UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

ROSA ISELA SÁNCHEZ BRITO

DIRECTORA

M.C. CRISTINA CAMPOS JIMÉNEZ

Cunduacán, Tab. Octubre 2024

Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, el día 23 del mes de Octubre del año 2024, la que suscribe **Rosa Isela Sánchez Brito**, alumna del Programa de la Licenciatura en Matemáticas, con número de matrícula 182A31009, adscrito a la División Académica de Ciencias Básicas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autora de la Tesis presentada para la obtención del (título, diploma o grado según sea el caso) grado de Licenciatura y titulada **"UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO"** dirigida por M.C. Cristina Campos Jiménez

DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita. Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 23 de octubre de 2024

Rosa Isela Sánchez Brito

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

División Académica de Ciencias Básicas

2024 Felipe Carrillo PUERTO

DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 23 de octubre de 2024.

C. ROSA ISELA SÁNCHEZ BRITO
PASANTE DE LA LIC. EN MATEMÁTICAS
PRESENTE

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO"**, dirigido por la Mtra. Cristina Campos Jiménez, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Justino Alavez Ramírez, Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez, Dr. Alejandro Peregrino Pérez, Dr. Gerardo Delgadillo Piñón y Mtro. Roger Armando Frías Frías, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA

C.c.p. Archivo.

DIR´DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

Carta de Cesión de Derechos

Villahermosa, Tabasco a 23 de octubre 2024.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como AUTOR(A) y/o AUTORES(RAS) en la producción, creación y/o realización de la obra denominada **"UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO"**.

Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; entendemos y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES

Egresada	Directora
Rosa Isela Sánchez Brito	M.C. Cristina Campos Jiménez

TESTIGOS

Dr. Justino Alavez Ramírez	Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez

LICENCIATURA -UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO

INFORME DE ORIGINALIDAD

9%
ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	qdoc.tips Internet	194 palabras — 1%
2	archive.org Internet	173 palabras — 1%
3	vdocumento.com Internet	128 palabras — 1%
4	doku.pub Internet	106 palabras — < 1%
5	www.redjbm.com Internet	96 palabras — < 1%
6	www.slideshare.net Internet	91 palabras — < 1%
7	repositorio.unal.edu.co Internet	84 palabras — < 1%
8	bdigital.unal.edu.co Internet	75 palabras — < 1%
9	es.slideshare.net Internet	70 palabras — < 1%

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

Las nuevas propuestas curriculares de la educación media superior enfatizan el uso de las matemáticas en el entorno, debido a que su enseñanza durante mucho tiempo ha centrado su atención en contenidos que rara vez tienen relación con el mundo real del estudiante, propiciando la mecanización de procesos algorítmicos, objetos matemáticos acabados y con poco significado. Además, el nuevo currículo menciona la falta de material que atienda estas propuestas y que capten el interés de los alumnos, dejando atrás estas enseñanzas tradicionales. Debido a lo anterior se presenta una *guía didáctica* para el profesor en el tema de las *cónicas*, desde un aspecto *constructivo* y *funcional*. Se realizó una investigación de tipo documental para recabar información del tratamiento dado a estas curvas y su uso. Para el diseño de la guía se toma como base los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele* que permite tener un acercamiento a las *cónicas* de manera gradual y se considera los aportes de la *Socioepistemología* y la *Teoría de las Representaciones Semiótica*. En la guía se proponen: actividades que permiten construir, manipular, calcular distancias, visualizar, usar los elementos, propiedades y ecuaciones de las *cónicas*; situaciones problemáticas derivadas de su uso; y entornos de *funcionalidad*, en donde se aprecia la relación de las *cónicas* con otras áreas de estudio como la medicina, arquitectura, arte, electricidad, telecomunicaciones, entre otras.
Palabras claves: Cónicas, Funcional, Aprendizaje, Modelo de Van Hiele, Socioepistemología.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior se encuentra ante el desafío de poder incorporar elementos que permitan un aprendizaje más significativo y un valor de uso de los conocimientos matemáticos, de acuerdo al Nuevo Currículo de la Educación Media Superior 2018 [38]. En esta misma dirección la propuesta del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior 2022 [39] coincide en que la enseñanza de las matemáticas debe permitir ver la funcionalidad de éstas en el entorno, en escenarios tanto físicos como sociales, contextualizar el pensamiento matemático para utilizarlo significativamente en otras áreas de estudio y ámbitos de la vida. Además de lograr ver la potencialidad de las matemáticas, su belleza y utilidad, ayudando a despertar el interés del que aprende. Cabe resaltar que algunas de las razones por las cuales se realizan estos cambios curriculares es debido a que los contenidos rara vez tienen que ver con el entorno del alumno, de este modo la matemática se percibe limitada, poco útil y atractiva, prevaleciendo la mecanización de procesos algorítmicos, prácticas docentes inadecuadas que presentan los contenidos de forma compleja, árida, aburrida, lejana, sin aplicaciones y la ausencia de bibliografía y recursos o materiales para capturar el interés del alumnado.

De acuerdo con lo anterior, podemos darnos cuenta de que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas va cambiando y surge la necesidad de incluir otros elementos en el tratamiento de estos contenidos que induzcan un aprendizaje más significativo, en donde se puedan atender las problemáticas de corte cognitivo que presentan los alumnos en este nivel educativo; por lo cual se hace necesario elaborar una *guía didáctica* de apoyo al profesor acordes a las nuevas tendencias y los cambios que estas propuestas y necesidades demandan.

Proponemos en este trabajo, realizar el diseño de una *guía didáctica* que ayude al profesor de educación media superior en el tema de las *cónicas*, donde se perciba su *funcionalidad* y se proporcione un acercamiento *constructivo* de estas, desde su generación como el corte de un cono (de una superficie tridimensional) y utilizando algunos materiales tangibles y manipulables; para posteriormente estudiarlas en una superficie plana en donde se resalten propiedades propias de cada curva. Para eso hemos considerado el *Modelo de Van Hiele*, el cuál presenta niveles jerárquicos del razonamiento que ayudan a la construcción de conocimientos para objetos geométricos; la *Socioepistemología* que enfatiza el uso de la matemática y la *Teoría de las Representaciones Semióticas*, la cual nos ayuda a entender las diferentes representaciones que puede tener un objeto matemático. A continuación se describe de manera breve lo que contiene cada capítulo de este trabajo.

El capítulo 2 corresponde al planteamiento del problema, donde se justifica nuestra propuesta, se presenta la pregunta de investigación, la hipótesis y los objetivos.

El capítulo 3 corresponde a los antecedentes, en el cual se exponen las bases teóricas y las investigaciones en matemática educativa que existen respecto al tema de las *cónicas*, las cuales muestran diferentes tratamiento, alternativas y material para estudiarlas.

El capítulo 4 corresponde a la estrategia de trabajo, donde se explica la metodología y el diseño de la *guía didáctica*, donde además se expone el tratamiento dado a las *cónicas*.

Los capítulos 5, 6, 7 y 8 corresponden a la *circunferencia*, *elipse*, *parábola* e *hipérbola*, respectivamente. Cada uno de estos capítulos se encuentra conformado por los cuatro primeros niveles del *Modelo de Van Hiele*, es así que se inicia conociendo la curva desde lo elemental (se utiliza materiales manipulativos) hasta sus expresiones algebraicas. Se presentan actividades, situaciones problemáticas y entornos de *funcionalidad*.

En el capítulo 9 corresponde a los resultados y discusión en la elaboración de la *guía didáctica*.

En el capítulo 10 se presenta una conclusión donde se abordan las observaciones al trabajar las *cónicas* y el diseño de la guía.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

Se justifica porqué es importante investigar el problema anteriormente descrito en la introducción, se presentan los motivos, la relevancia y las aportaciones que tendrá este trabajo para los docentes de educación media superior. Se plantea la pregunta de investigación, la hipótesis y los objetivos que se esperan alcanzar.

2.1. Justificación

Las *cónicas* desde hace mucho tiempo han sido estudiadas en el nivel medio superior, donde se nota un tratamiento formal desde el contexto algebraico, partiendo del objeto ya acabado, además de percibir la mecanización de procesos algorítmicos, ejercicios y problemas a veces inadecuadamente estructurados, además que muchos de éstos se limitan a reemplazar datos de manera repetitiva para determinar una ecuación, también es deficiente el uso de estas curvas en contextos cercanos al alumno, como se evidencia en algunos materiales utilizados en este nivel como el libro de texto Matemáticas III de Cuéllar [13] o la guía didáctica del COBATAB [11].
Vargas [42], considera en su investigación la problemática presente en la enseñanza de las cónicas en la educación media superior, la cual se enfoca en el tratamiento algebraico, dando prioridad a la mecanización de procesos algorítmico, olvidando en gran medida el tratamiento geométrico del cual partieron las cónicas. Debido a esto y considerando como base la *Socioepistemología*, da a conocer la construcción y evolución de las curvas a lo largo de la historia, partiendo de los cortes de un cono, su tránsito hacia una curva plana y posteriormente su estudio en el plano cartesiano.

Ante las nuevas propuestas del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior 2022 [39] que enfatizan el uso de la matemática en el entorno del estudiante, el despertar el interés en esta área, la falta de bibliografía y material que atienda estas nuevas propuestas, y considerando las recomendaciones de investigaciones en este tema desde la matemática educativa, proponemos una *guía didáctica* para el profesor de educación media superior en el tema de las *cónicas*, desde un acercamiento *constructivo* y *funcional*.

2.2. Pregunta de investigación

¿Cómo ayudar a los profesores de educación media superior en la enseñanza de las *cónicas*, considerando las nuevas propuestas curriculares que enfatizan el uso de la matemática y evitar la mecanización de procesos algorítmicos en su tratamiento?

2.3. Hipótesis

Abordar y conocer otra alternativa del estudio de las *cónicas* para notar o percibir lo funcionales que pueden ser en lo cotidiano y en la ciencia.

2.4. Objetivo general

Elaborar un material didáctico para el estudio de las *cónicas* que permita entender la construcción de cada curva en lo geométrico y lo algebraico, así como su utilidad y aplicación, para que sirva de apoyo a profesores en su práctica docente en el nivel medio superior.

2.5. Objetivos específicos

- Analizar desde sus orígenes el proceso de construcción de las *cónicas*.
- Identificar y entender los elementos que permiten construir, dibujar y definir cada curva.
- Reconocer *cónicas* en lo cotidiano.

- Determinar y entender algunas propiedades de cada curva.
- Mostrar la utilidad y aplicación de la *elipse*, la *circunferencia*, la *parábola* y la *hipérbola*
- Representar y transitar entre los registros de representación gráfico y algebraico de las *cónicas*.

Capítulo 3

Antecedentes

Para la realización de este trabajo consideramos como base teórica: el *Modelo de Van Hiele*, que favorece el desarrollo del razonamiento geométrico, y propone niveles en el proceso de adquisición de un conocimiento matemático; la *Teoría de las Representaciones Semióticas*, que enfatiza la transición entre diferentes registros de representación de un objeto matemático para que éste adquiera otros significados y la *Socioepistemología*, que trabaja la construcción social del conocimiento matemático y su valor de uso. Además, se presentan investigaciones desde la matemática educativa en relación al tema de las cónicas, donde se muestran algunas dificultades en el tratamiento de estas curvas y sugerencias para su estudio, de las cuales tomamos algunas aportaciones.

3.1. Bases teóricas

Modelo de Van Hiele

El modelo está conformado por dos parte:

- La primera parte está integrada por los llamados *niveles de razonamiento*, los cuales ayudan al desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos, estos niveles son secuenciales y jerárquicos, es decir, tienen un orden y no se debe alterar, es así, que no se puede pasar a un nivel sin antes haber superado el nivel inferior [24]. En el cuadro 3.1 se exponen los cinco niveles del *Modelo de Van Hiele* y el desarrollo que se adopta en este trabajo.

Niveles	Descripción
Nivel 1: Visualización	Se conocen, identifican, clasifican y comparan las figuras geométricas desde su aspecto global. Se describe el aspecto físico de las figuras a partir de su similitud con otros objetos geométricos o incluso con objetos concretos del entorno. Se tiene un conocimiento físico y visual de las figuras.
Nivel 2: Análisis	Se analiza y reconoce que las figuras geométricas están compuestas por elementos y poseen propiedades. A partir de la observación, manipulación y exploración se pueden llegar a descubrir y describir las partes que integran una figura y exponer sus propiedades desde una manera informal, llegando incluso a generalizar las propiedades; sin embargo, no se llega a razonar cómo unas propiedades se relacionan con otras.
Nivel 3: Deducción informal	Se reconoce cómo unas propiedades se relacionan o deducen de otras. Se describe las figuras de una manera formal, con lo cual se pueden formular adecuadamente definiciones matemáticas acertadas. Inicia el razonamiento lógico de las matemáticas; sin embargo, éste sigue apoyado en la manipulación; por lo tanto no se llega a comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
Nivel 4: Deducción formal	Se sigue un razonamiento lógico formal, se entiende la estructura axiomática de las matemáticas, con esto cobran sentido las definiciones, axiomas, teoremas etc. Además, se ve la necesidad de las demostraciones como el único medio para comprobar una afirmación. Se admite la existencia de definiciones equivalentes para un mismo concepto y la posibilidad de llegar a un mismo resultado a partir de diferentes premisas.
Nivel 5: Rigor	Se comprenden los diferentes sistemas axiomáticos y se aprecian sus relaciones y diferencias. Se estudia la geometría de manera abstracta sin la necesidad de ejemplos concretos, logrando un alto nivel de rigor matemático.

Cuadro 3.1: Niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele. Adaptado de [24].

- La segunda parte del modelo, son las *fases de aprendizaje* las cuales ayudan al profesor a saber cómo apoyar a sus alumnos para ir superando cada nivel de razonamiento del modelo [12]. Es decir, son indicaciones más directas para trabajar de manera personalizada con cada alumno. Esta fases se explican en el Anexo A1.

Cabe mencionar que el *Modelo de Van Hiele* tiene su origen en las tesis doctorales presentadas en la Universidad Utrecht, en Holanda, por los esposos Dina y Pierre Van Hiele a finales de los años cincuenta. Es un modelo que ha sido implementado en diversas investigaciones de matemáticas, entre ellas: ángulos de la circunferencia [20], traslaciones en el plano [7] y cuadriláteros [28], en las cuales se aprecian buenos y satisfactorios resultados al utilizar este modelo.

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La *Socioepistemología* fue propuesta por Ricardo Cantoral y contribuye principalmente a modelar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, es decir, modela las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso.

Es importante diferenciar entre conocimiento y saber; aunque estén relacionados difieren: "*el conocimiento es la información sin uso; el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática*" (D' Amore, 2006, citado de [8]).

El triángulo didáctico

La *Socioepistemología* [9] toma en cuenta la vida del alumno como una fuente de conocimiento, lo cual involucra su entorno, su cultura, su presente, su historia, sus saberes, sus conocimientos y la propia historia que a partir de necesidades permitió la emergencia de los saberes matemáticos. Expone un triángulo didáctico (figura 3.1) donde considera al aprendiz como un sujeto individual o colectivo y toma en consideración su vida misma al relacionarlo con los escenarios socioculturales, en los cuales se vive la realidad. Además, este triángulo considera al saber o conocimiento en uso.

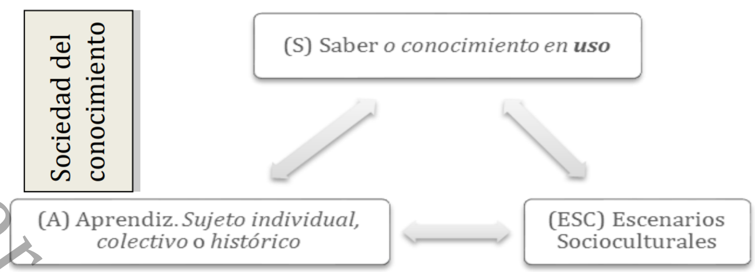


Figura 3.1: El triángulo didáctico. Recuperado de [9].

Dimensiones del saber

La *Socioepistemología* toma en cuenta cuatro dimensiones del saber que modelan la construcción social del conocimiento matemático.

- *Dimensión didáctica*. Considera una enseñanza que no se limita al aula, de este modo se extiende a la vida real, al entorno que involucra al alumno, es decir, al aula extendida para la verdadera sociedad del conocimiento.

- *Dimensión epistemológica*. Se enfoca en las formas en que el saber matemático puede ser conocido y cómo el sujeto interactúa con el objeto matemático. Considerando un cambio de concentración del objeto matemático a las prácticas que acompañan su producción y optando por un análisis centrado en la actividad humana en los contextos socioculturales.

- *Dimensión cognitiva*. Estudia las formas de adquisición y significación continua que experimentan aquellos que se hallan en situación de construcción del conocimiento. El conocimiento está relacionado con la experiencia de vida que modifica la propia percepción.

- *Dimensión social y cultural*. Se centra en los usos del saber en situaciones de la vida, en entornos socioculturales. Para eso observa las actividades que realizan los sujetos y pone énfasis en las prácticas sociales, la cual norma la actividad humana y es el motivo de hacer lo que se hace.

La *Socioepistemología* descentraliza el objeto matemático y valora a las matemáticas al reconocer que son parte esencial de la cultura, que emergen fuera del aula pero se enseñan dentro de ella. Considerando que muchos aportes de las matemáticas surgieron a partir de una necesidad o problema en un determinado tiempo, de este modo las matemáticas no surgieron para ser enseñadas, pero a pesar de eso se enseñan en el aula. Las matemáticas son *funcionales* en distintos aspectos de la vida, es decir, viven mediante acciones de la actividad humana: en el diseño de ropa, preparación de alimentos, construcción de viviendas, actividades de cultivo, tejido, etc.

Teoría de las Representaciones Semióticas

De acuerdo a Duval [17], fundador de esta teoría, las representaciones semióticas son primordiales en matemáticas, debido a que ésta trabaja con objetos que no son inmediatamente accesibles a la percepción o a la experiencia intuitiva, a diferencia de los objetos que llamamos físicos o reales. Es así que estos objetos son representados a partir de símbolos, figuras o enunciados.

Las representaciones semióticas son consideradas un medio sencillo de mostrar o exponer representaciones mentales con el propósito de comunicar, es así, que se busca que sean visibles o más accesibles para los demás. Para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir las tres actividades cognitivas primordiales relacionadas a cualquier representación:

- *Formación de una representación*: es la elaboración, diseño y/o composición de signos que determinen una representación de un objeto en un sistema.

- *Tratamiento*: es la modificación o transformación de una representación dentro del mismo registro en el cual se formuló, utilizando las propiedades que posee dicho registro.

- *Conversión*: es el cambio o interpretación de una representación a otro registro, manteniendo todo o una parte del contenido de la representación del registro original.

Es importante resaltar que los objetos no deben confundirse con su representación, es decir, no se debe concebir al objeto como la representación dada. Las representaciones semióticas son primordiales en la matemática para poder trabajar con los objetos abstractos, así éstos pueden ser representados en los diferentes registros, en especial en el verbal, algebraico, geométrico o numérico, los cuales son los más utilizados en esta área. En este trabajo se consideran los registros de representación semiótica:

- *Verbal*: hace uso de los signos del lenguaje correspondiente a un idioma.

- *Algebraico*: hace uso de las reglas y signos implementados en las matemáticas, específicamente en el área de álgebra.
- *Geométrico*: hace uso del plano cartesiano, figuras geométricas y ayuda a la visualización de lo expuesto en lo verbal o algebraico.
- *Numérico*: hace uso de números (enteros, decimales, fraccionarios)

3.2. Estado del arte

La investigación de Dávila et al. (2013) [15], presenta los resultados obtenidos al aplicar una secuencia didáctica para el aprendizaje de las *cónicas* a catorce estudiantes de tercer semestre de preparatoria de educación media superior. Los datos arrojados muestran que los alumnos tuvieron dificultades en el tránsito de las representaciones de las *cónicas*; obstáculos en la representación analítica de la *parábola*; fallas al graficar la *circunferencia* y problemas en la identificación de los elementos fundamentales de las *cónicas*. Sin embargo, muestran respuestas favorables al trabajar las *cónicas* con material manipulativo, mejorando la habilidad para expresarse, sintetizar y redactar. Existen investigaciones que estudian el tema de la *cónicas* considerando aspectos históricos, como el trabajo de Pérez (2011) [32] que presenta tres guías de aprendizaje enmarcadas en los primeros tres niveles del *Modelo de Van Hiele*, de modo que cada una toma como base uno de estos niveles y en conjunto se trabaja la *elipse*, la *parábola* e *hipérbola* en cada guía; las curvas se van construyendo desde lo elemental hasta conocer las condiciones que cumplen los puntos que las conforman sin llegar a conocer sus ecuaciones; también, se construyen las curvas con ayuda de un software a partir de rectas tangentes y no de su definición y; se observa en general que las actividades quedan en lo manipulativo y no se proporcionan las definiciones ni ecuaciones de estas. El trabajo de Buccino (2011) [6] propone actividades haciendo uso de algunos aspectos históricos importantes de las *cónicas* desde un ambiente digital, apoyándose del software Cabri; cabe resaltar que estas actividades guían al profesor sobre las intervenciones a realizar además que le proporciona recomendaciones y permite el debate entre alumnos con el fin de enriquecer su conocimiento de estas curvas.

Otras investigaciones se avocan hacia el estudio de las *cónicas* considerando que éstas están presentes en el entorno del alumno y para visualizarlas optan por trabajar con diferentes materiales manipulativos; como el trabajo de Martínez (2023) [29] que presenta una gran variedad de materiales para visualizar las *curvas cónicas* a partir de un cono el cual puede ser de madera, plástico, cartón, etc., además de un cono giratorio con líquido y un matraz, el cual tiene forma parecida a un cono, también presenta otros materiales para observar las curvas en una superficie plana con el uso de la luz láser y con una linterna. Por su parte Beltrán (2019) [4], propone actividades antididácticas, en donde la participación del docente es limitada o se percibe como un observador y facilitador, algunas de estas actividades permiten al alumno la exploración y visualización de las curvas con el uso de objetos tangibles como una linterna a partir de la sombra generada con diferentes movimientos; además de que otras actividades buscan reconocer los elementos y propiedades de estas curvas. La investigación de Real (2004) [35] nos muestra diferentes métodos de construcción de las cónicas con materiales manipulativos como hilo, tachuelas, papel, tablero, lámpara, así como también un juego de cartas para reforzar los elementos de estas curvas.

Estas investigaciones proponen otras alternativas para acceder a las *cónicas*, de un modo diferente al tratamiento que se da en una enseñanza tradicional, al considerar aspectos históricos o el uso de materiales manipulativos, que atrae la atención de los alumnos hacia el estudio de las curvas debido a que pueden visualizarlas en una pantalla o que están presentes en su entorno.

Capítulo 4

Estrategia de trabajo

Se presentan las acciones realizadas para llevar a cabo nuestra investigación, la cual fue de tipo documental. Además, se expone el diseño de la *guía didáctica* y el desarrollo de las *cónicas* considerado nuestras bases teóricas.

4.1. Metodología

La investigación para la elaboración de la *guía didáctica* para la enseñanza y aprendizaje de las *cónicas* dirigida como apoyo al profesor, fue de tipo documental, para lo cual se revisaron marcos curriculares de educación media superior, libros de textos, guías didácticas e investigaciones en matemática educativa relacionadas con la enseñanza, historia y evolución de las *cónicas*.
Para la estructura de la *guía didáctica* y tratamiento de las *cónicas*, se tomó como base el *Modelo de Van Hiele*; en donde se consideraron los cuatro primeros niveles de razonamiento: VISUALIZACIÓN (VI), ANÁLISIS (AN), DEDUCCIÓN INFORMAL (DI) y DEDUCCIÓN FORMAL (DF); cabe aclarar que nuestra propuesta está orientada para el nivel medio superior (alumnos que tienen entre 15 y 17 años de edad) y que el último nivel llamado rigor de este modelo no se incluye ya que exige un razonamiento matemático más elevado, el cual es posible alcanzar en niveles académicos superiores (universidad), como lo evidencian algunas investigaciones [23] y [32]. Por otra parte, como las *cónicas* son analizadas dentro de un sistema de ejes en donde se recurre a su representación gráfica y algebraica, se incluyó la *Teoría de las Representaciones Semióticas* que promueve el uso de los diferentes registros de representación, consideramos los más utilizados

en matemáticas: verbal, numérico, algebraico y geométrico. Por último, tomamos algunos aportes de la *Socioepistemológica* en lo relacionado con la *funcionalidad* de las curvas en la vida real, teniendo un acercamiento más significativo hacia éstas.

4.2. Diseño de la guía didáctica

Actividades, situaciones problemáticas y entornos de funcionalidad

La *guía didáctica* se encuentra conformada por actividades las cuáles aparecen en todas las curvas y en todos los niveles del modelo, conforman la parte medular de la guía; las situaciones problemáticas se encuentran solo en algunos niveles así como los entornos de funcionalidad, estos dos elementos complementan y dan mayor significado a las curvas desde otros escenarios. A continuación, se describen en qué consiste cada uno de estos elementos y cómo los ubicamos.

- *Actividades*. Tienen expresadas un propósito a alcanzar, y están acorde al nivel en donde se presentan, la realización o ejecución van en orden secuencial y lógico, permitiendo un aprendizaje gradual para cada curva. Las podemos identificar por medio de su nombre o más propiamente por un código que se encuentra dentro de un paréntesis, en donde aparecen dos letras que corresponden al nivel en el que se encuentran VI, AN, DI o DF, seguido de un guión y la primera letra corresponde al nombre de la curva: Circunferencia (C), Elipse (E), Parábola (P) o Hipérbola (H) y seguido de un número que indica el orden que le corresponde en cada capítulo. Así, si se tiene: Actividad (VI-C1), quiere decir que está ubicada en el nivel Visualización y corresponde a la curva circunferencia, primera actividad.

- *Situaciones Problemáticas*. Son situaciones en las cuales se utilizan las curva y a partir de ahí se plantea un problema que es resuelto usando algunos elementos, propiedades, definiciones o alguna ecuación estudiada o trabajada previamente. Para identificar las situaciones problemáticas, se ha utilizado las letras SP seguido de un guión y una letra correspondiente a la curva C, E, P o H, seguidas de un número que indica el orden. Por ejemplo: SP-C1, quiere decir que es la primera situación problemática de la curva circunferencia.

- *Entornos de Funcionalidad*. Son entornos en los cuales se presenta el uso o aplicación de las curvas y en donde puede notar su relacionan con otras áreas del conocimiento.

Además se presentan Anexos en los cuales se encuentran el desarrollo y respuestas a algunas de las situaciones problemáticas planteadas.

Los niveles de razonamiento

El diseño de la *guía didáctica* incluye por cada *cónica*, los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele*. Cabe enfatizar que los niveles de aprendizaje de este modelo, permiten ir construyendo el conocimiento de cada curva de manera secuencial y jerárquica. A continuación, se da una breve reseña de lo que contiene la guía enfatizando cada nivel de razonamiento.

- **Nivel 1: Visualización**. Se conoce el aspecto general de cada cónica, por lo que se recurren a diferentes maneras de generarlas, como lo son los cortes transversales a un cono, métodos prácticos y sencillos para construirla como la papiroflexia y el método del jardinero; se utiliza el juego de geometría usual y herramientas tecnológicas. Además de identificarlas en cortes de objetos similares a un cono y en el entorno.

- **Nivel 2: Análisis**. Se presentan y ubican los elementos propios de cada curva, enfatizando en aquellos que son esenciales para generarlas o dibujarlas. Se exploran algunas de sus propiedades, entre las cuales destaca la *excentricidad* de la *elipse* e *hipérbola*, la cual es posible estudiar a partir de los registros de representación, gráfico, numérico y lenguaje verbal. En el caso de la *elipse* esta propiedad ayuda a entender por qué la *circunferencia* es un caso especial de esta curva.

- **Nivel 3: Deducción informal**. Las curvas se trabajan en su mayoría en el plano cartesiano y las actividades consideran los registros numérico, gráfico y verbal. En especial, se resalta este último registro para describir las condiciones que cumplen los puntos que conforman a cada curva apoyándose en el cálculo de distancias. El uso de los registros de representación es relevante para tener un acercamiento menos formal a la conformación de las ecuaciones de las curvas, al incluir diferentes andamiajes: en el caso de la *circunferencia* se recurre al teorema de Pitágoras, en el caso de la *elipse* se le relaciona con su propiedad de *excentricidad* y se involucra a la *circunferencia*, para la *parábola* se da prioridad al registro numérico y para la *hipérbola* se aprecia su similitud con la ecuación de la *elipse*. Se considera y enfatiza la propiedad focal o reflectora que posee la *elipse*, *parábola* e *hipérbola*, donde se puede apreciar la *funcionalidad* de estas curvas y su relación con otras áreas del conocimiento. Se hace hincapié en una relación que guardan los *ejes* y la distancia entre los *focos* de la *elipse* e *hipérbola* y que resulta fundamental para la localización de los *focos* de estas curvas.

- **Nivel 4: Deducción formal**. Se recurre a procedimientos algebraicos acompañado siempre del registro gráfico y numérico para obtener la ecuación de las curvas de manera particular, considerando distancias y la condición dada en la definición formal. Además, se ubican y se significan sus elementos al abordarlo desde los cuatro registros de representación, por último se exponen algunas situaciones problemáticas en donde se hace uso o aplicación de las ecuaciones de estas curvas.

Cada curva se ha trabajada por separado, lo cual permite ver su desarrollo desde lo elemental hasta conocer su ecuación algebraica. Su ecuación se va construyendo a partir de su definición, calculando distancia y considerando un caso particular, con lo cual se enfatiza los elementos involucrados en esta.

Capítulo 5

Circunferencia

De las cónicas, la *circunferencia* es una de las curvas más conocida, estudiada y utilizada. En la antigüedad su trazo se realizaba con ayuda de un cordel (lía o hilo) y un punzón, como se muestra en la figura 5.1. En la actualidad, esta se puede trazar con ayuda de objetos manipulables o usando algún software. También, es posible representar la circunferencia en un sistema de ejes coordenados, en donde queda determinada por una expresión analítica.

Figura 5.1: Trazando una circunferencia. Recuperado de [10].

En este capítulo se presenta un tratamiento para el estudio de la *circunferencia*, considerando los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele*. A continuación se describen algunos elementos que podrá encontrar en cada nivel.

En el nivel VISUALIZACIÓN (VI) se muestra a la *circunferencia*, como una curva que se obtiene seccionando un cono y su uso en el diseño gráfico (ACTIVIDAD (VI-C1)). En el nivel de ANÁLISIS (AN) se exponen algunos de sus elementos y se resalta la longitud de la circunferencia utilizada en el trazo de prendas de vestir, lo anterior a través de situaciones problemáticas. Posteriormente en el nivel DEDUCCIÓN INFORMAL (DI) se trabaja la curva en el plano cartesiano y se busca inquirir sobre la condición que cumplen los puntos que la conforman (ACTIVIDAD (AN-C4)), además se toma como andamiaje algunos triángulos rectángulos, a fin de dar significado a sus variables y acceder a su ecuación. Finalmente, en el nivel DEDUCCIÓN FORMAL (DF) se obtiene su ecuación a partir de la definición de lugar geométrico para una curva en específico y se dan diferentes representaciones de ésta (ACTIVIDAD (DF-C8)). También se presentan el uso de la curva en la solución de situaciones problemáticas, como la ubicación adecuada de un router.

5.1. Nivel 1: Visualización

Es común ver en libros de texto la *circunferencia* generada por Apolonio (siglo III a. C.) [16], obtenida a partir del corte de un cono con un plano perpendicular a su eje (figura 5.2); entender esta forma de generarla requiere de cierto nivel de imaginación espacial, para luego poder situarla en una superficie plana y observar que ésta es una curva cerrada muy familiar, ya que se puede realizar con ayuda de un compás, con algún software, o también recurrir a como lo hicieron de manera práctica en la antigüedad (figura 5.1).

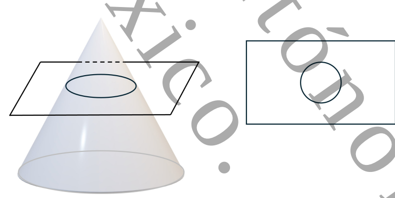
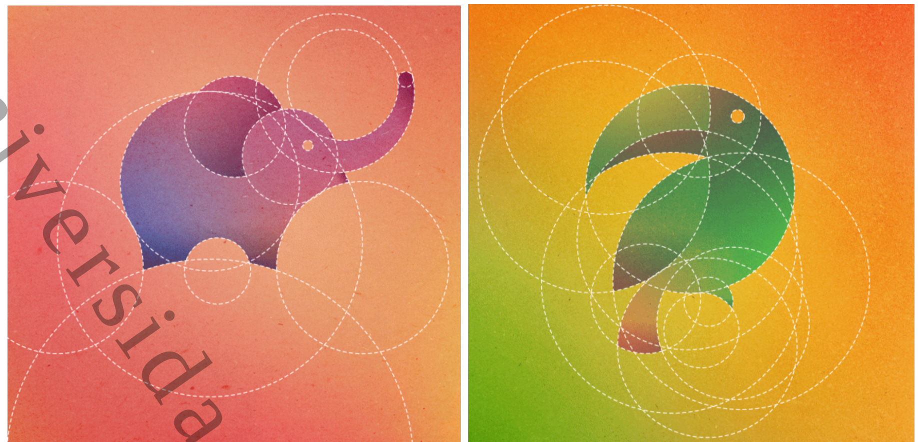


Figura 5.2: Circunferencia generada a partir del corte de un cono.

Entornos de funcionalidad

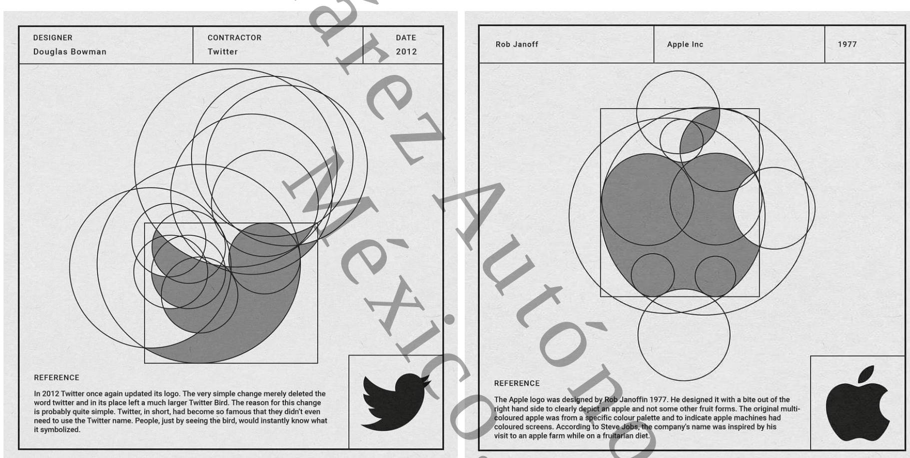
Diseño gráfico

En el diseño gráfico es muy común el uso de figuras geometricas, en especial la *circunferencia*, la cual se implementa para elaborar ilustraciones (figura 5.3) o logos (figura 5.4), logrando que estos adquieran características únicas que lo hacen resaltar de otros.



(a) Elefante. (b) Tucán.

Figura 5.3: Ilustraciones a partir de circunferencias. Recuperado de [37].

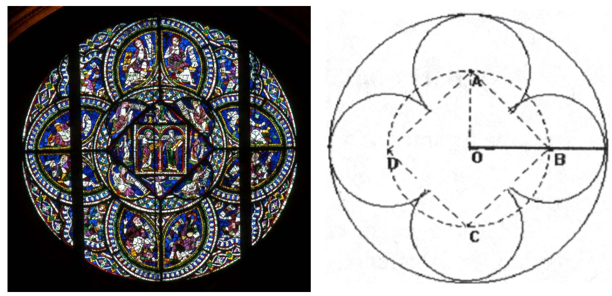


(a) Twitter. (b) Apple.

Figura 5.4: Logos de marcas reconocidas. Recuperado de [25].

Vitrales

En algunos diseños de vitrales (figura 5.5 a) se puede observar el uso de *circunferencias* y otros elementos o figuras. Estos diseños suelen ser simétricos, proporcionados y con colores llamativos que hacen que el resultado final sea hermoso a la vista. En la investigación de Cecilia Crespo se aborda el tema de los vitrales de las catedrales góticas, en donde se analiza cuáles fueron los trazos o figuras geométricas que utilizaron los constructores para diseñar estas obras maravillosas (figura 5.5 b).



(a) Orinal. (b) Trazo.

Figura 5.5: Vitrales. La figura (b) fue recuperada de [14].

ACTIVIDAD (VI-C1): Circunferencia en el diseño gráfico

Propósito. Identificar circunferencias en el trazo de ilustraciones y logos. Para ello se presentan algunos, los cuales están diseñados a partir de circunferencias. En esta actividad se recomienda trabajar con algún software para dibujar o trazar figuras, como PowerPoint, aunque también se puede recurrir a materiales manipulativos como un compás.

<u>Materiales</u>

1 lápiz y 1 compás o software para dibujar.

<u>Procedimiento</u>

1. Considera las ilustraciones y logos de la figura 5.3 y 5.4, respectivamente. Identifica el número de *circunferencias* para su trazo y los pasos para su elaboración.

2. Diseña un logo o un dibujo usando *circunferencias* con ayuda de un compás o un software como PowerPoint.

5.2. Nivel 2: Análisis

Se presentan los elementos de la *circunferencia*, algunas rectas que se asocian con ésta curva y su uso en el corte y confección.

ACTIVIDAD (AN-C2): Elementos

Propósito. Recordar y ubicar elementos abordados desde la geometría euclidiana que están presentes en la circunferencia. La actividad plantea transitar entre registros verbal y gráfico.

Procedimiento

1. De acuerdo con la figura 5.6 escribe sobre la línea a qué elemento corresponde la descripción dada. Para eso considera las palabras siguientes: cuerda, radio, arco, tangente, centro y diámetro.

   _____ Es el punto C del cuál equidistan todos los puntos de la circunferencia.

   _____ Es el segmento que une el punto C con A.

   _____ Es una porción de la curva que une los puntos A y E.

   _____ Es el segmento de recta que une B y D.

   _____ Es la cuerda que pasa por C.

   _____ Es la recta L que toca a la circunferencia en el punto P.

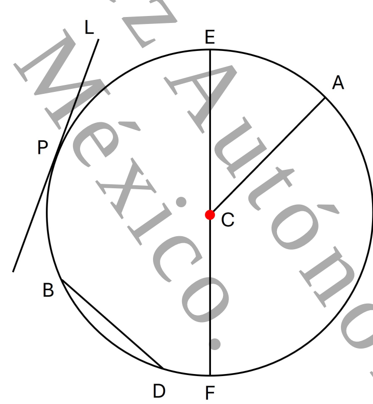


Figura 5.6: Elementos de la circunferencia.

Longitud de la circunferencia

Desde tiempos antiguos se sabe que la longitud de la *circunferencia*, o como se conoce desde la educación primaria *perímetro del círculo*, relaciona el diámetro y la constante π (figura 5.7).

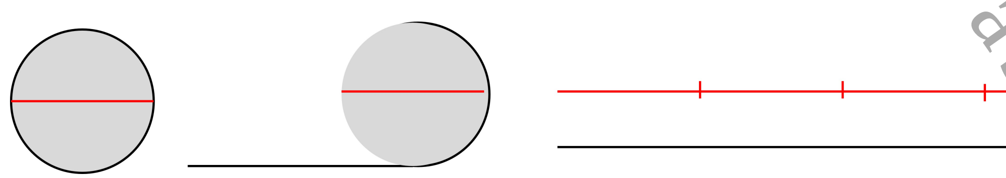


Figura 5.7: Relación de la circunferencia y π.

Longitud de la circunferecia

La longitud (l) de un circunferencia, con diámetro (d) es igual a:

$$l = d\pi \tag{5.1}$$

ACTIVIDAD (AN-C3): Centro

Propósito. Determinar, desde el contexto gráfico y utilizando mediatrices, el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no alineados. Cabe resaltar que éste es un problema clásico del tema de circunferencia, y se retoma en el nivel Deducción Formal.

Materiales

1 hoja blanca, 1 compás y 1 lápiz.

Procedimiento

1. En una hoja blanca dibuja tres puntos no alineados (A, B y C).
2. Traza los segmentos que unen los puntos AB y BC, halla sus mediatrices.
3. Observa que las mediatrices se cortan en un punto. Coloca la punta del compás en este punto y ábrelo de modo que pase por A y traza la *circunferencia*.

Entornos de funcionalidad

Corte y confección

Para realizar una prenda de vestir es necesario hacer un trazo o patrón de las piezas que la conforman, éste suele hacerse manualmente en un papel, con ayuda de cinta métrica, escuadras y lápiz. En prendas como faldas circulares (figura 5.8 a) y sombreros (figura 5.8 b) se ocupa la circunferencia.

(a) Falda circular.

(b) Sombrero pesquero.

Figura 5.8: Prendas de vestir.

Situaciones Problemáticas

Estas situaciones problemáticas brindan los pasos para realizar el trazo de una falda circular y un sombrero pesquero. En especial, en la **SP-C3** se solicita calcular la longitud de dos *circunferencias*, con lo cual se busca resaltar el uso que tiene la ecuación (5.1), para que las piezas del sombrero pueden coincidir adecuadamente.

SP-C1. María es modista y una clienta le ha solicitado una falda circular de 40 cm de largo, con encaje en la parte baja del contorno. La medida del contorno de cintura de la clienta es 60 cm. Realiza lo solicitado:

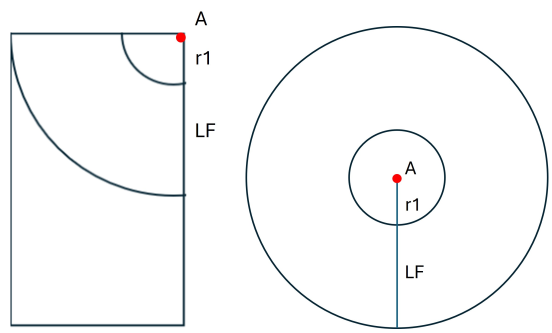
- Dibuja el trazo de la falda circular (ver procedimiento 1), puede ser a escala.
- Determina cuántos metros de encaje se necesitará.
- Si cada metro de encaje cuesta 30 pesos ¿cuánto se gastará en encaje?

Procedimiento 1: trazo de una falda circular

Para realizar el trazo de una falda circular es necesario saber la medida de la *circunferencia* de cintura (o contorno de cintura) y el largo de falda. A continuación, se muestras los pasos:

1. A partir de la *circunferencia* de cintura se obtiene un radio $r1$ y el largo de falda LF.
2. Se dobla el papel en cuatro partes iguales y se ubica la esquina del papel doblado que corresponde con el centro del papel. Es decir, el punto A de (figura 5.9 a).
3. Se dibuja un ¼ de *circunferencia* con centro en A y de radio $r1$ y se dibuja otro ¼ de *circunferencia* con centro en A y de radio $r1 + LF$.
4. Posteriormente éste se corta siguiendo las curvas dibujadas y se desdobla obteniendo el trazo final (figura 5.9 b).

Observación. Para realizar el trazo de de la falda es necesario conocer el radio de las circunferencias antes mencionadas.



(a) 1/4 del trazo. (b) Trazo completo.

Figura 5.9: Trazo de falda circular.

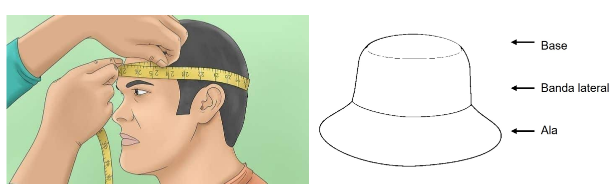
SP-C2. Mide el contorno de la cabeza de algún compañero y realiza el trazo (ver procedimiento 2) de un sombrero pesquero con la medida obtenida. Contesta lo solicitado en la figura 5.10.

Base	
circunferencia de la cabeza (CC)	*:__________*
radio (r’) de CC	*:__________*
Banda lateral	
largo (longitud de CC)	*:__________*
ancho	*:7cm*
Ala	
contorno	*:__________*
ancho	*: 6cm*

Figura 5.10: Medidas para el trazo de un sombrero pesquero.

Procedimiento 2: Trazo de un sombrero pesquero

Para elaborar el trazo de un sombrero pesquero es necesario saber la medida del contorno de la cabeza *CC* (figura 5.11 a). El trazo se divide en tres partes: la base, banda lateral y ala (figura 5.11 b). A continuación, se indican los pasos para realizarlo.



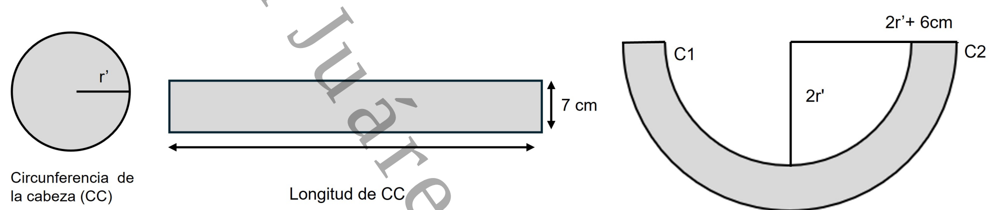
(a) Medir la cabeza. (b) Partes del sombrero.

Figura 5.11: Consideraciones para elaborar el trazo de un sombrero pesquero.

1. Para la base, se necesita la medida de CC. Luego, se obtiene el radio r' y se traza la base. La base es un círculo cuyo perímetro es igual a la longitud de CC (figura 5.12 a).

2. Para la banda (figura 5.12 b), el largo debe medir la longitud de CC y de ancho 7 cm (medida estándar).

3. Para el ala, se traza la mitad de una *circunferencia* $C1$ de radio $2r'$, es decir, el doble del radio de CC, como el ala debe tener de grosor 6 cm (medida estándar) se traza una *circunferencia* $C2$ con el mismo centro de $C1$ y de radio $2r' + 6$ cm (figura 5.12 c).



(a) Base. (b) Banda lateral. (c) Ala.

Figura 5.12: Trazo de las partes del sombrero.

SP-C3. A partir de los datos dados en la figura 5.12, calcula la longitud de CC y $C1$. Determina por qué solo es necesario utilizar la mitad de esta última circunferencia $C1$ para que coincidan las piezas. Respuesta en el Anexo A2.1.

5.3. Nivel 3: Deducción Informal

En este nivel se trabaja con la curva en el plano cartesiano, se calculan distancias y se da un andamiaje para acceder a su ecuación, enfatizando su radio.

ACTIVIDAD (DI-C4): Puntos de la curva

Propósito. Reconocer que los puntos que conforman a la circunferencia están a la misma distancia de un punto fijo (centro). Para eso se proporcionan algunos puntos para ubicarlos en el plano cartesiano, se calcula la distancia hacia un punto (origen) y se registran en un cuadro; con ayuda de un compás se solicita determinar cuáles puntos pertenecen a una misma circunferencia.

<u>Materiales</u>

1 hoja blanca y 1 compás.

Procedimiento

1. Rellena el cuadro 5.1, calculando las distancias solicitadas.

2. En una hoja blanca traza el plano cartesiano y ubica los puntos dados en el cuadro 5.1.

3. Ubica la punta de tu compás en el origen y explora cuáles puntos están en una misma *circunferencia* y dibújala.

4. Responde: ¿cuánto mide la distancia de estos puntos al centro de la *circunferencia* (origen)? ¿se puede concluir que los puntos de la *circunferencia* están a la misma distancia de un punto fijo (centro)? ¿por qué?

Punto	Distancia del Punto a (0,0)
(5,0)	
(4,3)	
(0,5)	
(-8,2)	
(0,-2)	
(5,-5)	

Cuadro 5.1: Coordenadas de puntos.

ACTIVIDAD (DI-C5): Ubicación del centro

Propósito. Determinar desde el contexto gráfico, el centro de la circunferencia. Para lograrlo, se proporcionan arcos de circunferencias y tres puntos sobre éste. Revisar la ACTIVIDAD (AN-C3).

Materiales

1 compás y 1 regla graduada.

Procedimiento

1. Observa la figura 5.13 en las cuales se proporcionan arcos de *circunferencias*. Halla sus centros a partir del trazo de las mediatrices de los segmentos que unen los puntos dados sobre cada arco. Con tu compás realiza el trazo completo de la curva.

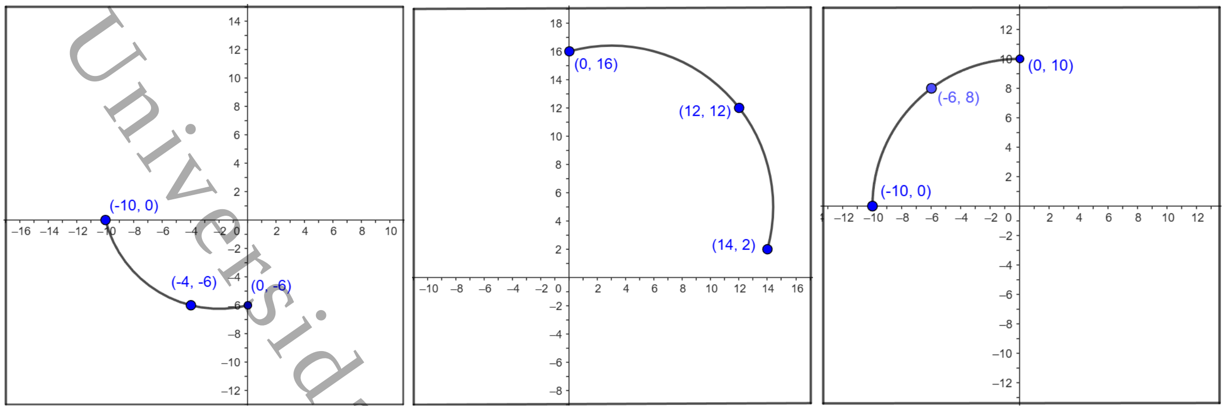


Figura 5.13: Arcos de circunferencias por tres puntos.

ACTIVIDAD (DI-C6): Las variables en la ecuación

Propósito. Conocer la relación que tienen las coordenadas de un punto sobre la circunferencia y el radio al cuadrado, utilizando un triángulo rectángulo.

Procedimiento

1. A partir de la figura 5.14, escribe las coordenadas del punto A.

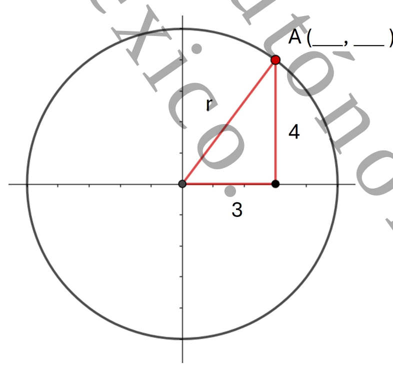


Figura 5.14: Coordenada de un punto sobre una circunferencia.

2. Elige cuál de los incisos determina el valor del radio al cuadrado r^2:

   a) $\sqrt{3+4}$

   b) 3^2+4^2

   c) $\sqrt{3^2+4^2}$

3. ¿Qué enunciado resulta ser cierto para el punto A de la figura 5.14?

a) El valor de la abscisa al cuadrado más la ordenada al cuadrado es igual al radio.

b) El valor de la abscisa al cuadrado más la ordenada al cuadrado es igual al radio al cuadrado.

c) El valor de la abscisa al cuadrado más la ordenada al cuadrado es igual al diámetro.

ACTIVIDAD (DI-V7): Las variables y el radio

Propósito. Verificar para varios puntos de la circunferencia, que se cumple que su abscisa al cuadrado más su ordenada al cuadrado es igual al radio al cuadrado, y con ello deducir la ecuación de la curva. Se realiza el trazo de varios triángulos rectángulos y se obtiene información de ellos, la cual es registrada en un cuadro y se induce la expresión analítica que cumplen dichos puntos.

<u>Procedimiento</u>

1. En la figura 5.15 se presenta una *circunferencia* y algunos de sus puntos. Forma triángulos rectángulos de modo que sus tres vértices sean: uno el centro, otro un punto sobre la curva, y el tercero se halle sobre el *eje-X*. Completa el cuadro 5.2.

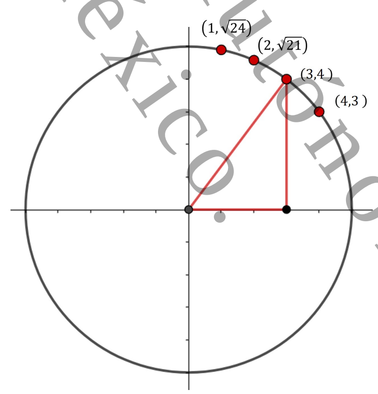


Figura 5.15: Coordenadas de varios puntos sobre una circunferencia.

2. A partir de los valores en el cuadro 5.2, encierra las proposiciones que sean verdaderas del cuadro 5.3, y une con una la línea la descripción verbal correspondiente a la expresión analítica.

Punto	x^2	y^2	x^2+y^2	radio al cuadrado
(3,4)	9	16	25	5^2

Cuadro 5.2: Puntos sobre la circunferencia.

Punto	Distancia del Punto a (0,0)
La variable equis al cuadrado más la variable ye al cuadrado es igual a cinco al cuadrado:	$x^2+y^2=5$
La variable equis al cuadrado más la variable ye al cuadrado es igual a cinco:	$x^2+y^2=5^2$

Cuadro 5.3: Expresiones verbales y analíticas.

5.4. Nivel 4: Deducción Formal

Se trabaja con la definición de la curva y sus diferentes representaciones.

ACTIVIDAD (DF-C8): Ecuación con centro en el origen

Propósito. Obtener la ecuación de una circunferencia a partir de la definición. Para eso se toma un punto arbitrario sobre la curva y se calcula su distancia hacia el centro. Además se busca resaltar valor del radio y del radio al cuadrado.

Procedimiento

1. Considera la Definición 1 y observa la circunferencia de la figura 5.16. Sea $P(x,y)$ un punto arbitrario sobre la curva, $C(0,0)$ su *centro* y $d(P,C)$ la distancia de P a C. Selecciona cuál de las expresiones es cierta:

Definición 1

"La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se llama radio" [27].

a) $d(P,C) = 5$

b) $d(P,C) = 10$

c) $d(P,C) = 25$

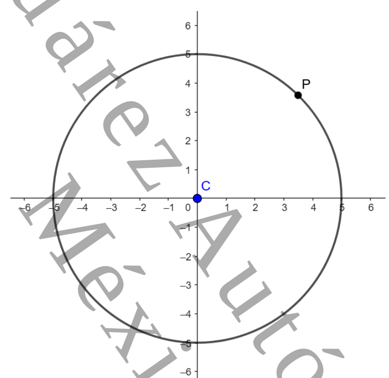


Figura 5.16: Circunferencia con centro en el origen.

2. Calcula la distancia de $P(x,y)$ al centro $C(0,0)$ de la *circunferencia* (figure 5.16) y sustituya en la expresión elegida, realiza el procedimiento correspondiente hasta obtener $x^2 + y^2 = 5^2$

Si consideramos una circunferencia cualquiera con centro en el origen su ecuación es la siguiente.

Ecuación de circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5.2}$$

ACTIVIDAD (DF-C9): Ecuación con centro fuera del origen

Propósito. Relacionar las expresiones dadas en un contexto analítico, con el contexto gráfico al obtener las distancias, para determinar la expresión analítica que le corresponde.

Procedimiento

1. Considera nuevamente la Definición 1 y la *circunferencia* de la figura 5.17. Sea $P'(x',y')$ un punto sobre la curva calcula su distancia al centro $C'(5,4)$ y verifica cuál igualdad es cierta.

   a) $(x'-5)^2+(y'-4)^2=3$

   b) $(x'-5)^2+(y'-4)^2=3^2$

   c) $(x'-5)^2+(y'-4)^2=6$

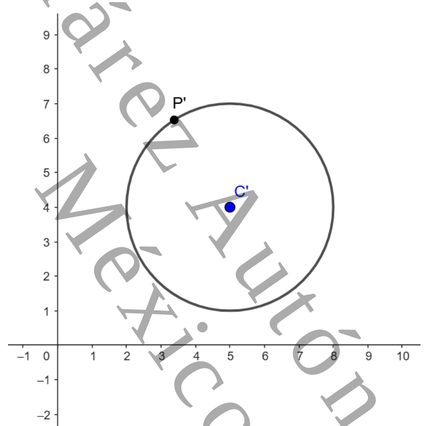


Figura 5.17: Circunferencia con centro fuera del origen.

En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1 [27]

La circunferencia con centro en el punto (h,k) y de radio r, tiene por ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{5.3}$$

Al desarrollar la ecuación 5.3 se obtiene la *ecuación general de la circunferencia*:

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \tag{5.4}$$

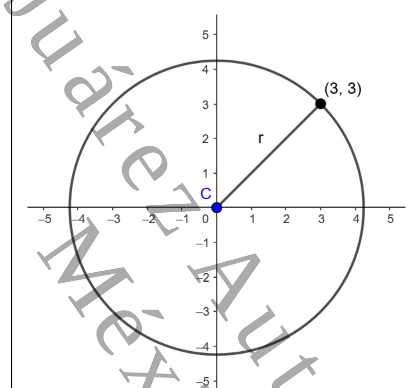
En la cual $d=-2h, e=-2k, f=h^2+k^2-r^2$.

ACTIVIDAD (FI-C10): Relación de la ecuación con su gráfica

Propósito. Transitar y relacionar los diferentes registros de representación, para determinar la expresión analítica de la circunferencia y sus elementos.

Procedimiento

1. Completa el cuadro 5.4, en la cual por cada renglón se debe representar una circunferencia en los registro verbal, gráfico y numérico, para lo cual solo se ha proporcionado la representación de la *circunferencia* en uno de estos registros.

Registro verbal	Registro gráfico	Registro numérico
Circunferencia con centro en _____ y radio _____ .		$r:$ _____ $C($ ___ , ___ $)$ Ecuación:
Circunferencia con centro en _____ y radio _____ .		$r:$ _____ $C($ ___ , ___ $)$ $x^2+y^2-24x-22y+165=0$

Cuadro 5.4: Diferentes registros de representación de la circunferencia.

ACTIVIDAD (DF-C11): Ecuación de las mediatrices y centro

Propósito. Determinar desde un contexto analítico el centro de la circunferencia. Para lo cuál se retoma lo propuesto en la Actividad (DI-C5), y la idea es utilizar las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos que unen los puntos dados en el arco de circunferencia, lo cual genera un sistema de ecuaciones, y también usar la ecuación general de la circunferencia, la cual es común encontrar en libros de textos.

Procedimiento

1. Dados tres puntos de cada una de las *circunferencias*, determina el centro para cada circunferencia dada en la Actividad (DI-C5), utilizando las ecuaciones de las mediatrices y la *ecuación general de la circunferencia*.

Cabe mencionar que es común que en los libros de texto, el tema de *circunferencia* se inicie trabajando con la definición y se realicen procedimientos analíticos que involucran las variables de la ecuación para obtener la ecuación general. Se sugiere complementar esta sección en especial con estos apoyos.

Entornos de funcionalidad

Tecnología

Una forma de tener internet en nuestra casa es contratando un servicio en el cual se incluyen los dispositivos: modem y router. La función del primero es conectarse a la línea de servicio de internet de la compañía provisora, mientras que el segundo permite distribuir la conexión de internet del modem a varios dispositivos. El router tiene unas antenas que propagan la señal en forma de ondas circulares (o en forma de *circunferencia*), como se muestra en la figura 5.18.

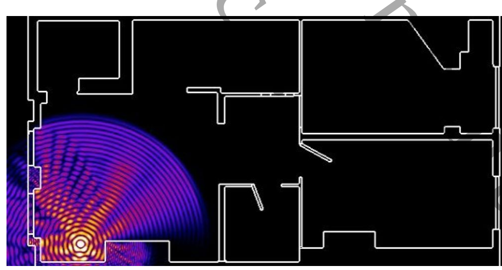


Figura 5.18: Ubicación de router en una casa. Recuperado de [5].

Situación problemática

En esta situación problema es necesario determinar el centro de una circunferencia, el cual resultará ser el lugar más apropiado donde debe ubicarse un router.

SP-C4. La casa de Luis esta en un terreno de 25 m x 25 m (figura 5.19) y desea colocar un router para que la señal de internet puede llegar hasta tres puntos importantes: su habitación $A(2,11)$, a la habitación de su hija $B(6,3)$ y al patio $C(20,5)$. Halla las coordenadas del punto más apropiado dónde Luis debe colocar el router y beneficie estos tres lugares. Respuesta en el Anexo A2.2.

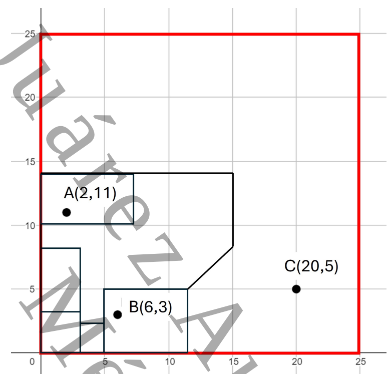
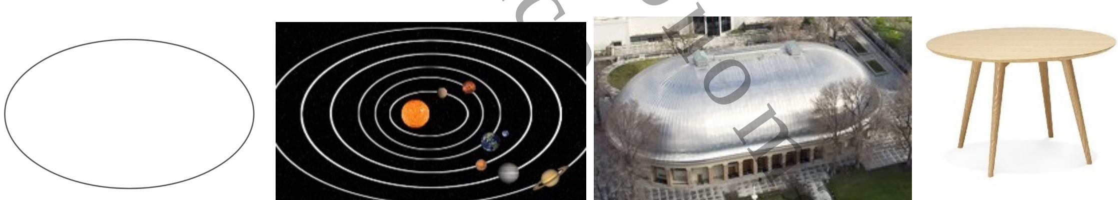


Figura 5.19: Dibujo de la casa de Luis en el plano cartesiano.

Capítulo 6

Elipse

La *elipse* (figura 6.1 a) es una curva que se usa en diferentes áreas del conocimiento: en astronomía se sabe que los planetas siguen órbitas elípticas alrededor del sol (figura 6.1 b); en medicina y arquitectura, debido a su propiedad reflectora, la podemos encontrar en un aparato llamado litotriptor (que se utiliza para la desintegración de cáculos renales) y en la forma de los techos de cabinas de murmullos (figura 6.1 c), respectivamente. También, existen objetos que tienen la forma de esta curva, como por ejemplo el borde del tablero de una mesa (figura 6.1 d).



(a) Elipse. (b) Órbitas planetarias. (c) Tabernáculo de Salt Lake. (d) Mesa.

Figura 6.1: Elipse y sus usos.

En este capítulo presentamos un tratamiento para el estudio de la *elipse*, considerando los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele*. A continuación describimos, a grandes rasgos, lo que se podrá encontrar en cada nivel.

En el nivel VISUALIZACIÓN (VI) se conoce y obtiene la curva mediante una construcción que evoca al *método del jardinero* (ACTIVIDAD (VI-E2)), el cual es utilizado en oficios como la carpintería y vidriería. En el nivel ANÁLISIS (AN) se presentan sus elementos básicos y se explora su propiedad de *excentricidad* (ACTIVIDAD (AN-E4)). En el nivel DEDUCCIÓN INFORMAL (DI) se da énfasis a la definición de la curva, para lo cual se calculan distancias de algunos puntos sobre la curva a cada *foco* y se trabaja desde los registros de representación gráfico, numérico y verbal (ACTIVIDAD (DI-E6)); se incluyen también, situaciones problemáticas que tratan con la propiedad focal de la curva, la cual es de mucha utilidad en diferentes áreas del conocimiento y se da un primer acercamiento a su ecuación tomando como andamiaje la ecuación de la *circunferencia*. Para finalizar, en el nivel DEDUCCIÓN FORMAL (DF) se construye la ecuación de la *elipse*, se ubican y se significan sus elementos al presentarlos desde los diferentes registros de representación (ACTIVIDAD (DF-E9)); además, se plantean situaciones problemáticas en los cuales se utiliza la ecuación de la *elipse* para ubicar o distribuir objetos y para calcular de manera óptima el material necesario para cierta construcción.

6.1. Nivel 1: Visualización

Una imagen muy común de la *elipse* es la que se presenta en la figura 6.2. Apolonio de Perga, allá por el siglo III a. C [16], generó esta curva al realizarle un corte a un cono con algo parecido a una hoja plana de cuaderno y dándole una leve inclinación. El trazo que deja este corte resulta ser la curva *elipse* (figura 6.2).

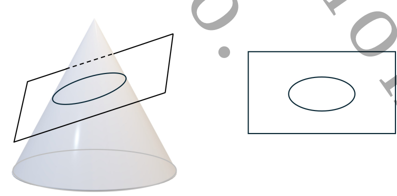


Figura 6.2: Elipse generada a partir del corte de un cono.

ACTIVIDAD (VI-E1): Identificando la curva en el corte del cono

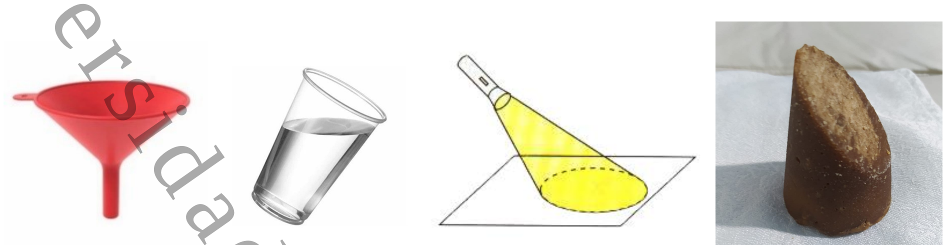
Propósito. Identificar la elipse a partir de figuras que se obtienen manipulando objetos que tienen forma similar a un cono, por ejemplo: al inclinar un vaso con agua (figura 6.3 b), la luz que proyecta una linterna en una superficie plana (figura 6.3 c) y el corte transversal a un piloncillo (figura 6.3 d).

Sería muy enriquecedor llevar a la práctica la manipulación de estos objetos (u otros parecidos) en el salón de clases para visualizar la curva, como se realizó en [29] y [4].

Procedimiento

1. Mira la figura 6.3 e identifica en cuáles objetos se genera una *elipse* y dibújala.

   Observación. Recuerda que la elipse se genera a partir del corte de un cono.



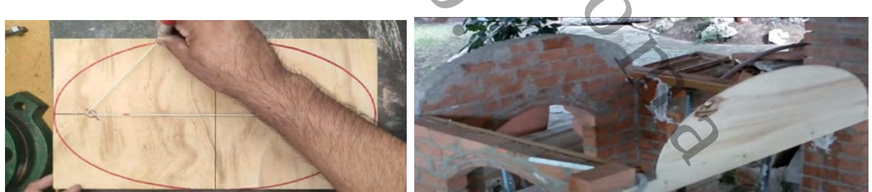
(a) Embudo. (b) Vaso con agua. (c) Lámpara. (d) Piloncillo.

Figura 6.3: Diferentes objetos.

Entornos de funcionalidad

Mesas elípticas, cimbra y cortes en vidrio.

Existe un método práctico para dibujar una *elipse* en una superficie plana, este es el llamado *método del jardinero*, el cual es utilizado en algunos oficios como la carpintería, albañilería y vidriería, para elaborar mesas elípticas (figura 6.4 a), cimbra para la construcción de arco elíptico (figura 6.4 b), entre otros objetos en forma de *elipse*.



(a) Trazo de la elipse en madera. (b) Cimbra para construir un arco elíptico.

Figura 6.4: Uso del método del jardinero.

ACTIVIDAD (VI-E2): Método del jardinero

Propósito. Mostrar un método para trazar y reconocer diferentes elipses. Cabe mencionar que el método del jardinero utiliza hilo, tachuelas y lápiz u otro objeto para marcar el trazo; para realizar el trazo de diferentes elipses es necesario variar la distancia entre las tachuelas.

Materiales

1 rollito de hilo, 2 tachuelas, ¼ papel cascarón, 1 tijera y 1 lápiz.

Procedimiento

1. Corta un pedazo de hilo de diez centímetros de longitud y sujeta sus extremos a las tachuelas.
2. Ubica las tachuelas en el papel cascarón (marca los puntos donde colocaste) de tal modo que la distancia entre ellas sea menor que la longitud del hilo.
3. Tensa el hilo con el lápiz y deslizalo por todo el hilo para generar el trazo de la curva cerrada (figura 6.5).
4. Experimenta con otras posiciones de las tachuelas.

   Adaptación de [35].

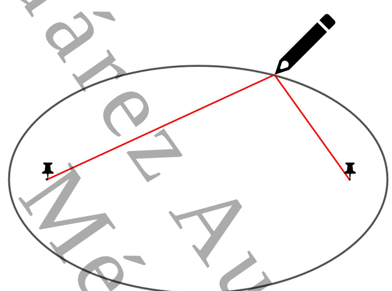


Figura 6.5: Método del jardinero con hilo y tachuelas.

6.2. Nivel 2: Análisis

Se presentan los elementos de la *elipse*, su propiedad de *excentricidad*, su uso en las órbitas de los planetas.

Elementos

Dos elementos esenciales de la *elipse* son sus *focos*, los cuales fueron los puntos fijos donde se posicionaron las tachuelas en la ACTIVIDAD (VI-E2). En la figura 6.6 son representados como F_1 y F_2. El *eje focal* es la recta L que pasa por los *focos*, ésta corta a la curva en dos puntos V_1 y V_2, llamados *vértices*. El *eje mayor* es el segmento cuyos extremos son V_1 y V_2. El *centro* es el punto medio C del *eje mayor*. El *eje menor* es el segmento perpendicular al *eje mayor* que pasa por el *centro* y cuyos extremos son B_1 y B_2 [27].

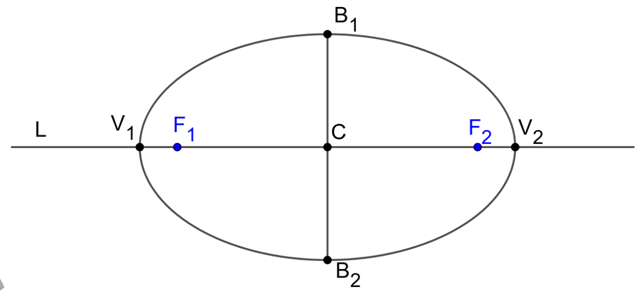


Figura 6.6: Elementos de la elipse.

ACTIVIDAD (AN-E3): Ubica, reconoce y calcula

Propósito. Ubicar los elementos de la elipse y conocer cuales de ellos (los focos) permitieron generarla en la ACTIVIDAD (AN-E2). También, dada una elipse en el plano cartesiano, calcular las longitudes de sus ejes y semiejes (mitad del eje).

<u>Procedimiento</u>

1. Localiza los elementos de una de las *elipses* generadas en la ACTIVIDAD (AN-E2), dibújalos y subraya la respuesta correcta a la pregunta: ¿qué elementos fueron fundamentales para generar la *elipse* con el *método del jardinero*?

   a) Vértices

   b) Focos

   c) Ejes

2. Dada la elipse de la figura 6.7, calcula las longitudes que se solicitan.

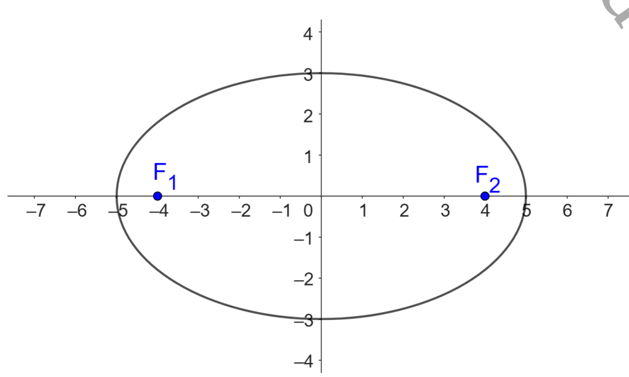


Figura 6.7: Elipse con centro en el origen.

Longitud del eje mayor __ Longitud del semieje mayor __ Distancia entre los focos __

Longitud del eje menor __ Longitud del semieje menor __ Semidistancia entre los focos __

Propiedad de excentricidad

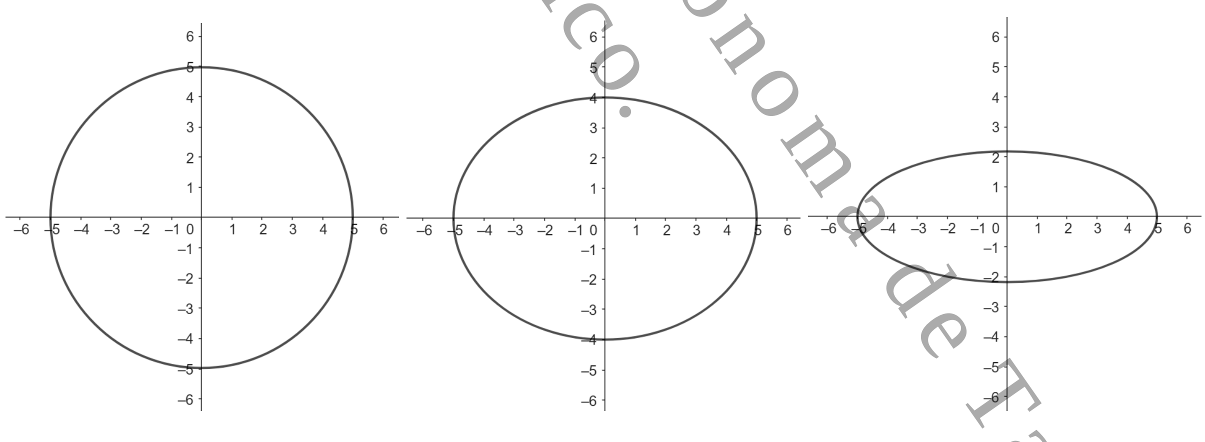
Hay *elipses* cuya forma es parecida a una *circunferencia* (figura 6.8 a) y otras que tienen forma alargada (figura 6.8 c). Lo anterior está relacionado con su valor de *excentricidad* (e), la cual es una razón dada entre las longitudes c (semidistancia entre los *focos*) y a (longitud del *semieje mayor*) [19].

ACTIVIDAD (AN-E4): La excentricidad y el aspecto de la curva

Propósito. Explorar algunas formas que presenta la elipse para establecer la relación con el valor de su excentricidad. Para lo cual se propone trabajar con tres elipses diferentes ubicadas en el plano cartesiano en donde la posición de los focos varía y la longitud de su eje mayor se conserva.

<u>Procedimiento</u>

1. Dadas las *elipses* de la figura 6.8, ubica sus *vértices* en los puntos $V_1(-5,0)$ y $V_2(5,0)$ y sus *focos*, cuyas coordenadas aparecen en el cuadro 6.1, y rellena lo solicitado en este.



(a) Elipse 1. (b) Elipse 2. (c) Elipse 3.

Figura 6.8: Diferentes elipses.

Elipse	1	2	3
Focos	(0.5, 0) y (−0.5,0)	(3, 0) y (−3,0)	(4.5, 0) y (−4.5,0)
Semidistancia entre los focos (c)			
Longitud del semieje mayor (a)			
Calcula la excentricidad (e) de la elipse la cual es igual a la razón: $e = \frac{c}{a}$			

Cuadro 6.1: Cálculo de excentricidad.

2. Observa las *elipses* de la figura 6.8, los resultados del cuadro 6.1 y completa los dos enunciados según corresponda utilizando las siguientes palabras: uno, alargada, cero, circunferencia.

   a) Si los *focos* de la *elipse* están cerca de su *centro* y más lejos de sus *vértices*, es decir, la semidistancia entre los *focos* es menor que la longitud del *semieje mayor*, entonces su *excentricidad* se aproxima a __________ y la curva es parecida a una __________ .

   b) Si los *focos* de la *elipse* están lejos del *centro* y están más cercanos a los *vértices*, es decir, la semidistancia entre los *focos* se acerca a la longitud del *semieje mayor*, entonces su *excentricidad* se aproxima a __________ y la curvas es __________ .

Es importante resaltar que la *excentricidad* determina el aspecto de la *elipse* y su valor está entre cero y uno. Una *excentricidad* igual a cero, indicaría que los dos *focos* de la *elipse* coinciden en un mismo punto y esta degenera en una *circunferencia* siendo el punto el *centro*. Conforme la *excentricidad* va creciendo, los *focos* se van alejando del *centro*, cuando la *excentricidad* se acerca a uno, los *focos* se acercan a los extremos del *eje mayor (vértices)* y el *eje menor* se hace más estrecho, o sus extremos se acercan al *centro* de la *elipse*, así esta se vuelve más angosta o alargada [19].

Ecuación de excentricidad

La *excentricidad* (e) es igual a la razón:

$$e = \frac{c}{a} \tag{6.1}$$

donde c es la semidistancia entre los *focos* y a es la longitud del *semieje mayor*, $a \neq 0$.

Entornos de funcionalidad

Astronomía

La *excentricidad* (e) de la *elipse* ha tenido un papel importante en la comprensión del movimiento de los planetas que conforman el sistema solar (figura 6.1 b). El astrónomo Kepler descubrió que todos los planetas se desplazan en órbitas elípticas, con el Sol situado en un foco [21].

ACTIVIDAD (AN-E5): Órbitas y excentricidad

Propósito. Identificar el aspecto de las órbitas de los planetas dada su excentricidad. Observa que la mayoría de las órbitas son redondas o se aproximan a una circunferencia, por lo que se han planteado las siguientes preguntas para reflexionar sobre esto.

Procedimiento

1. Analiza el cuadro 6.2 y responde las siguientes preguntas: ¿cuál planeta tiene la órbita más alargada? y ¿cuál planeta tiene la órbita más parecida a una circunferencia? Justifica tus respuestas.

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Excentricidad	0.206	0.007	0.017	0.093	0.048	0.056	0.046	0.009

Cuadro 6.2: Excentricidad de las órbitas de los planetas. Recuperado de [2].

6.3. Nivel 3: Deducción Informal

Se trabaja la *elipse* en el plano cartesiano y se da un andamiaje para acceder a su ecuación.

ACTIVIDAD (DI-E6): Puntos de la curva

Propósito. Calcular distancias para reconocer la condición que cumplen los puntos de la elipse. Para eso se proporcionan varios puntos (cuadro 6.3), se obtiene la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) y luego se ubican los puntos en el plano cartesiano. Se enfatiza cuáles de estos puntos conforman la curva elipse al comparar las sumas obtenidas.

Materiales

1 hoja blanca y 1 lápiz.

Procedimiento

1. Rellena lo que se solicita en el cuadro 6.3.

2. Dibuja en la hoja blanca el plano cartesiano, ubica los puntos del cuadro 6.3 y une con una curva suave aquellos que cumplen que la suma de las distancias son iguales. Identifica qué curva obtuviste.

Punto	Distancia del *Punto* a $F_1(-4,0)$	Distancia del *Punto* a $F_2(4,0)$	Suma de las distancias
(5,0)	9	1	10
(6,5)			
$\left(2,\frac{\sqrt{189}}{5}\right)$			
$(3,-2.4)$			
$(3,-5)$			
$(0,-3)$			
$(-4,-1.8)$			
$(-5,0)$			
$(-8,4)$			
$(-3,2.4)$			

Cuadro 6.3: Coordenadas de puntos.

3. Selecciona cuál de las condiciones satisface la *elipse* que obtuviste. Curva en el plano cuyos puntos cumplen que:

   a) la suma de sus distancias a dos puntos fijos *(focos)* varía.

   b) la suma de sus distancias a dos puntos fijos *(focos)* es igual a una constante.

   c) la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos *(focos)* es igual a una constante.

ACTIVIDAD (DI-E7): El eje mayor y la constante

Propósito. Entender la relación que existe entre los semiejes de la elipse y la semidistancia entre los focos y en especial la longitud del semieje mayor. Tener presente el teorema de Pitágoras.

Se trabajará con la elipse generada en la ACTIVIDAD (DI-E6), considere sus resultados.

Procedimiento

1. La *elipse* de la figura 6.9 corresponde a la generada en la ACTIVIDAD (DI-E6). Indica cuáles de los valores dados equivale a la longitud de su eje mayor:

   a) Longitud del *eje menor*.

   b) Distancia entre los *focos*.

   c) La constante obtenida de la suma de las distancias en el cuadro 6.3.

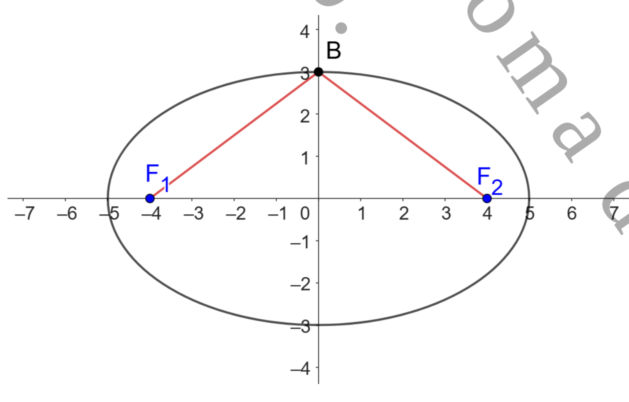


Figura 6.9: Un punto sobre la elipse con centro en el origen.

2. Sea $B(0,3)$ un punto de la *elipse* y un extremos del *eje menor*. Considere los segmentos que unen a B con F_1 y F_2. Complete el enunciado considerando los siguientes incisos.

   La longitud de cada segmento BF_1 y BF_2 equivale a: __________ .

a) semidistancia entre los *focos*.

b) longitud de *semieje mayor*.

c) longitud de *semieje menor*.

3. Selecciona cuál de las siguientes igualdades es cierta, considerando las longitudes de los *semiejes*.

   Observación. Considera que se forman dos triángulos rectángulos en la figura 6.9 .

   a) (*semidistancia entre los foco*)^2= (*semieje mayor*)^2 +(*semieje menor*)^2.

   b) (*semieje mayor*)^2= (*semieje menor*)^2 + (*semidistancia entre los foco*)^2.

   c) (*semieje menor*)^2 = (*semidistancia entre los foco*)^2 + (*semieje mayor*)^2.

En conclusión tenemos los siguientes resultados.

Relación entre los semiejes

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{6.2}$$

Donde a es la longitud del *semieje mayor*, b es la longitud del *semieje menor* y c es la semidistancia entre los *focos*.

Situaciones Problemáticas

Las siguientes situaciones problemáticas resultan favorables para fortalecer el entendimiento de la ecuación (6.2), la cual sirve para hallar la posición de los *focos* de la *elipse* si se conoce la longitud de sus *ejes*.

SP-E1. Un carpintero tiene un trozo de madera rectangular de 2 m por 1.6 m y realizará una mesa en forma de *elipse*, para eso dibujará en una superficie plana el molde de la curva utilizando el *método del jardinero*, considerando las medidas del trozo de madera, a fin de obtener la *elipse* más grande posible. Responde las siguientes preguntas: ¿qué distancia debe haber entre los clavos? y ¿cuántos centímetros de hilo aproximadamente necesitará (la longitud del hilo viene determinada por la longitud del *eje mayor*)?

SP-E2. Por accidente Iván ha roto el vidrio de su puerta (figura 6.10), el cual tenía forma de *elipse*. Como Iván no puede desplazarse para llevar físicamente el molde de cartón (que ha obtenido al realizar el trazo sobre la puerta, el cual ha quedado a la perfección), ha decidido enviar una imagen del trazo y las medidas de la puerta. Con los datos proporcionados, indica un procedimiento que permita reproducir exactamente la forma elíptica del vidrio de la puerta de Iván.

Figura 6.10: Puerta con hueco en forma de elipse.

Propiedad reflectora

La propiedad reflectora de la *elipse* está relacionada con sus *focos*, ésta consiste en que, si una fuente de luz o sonido se coloca en un *foco*, ésta se reflejará en el otro. Esta propiedad se utiliza en superficies en forma de *elipsoide* (el cual se obtiene al girar una *elipse* sobre su *eje mayor*) o *semielipsoide* [41].

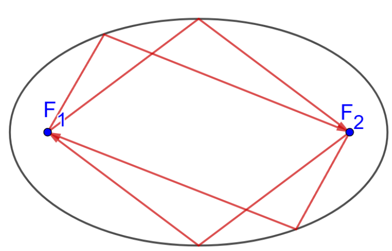


Figura 6.11: Propiedad reflectora.

Arquitectura

Las galerías de murmullos (figura 6.12), tienen techo en forma de un *semielipsoide* y cumplen que si se emite un bajo murmullo en un *foco* este será escuchado claramente en el otro. Ejemplo de estas galerías son el Tabernáculo de Salt Lake City, E.U. (figura 6.1 c) y la Galería de los Suspiros (capilla de los secretos) perteneciente al Convento del Desierto de los Leones, ubicado cerca de la Ciudad de México [40] y [34].

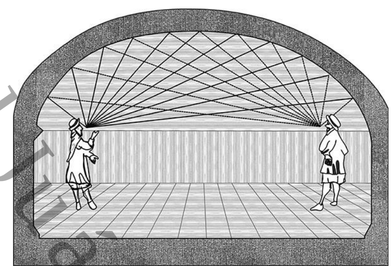


Figura 6.12: Corte transversal de una capilla de murmullo.

Medicina

El litotriptor es un aparato utilizado para la desintegración de cálculos renales (figura 6.13), el cuál consta de un reflector en forma de *semielipsoide*; desde uno de los *focos* se emiten ondas de choque que son reflejadas y concentradas en el otro *foco*, donde es colocado el cálculo renal [1].

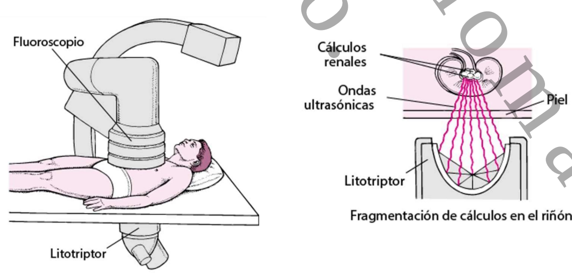


Figura 6.13: Litotriptor. Recuperado de [31].

Juegos de mesa

En las mesas de billar en forma de elipse (figura 6.14) se implementa la *propiedad reflectora*, el hueco está ubicado en uno de los *focos* de la *elipse*, de este modo la bola debe ser colocada en el otro *foco*, para que al ser golpeada choque en la superficie y entre en el hueco.

Figura 6.14: Mesa de billar en forma de elipse.

Situaciones Problemáticas

Las siguientes situaciones problemáticas son derivadas del uso de la *elipse* en algunas áreas del conocimiento donde se implementa la *propiedad reflectora*, la cual involucra sus *focos*, por lo que es importante la posición de éstos. Considere la ecuación (6.2).

Observación. Los datos proporcionados en las situaciones problemáticas han sido adaptados.

SP-E3. Cerca de la Ciudad de México se encuentra el antiguo Convento del Desierto de los Leones, el cual cuenta con una capilla de los secretos (con techo en forma de un *elipsoide*). Debido a su estructura, servía para que los sacerdotes se confesaran mutuamente. Las medidas aproximadas de la capilla son 5 m de ancho, 4 m de alto y 3 m de largo. Al realizar un corte transversal a ésta se obtiene la figura 6.15, en la cual se aprecian dos muros de 30 cm de ancho. Responde la siguiente pregunta: ¿a qué distancia de cada muro se colocaban los sacerdotes para confesarse?

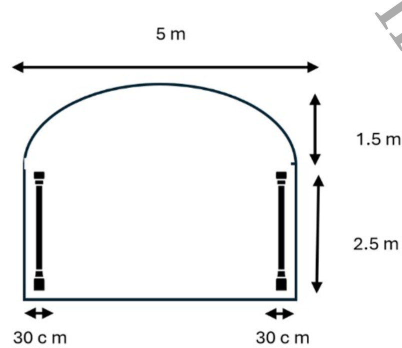


Figura 6.15: Dibujo del corte transversal de la capilla de los secretos.

SP-E4. Se construirá un litotriptor de 15 cm de altura y 20 cm de diámetro (figura 6.16). Calcula la distancia del vértice (V) al foco (F) para que a partir de ahí se emitan ondas de choque y la distancia del V (en la dirección vertical) dónde debe ubicarse el cálculo renal para que sea desintegrado.

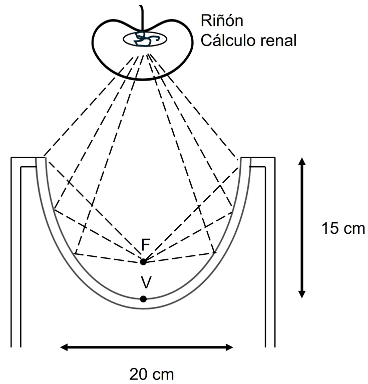


Figura 6.16: Litotriptor con medidas.

SP-E5. Imagina que te encuentras en una fiesta donde hay diferentes juegos para entretenerse; entre ellos una mesa de billar como la que aparece en la figura 6.17. Marca con un punto dónde aproximadamente debes colocar la bola, para que este al ser golpeada con el palo entre en el hueco.

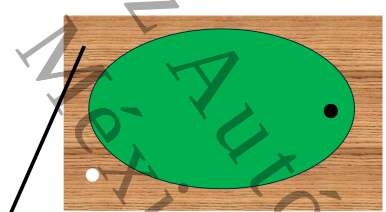


Figura 6.17: Mesa de billar.

ACTIVIDAD (DI-E8): Elipse y circunferencia

Propósito. Indagar sobre la ecuación de una elipse con eje mayor en el eje-X, considerando su relación con la circunferencia, enfatizando el valor de la excentricidad y dando significado a los parámetros que se encuentran como denominadores en la ecuación de la elipse.

<u>Procedimiento</u>

1. Considera las siguientes ecuaciones y comprueba que todas son equivalentes.

   a) $x^2+y^2=5^2$

   b) $x^2+y^2=25$

   c) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

2. En efecto, todas las ecuaciones generan a la *circunferencia* de la figura 6.18, que también es una *elipse* que tiene *excentricidad* cero. Indica en dónde están sus *focos* y cuál es el valor de a (es la longitud del *semieje mayor*) y de b (es la longitud del *semieje menor*).

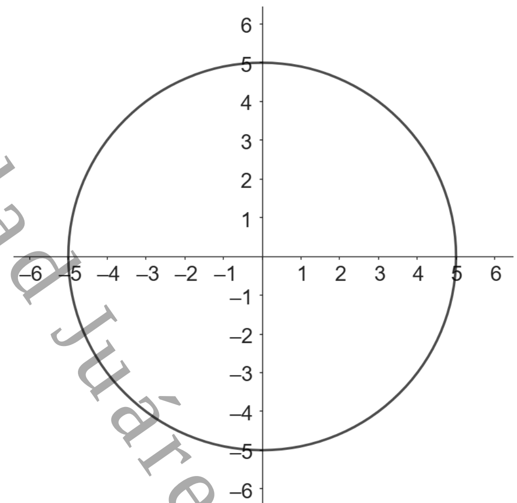


Figura 6.18: Elipse con excentricidad igual a cero.

3. Observa los componentes de la ecuación del inciso 1. c) de la *elipse* de la figura 6.18 y responde la pregunta: ¿en qué parte de la ecuación se tiene el valor de la longitud del *semieje mayor* y *semieje menor*?

4. Considere la *elipse* de la figura 6.19, la cual tiene *excentricidad* distinta de cero. Obtén la longitud de sus *semiejes*, e indica cuál de las ecuaciones corresponde, para eso considera la siguiente condición:

   El denominador mayor está relacionado a la variable correspondiente al eje coordenado sobre el cual se halla el *eje mayor* [27], por lo tanto el denominador menor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado sobre el cual se halla el *eje menor*.

   a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

   b) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

   Completa la siguiente expresión escribiendo sobre la línea a qué longitud de los *semiejes* corresponde:

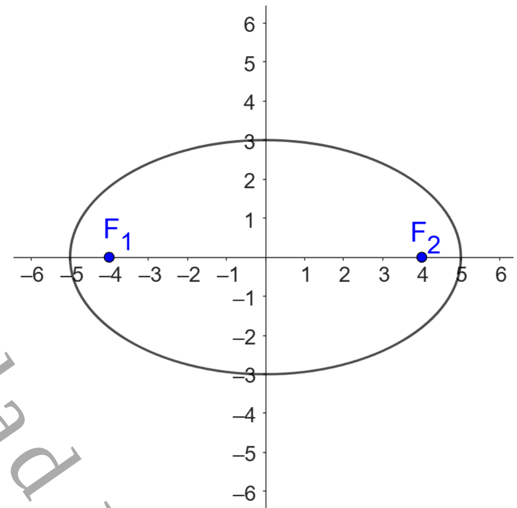


Figura 6.19: Elipse con excentricidad distinta de cero.

$$\frac{x^2}{(semieje: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^2} + \frac{y^2}{(semieje: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^2} = 1$$

6.4. Nivel 4: Deducción Formal

Se trabaja con la definición de la *elipse* y sus diferentes representaciones.

ACTIVIDAD (DF-E9): Ecuación

Propósito. Obtener la ecuación de una elipse a partir de la definición. Para ello, se considera un punto arbitrario sobre la curva y se calculan las distancias hacia los focos, posteriormente se realizan operaciones algebraicas hasta deducir su ecuación. Aquí se enfatiza el valor de la constante que se menciona en la definición y que se trabajó en la Actividad (DI-E6).

Definición 2

"*La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los puntos fijos son los focos*" [27].

Procedimiento

1. Lee la Definición 2, note que la *constante* que se menciona es igual a la longitud del *eje*

mayor de la *elipse* [36]. En la mayoría de los libros de texto esta *constante* es expresada como $2a$, donde a es la longitud del *semieje mayor*.

2. Observe la *elipse* de la figura 6.20. Considere a $P(x,y)$ un punto arbitrario sobre la curva y a $F_1(-4,0)$ y $F_2(4,0)$ sus *focos*, sea $d(P,F_1)$ y $d(P,F_2)$ la distancia de P a F_1 y F_2, respectivamente. Elija el inciso que dé la igualdad que satisfaga la Definición 2.

   a) $d(P,F_1)+d(P,F_2)=5$

   b) $d(P,F_1)+d(P,F_2)=4$

   c) $d(P,F_1)+d(P,F_2)=10$

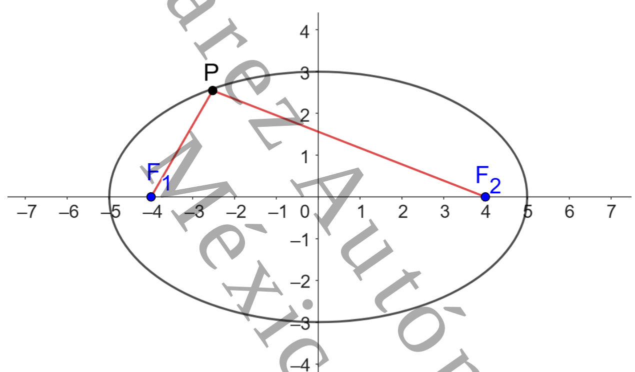


Figura 6.20: Elipse con centro en el origen y un punto arbitrario.

3. Obtenga las distancias del punto $P(x,y)$ a cada *foco*, sustituya en la expresión elegida y desarrolle. Recuerde transponer el radical adecuado y elevar al cuadrado ambos miembros, una primera vez y luego una vez más hasta llegar a la expresión:

$$144x^2+400y^2=3600$$

4. Indique las operaciones que tiene que realizar a la expresión anterior para obtener:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Observación. El procedimiento completo se encuentra en el Anexo A3.1.

Teorema 2 [27]

La ecuación de una *elipse* con *centro* en el origen, *eje focal* el *eje-X*, distancia entre los *focos* igual a $2c$ y cantidad *constante* igual a $2a$ es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6.3}$$

Si el *eje focal* de la *elipse* coincide con el *eje-Y*, de manera que las coordenadas de los *focos* sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, la ecuación de la *elipse* es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \tag{6.4}$$

Con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

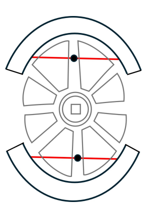
Situaciones Problemáticas

Se presentan dos situaciones problemáticas relacionados con la distribución óptima de objetos y con la obtención de material para cierto proyecto de construcción, en donde se enfatiza el uso de la ecuación de la *elipse*, así como algunos de sus elementos.

SP-E6. La Plaza de San Pedro (figura 6.21 a) ubicada en la Ciudad del Vaticano, Roma, fue diseñada por el arquitecto barroco Gian Lorenzo Bernini. Ésta tiene forma de *elipse* (con 240 m de ancho): en su centro se ubica un obelisco y en cada foco una fuente, las cuales se ubican a una distancia de 100 m aproximadamente del obelisco [30].

Debido a las festividades religiosas en la Plaza de San Pedro, se colocarán dos mallas de plástico (rojas) alineada con cada fuente (representadas con un punto negro), de forma horizontal (figura 6.21 b). Si cada fuente tiene un diámetro de 5 m ¿cuántos metros de malla se necesitarán?

(a) Fotografía



(b) Dibujo

Figura 6.21: Plaza de San Pedro.

SP-E7. Juan es herrero y realizará un protector con un arco elíptico de 150 cm de largo y 50 cm de alto. La medida total del protector es de 150 cm de largo por 150 cm de alto (figura 6.22). A partir de estas medidas ha distribuido adecuadamente 9 varillas verticales y 5 varillas horizontales; la distancia entre las varillas verticales es de 15 cm y entre las horizontales es de 25 cm. Para el contorno del barandal ha realizado los cálculos para determinar la longitud de las varillas que utilizará, pero aún le falta determinar la longitud de las varillas verticales y horizontales. Responde la pregunta: ¿cuánto debe medir cada varilla vertical y horizontal?

Observación. Solución en el Anexo A3.2.

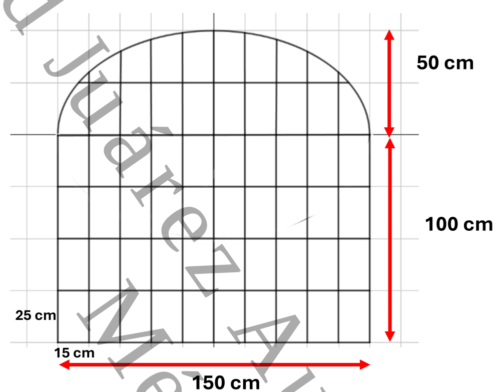


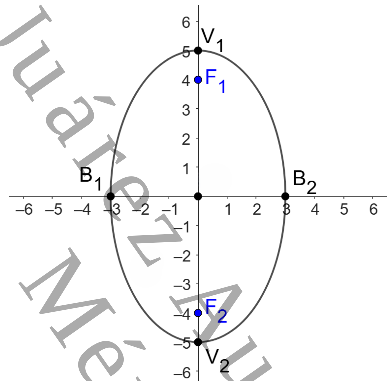
Figura 6.22: Medidas del barandal.

ACTIVIDAD (DF-E10): Relación de la ecuación con su gráfica

Propósito. Transitar entre los registros de representación de la elipse, para determinar su expresión analítica, sus elementos y gráfica.

Procedimiento

1. Completa el cuadro 6.4, en la cual por cada renglón se debe representar una *elipse* en los registros de representación verbal, gráfico y numérico, para ello solo se ha proporcionado la representación de la cónica en uno de estos registros.

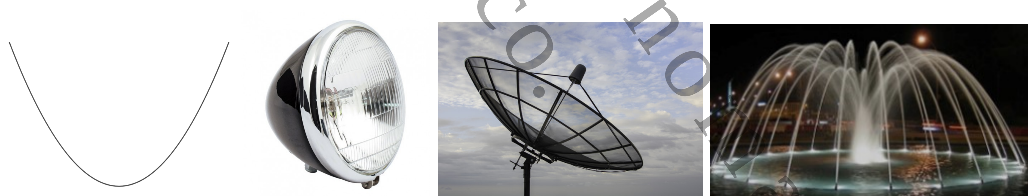
Registro verbal	Registro gráfico	Registro numérico
Elipse con *centro* en el origen, con *semieje mayor* sobre el *eje-Y* cuya longitud es: ___ y *semieje menor* sobre el *eje-X* cuya longitud es: ___ .		$F_1($ ___ , ___ $)$ $F_2($ ___ , ___ $)$ $V_1($ ___ , ___ $)$ $V_2($ ___ , ___ $)$ $B_1($ ___ , ___ $)$ $B_2($ ___ , ___ $)$ Excentricidad: ___________ Ecuación:
Elipse con *centro* en el origen, con *semieje mayor* sobre el *eje-* ___ cuya longitud es: ___ y *semieje menor* sobre el *eje*: ___ cuya longitud es: ___ .		$F_1($ ___ , ___ $)$ $F_2($ ___ , ___ $)$ $V_1($ ___ , ___ $)$ $V_2($ ___ , ___ $)$ $B_1($ ___ , ___ $)$ $B_2($ ___ , ___ $)$ Excentricidad: ___________ Ecuación: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

Cuadro 6.4: Diferentes registros de representación de la elipse.

Capítulo 7

Parábola

La *parábola* (figura 7.1 a) es una curva muy interesante ya que se utiliza en diferentes áreas del conocimiento debido a su propiedad reflectora. En electrónica, se encuentra en la construcción de faros automovilísticos (figura 7.1 b) y lámparas; en telecomunicaciones se usa en las antenas parabólicas, permitiendo que la señal llegue lo mejor posible a nuestros hogares (figura 7.1 c). Además, la curva como tal la podemos ver en nuestro entorno, en el chorro que describe una fuente de agua (figura 7.1 d) o en la trayectoria que siguen algunos objetos.



(a) Parábola. (b) Faro automovilístico. (c) Antena parabólica. (d) Fuente de agua.

Figura 7.1: Parábola y sus usos.

En este capítulo presentamos un tratamiento para el estudio de la *parábola*, considerando los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele*. A grandes rasgos se describe lo que podrá encontrar en cada nivel.

En el nivel VISUALIZACIÓN (VI) se obtiene la curva mediante la construcción con material manipulativo haciendo dobleces a una hoja de papel (ACTIVIDAD (VI-P1)). En el nivel ANÁLISIS (AN) se presentan sus elementos y la condición que cumplen sus puntos utilizando triángulos isósceles (ACTIVIDAD (AN-P4)). En el nivel DEDUCCIÓN INFORMAL (DI) se ubica la curva en el plano cartesiano, se calculan distancias para reafirmar la condición de sus puntos usando los registros gráfico, verbal y numérico (ACTIVIDAD (DI-P5)), además se da el primer acercamiento a la ecuación de la *parábola*, tomando como andamiaje una construcción de la curva utilizando algunos de sus puntos (ACTIVIDAD (DI-P6)); y se aborda su propiedad reflectora. Por último en el nivel DEDUCCIÓN FORMAL (DF) se construye la ecuación de la parábola a partir de su definición y se da significado a algunos de sus elementos desde diferentes registros de representación (ACTIVIDAD (DF-P7)), se incluyen situaciones problemáticas en donde se usa su ecuación y su propiedad reflectora.

7.1. Nivel 1: Visualización

La *parábola* fue obtenida por Apolonio (III a.C) [16] al cortar un cono con ayuda de un plano inclinado paralelo a una generatriz de éste, como se aprecia en la figura 7.2.

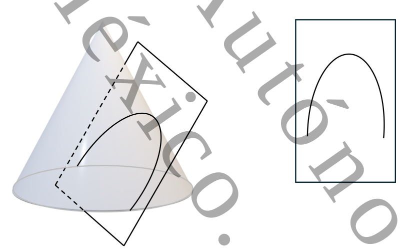


Figura 7.2: Parábola obtenida a partir del corte de un cono.

ACTIVIDAD (VI-P1): Doblando papel albanene

Propósito. Mostrar los pasos para obtener una parábola a partir de dobleces.

<u>Materiales</u>

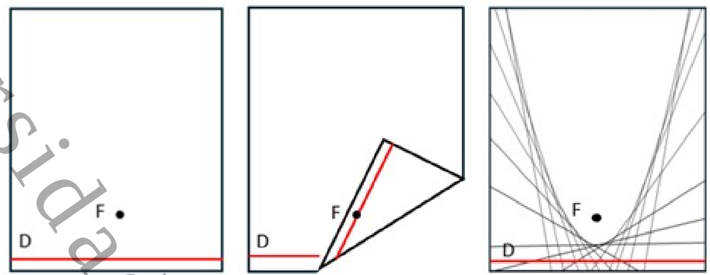
1 hoja albanene, 1 plumón y 1 regla graduada.

<u>Procedimiento</u>

1. Coloca la hoja albanene de modo que su lado más corto quede horizontal.

2. Traza con tu regla y plumón una línea D a un centímetro de distancia del lado más corto y marca un punto F a cuatro centímetros de distancia de la línea D y que esté aproximadamente a la mitad de la hoja (figura 7.3 a).

3. Dobla la hoja de tal manera que el punto F quede sobre la línea D (figura 7.3 b). Ve recorriendo el punto sobre toda la línea y marcando los dobleces (figura 7.3 c).



(a) (b) (c)

Figura 7.3: Parábola a partir de dobleces.

Entornos de funcionalidad

Física

Esta área estudia el *tiro parabólico*, el cual es muestra del movimiento que lleva a cabo un cuerpo en dos dimensiones o sobre un plano. Algunos ejemplos de cuerpos que su trayectoria corresponde a un *tipo parabólico* son: una pelota de básquet o golf (figura 7.4 a, b) al ser lanzada con cierto ángulo; proyectiles lanzados desde la superficie de la Tierra (figura 7.4 c) o desde un avión. El movimiento de un cuerpo es parabólico si su trayectoria es una *parábola* [33].

(a) Pelota de básquet. (b) Pelota golf. (c) Proyectil.

Figura 7.4: Tiro parabólico. La figura (b) fue recuperada de [33].

ACTIVIDAD (VI-P2): Parábola en trayectorias

Propósito. Identificar la parábola en la trayectoria que siguen algunos objetos. Se sugiere llevar a cabo la visualización de la trayectoria que sigue una pelota de basquet (figura 7.4 a).

Procedimiento

1. Observa la figura 7.4 e identifica la curva generada en la trayectoria de los objetos.

2. Reflexiona sobre que otros objetos a tu alrededor pueden seguir esta misma trayectoria.

7.2. Nivel 2: Análisis

Se presentan los elementos básicos de la curva y se empieza a conocer las condiciones que cumplen los puntos que la conforman.

Elementos

Dos elementos esenciales de una *parábola* son la *directriz* y el *foco*, éstos dos elementos permitieron poder generar la curva en la ACTIVIDAD (VI-P1). En la figura 7.5 la *directriz*, es la recta fija D y el *foco* es el punto fijo F. Otros de sus elementos son el *eje focal* que es la recta L que pasa por el *foco* y es perpendicular a D. Sea A el punto de intersección del *eje focal* y la *directriz*, el *vértice* V es un punto que se halla sobre la *parábola* y a la mitad del segmento comprendido entre F y A [27].

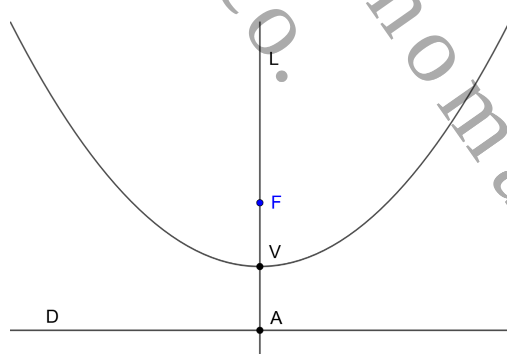


Figura 7.5: Elementos de la parábola.

ACTIVIDAD (AN-P3): Elementos fundamentales

Propósito. Ubicar el foco y la directriz de la parábola, para eso se considera la curva obtenida en la ACTIVIDAD (VI-P1) con la finalidad de que identifiquen, cuáles de los elementos fueron fundamentales para poder generarla.

Procedimiento

1. Observa la *parábola* obtenida en la ACTIVIDAD (VI-P1), ubica sus elementos y subraya la respuesta correcta a la pregunta: ¿cuáles elementos fueron fundamentales para generar la parábola?

   a) Vértice

   b) Foco

   c) Directriz

ACTIVIDAD (AN-P4): Triángulos y vértices

Propósito. Medir segmentos para conocer la condición que cumplen los puntos de una parábola, tomando como andamiaje triángulos isósceles. Se proporcionan algunos puntos sobre la parábola, los cuales coinciden con los vértices de cada triángulo.

Materiales

1 lápiz y 1 regla graduada.

Procedimiento

1. Observa la figura 7.6, que contiene triángulos que tienen uno de sus lados perpendicular a la recta D. Mide con una regla graduada los lados de cada triángulo y anota las medidas. Posteriormente continúa el trazo de la curva *(parábola)* uniendo los vértices opuestos al lado más largo de cada triángulo.

2. De acuerdo con tus resultados anteriores determina cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y coloca la letra V sobre la línea correspondiente.

   _____ Todos los triángulos son escalenos (todos sus lados son distintos).

   _____ Todos los triángulos son isósceles (dos de sus lados son iguales).

   _____ F y D representan el *foco* y la *directriz* de la *parábola*, respectivamente.

   _____ La longitud del segmento que une un punto de la curva con F y la longitud del segmento perpendicular que une el mismo punto con D no miden lo mismo.

   _____ La longitud del segmento que une un punto de la curva con el F y la longitud del segmento perpendicular que une el mismo punto con D miden lo mismo.

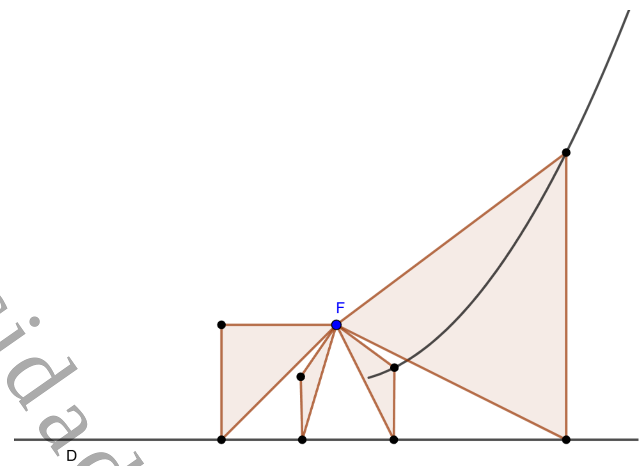


Figura 7.6: Triángulos con uno de sus vértices en común.

Situaciones Problemáticas

La siguiente situación problemática presenta un uso de la *parábola* para acomodar objetos. De manera implícita se utiliza la condición que cumplen los puntos de la curva, lo cual irá abriendo camino para conocer su definición en el cuarto nivel.

SP-P1. Lilia está organizando su fiesta de cumpleaños y ha rentado un salón de eventos, del cual ha hecho un dibujo (figura 7.7) donde se muestra la misma cantidad de cuadros que en realidad tiene el piso del salón. Ella ha decido que colocará una mesa de alimentos dulces (*MAD*), una barra de alimentos salados (*BAS*) y ha dejado un espacio para la pista de baile (*PB*). Ha rentado cinco mesas redondas para sus invitados y desea que cada mesa quede a la misma distancia de la *MAD* y la *BAS*, de modo que no queden tan juntas y que sus invitados puedan degustar y tener a la misma distancia los dos tipos de alimentos (dulces y salados). Ella ha colocado la mesa $M1$ en medio de la *MAD* y la *BAS*, lo cual cumple con la condición dada. Ayuda a Lilia acomodar las demás mesas para sus invitados y dibújalas en la figura 7.7, considera los centros de las mesas y que cada una de estas tiene un diámetro de dos cuadros del piso.

Toma en cuenta que la distancia que debemos ocupar de un punto a una recta debe ser la mínima, en otras palabras y por definición se tiene que "*la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Este segmento tiene la propiedad de ser único y el menor posible*" [3].

Observación. Para hallar la posición de las mesas considera los cuadros de la figura 7.7 o una regla graduada.

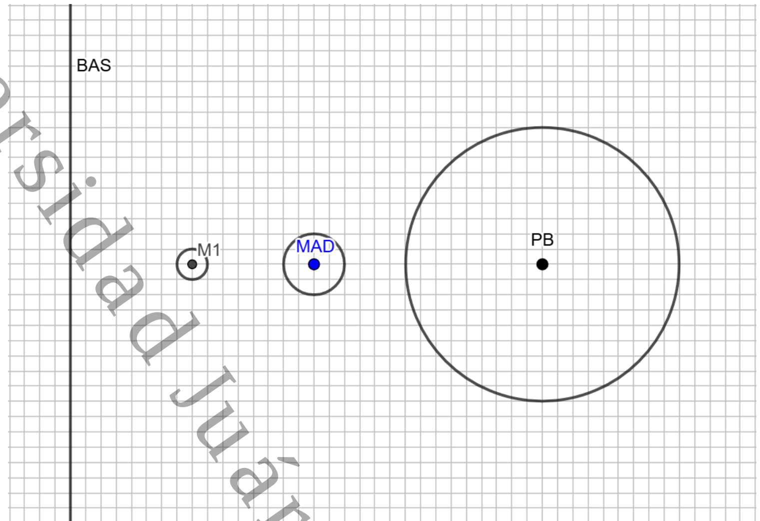


Figura 7.7: Dibujo del salón de evento.

Mira cómo han quedado acomodadas las mesas, únelas con una curva suave y selecciona la respuesta correcta a la pregunta: ¿sobre cuál curva considera que se encuentran las mesas?

- Elipse
- Semicircunferencia (la mitad de una circunferencia)
- Parábola

7.3. Nivel 3: Deducción Informal

Se trabaja la curva en el plano cartesiano, se calculan distancias y se da el primer acercamiento a su ecuación algebraica.

ACTIVIDAD (DI-P5): Puntos de la curva, el foco y la directriz

Propósito. Ubicar puntos y calcular distancias en el plano cartesiano. Se proporcionan varios puntos y se calculan sus distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz), estas distancias se registran en un cuadro y los puntos son ubicados en el plano cartesiano. Con ayuda *del cuadro y la visualización de los puntos, se determinan aquellos puntos que sí conforman a la curva y se contrasta con la igualdad de las distancias.*

Materiales

1 hoja blanca y 1 lápiz.

Procedimiento

1. Completa el cuadro 7.1, calculando las distancias solicitadas. En el primer renglón se muestra cómo se ha calculado la distancia del *Punto* (4,4) a F y a la recta D.

Punto	Distancia del *Punto* a $F(0,1)$	Distancia del *Punto* a la recta $D: y=-1$
(4,4)	$\sqrt{(4-0)^2+(4-1)^2}=5$	$\sqrt{(4-4)^2+(4+1)^2}=5$
(2,1)	2	2
(3,2.25)	3.25	3.25
(4,1)	4	2
(3,5)	2	2
(1,0.25)	1.25	1.25
(0,0)	1	1
(-1,0.25)	1.25	1.25
(-2,1)		
(-3,2.25)		
(-4,4)		

Cuadro 7.1: Coordenadas de puntos.

2. Dibuja el plano cartesiano en la hoja blanca y ubica los puntos dados en el cuadro 7.1. Identifica cuáles puntos pertenecen a una *parábola* y únelos con una curva suave, con ayuda de la información del cuadro 7.1 deduce la condición que cumplen estos puntos respecto a F y D, y selecciona la respuesta correcta:

   a) Su distancia a F y la recta D son distintas.

   b) Su distancia a F y la recta D son la misma.

ACTIVIDAD (DI-P6): Término cuadrático.

Propósito. Obtener las ecuaciones de parábolas considerando algunos de sus puntos. Esta actividad está conformada por dos momentos, en el primero se trabaja con la ecuación $x^2 = y$*, en el segundo con* $y^2 = x$*. En ambos momentos se presenta un cuadro con puntos que al ubicarlos en el plano cartesiano, harán evidente que pertenecen a una misma parábola. Posteriormente se busca ver la relación que guardan las coordenadas de cada punto de la curva para conocer su ecuación.*

Materiales

1 hoja blanca y 1 lápiz.

Momento 1

Procedimiento

1. Ubica en el plano cartesiano (figura 7.8) los puntos del cuadro 7.2 y únelos con una curva.

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	9	4	1	0	1	4	9
(x,y)	(3,9)	(2,4)	(1,1)	(0,0)	(-1,1)	(-2,4)	(-3,9)

Cuadro 7.2: Coordenadas de puntos de una parábola.

2. Observa que los puntos pertenecen a una *parábola* con *vértice* en el origen, foco en (0,1/4), determina la ecuación de su *directriz* y dibújala en el plano cartesiano.

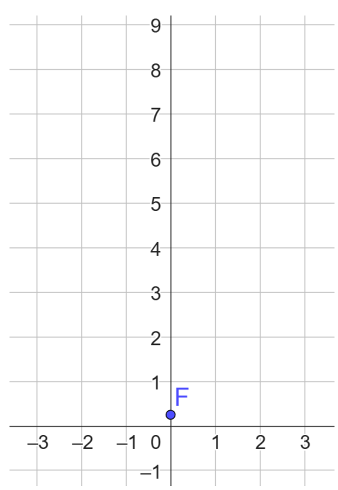


Figura 7.8: Plano cartesiano y el foco de una parábola.

3. A partir de los valores del cuadro 7.2, encierra en el cuadro 7.3 la proposición dada en el registro verbal que resulte verdadera y luego une con una la línea, con su correspondiente expresión algebraica.

Registro verbal	Registro algebraico
El valor de y al cuadrado es igual al de x	$x^2 = 2y$
El valor de x al cuadrado es igual al de y	$y^2 = x$
El valor de x al cuadrado es igual al doble de y	$x^2 = y$

Cuadro 7.3: Registro verbal y algebraico.

Momento 2

<u>Procedimiento</u>

1. Dada la *parábola* de la figura 7.9, con *vértice* en el origen, *foco* en (1/4,0), determina la ecuación de su *directriz* y dibújala en el plano cartesiano.

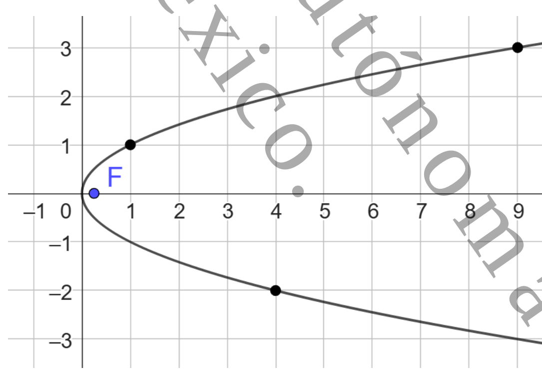


Figura 7.9: Puntos sobre una parábola.

2. Completa el cuadro 7.4, con algunos puntos de la parábola de la figura 7.9.

x							
y							
(x,y)							

Cuadro 7.4: Coordenadas de puntos de una parábola.

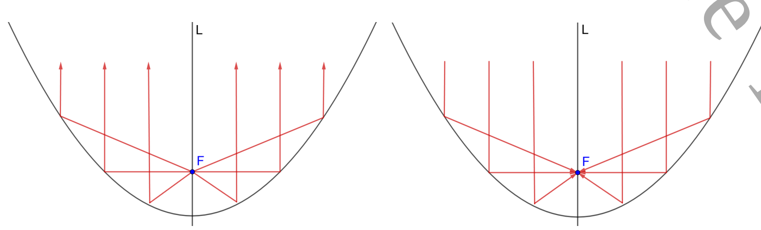
3. A partir de los valores del cuadro 7.4, encierra en el cuadro 7.5 la proposición dada en el registro verbal que resulte verdadera y luego une con una la línea, con su correspondiente expresión algebraica.

Registro verbal	Registro algebraico
El valor de y al cuadrado es igual al de x	$y^2 = 2x$
El valor de x al cuadrado es igual al de y	$y^2 = x$
El valor de y al cuadrado es igual al doble de x	$x^2 = y$

Cuadro 7.5: Registro verbal y algebraico.

Propiedad reflectora

Esta propiedad se utiliza en superficies en forma de paraboloide, el cual se obtiene al girar una *parábola* sobre su *eje focal*. Esta propiedad consiste en que los rayos de luz (o las señales electromagnéticas) que emanan desde una fuente ubicada en el *foco* se reflejarán a lo largo de rectas paralelas al *eje focal* (representado con la letra L) (figura 7.10 a). De manera inversa sucede que los rayos de luz que llegan paralelos al *eje focal*, se reflejarán en el *foco* (figura 7.10 b) [26] y [41].



(a) (b)

Figura 7.10: Parábola con vértice en el origen.

Electricidad

Los faros automovilísticos (figura 7.1 b) tienen un reflector parabólico en cuyo foco se coloca un bulbo luminoso, de manera que los rayos de luz que emanan del bulbo rebotan en el reflector hacia el exterior, logrando así una mayor iluminación.

Telecomunicaciones

Las antenas parabólicas domésticas (figura 7.1 c) que tienen forma de paraboloide, funcionan a partir de la señal digital que emite un satélite de TV, ésta se capta mediante un receptor, el cual es colocado en el foco de la parábola.

Horno solar

Un horno solar (figura 7.11) que tiene forma de un reflector parabólico funciona a partir de que los rayos solares inciden en el reflector, reflejándose en el *foco* de la *parábola* y creando allí una fuente de calor.

Figura 7.11: Horno solar.

7.4. Nivel 4: Deducción Formal

Se trabaja con la definición de la *parábola*, su ecuación y sus registros de representación.

ACTIVIDAD (DF-P9): Forma canónica de la ecuación

Propósito. Reforzar la noción de distancia de un punto a una recta y obtener la ecuación de una parábola para un caso particular a partir de la definición. Para eso se toma un punto arbitrario sobre la curva y se calcula su distancia hacia el foco y la directriz.

<u>Procedimiento</u>

1. Lee la Definición 3.

Definición 3

"La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz" [27].

2. Dada la *parábola* de la figura 7.12, con *vértice* en el origen, *foco* en $F(2,0)$ y *directriz* D igual a la recta $x = -2$, realiza lo solicitado en los siguientes inciso y ubica los puntos en esta *parábola*.

   a) Si A es un punto sobre D con ordenada 4, calcula la ordenada del punto P sobre la curva cuya abscisa es 2, que cumpla que $d(P,F) = d(P,A)$, dónde $d(P,F)$ y $d(P,A)$ es la distancia de P a F y A, respectivamente. Ubica los puntos A y P.

   b) Si B es otro punto sobre D con ordenada -8, calcula la ordenada del punto P sobre la curva cuya abscisa es 8, que cumpla que $d(P,F) = d(P,B)$, dónde $d(P,F)$ y $d(P,B)$ es la distancia de P a F y B, respectivamente. Ubica los puntos B y P.

   c) Si C es cualquier punto sobre D y sea P un punto cualquiera sobre la curva. Obtén las distancias $d(P,F)$ y $d(P,C)$ e igualarlas hasta obtener:

$$y^2 = 8x$$

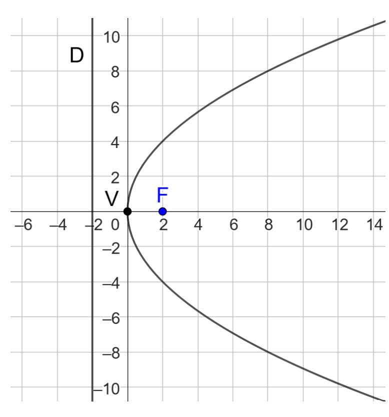


Figura 7.12: Parábola con vértice en el origen.

Observación. El procedimiento completo se encuentra en el Anexo A4.1.

En efecto se tiene el siguiente resultado

Teorema 3 [19]

La ecuación de una *parábola* con *vértice* en el origen y *foco* $(a,0)$ es:

$$y^2 = 4ax \tag{7.1}$$

La *parábola* se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a < 0$. La ecuación de una *parábola* con *vértice* en el origen y *foco* $(0,a)$ es:

$$x^2 = 4ay \tag{7.2}$$

La *parábola* se abre hacia la arriba si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$.

Situaciones Problemáticas

Las siguientes situaciones problemáticas enfatizan el uso de la ecuación de la *parábola*, además de utilizar su propiedad reflectora. Son presentados hasta ahora debido a que era necesario primero conocer la ecuación de la curva para poder ubicar el *foco*, el cual es primordial en esta propiedad, además de que esta también servirá para obtener otros datos importantes.

Anteriormente se planteó una situación problemática similar a SP-P2, en el cual se limitaba a utilizar regla o la cuadrícula proporcionada; en este caso se llegará a la solución a través de la ecuación de la *parábola*. Se espera que el alumno logre ubicar las mesas más rápido, haciendo patente las ventajas de usar la expresión algebraica.

SP-P2. Lilia ha decidido invitar a más amigos, para lo cual ha rentado 6 mesas más, ella ya tenía contemplado cinco mesas desde el principio, las cuales había acomodo siguiendo la condición de que se hallen a la misma distancia de la mesa de alimentos dulces (*MAD*) y de la barra de alimentos salados (*BAS*) y tomando en cuenta que cada mesa tiene de diámetro dos cuadros del piso, ver figura 7.13. Ahora debe acomodar las otras 6 mesas de modo que se siga cumpliendo la misma condición y que además queden bien distribuidas, para eso ha considerado trazar el plano cartesiano al dibujo del salón para ubicar más fácil las mesas. Ayuda a Lilia a ubicar las 6 mesas en el dibujo del salón para que de este modo le sirva de guía el día de su fiesta, considera el centro de cada mesa y que estas tienen un diámetro de dos cuadros del piso del salón.

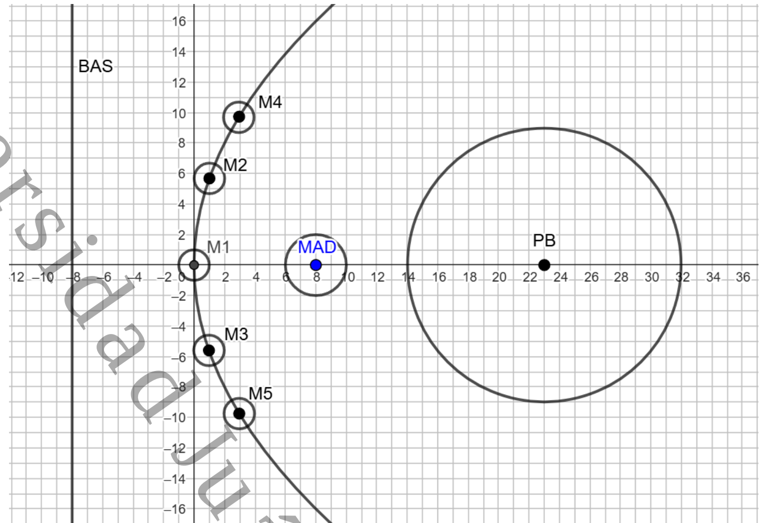


Figura 7.13: Dibujo del salón de fiesta en un plano cartesiano.

SP-P3. Don Andrés está construyendo una estufa solar (figura 7.14), la cual tiene forma de un reflector parabólico, de este modo los rayos solares se concentran en el *foco* de la *parábola*, formándose una fuente de calor y es el lugar ideal para colocar el soporte para una olla. Si las medidas de la estufa son 120 cm de diámetro y 40 cm de profundidad ¿a qué distancia de la parte más profunda debe colocarse el soporte de la olla?

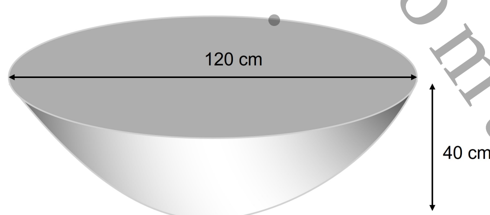


Figura 7.14: Horno solar con medidas.

Observación. Solución en el Anexo A4.2

SP-P4. Las antenas parabólicas funcionan debido a que la señal que envía un satélite se reflejan hacia el receptor, el cual es colocado en el *foco* de la *parábola.* Si una antena parabólica mide 120 cm de diámetro y 40 cm de profundidad, ¿a qué distancia de la parte más profunda de la antena debe colocarse el reflector?

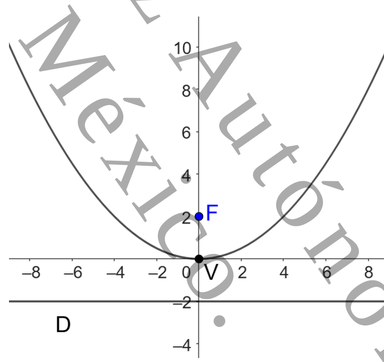
SP-P5. Se desea diseñar un reflector parabólico de un faro de automóvil que tenga de profundidad 20 cm y que el bulbo luminoso quede a 5 cm de distancia de la parte más profunda del reflector, ¿qué diámetro debe tener el reflector parabólico?

ACTIVIDAD (DF-P8): Representaciones de la parábola

Propósito. Transitar entre los registros de representación de la parábola, para determinar su expresión, sus elementos y gráfica.

Procedimiento

1. Completa el cuadro 7.6 en la cual por cada renglón se debe representar una *parábola* en los registro verbal, gráfico y numérico, para lo cual solo se ha proporcionado la representación de la *cónica* en uno de estos registros.

Registro verbal	Registro gráfico	Registro numérico
Parábola con *vértice* en el origen, abre hacia la: ________, su *foco* esta sobre el *eje*: ________ .		$F(\_\_,\_\_)$ $V(\_\_,\_\_)$ $D:$ ________ Ecuación:
Parábola con *vértice* en el origen, abre hacia la: ________, su *foco* esta sobre el *eje*: ________ .		$F(\_\_,\_\_)$ $V(\_\_,\_\_)$ $D:$ ________ Ecuación: $y^2 = -4x$

Cuadro 7.6: Diferentes registros de representación de la parábola.

Capítulo 8

Hipérbola

La *hipérbola* (figura 8.1 a) es una curva utilizada en la ingeniería y arquitectura para el diseño de torres de telecomunicaciones (figura 8.1 b), o de refrigeración (figura 8.1 c) en donde podemos reconocerla al realizar un corte transversal a estos. Una aplicación interesante y relevante de esta curva es en la localización de barcos, donde se implementa el conocido sistema LORAN (Long Range Navigation) (figura 8.1 d).

(a) Hipérbola. (b) Torre Cantón, China. (c) Planta de energía de Didcot, R. U. (d) Sistema LORAN.

Figura 8.1: Hipérbola y sus usos. La figura (d) fue recuperada de [22].

A continuación, se describe a grandes rasgos el tratamiento dado a la *hipérbola* considerando los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele*.

En el nivel de VISUALIZACIÓN (VI) se conoce a la curva a partir de su construcción con material manipulativo (ACTIVIDAD (VI-HI)); en el nivel ANÁLISIS (AN) se presentan sus elementos, además se explora su propiedad de excentricidad (ACTIVIDAD (AN-H5)); en el nivel DEDUCCIÓN INFORMAL (DI), se da énfasis a su definición para eso se calcula la distancia de algunos de sus puntos a sus *focos* utilizando como auxiliar el radio de *circunferencias* (ACTIVIDAD (DI-

H6)), además se utilizan los registros de representación gráfico, numérico, algebraico y verbal, para presentar la ecuación de la *hipérbola* considerando su similitud con la ecuación de la *elipse*; en el nivel DEDUCCIÓN FORMAL (DF) se obtiene la ecuación de la ecuación de la *hipérbola* a partir de su definición (ACTIVIDAD (DF-H9)) y se propone representarla en los cuatro registros, también se muestra el uso de la curva en el sistema de navegación LORAN y para localizar objetos de los cuales emana un sonido, de esto se derivan situaciones problemáticas.

8.1. Nivel 1: Visualización

La *hipérbola* la obtuvo Apolonio de Perga allá por el siglo III a. C. [16], a partir del corte de un cono de dos hojas con un plano, el cual se posiciona verticalmente (o perpendicular) a la base y corta las dos hojas del cono como se aprecia en la figura 8.2.

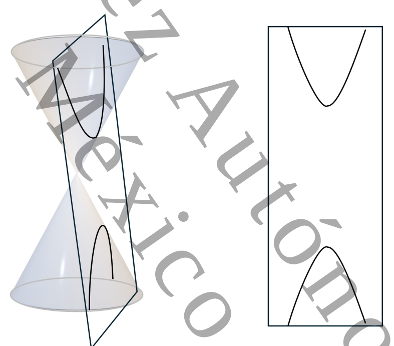


Figura 8.2: Hipérbola generada a partir del corte de un cono.

ACTIVIDAD (VI-H1): Construcción con papel plegado

Propósito. Mostrar los pasos para generar una hipérbola. El procedimiento requiere de una hoja de papel albanene, e implica el desarrollo de habilidad manual para realizar dobleces a esta hoja.

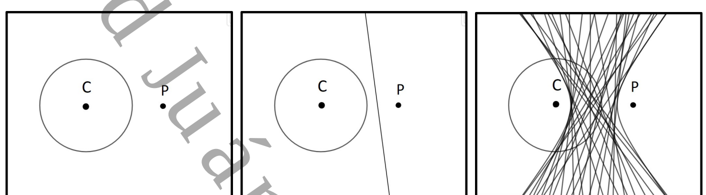
<u>Materiales</u>

1 hoja albanene, 1 compás, 1 lápiz.

Procedimiento

1. Dibuja con tu compás una circunferencia con centro *C*, en la hoja albanene de modo que no toque sus lados (o contorno) y que quede centrada en una mitad de esta. Ubica un punto *P* fuera de la circunferencia (figura 8.3 a).

2. Realiza un doblez (figura 8.3 b) de modo que el punto *P* quede sobre la circunferencia ve recorriendo el punto *P* sobre la curva y realizando los dobleces (figura 8.3 c).



(a) (b) (c)

Figura 8.3: Hipérbola a partir de dobleces.

Adaptación de [35].

ACTIVIDAD (VI-H2): Hipérbolas en el entorno

Propósito. Identificar la curva o una rama de ésta en algunos objetos. Observe en la figura 8.4 (c) la marca que deja el sacapuntas en el lápiz tiene forma de hipérbola, de manera implícita es como si se hubiera cortado el lápiz con un plano (navaja), posicionado verticalmente.

Materiales

1 plumón

Procedimiento

1. Mira los contornos en los objeto de la figura 8.4 e identifica en cuáles de ellos se visualiza una *hipérbola* y remárcala con un plumón.

   Observación. Recuerda que la hipérbola se genera a partir del corte de un cono con un plano.

2. Indaga sobre algunos objetos que tengan forma de cono y obtén una *hipérbola* haciendo un corte con un plano, de manera vertical o perpendicular a la base del cono, como se indica en la figura 8.2.

(a) Embudo. (b) Vaso con agua. (c) Lápiz.

Figura 8.4: Diferentes objetos.

Entornos de funcionalidad

Arquitectura e ingeniería

La *hipérbola* las podemos apreciar en el contorno de edificios, los cuales tienen forma de hiperboloide (superficie que se obtiene al girar una hipérbola sobre alguno de sus ejes [41]), estos son utilizados debido que son fáciles de construir, más estables y resistentes que los edificios rectos, son implementados en estructuras altas para telecomunicaciones (figura 8.1 b), torres de refrigeración (figura 8.1 c) y finalidades estéticas (figura 8.5 a) [18].

(a) Catedral de Brasilia, Brasil. (b) Torre del puerto de Kobe, Japón. (c) Puente de Manchester, Inglaterra.

Figura 8.5: Uso de la hipérbola en edificios estéticos.

Geometría

Con objetos conocidos como *circunferencias*, ubicadas de manera concéntricas podemos obtener puntos, los cuáles van generando la curva hipérbola.

ACTIVIDAD (VI-H3): Hipérbola en intersección de circunferencias

Propósito. Reconocer la hipérbola a partir de la intersección de circunferencias. Se resalta en este procedimiento una manera sencilla e interesante y muy visual de generar los puntos de esta curva.

<u>Materiales</u>

1 compás y 1 lápiz.

<u>Procedimiento</u>

1. Dada la figura 8.6, observa los puntos marcados que se encuentran en la intersección o cruce de dos *circunferencias*, y como contacto (tangentes) de dos de ellas. Genera más puntos, trazando con tu compás otras *circunferencias*, con centro en F_1 y F_2, cuyos radios sean igual a la mitad de los radios de las *circunferencias* dadas. Posteriormente une con una curva suave todos los puntos.

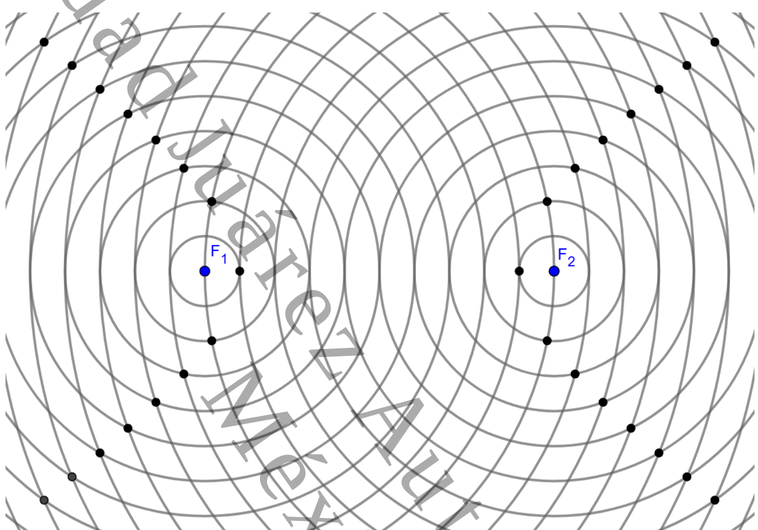


Figura 8.6: Puntos de intersección de circunferencias.

2. Identifica qué curva haz obtenido y subraya la respuesta con una linea.

   a) Elipse

   b) Hipérbola

   c) Parábola

8.2. Nivel 2: Análisis

Se presentan los elementos y la propiedad de *excentricidad* de la *hipérbola*.

Elementos

Dos elementos esenciales de la curva *hipérbola* son sus *focos*, en la figura 8.7 son representados con F_1 y F_2, cabe resaltar que en la curva generada en la ACTIVIDAD (VI-H1), C y P representaron sus *focos* y en la figura 8.6, coinciden con los centros de las *circunferencias*. El *eje focal* es la recta L que pasa por los *focos*, esta corta a la curva en dos puntos V_1 y V_2 llamados *vértices*. El *eje transverso* es el segmento cuyos extremos son los puntos V_1 y V_2. El *centro* es el punto medio del *eje transverso*. El *eje conjugado* pasa por el *centro*, pero no toca a la curva, y sus extremos son B_1 y B_2 [27].

Observación. El eje transverso no tiene ningún punto en común con la hipérbola, pero guarda una relación importante con la curva, la cual se estudiará en el siguiente nivel.

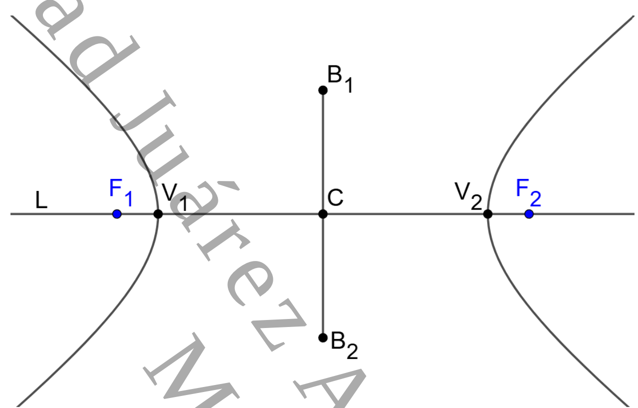


Figura 8.7: Elementos de la hipérbola.

ACTIVIDAD (AN-H4): Elementos

Propósito. Ubicar los elementos de la hipérbola en las curvas obtenidas y reconocer que a partir de los focos se pudo generar la curva en la ACTIVIDAD (VI-H1).

Procedimiento

1. Utiliza la *hipérbola* que generaste en la ACTIVIDAD (VI-H1), traza su *eje focal*, *eje transverso* y *vértices* y subraya la respuesta correcta a la pregunta: ¿a partir de cuáles elementos se pudo generar la curva?

   a) Vértices

   b) Focos

   c) Ejes

Propiedad de excentricidad

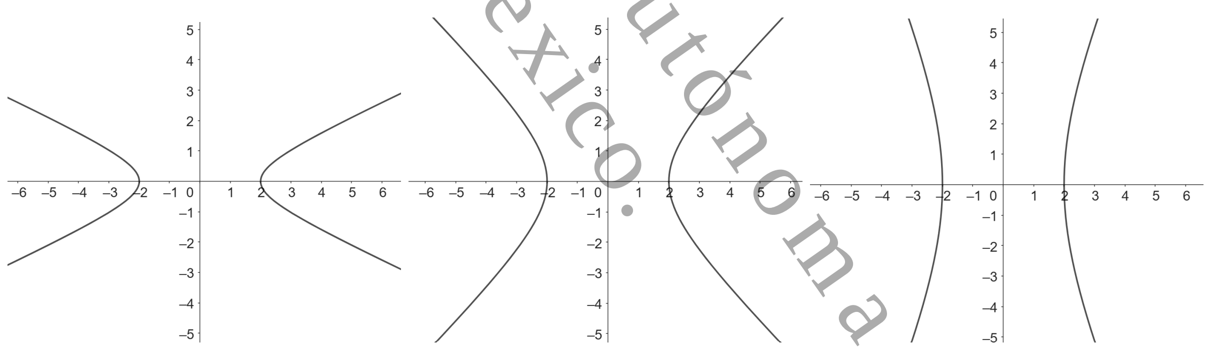
Existen *hipérbolas* cuyas ramas son cerradas (figura 8.8 a) y otras cuyas ramas son alargadas o abiertas (figura 8.8 c), ésto debido a sus diferentes valores de *excentricidad* (e) la cual es una razón dada entre las longitudes c (semidistancia entre los *focos*) y a (longitud del *semieje transverso*) [19].

ACTIVIDAD (AN-H5): Excentricidad y aspecto de la curva

Propósito. Explorar algunas formas que presenta la curva hipérbola para establecer su relación con el valor de su excentricidad. Para eso se proporcionan tres hipérbolas diferentes, que tienen la misma longitud del eje transverso, pero cuyas ramas se aprecian: cerradas, arqueadas y abiertas, esto con fin de ver cómo el valor de la excentricidad influye en el aspecto de la curva. Es de resaltar la necesidad de situar la curva en un sistema de ejes coordenado.

<u>Procedimiento</u>

1. Dadas las *hipérbolas* de la figura 8.8, ubica sus vértices en los puntos $V_1(-2,0)$ y $V_2(2,0)$ y sus focos, cuyas coordenadas aparecen en el cuadro 8.1, y rellena lo solicitado en este.



(a) Hipérbola 1. (b) Hipérbola 2. (c) Hipérbola 3.

Figura 8.8: Diferentes hipérbolas.

Hipérbola	1	2	3
Focos	(2.2, 0) y $(-2.2,0)$	$(\sqrt{8}, 0)$ y $(-\sqrt{8},0)$	(5, 0) y $(-5,0)$
Semidistancia entre los focos (c)			
Longitud del semieje transverso (a)			
Calcula la excentricidad (e) $e = \frac{c}{a}$			

Cuadro 8.1: Calculo de excentricidad.

2. Observa las *hipérbolas* de la figura 8.8, los resultados del cuadro 8.1 y subraya la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

   ¿El valor de la *excentricidad* de todas las *hipérbolas* es?

   a) Menor a uno

   b) Igual a uno

   c) Mayor a uno

   A medida que la *excentricidad* va creciendo $(e > 1)$ ¿qué sucede con las ramas de la *hipérbola*?

   a) Se cierran o se van acercando al *eje-X*

   b) Se abren o se van acercando al *eje-Y*

En efecto, la *excentricidad* de la *hipérbola* es mayor a uno y determina el aspecto de la curva.

Ecuación excentricidad

La *excentricidad* (e) es igual a la razón:

$$e = \frac{c}{a} \tag{8.1}$$

donde c es la semidistancia entre los *focos* y a es la longitud del *semieje transverso*, $a \neq 0$.

8.3. Nivel 3: Deducción Informal

Se trabaja con la *hipérbola* en el plano cartesiano, se calculan distancias y se presenta su ecuación.

ACTIVIDAD (AN-H6): Radio de circunferencias

Propósito. Conocer la condición que cumplen los puntos de la hipérbola, mediante el cálculo de la distancia de puntos sobre la curva a cada foco. Para lo cual se utiliza la medida del radio de circunferencias situadas en el plano cartesiano.

<u>Procedimiento</u>

1. Observa la *hipérbola* de la figura 8.9, cuyos puntos pertenecen a la intersección o cruce de las *circunferecias*, sus *vértices* a los puntos donde son tangentes dos *circunferecias*, sus *focos* $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$ coinciden con los centros de las *circunferencias*. Completa el cuadro 8.2, para calcular las distancias solicitadas considera el radio de las *circunferencias*, el cual va aumentado una unidad. En el primer renglón se ha calculado la distancia del punto A a F_1 y F_2, observe que A se encuentra en la intersección de dos *circunferencias*, que tienen radio de 12 y 4 unidades.

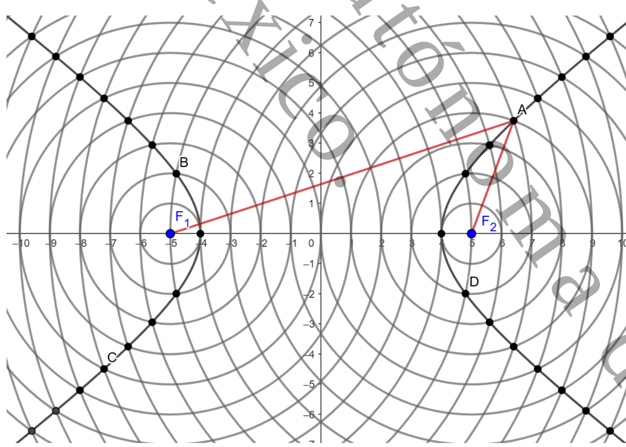


Figura 8.9: Hipérbola con centro en el origen.

Punto	Distancia del Punto a $F_1(-5,0)$	Distancia del Punto a $F_2(5,0)$	Valor absoluto de la diferencia de las distancias
A	12	4	8
B			
C			
D			

Cuadro 8.2: Calculo de distancias.

2. Analiza los resultados del cuadro 8.2 y determina cuál condición cumplen los puntos sobre la *hipérbola*.

   a) El valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos *(focos)* varía.

   b) El valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos *(focos)* es constante.

3. ¿Cuánto mide el *eje transverso* de la *hipérbola* de la figura 8.9?

   Observación. La longitud del eje transverso de la hipérbola es igual a la constante que se obtiene del valor absoluto de la diferencia de las distancias de sus puntos a cada foco [19].

ACTIVIDAD (AN-H7): Semiejes y triángulo rectángulo

Propósito. Entender la relación que existe entre la longitud de los semiejes de la hipérbola y la semidistancia entre los focos a partir de una interpretación geométrica, para lo cual se utilizará el teorema de Pitágoras.

Procedimiento

1. Dada una *hipérbola* (figura 8.10), traza un rectángulo con las medidas de su *eje transverso* y *eje conjugado*, con la condición de que sus lados horizontales pasen por los extremos del *eje conjugado* y sus lados verticales por los *vértices*.

2. Traza una *circunferencia* con *centro* en el origen y con radio igual a la *semidistancia entre los focos*, observa que el rectángulo queda inscrito en la *circunferencia*, luego traza sus diagonales; y observa que se obtienen triángulos rectángulos.

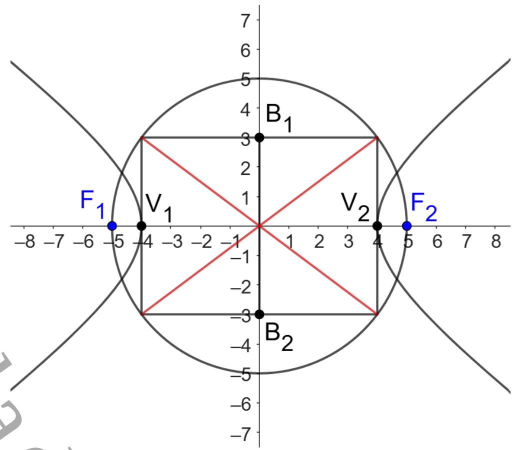


Figura 8.10: Rectángulo y circunferencia en la hipérbola.

3. Selecciona cuál de las siguientes igualdades es cierta, considerando las longitudes de los semiejes.

   Observación. Considera los triángulos rectángulos obtenidos en la figura 8.10.

   a) (*semidistancia entre los foco*)^2= (*semieje transverso*)^2 +(*semieje conjugado*)^2

   b) (*semieje transverso*)^2= (*semieje conjugado*)^2 + (*semidistancia entre los foco*)^2

   c) (*semieje conjugado*)^2 = (*semidistancia entre los foco*)^2 + (*semieje transverso*)^2

4. Extiende las diagonales del rectángulo, observa que se forman dos rectas. Halla la pendiente de estas rectas, su ecuación y responde: ¿estas rectas tocan en algún punto a la hipérbola?

En efecto se tiene el siguiente resultado.

Relación entre los semiejes

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{8.2}$$

Donde a es la longitud del *semieje transverso*, b es la longitud del *semieje conjugado* y c es la semidistancia entre los *focos*.

La *hipérbola* tiene asociada dos rectas llamadas *asíntotas*, estas coinciden con las diagonales extendidas del rectángulo que se forma con las medidas de sus *ejes* (cuyos lados pasan por sus *vértices* y por los extremos del *eje transverso*), las cuales tienen pendiente $\pm\frac{b}{a}$ [19].

Ecuación de las asíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a}x \tag{8.3}$$

Propiedad reflectora

La propiedad reflectora de la *hipérbola* está relacionada con sus *focos*, ésta consiste en que, si una fuente de luz se coloca en un *foco*, ésta se reflejará en el otro [40].

Telescopio

Para la construcción de telescopios tipo Cassegrain (figura 8.11) se utiliza la propiedad reflectora de la *parábola* e *hipérbola*. Los rayos de luz se reflejan en el reflector parabólico primario y se dirigen hacia el *foco* F_1 del reflector hiperbólico (que también es el *foco* del reflector primario), de este modo los rayos se reflejan hacia el otro *foco* F_2 de este reflector, detrás del reflector primario donde se encuentra un ocular (o camára).

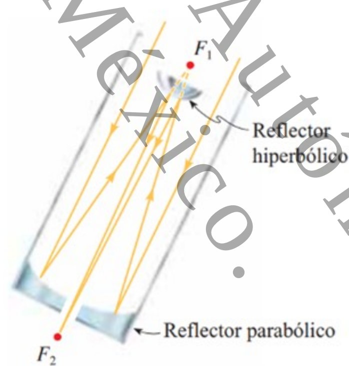


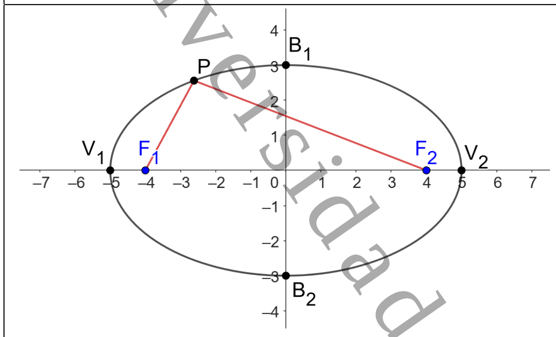
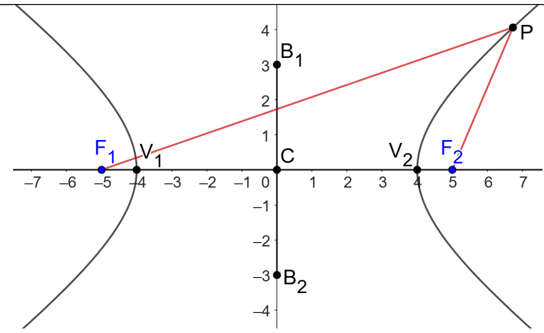
Figura 8.11: Telescopio. Recuperado de [40].

ACTIVIDAD (DF-H8): Características entre hipérbola y elipse

Propósito. Comparar elementos comunes de la elipse y la hipérbola, como foco, vértices y ejes, y analizar la expresión analítica que define cada curva en donde se resalten las operaciones de adición y sustracción entre las distancias y el valor de la constante para inducir la ecuación canónica de la hipérbola.

<u>Procedimiento</u>

1. Completa el cuadro 8.3 y relaciona los elementos de ambas *cónicas*.

Elipse	Hipérbola
	
$F_1(-4,0)$ y $F_2($ __ , __ $)$ $V_1(-5,0)$ y $V_2($ __ , __ $)$ $B_1(3,0)$ y $B_2($ __ , __ $)$	$F_1(-5,0)$ y $F_2($ __ , __ $)$ $V_1(-4,0)$ y $V_2($ __ , __ $)$ $B_1(3,0)$ y $B_2($ __ , __ $)$
Su *semieje mayor* se halla sobre el *eje-X* y mide : _____ . Su *semieje menor* se halla sobre el *eje-Y* y mide: _____ .	Su *semieje transverso* se halla sobre el *eje-X* y mide : _____ . Su *semieje conjugado* se halla sobre el *eje-Y* y mide: _____ .
Los puntos de una *elipse* cumplen que la suma de sus distancia a dos puntos fijos llamados *focos* (F_1, F_2) es una constante $2a$, donde a es la longitud del *semieje mayor*.	Los puntos de una *hipérbola* cumplen que el valor absoluto de la diferencia de sus distancia a dos puntos fijos llamados *focos* (F_1, F_2) es una constante $2a$, donde a es la longitud del *semieje transverso*.
Sea P un punto arbitrario sobre la *elipse* dada, este cumple que: $d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2(5)$ Calculando las distancia y sustituyendo en la expresión anterior se tiene $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2(5)$ y desarrollando, se llega a: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$ o $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2} = 1$	Sea P un punto arbitrario sobre la *hipérbola* dada, este cumple que: $\lvert d(P,F_1)-d(P,F_2)\rvert = 2(4)$ Calculando las distancia y sustituyendo en la expresión anterior se tiene $\lvert\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}\rvert = 2(4)$ y desarrollando, se llega a: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} = 1$ o $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2} = 1$

Cuadro 8.3: Similitudes entre la elipse e hipérbola.

2. De acuerdo a la información del cuadro 8.3, analiza las similitudes y diferencias de las dos curvas cónicas presentadas.

8.4. Nivel 4: Deducción Formal

Se trabaja con la definición, ecuación y registros de representación de la *hipérbola*. También se presenta su uso en el sistema LORAN y para ubicar un objeto del cual emana un sonido.

ACTIVIDAD (DF-H9): Ecuación de una hipérbola

Propósito. Obtener la ecuación de una hipérbola a partir de la definición formal y reconocer la constante dada en la definición. Para eso se toma un punto arbitrario sobre la curva y se realizan operaciones algebraicas hasta obtener su ecuación.

Procedimiento

1. Lee la Definición 4, nota que la *constante* que se menciona es igual a la longitud del *eje transverso* de la *hipérbola*. Esta constante es representada como $2a$, donde a es la longitud del *semieje transverso*.

> Definición 4
>
> "*Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos*" [27].

2. Observa la *hipérbola* de la figura 8.12. Considere un punto arbitrario $P(x,y)$ sobre la curva, $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$ sus *focos* y sean $d(P,F_1)$ y $d(P,F_2)$ la distancia de P a F_1 y F_2, respectivamente. Elija el inciso que dé la igualdad que satisfaga la definición 4.

   a) $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=10$

   b) $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=8$

   c) $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=4$

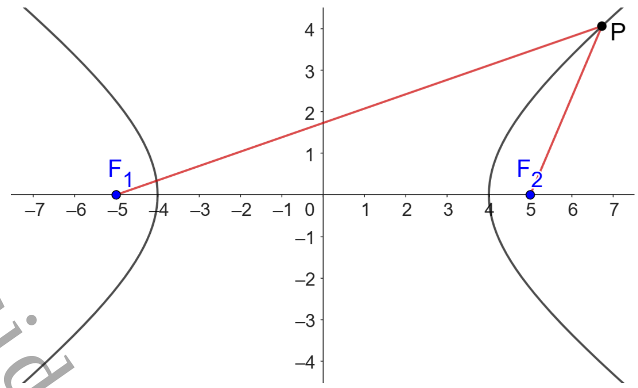


Figura 8.12: Hipérbola con centro en el origen.

3. Seleccione cuál de las expresiones es equivalente a la expresión elegida en 2:

   a) $d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 10$

   b) $d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 8$

   c) $d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 4$

4. Obtenga las distancias del punto $P(x,y)$ a cada *foco* y sustituya en la expresión elegida en 3 y desarrolle. Recuerde transponer el radical adecuado y elevar al cuadrado ambos miembros, una primera vez y luego una vez más hasta llegar a la expresión:

$$144x^2-256y^2=2304$$

5. Indique las operaciones que tiene que realizar a la expresión anterior para obtener:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Observación. El procedimiento completo se encuentra en el Anexo A5.1.

En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4 [27]

La ecuación de una *hipérbola* de *centro* en el origen, *eje focal* que coincide con el *eje-X*, y *foco* $(c,0)$ y $(-c,0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.4}$$

Si el *eje focal* de la *hipérbola* coincide con el *eje-Y*, de manera que las coordenadas de los *focos* sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, entonces la ecuación es

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{8.5}$$

Con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

ACTIVIDAD (DF-H10): Ejes, posición de la curva y la ecuación

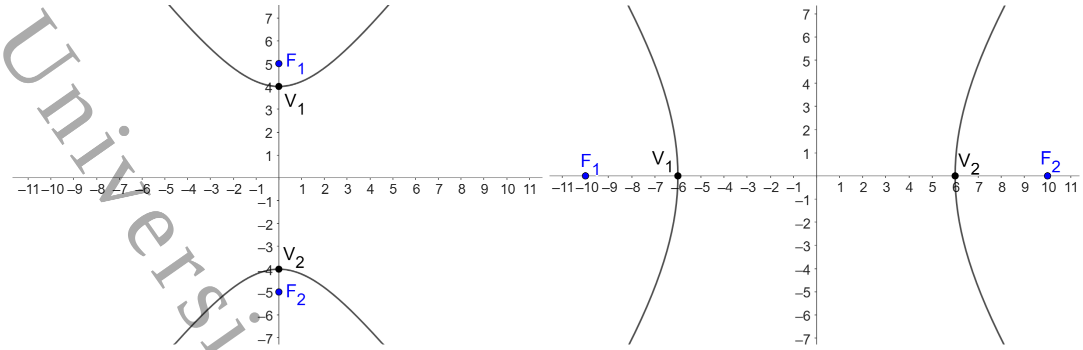
Propósito. Asociar el eje transverso con el término positivo de la ecuación canónica de la hipérbola y el eje conjugado con el término negativo de la ecuación.

Procedimiento

1. Halla la longitud del *semieje conjugado* y *semieje transverso* de las curvas de la figura 8.13. Considera la ecuación 8.2.

2. Relaciona las ecuaciones dadas con su gráfica correspondiente y escribe la expresión que le corresponda sobre la línea que aparece debajo de cada gráfica.

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$



(a) ____________ (b) ____________

Figura 8.13: Hipérbolas con centro en el origen.

3. Observa las ecuaciones de las *hipérbolas* y su gráfica correspondiente. Completa las siguientes expresiones, escribiendo sobre la línea a qué longitud de los *semiejes* corresponden.

$$\frac{x^2}{(semieje: \underline{\hspace{3cm}})^2} - \frac{y^2}{(semieje: \underline{\hspace{3cm}})^2} = 1$$

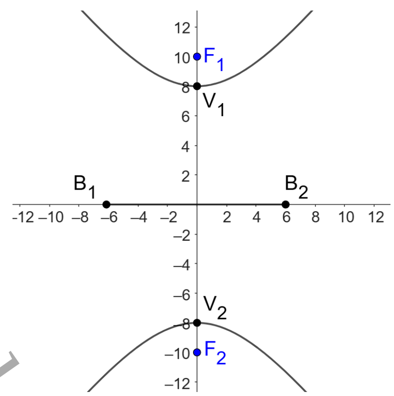
$$\frac{y^2}{(semieje: \underline{\hspace{3cm}})^2} - \frac{x^2}{(semieje: \underline{\hspace{3cm}})^2} = 1$$

ACTIVIDAD (DF-H11): Relación de la ecuación con su gráfica

Propósito. Transitar entre los registros de representación de la hipérbola, para determinar su expresión analítica, sus elementos y gráfica.

Procedimiento

1. Completa el cuadro 8.4, en la cual por cada renglón se debe representar una *hipérbola* en los registros verbal, gráfico y numérico, para ello solo se ha proporcionado la representación de la *cónica* en uno de estos registros.

Registro verbal	Registro gráfico	Registro numérico
Hipérbola con *centro* en el origen, con *semieje transverso* sobre el *eje-Y* cuya longitud es ___ y *semieje conjugado* sobre el *eje-Y* cuya longitud es ___ .		$F_1($ ___ , ___ $)$ $F_2($ ___ , ___ $)$ $V_1($ ___ , ___ $)$ $V_2($ ___ , ___ $)$ $B_1($ ___ , ___ $)$ $B_2($ ___ , ___ $)$ Excentricidad: ________ Ecuación:
Hipérbola con *centro* en el origen, con *semieje transverso* sobre el *eje-Y* cuya longitud es ___ y *semieje conjugado* sobre el *eje-X* cuya longitud es ___ .		$F_1($ ___ , ___ $)$ $F_2($ ___ , ___ $)$ $V_1($ ___ , ___ $)$ $V_2($ ___ , ___ $)$ $B_1($ ___ , ___ $)$ $B_2($ ___ , ___ $)$ Excentricidad: ________ Ecuación: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$

Cuadro 8.4: Diferentes registros de representación de la hipérbola.

Entornos de funcionalidad

Localización de barcos

Los barcos han utilizado desde la segunda guerra mundial el sistema LORAN (figura 8.1 d). Este funciona usando dos estaciones las cuales se encuentren separadas y transmiten ondas de radio a barcos en el mar. Debido a que un barco puede encontrarse más cerca de una estación que otra, captan estas ondas en tiempos diferentes. Al medir la diferencia de tiempo y al conocer la velocidad de las ondas de radio, es posible hallar la posición del barco, el cual se encuentra sobre una *hipérbola* cuyos *focos* son las estaciones [22].

Sonido

La *hipérbola* ayuda a localizar un lugar del cual proviene un sonido, por ejemplo, un disparo de cañón. Esto a partir de la diferencia en los tiempos que llega el sonido a dos puntos de escucha, se puede determinar la diferencia de la distancia de estos puntos al cañón [19].

Situaciones Problemáticas

Las siguientes situaciones problemáticas enfatizan el uso de la ecuación de la *hipérbola* para localizar un objeto, ya sea a partir de la señal emitida o de un sonido producido por este.

SP-H1. Un barco está en grave peligro debido al mal tiempo y necesita apoyo urgentemente, para eso es necesario conocer sus coordenadas, la máquina a bordo desafortunadamente se ha bloqueado y la última información que se obtuvo es que el barco se haya 80 m más cerca de la estación B que la A, la cuales están ubicadas en la orilla del mar a 300 m entre sí, además se sabe que el barco esta aproximadamente a 48 m de orilla, ¿cuáles son las coordenadas del barco?

Observación. Considera que la orilla del mar está horizontalmente y que la estación A está a la derecha y la estación B a la izquierda.

SP-H2. Debido a la alta cacería de venado en el bosque se han colocado dos estaciones Z y W de seguridad a una distancia una de otra de 600 m. Los guardias de las estaciones están en constante comunicación, el guardia de la estación Z avisa por radio que ha escuchado el disparo de un rifle, un segundo después el guardia de la estación W confirma lo mismo. Los guardias irán por el cazador para eso llevarán un mapa (figura 8.14). Si el sonido viaja a 335 m/s, halla la ecuación de la *hipérbola* sobre la cual se halla el cazador, explica e indica en el mapa dónde hay más posibilidad que esté el cazador (para eso dibuja la *hipérbola*).

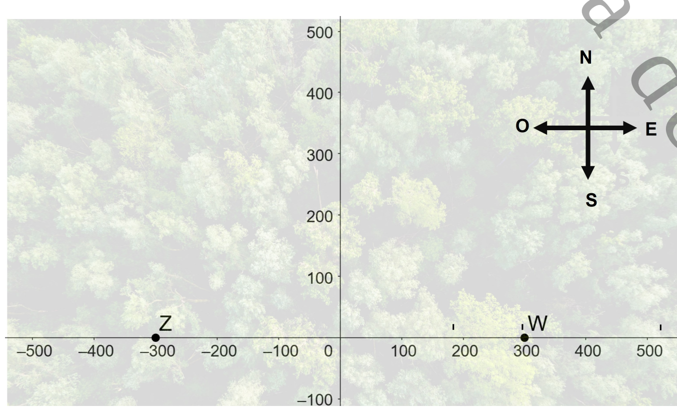


Figura 8.14: Mapa de bosque.

Observación. La respuesta a SP-H1 y SP-H2, se encuentran en el Anexo A5.2 y A5.3, respectivamente.

Capítulo 9

Resultados y discusión

Durante esta investigación fue posible encontrar que el tema de las *cónicas* desde la disciplina Matemática Educativa, está siendo abordado para su enseñanza y aprendizaje considerando otras formas y estrategias de trabajo en el aula, permitiendo al alumno tener un aprendizaje con significados más cercanos a su entorno, nivel cognitivo y con tratamientos desde diferentes registros de representación. De estas investigaciones pudimos retomar algunas de las propuestas para incluirlas en nuestro diseño de la *guía didáctica* haciendo las adecuaciones pertinentes. También, indagando sobre la *cónicas*, en libros de textos, artículos y en diversas fuentes, con el objetivo de conocer su funcionalidad y/o aplicaciones, se logró encontrar algunos entornos en los cuales las curvas están presentes, cabe mencionar que fue muy significativo, ya que no imaginamos cómo en algunos oficios también son requeridas.

Para darle forma y contenido a la guía, fue de gran ayuda el *Modelo de Van Hiele* por su forma estructurada, logrando tener un acercamiento a las *cónicas* de manera gradual, ya que en cada nivel se pudieron diseñar actividades y situaciones problemáticas que permitieron un tratamiento y construcción de éstas enfatizando diferentes entornos de *funcionalidad* y registros de representación en donde sus elementos y propiedades tuvieron mucha relevancia y significación. Los registros de representación utilizados fueron el verbal, algebraico, gráfico y numérico, estos resultaron muy apropiados, ya que al tener representadas cónicas desde estos diferentes registros se pudo ubicar y asimilar mejor tanto elementos como formas particulares de cada curva; también, diferencias y similitudes en el plano cartesiano y expresión algebraica. Es de resaltar que muchas de las actividades en donde se plantea un tratamiento numérico o verbal, fueron más arduas de elaborar. En el caso del registro verbal, había que tener cuidado con las palabras que usábamos para referirse a algún objeto, propiedad, o condición sin llegar a generar una ambigüedad, consideramos que había una tendencia natural a utilizar el lenguaje formal o matemático, lo cual debía ser hasta el nivel formal; y en el caso del registro numérico, los procedimientos resultaban algo largos o tediosos, en algunos de estos se acordó indicar los resultados y trabajar con estos.

A continuación se describe lo que se trabajó y obtuvo en las actividades por cada nivel para la construcción de las curvas.

En el *nivel 1: visualización*, se tiene un primer contacto con las *cónicas*, las actividades propuestas lograron que se pudieran identificar las curvas a partir del corte transversal de objetos similares a un cono, y reconocerlas en el entorno, enfatizando su presencia en la vida (de este modo no se percibe como un objeto matemático formalizado). También, para su generación, trazo o dibujo, se utilizaron materiales manipulativos, como hilo, tachuelas, papel albanene, compás e incluso un software de dibujo. Algunas curvas por su versatilidad y aplicaciones, como la *circunferencia* y *elipse* tienen más situaciones y actividades en este nivel.

En el *nivel 2: análisis*, fue posible conocer, ubicar y dar significados a los elementos de cada curva e identificar cuáles de ellos son esenciales para generarlas; por ejemplo, en el caso de la *elipse*, las tachuelas que se ubicaron en dos puntos resultaron ser sus *focos* y los elementos fundamentales para generarla (es así que empiezan a resaltar estos elementos, que son involucrados en su definición). También se reconocieron características propias de cada curva al analizar cada uno de sus elementos y también las propiedades de estas, como la excentricidad, la cual es relevante para la forma de las curvas, en especial para la *elipse* y la *hipérbola*.

En el *nivel 3: deducción informal*, muchas de las actividades se avocaron a un tratamiento desde los diferentes registro de representación, en especial, es de resaltar el registro numérico para calcular distancias, las cuales fueron un andamiaje en todas las curvas para entender la condición para generarlas en el plano cartesiano, el gráfico en donde se le pudo observar y ubicar elementos, y el verbal para tenerlas de manera más accesible y con palabras la descripción de los elementos y propiedades. Para el tránsito entre estos registro, se implementó el uso de cuadros donde se registran los cálculos de distancias y con algunos puntos de la gráfica, se utilizaron también recursos desde la geometría como *triángulos* y *circunferencia*, es el caso de la *hipérbola* en donde sus puntos se hallan en la intersección de *circunferencias*. Además se presenta la propiedad reflectora, la cual dota de funcional a las *cónicas*, en especial a la *elipse*. Otras actividades presentan andamiajes para acceder a sus ecuaciones desde un ambiente reflexible para lo cual es primordial el uso de los registros numérico, gráfico, verbal y algebraico.

Finalmente se concluye con el *nivel 4: deducción formal*, se inicia considerando alguna de las curvas que se venían abordando en los niveles anteriores para obtener su expresión algebraica, es hasta aquí en donde se da la definición formal y se consideran resultados (o teoremas) para obtener la ecuación de una de las curvas trabajadas. Y para generalizar la expresión analítica de cada curva se consideraron los diferentes registros de representación, algo que difiere en libros de textos formales.

A continuación, se mencionan para cada curva los entornos de funcionalidad encontrados.

La *circunferencia*, sin duda fue la curva más conocida y utilizada, resalta por su sencillez al realizar su trazo y por todos conocida, la pudimos encontrar en: el arte, vitrales, diseño de logos; en el diseño y en el trazo de prendas de vestir como faldas y sombreros; y para optimizar señales de wifi en la ubicación de un router.

La *elipse*, fue la curva más utilizada, la tenemos presente en oficios como la carpintería, vidriera, herrería para la elaboración de un barandal, en la construcción de bóvedas; en astronomía, debido a que los planetas siguen órbitas elípticas; en la arquitectura para el diseño de cabinas de susurro; en la medicina para la desintegración de piedras en el riñón. Se resalta muchísimo su propiedad reflectora.

La *parábola*, por su forma natural fue posible visualizarla en el chorro de una fuente, en la trayectoria que sigue una pelota. Se encontró su uso en: en telecomunicaciones con las antenas parabólicas; en electricidad en los faros de automóviles; y en la construcción de hornos solares. Además se muestra su utilidad para acomodar mesas, lo cual involucra de manera implícita la condición que cumplen sus puntos.

La *hipérbola* es utilizada en el sistema de navegación LORAN; para localizar un objeto del cuál emana un sonido, en construcciones emblemáticas de arquitectura y estructuras de ingeniería.

Los resultados antes descritos, nos permiten evidenciar parte de la *funcionalidad* de las *cónicas* en el entorno, su relación con otras áreas de estudio y poder tener otra alternativa de acceder a ellas. Teniendo así, elementos que abonaron y permitieron realizar el diseño de un material didáctico de apoyo para profesores de educación media superior en el tema de las *cónicas*.

Capítulo 10

Conclusiones

El objetivo de nuestra investigación fue realizar una *guía didáctica* para el profesor de educación media superior en el tema de las *cónicas* desde un aspecto *constructivo* y *funcional*, atendiendo a las nuevas propuestas curriculares que enfatizan el uso de las matemáticas en el entorno del alumno.

Logramos dar otra alternativa al estudio de las *cónicas* desde un acercamiento *constructivo* y hallamos entornos de *funcionalidad* de estas curvas en diferentes ámbitos de la vida y en otras áreas de estudio, se plantearon actividades y situaciones problemáticas en las cuales se enfatizan los elementos de las curvas, sus propiedades y ecuaciones. Considerando la implementación de materiales manipulativos, que motiven al alumno a conocer sobre estas curvas y otra forma de acceder al estudio de éstas, ajenos a la manera tradicional que se ha venido enseñanza en este nivel educativo.

De las cuatro *cónicas* notamos que la *circunferencia* es la que está más presente en el entorno, por su parte la *elipse* es utilizada en oficios y áreas de conocimiento debido a su propiedad reflectora, esta propiedad también la posee la *parábola*, y la hace útil, en otras áreas. Por otra parte, la *hipérbola* solo logramos encontrar algunos usos.

Este trabajo ha recabado diferentes usos de las *cónicas* y otra forma de acceder y trabajarlas, se espera que sea de ayuda a futuras investigaciones en el uso de las curvas en la vida cotidiana, para ver el valor y potencialidad de las matemáticas.

Bibliografía

[1] Alcover, G. J. (1990). *Efectos adversos de las ondas de choque piezoeléctricas sobre el parenquima renal. Modelo experimental* [Tesis doctoral, Universidad de Barcelona]. http://hdl.handle.net/2445/36510

[2] Asociación Nacional de Maestros de Ciencias de la Tierra. (2012). *Tabla de datos orbitales de los planetas y planetas enanos*. Ventanas al universo. http://windows2universe.org/

[3] Baldor, J. A. (1994). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. Cultural.

[4] Beltrán, G. J. (2019). *Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una ingeniería didáctica* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/15277

[5] Blog Movisfera. (2023). *Dónde es mejor poner el router WiFi*. https://comunidad.movistar.es/t5/Blog-Movisfera/D

[6] Buccino, S. (2011). *Historia de la Matemática en un ambiente de geometría dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las cónicas* [Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica Nacional]. https://www.docsity.com/es/historia-de-la-matematica-en-un-ambiente-de-geometria-dinamica/4687396/

[7] Cáceres, B. G. (2018). Aprendizaje de traslaciones en el plano fundamentado en el Modelo de Van Hiele, mediado por Geogebra. *Paideia Surcolombiana, (22)*, 78-96.

[8] Cantoral R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

[9] Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemática y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3)*, 91-116.

[10] Cerasoli, A. (2016). *Todos de fiesta con el número Pi*. Maeva Ediciones. https://www.maeva.es/colecciones/para-leer-y-aprender/todos-de-fiesta-con-el-nmeropi?PageSpeed=noscript

[11] COBATAB (2020). *Guía del estudiante. Matemáticas III*.

[12] Corberán, R., Huerta, P., Margarit, J., Peñas Antonio & Ruíz, E. (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo Van Hiele*. Universidad de Valencia. https://books.google.com.mx/books?id=wD7oIPysOsQC

[13] Cúellar, C. J. (2012). *Matemáticas III* (3a. ed.). McGraw-Hill.

[14] Crespo, C. R. (2005). La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 313-320.*

[15] Dávila, M., Del Alba, A., Hernández, P. & Antolín, A. (2013). Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. *Cultura Científica y Tecnológica, 10(50)*, 27-36.

[16] De León, M. & De Albornoz, A. C. (2020). *Cónicas: Historia de su independencia del cono*. Catarata.

[17] Duval, R. & Moretti, T. M. T. (2012). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Revista electrónica de educación matemática, 7(2),* 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

[18] Eadic (2014). *Hiperboloides en ingenería: 10 ejemplos*. https://eadic.com/blog/entrada/hiperboloides-en-ingeneria/

[19] Fuller, G. & Tarwater, D. (1995). *Geometría analítica* (7a. ed.). Pearson Educación.

[20] García, C. J. (2018). *Aprendizaje de los ángulos de la circunferencia utilizando el Modelo de Van Hiele en preparatoria* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://hdl.handle.net/20.500.12371/15103

[21] Halliday, D. & Resnick, R. (2001). *Fundamentos de física* (8a. ed.). Editorial Patria.

[22] Holliday, B. (2002). *Geometría analítica con trigonometría*. McGraw-Hill.

[23] Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele a la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

[24] Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática* (295-384). Sevilla: Alfar. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

[25] Lambie, R. (2022). *Photo blog*. uksingboards. https://uksignboards.com/30-famous-global-logos-with-grid-illustration-history-designer/

[26] Larson, R. & Falvo, D. C. (2012). *Precálculo* (8a. ed.). Cengage Learning.

[27] Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. (13a. ed.). Limusa.

[28] Maguiña, R. A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el Modelo Van Hiele* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/4733

[29] Martínez, C. C. (2023). *Implementación de materiales didácticos para la enseñanza de las cónicas en el nivel bachillerato* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/handle/20.500.11845/3423

[30] Masi, S. & Giraudo, I. (2000). *Roma y el Vaticano: arte e historia*. Bonechi. https://books.google.com.mx/books?id=nKVJ2EdJ06kC

[31] MSD (2000). *Eliminación de un cálculo mediante ondas ultrasónicas*. https://www.msdmanuals.com/es/hogar/multimedia/image/eliminaci

[32] Pérez, B. R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/8094

[33] Pérez, M. E. (2015). *Física general* (5a. ed.). Editorial Patria.

[34] Polar, F. (2006). Matemática Maravillosa. *Fundación Polar*.

[35] Real, P. M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Suma, 46*, 71-77.

[36] Rider, P. (1966). *Geometría analítica*. Montaner y Simón.

[37] Sanz, D. (2018). *13 animales hechos únicamente con 13 círculos*. La cartera rota. https://lacarterarota.com/13-animales-hechos-13-circulos/

[38] SEP (2018). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudiosems.pdf

[39] SEP (2023). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/propuestaMCCEMS

[40] Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012). *Precálculo: matemáticas para el cálculo* (5a. ed.). Cengage Learning.

[41] Swokowski, E. W. & Jeffery A. C. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (12a. ed.). Cengage Learning.

[42] Vargas, Z. L. (2021). *Un Estudio histórico-epistemológico sobre la construcción social de las secciones cónicas en geometría del espacio* [Tesis de maestría, CINVESTAV]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3903

Anexos

Anexo A1: Fases del Modelo de Van Hiele

Las fases fueron obtenidas de [12].

- *Fase 1: Información*. Permite al profesor conocer los conocimientos previos y el razonamiento que posee el alumno respecto al nuevo tema a estudiar, se puede optar por utilizar evaluaciones diagnósticas y lluvias de ideas.

- *Fase 2: Orientación dirigida*. Es la exploración, experimentación y aprendizaje de los nuevos conceptos, propiedades, elementos y figuras fundamentales del área de geometría que se está abordando. Para ello se recomienda estructurar con cuidado las actividades a implementar.

- *Fase 3: Explicitación*. Es la expresión de ideas, las cuales deben tener una buena estructura y organización, debido a que se debe mejorar el vocabulario de acuerdo al nivel que se acaba de aprender. Se recomienda el intercambio de experiencias o puntos de vistas de las actividades realizadas, sus dificultades, mejorías y aprendizaje.

- *Fase 4: Orientación libre*. Se utilizan los conceptos, elementos y propiedades adquiridos anteriormente, es decir, se aplican los conocimientos y razonamientos a otras áreas de investigaciones distintas, para esto se sugiere un buen planteamiento de problemas abiertos que permitan el desarrollo de varios caminos para su solución o de diversas soluciones.

- *Fase 5: Integración*. Es la condensación de los conocimientos adquiridos, apreciando su relación con otros campos de estudio conocidos anteriormente. Se siguiere brindar comprensiones generales de lo estudiado, pero sin entrar al estudio de nuevos conceptos sino resaltando lo que se ha aprendido, es como dar una conclusión o cierre de lo que se ha trabajado.

Anexo A2: Circunferencia

A2.1 Solución a la SP-C2

El radio de CC es r', sustituyendo en la ecuación (5.1), tenemos que su longitud es igual a:

$$CC = 2\pi r' \tag{10.1}$$

Al dividir por π ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$2r' = \frac{CC'}{\pi} \tag{10.2}$$

Sabemos que el radio de $C1$ es $2r'$, sustituyendo en la ecuación (5.1) tenemos que su longitud es igual a:

$$C1 = 2\pi(2r') \tag{10.3}$$

Sustituyendo el valor de $2r'$ de la ecuación (10.2) en la ecuación (10.3) tenemos que:

$$C1 = 2\pi\left(\frac{CC}{\pi}\right) \tag{10.4}$$

Simplificando, tenemos que

$$C1 = 2CC$$

Es decir, que la *circunferencia* $C1$ mide el doble de la *circunferencia* CC, de este modo solo es necesario utilizar la mitad de la *circunferencia* $C1$.

A2.2 Solución a la SP-C4

Como la señal del router se propaga en forma de ondas circulares o de *circunferencia*, nos interesa hallar la ecuación de la *circunferencia* que pasa por los tres puntos importantes y posteriormente ubicar el centro de esta.

Supongamos que los tres puntos $A(2,11)$, $B(6,3)$ y $C(20,5)$ están sobre una misma circunferencia, entonces las coordenadas de estos puntos deben satisfacer su ecuación. Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación (5.3), para cada punto tenemos:

$$2^2 + 11^2 + 2d + 11e + f = 0$$

$$6^2 + 3^2 + 6d + 3e + f = 0$$

$$20^2 + 5^2 + 20d + 5e + f = 0$$

Estas ecuaciones se pueden escribir:

$$2d + 11e + f = -125$$

$$6d + 3e + f = -45$$

$$20d + 5e + f = -425$$

La solución de estas ecuaciones es $d = -24$, $e = -22$ y $f = 165$. Estos valores sustituidos en la ecuación (5.3), dan como resultado la ecuación de la *circunferencia*:

$$x^2 + y^2 - 24x - 22y + 165 = 0$$

Al completar cuadrados tenemos:

$$(x-12)^2 + (y-11)^2 = 10^2$$

De este modo el *centro* de la *circunferencia* es (12,11) y el lugar ideal para colocar el router.

Anexo A3: Elipse

A3.1 Solución a la ACTIVIDAD (DF-E9)

Consideremos que:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 10 \tag{10.5}$$

Calculando las distancias $d(P,F_1)$ y $d(P,F_2)$ y sustituyendo en la ecuación (10.5), se tiene:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$$

Pasamos el segundo radical al otro lado de la igualdad, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y desarrollando los binomios, se obtiene:

$$x^2+8x+16+y^2 = 100-20\sqrt{(x^2-8x+16)+y^2}+x^2-8x+16+y^2$$

Simplificando la expresión anterior queda:

$$16x-100 = -20\sqrt{(x^2-8x+16)+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, y desarrollando se tiene:

$$256x^2-3200x+10000 = 400x^2-3200x+6400+400y^2$$

Simplificando se encuentra que:

$$144x^2+400y^2 = 3600$$

Finalmente, se divide ambos miembros de la igualdad por 3600 y se obtiene:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$$

A3.2 Solución a la SP-E7

Observa en el boceto (figura 6.22) que cada *varilla vertical* debe medir más de 100 cm, para calcular su longitud se debe considerar que están delimitadas por un arco elíptico de 150 cm de largo y 50 cm de alto. Podemos identificar que el arco es similar a la mitad de una *elipse* con *semieje mayor* igual a 150 cm y *semieje menor* igual a 50 cm (figura 10.1), cuya ecuación es 10.6.

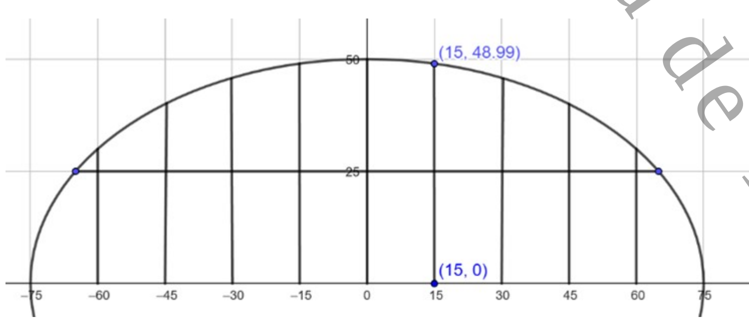


Figura 10.1: Mitad de la elipse en el plano cartesiano.

$$\frac{x^2}{75^2}+\frac{y^2}{50^2} = 1 \tag{10.6}$$

Considerando que la distancia entre las varillas verticales es de 15 cm, cada varilla se ubica en un múltiplo de 15, sobre el eje mayor de la *elipse*, de este modo uno de sus extremos se ubica en el punto: (0,0), $(\pm 15,0)$, $(\pm 30,0)$, $(\pm 45,0)$ y $(\pm 60,0)$, se debe hallar el otro extremo de cada varilla, el cual es un punto que se ubica en la *elipse*, y posteriormente calcular la longitud del segmento que une estos dos puntos, los cuales tienen la misma *coordenada x*. Es decir, si uno de los extremos de la varilla está en el punto $(15,0)$, el otro extremo se halla en un punto de la *elipse* de la forma $(15,y)$, para hallar el valor de la *coordenada y* se debe sustituir el valor de la *coordenada x* en la ecuación (10.6), haciendo los cálculos correspondientes se tiene que $y=\sqrt{2400}$, así el punto sobre la elipse es $(15,\sqrt{2400})$ y la longitud de la varilla es $\sqrt{2400}\approx 49$. Similarmente se realiza el mismo procedimiento para calcular la longitud de las otras varillas en el arco, posteriormente a esta longitud se le suma 100 cm de acuerdo al boceto, obteniendo la longitud final de la varilla, como se muestra en el cuadro 10.1.

Observación. Como la elipse es simétrica, basta con calcular la longitud de la varilla que se halla en el centro y las cuatro que se hallan en el primer cuadrante.

Cantidad de varilla	Longitud (cm) de la varilla en el arco	Longitud (cm) final de la varilla
1	50	150
2	49	149
2	46	146
2	40	140
2	30	130

Cuadro 10.1: Longitudes de varillas verticales.

De acuerdo al boceto (figura 6.22) la distancia entre las *varillas horizontales* es de 25 cm y se puede ver que cuatro de ellas miden 150 cm de largo. Nos interesa conocer la longitud de la varilla que tiene sus extremos sobre el arco elíptico, es decir sobre la *elipse* de la figura 10.1. Por lo tanto es necesario hallar las coordenadas de los puntos que coinciden con sus extremos y calcular la longitud del segmento que los une. Para eso, consideramos que la distancia entre la varilla y el eje mayor de la *elipse* es de 25 cm, de este modo las coordenadas de los puntos son de la forma $(x,25)$ y $(-x,25)$. Para hallar el valor de la *coordenada x* se debe sustituir el valor de la *coordenada y* en la ecuación 10.6, de donde se obtiene que $x = \pm\sqrt{4218.75}$. Así, la coordenada de los puntos es $(\sqrt{4218.75}, 25)$ y $(-\sqrt{4218.75}, 25)$ y la longitud de la varilla horizontal es de aproximadamente 130 cm.

Observación. Se puede solicitar hallar el precio y longitud de diferentes varillas utilizadas en la herrería y determinar cuánto se gastará en material para la elaboración del barandal, con lo cual se espera reflexionar sobre el beneficio que puede tener el uso de la ecuación de la elipse para poder realizar estos cálculos, y no desperdiciar o gastar de más en material.

Anexo A4: Parábola

A4.1 Solución a la ACTIVIDAD (DF-P9)

Tenemos que:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$d(P,C) = (x+2)$$

Al igualarlas se tiene:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = (x+2)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y desarrollando se obtiene:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

Simplificando se obtiene:

$$y^2 = 8x$$

A4.2 Solución a la SP-E3

Se identifica la *parábola* que genera el reflector y se ubica en el plano cartesiano, cuyo *vértice* se halla en el origen, con *eje* paralelo al *eje-Y* (figura 10.2). Cómo la *parábola* es simétrica respecto a su *eje*, los 120 cm quedan distribuidos en 60 cm a cada lado del *eje* y se considera los 40 cm de profundidad, así podemos considerar el punto $P(60,40)$, sustituyendo los valores de x e y en la ecuación (7.1), se tiene:

$$60^2 = 4a(40)$$

Dónde se tiene que:

$$a = 22.5 \text{ cm}$$

Así la coordenada del *foco* es (0, 22.5), de este modo el soporte debe colocarse a 22.5 cm de distancia de la parte más profunda de la estufa solar.

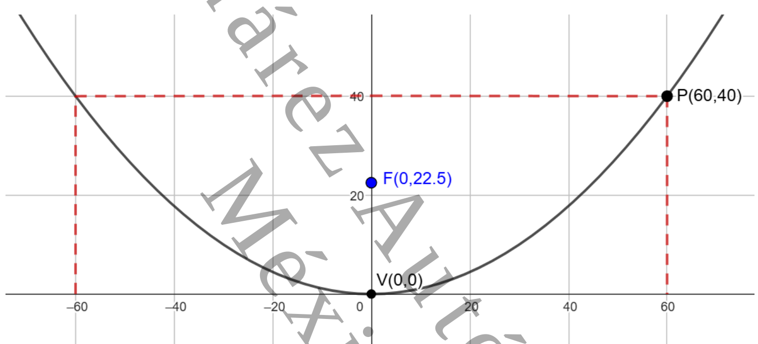


Figura 10.2: Elipse generada a partir del corte de un cono.

Anexo A5: Hipérbola

A5.1 Solución a la ACTIVIDAD (DF-H9)

Consideremos que:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 8 \tag{10.7}$$

Lo cual es equivalente a:

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 8$$

Calculando las distancias $d(P,F_1)$ y $d(P,F_2)$ y sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\pm 8$$

Pasando el segundo radical al otro lado de la igual, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y desarrollando los binomios, se obtiene:

$$x^2+10x+25+y^2=64\pm 16\sqrt{(x^2-10x+25)+y^2}+x^2-10x+25+y^2$$

Simplificando la expresión anterior queda:

$$20x-64=\pm 16\sqrt{(x^2-10x+25)+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, y desarrollando se tiene:

$$400x^2-2560x+4096=256x^2-2560x+6400+256y^2$$

Simplificando se encuentra que:

$$144x^2-256y^2=2304$$

Finalmente, se divide ambos miembros de la igualdad por 2304 y se obtiene:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

A5.2 Solución a la SP-H1

Llamemos D al barco y consideremos las estaciones A y B, sea $d(D,A)$ y $d(D,B)$ la distancia de D a la estación A y B, respectivamente. Como D está a 80 m más cerca de la estación B que A, la diferencia de las distancias de D a cada estación A y B es igual a:

$$d(D,A)-d(D,B)=80 \text{ m}$$

Note que D se encuentra sobre una *hipérbola* (figura 10.3), cuyo *eje focal* se halla horizontalmente (al igual que la orilla del mar), y sus *focos* corresponde a la estación A y B, (la estación A se halla a la derecha y la B a la izquierda) como la distancia entre ellas es de 300 m, se tiene que $2c=300$, $c=150$ y $2a=80$, $a=40$, sustituyendo estos datos en la ecuación (8.2), tenemos que:

$$b^2 = 150^2 - 40^2$$

$$b^2 = 20900$$

Así que la ecuación de la *hipérbola* donde se encuentra D es:

$$\frac{x^2}{40^2} - \frac{y^2}{20900} = 1$$

Como la distancia de D a la orilla es de 48 m, sus coordenadas son de la forma $(x, 48)$, entonces para hallar el valor de x, se despeja la variable x de la ecuación anterior y se sustituye el valor de $y = 48$, se tiene que:

$$x = \pm 40\sqrt{1 + \frac{48^2}{20900}}$$

Tomamos el valor positivo de x debido a que D se halla más cerca de la estación B que de A. Así las coordenadas donde se localiza el barco D son aproximadamente (42.1, 48).

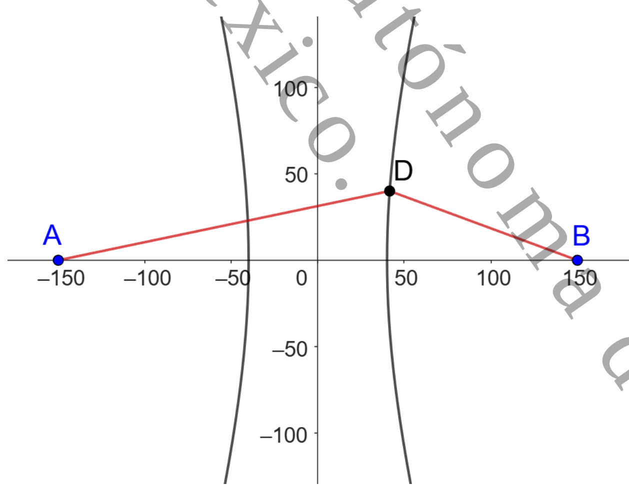


Figura 10.3: Hipérbola para localizar el barco D.

A5.3 Solución a la SP-H2

Llamemos C al Cazador y considerando las estaciones Z y W, sea $d(C,Z)$ y $d(C,W)$, la distancia de C a la estación Z y W, respectivamente. Como el sonido del balazo del cazador llegó a la estación W un segundo después que a la estación Z y considerando que el sonido viaja a 335 m/s, la diferencia $d(C,Z) - d(C,W)$ en las distancias indicadas en este tiempo es:

$$d(C,Z) - d(C,W) = \left(335\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(1\text{s}) = 335 \text{ m}$$

Observación. Para el procedimiento anterior se utilizó la fórmula de la distancia (d), que involucra velocidad (v) y tiempo (t): d=vt. Se sustituyo la velocidad (v) del sonido y el tiempo (t) en que tardo llegar a la otra estación.

Note que C se encuentra en una *hipérbola* cuyos *focos* corresponde a la estación Z y W, y la distancia entre ellas es de 600 m, así se tiene que $2c = 600$, $c = 300$ y $2a = 335$, $a = 167.5$. Sustituyendo estos datos en la ecuación (8.2), se tiene:

$$b^2 = (300)^2 - (167.5)^2$$

$$b \approx 249$$

Así que la ecuación de la *hipérbola* es:

$$\frac{x^2}{167.5^2} - \frac{y^2}{249^2} = 1$$

Se traza el plano cartesiano al mapa del bosque (figura 10.4), considerando que las estaciones se ubican en el *eje-X* y se dibuja la *hipérbola*. Note que como el sonido llego primero a la estación Z, el cazador se encuentra en la rama izquierda de la *hipérbola*, la cual se ha pintado de rojo.

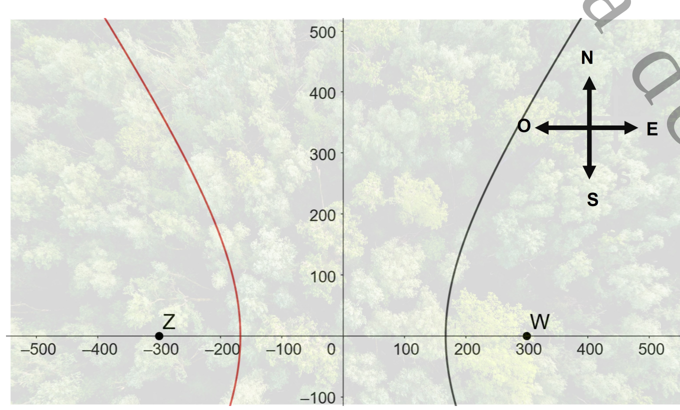


Figura 10.4: Mapa del bosque considerando una hipérbola.

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de la Tesis:	UN ACERCAMIENTO CONSTRUCTIVO Y FUNCIONAL A LAS CÓNICAS EN EL BACHILLERATO
Autora de la Tesis:	Rosa Isela Sánchez Brito
ORCID	https://orcid.org/0009-0004-1321-3053
Resumen de la Tesis	Las nuevas propuestas curriculares de la educación media superior enfatizan el uso de las matemáticas en el entorno, debido a que su enseñanza durante mucho tiempo ha centrado su atención en contenidos que rara vez tienen relación con el mundo real del estudiante, propiciando la mecanización de procesos algorítmicos, objetos matemáticos acabados y con poco significado. Además, el nuevo currículo menciona la falta de material que atienda estas propuestas y que capten el interés de los alumnos, dejando atrás estas enseñanzas tradicionales. Debido a lo anterior se presenta una *guía didáctica* para el profesor en el tema de las *cónicas*, desde un aspecto *constructivo* y *funcional*. Se realizó una investigación de tipo documental para recabar información del tratamiento dado a estas curvas y su uso. Para el diseño de la guía se toma como base los primeros cuatro niveles del *Modelo de Van Hiele* que permite tener un acercamiento a las *cónicas* de manera gradual y se considera los aportes de la *Socioepistemología* y la *Teoría de las Representaciones Semiótica*. En la guía se proponen: actividades que permiten construir, manipular, calcular distancias, visualizar, usar los elementos, propiedades y ecuaciones de las *cónicas*; situaciones problemáticas derivadas de su uso; y entornos de *funcionalidad*, en donde se aprecia la relación de las *cónicas* con otras áreas de estudio como la medicina, arquitectura, arte, electricidad,telecomunicaciones, entre otras.

Palabras claves de la Tesis	Cónicas, Funcional, Aprendizaje, Modelo de Van Hiele, Socioepistemología.
Referencias citadas	[1] Alcover, G. J. (1990). *Efectos adversos de las ondas de choque piezoeléctricas sobre el parenquima renal. Modelo experimental* [Tesis doctoral, Universidad de Barcelona]. http://hdl.handle.net/2445/36510 [2] Asociación Nacional de Maestros de Ciencias de la Tierra. (2012). *Tabla de datos orbitales de los planetas y planetas enanos*. Ventanas al universo. http://windows2universe.org/ [3] Baldor, J. A. (1994). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. Cultural. [4] Beltrán, G. J. (2019). *Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una ingeniería didáctica* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/15277 [5] Blog Movisfera. (2023). *Dónde es mejor poner el router WiFi*. https://comunidad.movistar.es/t5/Blog-Movisfera/D [6] Buccino, S. (2011). *Historia de la Matemática en un ambiente de geometría dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las cónicas* [Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica Nacional]. https://www.docsity.com/es/historia-de-la-matematica-en-un-ambiente-de-geometria-dinamica/4687396/ [7] Cáceres, B. G. (2018). Aprendizaje de traslaciones en el plano fundamentado en el Modelo de Van Hiele, mediado por Geogebra. *Paideia Surcolombiana, (22)*, 78-96.

[8] Cantoral R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

[9] Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemática y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3)*, 91-116.

[10] Cerasoli, A. (2016). *Todos de fiesta con el número Pi*. Maeva Ediciones. https://www.maeva.es/colecciones/para-leer-y-aprender/todos-de-fiesta-con-el-nmeropi?PageSpeed=noscript

[11] COBATAB (2020). *Guía del estudiante. Matemáticas III*.

[12] Corberán, R., Huerta, P., Margarit, J., Peñas Antonio & Ruíz, E. (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo Van Hiele*. Universidad de Valencia. https://books.google.com.mx/books?id=wD7oIPysOsQC

[13] Cúellar, C. J. (2012). *Matemáticas III* (3a. ed.). McGraw-Hill.

[14] Crespo, C. R. (2005). La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 313-320.*

[15] Dávila, M., Del Alba, A., Hernández, P. & Antolín, A. (2013). Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. *Cultura Científica y Tecnológica, 10(50)*, 27-36.

[16] De León, M. & De Albornoz, A. C. (2020). *Cónicas: Historia de su independencia del cono*. Catarata.

[17] Duval, R. & Moretti, T. M. T. (2012). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Revista electrónica de educación matemática, 7(2),* 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

[18] Eadic (2014). *Hiperboloides en ingenería: 10 ejemplos*. https://eadic.com/blog/entrada/hiperboloides-en-ingeneria/

[19] Fuller, G. & Tarwater, D. (1995). *Geometría analítica* (7a. ed.). Pearson Educación.

[20] García, C. J. (2018). *Aprendizaje de los ángulos de la circunferencia utilizando el Modelo de Van Hiele en preparatoria* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://hdl.handle.net/20.500.12371/15103

[21] Halliday, D. & Resnick, R. (2001). *Fundamentos de física* (8a. ed.). Editorial Patria.

[22] Holliday, B. (2002). *Geometría analítica con trigonometría*. McGraw-Hill.

[23] Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele a la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

[24] Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática* (295-384). Sevilla: Alfar.

[25] Lambie, R. (2022). *Photo blog*. uksingboards. https://uksignboards.com/30-famous-global-logos-with-grid-illustration-history-designer/

[26] Larson, R. & Falvo, D. C. (2012). *Precálculo* (8a. ed.). Cengage Learning.

[27] Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. (13a. ed.). Limusa.

[28] Maguiña, R. A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el Modelo Van Hiele* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/4733

[29] Martínez, C. C. (2023). *Implementación de materiales didácticos para la enseñanza de las cónicas en el nivel bachillerato* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/handle/20.500.11845/3423

[30] Masi, S. & Giraudo, I. (2000). *Roma y el Vaticano: arte e historia*. Bonechi. https://books.google.com.mx/books?id=nKVJ2EdJ06kC

[31] MSD (2000). *Eliminación de un cálculo mediante ondas ultrasónicas*.

[32] Pérez, B. R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/8094

[33] Pérez, M. E. (2015). *Física general* (5a. ed.). Editorial Patria.

[34] Polar, F. (2006). Matemática Maravillosa. *Fundación Polar*.

[35] Real, P. M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Suma, 46*, 71-77.

[36] Rider, P. (1966). *Geometría analítica*. Montaner y Simón.

[37] Sanz, D. (2018). *13 animales hechos únicamente con 13 círculos*. La cartera rota. https://lacarterarota.com/13-animales-hechos-13-circulos/

[38] SEP (2018). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudiosems.pdf

[39] SEP (2023). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/propuestaMCCEMS

[40] Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012). *Precálculo: matemáticas para el cálculo* (5a. ed.). Cengage Learning.

[41] Swokowski, E. W. & Jeffery A. C. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (12a. ed.). Cengage Learning.

[42] Vargas, Z. L. (2021). *Un Estudio histórico-epistemológico sobre la construcción social de las secciones cónicas en geometría del espacio* [Tesis de maestría, CINVESTAV]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3903