2, \ldots, N\}$, tiene ley geométrica con parámetro $\frac{N-i+1}{N}$, y por lo visto en la sección 3.1 se sigue que:

$$\mathbb{E}\left(X_N(k)\right) = N \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N-i+1}.$$

Ahora bien, cuando las probabilidades p_k son desiguales, se tiene que para calcular el valor esperado de las variables aleatorias X_i primero se deben calcular sus valores esperados condicionados a los $i-1$ tipos de cupones diferentes obtenidos previamente. Para simplificar la notación, definamos $p(i_1, \ldots, i_k) = 1 - p_{i_1} - \cdots - p_{i_k}$ (que representa la probabilidad de que no aparezcan ninguno de los k tipos de cupones $i_1, \ldots, i_k$), para $k \leq N$ y para distintos índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$. El siguiente resultado nos proporciona la expresión para los valores esperados de las X_i.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Proposición 4.1.1. *Para cualquier $k \in \{2, \ldots, N\}$, el valor esperado de X_k está dado por*

$$\mathbb{E}[X_k] = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_{k-1}=1}^{N} \frac{p_{i_1} \cdots p_{i_{k-1}}}{p(i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})},$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}[X_N(k)] = \sum_{s=1}^{k} \mathbb{E}[X_s] = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i_1}}{p(i_1)} + \sum_{i_1 \neq i_2=1}^{N} \frac{p_{i_1}p_{i_2}}{p(i_1)p(i_1,i_2)} + \cdots + \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1}=1}^{N} \frac{p_{i_1} \cdots p_{i_{k-1}}}{p(i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})}. \quad (4.2)$$

Demostración. Para calcular el valor esperado de la variable X_k, primero tomaremos la esperanza de la esperanza condicional de X_k, dadas $Z_1, \ldots, Z_{k-1}$, donde Z_i para $i = 1, \ldots, k-1$ denota el i-ésimo tipo de cupón distinto coleccionado.
Empecemos evaluando $\mathbb{E}[X_2]$. Consideremos X_2 condicionada a $Z_1 = i$ (que el primer cupón sea del tipo i), es decir $X_2|Z_1 = i$, la cual tiene una distribución geométrica con parámetro $1-p_i = p(i)$, por lo que $\mathbb{E}[X_2|Z_1 = i] = \frac{1}{p(i)}$. Así, por propiedades de la esperanza condicional se sigue que

$$\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_2|Z_1]] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_2|Z_1 = i]\mathbb{P}[Z_1 = i] = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{p(i)}.$$

Ahora tomaremos $k \in \{3, \ldots, N\}$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}]] \\ &= \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1}=1}^{N} \mathbb{E}[X_k|Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}] \times \mathbb{P}[Z_1 = i_1, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}].\end{aligned}$$

Nótese que para cualesquiera $i \neq j$, $P[Z_i = Z_j] = 0$ (ya que Z_i es el i-ésimo tipo de cupón obtenido diferente a Z_j que es el j-ésimo tipo de cupón obtenido). La distribución condicional de $X_k|Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}$, para $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1}$, es la de una variable geométrica con parámetro $p(i_1, \ldots, i_{k-1})$. Por lo que su esperanza está dada por

$$\mathbb{E}[X_k|Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}] = \frac{1}{p(i_1, \ldots, i_{k-1})}.$$

Luego por la regla de la multiplicación obtenemos

$$\begin{aligned}P[Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}] &= P[Z_1 = i_1] \times P[Z_2 = i_2|Z_1 = i_1] \times \cdots \\ &\quad \times P[Z_{k-1} = i_{k-1}|Z_1 = i_1, \ldots, Z_{k-2} = i_{k-2}].\end{aligned}$$

Nótese que aún cuando los tipos sucesivos de cupones son independientes, se tiene que las variables aleatorias Z_i no son mutuamente independientes (debido a que las Z_i tienen que ser diferentes). No es complicado ver que para cualquier $s = 2, \ldots, k-1$, se cumple que

$$P[Z_s = i_s|Z_1 = i_1, \ldots, Z_{s-1} = i_{s-1}] = \frac{p_{i_s}}{1 - p_{i_1} - \cdots - p_{i_{s-1}}}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
México.

si $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1}$ y cero en otro caso. Recordando la notación compacta $p(i_1, \ldots, i_k) = 1 - p_{i_1} - \cdots - p_{i_k}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} P[Z_1 = i_1, \ldots, Z_{k-1} = i_{k-1}] &= p_{i_1} \cdot \frac{p_{i_2}}{1 - p_{i_1}} \cdots \frac{p_{i_{k-1}}}{1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \cdots - p_{i_{k-2}}} \\ &= p_{i_1} \cdot \frac{p_{i_2}}{p(i_1)} \cdots \frac{p_{i_{k-1}}}{p(i_1, i_2, \ldots, i_{k-2})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_k] &= \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1} = 1}^{N} \frac{1}{p(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})} \times \left(p_{i_1} \cdot \frac{p_{i_2}}{p(i_1)} \cdots \frac{p_{i_{k-1}}}{p(i_1, i_2, \ldots, i_{k-2})} \right) \\ &= \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_{k-1} = 1}^{N} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_{k-1}}}{p(i_1) p(i_1, i_2) \cdots p(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})}. \end{aligned}$$

Así, la prueba queda concluida. ■

Observación 4.1.2. *Nótese que cuando $k = N$ la expresión (4.2) nos da el número esperado de cupones necesarios para completar una colección.*

4.2. Análisis de una colección mediante la identidad de máximos-mínimos

El problema del coleccionista de cupones con probabilidades desiguales, se puede analizar usando diversos métodos y herramientas matemáticas. En esta sección usaremos la identidad de máximos-mínimos para encontrar el número esperado de cupones que son necesarios para completar una colección. Para esto denotaremos por X_i al número aleatorio de cupones que necesitamos comprar para obtener el primer cupón del tipo i. Estamos interesados en conocer el tiempo esperado para completar la colección, el cual estará dado por la variable aleatoria $X = \max(X_1, \ldots, X_N)$, esto se debe a que por ejemplo, si $x_1 = 50$ es el máximo entre los x_i's quiere decir que se hicieron 50 compras para obtener el primer cupón del tipo 1, sin embargo para este punto ya se habían obtenido el resto de los cupones puesto que fue necesario una cantidad menor de compras para obtenerlos.

Nótese que X_i es una variable aleatoria geométrica con parámetro p_i (ya que estamos interesados en el número de realizaciones hasta que aparezca el primer cupón del tipo i cuya probabilidad es p_i), pero ahora estas variables no son independientes. Como el mínimo de X_i y X_j es el número de cupones necesarios para obtener, o bien, un cupón del tipo i o un cupón del tipo j, se sigue que para $i \neq j$, $\min(X_i, X_j)$ también es una variable aleatoria geométrica con parámetro $p_i + p_j$, y lo mismo es cierto para el mínimo de cualquier número finito de estas variables aleatorias. De esta manera ya tenemos los elementos suficientes para calcular el valor esperado de la variable aleatoria X mediante la identidad de máximos-mínimos vista en la proposición 1.3.15. Así, se tiene que

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\text{máx}_{i=1\dots,N} X_i\right] &= \sum_i \mathbb{E}[X_i] - \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\text{mín}(X_i, X_j)\right] + \\ &\quad \sum_{i<j<k} \mathbb{E}\left[\text{mín}(X_i, X_j, X_k)\right] - \cdots + (-1)^{N+1}\mathbb{E}\left[\text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_N)\right] \\ &= \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i + p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i + p_j + p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 + \cdots + p_N}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Recordemos que

$$\int_0^\infty e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Usando este resultado se tiene que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \int_0^{+\infty} e^{-p_i x} dx - \sum_{i<j} \int_0^{+\infty} e^{-(p_i+p_j)x} dx + \cdots + (-1)^{N+1} \int_0^{+\infty} e^{-(p_1+\cdots+p_N)x} dx.$$

Usando la linealidad de la integral se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} \sum_i e^{-p_i x} dx - \int_0^{+\infty} \sum_{i<j} e^{-(p_i+p_j)x} dx + \cdots + (-1)^{N+1} \int_0^{+\infty} e^{-(p_1+\cdots+p_N)x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_i e^{-p_i x} - \sum_{i<j} e^{-(p_i+p_j)x} + \cdots + (-1)^{N+1} e^{-(p_1+\cdots+p_N)x} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - e^{-p_i x}\right) \right) dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X]$ se puede expresar en la forma equivalente

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^{N} \left(1 - e^{-p_i x}\right) \right) dx.$$

Comentario 4.2.1. *Así como en el caso de cupones equiprobables, en el caso de cupones no equiprobables es posible calcular el número esperado de tipos diferentes de cupones que son obtenidos en una muestra de tamaño n. Este número esperado se puede calcular usando la siguiente expresión dada en [11],*

$$N - \sum_{i=1}^{N} (1 - p_i)^n. \tag{4.4}$$

4.3. Comparación de los casos con probabilidades iguales y desiguales

En esta sección vamos a denotar por $X_{\left(\frac{1}{N},\cdots,\frac{1}{N}\right)}$ al número aleatorio de cupones que tenemos que comprar para completar la colección cuando la probabilidad de adquirir cada cupón es la

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

misma para todos los cupones y por $X_{(p_1,\ldots,p_N)}$ al número aleatorio de cupones que tenemos que comprar para completar la colección para el caso en que los cupones tienen probabilidades distintas de aparecer, dadas por $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Recordemos que las esperanzas de la variables aleatorias anteriores están dadas de la siguiente manera

$$\mathbb{E}[X_{(\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N})}] = N\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i},$$
$$\mathbb{E}[X_{(p_1,\ldots,p_N)}] = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j}\frac{1}{p_i+p_j} + \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{p_1+\ldots+p_N}.$$

Introduciremos ahora una notación estándar que nos permitirá concluir que es más difícil coleccionar todos los tipos de cupones si existe un sesgo para la probabilidad de ocurrencia de los cupones, es decir, en el caso en que los cupones tienen probabilidades distintas de aparecer. Sea $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ una distribución, definamos a $p_{[j]}$ como el valor j-ésimo más grande del conjunto de probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$, esto es, $p_{[1]} \geq p_{[2]} \geq \cdots \geq p_{[N]}$. Ahora bien, diremos que una distribución $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ es mayorizada por una distribución $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, y escribimos $p \prec q$, si $\sum_{i=1}^{k} p_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} q_{[i]}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *La distribución uniforme es mayorizada por cualquier distribución* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, *es decir,* $\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right) \prec p$.

Demostración. Sea $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ una distribución, es decir, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Entonces, en vista de que $p_{[N]} \leq \cdots \leq p_{[2]} \leq p_{[1]}$ se satisface la desigualdad $p_{[1]} \geq \frac{1}{N}$. De lo contrario, $p_{[1]} < \frac{1}{N}$ implica que $p_{[j]} < \frac{1}{N}$ para toda $1 \leq j \leq N$; y por consiguiente,

$$\sum_{j=1}^{N} p_{[j]} < \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N} = 1,$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = \sum_{j=1}^{N} p_{[j]} < 1,$$

contradiciendo que p es una distribución. Ahora bien, supongamos que existe $1 \leq k \leq N-1$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} p_{[i]} < \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N} = \frac{k}{N}, \tag{4.5}$$

por lo que

$$1 = \sum_{i=1}^{N} p_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} p_{[i]} + \sum_{i=k+1}^{N} p_{[i]} < \frac{k}{N} + \sum_{i=k+1}^{N} p_{[i]},$$

$$1 < \frac{k}{N} + \sum_{i=k+1}^{N} p_{[i]}.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

De esta desigualdad observamos que debe existir $j \in \{k+1, \ldots, N\}$ para el cual $p_{[j]} > \frac{1}{N}$. En efecto, si para toda $j \in \{k+1, \ldots, N\}$, $p_{[j]} \leq \frac{1}{N}$, se deduce que

$$\sum_{j=k+1}^{N} p_{[j]} \leq \sum_{j=k+1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{N-k}{N}$$

y en consecuencia, por (4.5),

$$1 = \sum_{i=1}^{N} p_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} p_{[i]} + \sum_{i=k+1}^{N} p_{[i]} < \frac{k}{N} + \frac{N-k}{N} = \frac{k+N-k}{N} = 1,$$

por lo que se tiene una contradicción. Por otro lado, dado que $p_{[j]} > \frac{1}{N}$ para algún $j \in \{k+1, \ldots, N\}$, se cumple que

$$\frac{1}{N} < p_{[j]} \leq p_{[j-1]} \leq p_{[j-2]} \leq \cdots \leq p_{[k]} \leq p_{[k-1]} \leq \cdots \leq p_{[2]} \leq p_{[1]}.$$

En particular, $\frac{1}{N} < p_{[k]} \leq p_{[k-1]} \leq \cdots \leq p_{[1]}$, lo que implica que $\frac{k}{N} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N} \leq \sum_{i=1}^{k} p_{[i]}$, es decir, contradice nuestra suposición. Por lo tanto, para toda $1 \leq k \leq N-1$,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N} \leq \sum_{i=1}^{k} p_{[i]}.$$

Esto prueba que $\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right) \prec p$, para toda distribución $p = (p_1, \ldots, p_N)$. ■

A continuación daremos algunas definiciones y resultados interesantes, los cuales pueden ser consultados en [17].

Definición 4.3.2. *Diremos que una función $f(p)$ definida en una distribución es simétrica, si para cualquier distribución $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ se cumple que $f(p) = f(p')$, para toda permutación $p' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_N)$ de $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$.*

Definición 4.3.3. *Una función simétrica $f(p)$ definida en una distribución es **convexa de Schur** si $p \prec q$ implica que $f(p) \leq f(q)$ y **concava de Schur** si $p \prec q$ implica que $f(p) \geq f(q)$.*

Definición 4.3.4. *Una variable aleatoria X es **estocásticamente más pequeña** que una variable aleatoria Y si $P(X > a) \leq P(Y > a)$ para todo número real a.*

Teorema 4.3.5. *La probabilidad $P(X_p \leq n)$ es una función concava de Schur de p.*

Corolario 4.3.6. *Si $p \prec q$, entonces X_p es estocásticamente más pequeña que X_q. En particular $X_{\left(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}\right)}$ es estocásticamente más pequeña que X_p para todo p.*

Corolario 4.3.7. *La esperanza $\mathbb{E}\left[X_p\right]$ es una función convexa de Shur de p. En particular $\mathbb{E}\left[X_{\left(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}\right)}\right] \leq \mathbb{E}\left[X_{(p_1, p_2, \ldots, p_N)}\right]$ para todo p.*

Los corolarios 4.3.6 y 4.3.7 establecen que es más difícil completar una colección de N cupones cuando éstos tienen probabilidades desiguales de aparecer que cuando todos son igualmente probables.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Ejemplo 4.3.8. *Comparación de las esperanzas con probabilidades iguales y desiguales.*

- $N=2$, $\quad \mathbb{E}\left[X_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right]=3.$

$$p_1=\frac{1}{3},\ p_2=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2)}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1+p_2}=\frac{7}{2}=3.5.$$

$$p_1=\frac{1}{6},\ p_2=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2)}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1+p_2}=\frac{31}{5}=6.2.$$

- $N=3$, $\quad \mathbb{E}\left[X_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\right]=5.5.$

$$p_1=\frac{1}{4},\ p_2=\frac{1}{2},\ p_3=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2,p_3)}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1+p_2}$$
$$-\frac{1}{p_1+p_3}-\frac{1}{p_2+p_3}+\frac{1}{p_1+p_2+p_3}=\frac{19}{3}\approx 6.3.$$

$$p_1=\frac{1}{6},\ p_2=\frac{2}{6},\ p_3=\frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2,p_3)}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1+p_2}$$
$$-\frac{1}{p_1+p_3}-\frac{1}{p_2+p_3}+\frac{1}{p_1+p_2+p_3}=7.3\approx 7.$$

4.4. Análisis de múltiples colecciones mediante máximos-mínimos

Supongamos que deseamos completar m colecciones de N cupones para el caso de probabilidades desiguales. Denotamos por X_1 al número aleatorio de cupones que necesitamos colectar para obtener las primeras m copias del cupón del tipo 1, y X_2 como el número de cupones que necesitamos recolectar para obtener las primeras m copias del cupón del tipo 2. En general X_i es el número de objetos que necesitamos recolectar para obtener las primeras m copias del cupón del tipo i; el tiempo esperado para completar las m colecciones está dado por la variable aleatoria

$$X=\max(X_1,\ldots,X_N).$$

Para calcular $\mathbb{E}[X]$ usaremos la identidad de máximos-mínimos, como en el caso de una sola colección. Tenemos que

$$\mathbb{E}[X]=\sum_i \mathbb{E}[X_i]-\sum_{i<j}\mathbb{E}[\min(X_i,X_j)]+\sum_{i<j<k}\mathbb{E}[\min(X_i,X_j,X_k)]+\cdots$$
$$+(-1)^{N+1}\mathbb{E}[\min(X_1,X_2,\ldots,X_N)].$$

Notemos que la variable aleatoria X_i tiene distribución binomial negativa con parámetros (m,p_i), por lo tanto $\mathbb{E}[X_i]=\frac{m}{p_i}$, pero no es posible calcular la distribución exacta de las variables aleatorias $\min_{i<j}(X_i,X_j)$, $\min_{i<j<k}(X_i,X_j,X_k)$, …(debido a que las X_i no son independientes); sin embargo es posible probar que, para $i\neq j$

$$\mathbb{E}[T(i,j;2)]\leq \mathbb{E}[\min(X_i,X_j)]\leq \mathbb{E}[Z(i,j;2)],$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

donde $T(i,j;2)$ tiene distribución binomial negativa con parámetros (m, p_i+p_j) y $Z(i,j,2)$ tiene distribución binomial negativa con parámetros $(N(m-1)+1, p_i+p_j)$.

Para ver lo anterior, sea $T(i,j;2)$ el tiempo mínimo para obtener m cupones del tipo i o j, para $i,j=1,2,\ldots,N$, $i\neq j$. Notemos que $T(i,j;2)\sim \mathrm{BN}(m,p_i+p_j)$. Obsérvese que $T(i,j;2)\leq X_i$ y $T(i,j;2)\leq X_j$; esto implica que $T(i,j;2)\leq \min(X_i,X_j)$, por lo que $\mathbb{E}(T(i,j;2))\leq \mathbb{E}(\min(X_i,X_j))$. Esto muestra la primera parte de la desigualdad. En general, se tiene que $E(T(i_1,\ldots,i_k;k))\leq E(\min(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}))$.

Ahora mostraremos que

$$\mathbb{E}[\min(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})]\leq \mathbb{E}[Z(i_1,\ldots,i_k;k)]$$

para alguna variable aleatoria $Z(i_1,\ldots,i_k;k)\sim \mathrm{BN}(N(m-1)+1,p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_k})$. Cuando $Y=\min(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})$, al tiempo Y tenemos m copias de solo uno de los tipos de cupones $i_1,i_2,\ldots,i_k$ y a lo más $m-1$ copias de los $k-1$ tipos de cupones restantes. En total tenemos a lo más $(k-1)(m-1)+m$ cupones de alguno de los tipos $i_1,i_2,\ldots,i_k$. Obsérvese que

$$(k-1)(m-1)+m=(k-1)(m-1)+(m-1)+1=k(m-1)+1\leq N(m-1)+1,$$

por lo que

$$\min(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})\leq Z(i_1,i_2,\ldots,i_k;k),$$

donde $Z(i_1,i_2,\ldots,i_k;k)$ es el tiempo mínimo para obtener $N(m-1)+1$ cupones de alguno de los tipos $i_1,i_2,\ldots,i_k$, y notemos que tiene distribución $\mathrm{BN}(N(m-1)+1,p_{i_1}+\cdots+p_{i_k})$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}(\min(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}))\leq \mathbb{E}(Z(i_1,\ldots,i_k;k)).$$

Es decir, para $2\leq k\leq N$,

$$\mathbb{E}[T(i_1,i_2,\ldots,i_k;k)]\leq \mathbb{E}[\min(X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_k})]\leq \mathbb{E}[Z(i_1,i_2,\ldots,i_k;k)],$$

donde $T(i_1,i_2,\ldots,i_k;k)\sim \mathrm{BN}(m,p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_k})$ y $Z(i_1,i_2,\ldots,i_k;k)\sim \mathrm{BN}(N(m-1)+1,p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_k})$. Usando esta consideración podemos dar una cota superior de $\mathbb{E}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]&\leq \sum_i \mathbb{E}[X_i]-\sum_{i<j}\mathbb{E}[T(i,j;2)]+\sum_{i<j<k}\mathbb{E}[Z(i,j,k;3)]-\sum_{i<j<k<l}\mathbb{E}[T(i,j,k,l;4)]+\cdots\\&=\sum_i\frac{m}{p_i}-\sum_{i<j}\frac{m}{p_i+p_j}+\sum_{i<j<k}\frac{N(m-1)+1}{p_i+p_j+p_k}-\sum_{i<j<k<l}\frac{m}{p_i+p_j+p_k+p_l}+\cdots.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.1. *A continuación vamos a comparar algunos tiempos esperados ya obtenidos en el capítulo anterior para el caso de probabilidades uniformes con esta cota superior previamente encontrada para el tiempo esperado que se necesita para completar múltiples colecciones con probabilidades desiguales.*

- $m=1,\ N=2,\ p_1=p_2=\frac{1}{2}$

$$3=\mathbb{E}[X]\leq \tfrac{1}{p_1}+\tfrac{1}{p_2}-\tfrac{1}{p_1+p_2}=2+2-1=3.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

- $m = 1$, $N = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 5.5 = \mathbb{E}[X] &\leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \left(\frac{1}{p_1+p_2} + \frac{1}{p_1+p_3} + \frac{1}{p_2+p_3}\right) + \frac{3(1-1)+1}{p_1+p_2+p_3} \\ &= 3 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2} = 5.5. \end{aligned}$$

- $m = 2$, $N = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$5.5 = \mathbb{E}[X] \leq \frac{2}{p_1} + \frac{2}{p_2} - \frac{2}{p_1+p_2} = (2 \cdot 2 \cdot 2) - 2 = 6.$$

- $m = 2$, $N = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 9.64 \approx \mathbb{E}[X] &\leq \frac{2}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \frac{2}{p_3} - \left(\frac{2}{p_1+p_2} + \frac{2}{p_1+p_3} + \frac{2}{p_2+p_3}\right) + \frac{3(2-1)+1}{p_1+p_2+p_3} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 = 13. \end{aligned}$$

Hallaremos ahora el valor de las cotas correspondientes a cada tiempo esperado para colecciones particulares con probabilidades desiguales.

- $m = 2$, $N = 2$, $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{2}{3}$

$$\mathbb{E}[X] \leq \frac{2}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{2}{3}} - \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 6 + 3 - 2 = 7.$$

- $m = 2$, $N = 2$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{E}[X] \leq \frac{2}{\frac{1}{6}} + \frac{2}{\frac{5}{6}} - \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}} = 12 + \frac{12}{5} - 2 = \frac{62}{5} = 12.4.$$

- $m = 2$, $N = 3$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &\leq \frac{2}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{1}{6}} - \left(\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} + \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right) + \frac{3(2-1)+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 4 + 6 + 12 - \frac{12}{5} - 3 - 4 + 4 = \frac{83}{5} = 16.6. \end{aligned}$$

- $m = 2$, $N = 3$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = \frac{3}{8}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &\leq \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\frac{3}{8}} + \frac{2}{\frac{3}{8}} - \left(\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}} + \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}} + \frac{2}{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}}\right) + \frac{3(2-1)+1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}} \\ &= 8 + 2 \cdot \frac{16}{3} - 2 \cdot \frac{16}{5} - \frac{8}{3} + 4 = \frac{68}{5} = 13.6. \end{aligned}$$

4.5. Análisis de múltiples colecciones mediante cadenas de Markov

En esta sección, usando cadenas de Markov, vamos a trabajar únicamente con dos colecciones de N cupones con probabilidades desiguales. En general, en este contexto, denotando por X_n a los tipos distintos de cupones en las colecciones después de n adquisiciones, se tiene que $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, cuyo espacio de estados está determinado por los distintos tipos de cupones que tienen las colecciones.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Primeramente vamos a considerar que las colecciones son de $N = 2$ tipos distintos de cupones. Sea I_1 la variable aleatoria que toma el valor 1 si el primer coleccionista tiene al menos un cupón del tipo 1, y toma el valor 0 en otro caso; sea I_2 la variable aleatoria que toma el valor 1 si el primer coleccionista tiene al menos un cupón del tipo 2, y toma el valor 0 en otro caso. De forma análoga se definen las variables aleatorias J_1 y J_2 para el segundo coleccionista. Denotando por $i_1,\ i_2,\ j_1,\ j_2$ a los valores de las variables $I_1,\ I_2,\ J_1,\ J_2$, respectivamente, tenemos que el espacio de estados de la cadena de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ está dado por $S_{D22} = \{(i_1, i_2|j_1, j_2) : i_1 \geq j_1,\ i_2 \geq j_2,\ i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1\}$. Más específcamente, el espacio de estados es

$$\begin{aligned} S_{D22} = \big\{&(0,0|0,0), (1,0|0,0), (0,1|0,0), (1,1|0,0), (1,0|1,0), \\ &(0,1|0,1), (1,1|1,0), (1,1|0,1), (1,1|1,1)\big\}. \end{aligned}$$

Denotamos por p_1 a la probabilidad de conseguir un cupón del tipo 1 y por $p_2 = 1 - p_1$ a la probabilidad de conseguir un cupón del tipo 2. Entonces la matriz de transición para esta cadena está dada por

$$P_{D22} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que ya se tiene la matriz de transición y el único estado absorbente de la cadena es $(1,1|1,1)$, podemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} k_{(1,1|1,1)} = 0, \\ k_i = 1 + \sum_{j \neq (1,1|1,1)} p_{ij} k_j, \quad i \neq (1,1|1,1), \end{cases}$$

para así encontrar el tiempo que tarda la cadena $\{X_n, n \geq 0\}$ en alcanzar este estado absorbente, que es equivalente al tiempo esperado que se necesita para completar las dos colecciones de dos cupones distintos con probabilidades desiguales. Después de algunos cálculos obtenemos lo siguiente:

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$\begin{cases} k_{(0,0|0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0|0,0)} + p_2 k_{(0,1|0,0)} \\ k_{(1,0|0,0)} = 1 + p_2 k_{(1,1|0,0)} + p_1 k_{(1,0|1,0)} \\ k_{(0,1|0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1|0,0)} + p_2 k_{(0,1|0,1)} \\ k_{(1,1|0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1|1,0)} + p_2 k_{(1,1|0,1)} \\ k_{(1,0|1,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0|1,0)} + p_2 k_{(1,1|1,0)} \\ k_{(0,1|0,1)} = 1 + p_1 k_{(1,1|0,1)} + p_2 k_{(0,1|0,1)} \\ k_{(1,1|1,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1|1,0)} + p_2 k_{(1,1|1,1)} \\ k_{(1,1|0,1)} = 1 + p_2 k_{(1,1|0,1)} + p_1 k_{(1,1|1,1)} \\ k_{(1,1|1,1)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_{(1,1|1,1)} = 0 \\ k_{(1,1|0,1)} = \frac{1}{p_1} \\ k_{(1,1|1,0)} = \frac{1}{1-p_1} \\ k_{(0,1|0,1)} = \frac{2}{p_1} \\ k_{(1,0|1,0)} = \frac{2}{1-p_1} \\ k_{(1,1|0,0)} = \frac{(1-p_1)+p_1^2}{p_1(1-p_1)} \\ k_{(0,1|0,0)} = \frac{2(1-p_1)+p_1^3}{p_1(1-p_1)} \\ k_{(1,0|0,0)} = \frac{-p_1^3+3p_1^2-p_1+1}{p_1(1-p_1)} \\ k_{(0,0|0,0)} = \frac{2p_1^4-4p_1^3+2p_1-2}{p_1(1-p_1)}. \end{cases}$$

Por lo que el tiempo esperado para completar las dos colecciones con $N = 2$ cupones con probabilidades desiguales es

$$k_{(0,0|0,0)} = \frac{2p_1^4 - 4p_1^3 + 2p_1 - 2}{p_1(p_1 - 1)}. \tag{4.6}$$

Consideremos ahora el caso de $N = 3$ cupones con probabilidades desiguales. Análogamente al caso anterior, se definen las variables I_1, I_2, I_3 para el primer coleccionista, y se definen las variables J_1, J_2, J_3 para el segundo coleccionista. Por lo que, el espacio de estados correspondiente a la cadena de Markov que modela este problema se expresa por $S_{D23} = \{(i_1, i_2, i_3|j_1, j_2, j_3) : i_1 \geq j_1,\ i_2 \geq j_2,\ i_3 \geq j_3,\ i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3 = 0, 1\}$, específicamente

$$\begin{aligned} S_{D23} = \big\{ & (0,0,0|0,0,0), (1,0,0|0,0,0), (0,1,0|0,0,0), (0,0,1|0,0,0), \\ & (1,0,0|1,0,0), (1,1,0|0,0,0), (1,0,1|0,0,0), (0,1,0|0,1,0), \\ & (0,1,1|0,0,0), (0,0,1|0,0,1), (1,1,0|1,0,0), (1,0,1|1,0,0), \\ & (1,1,0|0,1,0), (1,1,1|0,0,0), (1,0,1|0,0,1), (0,1,1|0,1,0), \\ & (0,1,1|0,0,1), (1,1,0|1,1,0), (1,1,1|1,0,0), (1,0,1|1,0,1), \\ & (1,1,1|0,1,0), (1,1,1|0,0,1), (0,1,1|0,1,1), (1,1,1|1,1,0), \\ & (1,1,1|1,0,1), (1,1,1|0,1,1), (1,1,1|1,1,1)\big\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, denotaremos por p_1 a la probabilidad de obtener un cupón del tipo 1, p_2 a la probabilidad de obtener un cupón del tipo 2 y $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ a la probabilidad de obtener un cupón del tipo 3. Con esta información, obtenemos las siguientes probabilidades de transición.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Fila 1	Fila 2	Fila 3
$p_{(0,0,0\|0,0,0)(1,0,0\|0,0,0)} = p_1$	$p_{(1,0,0\|0,0,0)(1,0,0\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(0,1,0\|0,0,0)(1,1,0\|0,0,0)} = p_1$
$p_{(0,0,0\|0,0,0)(0,1,0\|0,0,0)} = p_2$	$p_{(1,0,0\|0,0,0)(1,1,0\|0,0,0)} = p_2$	$p_{(0,1,0\|0,0,0)(0,1,0\|0,1,0)} = p_2$
$p_{(0,0,0\|0,0,0)(0,0,1\|0,0,0)} = p_3$	$p_{(1,0,0\|0,0,0)(1,0,1\|0,0,0)} = p_3$	$p_{(0,1,0\|0,0,0)(0,1,1\|0,0,0)} = p_3$
Fila 4	Fila 5	Fila 6
$p_{(0,0,1\|0,0,0)(1,0,1\|0,0,0)} = p_1$	$p_{(1,0,0\|1,0,0)(1,0,0\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(1,1,0\|0,0,0)(1,1,0\|1,0,0)} = p_1$
$p_{(0,0,1\|0,0,0)(0,1,1\|0,0,0)} = p_2$	$p_{(1,0,0\|1,0,0)(1,1,0\|1,0,0)} = p_2$	$p_{(1,1,0\|0,0,0)(1,1,0\|0,1,0)} = p_2$
$p_{(0,0,1\|0,0,0)(0,0,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(1,0,0\|1,0,0)(1,0,1\|1,0,0)} = p_3$	$p_{(1,1,0\|0,0,0)(1,1,1\|0,0,0)} = p_3$
Fila 7	Fila 8	Fila 9
$p_{(1,0,1\|0,0,0)(1,0,1\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(0,1,0\|0,1,0)(0,1,0\|0,1,0)} = p_2$	$p_{(0,1,1\|0,0,0)(1,1,1\|0,0,0)} = p_1$
$p_{(1,0,1\|0,0,0)(1,1,1\|0,0,0)} = p_2$	$p_{(0,1,0\|0,1,0)(1,1,0\|0,1,0)} = p_1$	$p_{(0,1,1\|0,0,0)(0,1,1\|0,1,0)} = p_2$
$p_{(1,0,1\|0,0,0)(1,0,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(0,1,0\|0,1,0)(0,1,1\|0,1,0)} = p_3$	$p_{(0,1,1\|0,0,0)(0,1,1\|0,0,1)} = p_3$
Fila 10	Fila 11	Fila 12
$p_{(0,0,1\|0,0,1)(0,0,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(1,1,0\|1,0,0)(1,1,0\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(1,0,1\|1,0,0)(1,0,1\|1,0,0)} = p_1$
$p_{(0,0,1\|0,0,1)(1,0,1\|0,0,1)} = p_1$	$p_{(1,1,0\|1,0,0)(1,1,0\|1,1,0)} = p_2$	$p_{(1,0,1\|1,0,0)(1,1,1\|1,0,0)} = p_2$
$p_{(0,0,1\|0,0,1)(0,1,1\|0,0,1)} = p_2$	$p_{(1,1,0\|1,0,0)(1,1,1\|1,0,0)} = p_3$	$p_{(1,0,1\|1,0,0)(1,0,1\|1,0,1)} = p_3$
Fila 13	Fila 14	Fila 15
$p_{(1,1,0\|0,1,0)(1,1,0\|0,1,0)} = p_2$	$p_{(1,1,1\|0,0,0)(1,1,1\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(1,0,1\|0,0,1)(1,0,1\|0,0,1)} = p_3$
$p_{(1,1,0\|0,1,0)(1,1,0\|1,1,0)} = p_1$	$p_{(1,1,1\|0,0,0)(1,1,1\|0,1,0)} = p_2$	$p_{(1,0,1\|0,0,1)(1,0,1\|1,0,1)} = p_1$
$p_{(1,1,0\|0,1,0)(1,1,1\|0,1,0)} = p_3$	$p_{(1,1,1\|0,0,0)(1,1,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(1,0,1\|0,0,1)(1,1,1\|0,0,1)} = p_2$
Fila 16	Fila 17	Fila 18
$p_{(0,1,1\|0,1,0)(0,1,1\|0,1,0)} = p_2$	$p_{(0,1,1\|0,0,1)(0,1,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(1,1,0\|1,1,0)(1,1,0\|1,1,0)} = p_1 + p_2$
$p_{(0,1,1\|0,1,0)(1,1,1\|0,1,0)} = p_1$	$p_{(0,1,1\|0,0,1)(1,1,1\|0,0,1)} = p_1$	$p_{(1,1,0\|1,1,0)(1,1,1\|1,1,0)} = p_3$
$p_{(0,1,1\|0,1,0)(0,1,1\|0,1,1)} = p_3$	$p_{(0,1,1\|0,0,1)(0,1,1\|0,1,1)} = p_2$	
Fila 19	Fila 20	Fila 21
$p_{(1,1,1\|1,0,0)(1,1,1\|1,0,0)} = p_1$	$p_{(1,0,1\|1,0,1)(1,0,1\|1,0,1)} = p_1 + p_3$	$p_{(1,1,1\|0,1,0)(1,1,1\|0,1,0)} = p_2$
$p_{(1,1,1\|1,0,0)(1,1,1\|1,1,0)} = p_2$	$p_{(1,0,1\|1,0,1)(1,1,1\|1,0,1)} = p_2$	$p_{(1,1,1\|0,1,0)(1,1,1\|1,1,0)} = p_1$
$p_{(1,1,1\|1,0,0)(1,1,1\|1,0,1)} = p_3$		$p_{(1,1,1\|0,1,0)(1,1,1\|0,1,1)} = p_3$
Fila 22	Fila 23	Fila 24
$p_{(1,1,1\|0,0,1)(1,1,1\|0,0,1)} = p_3$	$p_{(0,1,1\|0,1,1)(0,1,1\|0,1,1)} = p_2 + p_3$	$p_{(1,1,1\|1,1,0)(1,1,1\|1,1,0)} = p_1 + p_2$
$p_{(1,1,1\|0,0,1)(1,1,1\|1,0,1)} = p_1$	$p_{(0,1,1\|0,1,1)(1,1,1\|0,1,1)} = p_1$	$p_{(1,1,1\|1,1,0)(1,1,1\|1,1,1)} = p_3$
$p_{(1,1,1\|0,0,1)(1,1,1\|0,1,1)} = p_2$		
Fila 25	Fila 26	Fila 27
$p_{(1,1,1\|1,0,1)(1,1,1\|1,0,1)} = p_1 + p_3$	$p_{(1,1,1\|0,1,1)(1,1,1\|0,1,1)} = p_2 + p_3$	$p_{(1,1,1\|1,1,1)(1,1,1\|1,1,1)} = 1$
$p_{(1,1,1\|1,0,1)(1,1,1\|1,1,1)} = p_2$	$p_{(1,1,1\|0,1,1)(1,1,1\|1,1,1)} = p_1$	

Es importante mencionar que estas 27 filas conforman la matriz de transición del espacio de estados S_{D23}, las probabilidades restantes omitidas se dan por entendido que son nulas y no aportan un valor significativo para la resolución del siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} k_{(1,1,1|1,1,1)} = 0, \\ k_i = 1 + \sum_{j \neq (1,1,1|1,1,1)} p_{ij} k_j, \quad i \neq (1,1,1|1,1,1). \end{cases}$$

Con este sistema de ecuaciones podemos encontrar el tiempo esperado para llegar al estado absorbente $(1,1,1|1,1,1)$ y con esto encontrar el tiempo esperado para completar las dos

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

colecciones con $N = 3$ cupones con probabilidades desiguales. Realizando algunos cálculos obtenemos

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

$$
\begin{cases}
k_{(0,0,0|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,0|0,0,0)} + p_2 k_{(0,1,0|0,0,0)} + p_3 k_{(0,0,1|0,0,0)} \\
k_{(1,0,0|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,0|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,0|0,0,0)} + p_3 k_{(1,0,1|0,0,0)} \\
k_{(0,1,0|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,0|0,0,0)} + p_2 k_{(0,1,0|0,1,0)} + p_3 k_{(0,1,1|0,0,0)} \\
k_{(0,0,1|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,1|0,0,0)} + p_2 k_{(0,1,1|0,0,0)} + p_3 k_{(0,0,1|0,0,1)} \\
k_{(1,0,0|1,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,0|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,0|1,0,0)} + p_3 k_{(1,0,1|1,0,0)} \\
k_{(1,1,0|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,0|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,0|0,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|0,0,0)} \\
k_{(1,0,1|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,1|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,1|0,0,0)} + p_3 k_{(1,0,1|0,0,1)} \\
k_{(0,1,0|0,1,0)} = 1 + p_2 k_{(0,1,0|0,1,0)} + p_1 k_{(1,1,0|0,1,0)} + p_3 k_{(0,1,1|0,1,0)} \\
k_{(0,1,1|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,1|0,0,0)} + p_2 k_{(0,1,1|0,1,0)} + p_3 k_{(0,1,1|0,0,1)} \\
k_{(0,0,1|0,0,1)} = 1 + p_3 k_{(0,0,1|0,0,1)} + p_1 k_{(1,0,1|0,0,1)} + p_2 k_{(0,1,1|0,0,1)} \\
k_{(1,1,0|1,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,0|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,0|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|1,0,0)} \\
k_{(1,0,1|1,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,0,1|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,1|1,0,0)} + p_3 k_{(1,0,1|1,0,1)} \\
k_{(1,1,0|0,1,0)} = 1 + p_2 k_{(1,1,0|0,1,0)} + p_1 k_{(1,1,0|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|0,1,0)} \\
k_{(1,1,1|0,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,1|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,1|0,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|0,0,1)} \\
k_{(1,0,1|0,0,1)} = 1 + p_3 k_{(1,0,1|0,0,1)} + p_1 k_{(1,0,1|1,0,1)} + p_2 k_{(1,1,1|0,0,1)} \\
k_{(0,1,1|0,1,0)} = 1 + p_2 k_{(0,1,1|0,1,0)} + p_1 k_{(1,1,1|0,1,0)} + p_3 k_{(0,1,1|0,1,1)} \\
k_{(0,1,1|0,0,1)} = 1 + p_3 k_{(0,1,1|0,0,1)} + p_1 k_{(1,1,1|0,0,1)} + p_2 k_{(0,1,1|0,1,1)} \\
k_{(1,1,0|1,1,0)} = 1 + (p_1 + p_2) k_{(1,1,0|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|1,1,0)} \\
k_{(1,1,1|1,0,0)} = 1 + p_1 k_{(1,1,1|1,0,0)} + p_2 k_{(1,1,1|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|1,0,1)} \\
k_{(1,0,1|1,0,1)} = 1 + (1 - p_2) k_{(1,0,1|1,0,1)} + p_2 k_{(1,1,1|1,0,1)} \\
k_{(1,1,1|0,1,0)} = 1 + p_2 k_{(1,1,1|0,1,0)} + p_1 k_{(1,1,1|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|0,1,1)} \\
k_{(1,1,1|0,0,1)} = 1 + p_3 k_{(1,1,1|0,0,1)} + p_1 k_{(1,1,1|1,0,1)} + p_2 k_{(1,1,1|0,1,1)} \\
k_{(0,1,1|0,1,1)} = 1 + (1 - p_1) k_{(0,1,1|0,1,1)} + p_1 k_{(1,1,1|0,1,1)} \\
k_{(1,1,1|1,1,0)} = 1 + (p_1 + p_2) k_{(1,1,1|1,1,0)} + p_3 k_{(1,1,1|1,1,1)} \\
k_{(1,1,1|1,0,1)} = 1 + (1 - p_2) k_{(1,1,1|1,0,1)} + p_2 k_{(1,1,1|1,1,1)} \\
k_{(1,1,1|0,1,1)} = 1 + (1 - p_1) k_{(1,1,1|0,1,1)} + p_1 k_{(1,1,1|1,1,1)} \\
k_{(1,1,1|1,1,1)} = 0.
\end{cases}
$$

Consiguiendo con esto el tiempo esperado para completar las dos colecciones de $N = 3$ cupones con probabilidades desiguales, el cual está dado por

$$
\begin{aligned}
k_{(0,0,0|0,0,0)} = 2\Bigg[& 1 - \frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{1-p_2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{1-p_1-p_2} \\
& + \frac{8p_1^3 p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^3} - \frac{3p_1^4 p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^3} - \frac{1}{p_1+p_2} \\
& + p_1^2\left(-1 + \frac{1}{(1-p_2)^3} - \frac{6p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^3} + \frac{1}{(p_1+p_2)^3}\right) \\
& + p_1\left(1 - \frac{1}{(1-p_2)^2} - \frac{1}{(p_1+p_2)^2}\right)\Bigg]. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.5.1. *Sean $m = 2$ colecciones de $N = 3$ cupones; deseamos encontrar el tiempo esperado para completar estas dos colecciones. Usando la expresión anterior podemos encontrar este tiempo, como se realiza a continuación:*

- *si* $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $1 - p_1 - p_2 = \frac{1}{3}$, *entonces* $\mathbb{E}[X] = \frac{347}{36} \approx 9.64$.
- *si* $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $1 - p_1 - p_2 = \frac{1}{6}$, *entonces* $\mathbb{E}[X] = \frac{240307}{18000} \approx 13.35$.
- *si* $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $1 - p_1 - p_2 = \frac{1}{8}$, *entonces* $\mathbb{E}[X] \approx 16.76023$.

4.6. Ejemplo de aplicación

En esta sección retomaremos el ejemplo de la sección 3.5, consideramos que tenemos una población de N tipos de unidades (las unidades son producidas por N máquinas diferentes) pero con la condición de que la probabilidad de obtener cualquier tipo de unidad específica en cada tiempo no es equiprobable. En este contexto se está suponiendo que las N máquinas no producen la misma proporción de unidades. Cada unidad de tipo específico aparece en la muestra de manera independiente a las demás. En las siguientes tres subsecciones, asumiremos que $N = 6$ y las siguientes probabilidades para cada tipo específico de unidad:

$$p_1 = \frac{1}{21},\ p_2 = \frac{2}{21},\ p_3 = \frac{3}{21},\ p_4 = \frac{4}{21},\ p_5 = \frac{5}{21},\ p_6 = \frac{6}{21}.$$

En este caso p_i representa la proporción de unidades producida por la i-ésima máquina, $i = 1, 2, \ldots, N$.

4.6.1. Obtención de una muestra que contenga al menos una unidad de cada una de las N máquinas no equiprobables.

A continuación vamos a calcular el tamaño de muestra esperado para obtener al menos uno de cada uno de los N tipos de unidades no equiprobables, que es equivalente a calcular el número esperado de cupones para obtener una colección de $N = 6$ cupones distintos no

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

equiprobables. Utilizando la fórmula (4.3) obtenemos que este tamaño de muestra esperado es

$$\mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)}\right] = \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{p_i} - \sum_{i_1<i_2}\frac{1}{p_{i_1}+p_{i_2}} + \sum_{i_1<i_2<i_3}\frac{1}{p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}} - \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4}\frac{1}{p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}+p_{i_4}} + \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4<i_5}\frac{1}{p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}+p_{i_4}+p_{i_5}} - 1.$$

Realizando todos los cálculos númericos de la expresión anterior obtenemos el siguiente resultado

$$\mathbb{E}\left[X_{(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)}\right] = 51.45 - 50.57576 + 42.15804 - 23.06682 + 7.269724 - 1 = 26.23519 \approx 26.$$

En resumen, el tamaño promedio que debe tener una muestra para tener al menos uno de cada uno de los 6 tipos de unidades es de 26 unidades aproximadamente.

4.6.2. Obtención de una muestra que contenga al menos una unidad de $k \leq N$ máquinas no equiprobables.

Ahora es de nuestro interés calcular el tamaño promedio de la muestra para obtener $k \leq N = 6$ tipos de unidades, para calcular este valor usaremos la fórmula (4.2). Enseguida presentaremos dos valores específicos de k y obtendremos sus respectivos tamaños promedios de la muestra.

- Si $k = 2$ entonces

$$\mathbb{E}[X_N(2)] = \sum_{s=1}^{2}\mathbb{E}[X_s] = 1 + \sum_{i_1=1}^{6}\frac{p_{i_1}}{p(i_1)} = 1 + 1.269724 = 2.269724.$$

Este valor nos dice que el tamaño promedio de la muestra para obtener $k = 2$ tipos de unidades es de aproximadamente 2 unidades.

- Si $k = 3$ entonces

$$\mathbb{E}[X_N(3)] = \sum_{s=1}^{3}\mathbb{E}[X_s] = 1 + \sum_{i_1=1}^{6}\frac{p_{i_1}}{p(i_1)} + \sum_{i_1\neq i_2=1}^{6}\frac{p_{i_1}p_{i_2}}{p(i_1)p(i_1,i_2)} = 1 + 1.269724 + 1.718201 = 3.987925.$$

Este valor nos dice que el tamaño promedio de la muestra para obtener $k = 3$ tipos de unidades es de aproximadamente 4 unidades.

Observación 4.6.1. *Para calcular el tamaño esperado de la muestra para obtener cualquier $k \geq 3$ tipos de unidades, es necesario llevar a cabo los cálculos en una computadora, debido a que el número de términos en la fórmula (4.2) crece drásticamente al aumentar k.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

4.6.3. Número de tipos diferentes de unidades que se encuentran en una muestra de tamaño n.

Supongamos que deseamos conocer el número esperado de tipos diferentes de unidades que podemos obtener en una muestra de tamaño n. A continuación, calcularemos este número esperado de tipos diferentes de unidades que se obtienen para ciertos tamaños particulares n de la muestra, utilizando la expresión (4.4).

- Si consideramos que $n = 4$ entonces tendremos

$$6 - \sum_{i=1}^{6}(1-p_i)^4 = 2.940683 \approx 3 \text{ tipos diferentes de unidades.}$$

- Si consideramos que $n = 6$ entonces tendremos

$$6 - \sum_{i=1}^{6}(1-p_i)^6 = 3.698817 \approx 4 \text{ tipos diferentes de unidades.}$$

- Si consideramos que $n = 8$ entonces tendremos

$$6 - \sum_{i=1}^{6}(1-p_i)^8 = 4.217027 \approx 4 \text{ tipos diferentes de unidades.}$$

- Si consideramos que $n = 10$ entonces tendremos

$$6 - \sum_{i=1}^{6}(1-p_i)^{10} = 4.583102 \approx 5 \text{ tipos diferentes de unidades.}$$

- Si consideramos que $n = 26$ entonces tendremos

$$6 - \sum_{i=1}^{6}(1-p_i)^{26} = 5.621356 \approx 6 \text{ tipos diferentes de unidades.}$$

El último caso visto nos dice que de una muestra de tamaño 26 unidades se obtienen en promedio aproximadamente 6 tipos diferentes de unidades.

4.6.4. Obtención de una muestra que contenga al menos m unidades de cada una de las N máquinas no equiprobables

Supongamos que

$$m = 2,\ N = 2 \quad \text{y} \quad p_1 = 1/3,\ \ p_2 = 2/3.$$

En este caso p_1 es la probabilidad de que una unidad provenga de la máquina número 1, y p_2 es la probabilidad de que provenga de la máquina número 2. Obtener una muestra que contenga al menos m unidades de cada una de las N máquinas es equivalente a obtener m colecciones de N cupones diferentes. Aplicando la fórmula (4.6) tenemos que el número

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

esperado de realizaciones necesarias para obtener $m = 2$ colecciones de $N = 2$ cupones distintos con las probabilidades dadas, está dado por

$$k_{(0,0|0,0))} = 6.555556.$$

Por lo que se requieren en promedio aproximadamente 7 unidades para obtener al menos $m = 2$ unidades de cada una de las $N = 2$ máquinas.

Por otro lado, las expresiones de $k_{(i_1,i_2|j_1,j_2)}$, con $i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1$, dadas en la sección 4.5, proporcionan el número promedio de cupones necesarios para obtener las $m = 2$ colecciones de los $N = 2$ cupones diferentes cuando se sabe con qué cupones se cuenta en cada colección. Por lo que, por ejemplo $k_{(1,1|0,1)} = 1/p_1 = 3$ representa el número esperado de unidades necesarias para obtener al menos $m = 2$ unidades de cada una de las $N = 2$ máquinas, cuando ya se tienen los dos tipos de unidades en la primera colección (es decir, se tienen unidades de las dos máquinas), y en la segunda colección se tienen unidades solo de la máquina número 2.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Conclusiones

En este trabajo de tesis estudiamos algunos casos del problema del coleccionista de cupones, nuestro objetivo fue encontrar el número esperado de cupones para completar una o varias colecciones de cupones con probabilidades iguales o desiguales, para lo cual usamos múltiples enfoques. A continuación se menciona el estudio hecho utilizando cada uno de los enfoques considerados.

I.- Enfoque de la distribución geométrica: se mostró cómo obtener la fórmula para calcular el número esperado de cupones para completar una colección de N cupones equiprobables. Presentamos también una formula para calcular la esperanza y varianza del número de cupones necesarios obtener $k \leq N$ cupones de la colección de N cupones equiprobables.

II.- Enfoque de cadenas de Markov: se mostró cómo obtener la fórmula para calcular el número esperado de cupones para completar una colección de N cupones equiprobables. Calculamos el número esperado de cupones para completar dos colecciones de $N = 3$ cupones equiprobables que fue de 9.64, aproximadamente 10 cupones; y el número esperado para completar tres colecciones de $N = 2$ cupones equiprobables fue de 7.85, aproximadamente 8 cupones. También se mostró la deducción de una fórmula para calcular el número esperado para completar dos colecciones de $N = 2$ y $N = 3$ cupones con probabilidades desiguales.

III.- Análisis directo: se mostró la deducción de una fórmula para el número esperado de cupones para completar m colecciones de N cupones equiprobables, y también se calcularon estos números esperados para $m = 2$ con $N = 2$ y $N = 3$, los cuales fueron de 5.5 cupones y 9.64 cupones respectivamententе, aproximadamente 6 cupones y 10 cupones, respectivamente. También se mostró la deducción de una fórmula para calcular el número esperado de cupones para completar una colección de N cupones no equiprobables.

IV.- Mediante la identidad de máximos-mínimos: se mostró cómo obtener una fórmula para calcular el número esperado de cupones para completar una colección de N cupones no equiprobables y una cuota superior para el número esperado de cupones que se necesitan para completar una o más colecciones de cupones no equiprobables.

En este trabajo se observó que es fácil obtener y calcular, por diversos métodos, una fórmula para el número esperado de cupones para completar toda la colección de N cupones equiprobables. En el caso en que los cupones no son equiprobables, las fórmulas son un poco más complicadas de obtener, así como también llevar a cabo los cálculos del número esperado de cupones para obtener toda la colección. Al considerar múltiples colecciones de cupones, la obtención de las fórmulas del número esperado de cupones necesarios para completar $m \geq 2$ colecciones se vuelve más complicada, y solo se calcularon estos valores para los casos de

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

$m = 2$ o $m = 3$ colecciones con $N = 2$ o $N = 3$ cupones, ya que considerar valores más grandes puede volver muy pesados los cálculos.

Finalmente, se mostró una aplicación de los resultados presentados, en un problema del área de muestreo industrial para el control de calidad. En este ejemplo de aplicación se vio la utilidad de los resultados presentados para saber, por ejemplo, cuántas unidades producidas por N máquinas diferentes se tienen que obtener en promedio en un muestreo secuencial para tener al menos una unidad de cada máquina; también se vio que puede calcularse el tamaño de muestra promedio para obtener al menos una unidad de $k \leq N$ máquinas; y que se puede calcular el número promedio de tipos diferentes de unidades (el tipo especificado por la máquina que la produce) que se obtienen en una muestra de tamaño fijo n, considerando que las N máquinas producen unidades en igual o diferentes proporciones.

A futuro se pretende profundizar en el estudio de la distribución y propiedades del número de cupones deben recolectarse para obtener toda la colección, así como estudiar el problema inverso del coleccionista de cupones y sus aplicaciones.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

Bibliografía

[1] S. Aki and K. Hirano, *Coupon collector's problems with statistical applications to rankings*, Ann. Inst. Stat. Math. Vol. 65, 2013, 571-587.

[2] E. Anceaume, Y. Busnel, E. Schulte-Geers and B. Sericola, *Optimization results for a generalized coupon collector problem*, J. Appl. Prob., Vol. 53, No. 2, 2016, 622-629.

[3] E. Anceaume, Y. Busnel and B. Sericola, *New results on a generalized coupon collector problem using Markov chains*, J. Appl. Prob., Vol. 52, No. 2, 2015, 405-418.

[4] R. B. Ash and C. A. Doléans-Dade, *Probability and measure theory*, Second edition, Harcourt & Academic press, USA, 1999.

[5] Krishna B. Athreya and Soumendra N. Lahiri, *Measure theory and probability theory*, 1^{ra} Edición, Springer, USA, 2006.

[6] A. Boneh and M. Hofri, *The coupon-collector problem revisited-a survey of engineering problems and computational methods*, Stochastic Models, Vol. 13, No. 1, 1997, 39-66.

[7] S. Boneh and V. G. Papanicolaou, *General asymptotic estimates for the coupon collector problem*, J. Computat. Appl. Math., Vol. 67, 1996, 277-289.

[8] R. Cavazos-Cadena, *Fundamentos de estadística-parte I*, Depto. de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, 1991.

[9] A. V. Doumas and V. G. Papanicolaou, *The coupon collector's problem revisited: generalizing the double Dixie cup problem of Newman and Shepp*, ESAIM: PS, Vol. 20, 2016, 367-399.

[10] M. Ferrante and N. Frigo, *A note on the coupon-collector's problem with multiple arrivals and the random sampling*, arXiv.1209.2667v2, 2012, 1-16.

[11] M. Ferrante and N. Frigo, *On the expected number of different records in a random sample*, arXiv:1209.4592v1, 2018, 1-15.

[12] M. Ferrante and M. Saltalamacchia, *The coupon collector's problem*, MATerials MATemàtics, Vol. 2014, No. 2, 1-35.

[13] P. Flajolet, *Birthday Paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search*, Discrete Appl. Math., Vol. 39, 1992, 207-229.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. México.

[14] R. J. Flowers, H. D. Cruz Suárez, L. López Segovia y A. Pérez, *Probabilidad*, 2^{da} Edición, Colección Hector Ochoa Bacelis, UJAT, Tabasco, México, 2015.

[15] D. L. Isaacson and R. W. Madsen, *Markov chains theory and applications*, John Wiley & Sons, USA, 1976.

[16] J. E. Kobza, S. H. Jacobson and D.E. Vaughan, *A survey of the coupon collector's problem with random sample sizes*, Methodol. Comput. Appl. Probab., Vol. 9, 2007, 573-584.

[17] S. N. Luko, *The "coupon collector's problem" and quality control*, Quality Engineering, Vol. 21, No. 2, 2009, 168-181.

[18] H. M. Mahmoud, *Pólya urn models*, CRC press, New York, 2008.

[19] T. Nakata, *Coupon collector's problem with unlike probabilities*, http://w3-fue.fukuoka-edu.ac. jp/ ˜nakata/papers/counaj. pdf, 2008.

[20] D. J. Newman and L. Shepp, *The double dixie cup problem*, Amer. Math. Monthly, Vol. 67, 1960, 58-61.

[21] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge University Press, USA, 1997.

[22] L. Rincón, *Introducción a los procesos estocásticos*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2012, http://www.matematicas.unam.mx/lars.

[23] L. Rincón, *Introducción a la probabilidad*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2014, http://www.matematicas.unam.mx/lars.

[24] S. Ross, *A first course in probability*, 8th Edition, Pearson, New Jersey, 2010.

[25] H. Von Schelling, *Coupon collecting for unequal probabilities*, Amer. Math. Monthly, Vol. 61, 1954, 306-311.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

“Donde hacer ciencia, es Básico”

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

DIVERSOS ENFOQUES EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DEL COLECCIONISTA DE CUPONES Y APLICACIONES

INFORME DE ORIGINALIDAD

6%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	vbook.pub Internet	247 palabras —	1%
2	ddd.uab.cat Internet	244 palabras —	1%
3	lya.fciencias.unam.mx Internet	108 palabras —	< 1%
4	es.scribd.com Internet	90 palabras —	< 1%
5	fdocument.org Internet	82 palabras —	< 1%
6	doczz.es Internet	77 palabras —	< 1%
7	www.coursehero.com Internet	70 palabras —	< 1%
8	web.cs.elte.hu Internet	65 palabras —	< 1%
9	oldri.ues.edu.sv Internet	53 palabras —	< 1%

10	epdf.pub Internet	31 palabras — < 1%
11	idoc.pub Internet	31 palabras — < 1%
12	www.slideshare.net Internet	22 palabras — < 1%
13	www.iit.edu Internet	20 palabras — < 1%
14	Qi Dai. "Numerical characterization of DNA sequences based on thek-step Markov chain transition probability", Journal of Computational Chemistry, 11/30/2006 Crossref	19 palabras — < 1%
15	fdocuments.es Internet	18 palabras — < 1%
16	vdocuments.net Internet	18 palabras — < 1%
17	users.eecs.northwestern.edu Internet	15 palabras — < 1%
18	www.ee.byu.edu Internet	15 palabras — < 1%
19	Degond, P.. "A kinetic description of anisotropic fluids with multivalued internal energy", European Journal of Mechanics / B Fluids, 200309/10 Crossref	14 palabras — < 1%
20	kupdf.net Internet	14 palabras — < 1%

21 pdfprof.com
Internet
14 palabras — < 1%

22 randall-holmes.github.io
Internet
14 palabras — < 1%

23 www.clubensayos.com
Internet
14 palabras — < 1%

24 www.passeidireto.com
Internet
13 palabras — < 1%

25 www.scribd.com
Internet
13 palabras — < 1%

26 arxiv.org
Internet
12 palabras — < 1%

27 hdl.handle.net
Internet
12 palabras — < 1%

28 sedici.unlp.edu.ar
Internet
12 palabras — < 1%

29 Addy Bolívar-Cimé. "New easy to compute formulas of the moments of random variables appearing in the coupon collector problem", Probability and Mathematical Statistics, 2023
Crossref
11 palabras — < 1%

30 academicos.fciencias.unam.mx
Internet
11 palabras — < 1%

31 docplayer.es
Internet
11 palabras — < 1%

32	infocbi.uam.mx Internet	11 palabras — < 1%
33	pdffox.com Internet	11 palabras — < 1%
34	theoretica.informatik.uni-oldenburg.de Internet	11 palabras — < 1%
35	1library.co Internet	10 palabras — < 1%
36	Dayani Sedarage, Okitsugu Fujiwara, Huynh Trung Luong. "Determining optimal order splitting and reorder level for N-supplier inventory systems", European Journal of Operational Research, 1999 Crossref	10 palabras — < 1%
37	Oja, H.. "Optimal signed-rank tests based on hyperplanes", Journal of Statistical Planning and Inference, 20051201 Crossref	10 palabras — < 1%
38	aprenderly.com Internet	10 palabras — < 1%
39	core-cms.prod.aop.cambridge.org Internet	10 palabras — < 1%
40	pt.aviewfrommyseat.com Internet	10 palabras — < 1%
41	silo.tips Internet	10 palabras — < 1%
42	vsip.info Internet	10 palabras — < 1%

43	www.dspace.uce.edu.ec Internet	10 palabras — < 1%
44	www.scielo.org.ar Internet	10 palabras — < 1%

EXCLUIR CITAS	ACTIVADO	EXCLUIR FUENTES	DESACTIVADO
EXCLUIR BIBLIOGRAFÍA	ACTIVADO	EXCLUIR COINCIDENCIAS	< 10 PALABRAS