

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO  
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



**“DIFRACCION EN UN DOBLETE CEMENTADO,  
USANDO ABERTURAS CON GEOMETRIAS  
DIFERENTES”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:

**Jesús Fernando  
Ramírez Hernández**

DIRECTORES:

**Dr. Esteban Andrés Zárate  
M. C. Quintiliano Angulo Córdoba**

Cunduacán, Tabasco.

Febrero 2025

# DIFRACCIÓN EN UN DOBLETE CEMENTADO, USANDO ABERTURAS CON GEOMETRÍAS DIFERENTES

INFORME DE ORIGINALIDAD

## 20%

ÍNDICE DE SIMILITUD

### FUENTES PRIMARIAS

1	inaoe.repositorioinstitucional.mx Internet	1893 palabras — 16%
2	gacetajuchiman.ujat.mx Internet	165 palabras — 1%
3	ri.ujat.mx Internet	154 palabras — 1%
4	archivos.ujat.mx Internet	80 palabras — 1%
5	editoraartemis.com.br Internet	69 palabras — 1%

EXCLUIR CITAS

ACTIVADO

EXCLUIR FUENTES

< 30 PALABRAS

EXCLUIR BIBLIOGRAFÍA

ACTIVADO

EXCLUIR COINCIDENCIAS

< 15 PALABRAS



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS  
ESTUDIOS  
TERMINALES

## Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, Tabasco el día 11 del mes de febrero del año 2025, el que suscribe Jesús Fernando Ramírez Hernández , alumno del Programa de Licenciatura en Física con número de matrícula 192A12028, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas , de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del título de licenciado en física y titulada **“DIFRACCIÓN EN UN DOBLETE CEMENTADO, USANDO ABERTURAS CON GEOMETRÍAS DIFERENTES”** dirigida por el Dr. Esteban Andrés Zarate y el M.C. Quintiliano Angulo Córdova.

**DECLARO QUE:** La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 11 de febrero del 2025.



---

Jesús Fernando Ramírez Hernández

192A12028



**UJAT**  
UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 10 de febrero de 2025.

**C. JESÚS FERNANDO RAMÍREZ HERNÁNDEZ  
PASANTE DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA  
PRESENTE**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“DIFRACCIÓN EN UN DOBLETE CEMENTADO, USANDO ABERTURAS CON GEOMETRÍAS DIFERENTES”**, dirigido por el Dr. Esteban Andrés Zárate con la codirección del Mtro. Quintiliano Angulo Córdova, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Ibis Ricárdez Vargas, Dr. Cristino Ricárdez Jiménez, Mtro. Alejandro Torres Hernández y Dr. José Luis Benítez Benítez, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL  
DIRECTORA**

C.c.p. Archivo.

DIR´DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

## Carta de cesión de derechos

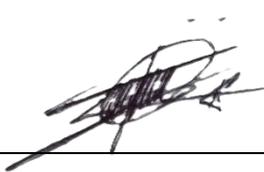
Villahermosa, Tabasco a 11 de febrero de 2025

El que suscribe autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada **“DIFRACCIÓN EN UN LENTE DOBLETE CEMENTADO, USANDO ABERTURAS CON GEOMETRÍAS DIFERENTES”** de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada será únicamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis antes mencionada y para los fines mencionados en este documento.

**AUTORIZÓ**



---

**Jesús Fernando Ramírez Hernández**

**192A12028**

## **SINODALES**

El comité de revisión está integrado por los profesores investigadores:

Dr. Ibis Ricárdez Vargas

Dr. José Guadalupe Segovia López

MC. Alejandro Torres Hernández

Dr. Cristino Ricárdez Jiménez

Dr. José Luis Benítez Benítez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## DEDICATORIA

*Con inmensa gratitud y amor, dedico esta tesis a mi madre, quien ha sido mi pilar y mi mayor apoyo en este camino. Su esfuerzo incansable y su dedicación inquebrantable hicieron posible que pudiera alcanzar este logro. Gracias por creer en mí y por trabajar tan duro para brindarme las oportunidades que me permitieron llegar hasta aquí. Este logro también es tuyo, como testimonio de tu sacrificio y compromiso.*

## AGRADECIMIENTOS

### **A mi familia:**

A mi hermana Daniela Trinidad, por sus valiosos consejos y su apoyo incondicional durante mi formación profesional y personal. También agradezco profundamente a todos mis demás familiares, quienes siempre me brindaron su respaldo y ánimo para seguir adelante.

### **A mis profesores:**

Agradezco profundamente a los numerosos docentes que contribuyeron a mi formación académica. Estoy especialmente agradecido por su comprensión ante las adversidades que enfrenté, así como por el esfuerzo y la dedicación con los que compartieron sus valiosos conocimientos conmigo.

### **A mi asesor y codirector de tesis:**

El Dr. Esteban Andrés Zárate y el M. C. Quintiliano Angulo Córdoba, expreso mi más sincero agradecimiento por su invaluable guía, paciencia y dedicación los cuales fueron fundamentales para poder llevar a cabo este trabajo de tesis.

### **A la UJAT:**

Por brindarme la formación académica y profesional que me ha permitido alcanzar esta meta, así como los recursos y el acompañamiento ofrecidos a lo largo de mi trayectoria en la licenciatura.

## RESUMEN

El objetivo general de este trabajo de Tesis fue: Determinar el modelo matemático de difracción producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular, propagado con un doblete cementado, mediante el método del espectro angular. El cual se logró haciendo uso del método de propagación antes referido, en el que se utiliza elementos de la óptica difractiva como, espectros de frecuencias espaciales o de patrones de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, haciendo uso como objeto director un par de aberturas con geometrías circular y triangular, utilizando los conceptos de propagación del espectro angular. Como resultados teóricos, se obtuvo el modelo matemático de difracción de transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada al objeto difractor, en distribución de amplitud e intensidad en el plano de enfoque o región de Fraunhofer. También se determinaron los modelos matemáticos de convolución de difracción de transformadas de Fourier, que involucra la función de transmitancia asociada al objeto difractor en amplitud y en intensidad, en la región de Fresnel convergente y divergente del doblete cementado. Los resultados de tipo experimental se obtuvieron mediante el desarrollo de una etapa experimental utilizando un arreglo óptico coherente. Los patrones de difracción producidos en distribución de intensidad fueron grabados haciendo uso del método fotográfico con cámara electrónica digital, a distintas distancias el doblete cementado usado como lente transformador. A manera de conclusión se estableció que: Los resultados teóricos obtenidos y su corroboración experimental, permiten abrir nuevos aspectos para la óptica difractiva.

# INDICE GENERAL

Dedicatoria.....	V
Agradecimientos.....	VI
Resumen.....	VII
Índice general.....	VIII
Lista de figuras.....	X
<b>CAPITULO 1.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1    Objetivos.....</b>	<b>3</b>
1.1.1    Objetivo general.....	3
1.1.2    Objetivos específicos.....	3
<b>1.2    Organización de capítulos.....</b>	<b>4</b>
<b>CAPITULO 2.....</b>	<b>5</b>
<b>Difracción con lente doblete cementado.....</b>	<b>5</b>
2.1 Concepto de lente doblete cementado.....	5
2.2 Propagación con el uso de lente de doblete.....	6
2.3 Difracción en la región de Fresnel.....	12
2.3 Difracción en la región de Fraunhofer.....	15
<b>CAPITULO 3.....</b>	<b>16</b>
<b>Resultados teóricos.....</b>	<b>16</b>
3.1 Espectro de difracción de transformada de Fourier producido por aberturas de geometría triangular y circular.....	16

3.2 Espectro de convolución producido por aberturas de geometría triangular y circular.....	20
<b>CAPITULO 4.....</b>	<b>33</b>
<b>Desarrollo Experimental.....</b>	<b>33</b>
4.1 Descripción del arreglo óptico .....	33
Descripción del arreglo experimental .....	34
4.2 Resultados experimentales.....	35
4.2.1 Grabado de patrones de difracción.....	35
4.3 Espectro de transformada exacta de Fourier de abertura triangular y circular.	36
4.4 Espectro de convolución de transformadas de Fourier de abertura triangular y circular en zona de Fresnel convergente.....	39
4.4 Espectro de convolución de transformadas de Fourier de abertura triangular y circular en zona de Fresnel divergente.....	42
<b>CAPITULO 5.....</b>	<b>45</b>
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>45</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>47</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Arreglo teórico para producir modelos matemáticos de difracción. ....	6
<b>Figura 2:</b> Esquema del objeto difractor.....	16
<b>Figura 3:</b> Objeto difractor utilizado para la obtención de los patrones de difracción.....	34
<b>Figura 4:</b> Arreglo experimental para obtener el espectro de difracción.....	35
<b>Figura 5:</b> Patrón de difracción de transformada exacta de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/1000s y distancia $z=25$ cm. ....	37
<b>Figura 6:</b> Patrón de difracción de transformada exacta de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/500s y distancia $z=25$ cm. ....	37
<b>Figura 7:</b> Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con velocidad de obturación de 1/600 y distancia $z=24$ cm. ....	40
<b>Figura 8:</b> Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/100s y distancia $z=24$ cm. ....	40
<b>Figura 9:</b> Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/100s y distancia $z=38$ cm. ....	43
<b>Figura 10:</b> Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/500s y distancia $z=38$ cm. ....	43

# CAPITULO 1

## Introducción

El fenómeno de difracción de ondas electromagnéticas ocurre donde quiera que una porción de un frente de onda generado por dichas ondas es obstruido, es decir, si en el transcurso de su trayectoria de propagación se interpone un objeto opaco o transparente, se altera una parte de dicho frente en amplitud o en fase. Los diferentes segmentos del frente de onda que se propagan más allá del objeto llevan información de la interacción con éste, interfieren y producen una densidad de energía particular, cuya distribución espacial de intensidad se denomina patrón de difracción; además constituye un fenómeno universal de la física y es uno de los más estudiados Hecht y Zajac (1998), Malacara (2004), Zárate (2011), Goodman (2005), Ersoy (2006). Con base en este concepto de difracción, cuando ondas planas monocromáticas iluminan un objeto delgado y transparente, experimentan difracción y se propagan por ejemplo hasta incidir en una lente convergente doblete cementado sin aberraciones monocromáticas y cromáticas, utilizada como transformadora, Goodman (2005), Hecht y Zajac (1998). Esta lente no solo propaga las ondas, sino que también genera una distribución de amplitud compleja en distintos planos, zonas o regiones, dependiendo de la perspectiva de análisis, Zárate (2011).

La región más próxima a la lente se denomina "zona cercana", seguida por la región convergente, después tenemos la región de divergente. Una zona adicional se conoce como "región de Fraunhofer", también llamada zona de enfoque de la lente o plano de la transformada de Fourier. Además, existe la zona del plano imagen o plano conjugado al plano objeto, como señalan Hecht y Zajac (1998). Este conjunto de regiones describe la compleja interacción entre las ondas difractadas y la lente utilizada en el proceso. Zárate (2011), presentó un modelo matemático de difracción que examina el caso en el que el objeto o la apertura de difracción se colocan a la distancia focal frontal o anterior de un doblete cementado utilizado como lente transformadora. Este modelo se centra en el análisis de la propagación del campo de difracción

hacia la región convergente o de convolución de transformadas de Fourier, así como en la propagación del campo hasta el plano de la transformada de Fourier. Zárate *et al* (2019) desarrollaron un modelo matemático de difracción en la zona convergente y divergente de un doblete cementado de lente convergente esférica, y llevaron a cabo una etapa de simulación, presentando comparaciones entre imágenes simuladas y obtenidas experimentalmente. solo dedicaron su trabajo de análisis al fenómeno de difracción de dos aberturas circulares de radios de diferente magnitud, proporcionando el desfase de las ondas difractadas desde el plano objeto hasta la región convergente y divergente del doblete cementado. sin embargo, no detallaron haber realizado un análisis de objeto difractor compuesto por abertura circular y de geometría rectangular. Por esta razón, el objetivo de este trabajo de tesis es proporcionar evidencia del fenómeno de difracción por el par de aberturas antes referidas.

## Definición del problema

Uno de los principales intereses de la óptica física es la descripción de las amplitudes de los campos ópticos de difracción que presentan geometrías específicas. En relación con este problema, surge la necesidad de caracterizar las propiedades físicas de dichos campos de difracción. En este contexto, resulta particularmente relevante analizar los mapeos de distribuciones de amplitud que están determinados por la función de transmitancia en las distintas regiones o planos de una lente esférica convergente.

En este trabajo de tesis, se propone un estudio sobre la propagación de un campo de difracción generado por un objeto o abertura, propagado a través de un doblete esférico cementado, considerado como una lente transformadora. El análisis se centra en intervalos de distancia específicos:  $0 < z < f_{LD}$ ,  $z = f_{LD}$  y  $f_{LD} < z < \infty$ . El campo difractado será producido por un objeto o por aberturas con distintas geometrías y dimensiones finitas de espesor casi cero, colocado a una distancia focal anterior  $d_0 = f_{LD}$  de la lente transformadora y bajo iluminación de ondas monocromáticas planas de luz de láser de He-Ne.

El enfoque teórico se basa en el formalismo de propagación del espectro angular, complementado con algunos de los resultados reportados por Zárate (2011).

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo general

Determinar el modelo matemático de difracción producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular, propagado con un doblete cementado, mediante el método del espectro angular.

### 1.1.2 Objetivos específicos

1. Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fresnel convergente y divergente de un doblete cementado, situadas en el intervalo ( $0 < z < f_{LD}$ ) y ( $f_{LD} < z < \infty$ ).
2. Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, situada en la distancia focal anterior  $d_0 = f_{LD}$  del doblete cementado.
3. Implementar un arreglo experimental óptico coherente, utilizando fuente de luz de láser.
4. Producir y grabar los patrones de difracción en distribución de intensidad producido con objeto difractor de geometrías diferentes, utilizando el método fotográfico con cámara digital.

## 1.2 Organización de capítulos

Este trabajo de tesis está estructurado en cinco capítulos, cada uno diseñado para abordar aspectos fundamentales relacionados con la óptica física. En cada capítulo, se desarrollan de manera detallada los conceptos teóricos y los fundamentos matemáticos que permiten describir con precisión la forma funcional del fenómeno de difracción en estudio. Además, se presenta un índice de contenido, una tabla de figuras, las conclusiones alcanzadas y la bibliografía utilizada como base esencial para llevar a cabo esta investigación como trabajo de tesis.

Con el propósito de cumplir con los objetivos propuestos, se detalla a continuación una descripción ampliada de los temas abordados en cada capítulo, los cuales conforman este trabajo de tesis.

**Capítulo 1:** Se introduce el contexto general del estudio, planteando los fundamentos teóricos y prácticos necesarios para comprender el problema abordado. Se presentan los objetivos, las hipótesis y la justificación de la investigación. Finalmente, se describe la estructura de la tesis, brindando una visión general de los capítulos que la componen.

**Capítulo 2:** Se determinan los modelos matemáticos de difracción de convolución de transformada de Fourier, bajo condiciones específicas en diferentes planos donde surge el concepto de transformada exacta de Fourier, como un caso especial de convolución.

**Capítulo 3:** Se realiza el análisis y obtención de los modelos matemáticos de cada zona asociando la función de transmitancia del objeto difractor.

**Capítulo 4:** Se corroboran los modelos matemáticos obtenidos en el capítulo 3, a través de un estudio experimental en donde se considera un arreglo óptico coherente al tema estudiado y se realiza el análisis de las fotografías obtenidas.

**Capítulo 5:** Se proporcionan las conclusiones derivadas de la información obtenida en los capítulos anteriores.

# CAPITULO 2

## Difracción con lente doblete cementado

### 2.1 Concepto de lente doblete cementado

Una lente doblete cementado está formada por una lente biconvexa, en contacto con lente cóncava casi plana. La forma global de este tipo de lente es muy parecida a una lente planoconvexa (Hecht y Zajac, 1998; Newport, 1990). La selección de vidrios y las curvaturas apropiadas permiten la posibilidad de producir una lente doblete cementado acromático, además de eliminar las aberraciones. Una lente doblete cementado posee diferentes formas de actuar, cuando ella es implementada en un arreglo o procesador óptico como el que se ilustra en la figura 1. Por lo que, en el siguiente desarrollo, se producirá los modelos matemáticos de difracción para diferentes regiones donde se distribuye el campo o el espectro de difracción según sea el caso; puntualizando las condiciones que deben satisfacer los parámetros involucrados en cada situación que se trate. a continuación, se determinarán los modelos matemáticos del espectro de difracción, haciendo uso del concepto de frecuencias espaciales paraxiales. Para esto, se considera el arreglo óptico coherente que se ilustra en la figura 1 y, en este caso, el objeto difractor (4) que puede ser entre otras opciones, una abertura rectangular de ancho  $l_1$ , de altura  $l_2$ , muy delgada; contenida en una pantalla de espesor  $l_3$ , casi cero, a la que se le asocia una función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$ . Tal objeto es iluminado por ondas electromagnéticas planas de amplitud constante  $E_0$  y monocromáticas de luz de láser de Helio-Neón ( $\lambda=632.8\text{nm}$ ), colimadas con la lente convergente (3) de distancia focal  $f_{LC}$  conocida, provenientes de la fuente (1), ampliadas y filtradas con el filtro espacial (2). Son difractadas por el objeto arriba referido (4), se propagan e inciden sobre la lente doblete cementado convergente o lente transformadora (5), de distancia focal  $f_{LD}$  también conocida.

La lente transformadora referida tiene a su vez diferentes formas de actuar sobre el campo o el espectro de difracción, ya que lo puede propagar a diferentes distancias  $z$  medida a partir de ella,

produciendo una distribución de amplitud compleja del campo difractado en el plano  $x_z y_z$  o del espectro en el plano de frecuencias  $uv$ . Las zonas o regiones en las que se sitúa el plano en el que se distribuye el campo difractado o el espectro se clasifican como: la zona cercana a la lente, la región convergente y divergente de la lente, también conocidas como regiones de Fresnel o zonas de convolución de transformadas de Fourier; una cuarta zona denominada región de Fraunhofer, o plano de la transformada exacta de Fourier, también conocida como plano conjugado de la fuente de iluminación. Mientras que la quinta zona del doblete cementado será identificada como la región del plano imagen o plano conjugado al plano objeto (Hecht y Zajac, 1998).

## 2.2 Propagación con el uso de lente de doblete

En el siguiente desarrollo se obtendrán los modelos matemáticos, que describan la distribución del campo difractado y propagado por el doblete cementado hasta la zona de fresnel convergente y divergente. así como generar el modelo matemático de difracción en la región de fraunhofer o de enfoque. para esto, se supone que el objeto difractor se encuentra situado en el plano objeto  $x_0 y_0$ , a la distancia  $d_0$  de la lente transformadora, figura 1.

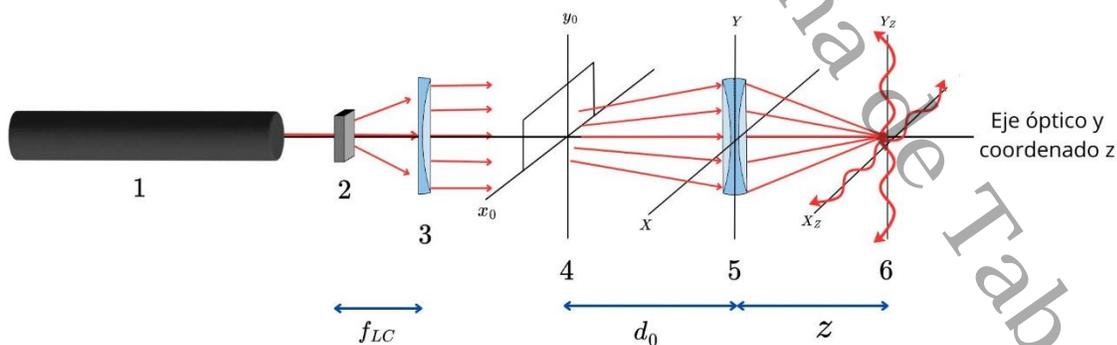


Figura 1: Arreglo teórico para producir modelos matemáticos de difracción. (1) Láser de He-Ne, (2) filtro espacial, (3) lente colimadora, (4) objeto difractor, (5) lente transformadora, (6) plano de distribución  $x_z y_z$

En la figura 1, El objeto es iluminado con ondas planas de amplitud constante  $E_0$ , entonces, la distribución de amplitud del campo difractado por el objeto de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  y distribuido justo después del él será  $E_1(x_0, y_0)$  y está definida mediante la siguiente ecuación:

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0) \quad (2.1)$$

Así, las ondas monocromáticas difractadas y propagadas una distancia  $d_0$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  y propagadas hasta el plano  $xy$  a la entrada de la lente doblete cementado (5), pueden ser descritas usando la siguiente ecuación propuesta por (Zárate, 2011):

$$E_{d_0}(x, y) = \left( \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} \right) t_0(x_0, y_0) \otimes e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)} \quad (2.2)$$

El símbolo  $\otimes$  en la ecuación (2.2) significa la operación matemática de convolución de dos funciones. De acuerdo con el teorema de convolución (Zárate, 2011, Gaskill, 1978), la ecuación (2.2) puede ser escrita como:

$$E_{d_0}(x, y) = \left( \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} \right) e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0 \quad (2.3)$$

Una mejor interpretación funcional del campo difractado dado por la ecuación (2.3), se obtiene si definimos las frecuencias espaciales paraxiales de la siguiente forma:

$$u_1 = \frac{x}{\lambda d_0} \quad v_1 = \frac{y}{\lambda d_0} \quad (2.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.4) en la ecuación (2.3) se obtiene la siguiente expresión (Zárate, 2011):

$$E_{d_0}(u_1, v_1) = \left( \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} \right) e^{i\pi\lambda d_0(u_1^2+v_1^2)} \mathfrak{F} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} \right\}_{u_1=\frac{x}{\lambda d_0} \quad v_1=\frac{y}{\lambda d_0}} \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) se interpreta como el espectro de difracción paraxial o de transformada de Fourier del producto de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor, con la función exponencial  $e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)}$ . El patrón de difracción se ha propagado una distancia  $d_0$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano  $XY$  a la entrada de la lente doblete cementado, el factor  $e^{i\pi\lambda d_0(u_1^2 + v_1^2)}$  indica que la fase del espectro de difracción está distribuida en una esfera, más no en el plano de frecuencias espaciales  $(u_1, v_1)$ .

Considerando ahora, que la amplitud de campo eléctrico difractado por el objeto y propagado a través del lente doblete cementado, produce en su plano  $XY$  justo en la salida de la lente referida, una distribución de amplitud compleja definida mediante la ecuación siguiente:

$$E_l(x, y) = t_l(x, y)E_{d_0}(x, y) \quad (2.6)$$

Donde  $E_{d_0}(x, y)$  es el campo eléctrico incidente y  $t_l(x, y)$  es la función de transmitancia asociada a la lente doblete cementado, así la función de transmitancia se escribe en la forma (Zárate, 2011):

$$t_l(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) e^{-ikW(x, y)} e^{ik(d_0 + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})} e^{-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2f_{LD}}\right)} \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7), la expresión  $\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$  es la función círculo o de pupila, asociada a la lente esférica, mientras que  $W(x, y)$  es la función de aberración (Welford, 1991),  $n_{L1}$  es el índice de refracción asociado a la lente delgada que forma el doblete,  $\Delta_{0L1}$  es el espesor de la lente referida,  $n_{L2}$  será el índice de refracción asociado a la segunda lente y  $\Delta_{0L2}$  es su espesor. La distancia focal de la lente doblete cementado será  $f_{LD}$ .

Ahora, al sustituir las ecuaciones (2.4) y (2.7), el campo de difracción propagado a través de la lente doblete o transformadora queda definido en la forma siguiente:

$$E_l(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right) e^{-ikW(x,y)} e^{ik(d_0+n_{L1}\Delta_{0L1}+n_{L2}\Delta_{0L2})} \frac{E_0}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0}-\frac{1}{f_{LD}}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0+\frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0 \quad (2.8)$$

Un caso especial es, cuando la lente esférica doblete cementado no posee aberraciones cromáticas y monocromáticas, por ejemplo un doblete tipo Fraunhofer, bajo esta condición la función de aberración  $W(x, y)$  en la ecuación (2.8) se considera igual a cero, esto es  $W(x, y) = 0$  por lo que el término  $e^{-ikW(x,y)} = 1$ . Además, también se debe tomar en cuenta que, el ancho y altura del objeto difractor transparente, son mucho menores que el diámetro  $2a$  de la pupila asociada a la lente doblete cementado o transformadora. Esto implica que todas las ondas paraxiales difractadas por el objeto, que inciden sobre la lente doblete cementado convergente, se propagan a través de ella; como consecuencia, la función círculo se toma como igual a uno, esto es  $\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right) = 1$ . Teniendo en cuenta estas consideraciones la ecuación (2.8) se reduce de la siguiente forma:

$$E_l(x, y) = \frac{E_0}{i\lambda d_0} e^{ik(d_0+n_{L1}\Delta_{0L1}+n_{L2}\Delta_{0L2})} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0}-\frac{1}{f_{LD}}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0+\frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0 \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) establece la forma como se distribuye el campo eléctrico  $E_l(x, y)$  asociado a las ondas difractadas desde el objeto; es decir, la distribución de amplitud compleja se han propagado una distancia  $d_0 + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2}$  cuya fase no se encuentra distribuida en el plano  $XY$  a la salida de la lente doblete cementado, sino en una esfera información contenida en el segundo factor exponencial.

Ahora, para interpretar la propagación del campo eléctrico difractado, desde el plano  $XY$  hasta el plano  $X_zY_z$  en el que se distribuye, que está situado a la distancia  $z$  de la lente doblete cementado; puede usarse la ecuación paraxial siguiente Zárata (2011):

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} E_l(x, y) \otimes e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_l(x, y) e^{\frac{ik}{2z}[(x_z^2 - x^2) + (y_z^2 - y^2)]} dx dy \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ecuación (2.9) en la ecuación (2.10) se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_0 e^{ik(d_0 + z + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})}}{i^2 \lambda^2 z d_0} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} dx_0 dy_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}\{(x^2 + y^2)(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}})\}} e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{x_z}{\lambda z}x\right) + \left(\frac{y}{\lambda d_0}y_0 + \frac{y_z}{\lambda z}y\right)\right]} dx dy \quad (2.11)$$

Esta ecuación establece que la amplitud de el campo eléctrico de difracción  $E_z(x_z, y_z)$  distribuido en el plano  $X_zY_z$ , se ha propagado desde el plano del objeto  $X_0Y_0$  una distancia  $(d_0 + z + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})$  información contenida en el primer factor exponencial; pero de acuerdo con el factor  $i^2$  en el denominador se ha desfasado en  $\pi$  radianes y su fase está distribuida en una esfera, información obtenida del factor  $e^{\frac{ik}{2}\{(x^2 + y^2)(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}})\}}$ . Para definir la función  $E_z(x_z, y_z)$  de forma explícita se definen las frecuencias espaciales  $u_z$  y  $v_z$  de la siguiente forma:

$$u_z = \left( \frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z} \right) = u_0 + u_z \quad (2.12)$$

$$v_z = \left( \frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z} \right) = v_0 + v_z \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) permiten definir y determinar la magnitud de las frecuencias espaciales paraxiales  $u_0$  y  $v_0$  emitidas en zonas específicas en el objeto, así como de las frecuencias paraxiales  $u_z$  y  $v_z$  con las que se distribuye en el plano  $X_z Y_z$ . De esta forma podemos escribir la ecuación (2.11) en términos de estas frecuencias como:

$$\begin{aligned}
 E_z(x_z, y_z) &= \frac{E_0 e^{ik(d_0+z+n_{L1}\Delta_0L_1+n_{L2}\Delta_0L_2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} dx_0 dy_0 \cdot \\
 &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{z}-\frac{1}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi(u_2x+v_2y)} dx dy
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Utilizando el teorema de transformada bidimensional de Fourier (Zárate, 2011), se puede escribir la ecuación (2.14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 E_z(x_z, y_z) &= \frac{E_0 e^{ik(d_0+z+n_{L1}\Delta_0L_1+n_{L2}\Delta_0L_2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} \\
 &\cdot \left[ \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{z}-\frac{1}{f_{LD}}\right)} \right\}_{u_2, v_2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

La ecuación (2.15) indica que el espectro de difracción  $E_z(x_z, y_z)$  distribuido en el plano  $X_z Y_z$  es una modulación producida por el primer factor integral, sobre la transformada de Fourier de la función exponencial  $e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{z}-\frac{1}{f_{LD}}\right)}$  del segundo factor. también puede ser interpretada como la modulación del factor transformada de Fourier sobre el primer factor integral en la ecuación referida. De acuerdo con los parámetros que intervienen en el factor de la exponencial, existen diferentes condiciones que se les pueden asociar a dichos parámetros, lo que permite clarificar la interpretación de la forma funcional de la ecuación (2.15) por lo que, en este capítulo y en el desarrollo siguiente solo se presenta la deducción de los modelos matemáticos de difracción bajo la condición inicial de que  $d_0 = f_{LD}$ , es decir, la distancia objeto es igual a la distancia focal anterior del doblete cementado, así como sus consecuencias.

## 2.3 Difracción en la región de Fresnel

En el espectro de convolución de transformada de Fourier se propone la condición inicial de que la distancia  $d_0$  del objeto difractor a la lente doblete acromático cementado o transformadora, sea igual a su distancia focal frontal o anterior  $f_{LD}$  es decir  $d_0 = f_{LD}$ . (Zárate, 2011) estableció que:  $\frac{1}{s_{0LD}} + \frac{1}{s_{iLD}} = \frac{1}{f_{LD}}$ , ahora con  $s_{0LD} = d_0$  y  $s_{iLD} = z$ , se tendrá  $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f_{LD}}$ ; bajo la condición de que  $d_0 = f_{LD}$  implica que el exponente de la transformada de Fourier se reduce de acuerdo con la siguiente expresión:  $\frac{1}{f_{LD}} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}} = \frac{1}{z}$ , bajo estas condiciones implica que el factor transformada de Fourier de la ecuación (2.15), se pueda escribir como:

$$\left[ \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}_{u_2, v_2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z}\right)} e^{-i2\pi(u_2x+v_2y)} dx dy \quad (2.16)$$

Desarrollando la ecuación (2.16) se obtiene:

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}x^2 - i2\pi u_2 x} dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}y^2 - i2\pi v_2 y} dy \right] \quad (2.17)$$

Tomando en cuenta el resultado integral propuesto por Spiegel (1980):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad (2.18)$$

Definiendo  $\alpha = -\frac{ik}{2z}$ ,  $\beta = i2\pi u_2$  el primer factor integral de la ecuación (2.18) se reduce a la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}x^2 - i2\pi u_2 x} dx = \sqrt{\frac{2\pi z}{-ik}} e^{\frac{(i2\pi u_2)^2(2z)}{4ik}} = \sqrt{\frac{\lambda z}{-1}} e^{-i\lambda z \pi u_2^2} \quad (2.19)$$

Para el otro caso consideramos  $\alpha = -\frac{ik}{2z}$ ,  $\beta = i2\pi v_2$  entonces se obtiene que el segundo factor integral de la ecuación (2.17) se reduce a la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}y^2 - i2\pi v_2 y} dy = \sqrt{\frac{2\pi z}{-ik}} e^{\frac{(i2\pi v_2)^2(2z)}{4ik}} = \sqrt{\frac{\lambda z}{-1}} e^{-i\lambda z \pi v_2^2} \quad (2.20)$$

Relacionando las ecuaciones (2.19) y (2.20) con las ecuaciones (2.12) y (2.13) y el resultado obtenido se sustituye en la ecuación inicial (2.16) el término transformada de Fourier se escribe como:

$$\left[ \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)} \left( \frac{1}{z} \right) \right\}_{u_2, v_2} \right] = \left[ \sqrt{\frac{\lambda z}{-1}} e^{-i\lambda z \pi \left( \frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z} \right)^2} \right] \left[ \sqrt{\frac{\lambda z}{-1}} e^{-i\lambda z \pi \left( \frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z} \right)^2} \right] \quad (2.21)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (2.21) en la ecuación (2.16) para el espectro de difracción y considerando que  $d_0 = f_{LD}$  se determina que la amplitud compleja del campo difractado distribuido en el plano  $X_z Y_z$  es:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_0 e^{ik(f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})}}{\lambda i f_{LD}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi \left( \frac{x_z}{\lambda f_{LD}} x_0 + \frac{y_z}{\lambda f_{LD}} y_0 \right)} dx_0 dy_0 \quad (2.22)$$

De la ecuación (2.22) se establece que: la distribución de amplitud del campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z)$ , y asociado a las ondas difractadas, se ha propagado una distancia ( $d_0 + z + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2}$ ) desde el plano del objeto  $X_0 Y_0$  hasta el plano  $X_z Y_z$  en el que se distribuye.

Para la definición explícita de la función  $E_z(x_z, y_z)$  se recurre a interpretar los factores integrales en término de las frecuencias espaciales paraxiales  $u_z$  y  $v_z$  definidas en la forma siguiente:

$$u_z = \left( \frac{x_z}{\lambda f_{LD}} \right) \quad (2.23)$$

$$v_z = \left( \frac{y_z}{\lambda f_{LD}} \right) \quad (2.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.23) y (2.24) en la ecuación (2.22) se obtiene la nueva expresión matemática interpretada como como el espectro de difracción bidimensional de transformada de Fourier del producto de dos funciones, esto es:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\}_{u_z, v_z} \quad (2.25)$$

Donde considerando que el teorema de la transformada de Fourier de un producto de dos funciones es igual a la convolución de transformadas de Fourier, permite escribir la ecuación (2.25) de la siguiente forma:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F}[t_0(x_0, y_0)] \otimes \mathfrak{F} \left[ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right]_{u_z, v_z} \quad (2.26)$$

De acuerdo con la ecuación (2.26) se establece el espectro de difracción  $G_z(u_z, v_z)$  como el producto de las convoluciones de las transformadas de Fourier distribuidas hacia cada uno de los ejes de frecuencias espaciales  $u_z$  y  $v_z$ , de la función transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor. El cual se ha propagado una distancia  $(f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2})$  con una distribución de fase dada por el exponencial  $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$  la cual está desfasada  $\frac{\pi}{2}$  radianes.

## 2.3 Difracción en la región de Fraunhofer

Este caso muy especial muy especial de convolución de transformadas de Fourier se obtiene considerando nuevamente que el objeto continúa situado a la distancia focal frontal  $f_{LD}$  de la lente doblete cementado, es decir, se cumple la condición de que  $d_0 = f_{LD}$ . Además, si se considera que la distancia  $z$  de la lente doblete cementado al plano  $uv$  donde se distribuye el espectro, es igual a la distancia focal posterior  $f_{LD}$  de la lente doblete, esto es  $z = f_{LD}$ . Aplicando estas condiciones la ecuación (2.26) se reduce a la siguiente expresión:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F}[t_0(x_0 y_0)] \otimes \mathfrak{F}[1,1]_{u_z, v_z} \quad (2.27)$$

De acuerdo con (Gaskill, 1978) la transformada de Fourier unidimensional de la función igual a uno, es la función delta de Dirac, esto es:

$$\mathfrak{F}\{1\}_{u_z = \left(\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}\right)} = \delta(u_z) \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}\{1\}_{v_z = \left(\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}\right)} = \delta(v_z) \quad (2.28)$$

Sustituyendo los valores de (2.28) en la ecuación (2.27) obtenemos la siguiente ecuación:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F}[t_0(x_0 y_0)] \otimes \delta(u_z, v_z) \quad (2.29)$$

Donde (Gaskill, 1978) establece que la convolución de una función con una delta de Dirac es da como resultado la misma función, es decir  $F(u) = F(u) \otimes \delta(u)$  entonces la ecuación (2.29) se puede reduce a la siguiente expresión:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} [\mathfrak{F}[t_0(x_0 y_0)]]_{u_z, v_z} \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) es conocida como el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor. Distribuido en el plano  $u_z, v_z$  una distancia de  $(2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})$ . Donde existe una distribución de fase dada por  $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}$  la cual está desfasado en  $\frac{\pi}{2}$  radianes.

# CAPITULO 3

## Resultados teóricos

### 3.1 Espectro de difracción de transformada de Fourier producido por aberturas de geometría triangular y circular.

En el siguiente desarrollo se determinará los modelos matemáticos para objetos de diferentes geometrías, a saber, uno de geometría circular y otro de geometría triangular. a los que se les asociará la función de transmitancia apropiadas. Con la condición de que el plano de distribución del campo de difracción esté a una distancia  $z \cong f_{LD}$ . Las aberturas están desplazadas del origen una distancia  $d$  hacia la izquierda y la segunda hacia la derecha ver figura 3.

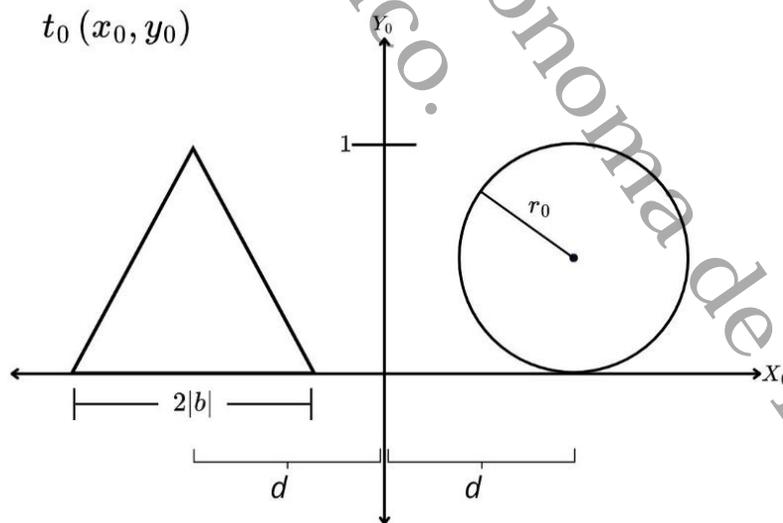


Figura 2: Esquema del objeto difractor, donde  $d$  es la distancia desplazada.

Gaskill, (1978) estableció la forma funcional de la función triángulo, la cual se asocia al objeto difractor de la figura 2. De acuerdo con dicha definición, la función triángulo desplazada una distancia  $d$  asociada al objeto difractor se define de la siguiente forma:

$$tri\left(\frac{x_0 + d}{b}\right) = \begin{cases} 0, & \left|\frac{x_0 + d}{b}\right| \geq 1 \\ 1 - \left|\frac{x_0 + d}{b}\right|, & \left|\frac{x_0 + d}{b}\right| < 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Siendo  $b$  el área del rectángulo definida en el eje  $x_0$ , mientras que la forma funcional de la función círculo desplazada también asociada al objeto difractor se define como:

$$cir\left(\frac{r_0 - d}{a}\right) = \begin{cases} 1, & r_0 - d \leq a \\ 0, & r_0 - d > a \end{cases} \quad (3.2)$$

Siendo  $r_0$  el radio del círculo y  $a$  el radio. De acuerdo con la figura 2, la forma funcional asociada a las dos aberturas está dada por una función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  la cual se compone por la suma de la función triángulo y la función círculo, ambas desplazadas una distancia  $d$  del origen puede ser expresada como:

$$t_0(x_0, y_0) = tri\left(\frac{x_0 - d}{b}\right) + cir\left(\frac{r_0 + d}{a}\right) \quad (3.3)$$

De esta forma sustituyendo la función de transmitancia dada por (3.3) en la ecuación (2.30) se obtiene:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \mathfrak{F} \left[ tri\left(\frac{x_0 - d}{b}\right) + cir\left(\frac{r_0 + d}{a}\right) \right] \quad (3.4)$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier se tiene:

$$\mathfrak{F}\left[tri\left(\frac{x_0+d}{b}\right) + cir\left(\frac{r_0-d}{a}\right)\right] = \mathfrak{F}\left\{tri\left(\frac{x_0+d}{b}\right)\right\} + \mathfrak{F}\left\{cir\left(\frac{r_0-d}{a}\right)\right\} \quad (3.5)$$

Donde,

$$\mathfrak{F}\left\{tri\left(\frac{x_0}{b}\right)\right\} = bsinc^2(bu_z) \quad (3.6)$$

Entonces por el teorema de escalamiento para el primer término se obtiene:

$$\mathfrak{F}\left\{tri\left(\frac{x_0+d}{b}\right)\right\} = bsinc^2(bu_z)e^{i2\pi du_z} \quad (3.7)$$

Para el segundo termino de acuerdo con la transformada de Fourier-Bessel tenemos:

$$\mathcal{B}\left\{cir\left(\frac{r_0}{a}\right)\right\} = \frac{a}{\omega} J_1(2\pi a\omega) \quad (3.8)$$

Aplicando el teorema de escalamiento la ecuacion (3.8) se expresa como:

$$\mathcal{B}\left\{cir\left(\frac{r_0-d}{a}\right)\right\} = \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a)e^{-i2\pi du_z} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, podemos expresar la función de transmitancia asociada al objeto como:

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = bsinc^2(bu_z)e^{i2\pi du_z} + \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a)e^{-i2\pi du_z} \quad (3.10)$$

De esta forma sustituyendo (3.10) en la ecuación (3.4) se obtiene:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{\lambda f_{LD}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \left[ bsinc^2(bu_z)e^{i2\pi du_z} + \frac{a J_1(2\pi\omega a)}{\omega} e^{-i2\pi du_z} \right] \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) describe el espectro de transformada exacta de Fourier en distribución de amplitud, asociado al objeto difractor con abertura triangular y circular desplazadas una distancia  $d$  del origen. Mientras que su distribución de intensidad está descrita por la siguiente expresión:

$$I_z(u_z, v_z) = \left( \frac{E_0}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + 2(ab) \cos(4\pi du_z) (\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + \left( \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

Utilizando la relación  $2 \cos(4\pi du_z) = e^{i4\pi du_z} + e^{-i4\pi du_z}$  se puede escribir la distribución de intensidad de la siguiente forma:

$$I_z(u_z, v_z) = \left( \frac{E_0}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + (ab) (\text{sinc}^2(bu_z)) 2 \cos(4\pi du_z) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + \left( \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) describe la distribución de intensidad del espectro de difracción en el plano de frecuencias espaciales  $u_z, v_z$ , también conocido como plano de enfoque, de fraunhofer o de la transformada de fourier, situado a la distancia focal  $f_{LD}$  de la lente transformadora, es proporcional al factor  $\left( \frac{E_0}{\lambda f_{LD}} \right)^2$ . mientras que el factor entre corchetes contiene el primer sumando que corresponde a franjas de interferencia de distribución  $\text{sinc}^4(bu_z)$ . mientras que el segundo sumando se puede interpretar como: franjas de interferencia lineales de tipo young definidas por la función  $\cos(4\pi du_z)$  y franjas interferencia de distribución besinc definidas con la función  $\left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)$ , moduladas por franjas de interferencia de distribución  $\text{sinc}^2(bu_z)$ .

Otra interpretación es donde ahora las franjas lineales de interferencia de interferencia tipo young  $\cos(4\pi du_z)$ , sean las que modulen a las franjas de interferencia a las besinc y a las franjas  $\text{sinc}^2(bu_z)$ . una tercera interpretación es que las de interferencia de distribución besinc, modulen a las franjas de interferencia tipo Young  $\cos(4\pi du_z)$  ya las franjas de interferencia  $\text{sinc}^2(bu_z)$ . La duda respecto a cuál de las tres afirmaciones anteriores es correcta se disipará en la etapa experimental. en lo que respecta a el tercer sumando se interpreta como franjas de interferencia de tipo besinc cuadrada, es decir  $\left( \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2$ .

### 3.2 Espectro de convolución producido por aberturas de geometría triangular y circular.

Para determinar el modelo matemático del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier producido por el par de aberturas definidos en la figura (2), en la zona convergente o de convolución de la lente transformadora también conocida como región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de la lente referida definida dentro del intervalo de distancias  $0 < z < f_{LD}$  Para esto, se hace uso de la ecuación (2.26) obteniendo primero la transformada de Fourier de la exponencial en la ecuación referida, recurriendo al siguiente resultado integral (Spiegel, 1980):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x^2 - \gamma x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\gamma^2}{4\alpha}} \quad (3.14)$$

Haciendo que:  $\alpha = -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{f_{LD}-z}{f_{LD}^2} \right)$  y  $\gamma = i2\pi x_0$  con base en la ecuación (3.13) se obtiene:

$$\mathfrak{F} \left[ e^{\frac{ik}{2f_{LD}} (x_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right] = \sqrt{\frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)}} e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)} (u_z^2)} \quad (3.15)$$

Para el caso de que:  $\alpha = -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{f_{LD}-z}{f_{LD}^2} \right)$  y  $\gamma = i2\pi y_0$  nuevamente de la ecuación (3.13) se obtiene:

$$\mathfrak{F} \left[ e^{\frac{ik}{2f_{LD}} (y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right] = \sqrt{\frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)}} e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)} (v_z^2)} \quad (3.16)$$

Relacionando la ecuación (3.14) y (3.15) con la ecuación (2.26) se obtiene:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} \cdot \mathfrak{F}[t_0(x_0 y_0)] \otimes \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)} e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)} (u_z^2 + v_z^2)}}{i\lambda f_{LD}} \quad (3.17)$$

Sustituyendo la función de transmitancia dada por la ecuación (3.10) tenemos:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \left[ bsinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a) e^{-i2\pi du_z} \right] \otimes \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD}-z)} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \quad (3.18)$$

De acuerdo con la propiedad distributiva (Gaskill, 1978) se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left[ bsinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a) e^{-i2\pi du_z} \right] \otimes \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD}-z)} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \\ &= \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD}-z)} \left[ \left[ bsinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a) e^{-i2\pi du_z} \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

A continuación, se determina la convolución del primer sumando de la ecuación (3.18), además de aplicar la propiedad conmutativa y considerando  $\omega = \sqrt{u_z^2 + v_z^2}$  y  $u_z = \omega \cos\varphi$  (Zarate, 2011) se puede expresar como:

$$e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \otimes sinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} = e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\omega^2)} \otimes sinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} \quad (3.20)$$

Aplicando la definición de convolución esto es:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\omega^2)} \otimes sinc^2(bu_z) e^{i2\pi d\omega \cos\varphi} \\ &= e^{i2\pi du_z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}\beta^2} e^{-i2\pi d\beta \cos\varphi} sinc^2(b(u_z - \beta)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La integración por partes establece que:

$$\int g dh = gh - \int h dg \quad (3.22)$$

Donde:

$$g = \text{sinc}^2(b(u_z - \beta)) = \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \quad (3.23)$$

Así:

$$dg = d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] \quad (3.24)$$

De acuerdo con Zárate (2011) se tiene que:

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)\beta^2}} e^{-i2\pi d\beta \cos\varphi} d\beta = \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD}-z) \cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \quad (3.25)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (3.23) y (3.25) se puede escribir la integral de la ecuación (3.21) de la siguiente forma:

$$\int gdh = \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \cdot \left[ \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD}-z) \cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \right] - \left[ \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD}-z) \cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] \quad (3.26)$$

De acuerdo con Spiegel (1980) se tiene que:  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\pi b(u_z - \beta))}{\pi b(u_z - \beta)} = 0$  la ecuación (3.26) se reduce a:

$$\int gdh = - \left[ \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD}-z) \cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \right] \cdot 2 \int_0^{\infty} d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] \quad (3.27)$$

Calculando el término diferencial se obtiene:

$$d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] = \frac{[2\text{sen}(\pi b(u_z - \beta)) \cos(\pi b(u_z - \beta)) (-\pi b d\beta)(\pi^2 b^2)(u_z - \beta)^2] - [2(\pi^2 b^2)(u_z - \beta)(-d\beta)\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))]}{\pi^4 b^4 (u_z - \beta)^4} \quad (3.28)$$

Utilizando la relación trigonométrica:  $(2\text{sen}(\alpha))(\cos(\alpha)) = \text{sen}(2\alpha)$  la ecuación (3.28) se puede expresar cómo:

$$d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] = \frac{2\text{sen}(\pi b(u_z - \beta))\text{sen}(\pi b(u_z - \beta))d\beta + \pi b(\beta - u_z) \cos(\pi b(u_z - \beta))d\beta}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^3} \quad (3.29)$$

Calculando la integral del resultado obtenido en la ecuación (3.29) se tiene:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{2\text{sen}(\pi b(u_z - \beta))\text{sen}(\pi b(u_z - \beta)) + \pi b(\beta - u_z) \cos(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^3} \right] d\beta \quad (3.30)$$

Sustituyendo  $s = u_z - \beta$ , y  $ds = -d\beta$ , la integral (3.30) se puede reescribir como:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{(\pi b s)(\text{sen}(2\pi b s)) + \cos(2\pi b s) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} \right] d\beta \quad (3.31)$$

De acuerdo con el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{(\pi b s)(\text{sen}(2\pi b s)) + \cos(2\pi b s) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} \right] d\beta \\ = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\cos(2\pi b s) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} + \frac{\text{sen}(2\pi b s)}{\pi b s^2} \right] d\beta \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la integración:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} + \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi b s^2} \right] d\beta = \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} d\beta + \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi b s^2} d\beta \quad (3.33)$$

Calculando el primer factor integral de la ecuación (3.33) se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} d\beta \quad (3.34)$$

De acuerdo con la integración por partes:

$$\int k dn = kn - \int ndk \quad (3.35)$$

Donde:

$$k = -\frac{\cos(2\pi bs) - 1}{2\pi^2 b^2}, \quad dn = -\frac{2}{s^3} ds,$$

$$dk = \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi b} ds, \quad n = \frac{1}{s^2}$$

De esta forma podemos expresar la ecuación (3.35) como:

$$\int k dn = -\frac{\cos(2\pi bs) - 1}{2\pi^2 b^2 s^2} - \int \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi b s^2} ds \quad (3.36)$$

Volviendo a las variables principales con sus respectivos límites de evaluación se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} d\beta = \left[ -\frac{\cos(2\pi b) - 1}{2\pi^2 b^2 s^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi b s^2} d\beta \quad (3.37)$$

Sustituyendo el resultado de la integral (3.37) en la ecuación (3.33) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \left[ \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} + \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi bs^2} \right] d\beta \\
 &= \left[ -\frac{\cos(2\pi b) - 1}{2\pi^2 b^2 s^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi bs^2} d\beta + \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi bs^2} d\beta \\
 &= \left[ -\frac{\cos(2\pi b) - 1}{2\pi^2 b^2 s^2} \right]_0^{\infty}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

De acuerdo con la relación trigonométrica:  $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} = \text{sen}^2(\alpha)$  podemos expresar el resultado de la ecuación (3.38) como:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\cos(2\pi bs) - 1}{\pi^2 b^2 s^3} + \frac{\text{sen}(2\pi bs)}{\pi bs^2} \right] d\beta = \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi bs)}{\pi^2 b^2 s^2} \right]_0^{\infty} \tag{3.39}$$

Por lo que volviendo a las variables iniciales se obtiene que la integral de la ecuación (3.30) es:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \left[ \frac{2\text{sen}(\pi b(u_z - \beta))\text{sen}(\pi b(u_z - \beta)) + \pi b(\beta - u_z) \cos(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^3} \right] d\beta \\
 &= \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z))}{\pi^2 b^2 (u_z)^2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (3.40) en la ecuación (3.27) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int gdh &= - \left[ \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \right] \cdot 2 \int_0^{\infty} d \left[ \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z - \beta))}{\pi^2 b^2 (u_z - \beta)^2} \right] \\
 &= 2 \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \frac{\text{sen}^2(\pi b(u_z))}{\pi^2 b^2 (u_z)^2}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Por lo que al sustituir la ecuación (3.41) en la ecuación (3.21) se tiene que el primer factor convolución es:

$$\begin{aligned}
 & e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\omega^2)} \otimes \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Para el segundo factor de convolución de la ecuación (3.19) de acuerdo con Zárate (2011) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a) e^{-i2\pi du_z} \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \\
 &= e^{-i2\pi du_z} \left[ 2 \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \right] \cdot \left[ \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sustituyendo los resultados de la ecuación (3.42) y (3.43) en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[ b \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{a}{\omega} J_1(2\pi\omega a) e^{-i2\pi du_z} \right] \otimes \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD}-z)} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u_z^2+v_z^2)} \\
 &= \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD}-z)} \left[ \left[ 2b \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[ 2 \sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2(f_{LD}-z)\cos^2\varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \cdot \left[ \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right] e^{-i2\pi du_z} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Sustituyendo la ecuación (3.44) en la ecuación (3.18) tenemos que:

$$G_z(u_z, v_z) = E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \frac{f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \cdot \left[ \left[ 2b \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} \right] + \left[ 2 \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \varphi}{\lambda f_{LD}^2}} \cdot \left[ \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right] e^{-i2\pi du_z} \right] \right] \quad (3.45)$$

Simplificando la ecuación (3.45) se obtiene:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{2E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ b \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} e^{-i2\pi du_z} \right] e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \varphi}{\lambda f_{LD}^2}}}{\sqrt{i} \sqrt{\lambda (f_{LD} - z)}} \quad (3.46)$$

Además, considerando que  $(u_z/\omega)^2 = \cos^2 \varphi$  la ecuación (3.46) se puede expresar como:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{2E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ b \text{sinc}^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} e^{-i2\pi du_z} \right] e^{\frac{i\pi d^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}}}{\sqrt{i} \sqrt{\lambda (f_{LD} - z)}} \quad (3.47)$$

La ecuación (3.47) describe el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier el cual se ha propagado una longitud de camino óptico  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $x_0 y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $u_z v_z$  en el que se distribuye, mismo que se encuentra situado a una distancia  $z$  de la lente transformadora definida dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$  que a su vez, define la zona de convergencia de la lente transformadora de la lente referida también conocida como zona de convolución o región de Fresnel.

Se observa que en esta región el campo de difracción propagado desde el plano objeto está desfasado en  $45^\circ$  información contenida en el factor  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ . La función definida por la ecuación (3.47) es compleja por lo que puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[G_z(u_z, v_z)] = & \cos(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} \\ & + n_{L2}\Delta_{L2}]) \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \\ & \left[ \cos(2\pi d u_z) \right] \left[ b \operatorname{sinc}^2(b u_z) + \frac{a J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

De esta forma de acuerdo con la ecuación (3.48) la intensidad está dada por:

$$\begin{aligned} I_z(u_z, v_z) = & \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \\ & \left[ \cos^2\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \cdot \\ & \left[ \cos^2(2\pi d u_z) \left[ b^2 \operatorname{sinc}^4(b u_z) + (2ab) (\operatorname{sinc}^2(b u_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

La distribución de intensidad  $I_z(u_z, v_z)$  definida por la ecuación (3.49) establece que el espectro de difracción de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular se ha propagado una longitud de camino óptico  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $x_0 y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $u_z v_z$  en el que se distribuye, dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$  con un desfase de  $\frac{\pi}{4}$  radianes. La intensidad del espectro de difracción referido es una modulación de funciones donde puede ocurrir que la función  $\cos^2\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$  module las franjas de Young definidas por la función  $\cos^2(2\pi d u_z)$ , así como a la función compuesta por la suma de las funciones Sinc y Bessinc siguientes  $b^2 \operatorname{sinc}^4(b u_z) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2$  así como del término  $(2ab) (\operatorname{sinc}^2(b u_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)$ .

También se puede trabajar con la parte imaginaria de la ecuación (3.47), quedando definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}[G_z(u_z, v_z)] &= \text{sen}(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} \\
 &+ n_{L2}\Delta_{L2}]) \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right. \\
 &\left. (\text{sen}(2\pi d u_z)) \left[ b \text{sinc}^2(bu_z) + \frac{a J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right] \right] \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Mientras que la distribución de intensidad de acuerdo con la ecuación (3.50) es:

$$\begin{aligned}
 I_z(u_z, v_z) &= \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] (\text{sen}^2(2\pi d u_z)) \\
 &\left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + (2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.51) se puede interpretar de la siguiente forma: la intensidad del espectro de difracción de convolución de transformada de Fourier producido se ha propagado una longitud de camino óptico  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $x_0y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $u_zv_z$  en el que se distribuye, dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$  con un

desfase de  $\frac{\pi}{4}$  radianes, escalado por el factor  $\left(\frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD}-z)}}\right)^2$ . La función  $\text{sen}^2\left(\frac{\pi d^2(f_{LD}-z)\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$  representa franjas curvas de interferencia de máxima intensidad, además puede ocurrir que module las franjas de Young definidas por la función  $\text{sen}^2(2\pi d u_z)$ , así como a la función compuesta por la suma de las funciones Sinc y Bessinc siguientes  $b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + a^2 \left(\frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega}\right)^2$  así como del término  $(2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \left(\frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega}\right)$ .

Ahora se considera el caso para la zona divergente de la lente doblete acromática cementada situada dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ , bajo esta condición la ecuación (3.47) se escribe de la siguiente forma:

$$G_z(u_z, v_z) = \frac{2E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ bsinc^2(bu_z) e^{i2\pi du_z} + \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} e^{-i2\pi du_z} \right] e^{-i\frac{3\pi}{4}} e^{-\frac{i\pi d^2(z-f_{LD})\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}}}{\sqrt{\lambda(z-f_{LD})}} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) describe el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier de un par de aberturas de geometría triangular y circular el cual se ha propagado una longitud de camino óptico  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $x_0y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $u_zv_z$  en el que se distribuye, mismo que se encuentra situado a una distancia  $z$  de la lente transformadora definida dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$  que a su vez, define la zona de divergencia de la lente transformadora.

Se observa que en esta región el campo de difracción propagado desde el plano objeto está desfasado en  $\frac{3\pi}{4}$  radianes.

Para obtener información física palpable se considera solo la parte real de la ecuación (3.52), esto es:

$$Re[G_z(u_z, v_z)] = \cos(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z-f_{LD})}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi d^2(z-f_{LD})\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \left[ \cos(2\pi du_z) \left[ bsinc^2(bu_z) + \frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right] \right] \quad (3.53)$$

Así la distribución de intensidad de acuerdo con la ecuación (3.53) es:

$$I_z(u_z, v_z) = \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{4} \right) \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}])$$

$$\left[ \cos^2 \left( \frac{\pi d^2(z - f_{LD}) \left( \frac{u_z}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left[ \cos^2(2\pi d u_z) \left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) \right. \right. \quad (3.54)$$

$$\left. \left. + (2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \right]$$

La distribución de intensidad  $I_z(u_z, v_z)$  definida por la ecuación (3.54) establece que el espectro de difracción de convolución de transformada de Fourier se ha propagado una longitud de camino óptico  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $x_0y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $u_zv_z$  en el que se distribuye, dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$  con un desfase de  $\frac{3\pi}{4}$  radianes. La intensidad del espectro de difracción referido es una modulación de funciones donde puede ocurrir que la función  $\cos^2 \left( \frac{\pi d^2(z - f_{LD}) \left( \frac{u_z}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right)$  module las franjas de Young definidas por la función  $\cos^2(2\pi d u_z)$ , así como a la función compuesta por la suma de las funciones Sinc y Bessinc siguientes  $b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2$  así como del término  $(2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)$ .

El análisis también se puede realizar tomando la parte imaginaria de la ecuación (3.52) esto es:

$$\text{Im}[G_z(u_z, v_z)]$$

$$= \text{sen}(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1}$$

$$+ n_{L2}\Delta_{L2}]) \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \text{sen} \left( \frac{3\pi}{4} \right) \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi d^2(z - f_{LD}) \left( \frac{u_z}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \quad (3.55)$$

$$\left( \text{sen}(2\pi d u_z) \right) \left[ b \text{sinc}^2(bu_z) + \frac{a J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right]$$

De esta forma, la distribución de intensidad de acuerdo con la ecuación (3.55) queda definida de la siguiente forma:

$$I_z(u_z, v_z) = \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi d^2(z - f_{LD})\left(\frac{u_z}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] (\text{sen}^2(2\pi d u_z)) \quad (3.56)$$

$$\left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + (2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) + a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right]$$

De acuerdo con la ecuación (3.56), la distribución de intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular desplazadas del origen de coordenadas  $x_0y_0$  que se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  hasta la zona divergente de la lente transformadora, está escalado de acuerdo con el factor  $\left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right)^2$ , además se puede visualizar como la modulación de anillos concéntricos de interferencia definidos por la función Bessinc cuadrada, sobre las franjas de interferencia de tipo curvo definidas por la función seno cuadrada. También se puede interpretar que la función seno cuadrada modula a la función Bessinc cuadrada.

# CAPITULO 4

## Desarrollo Experimental

Los resultados que se presentan en este capítulo fueron obtenidos a través de la implementación de un arreglo óptico, el cual permite obtener a la distancia focal de la lente transformadora la distribución del patrón de difracción de la transformada exacta de Fourier, de la función de transmitancia asociada a las aberturas triangular y circular estudiadas; cuyos modelos matemáticos se determinaron en el capítulo 2 de este trabajo. Además, el arreglo óptico permitirá variar la distancia de la lente transformadora al plano de distribución para obtener los patrones de difracción en distribución de intensidad de la convolución de transformadas Fourier de la función de transmitancia asociada al objeto difractor dentro de los intervalos de distancias  $0 < z < f_{LD}$  y  $f_{LD} < z < \infty$ .

### 4.1 Descripción del arreglo óptico

Para obtener los patrones de difracción en distribución de intensidad se sometió a estudio, un par aberturas de geometría circular y triangular consideradas como objeto difractor, contenidas una placa plana de plástico, mismas que son mostradas en la figura 3, mientras que el espesor del objeto difractor fue  $l_z = 0.5mm$ , el cual permite “despreciarlo” como factor de longitud importante en los resultados.

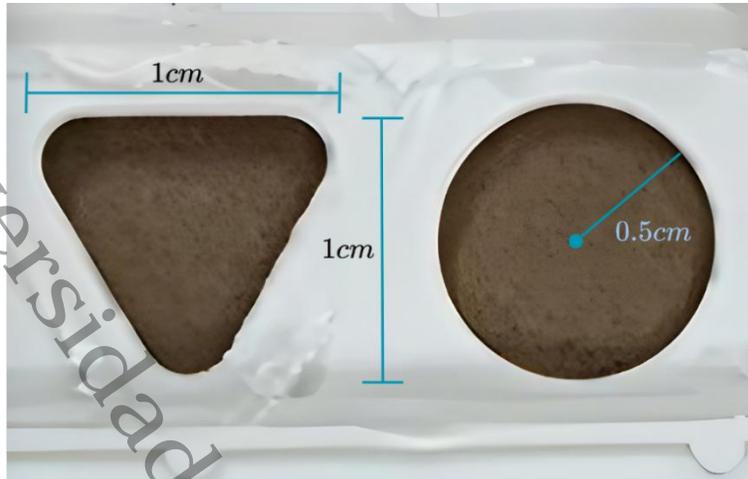


Figura 3: Objeto difractor utilizado para la obtención de los patrones de difracción

### Descripción del arreglo experimental

En el arreglo experimental mostrado en la figura 4 se utilizó una fuente de luz laser, que emite un haz de luz de  $17\text{ mw}$  de potencia y de longitud de onda  $\lambda = 633\text{ nm}$  de frente de onda gaussiano provenientes de la cavidad (1) incidiendo posteriormente en (2) donde es ampliado y filtrado de ruido óptico usando para ello una lente objetivo de microscopio de  $40\times$  y un pinhole de  $50\mu\text{m}$  de diámetro, generado de esta manera ondas monocromáticas esféricas divergentes, las cuales son colimadas usando la lente doblete acromática cementada (3) de distancia focal  $f_{LC} = 30\text{ cm}$ . Las ondas monocromáticas planas iluminan el objeto difractor (4) bajo estudio. El campo o espectro de ondas difractadas por el objeto referido, se propaga hasta incidir en la lente doblete cementado o transformadora (5) de distancia focal  $f_{LD} = 30\text{ cm}$  dicha lente, a su vez propaga el campo difractado hasta el plano (6) donde finalmente se distribuye generando así el patrón de difracción en distribución de intensidad, el cual es capturado o fotografiado, usando el método fotográfico con cámara digital de 18 megapíxeles.

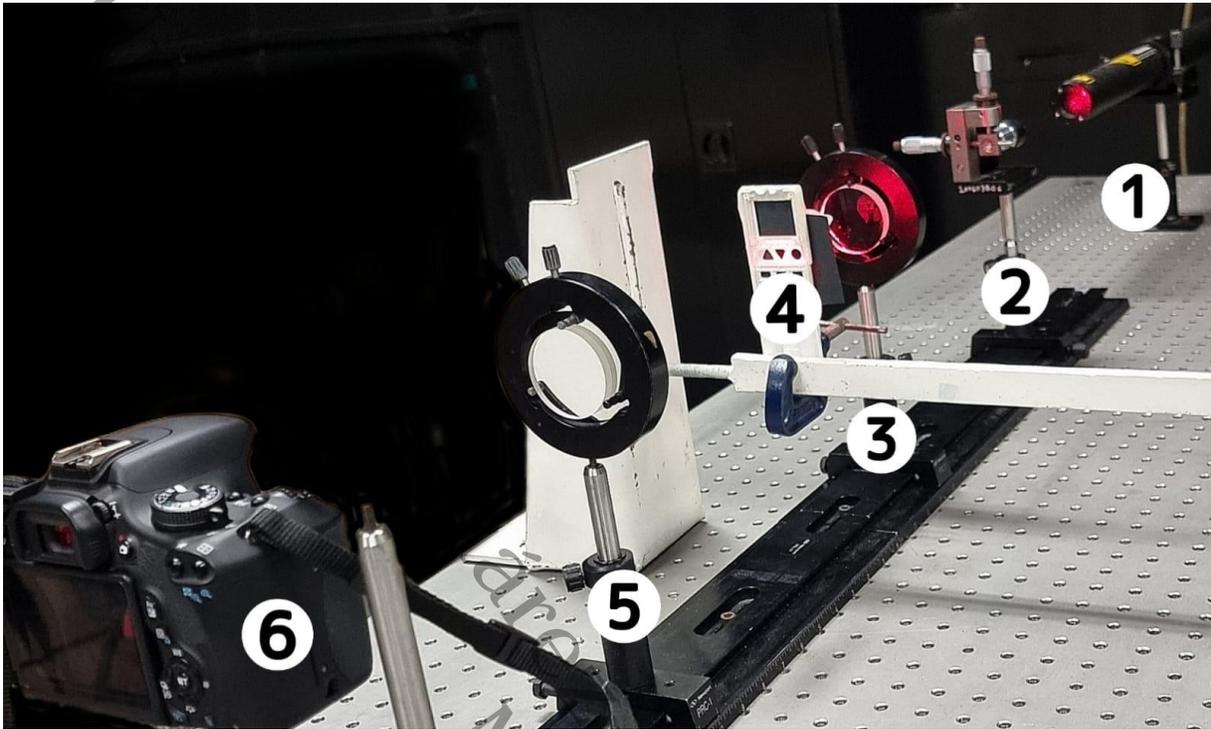


Figura 4: Arreglo experimental para obtener el espectro de difracción: 1) Laser de Helio-Neón; 2) Filtro; 3) Lente colimadora; 4) Objeto difractor; 5) Lente transformadora; 6) Cámara digital.

## 4.2 Resultados experimentales

### 4.2.1 Grabado de patrones de difracción

En esta sección se muestra los resultados experimentales obtenidos a base de imágenes de los patrones de difracción en distribución de intensidad, que está soportada por las ecuaciones (3.13) y (3.49) de este trabajo de tesis, en la región de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier; así como en la región de Fresnel convergente y divergente producido por un par de aberturas de geometría circular y triangular usadas como objeto difractor y contenidas en la placa de plástico mostrada en la figura 3.

### 4.3 Espectro de transformada exacta de Fourier de abertura triangular y circular.

Como primer caso se estudia el espectro de difracción producido por el método experimental, por el objeto difractor mostrado en la figura 1 el cual fue implementado en el plano objeto  $x_0y_0$  como se muestra en el arreglo experimental de la figura 4, situado a la distancia focal frontal  $d_0 = f_{LD} = 25 \text{ cm}$  de la lente transformadora. Mientras que el plano de distribución del patrón de difracción estuvo a la distancia focal posterior, es decir,  $z = f_{LD} = 25 \text{ cm}$ . el grabado de las imágenes de cada patrón de difracción en distribución e intensidad fue realizado usando el método fotográfico con lugar en el que se colocó la cámara digital EOS Rebel T3i de 18 megapíxeles. Se grabaron varias fotografías de los patrones de difracción producidos por el objeto difractor de la figura 4 a la distancia focal posterior  $f_{LD} = 25 \text{ cm}$ , también conocida como región de fraunhofer o de la transformada de fourier, variandose los tiempos de exposición los cuales fueron  $\frac{1}{1000} \text{ s}$  y  $\frac{1}{500} \text{ s}$ .

Las imágenes fotográficas que se muestran en las figuras 5 y 6 son las más representativas del fenómeno de difracción. Para una mejor interpretación de los resultados se utilizó un método de mejoramiento de imágenes el cual consistió en una variación de las propiedades de las fotografías obtenidas variando nitidez, brillo y contraste.

Las imágenes de la figura 5 y 6 dan referencia del espectro de difracción de transformada exacta de Fourier en distribución de intensidad, cada una de estas imágenes fueron grabadas a los tiempos de exposición  $\frac{1}{1000} \text{ s}$  y  $\frac{1}{500} \text{ s}$  respectivamente, y a la distancia  $z$  de la lente transformadora que es igual a la distancia focal posterior de la lente referida, es decir, a una distancia  $z = f_{LD} = 25 \text{ cm}$ . Las imágenes referidas fueron procesadas digitalmente en una PC y se obtuvieron en un formato JPG para ser manipuladas en documentos Word. A la imagen de la figura 5 durante el procesamiento de imagen, se trató dándole nitidez -2%, brillo 28% y contraste 46%. Mientras que a la imagen de la figura 6 se le dio nitidez 12%, brillo 41% y contraste 49%.

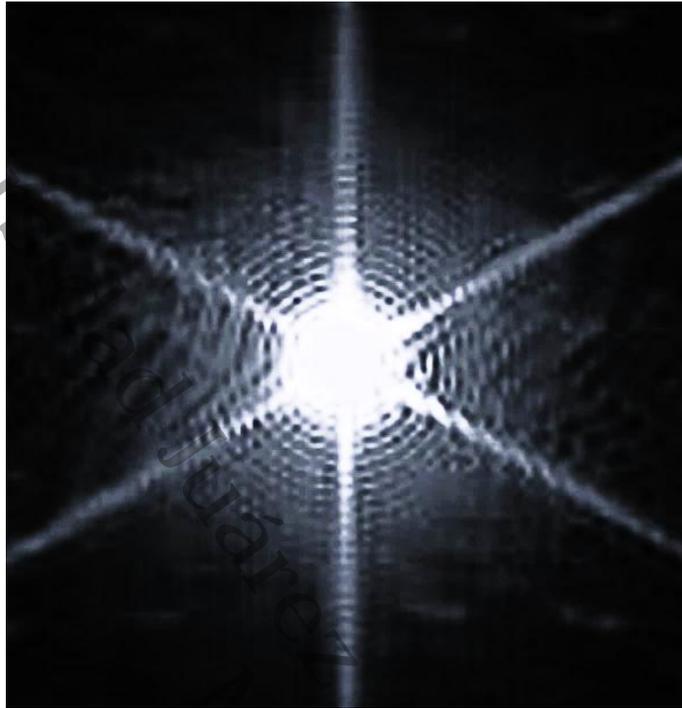


Figura 5: Patrón de difracción de transformada exacta de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de  $1/1000s$  y distancia  $z=25$  cm.

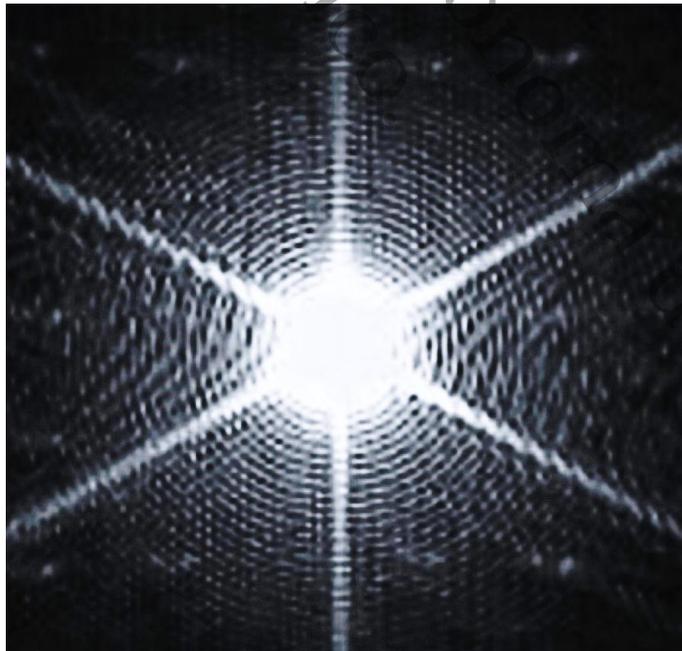


Figura 6: Patrón de difracción de transformada exacta de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de  $1/500s$  y distancia  $z=25$  cm.

Con base en las imágenes 5 y 6 se puede observar el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, tiene la interpretación siguiente: El patrón de difracción compuesto por franjas de interferencia tipo Young de distribución  $\cos(4\pi du_z)$  poco perceptibles y las de distribución  $\text{sinc}^2(bu_z)$  consistente de seis puntas, de máxima y mínima de intensidad, cuya distribución está modulada por franjas de interferencia de distribución Besinc al cuadrado  $\left(\frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega}\right)^2$ , en las figuras 5 y 6 este patrón de franjas se observa arriba y bajo de igual forma existen las otras distribuciones de franjas. Quiero recordar que la afirmación anterior se predijo con la ecuación (3.13), misma que se presenta más abajo. Basta recordar que la región de la transformada de Fourier el segundo sumando de la ecuación (3.13) correspondiente al triple producto de funciones es el más relevante en la distribución de intensidad de las figuras 5 y 6.

$$I_z(u_z, v_z) = \left(\frac{E_0}{\lambda f_{LD}}\right)^2 \left[ b^2 \text{sinc}^4(bu_z) + (2ab)(\text{sinc}^2(bu_z)) \cos(4\pi du_z) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} + \left(\frac{aJ_1(2\pi\omega a)}{\omega}\right)^2 \right) \right] \quad (3.13)$$

#### 4.4 Espectro de convolución de transformadas de Fourier de abertura triangular y circular en zona de Fresnel convergente.

Como segundo caso de estudio se grabaron los espectros de difracción de frecuencias espaciales, de convolución de transformadas de Fourier asociados al objeto difractor compuesto por abertura triangular y circular mostrados en la figura 3. Las imágenes obtenidas se muestran en las figuras 7 y 8. Para esto se mantuvo el objeto difractor a la misma distancia  $d_0 = f_{LD} = 25 \text{ cm}$  de la lente transformadora y en el plano  $x_0y_0$  de la etapa experimental del caso anterior, como se hace ver en el arreglo experimental de la figura 1. Además, cabe recordar que continuó siendo iluminado con ondas planas de luz de láser de He-Ne.

Las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier que se reportan en las figuras 7 y 8, fueron grabadas en la zona de Fresnel convergente de la lente doblete acromático cementado usada como lente transformadora a una distancia  $z = 24 \text{ cm}$  de la lente referida al plano de frecuencias espaciales  $u_zv_z$  en el que se distribuye cada espectro, cae dentro del intervalo de distancias  $0 < z < f_{LD}$ ; conocido como región de Fresnel convergente o de convolución de transformadas de Fourier. Para el grabado de las imágenes de los espectros de difracción en intensidad, se usó nuevamente el método de fotográfico con cámara electrónica digital EOS Rebel T3i de 18 megapíxeles.

Las imágenes referidas fueron procesadas digitalmente en una PC y se obtuvieron en un formato JPG para ser manipuladas en documentos Word. A la imagen de la figura 7 durante el procesamiento de imagen, se trató dándole nitidez 46%, brillo 29% y contraste 38%. Mientras que a la imagen de la figura 8 se le dio nitidez 22%, brillo 14% y contraste 34%.

La imagen del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier de las figuras 7 y 8 propician una mejor interpretación de la forma geométrica de las aberturas; ya que se genera una imagen de la distribución de franjas de interferencia independiente y propio para cada abertura que compone al objeto difractor, es decir a cada abertura tanto circular y triangular simultáneamente.

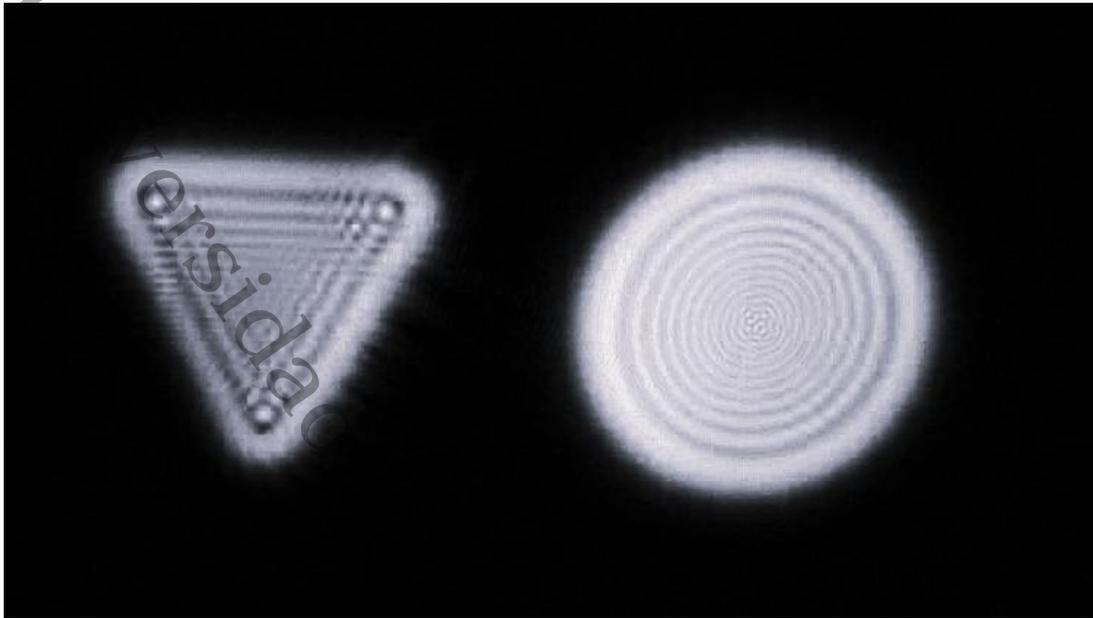


Figura 7: Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con velocidad de obturación de 1/600 y distancia  $z=24$  cm

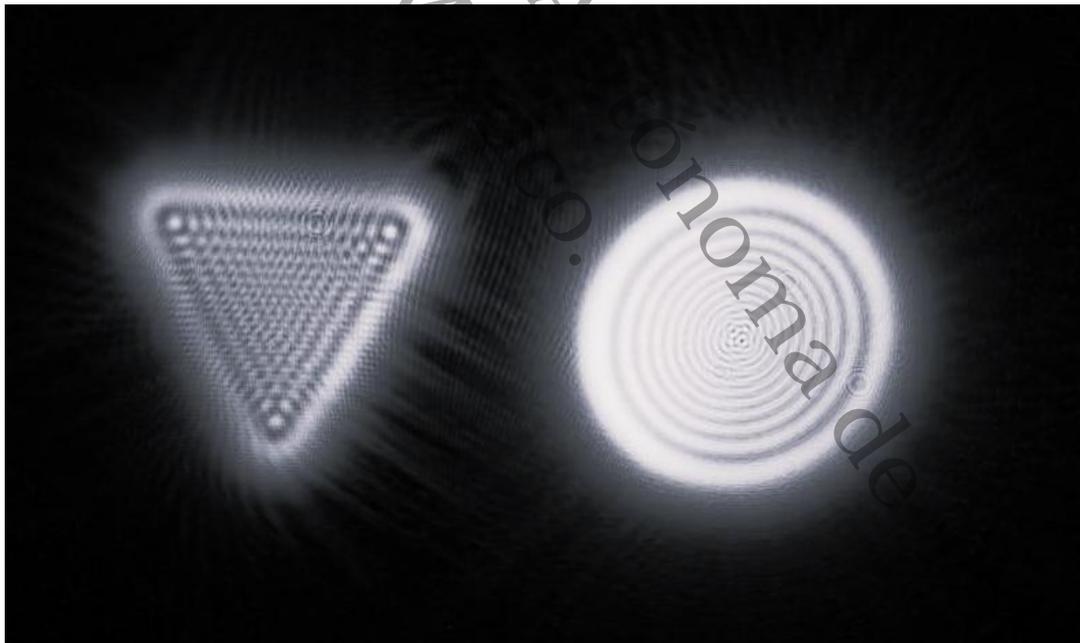


Figura 8: Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/100s y distancia  $z=24$  cm.

Las imágenes de las figuras 7 y 8 del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier en la región de Fresnel convergente, en distribución de intensidad, fueron gabadas con tiempos de exposición de  $\frac{1}{600}$  s y  $\frac{1}{100}$  s respectivamente, y a la distancia  $z = 24$  cm.

Los patrones de difracción de las figuras 7 y 8 proporcionan información de la distribución de las franjas de interferencia de máxima y mínima intensidad descritos por la ecuación (3.49) el cual se considera como derecho. Cabe recalcar que para este caso los términos primero y tercero del segundo factor entre corchetes, son los que aportan más información al patrón de difracción y la forma de cómo se distribuyen las franjas difractadas.

$$\begin{aligned}
 I_z(u_z, v_z) = & \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \\
 & \left[ \cos^2\left(\frac{\pi d^2(f_{LD} - z)\cos^2(\varphi)}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \left[ \cos^2(2\pi d u_z) b^2 \text{sinc}^4(b u_z) \right. \\
 & + (2ab)\cos^2(2\pi d u_z) (\text{sinc}^2(b u_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) \\
 & \left. + \cos^2(2\pi d u_z) a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right] \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

#### **4.4 Espectro de convolución de transformadas de Fourier de abertura triangular y circular en zona de Fresnel divergente.**

Como tercer y último caso de estudio se grabaron los espectros de difracción de frecuencias espaciales, de convolución de transformadas de Fourier asociados al objeto difractor compuesto por el par de aberturas triangular y circular, en la región de Fresnel divergente del doblete cementado usado como lente transformadora. Las imágenes obtenidas se muestran en las figuras 9 y 10. Donde nuevamente se mantuvo la posición fija del objeto en el plano objeto  $x_0y_0$  de la misma manera que las otras etapas experimentales, el objeto difractor se mantuvo a la distancia focal anterior  $d_0 = f_{LD} = 25 \text{ cm}$  de la lente transformadora, como se puede observar en el arreglo experimental de la figura 2. Donde el objeto difractor continuó siendo iluminado con ondas planas de luz de láser de He-Ne.

Las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier que se reportan en las figuras 9 y 10, fueron grabadas en la zona divergente de la lente doblete acromático cementado usada como lente transformadora, a una distancia  $z = 38 \text{ cm}$  de la lente referida al plano de frecuencias espaciales  $u_zv_z$  en el que se distribuye cada espectro, cae dentro del intervalo de distancias  $f_{LD} < z < \infty$  a la lente transformadora; conocido como región de Fresnel divergente o de convolución de transformadas de Fourier. Para el grabado de las imágenes de los espectros de difracción en intensidad, se usó nuevamente el método de fotográfico con cámara electrónica digital EOS Rebel T3i de 18 megapíxeles.

De igual forma las imágenes referidas fueron procesadas digitalmente en una PC y se obtuvieron en un formato JPG para ser manipuladas en documentos Word. A la imagen de la figura 9 durante el procesamiento de imagen, se trató dándole nitidez 46%, brillo 29% y contraste 38%. Mientras que a la imagen de la figura 10 se le dio nitidez 22%, brillo 14% y contraste 34%.

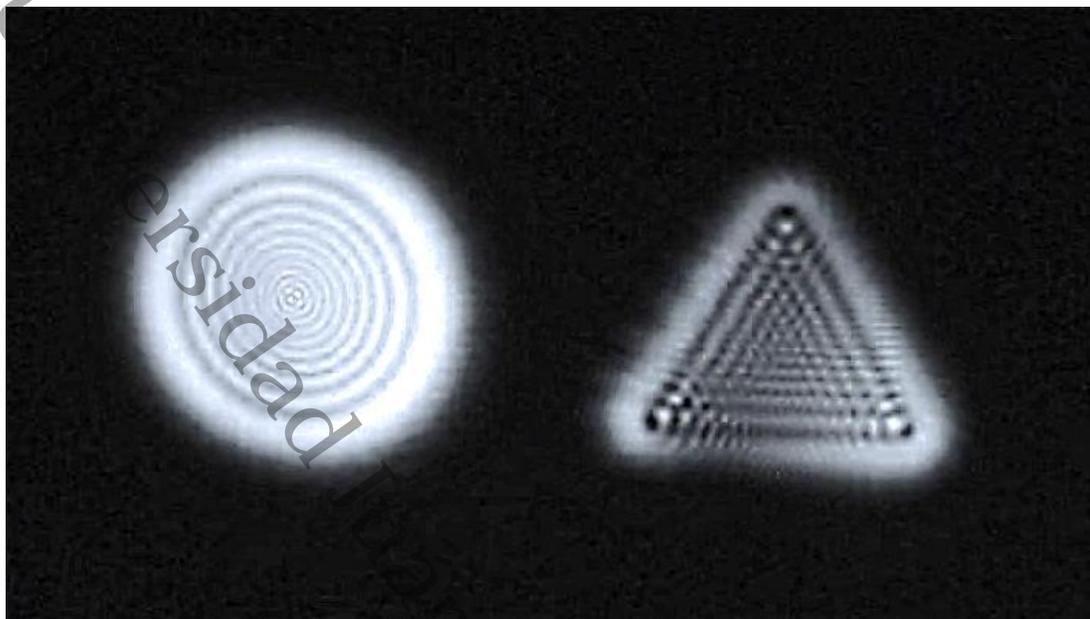


Figura 9: Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/100s y distancia  $z=38$  cm.

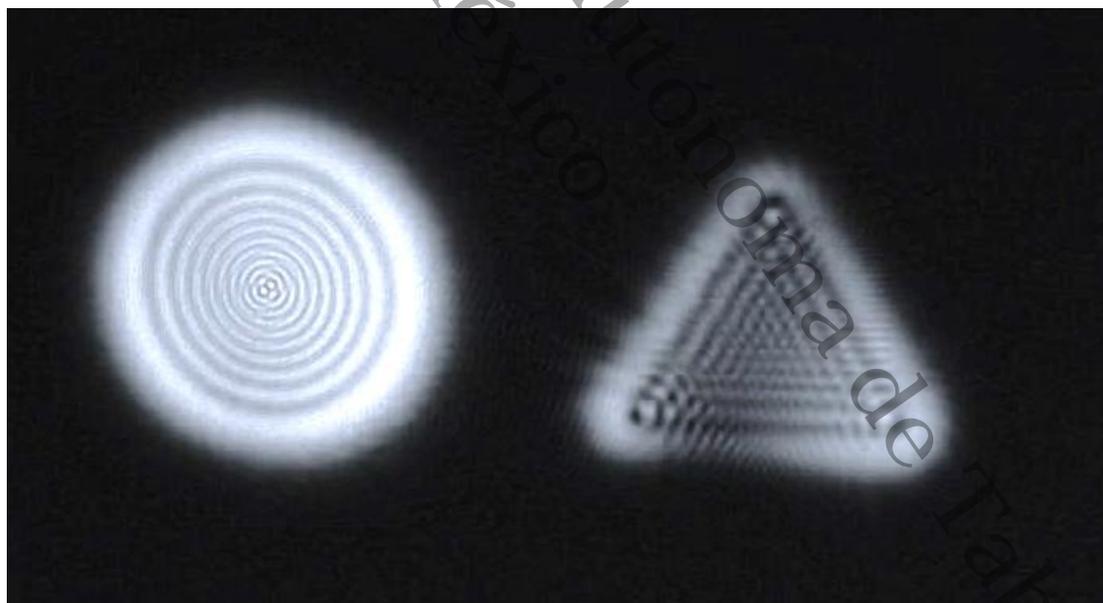


Figura 10: Espectro de convolución de transformada de Fourier producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular con tiempo de grabado de 1/500s y distancia  $z=38$  cm.

Las imágenes de las figuras 9 y 10 se consideran izquierdas, surgen como consecuencia del desfaseamiento del patrón de difracción. Una observación interesante que surge de las imágenes difractadas es forma como han rotado simétricamente alrededor del eje de frecuencias espaciales  $v$  en el espacio de Fourier. También se observa que han rotado alrededor del eje de frecuencias espaciales  $u$  en el espacio de Fourier. Donde se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de irradiancia los cuales cuantitativamente se pueden asociar con los valores dados por la ecuación (3.54) para la distribución de intensidad. De cada imagen de las figuras 9 y 10, se observa que el primer y tercer término del segundo corchete de la ecuación (3.54) son los que aportan más información de los patrones de difracción. Se ve en las imágenes antes referidas, que la función triángulo difracta hacia su interior franjas de forma triangular, moduladas por franjas lineales de Young de forma horizontal. Mientras que el tercer término proporciona franjas de difracción de distribución Beselsinc cuadrada, modulado a franjas de Young poco visibles. Por supuesto esto sucede en la región de Fresnel divergente del doblete cementado.

$$\begin{aligned}
 I_z(u_z, v_z) = & \left( \frac{2E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{4} \right) \cos^2 (k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \\
 & \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi d^2(z - f_{LD}) \cos^2(\varphi)}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left[ \cos^2(2\pi d u_z) b^2 \text{sinc}^4(bu_z) \right. \\
 & + (2ab) \cos^2(2\pi d u_z) (\text{sinc}^2(bu_z)) \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right) \\
 & \left. + \cos^2(2\pi d u_z) a^2 \left( \frac{J_1(2\pi\omega a)}{\omega} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados teóricos y experimentales que fueron obtenidos en este trabajo de tesis, se han establecido las siguientes conclusiones:

- 1) El desarrollo teórico realizado en este trabajo permitió lograr el Objetivo General: Determinar el modelo matemático de difracción producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular, propagado con un doblete cementado, mediante el método del espectro angular, ver ecuación (2.11). Dicho modelo, no tiene una interpretación Física sencilla respecto a la amplitud del campo eléctrico difractado, propagado hasta el plano de distribución una distancia  $z$  del lente doblete cementado usado como transformador. Bajo la definición de frecuencias espaciales ecuaciones (2.12) y (2.13), el campo difractado antes referido va adquiriendo una mejor interpretación en términos de la transformada de Fourier.
- 2) El objetivo específico. Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fresnel convergente de un doblete cementado, situada en el intervalo ( $0 < z < fLD$ ). Se logró como se muestra en la ecuación (2.26), la cual se determinó bajo breves operaciones, en el intervalo de distancias antes referido, también a esta región de Fresnel convergente, se le conoce como de convolución de transformadas de Fourier, del doblete cementado. Un aspecto importante es el desfaseamiento de las ondas difractadas hasta esta región divergente.
- 3) Referente al objetivo específico de: Generar el modelo matemático de difracción en la región de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, situada en distancia focal posterior

( $z = f_{LD}$ ) del doblete cementado. Fue logrado mediante la interpretación del campo de difracción de transformada de Fourier ecuación (2.30), como un caso especial de convolución de transformadas de Fourier.

- 4) Fue logrado el objetivo específico consistente en: Implementar un arreglo experimental óptico coherente, utilizando fuente de luz de láser, como se muestra en la etapa experimental ver figura 3. En este caso se utilizó como lente transformadora un doblete cementado acromático, que no induce aberraciones cromáticas ni monocromáticas en las ondas del campo difractado que se propagan a través del doblete.
- 5) El último objetivo específico consistió en: Producir y grabar los patrones de difracción en distribución de intensidad. El cual también fue logrado y de acuerdo con la información experimental en distribución de intensidad de los espectros de difracción de transformada de Fourier y los de convolución de transformadas de Fourier. Permiten corroborar los modelos matemáticos definidos por las ecuaciones (3.13), (3.48), (3.55), para la transformada de Fourier y convolución de transformadas de Fourier respectivamente. Además, se puede concluir que, para un objeto de difractor compuesto por aberturas de diferentes geometrías el patrón de difracción generado por ellas, en el plano de la transformada de Fourier o de enfoque, las franjas de difracción se superponen y no proporcionan una interpretación adecuada de la superposición de ellas. Mientras que, la distribución de intensidad del campo difractado en la región de Fresnel o de convolución convergente o divergente del doblete cementado, se tiene una mejor interpretación del patrón de difracción.
- 6) Existen zonas con franjas de máxima y de mínima intensidad, en cada patrón de difracción, lo que se denomina la parte interna del espectro y la externa a él, algunos producidos en el plano de Fraunhofer y otros en los planos de Fresnel; a causa de las dos aberturas con diferentes geometrías que forman el objeto difractor. Para resolver este problema de forma más completa, se sugiere realizar una simulación en computadora de los modelos matemáticos generados en este trabajo de Tesis.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Hecht, Eugene. (2002). Optics. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- [2] Goodman, J. W. (2005). Introduction to Fourier optics. Roberts and Company Publisher.
- [3] Malacara Hernández, D. (2015). Óptica básica.
- [4] Wrede, R., & Spiegel, M. R. (2002). Theory and problems of advanced calculus. McGraw-Hill.
- [5] Spiegel Murray R. (1980). Cálculo superior, McGraw Hill.
- [6] Zarate, E. A. (2011). Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas.
- [7] Smith, R. C., & Marsh, J. S. (1974). Diffraction patterns of simple apertures. *JOSA*, 64(6), 798-803.
- [8] Andrés-Zárate, E., Angulo Córdova, Q., Gutiérrez Tepach, G., & Hernández-Nolasco, J. A. (2019). Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. *Revista mexicana de física*, 65(3), 299-306.
- [9] Papoulis, A. (1968). Systems and transforms with applications in optics. *McGraw-Hill Series in System Science*.
- [10] Asakura, T., & Akamatsu, I. (1972). Fresnel diffraction by a circular aperture illuminated with partially coherent light. I. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 19(9), 749-763.

- [11] Sheppard, C. J. R., & Hrynevych, M. (1992). Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory. *JOSA A*, 9(2), 274-281.
- [12] Quintero, O., Barrera, J. F., Henao, R., & Medina, F. F. (2006). Prevailing effects of interference or diffraction by multiple apertures. *Optics communications*, 266(2), 558-561.
- [13] Andrés-Zárate, E., & Cornejo-Rodríguez, A. (2011). La abertura de una lente, su efecto en el espectro de difracción convolutivo, frecuencia espacial y viñeteado. *Revista mexicana de física*, 57(6), 491-498.
- [14] Hernando Acevedo, C., Fernando Díaz, C., & Torres-Moreno, Y. (2015). Determinación de la carga topológica de un haz Bessel-gauss mediante el patrón de difracción a través de una abertura triangular equilátera. *Dyna*, 82(190), 214-220.
- [15] Bracewell, R. N. (1999). *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- [16] Ersoy, O. K. (2006). *Diffraction, Fourier optics and imaging*. John Wiley & Sons.

<b>Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional</b>	
<b>Título de Tesis:</b>	Difracción en un doblete cementado, usando aberturas con geometrías diferentes.
<b>Autor de la Tesis:</b>	Jesús Fernando Ramírez Hernández
<b>ORCID:</b>	0009-0003-2586-514X
<b>Resumen de la Tesis:</b>	<p>El objetivo general de este trabajo de Tesis fue: Determinar el modelo matemático de difracción producido por un par de aberturas de geometría triangular y circular, propagado con un doblete cementado, mediante el método del espectro angular. El cual se logró haciendo uso del método de propagación antes referido, en el que se utiliza elementos de la óptica difractiva como, espectros de frecuencias espaciales o de patrones de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, haciendo uso como objeto director un par de aberturas con geometrías circular y triangular, utilizando los conceptos de propagación del espectro angular. Como resultados teóricos, se obtuvo el modelo matemático de difracción de transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada al objeto difractor, en distribución de amplitud e intensidad en el plano de enfoque o región de Fraunhofer. También se determinaron los modelos matemáticos de convolución de difracción de transformadas de Fourier, que involucra la función de transmitancia asociada al objeto difractor en amplitud y en intensidad, en la región de Fresnel</p>

	<p>convergente y divergente del doblete cementado. Los resultados de tipo experimental se obtuvieron mediante el desarrollo de una etapa experimental utilizando un arreglo óptico coherente. Los patrones de difracción producidos en la distribución de intensidad fueron grabados haciendo uso del método fotográfico con cámara electrónica digital, a distintas distancias el doblete cementado usado como lente transformador. A manera de conclusión se establece que: Los resultados teóricos obtenidos y su corroboración experimental, permiten abrir nuevos aspectos para la óptica difractiva.</p>
<p><b>Palabras claves de la Tesis:</b></p>	<p>Difracción, Lente doblete. Transformada de Fourier, Patrones de difracción, Distribución de intensidad, Región de Fraunhofer, Región de Fresnel.</p>
<p><b>Referencias citadas:</b></p>	<p>[1] Hecht, Eugene. (2002). Optics. Reading, Mass.: Addison-Wesley.</p> <p>[2] Goodman, J. W. (2005). Introduction to Fourier optics. Roberts and Company Publisher.</p> <p>[3] Malacara Hernández, D. (2015). Óptica básica.</p> <p>[4] Wrede, R., &amp; Spiegel, M. R. (2002). Theory and problems of advanced calculus. McGraw-Hill.</p> <p>[5] Spiegel Murray R. (1980). Cálculo superior, McGraw Hill.</p> <p>[6] Zarate, E. A. (2011). Estudio de patrones de difracción en la Evaluación de Aberturas.</p> <p>[7] Smith, R. C., &amp; Marsh, J. S. (1974). Diffraction patterns of simple apertures. JOSA, 64(6), 798-803.</p> <p>[8] Andrés-Zárate, E., Angulo Córdova, Q., Gutiérrez Tepach, G., &amp; Hernández-Nolasco, J. A. (2019). Modelo matemático de difracción en región convergente y divergente de una lente esférica. <i>Revista mexicana de física</i>, 65(3), 299-306.</p>

	<p>[9] Papoulis, A. (1968). Systems and transforms with applications in optics. <i>McGraw-Hill Series in System Science</i>.</p> <p>[10] Asakura, T., &amp; Akamatsu, I. (1972). Fresnel diffraction by a circular aperture illuminated with partially coherent light. I. <i>Optica Acta: International Journal of Optics</i>, 19(9), 749-763.</p> <p>[11] Sheppard, C. J. R., &amp; Hrynevych, M. (1992). Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory. <i>JOSA A</i>, 9(2), 274-281.</p> <p>[12] Quintero, O., Barrera, J. F., Henao, R., &amp; Medina, F. F. (2006). Prevailing effects of interference or diffraction by multiple apertures. <i>Optics communications</i>, 266(2), 558-561.</p> <p>[13] Andrés-Zárate, E., &amp; Cornejo-Rodríguez, A. (2011). La abertura de una lente, su efecto en el espectro de difracción convolutivo, frecuencia espacial y viñeteado. <i>Revista mexicana de física</i>, 57(6), 491-498.</p> <p>[14] Hernando Acevedo, C., Fernando Díaz, C., &amp; Torres-Moreno, Y. (2015). Determinación de la carga topológica de un haz Bessel-Gauss mediante el patrón de difracción a través de una abertura triangular equilátera. <i>Dyna</i>, 82(190), 214-220.</p> <p>[15] Bracewell, R. N. (1999). The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.</p> <p>[16] Ersoy, O. K. (2006). <i>Diffraction, Fourier optics and imaging</i>. John Wiley &amp; Sons.</p>
--	--