



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

Análisis de Bifurcación en la Familia de  
Polinomios Cúbicos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
Licenciado en Matemáticas

PRESENTA:

Reina Marisol Madero Hernández

DIRECTOR:

DR. GAMALIEL BLÉ GONZALEZ

## Declaración de Autoría y Originalidad

En la Ciudad de Villahermosa, Centro, Tabasco, el día 1 del mes agosto del año 2024, el que suscribe Reina Marisol Madero Hernández alumna(o) de la División Académica de Ciencias Básicas con número de matrícula 172A11012 adscrito a la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del título y titulada Análisis de Bifurcación en la Familia de Polinomios Cúbicos dirigida por el Dr. Gamaliel Blé González.

### DECLARO QUE:

La Tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio de 2020 regularizando y aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 1 de agosto del 2024.



Reina Marisol Madero Hernández.



**UJAT**  
UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 10 de julio de 2024.

**C. REINA MARISOL MADERO HERNÁNDEZ**  
**PASANTE DE LA LIC. EN MATEMÁTICAS**  
**P R E S E N T E**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN EN LA FAMILIA DE POLINOMIOS CÚBICOS”**, dirigido por el Dr. Gamaliel Blé González, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Justino Alavez Ramírez, Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo y Dr. Jorge López López, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL**  
**DIRECTORA**



C.c.p. Pasante.  
C.c.p. Archivo.

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

## CARTA DE AUTORIZACIÓN

Villahermosa, Tabasco a 1 de agosto del 2024.

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada Análisis de Bifurcación en la Familia de Polinomios Cúbicos. Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que, la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; en y aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un período de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior, cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

### COLABORADORES



Reina Marisol Madero Hernández.



Dr. Gamaliel Blé González.

### TESTIGOS



Itzayana Yisely Madrigal Estrada



Víctor Daniel Reyes García

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de Tesis:	Análisis de Bifurcación en la Familia de Polinomios Cúbicos
Autor de la Tesis:	Reina Marisol Madero Hernández
ORCID:	0009-0004-4298-0673
Resumen de la Tesis:	En el estudio de la dinámica de las funciones polinomiales, la familia de polinomios cuadráticos ha jugado un papel muy importante gracias a que presenta una diversidad de dinámicas que van desde el orden hasta el caos. Sin embargo, se tienen pocos estudios de la dinámica para polinomios de grado superior. En este trabajo analizamos las bifurcaciones que se presentan en la familia de polinomios cúbicos de variable real. En particular mostramos la existencia de las bifurcaciones silla nodo, doblamiento de periodo, transcítica y tridente.
Palabras claves de la Tesis:	Polinomios cúbicos, sistemas dinámicos y bifurcaciones.
Referencias citadas:	<p>Beardon, A. (1991). Iteration of Rational Functions. Springer Verlag.</p> <p>Bonifant, A., Kiwi, J., and Milnor, J. (2010). Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, part ii: escape regions. Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society, 14(4), 68-112.</p> <p>Branner, B., Hubbard, J. H. (1992). The iteration of cubic polynomials Part II: Patterns and parapatterns.</p> <p>Carleson, L., Gamelin, T. (1993). Complex Dynamics. Springer Verlag.</p> <p>Devaney, R. L. (1992). An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (2nd Edition).</p> <p>de Melo, W., van Strien, S. (1992). One Dimensional Dynamics. Springer Verlag. [DH] Douady, A., Hubbard, J. (1984). Etude dynamique des polynomes complexes. Publication Mathématiques d'Orsay, 84-02, 85-04.</p> <p>Hirsch, M. W. (1976). Differential Topology. Springer Verlag.</p> <p>Lyubich, M. (1997). Dynamics of quadratic polynomials, I-II. Acta Mathematica, 178, 185-297.</p> <p>Milnor, J. (2006). Dynamics in one complex variable (Third edition). Annals of Math. Studies, 160, Princeton University Press.</p> <p>Milnor, J. (1992). Remarks on iterated cubic maps. Experimental Mathematics, 1(1), 5-24.</p> <p>Marsden, J. E., Tromba, A. J. (1991). Cálculo vectorial (Vol. 69). Addison-Wesley Iberoamericana.</p> <p>Perko, L. (2013). Differential Equations and Dynamical Systems (Vol. 7). Springer Science &amp; Business Media.</p> <p>Robinson, R. C. (2012). An introduction to dynamical systems: continuous and discrete (Vol. 19). American Mathematical Society.</p>

# LICENCIATURA - ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN EN LA FAMILIA DE POLINOMIOS CÚBICOS

INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="http://hdl.handle.net">hdl.handle.net</a> Internet	222 palabras — 1%
2	<a href="http://dokumen.pub">dokumen.pub</a> Internet	196 palabras — 1%
3	<a href="http://ri.ujat.mx">ri.ujat.mx</a> Internet	120 palabras — 1%
4	Neus Garrido Saez. "Diseño, análisis y estabilidad de métodos iterativos con memoria para la resolución de ecuaciones y sistemas no lineales", Universitat Politecnica de Valencia, 2020 Crossref Posted Content	97 palabras — 1%
5	<a href="http://www.uv.mx">www.uv.mx</a> Internet	96 palabras — 1%
6	<a href="http://zaguan.unizar.es">zaguan.unizar.es</a> Internet	95 palabras — 1%
7	<a href="http://uvadoc.uva.es">uvadoc.uva.es</a> Internet	48 palabras — < 1%
8	<a href="http://archive.org">archive.org</a> Internet	39 palabras — < 1%



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

ESTUDIOS  
TERMINALES

*A Pipo,  
para que finalmente haya un matemático con tu apellido.*

*A Chaac, él sabe por qué.*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

---

# Agradecimientos

---

*Advertencia: No se asuste.*

*Guía del autoestopista galáctico*

*Si no continúas viviendo, habrá algo importante que le faltará al mundo.*

*Nik Wiles*

*Ciertamente habrán peores días que estos.*

*Pero la hermosa verdad es que también habrá mejores días.*

*Brit Barkholtz*

*Eres una criatura del universo, tanto como los árboles y las estrellas;  
tienes derecho a estar aquí.*

*Max Ehrmann*

*Al final todo estará bien. Si no está bien, entonces todavía no es el final.*

*Fernando Sabino*

Quisiera iniciar esto agradeciendo a todas las personas que, de una forma u otra, me obligaron a terminar la tesis.

Ahora, hablando en serio quisiera agradecer por todo el apoyo, el cariño (y la persistencia, genuinamente no se rendían) de mis amigos y familia, sin ustedes este trabajo no sería posible (es su culpa), de todo corazón agradezco que me hayan acompañado en este largo camino (de verdad, ¿cómo no se rindieron?) lleno de problemas (chiste no intencional) y dudas, puedo respirar mejor sabiendo que ya se acabó (estoy escribiendo esto y sigo escribiendo el capítulo 3 porque no tengo vergüenza).

Primero que todo quiero agradecer a mi familia, quienes no me abandonaron cuando las circunstancias eran complicadas, gracias por todo lo que me enseñaron, por los buenos momentos, por las cosas que nunca me dejarán, elijo tomar todo lo bueno y seguir con el corazón lleno de lo mejor. Gracias a mi padre, por haber sido mi modelo a seguir y mi héroe; gracias por todo lo que me enseñaste con amor, por nunca abandonarme. Gracias a mi madre, gracias por todo el amor que nunca podré devolver; gracias porque cuando levanto la mirada al cielo puedo dejar que tu sonrisa cure mi alma una y otra vez. Gracias a mi hermana, quién siempre me aceptó aunque le diga Mushi; porque sé que no lo cree, pero es de las mejores cosas que me pasaron en la vida. Gracias a mi tía Bertha, porque su amor me hizo mejor persona; porque nunca se fue de mi lado, porque su fé en mí es algo que nunca he dado por hecho y aún así siempre ha estado ahí. Gracias a mis sobrinos y sobrinas (a los que amé desde que supe de su existencia),

porque su alegría siempre fue la luz de mi vida, porque nunca olvidaré la alegría que han traído a mi vida.

Gracias a mi abuelo, mi Pipo, que siempre quiso ser matemático, por pasarme su sueño y permitirme mantener vivo su legado. Por ser mi inspiración en los momentos difíciles, porque incluso cuando se fue, me acercó a Dios. Gracias por todo lo que me enseñó, la manera en que influyó en mi vida. Gracias por amarme tanto como para permitirme vivir el sueño que siempre estuvo fuera de su alcance.

Gracias a mis pollitos de colores, quienes fueron mi compañía constante en la carrera, gracias por las risas, por el compañerismo, por ser amigos, compañeros, acompañantes, confidentes e incontables cosas más. Siempre estarán en mi corazón. Gracias a Claudia por todas las veces que me escuchó y me animó, porque ella me enseñó que es mucho ser tonto y feo en un mismo día; porque sé que tendrá éxito en sus próximos proyectos y espero estar ahí para verlo. A Itza por las veces que su simple aparición hizo mejor mi día, porque me animó a ser mejor estudiante, porque deseo de todo corazón que encuentre paz y felicidad en la nueva aventura en la que se embarca. A Vanessa, por siempre decir que sí en mis aventuras, porque fue mi compañía constante cuando la necesitaba, porque gracias a ella ese último semestre fue disfrutable. A Daniel, porque me convenció de hacer esta coeh-tesis (es su culpa), y aunque se lo reclamé mil veces siempre que surgía un problema me ayudó en cuanto podía, nunca podré pagarle la paciencia que me tuvo al ayudarme con este proyecto, me faltará la vida para agradecerle realmente todo lo que hizo por mí. A Grecia, que nunca se fue de mi corazón, aunque sí lo hizo de la carrera. A Manuela, espero que siempre sepas que te adoro mucho. A Nandito, que me dejó guardarlo como “Piojo Vomitado” y encontró columpios para mí cuando estuve triste porque quitaron el de la universidad (pongalo de regreso, ¿qué les cuesta?), gracias por todos los buenos momentos. Los amo a todos, aunque no cumplimos el pacto.

A mis profesores, por todo el esfuerzo y dedicación, a mi tutor de la carrera, quién me ayudó (obligado) toda la carrera con mis tareas (es más feliz desde que terminé); a mi asesor de tesis, por no rendirse conmigo (yo sí lo hice). A todos mis profesores, porque siempre aprendí algo en sus clases.

También quiero agradecer a todas las personas que conocí gracias a esta carrera: amigos del club de ciencias, personas a las que ayudé con matemáticas, matemáticos de otros semestres y personajes secundarios de esta serie llamada vida. Gracias por haber sido parte de este camino.

Gracias a Liv (sé que lograrás todas tus metas, nunca te rindas) y a Ace (tienes uno de los espíritus mas peleoneros que he visto y te admiro por ello) (gracias por mandarme mensajes hasta que logré concentrarme y terminé mis imágenes), por su fé inquebrantable en que acabaría mi tesis, por todo el amor y apoyo que recibí de su parte, porque sé que sus caminos son brillantes y es mi alegría que me dejen ser parte de ellos.

A Valentina, cuyo cariño, paciencia y amor me sacó de muchos momentos oscuros, por todas las veces que me preguntó como estaba, porque me leyó en todas las circunstancias, por la manera en que alejó mi soledad con su paciencia y su amor. Por las veces en que fue exactamente la persona que necesité.

A Mar, porque siempre puedo contar con ella sin importar la hora, porque su amis-

tad es de las más valiosas que tengo. A Melina, porque su fé en mis habilidades es impresionante, porque su amor hizo mi familia más grande.

A Klau, mi Klau, quien no me abandonó nunca, quién me animó (me obligó) a soñar en grande, porque siempre ha pensando que puedo ser más de lo que yo he creído, porque con su amor es capaz de alejar la incertidumbre y el miedo, porque es mucho más de lo que nunca podrá ver y espero que me dejes estar siempre contigo.

A Sara, mi corderito rosa, por todas las veces que no me dejó en mi soledad, porque me canta si estoy triste, porque su presencia hace que mis días se sientan menos solos (y porque me mandó memes de la tesis durante casi un año).

A Andy, porque ella me *entiende* cuando me obsesiono con algo y me apoya, porque su amor suave y tranquilo me recordó constantemente que no tengo que ahogarme en mis problemas.

Gracias a Karina, quién es la otra mitad de mi corazón, la vida podrá separarnos, pero tú siempre serás parte de lo mejor de mí. Gracias por ser la primera persona que me leyó, mi primer fan, mi amistad más larga, por ser todo y más de lo que yo quería y necesitaba.

Una mención especial a Adriana Salazar por todas las veces que me habló en la madrugada para preguntar temas súper específicos de matemáticas, por todas las veces que me contestó en la madrugada para escucharme y por la vez que me ayudó a ponerle título al capítulo 3.2. Gracias por ayudarme con las imágenes que te pedí a las 3 de la mañana (que siga felicitándome por mi cumpleaños cada año es una prueba a su paciencia).

Mención especial a todos aquellos que me lo pidieron, que el espíritu navideño este con ustedes: Aracely (si necesitas un libro o un consejo avisame), Letto (sé que a veces todo se ve difícil, pero confío en que algún día encontrarás el amor y la paz que mereces).

Gracias a Dom, por todas las veces que me ayudó a salir de esos trances que me impedían avanzar, porque su sola presencia me sacó de momentos oscuros.

Finalmente, gracias a mi yo del pasado, quién se tomó todo el tiempo y el trabajo de hacer las cuentas, los dibujos, las redacciones para que este trabajo saliera tan bien como resultó. Gracias a mi yo del presente por no dejar de trabajar hasta que terminamos. Y de nada, a mi yo del futuro, porque ahora tienes el camino libre para hacer lo que quieras, espero que aproveches los regalos que te fueron dados.

---

# Índice general

---

Índice de figuras	VII
Resumen	x
Abstract	x
Introducción	1
Marco Teórico	2
Justificación	3
Pregunta de Investigación	3
Hipótesis	3
Objetivo General	3
Objetivos Específicos	3
Metodología	3
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Iteraciones . . . . .	5
1.2. Órbitas . . . . .	5
1.3. Puntos atractores y repulsores . . . . .	6
1.4. Órbitas atractoras y repulsoras . . . . .	8
1.5. Variedades diferenciales . . . . .	9
1.6. Teorema de la variedad central . . . . .	10
1.7. Teorema de la función implícita . . . . .	11
1.8. Conjugación topológica . . . . .	11
<b>2. Teoría de Bifurcación</b>	<b>14</b>
2.1. Bifurcación silla nodo . . . . .	14
2.2. Bifurcación silla nodo en varias dimensiones . . . . .	18
2.3. Bifurcación doblamiento de periodo . . . . .	22
2.4. Bifurcación transcítica . . . . .	30
2.5. Bifurcación tridente . . . . .	32
<b>3. Dinámica de polinomios cúbicos</b>	<b>34</b>
3.1. Familias conjugadas . . . . .	34
3.2. Análisis de bifurcación en la familia de funciones $Q_1(x)$ . . . . .	36
3.3. Análisis de bifurcación en la familia de funciones $Q_2(x)$ . . . . .	43
Conclusión	47

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

---

# Índice de figuras

---

1.1.	Órbita de un punto eventualmente periódico. . . . .	6
1.2.	Análisis gráfico de las órbitas cercanas a los puntos fijos de la función $h(x) = x^2$ . . . . .	7
1.3.	Análisis gráfico de las órbitas de la familia de funciones $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , donde <i>a</i> ) ilustra cuando el punto fijo 0 es atractor, <i>b</i> ) cuando el punto fijo 0 es indiferente y <i>c</i> ) cuando es repulsor. . . . .	7
1.4.	Cartas compatibles. . . . .	9
2.1.	Diagrama de la bifurcación silla nodo. . . . .	15
2.2.	Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones $P_c(x) = x^2 + c$ . . . . .	17
2.3.	Diagrama de bifurcación de la familia de funciones $P_c(x) = x^2 + c$ . . . . .	28
2.4.	Diagrama de bifurcación doblamiento de periodo de la familia $\psi_\mu(x) = \mu x + x^2$ . . . . .	30
2.5.	Diagrama de bifurcación transcítica en la familia de funciones $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ . . . . .	31
2.6.	Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones $H_\mu(x) = \mu x - x^3$ , cuando $\mu = 1$ y $x = 0$ . . . . .	33
3.1.	Región donde $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ . . . . .	37
3.2.	Región donde el punto fijo $x_1$ de la función $Q_1(x)$ es atractor. . . . .	37
3.3.	Diagrama de bifurcación de la familia $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ con $c_2 = 2$ . . . . .	38
3.4.	Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ con $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 = 0$ en el punto fijo $x_1 = 0$ . . . . .	39
3.5.	Las regiones <i>A</i> y <i>B</i> corresponden a los parámetros donde los puntos fijos $x_2$ y $x_3$ son atractores, respectivamente. . . . .	40
3.6.	Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ con $c_1 = 1 + \frac{c_2^2}{4}$ y $c_2 \neq 0$ en los puntos fijos $x_{2,3} = -\frac{c_2}{2}$ . . . . .	40
3.7.	Gráfica de $\hat{\alpha}$ como función de $c_2$ para el punto fijo $x_2$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	41
3.8.	Gráfica de $\hat{\beta}$ como función de $c_2$ en el punto fijo $x_2$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	41
3.9.	Gráfica de $\hat{\alpha}$ como función de $c_2$ para el punto fijo $x_2$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	41
3.10.	Gráfica de $\hat{\beta}$ como función de $c_2$ para el punto fijo $x_2$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	41
3.11.	Diagramas de bifurcación doblamiento de periodo en la familia de funciones $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ , con $c_2 \in [4, \infty)$ , en el punto fijo $x_2$ . En la figura de la izquierda $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ y en la figura de la derecha $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	42

3.12. Gráfica de $\hat{\alpha}$ como función de $c_2$ para el punto fijo $x_3$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	42
3.13. Gráfica de $\hat{\beta}$ como función de $c_2$ para el punto fijo $x_3$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	42
3.14. Gráfica de $\hat{\alpha}$ como función de $c_2$ para $x_3$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	43
3.15. Gráfica de $\hat{\beta}$ como función de $c_2$ para $x_3$ y $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ . . . . .	43
3.16. Diagramas de bifurcación doblamiento de periodo en la familia de funciones $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ con $c_1 = \frac{16+c_2^2\pm c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ y $c_2 \in [4, \infty)$ en el punto fijo $x_3$ . . . . .	43
3.17. Órbitas de la función $x^3$ . . . . .	44
3.18. Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones $Q_2(x) = x^3 + b_1x$ con $b_0 = 0$ y $b_1 = 1$ en el punto fijo $x_1$ . . . . .	44
3.19. Curvas donde los puntos fijos $x_i$ son indiferentes, para $i = 1, 2$ . . . . .	45
3.20. Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones $Q_2(x) = x^3 + b_1x - 2$ , en el punto fijo $x = -1$ para el parámetro $b_0 = -2$ . . . . .	45
3.21. Curvas donde los puntos fijos $x_i$ son indiferentes, para $i = 3, 4$ . . . . .	46

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

## Resumen

En el estudio de la dinámica de las funciones polinomiales, la familia de polinomios cuadráticos ha jugado un papel muy importante gracias a que presenta una diversidad de dinámicas que van desde el orden hasta el caos. Sin embargo, se tienen pocos estudios de la dinámica para polinomios de grado superior. En este trabajo analizamos las bifurcaciones que se presentan en la familia de polinomios cúbicos de variable real. En particular mostramos la existencia de las bifurcaciones silla nodo, doblamiento de periodo, transcritical y tridente.

## Abstract

In the study of the dynamics of polynomial functions, the quadratic polynomial family has played a very important role thanks to the fact that it presents a diversity of dynamics ranging from order to chaos. However, there are few studies of the dynamics for polynomials of higher degree. In this work we analyze the bifurcations that occur in the cubic polynomial family with real variables. In particular we show the existence of saddle-node, period-doubling, transcritical and trident bifurcations.

**Palabras claves:** polinomios cúbicos, sistemas dinámicos y bifurcaciones.

**Keywords:** cubic polynomials, dynamic systems and bifurcations.

---

# Introducción

---

En el estudio de la dinámica de las funciones polinomiales, la familia de polinomios cuadráticos ha jugado un papel muy importante, ya que esta familia presenta una diversidad de dinámicas que van desde el orden hasta el caos. En general, los polinomios cuadráticos se escriben como  $P_{a_0a_1a_2}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , pero desde el punto de vista dinámico es suficiente con estudiar una familia que sea conjugada a  $\{P_{a_0a_1a_2}\}$ . Por lo que se han utilizado la familia logística  $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$  o la familia de polinomios mónicos centrados  $P_c(x) = x^2 + c$ , las cuales tienen al cero como punto fijo o punto crítico, respectivamente [D, R]. Además, estas dos familias involucran solo un parámetro y por lo tanto su estudio en el espacio dinámico o en el espacio de parámetros requiere solamente de una dimensión, la cual puede ser real o compleja. En el espacio de parámetros complejo se han estudiado las propiedades geométricas y topológicas del lugar de conexidad, el cual consiste de los parámetros  $c \in \mathbb{C}$  para los cuales la órbita del punto crítico es acotada, también conocido como conjunto de Mandelbrot [D, R, B, CG, DH].

En este trabajo analizaremos la dinámica de los puntos fijos de la familia de polinomios cúbicos  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  y demostraremos las diferentes bifurcaciones que se presentan en el espacio de parámetros de esta familia en variable real. En particular, mostraremos parámetros donde la familia tiene una bifurcación silla nodo, doblamiento de periodo, transcítica o tridente. Para este estudio trabajaremos con las siguientes dos familias que son conjugadas a  $P_1(x)$ . La familia  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  cuyo punto fijo es 0 e involucra sólo dos parámetros y la familia  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  de polinomios mónicos centrados que tiene al 0 como punto crítico.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. El capítulo 1 presenta algunos conceptos y resultados básicos de sistemas dinámicos que serán necesarios para entender los resultados principales de este trabajo. Así como algunos conceptos que corresponden a cálculo y a geometría. En el segundo capítulo se exponen algunos teoremas de la teoría de bifurcación, se presentan ejemplos y diagramas a fin de ilustrar el comportamiento de los puntos fijos ante variaciones de los parámetros. Finalmente, en el tercer capítulo analizamos la familia de polinomios cúbicos usando dos familias conjugadas. Mostramos las curvas de bifurcación en el espacio de parámetros y demostramos los tipos de bifurcación que se presentan en cada una de las familias.

## Marco Teórico

En 1982, Douady y Hubbard comenzaron a estudiar el conjunto de Mandelbrot y demostraron que es conexo. Además mostraron que la conexidad local de la frontera del conjunto  $M$  (conjetura MLC) implica la conjetura, sobre la densidad de las componentes hiperbólicas, propuesta por Fatou en 1920. Este hallazgo hizo que el análisis de la dinámica de la familia cuadrática se convirtiera en un tema de estudio relevante y en particular la conjetura MLC permanece aún sin resolver [DH, L, M1]. El estudio de los polinomios cuadráticos llevó de manera natural al análisis de la familia de polinomios de grado superior, tanto en variable real como en variable compleja. Sin embargo, el incremento en el grado del polinomio llevó consigo una dificultad adicional, ya que se incrementa tanto la dimensión del espacio de parámetros, como el grado de los polinomios que se tienen que resolver para calcular las órbitas periódicas. Cabe destacar los trabajos de Milnor, Branner, Rees y Hubbard quienes iniciaron la caracterización del espacio de parámetros y del espacio dinámico de la familia de polinomios cúbicos complejos a dos parámetros [M2, BH].

En 1992 Milnor resume los avances obtenidos en la familia de polinomios cúbicos. Debido a que el espacio de parámetros de la familia cúbica tiene dimensión dos compleja, para analizarla fija la dinámica de uno de los puntos críticos y observa los diferentes comportamientos que presenta el otro punto crítico. Además, caracteriza los diferentes tipos de componentes hiperbólicas que se presentan en el espacio de parámetros [M2].

En 2010 Bonifant *et al.* analizaron el espacio de parámetros  $S_p$  de los polinomios cúbicos mónicos centrados con un punto crítico marcado de período  $p$  y demostraron que es una curva algebraica afín suave cuyo género aumenta rápidamente con  $p$ . Además que cada curva  $S_p$  consta de un lugar de conexidad compacto y un número finito de regiones de escape [BKM].

## Justificación

Los trabajos realizados en el estudio dinámico de la familia cúbica se han centrado principalmente en las propiedades geométricas y topológicas del espacio de parámetros complejo. En este trabajo analizamos la familia cúbica con parámetros reales y mostramos los cambios que se presentan en las dinámicas de los puntos fijos al mover los parámetros y en particular demostramos los tipos de bifurcación. Este estudio es importante porque muestra la variedad de bifurcaciones que se tienen en una familia de polinomios de grado mayor que dos.

## Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las diferentes bifurcaciones que puede presentar un punto fijo en la familia de polinomios cúbicos con variable real?

## Hipótesis

Los puntos fijos de la familia de polinomios cúbicos presentan otros tipos de bifurcaciones que no aparecen en los puntos fijos de la familia de polinomios cuadráticos.

## Objetivo General

Analizar la dinámica de la familia de polinomios cúbicos reales y clasificar las diferentes bifurcaciones que se presentan.

## Objetivos Específicos

1. Comprender los conceptos básicos de iteración de funciones en una variable real.
2. Analizar las propiedades dinámicas de los polinomios cúbicos.
3. Caracterizar las diferentes bifurcaciones que se presentan en la familia cúbica.
4. Dibujar los diferentes diagramas de bifurcación.

## Metodología

Para alcanzar el objetivo de este trabajo se siguieron las siguientes estrategias:

1. Se revisaron los conceptos básicos de iteración de funciones polinomiales en variable real basándonos en [D, R, dMvS, M2].
2. Se estudiaron los diferentes tipos de bifurcación que presenta una familia de funciones en una variable tomando como referencia a [R, dMvS].
3. Se calcularon las conjugaciones de la familia cúbica que redujeron el número de parámetros y permitieron realizar el análisis de la dinámica y demostrar las bifurcaciones [D, R, BH].
4. Se realizaron numéricamente los diferentes diagramas de bifurcación para ejemplificar los resultados analíticos.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

---

# 1. Preliminares

---

En este capítulo vamos a dar algunas definiciones y resultados que son válidos en espacios métricos pero nos restringiremos a familia de funciones  $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizadas por  $\mu \in \mathbb{R}$ . Las definiciones y teoremas de este capítulo están basados en [D, H, MT, R].

## 1.1. Iteraciones

Iteración significa repetir un proceso una y otra vez, en este trabajo el proceso que se repite es la composición de una función y para ello, es necesario que la imagen de  $f$  esté contenida en su dominio, es decir,  $f : X \rightarrow X$ .

Para una función  $f_\mu$ , denotaremos por  $f_\mu^2(x) = f_\mu(f_\mu(x))$  y le llamamos segunda iteración de  $f_\mu$ . Similarmente  $f_\mu^3(x) = f_\mu(f_\mu(f_\mu(x)))$  es la tercera iteración y en general

$$f_\mu^n(x) = \underbrace{f_\mu \circ \dots \circ f_\mu}_n(x)$$

es la  $n$ -ésima iteración.

La familia de funciones  $\{f_\mu^n\}$  determina la noción de sistema dinámico discreto que usualmente se denota por el par  $(X, f)$ .

## 1.2. Órbitas

**Definición 1.2.1** (Órbitas). Dado  $w_0 \in \mathbb{R}^n$  se define la *órbita* de  $w_0$  bajo  $f_\mu$  como el conjunto  $\mathcal{O}_{f_\mu}(w_0) = \{w_0, x_1 = f_\mu(w_0), x_2 = f_\mu^2(w_0), \dots, x_n = f_\mu^n(w_0), \dots\}$ . Al punto  $w_0$  se le llama *semilla* de la órbita o *condición inicial*.

Típicamente hay diferentes tipos de órbitas en un sistema dinámico, el más conocido es el *punto fijo*, el cual satisface la ecuación  $f_\mu(x_0) = x_0$  y en consecuencia la órbita consta de un solo punto, es decir,  $\mathcal{O}_{f_\mu}(x_0) = \{x_0\}$ . Un punto fijo es invariante bajo la composición de funciones, nunca se mueve como su nombre lo indica.

Por ejemplo, los puntos fijos de la función  $g(x) = x^2 - x - 4$ , se obtienen resolviendo la ecuación

$$x^2 - x - 4 = x.$$

Así, los puntos fijos de  $g(x)$  son  $1 \pm \sqrt{5}$ .

Otro tipo de órbitas importantes son las *órbitas periódicas* o *ciclos*.

**Definición 1.2.2.** El punto  $x_0$  es periódico si  $f_\mu^n(x_0) = x_0$  para algún  $n > 0$ . Al mínimo  $n$  que lo satisface se le llama *periodo* de la órbita.

Note que si  $x_0$  es periódico con periodo  $n$ , entonces su órbita es

$$\mathcal{O}_{f_\mu}(x_0) = \{x_0, f_\mu(x_0), \dots, f_\mu^{n-1}(x_0)\}.$$

Además, si  $x_0$  tiene un periodo  $k$ , entonces  $x_0$  también es fijo para  $f_\mu^{2k}$ , ya que  $f_\mu^{2k}(x_0) = f_\mu^k(f_\mu^k(x_0)) = f_\mu^k(x_0) = x_0$ . En realidad,  $x_0$  es fijo para  $f_\mu^{nk}$ .

**Definición 1.2.3.** Un punto  $x_0$  es *eventualmente periódico (preperiódico)* si  $f^{m+n}(x_0) = f^m(x_0)$  para algún  $m > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $f^m(x_0)$  es periódico de periodo  $n$ .

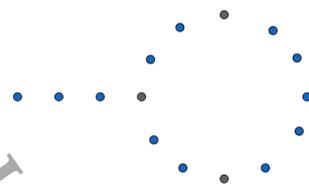


Figura 1.1: Órbita de un punto eventualmente periódico.

Por ejemplo,  $-1$  es eventualmente fijo para  $h(x) = x^2$ , ya que  $h(-1) = 1$ , el cual es un punto fijo de  $h$ .

### 1.3. Puntos atractores y repulsores

En esta sección definiremos cuándo un punto es atractor (o repulsor), lo cual será utilizado más adelante en este trabajo. Las definiciones y teoremas están basados en [D].

Antes de dar las condiciones necesarias para que un punto fijo sea atractor (o repulsor) vamos a ilustrar la idea detrás de estos conceptos. Para esto estudiaremos momentáneamente la función  $h(x) = x^2$ . Esta función tiene dos puntos fijos, 0 y 1. Pero, los comportamientos de las órbitas cercanas a esos puntos son distintos. Si escogemos  $x_0$  tal que  $|x_0| < 1$ , entonces la órbita de  $x_0$  se aproxima rápidamente a cero. Por ejemplo, la órbita de 0.1 es

$$\mathcal{O}_h(0.1) = \{0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \dots\}.$$

En realidad, para cualquier  $x_0$  tal que  $0 \leq x_0 < 1$ , sin importar que tan cercano esté de 1, la órbita de  $x_0$  se aleja de 1, y se acerca a 0. Por ejemplo, la órbita de 0.9 es

$$\mathcal{O}_h(0.9) = \{0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467\dots, 0.185302\dots, 0.034336\dots, 0.00117\dots, \dots\}.$$

Ya que  $h(x) = x^2$ ,  $h^2(x) = x^4$ ,  $h^3(x) = x^8$  y  $h^n(x) = x^{2^n}$  tenemos que  $h^n(x_0)$  tiende a 0 cuando  $n$  tiende a  $\infty$  y  $|x_0| < 1$ . Por otro lado, si  $|x_0| > 1$ , entonces  $h^n(x_0)$  tiende a  $\infty$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ . Por ejemplo, la órbita de 1.1 es

$$\mathcal{O}_h(1.1) = \{1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436\dots, 4.5950\dots, 21.114\dots, 445.79\dots, \dots\}.$$

Claramente los puntos cercanos a 0 tienen órbitas que son “atraídas” a 0, mientras que los puntos a la derecha de 1 tienen órbitas que se “alejan” de 1. En la figura 1.2 se muestra de manera gráfica las órbitas de los puntos cercanos a 1 y se pueden ver las diferencias entre los puntos fijos.

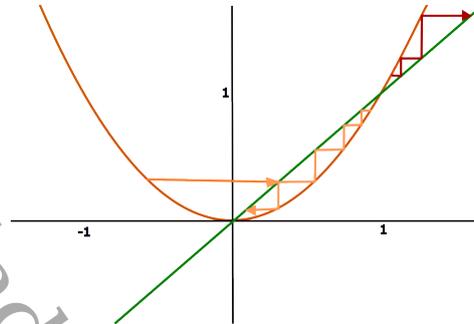


Figura 1.2: Análisis gráfico de las órbitas cercanas a los puntos fijos de la función  $h(x) = x^2$ .

**Definición 1.3.1.** Sea  $x_0$  un punto fijo de  $F$ . Si  $|F'(x_0)| < 1$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo atractor. Si  $|F'(x_0)| > 1$ , entonces  $x_0$  es un punto fijo repulsor. Si  $|F'(x_0)| = 1$ , entonces  $x_0$  es llamado un punto fijo indiferente o neutro.

Recordando que un punto periódico de periodo  $n$  de  $f$  es un punto fijo de  $f^n$ , la definición anterior se traduce para puntos periódicos de  $f^n$  sustituyendo  $f$  por  $f^n$ .

**Ejemplo 1.3.2.** Considere la familia  $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ . Para toda  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $G_\mu$  tiene un punto fijo en 0, y además  $G'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ , es decir,  $G'_\mu(0) = \mu$ . Por lo tanto, el punto fijo 0, es atractor cuando  $|\mu| < 1$ , es indiferente cuando  $\mu = \pm 1$ , y es repulsor cuando  $|\mu| > 1$ , como se ve en el análisis gráfico, que se muestra en la figura 1.3.

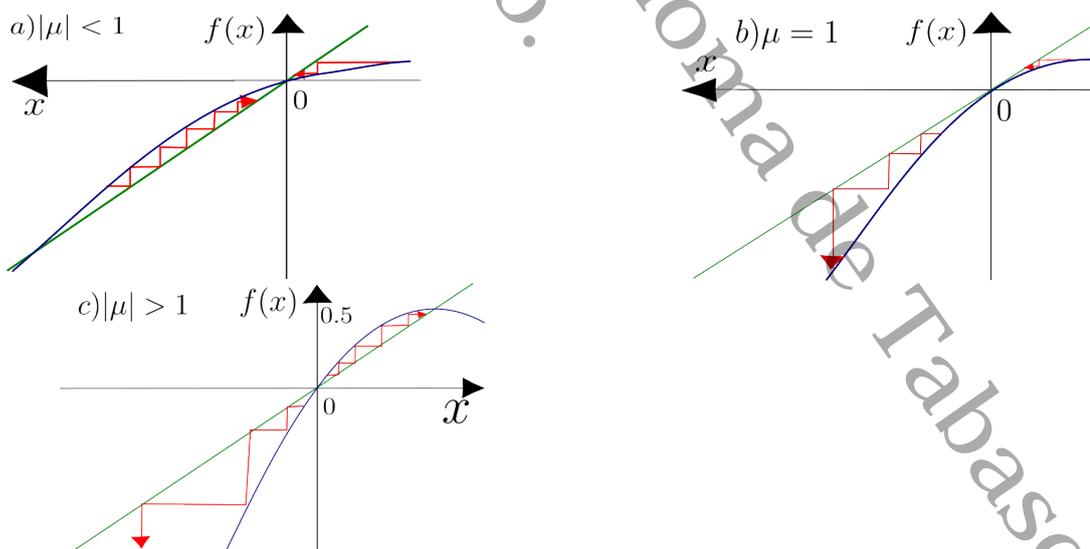


Figura 1.3: Análisis gráfico de las órbitas de la familia de funciones  $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , donde a) ilustra cuando el punto fijo 0 es atractor, b) cuando el punto fijo 0 es indiferente y c) cuando es repulsor.

## 1.4. Órbitas atractoras y repulsoras

En esta sección definiremos cuándo un punto periódico se clasifica como atractor, repulsor o indiferente, para esto nos basaremos en [D].

**Definición 1.4.1.** Un punto periódico de periodo  $n$  de  $F$  es atractor (repulsor) si es un punto fijo atractor (repulsor) para  $F^n$ .

Para determinar si un punto periódico  $x_0$  de periodo  $n$  es atractor o repulsor, debemos calcular la derivada de  $F^n$  evaluada en  $x_0$ , recordando que  $F^n$  denota la  $n$ -ésima iterada de  $F$  y no la  $n$ -ésima potencia. Por la regla de la cadena, tenemos que si  $F$  y  $G$  son funciones diferenciables, la derivada de la composición es

$$(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x).$$

En particular

$$\begin{aligned}(F^2)'(x_0) &= F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0) \\ &= F'(x_1) \cdot F'(x_0),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(F^3)'(x_0) &= F'(F^2(x_0)) \cdot (F^2)'(x_0) \\ &= F'(x_2) \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0).\end{aligned}$$

En general, por la regla de la cadena se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.2** (Regla de la cadena aplicada a una órbita). *Sea  $x_0$  un punto periódico de periodo  $n$  para  $F$ , y  $x_i = F^i(x_0)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , entonces*

$$(F^n)'(x_0) = F'(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0).$$

Esta proposición nos dice que para obtener la derivada de  $F^n$  en el punto  $x_0$  basta con multiplicar la derivada de  $F$  evaluada en cada uno de los puntos de la órbita. Esto significa que no es necesario calcular  $F^n$ , todo lo que tenemos que hacer es calcular la derivada de  $F$ , evaluarla en  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  y multiplicar todos estos números.

Igualmente, de esta proposición se tiene el siguiente resultado que nos dice que no importa que punto se elija como condición inicial, mientras sea un punto de la órbita.

**Corolario 1.4.3.** *Sea  $x_0$  un punto de periodo  $n$  de  $F$ , es decir, su órbita es  $\mathcal{O}_F(x_0) = \{x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_n = F^{n-1}(x_0)\}$ , entonces*

$$(F^n)'(x_0) = (F^n)'(x_j) = (F^n)'(x_{n-1}) \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-2.$$

Este resultado da lugar a hablar de una órbita periódica atractor (repulsor) o un ciclo atractor (repulsor).

**Ejemplo 1.4.4.** Considere  $f(x) = x^2 - 3$ . El punto 1 tiene una órbita de periodo 2, ya que  $f(1) = -2$  y  $f(-2) = 1$ . Además  $f'(x) = 2x$ , entonces  $f'(-2) = -4$  y  $f'(1) = 2$ . Por lo tanto

$$|(f^2)'(1)| = |f'(-2) \cdot f'(1)| = |(-4)(2)| = |-8| > 1.$$

Por lo tanto, esta órbita de periodo dos es repulsora.

## 1.5. Variedades diferenciales

En esta sección definiremos que es una variedad y enunciaremos el teorema de la variedad central, para esto nos basaremos en el trabajo de [R, H].

Una variedad topológica de dimensión  $n$  es un espacio topológico que localmente es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Esto permite estudiar las propiedades geométricas y analíticas de manera local en la variedad.

De manera precisa, en una variedad topológica  $M$  existe una cubierta abierta  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  tal que para cada  $i \in I$  existe un homeomorfismo  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ . Llamaremos a  $(\varphi_i, U_i)$  una carta con dominio  $U_i$ ; y al conjunto de cartas  $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$  un atlas de  $M$ .

Dos cartas  $(\varphi_i, U_i), (\varphi_j, U_j)$  son  $C^r$  compatibles si el cambio de coordenadas

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es de clase  $C^r$  y  $\varphi_i \varphi_j^{-1}$  es también de clase  $C^r$ , véase la figura 1.4. En este caso  $r$  puede ser un número natural o analítico real. Observe que esto tiene sentido ya que  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  y  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  son subconjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ .

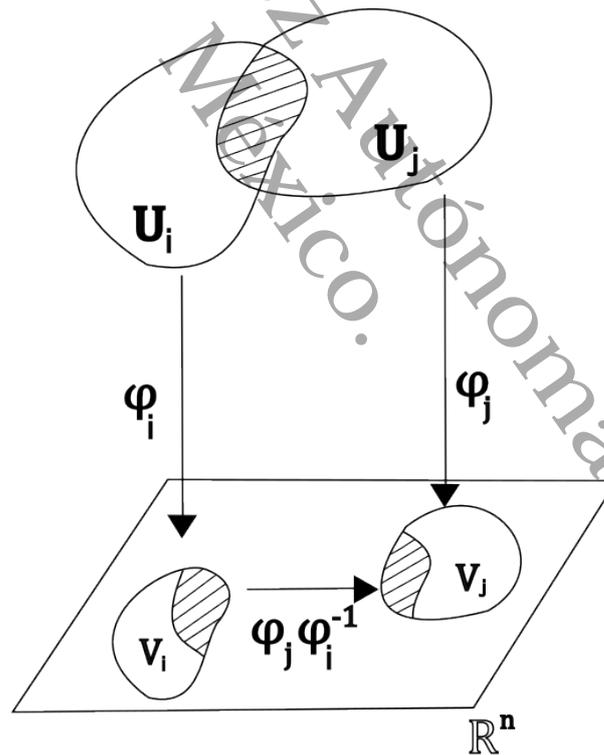


Figura 1.4: Cartas compatibles.

Un atlas  $\Phi$  en  $M$  es de clase  $C^r$  si cada pareja de cartas es  $C^r$  compatible. En este caso hay un único atlas maximal  $\Psi$  que contiene a  $\Phi$ . El atlas  $\Psi$  es el conjunto de todas las cartas que son  $C^r$  compatibles con cada carta en  $\Phi$ . Un atlas maximal  $\hat{\Phi}$  de clase  $C^r$  en  $M$  es una estructura diferencial de clase  $C^r$ . A la pareja  $(M, \hat{\Phi})$  se le llama una variedad de clase  $C^r$  y a una variedad de clase  $r \geq 1$  se le llama *suave*.

## 1.6. Teorema de la variedad central

Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p$  un punto fijo de  $f$  y  $A = Df(p)$  la derivada de  $f$  evaluada en  $p$ . El *espectro* de  $A$  es el conjunto de sus valores propios y se denota por  $\sigma(A)$ . Un punto fijo  $p$  de  $f$  es llamado *hiperbólico* si todos los valores propios  $\lambda$  de  $Df(p)$  tienen módulo distinto de 1.

Para un punto fijo  $p$  no hiperbólico de un difeomorfismo  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ , denotamos por

$$\sigma^s = \sigma(A) \cap \{|z| < 1\}, \quad \sigma^c = \sigma(A) \cap \{|z| = 1\}, \quad \sigma^u = \sigma(A) \cap \{|z| > 1\}$$

al conjunto de valores propios estables, valores propios centrales y valores propios inestables de la linealización de  $f$  en  $p$ , respectivamente.

Denotemos por  $w_j$  al vector propio generalizado de  $Df(p)$  correspondiente al valor propio  $\lambda_j$ . Definimos el subespacio *inestable*  $E^u$  como el generado por los vectores propios  $w_j$  tales que  $\lambda_j \in \sigma^u$ ; el subespacio *estable*  $E^s$ , como el generado por los vectores propios  $w_j$  tales que  $\lambda_j \in \sigma^s$ ; finalmente el subespacio *central*,  $E^c$  es el generado por los vectores propios  $w_j$  tales que  $\lambda_j \in \sigma^c$ . Estos subespacios son tales que  $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s \oplus E^c$ . Además, denotaremos por  $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ .

Dado un punto fijo hiperbólico  $p$  de una función  $f$  de clase  $C^k(U)$  y dada una vecindad  $U' \subset U$  de  $p$ , la *variedad estable local* para  $p$  en la vecindad  $U'$  está definida de la siguiente manera

$$W^s(p, U', f) = \{q \in U' \text{ tal que } f^j(q) \in U' \text{ para } j > 0 \text{ y } d(f^j(q), p) \text{ tiende a } 0 \text{ cuando } j \text{ tiende a } \infty\}.$$

Para definir la variedad inestable, dado que  $f$  no es necesariamente invertible necesitamos un reemplazo para las iteraciones pasadas. Definimos la *historia pasada de un punto*  $q$  como la secuencia de puntos  $\{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty}$  tal que  $q_0 = q$  y  $f(q_{-j-1}) = q_{-j}$  para  $j \geq 0$ . Así, la *variedad inestable local* de  $p$  en  $U'$  está definida de la siguiente manera

$$W^u(p, U', f) = \{q \in U' \text{ tal que existe alguna elección de la historia pasada de } q \text{ tal que } \{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty} \subset U' \text{ tal que } d(q_{-j}, p) \text{ tiende a } 0 \text{ cuando } j \text{ tiende a } \infty\}.$$

**Teorema 1.6.1** (Teorema de la Variedad Estable). *Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico de una función  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 1$ . Supongamos que  $Df(p)$  tiene  $l$  valores propios con módulo menor que 1 en  $\sigma^s$  y  $m$  valores propios con módulo mayor que 1 en  $\sigma^u$ . Entonces existe una vecindad  $U' \subset U$  de  $p$  tal que  $W^s(p, U', f)$  y  $W^u(p, U', f)$  son variedades de clase  $C^r$ , de dimensión  $l$  y  $m$ , y tangentes a  $E^s$  y a  $E^u$  en  $p$ , respectivamente.*

**Definición 1.6.2.** Sea  $p$  un punto fijo no hiperbólico de un difeomorfismo  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$1 < \beta < \min\{|\sigma^u|\}.$$

La variedad local estable-central del punto fijo  $p$  de  $f$  es

$$W^{cs} = \{q : \{\beta^{-n}|f^n(q) - p|\}_{n=0}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada}\}.$$

**Teorema 1.6.3** (Teorema de la Variedad Estable-Central). *Sea  $p$  un punto fijo no hiperbólico de un difeomorfismo  $f$  que divide a  $\mathbb{R}^n$  en  $E^{cs} \times E^u$ . Si  $\|f - Df(p)\|_1$  es suficientemente pequeño entonces  $W^{cs}$  es independiente de cualquier elección de  $\beta$ . Además,  $W^{cs}$  es la gráfica de una función  $\phi_u : E^{cs} \rightarrow E^u$  de clase  $C^1$ , esto es*

$$W^{cs} = \text{graph}(\phi_u),$$

y el espacio tangente a  $W^{cs}$  en el punto fijo  $p$  es el subespacio estable-central, es decir,

$$\mathbb{T}_p W^{cs} \cong E^{cs}.$$

Más aún, si  $f$  es de clase  $C^r$ , con  $1 \leq r < \infty$ , entonces  $\phi_u$  también es de clase  $C^r$ .

## 1.7. Teorema de la función implícita

En esta sección enunciaremos el teorema de la función implícita, el cual será utilizado más adelante en el desarrollo de este trabajo. La versión que presentamos aquí está basada en [MT].

**Teorema 1.7.1.** *Supongamos que  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $(x, z)$  donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}$ , suponiendo que  $(x_0, z_0)$  satisface*

$$F(x_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0,$$

entonces existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , una vecindad  $V$  de  $z_0$  en  $\mathbb{R}$  tal que existe una función única  $z = g(x)$  definida para  $x \in U$  y  $z \in V$  que satisface  $F(x, g(x)) = 0$ . Más aún, si  $x \in U$  y  $z \in V$  satisfacen  $F(x, z) = 0$ , entonces  $z = g(x)$ . Finalmente,  $z = g(x)$  es continuamente diferenciable, con la derivada dada por

$$Dg(x) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, z)} D_x F(x, z)|_{z=g(x)}$$

donde  $D_x F$  es la derivada parcial de  $F$  en  $x$ ,  $D_x F = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]$ , esto es

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

## 1.8. Conjugación topológica

En esta sección daremos la definición de conjugación, enunciaremos y demostraremos propiedades que serán utilizadas más adelante. La versión que presentamos aquí está basada en [R].

**Definición 1.8.1.** Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  un par de funciones. Las funciones  $f$  y  $g$  son topológicamente (difeomórficamente) conjugadas, si existe un homeomorfismo (difeomorfismo)  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

**Proposición 1.8.2.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$  conjugadas topológicamente por la función  $h$ .

- a) Si  $f$  tiene un punto periódico  $x_0$  de periodo  $n$ , entonces  $h(x_0)$  es un punto periódico de periodo  $n$  para  $g$ .
- b) Si  $h$  es un difeomorfismo y  $f$  tiene un punto periódico  $x_0$  de periodo  $n$ , entonces  $(f^n)'(x_0) = (g^n)'(h(x_0))$ .

**Demostración.** Primero, vamos a probar por inducción que  $h \circ f^n = g^n \circ h$ . Por hipótesis tenemos que  $h \circ f = g \circ h$ , es decir, es válido cuando  $n = 1$ . Además, observe que  $h \circ f = g \circ h \Rightarrow h^{-1} \circ h \circ f = h^{-1} \circ g \circ h \Rightarrow f = h^{-1} \circ g \circ h$ . Ahora, vamos a suponer que se vale para  $n$  y demostramos que se vale para  $n + 1$ . Es decir, suponemos que  $h \circ f^n = g^n \circ h \Rightarrow h^{-1} \circ h \circ f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h \Rightarrow f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ . Componemos con  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  por la derecha.

$$\begin{aligned} f^n \circ f &= h^{-1} \circ g^n \circ h \circ h^{-1} \circ g \circ h, \\ f^{n+1} &= h^{-1} \circ g^n \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^{n+1} \circ h. \end{aligned}$$

Componemos con  $h$  por la izquierda.

$$h \circ f^{n+1} = h \circ h^{-1} \circ g^{n+1} \circ h = g^{n+1} \circ h.$$

Por lo tanto, por inducción,  $h \circ f^n = g^n \circ h$  es válido para  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir  $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ . Ahora, para demostrar a) suponemos que  $f$  tiene un punto periódico  $x_0$  de periodo  $n$ , es decir  $f^n(x_0) = x_0$ , como  $h$  es una conjugación observe que

$$\begin{aligned} h(f^n(x_0)) &= g^n(h(x_0)), \\ h(x_0) &= g^n(h(x_0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $h(x_0)$  es un punto periódico de periodo  $n$  para  $g$ . Para demostrar b) derivamos a  $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$  en  $x_0$  y por la regla de la cadena y considerando  $h(x_0) = y_0$  tenemos que

$$\begin{aligned} Df^n(x_0) &= D(h^{-1} \circ g^n \circ h)(x_0) \\ &= Dh^{-1}(g^n(y_0)) \cdot Dg^n(y_0) \cdot Dh(x_0) \\ &= Dh^{-1}(y_0) \cdot Dg^n(y_0) \cdot Dh(x_0). \end{aligned}$$

Como  $h(x_0) = y_0$  y  $h$  es un difeomorfismo, entonces  $Dh^{-1}(y_0) = [Dh(x_0)]^{-1}$  y así

$$Df^n(x_0) = Dg^n(y_0).$$

Con esto terminamos la demostración. ■

Del inciso b) de la proposición anterior tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.8.3.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$ . Si  $f$  tiene un punto periódico  $x_0$  de periodo  $n$  y para cada punto periódico  $y_0$  de periodo  $n$  de  $g$  se cumple que  $(f^n)'(x_0) \neq (g^n)'(y_0)$ . Entonces  $f$  y  $g$  no son difeomórficamente conjugados.

**Ejemplo 1.8.4.** Considere la familia de polinomios cuadráticos  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Vamos a comprobar que  $P$  es conjugada de  $P_c = x^2 + c$  por la función  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ .

Primero vamos a verificar que  $\varphi$  es un difeomorfismo. Para empezar, observe que  $\varphi$  es diferenciable, por ser una función lineal, y por lo mismo es biyectiva. Su inversa es  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x - \beta}{\alpha}$  ya que

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = \alpha \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) + \beta = x - \beta + \beta = x$$

y

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \frac{(\alpha x + \beta) - \beta}{\alpha} = \frac{\alpha x}{\alpha} = x.$$

Como  $\varphi^{-1}$  también es una función lineal, igualmente es diferenciable.

Ahora, para comprobar que  $P$  y  $P_c$  son conjugados, resolvemos la ecuación

$$\varphi(P(x)) = P_c(\varphi(x))$$

de la cual obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= P_c(\alpha x + \beta) \\ \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta &= (\alpha x + \beta)^2 + c. \end{aligned}$$

Como la igualdad es entre polinomios, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha a_2 = \alpha^2, \tag{1.1}$$

$$\alpha a_1 = 2\alpha\beta, \tag{1.2}$$

$$\alpha a_0 + \beta = \beta^2 + c. \tag{1.3}$$

Como  $\alpha$  y  $a_2$  son diferentes de 0 se tiene que la única solución del sistema es

$$\begin{aligned} \alpha &= a_2, \\ \beta &= -\frac{a_1}{2}, \\ c &= \frac{1}{4}(2a_1 - a_1^2 + 4a_0a_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $P_c$  es conjugado a  $P$ .

---

## 2. Teoría de Bifurcación

---

En este capítulo vamos a considerar una familia de funciones  $f_\mu$  que depende de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . Cuando existe un parámetro  $\mu_0$  tal que un punto fijo o un punto periódico cambia su estabilidad al variar  $\mu$  en una vecindad de  $\mu_0$ , decimos que la familia  $f_\mu$  tiene una bifurcación en  $\mu_0$ . Existen varios tipos de bifurcaciones y en este trabajo, estudiaremos cinco de ellos, para los cuales, daremos su definición y las propiedades que la caracterizan, así como un ejemplo, junto a su respectivo diagrama de bifurcación. Los resultados que se presentan en este capítulo están basados en [R, P].

La primera bifurcación que presentaremos es la silla nodo, la cual ocurre cuando de un lado de  $\mu_0$ ,  $f_\mu$  tiene puntos fijos, y del otro lado no. Luego, tenemos a la bifurcación doblamiento de periodo; ésta ocurre cuando un punto fijo  $x_0$  de  $f_\mu$  atractor (repulsor) se vuelve repulsor (atractor) al pasar por  $\mu_0$ , pero aparece una órbita de periodo dos atractor (repulsora). Después, la bifurcación transcítica, la cual ocurre cuando  $f_\mu$  tiene dos puntos fijos para  $\mu \neq \mu_0$  y la estabilidad de estos puntos fijos se intercambia al pasar por  $\mu_0$ , donde ambos puntos coinciden. Finalmente, presentaremos la bifurcación tridente, en este caso, las funciones  $f_\mu$  tienen un único punto fijo atractor (repulsor), cuando estamos a un lado de  $\mu_0$  y del otro lado  $f_\mu$  tiene tres puntos fijos de los cuales dos son atractores (repulsores) y el otro es repulsor (atractor).

### 2.1. Bifurcación silla nodo

La primera bifurcación que consideramos es la bifurcación silla nodo, la cual ocurre cuando la función no es hipérbolica porque la derivada tiene un valor propio igual a 1.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^r$  en la variable  $x$  y el parámetro real  $\mu$  con  $r \geq 2$ . Denotaremos por  $f(x, \mu) = f_\mu(x)$ . Dadas las siguientes hipótesis:*

1.  $f_{\mu_0}(x_0) = x_0$ ,
2.  $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x_0) = 1$ ,
3.  $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x^2}(x_0) \neq 0$  y
4.  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ .

*Entonces existen intervalos  $I$  alrededor de  $x_0$ ,  $N$  alrededor de  $\mu_0$  y una función  $m : I \rightarrow N$  de clase  $C^r$  tal que (i)  $f_{m(x)}(x) = x$ , (ii)  $m(x_0) = \mu_0$ , y (iii) la gráfi-*

ca de  $m$  da todos los puntos fijos de  $f_\mu$  en  $I \times N$ . Además,  $m'(x_0) = 0$  y

$$m''(x_0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)} \neq 0.$$

Estos puntos fijos son atractores de un lado de  $x_0$  y repulsores en el otro. Además, de un lado de  $\mu_0$  existen puntos fijos y del otro no, véase la figura 2.1.

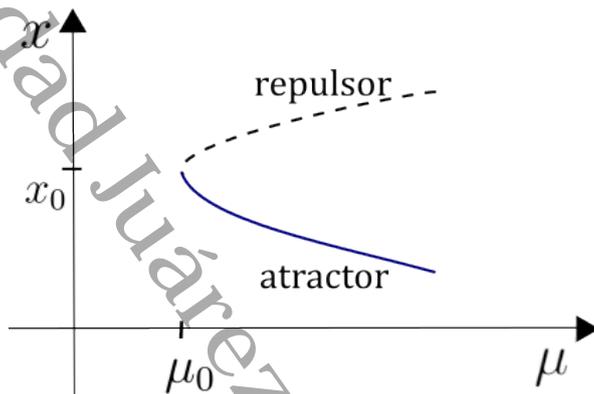


Figura 2.1: Diagrama de la bifurcación silla nodo.

De las hipótesis sabemos que  $f_{\mu_0}$  tiene un punto fijo en  $x_0$ , es decir, la gráfica de  $f_{\mu_0}$  interseca a la identidad en el punto. Además, como  $f'_{\mu_0}(x_0) = 1$ , la gráfica es tangente a la identidad, y como  $f''_{\mu_0}(x_0) \neq 0$ , entonces no la atraviesa. Finalmente, que  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$  garantiza que al mover el parámetro  $\mu$ , eventualmente la gráfica de  $f_{\mu_0}$  va a cruzar a la identidad, generando 2 puntos fijos.

La siguiente demostración está basada en [R].

**Demostración.** Considere la función

$$G(x, \mu) = f(x, \mu) - x,$$

y observe que los ceros de  $G$  son los puntos fijos de  $f_\mu$ . Por hipótesis,  $f(x_0, \mu_0) = x_0$ , por lo tanto,  $G(x_0, \mu_0) = f(x_0, \mu_0) - x_0 = x_0 - x_0 = 0$ . Queremos usar el teorema de la función implícita para encontrar los ceros cercanos a  $x_0$  en  $G$ . Note que  $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \mu_0) = f'_{\mu_0}(x_0) - 1 = 0$ , por lo tanto no podemos resolver para  $x$  en términos de  $\mu$ . Sin embargo  $\frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ , por lo tanto podemos resolver para  $\mu$  en términos de  $x$ . Por el teorema de la función implícita existen intervalos  $I$  alrededor de  $x_0$  y  $N$  alrededor de  $\mu_0$  y una función  $m : I \rightarrow N$  de clase  $C^r$  tal que  $G(x, m(x)) \equiv 0$ , y con esto todos los 0 de  $G$  están en  $I \times N$ , es decir, obtenemos todos los puntos fijos de  $f_\mu$  en  $I \times N$ . Para calcular las derivadas de  $m(x)$  usamos derivación implícita. Derivando

$0 = G(x, m(x))$  con respecto a  $x$ , obtenemos

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \mu} \cdot \frac{dm}{dx}.$$

Evaluando en  $x_0$ ,

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \cdot \frac{d}{dx}m(x_0).$$

Lo que implica que  $m'(x_0) = 0$ , ya que  $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0$  y  $\frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ .

Para obtener la segunda derivada de  $m$ , derivamos  $0 = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \mu} \cdot \frac{dm}{dx}$  respecto a  $x$  y obtenemos

$$0 = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial x} \frac{dm}{dx} + \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} \left( \frac{dm}{dx} \right)^2 + \frac{\partial G}{\partial \mu} \cdot \frac{d^2 m}{dx^2}.$$

Evaluamos en  $x_0$  y  $\mu_0$  y obtenemos

$$0 = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) \cdot \frac{d}{dx}m(x_0) + \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}(x_0, \mu_0) \left( \frac{d}{dx}m(x_0) \right)^2 + \frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \cdot \frac{d^2}{dx^2}m(x_0).$$

Usando que  $m'(x_0) = 0$ ,

$$0 = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \frac{d^2}{dx^2}m(x_0)$$

$$m''(x_0) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)}{\frac{\partial G}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)}.$$

Finalmente, para encontrar la estabilidad de los puntos fijos usamos la expansión de Taylor de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  alrededor de  $(x_0, \mu_0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \mu}(\mu - \mu_0)$$

$$+ O(|x - x_0|^2) + O(|x - x_0|) \cdot |\mu - \mu_0| + O(|\mu - \mu_0|^2).$$

Ya que  $m'(x_0) = 0$ , entonces,  $m(x) - \mu_0 = O(|x - x_0|^2)$ . Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, m(x)) = 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x_0, \mu_0)}(x_0, \mu_0)(x - x_0) + O(|\mu - \mu_0|^2).$$

Ya que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, m(x)) - 1$  tiene distintos signos en los dos lados de  $x_0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, m(x))$  es menor a uno en un lado y mayor que uno en el otro, por lo tanto,  $x_0$  es un punto atractor de un lado y un punto repulsor del otro. ■

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $P_c(x) = x^2 + c$  con  $x, c \in \mathbb{R}$  una familia de funciones. Para encontrar sus puntos fijos resolvemos

$$\begin{aligned} P_c(x) &= x, \\ x^2 - x + c &= 0, \\ x_{\pm} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}. \end{aligned}$$

No existen raíces reales si  $1 - 4c < 0$ , hay una si  $1 - 4c = 0$  y hay dos si  $1 - 4c > 0$ . Por lo tanto:

1. No hay puntos fijos si  $c > \frac{1}{4}$ .
2. Hay un punto fijo  $x = \frac{1}{2}$  cuando  $c = \frac{1}{4}$ .
3. Hay dos puntos fijos  $x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$  cuando  $c < \frac{1}{4}$ .

Además,  $\frac{\partial P_c}{\partial x}(x) = 2x$ , por lo tanto, si  $c = \frac{1}{4}$  y  $x = \frac{1}{2}$ , entonces  $\frac{\partial P_c}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ . Por otro lado,  $\frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$  y  $\frac{\partial P_c}{\partial c} = 1 \neq 0$ .

De esta manera, hemos verificado que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.1.1. Por lo tanto, la familia de funciones  $P_c(x) = x^2 + c$  tiene una bifurcación silla nodo en  $c = \frac{1}{4}$  y en el punto  $x = \frac{1}{2}$ .

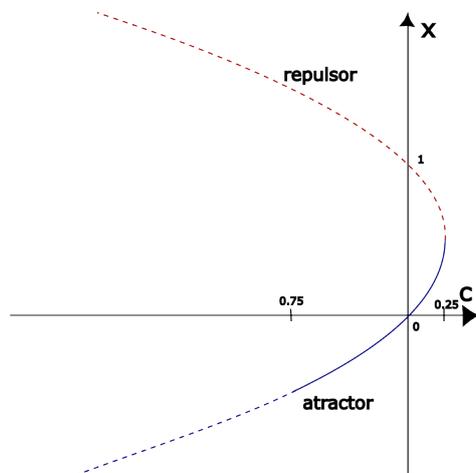


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones  $P_c(x) = x^2 + c$ .

## 2.2. Bifurcación silla nodo en varias dimensiones

Para llevar el teorema 2.1.1 a varias dimensiones, es necesario especificar la derivada de la función “coordenada” en la dirección del vector propio para el valor propio 1. Suponemos que 1 es un valor propio de la matriz jacobiana de  $f_\mu$  de multiplicidad uno. Sea  $\mathbf{v}^1$  el vector propio derecho (escrito como columna) y sea  $\mathbf{w}$  el vector propio izquierdo (escrito como renglón), es decir,  $D(f_{\mu_0})_{x_0} \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^1$  y  $\mathbf{w} D(f_{\mu_0})_{x_0} = \mathbf{w}$ . Si  $\mathbf{v}^j$ , con  $j = 2, \dots, n$  son los otros vectores propios generalizados, entonces  $\mathbf{w} \mathbf{v}^j = 0$  para  $j = 2, \dots, n$ . (El producto de  $\mathbf{w} \mathbf{v}^j$  es igual a 0, porque  $\mathbf{w} \mathbf{v}^j = (\mathbf{w} D(f_{\mu_0})_{x_0}) \mathbf{v}^j = \mathbf{w} (D(f_{\mu_0})_{x_0} \mathbf{v}^j) = \lambda_j \mathbf{w} \mathbf{v}^j \Rightarrow \mathbf{w} \mathbf{v}^j = \lambda_j \mathbf{w} \mathbf{v}^j$  con  $\lambda_j \neq 1 \Rightarrow \mathbf{w} \mathbf{v}^j = 0$ ). Ahora podemos usar a  $\mathbf{w} f_\mu(x)$  como la componente de  $f_\mu(x)$  en la dirección de  $\mathbf{v}^1$ .

**Teorema 2.2.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^2$  en todas sus variables y  $f_\mu(x) = f(x, \mu)$ . Supongamos que  $f_\mu$  cumple las siguientes condiciones:

- (1) La función  $f$  tiene un punto fijo en  $\mu_0$ , es decir,  $f(x_0, \mu_0) = x_0$ ,
- (2)  $D(f_{\mu_0})_{x_0}$  tiene como valores propios a  $\lambda_1 = 1$  y  $|\lambda_j| \neq 1$  para  $j = 2, 3, \dots, n$ . Sea  $\mathbf{v}^1$  el vector propio derecho para el valor propio 1 de  $D(f_{\mu_0})_{x_0}$  y  $\mathbf{w}$  el vector propio izquierdo para el valor propio 1,
- (3)  $\mathbf{w}[D^2(f_{\mu_0})_{x_0}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1)] \neq 0$ , y
- (4)  $\mathbf{w} \left( \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \right) \neq 0$ .

Entonces, es posible parametrizar  $\mu = m(s)$  y  $x = q(s)$  tales que  $m(0) = \mu_0$ ,  $q(0) = x_0$ ,  $q'(0) = \mathbf{v}^1$  y  $f(q(s), m(s)) \equiv q(s)$ .

*Observación 2.2.2.* Es posible hacer un cambio de base tal que

$$D(f_{\mu_0})_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

donde los términos escritos como “\*” no están especificados. En términos de esta base, los vectores propios izquierdos satisfacen  $\mathbf{w} = (1, 0, \dots, 0) = (\mathbf{v}^1)^t$ . Por lo tanto, en términos de esta base, la condición (3) del teorema 2.2.1 se traduce en  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0, \mu_0) \neq 0$

y la condición (4) en  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ .

*Observación 2.2.3.* Si  $n = 2$ ,  $|\lambda_2| < 1$  y las derivadas de las condiciones (3) y (4) son de signos contrarios, entonces uno de los puntos fijos que aparece es atractor (punto fijo con dos valores propios de módulo menor que 1) y el otro es un punto silla (un valor propio es de módulo menor que 1 y el otro es de módulo mayor que 1). De ahí el nombre de la bifurcación.

*Observación 2.2.4.* Se puede hacer la demostración de dos maneras. Una usa el teorema de la variedad central asociada a  $F(x, \mu) = (f_\mu(x), \mu)$  la cual tiene dos dimensiones, una dimensión espacial y una del parámetro. La restricción de  $F$  a esta variedad invariante satisface las suposiciones del teorema.

La segunda aproximación usa el Teorema de la Función Implícita para la reducción de dimensiones. Este método no produce una variedad invariante bidimensional, pero produce un conjunto de dos dimensiones en donde se encuentran todos los puntos fijos. Este método usualmente es llamado la reducción Liapunov-Schmidt.

Vamos a presentar la demostración usando el Teorema de la Variedad Central basada en [R].

**Demostración del teorema 2.2.1.** Definimos la función  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por  $F(x, \mu) = (f(x, \mu), \mu)$  cuya derivada está dada de la siguiente forma en bloques

$$D(F_{\mu_0})_{x_0} = \begin{pmatrix} D(f_{\mu_0})_{x_0} & \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escogemos los vectores propios de  $D(F_{\mu_0})_{x_0}$  tales que  $|\mathbf{v}^1| = 1$ ,  $|\mathbf{w}| = 1$  y  $\mathbf{w}\mathbf{v}^1 = 1$ . Hagamos un cambio de base a los vectores propios de  $D(f_{\mu_0})_{x_0}$ ; en estas coordenadas los vectores propios de  $D(f_{\mu_0})_{x_0}$  son la base estándar. Entonces  $\mathbf{w} = (1, 0, \dots, 0)$  y  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{w}^t$ . La dirección central en  $(x_0, \mu_0)$  para  $F$  incluye las direcciones de  $\mathbf{v}^1$  y de  $\mu$ . Por el Teorema de la Variedad Central, podemos resolver para una variedad invariante  $x = \varphi(s, \mu)$ , la cual es la gráfica sobre el generado de  $\mathbf{v}^1$  y la variable  $\mu$ . (La variedad central total está caracterizada por  $(x, \mu) = (\varphi(s, \mu), \mu)$ .) El parámetro  $s$  se puede escoger tal que  $\varphi(0, \mu_0) = x_0$  y  $\mathbf{w}[\varphi(s, \mu) - x_0] = s$  donde  $\mathbf{w}\mathbf{z}$  es la proyección del vector  $\mathbf{z}$  en la dirección del vector  $\mathbf{v}^1$ . Como la superficie dada por la imagen de  $\varphi$  es tangente a  $\mathbf{v}^1$ , entonces  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, \mu_0) = \mathbf{v}^1$ . Además, de estas propiedades de  $\varphi$ , derivando  $\mathbf{w}[\varphi(s, \mu) - x_0] = s$  primero con respecto a  $\mu$  y luego dos veces con respecto a  $s$ , se sigue que

$$\mathbf{w} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(0, \mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{w} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0) = 0.$$

Definimos

$$g(s, \mu) = \mathbf{w}[f(\varphi(s, \mu), \mu) - x_0],$$

que es la proyección sobre el generado de  $\mathbf{v}^1$  de la diferencia de la iterada de  $x_0$ . Como queremos aplicar el Teorema de Bifurcación Silla-Nodo en una dimensión. Vamos a revisar las condiciones del teorema 2.1.1 en una dimensión para  $g$ :

$$g(0, \mu_0) = \mathbf{w}[x_0 - x_0] = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, \mu) = \mathbf{w} \left[ D(f_{\mu})_{\varphi(s, \mu)} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, \mu) \right], \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0, \mu_0) = \mathbf{w}[D(f_{\mu_0})_{x_0}v^1] = \mathbf{w}\mathbf{v}^1 = 1.$$

Estas son las dos primeras condiciones para una bifurcación Silla-Nodo para  $g$ . Derivando nuevamente,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(s, \mu) = \mathbf{w} \left[ D^2(f_{\mu})_{\varphi(s, \mu)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, \mu), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, \mu) \right) + D(f_{\mu})_{\varphi(s, \mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s, \mu) \right]$$

y evaluando en  $(0, \mu_0)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(0, \mu_0) = \mathbf{w} \left[ D^2(f_{\mu_0})_{x_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, \mu_0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, \mu_0) \right) + D(f_{\mu_0})_{x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0) \right].$$

Mencionamos antes que  $\mathbf{w} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0) = 0$ , entonces

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0) \text{ y } D(f_{\mu_0})_{x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0)$$

toman sus valores en el generado de  $\mathbf{v}^2$  hacia  $\mathbf{v}^n$ , y  $\mathbf{w}D(f_{\mu_0})_{x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, \mu_0) = 0$ . De aquí tenemos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(0, \mu_0) = \mathbf{w}D^2(f_{\mu_0})_{x_0}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1),$$

el cual es distinto de cero por hipótesis. Finalmente,

$$\frac{\partial g}{\partial \mu}(s, \mu) = \mathbf{w} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mu}(\varphi(s, \mu), \mu) + D(f_{\mu})_{\varphi(s, \mu)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(s, \mu) \right],$$

y evaluando en  $(0, \mu_0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \mu}(0, \mu_0) &= \mathbf{w} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) + D(f_{\mu_0})_{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(0, \mu_0) \right] \\ &= \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0, \end{aligned}$$

nuevamente por hipótesis. El segundo término es cero porque  $\mathbf{w} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(0, \mu_0) = 0$ .

Con lo anterior mostramos que se cumplen las condiciones del teorema 2.1.1 en una dimensión para  $g$ , por lo tanto podemos resolver para  $\mu = m(s)$  tal que  $g(s, m(s)) = s$ .

Además,  $m'(0) = 0$  y

$$\begin{aligned} m''(0) &= -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(0, \mu_0)}{\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, \mu_0)} \\ &= -\frac{\mathbf{w}D^2(f_{\mu_0})_{x_0}(v^1, v^1)}{\mathbf{w}\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Ahora, vamos a verificar si esta función da el conjunto de puntos fijos que queremos. Primero

$$\mathbf{w}[f(\varphi(s, m(s)), m(s)) - x_0] = s = \mathbf{w}[\varphi(s, m(s)) - x_0].$$

Ambos  $(f(\varphi(s, m(s)), m(s)))$  y  $(\varphi(s, m(s)), m(s))$  están en la variedad central y tienen la misma componente en  $\mathbf{v}^1$  y  $\mu$ . Por lo tanto son iguales, y

$$f(\varphi(s, m(s)), m(s)) = \varphi(s, m(s)).$$

Haciendo  $q(s) = \varphi(s, m(s))$ , tenemos la conclusión del teorema. ■

**Ejemplo 2.2.5.** Sea  $F_{AB}(x, y) = (A - By - x^2, x)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , la familia de funciones de Hénon. Para encontrar sus puntos fijos resolvemos

$$\begin{aligned} F_{AB}(x, y) &= (x, y), \\ (A - By - x^2, x) &= (x, y), \\ x = y &= -\frac{B+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos fijos son:

$$(x_0, y_0) = \left( -\frac{B+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A}, -\frac{B+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A} \right),$$

y

$$(x_1, y_1) = \left( -\frac{B+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A}, -\frac{B+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A} \right).$$

No existen raíces reales si  $\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A < 0$ , hay una si  $\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A = 0$  y hay dos si  $\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 + A > 0$ . Por lo tanto:

- (1) No hay puntos fijos cuando  $A < -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ .
- (2) Hay un punto fijo cuando  $A = -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ .
- (3) Hay dos cuando  $A > -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ .

En consecuencia, la familia  $F_{AB}$  pasa de no tener puntos fijos cuando  $A < -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ , a tener uno cuando  $A = -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$  y luego dos cuando  $A > -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ , por lo que verificaremos que se cumplen las condiciones del teorema 2.2.1 y mostraremos que la familia de funciones  $F_{AB}$  tiene una bifurcación Silla-Nodo cuando  $A = -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$  y el punto fijo es  $(x_0, y_0) = \left(-\frac{B+1}{2}, -\frac{B+1}{2}\right)$ .

La derivada de  $F_{AB}$  está dada por

$$D(F_{AB})(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -B \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual tiene como valores propios a  $\lambda_{\pm} = -x \pm \sqrt{x^2 - B}$ .

Cuando  $A = A_0 = -\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ , entonces solo hay un punto fijo  $\left(-\frac{B+1}{2}, -\frac{B+1}{2}\right)$  y los valores propios de  $DF_{AB}$  son  $\lambda_1 = B$  y  $\lambda_2 = 1$ .

El vector propio derecho correspondiente a  $\lambda_2 = 1$  es  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , donde  $v_1 = v_2$ , con

$v_1 \in \mathbb{R}$ , así que podemos escoger  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . El vector propio izquierdo  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , satisface  $w_2 = -w_1 B$  con  $w_1 \in \mathbb{R}$ , así que podemos escoger  $\mathbf{w} = (1, -B)$ .

Evaluando las expresiones de las condiciones (3) y (4) del teorema 2.2.1 obtenemos que

$$\mathbf{w}[D^2(F_{A_0 B})(x_0, y_0)(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^1)] = (1, -B) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Por otro lado,  $\mathbf{w} \left( \frac{\partial F}{\partial A}(x_0, y_0, A_0) \right) = (1, -B) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ .

## 2.3. Bifurcación doblamiento de periodo

En esta sección enunciaremos el teorema de bifurcación doblamiento de periodo. La versión que presentamos está basada en [R].

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $f_{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^r$  en la variable  $x$  y el parámetro  $\mu$  real con  $r \geq 3$ . Dadas las siguientes hipótesis:*

- (1) El punto  $x_0$  es un punto fijo para  $\mu = \mu_0$ , es decir,  $f_{\mu_0}(x_0) = x_0$ ,
- (2)  $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x_0) = -1$ . Como esta derivada es distinta de uno, hay una curva de puntos fijos  $x(\mu)$  para  $\mu$  cercanos a  $\mu_0$ .
- (3) La derivada de  $f'_\mu(x(\mu))$  con respecto a  $\mu$  es distinta de cero (la derivada varía a lo largo de la familia de puntos fijos):

$$\hat{\alpha} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x} + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \right]_{(x_0, \mu_0)} \neq 0.$$

- (4) La gráfica de  $f_{\mu_0}^2$  tiene un término cúbico distinto de cero en su tangencia con la diagonal (el término cuadrático es cero y el primer término de la serie de Taylor es cúbico):

$$\hat{\beta} = \left( \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) \right) + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \right)^2 \neq 0.$$

Entonces hay una bifurcación doblamiento de periodo en  $(x_0, \mu_0)$ . Más específicamente, hay una curva diferenciable de puntos fijos,  $x(\mu)$ , pasando por  $x_0$  en  $\mu_0$ , y la estabilidad del punto fijo cambia en  $\mu_0$  (el lado de  $\mu_0$  donde  $x_0$  es atractor depende del signo de  $\hat{\alpha}$ ). Además hay una curva diferenciable  $\gamma$  que pasa por  $(x_0, \mu_0)$  tal que  $\gamma \setminus (x_0, \mu_0)$  es la unión de órbitas hiperbólicas de periodo 2. La curva  $\gamma$  es tangente a la línea  $\mathbb{R} \times \{\mu_0\}$  en  $(x_0, \mu_0)$ , así que  $\gamma$  es la gráfica de una función de  $x$ ,  $\mu = m(x)$  con  $m'(x) = 0$  y  $m''(x_0) = \frac{-2\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \neq 0$ . El tipo de estabilidad de la órbita de periodo dos depende del signo de  $\hat{\beta}$ , si  $\hat{\beta} > 0$  entonces la órbita de periodo dos es atractora, y si  $\hat{\beta} < 0$  entonces la órbita de periodo dos es repulsora.

La demostración de este teorema la escribimos basándonos en [R].

**Demostración.** Por hipótesis,  $f'_{\mu_0}(x_0) \neq 1$ , por el teorema de la función implícita hay una curva de puntos fijos parametrizada por  $\mu$ ,  $x(\mu)$ . Más aún,

$$\begin{aligned} x'(\mu_0) &= - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) - 1 \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0). \end{aligned}$$

Hacemos un traslado de coordenadas tal que 0 sea un punto fijo para  $\mu$  cercano a  $\mu_0$ , así que definimos

$$g(y, \mu) = f_\mu(y + x(\mu)) - x(\mu).$$

Así,  $g(0, \mu) \equiv 0$ . Escribimos  $g^2(y, \mu)$ , lo cual significa  $g(\cdot, \mu) \circ g(y, \mu)$ . La derivada parcial de  $g$  respecto a  $y$  es la misma que la parcial de  $f$  respecto a  $x$  en los puntos correspondientes,

$$\frac{\partial^j g}{\partial y^j}(0, \mu) = \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x(\mu), \mu).$$

Como el valor de la derivada parcial con respecto a la posición,  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, \mu)$ , determina la estabilidad del punto fijo, entonces  $\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial y}(0, \mu)$  mide el cambio alrededor de la curva de puntos fijos, y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu)|_{\mu=\mu_0} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)x'(\mu_0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\ &= \hat{\alpha} \neq 0. \end{aligned}$$

Este cálculo muestra que  $\hat{\alpha}$  describe la cantidad descrita en el planteamiento del teorema.

Sea  $a_j$  el coeficiente de  $y^j$  en la expansión de Taylor de  $g$  alrededor de  $y = 0$ , entonces

$$g(y, \mu) = a_1(\mu)y + a_2(\mu)y^2 + a_3(\mu)y^3 + O(y^4).$$

Calculamos la expansión de Taylor de  $g^2$  alrededor de  $y = 0$  y obtenemos

$$g^2(y, \mu) = a_1^2 y + (a_1 a_2 + a_2 a_1^2) y^2 + (a_1 a_3 + 2a_1 a_2^2 + a_3 a_1^3) y^3 + O(y^4).$$

donde mostramos la dependencia que tiene el coeficiente  $a_j$  de  $\mu$ . Queremos encontrar puntos donde  $g^2(y, \mu) - y = 0$ , que sean distintos del 0. Dado que  $y = 0$  es siempre una solución, separamos los casos cuando  $y = 0$  y cuando  $y \neq 0$ . Así que definimos

$$M(y, \mu) = \begin{cases} \frac{g^2(y, \mu) - y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(g^2(y, \mu))|_{y=0} - 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Note que la definición para  $y = 0$  es la extensión natural de la definición para  $y \neq 0$ , ya que está usando la definición de derivada. Usando la expansión de  $g^2$ ,

$$M(y, \mu) = (a_1^2 - 1) + (a_1 a_2 + a_2 a_1^2)y + (a_1 a_3 + 2a_1 a_2^2 + a_3 a_1^3)y^2 + O(y^3).$$

Note que  $M(0, \mu_0) = 0$ . Además

$$\frac{\partial M}{\partial y}(0, \mu_0) = a_1 a_2 + a_2 a_1^2|_{\mu_0} = -a_2(\mu_0) + a_2(\mu_0) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}(0, \mu)|_{\mu_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial g}{\partial y}(0, \mu) \right) |_{\mu_0} \\ &= 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, \mu) \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0) \\ &= -2\hat{\alpha} \neq 0. \end{aligned}$$

Ya que  $\frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0) \neq 0$ , del Teorema de la Función Implícita y resolvemos para  $\mu$  en términos de  $y$ . Ahora, existe una función diferenciable  $m(y)$  tal que  $M(y, m(y)) \equiv 0$ .

Por diferenciación implícita,  $0 = \frac{\partial M}{\partial y}(0, \mu_0) + \frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0)m'(0)$ , por lo tanto,

$$m'(0) = \frac{-\frac{\partial M}{\partial y}(0, \mu_0)}{\frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0)} = 0.$$

Para calcular la segunda derivada de  $m(y)$ , derivamos nuevamente la ecuación  $0 = \frac{\partial M}{\partial y}(y, m(y)) + \frac{\partial M}{\partial \mu}(y, m(y))m'(y)$  :

$$0 = \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial \mu}m'(y) + \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}(m'(y))^2 + \frac{\partial M}{\partial \mu}m''(y).$$

Evaluamos en  $y = 0$ , donde  $m'(0) = 0$ , entonces

$$0 = \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}(0, \mu_0) + 2\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial \mu}(0, \mu_0)m'(0) + \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}(0, \mu_0)(m'(0))^2 + \frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0)m''(0),$$

$$m''(0) = \frac{-\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}(0, \mu_0)}{\frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0)}.$$

Por lo tanto, necesitamos calcular el numerador,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}(0, \mu_0) &= 2(a_1 a_3 + 2a_1 a_2^2 + a_3 a_1^3)|_{\mu_0} \\ &= 2(-a_3 - 2a_2^2 - a_3)|_{\mu_0} = -4(a_3 + a_2^2)|_{\mu_0} \\ &= -4\hat{\beta} \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$m''(0) = \frac{4\hat{\beta}}{-2\hat{\alpha}} = -\frac{2\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \neq 0.$$

Ahora, solo queda revisar la estabilidad de la órbita de periodo dos. Para esto, usamos la expansión de Taylor de  $\frac{\partial(g^2)}{\partial y}(y, m(y))$  alrededor de  $y = 0$  y  $\mu = \mu_0$ :

$$\frac{\partial(g^2)}{\partial y}(y, \mu) = \frac{\partial(g^2)}{\partial y}(0, \mu_0) + \frac{\partial^2(g^2)}{\partial y^2}(0, \mu_0)y + \frac{\partial^2(g^2)}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0)(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3(g^2)}{\partial y^3}(0, \mu_0)y^2 + \dots$$

Ya hemos calculado varios de estos coeficientes:

$$\frac{\partial(g^2)}{\partial y}(0, \mu_0) = (-1)^2 = 1,$$

(por regla de la cadena),

$$\frac{\partial^2(g^2)}{\partial y^2}(0, \mu_0) = 0.$$

Como se observó cuando se calculaba  $\frac{\partial M}{\partial y}(0, \mu_0)$ , y

$$\frac{\partial^2(g^2)}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial \mu}(0, \mu_0) = -2\hat{\alpha},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(g^2)}{\partial \mu \partial y}(0, \mu_0)(m(y) - \mu_0) &= \frac{\partial M}{\partial \mu} \frac{1}{2} m''(0) y^2 + O(y^3) \\ &= \frac{\partial M}{\partial \mu} \frac{1}{2} \left( \frac{-\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}}{\frac{\partial M}{\partial \mu}} \right) y^2 \\ &= 2\hat{\beta} y^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3(g^2)}{\partial y^3}(0, \mu_0) = \left(\frac{1}{2}\right) 6(a_1 a_3 + 2a_1 a_2^2 + a_3 a_1^3) = -6\hat{\beta}.$$

Combinando estos términos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g^2)}{\partial y}(y, m(y)) &= 1 + 2\hat{\beta} y^2 - 6\hat{\beta} y^2 + O(y^3) \\ &= 1 - 4\hat{\beta} y^2 + O(y^3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\hat{\beta} > 0$  la órbita de periodo 2 es atractora, y si  $\hat{\beta} < 0$  entonces es repulsora. Con esto, ya hemos terminado de revisar todas las condiciones del teorema. ■

**Ejemplo 2.3.2.** Sea  $P_c(x) = x^2 + c$  con  $x, c \in \mathbb{R}$  una familia de funciones. Por el ejemplo 2.1.2 sabemos que sus puntos fijos son:

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Para verificar cuándo ocurre el cambio de estabilidad, calculamos cuando  $|P'_c(x)|$  pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1. Primero, observe que

$$P'_c(x) = 2x.$$

Por otra parte,

$$|P'_c(x_{\pm})| = |1 \pm \sqrt{1 - 4c}|$$

siempre que  $1 - 4c > 0$ , que es la condición para que existan los puntos fijos. De esto obtenemos los siguientes resultados:

1.  $|P'_c(x_+)| = |1 + \sqrt{1 - 4c}| > 1$  para  $c < \frac{1}{4}$ , es decir, el punto  $x_+$  siempre es repulsor.
2.  $|P'_c(x_+)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$  si  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ , en ese intervalo, el punto fijo  $x_-$  es atractor.
3.  $|P'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2})| = |-1| = 1$  es decir, el punto fijo  $x = -\frac{1}{2}$  es indiferente cuando  $c = -\frac{3}{4}$ .
4.  $|P'_c(x_-)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| > 1$  si  $c < -\frac{3}{4}$ , y el punto fijo es repulsor.

Ahora, para encontrar la órbita de periodo dos, resolvemos

$$P_c^2(x) = x(x^2 + c)^2 = x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0.$$

Sin considerar los puntos fijos, tenemos que

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4c}}{2}$$

son las soluciones de la ecuación anterior y en consecuencia son los puntos periódicos de periodo dos de  $P_c^2$ . Para ver cuándo la órbita es atractor, necesitamos verificar cuando  $|(P_c^2)'(x_1)| < 1$ , así que evaluamos

$$(P_c^2)'(x_1) = P'_c(x_1) \cdot P'_c(x_2) = (-1 + \sqrt{-3 - 4c}) \cdot (-1 - \sqrt{-3 - 4c}) = 1 + 3 + 4c = 4c + 4$$

Lo que significa que

1. La órbita de periodo dos es atractor cuando  $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$ .
2. La órbita de periodo dos es repulsora cuando  $c < -\frac{5}{4}$ .

Ahora, comprobamos las hipótesis del teorema y observe que

1.  $\frac{\partial P_c}{\partial x} \left( -\frac{1}{2} \right) = -1$ .
2.  $\hat{\alpha} = \left[ \frac{\partial^2 P_c}{\partial c \partial x} \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial P_c}{\partial c} \right) \left( \frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \right]_{c=-\frac{3}{4}} = 1 \neq 0$ .
3.  $\hat{\beta} = \left[ \left( \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P_c}{\partial x^3} \left( -\frac{1}{2} \right) \right) + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2} \left( -\frac{1}{2} \right) \right)^2 \right]_{c=-\frac{3}{4}} = 1 \neq 0$ .

Con estas tres condiciones hemos verificado que la familia  $P_c(x)$  satisface las hipótesis del teorema 2.3.1, por lo que presenta una bifurcación doblamiento de periodo en  $c = -\frac{3}{4}$ . Además, mostramos que en ese valor del parámetro el punto fijo cambia de estabilidad y aparece una órbita periódica atractor de periodo dos. En la figura 2.3 mostramos el diagrama de bifurcación de la familia  $P_c(x) = x^2 + c$  y puede observarse la bifurcación silla-nodo en  $c = 0.25$  y una bifurcación doblamiento de periodo en  $c = -0.75$ .

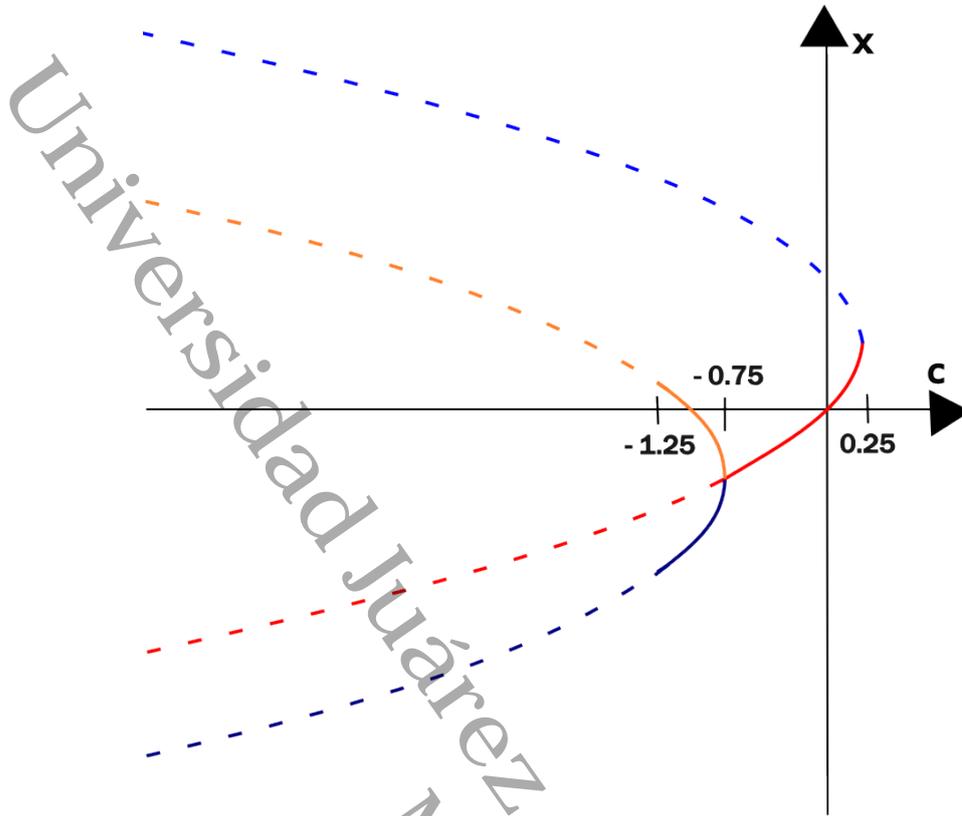


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación de la familia de funciones  $P_c(x) = x^2 + c$ .

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $\psi_\mu(x) = \mu x + x^2$  con  $x, \mu \in \mathbb{R}$  una familia de funciones. Para encontrar sus puntos fijos resolvemos:

$$\begin{aligned}\psi_\mu(x) &= x, \\ x^2 + \mu x - x &= 0, \\ x_0 = 0 \text{ ó } x_\mu &= 1 - \mu.\end{aligned}$$

Para verificar cuándo ocurre el cambio de estabilidad calculamos cuando  $|\psi'_\mu(x)|$  pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1. Primero, observe que

$$\begin{aligned}\psi'_\mu(x) &= 2x + \mu \\ |\psi'_\mu(0)| &= |\mu| \text{ y } |\psi'_\mu(1 - \mu)| = |2 - \mu|.\end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos los siguientes resultados.

1. Dado que  $|\psi'_\mu(0)| = |\mu|$  el punto fijo  $x_0 = 0$  es atractor cuando  $|\mu| < 1$  y es repulsor cuando  $|\mu| > 1$ .
2.  $|\psi'_{-1}(0)| = |-1| = 1$ , es decir, el punto  $x_0 = 0$  es indiferente cuando  $\mu = -1$ .
3. Ya que  $|\psi'_\mu(1 - \mu)| = |2 - \mu|$ , ésta es menor que 1, si  $1 < \mu < 3$  y en consecuencia en ese intervalo el punto fijo  $x_\mu$  es atractor.
4.  $|\psi'_3(-2)| = |2 - 3| = |-1| = 1$  es decir, el punto fijo  $x_\mu = -2$  es indiferente cuando  $\mu = 3$ .

5. Como  $|\psi'_\mu(1 - \mu)| = |2 - \mu|$ , esta derivada es mayor que 1, si  $\mu > 3$  o  $\mu < 1$ , en consecuencia en la unión de estos intervalos el punto fijo  $x_\mu$  es repulsor.

Ahora, para encontrar la órbita de periodo dos, resolvemos

$$\begin{aligned}\psi_\mu^2(x) &= x, \\ (x^2 + \mu x)^2 + \mu(x^2 + \mu x) &= x, \\ x^4 + x^2\mu + 2x^3\mu + x\mu^2 + x^2\mu^2 - x &= 0.\end{aligned}$$

Quitando las soluciones que corresponden a los puntos fijos nos queda un polinomio de grado dos, cuyas raíces son

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \mu \pm \sqrt{-3 - 2\mu + \mu^2}}{2}$$

los cuales son puntos periódicos de periodo dos siempre que  $-3 - 2\mu + \mu^2 > 0$ , lo cual ocurre cuando  $\mu \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ . Esto significa que no hay puntos periódicos de periodo dos cuando  $\mu \in (-1, 3)$ . Para ver cuándo la órbita es atractora, debemos verificar cuando  $|(\psi_\mu^2)'(x_1)| < 1$ , así que evaluamos

$$\begin{aligned}(\psi_\mu^2)'(x_1) &= \psi'_\mu(x_1) \cdot \psi'_\mu(x_2) = (-1 + \sqrt{-3 - 2\mu + \mu^2})(-1 - \sqrt{-3 - 2\mu + \mu^2}) \\ &= 4 + 2\mu - \mu^2.\end{aligned}$$

Resolviendo la desigualdad  $|4 + 2\mu - \mu^2| < 1$ , obtenemos que la órbita de periodo dos es atractora cuando  $\mu \in (1 - \sqrt{6}, -1) \cup (3, 1 + \sqrt{6})$  y es repulsora cuando  $\mu \in (-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1 + \sqrt{6}, \infty)$ .

Ahora, comprobamos las hipótesis del teorema 2.3.1, en  $\mu = -1$  y  $x_0 = 0$

1.  $\frac{\partial \psi_{-1}}{\partial x}(0) = -1$ .
2.  $\hat{\alpha}_1 = \left[ \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial \mu \partial x}(0) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial \mu}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x^2}\right)(0) \right]_{\mu=-1} = 1 \neq 0$ .
3.  $\hat{\beta}_1 = \left[ \left(\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi_\mu}{\partial x^3}(0)\right) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x^2}(0)\right)^2 \right]_{\mu=-1} = 1 \neq 0$ .

De igual manera verificamos que estas hipótesis se cumplen para  $\mu = 3$  y  $x_0 = -2$ .

1.  $\frac{\partial \psi_3}{\partial x}(-2) = -1$ .
2.  $\hat{\alpha}_2 = \left[ \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial \mu \partial x}(-2) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial \mu}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x^2}\right)(-2) \right]_{\mu=3} = -1 \neq 0$ .
3.  $\hat{\beta}_2 = \left[ \left(\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi_\mu}{\partial x^3}((-2))\right) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi_\mu}{\partial x^2}((-2))\right)^2 \right]_{\mu=3} = 1 \neq 0$ .

Con esto hemos verificado que la familia  $\psi_\mu(x)$  satisface el teorema 2.3.1 en  $\mu = -1$  con  $x = 0$  y en  $\mu = 3$  con  $x = -2$ , por lo que la familia presenta una bifurcación de periodo en estos valores del parámetro  $\mu$  parámetros. Además, mostramos que en estos valores del parámetro el punto fijo correspondiente cambia de estabilidad y aparece una órbita periódica atractora de periodo dos, véase la figura 2.4.

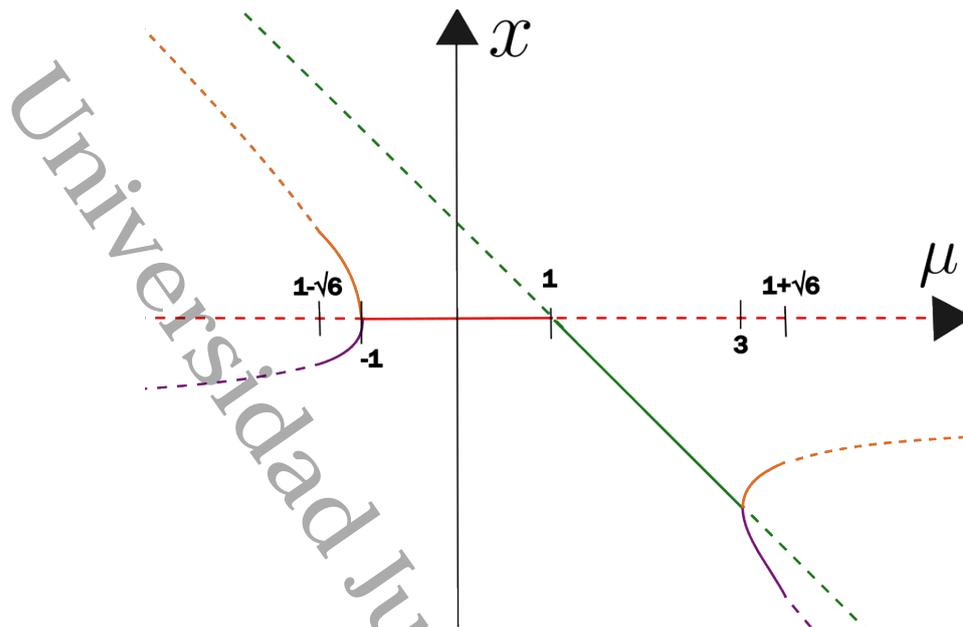


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación doblamiento de periodo de la familia  $\psi_\mu(x) = \mu x + x^2$ .

## 2.4. Bifurcación transcítica

Esta bifurcación ocurre cuando de un lado de  $\mu_0$  tenemos un punto fijo atractor  $x_1$  y un punto fijo repulsor  $x_2$ , luego en  $\mu_0$  ambos puntos colapsan en uno solo y al otro lado de  $\mu_0$  cambian de polaridad, es decir,  $x_1$  se vuelve repulsor y  $x_2$  se vuelve atractor. A continuación enunciamos el teorema y presentamos un ejemplo.

**Teorema 2.4.1.** Sea  $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^r$  en la variable  $x$  y el parámetro  $\mu$  con  $r \geq 2$ . Dadas las siguientes hipótesis:

- (1)  $f_{\mu_0}(x_0) = x_0$ ,
- (2)  $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x_0) = 1$ ,
- (3)  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0$ ,
- (4)  $\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) \neq 0$  y
- (5)  $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x^2}(x_0) \neq 0$ .

Entonces  $f$  tiene una bifurcación transcítica en el punto  $(x_0, \mu_0)$ .

**Ejemplo 2.4.2.** Sea  $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  con  $x, \mu \in \mathbb{R}$  una familia de funciones. Para encontrar sus puntos fijos resolvemos

$$G_\mu(x) = x,$$

$$\mu x(1 - x) - x = 0,$$

$$x_0 = 0 \text{ ó } x_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Verificamos cuando ocurre el cambio de estabilidad analizando cuando  $G'_\mu(x)$  pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1. Primero observe que

$$G'_\mu(x) = \mu(1 - 2x),$$

$$|G'_\mu(x_0)| = |\mu| \text{ y } |G'_\mu(x_\mu)| = |2 - \mu|.$$

Por lo tanto:

1.  $|G'_\mu(x_0)| = |\mu| < 1$  si  $-1 < \mu < 1$  y el punto fijo  $x_0$  es atractor.
2.  $|G'_\mu(x_\mu)| = |2 - \mu| > 1$  si  $0 < \mu < 1$ .
3.  $|G'_1(x_0)| = 1$  y el punto fijo es indiferente. Note que cuando  $\mu = 1$ , tenemos que  $x_\mu = x_0$ .
4.  $|G'_\mu(x_0)| = |\mu| > 1$  cuando  $|\mu| > 1$  y el punto fijo  $x_0$  es repulsor.
5.  $|G'_\mu(x_\mu)| = |2 - \mu| < 1$  si  $1 < \mu < 3$  y el punto fijo  $x_\mu$  es atractor.

Además, observe que  $\frac{\partial G_0}{\partial x}(1) = 1$ ,  $\frac{\partial G_0}{\partial \mu}(1) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 G_0}{\partial \mu \partial x}(1) = 1 \neq 0$  y  $\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}(1) = -2 \neq 0$ .

De esta manera hemos comprobado que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.4.1 por lo tanto, la familia  $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  tiene una bifurcación transcítica cuando  $x = 0$  y  $\mu_0 = 1$ .

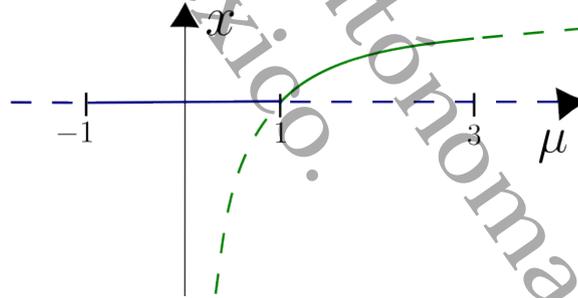


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación transcítica en la familia de funciones  $G_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ .

**Ejemplo 2.4.3.** La familia  $\psi_\mu(x) = \mu x + x^2$  con  $x, \mu \in \mathbb{R}$  presenta una bifurcación transcítica en  $\mu = 1$ . En el ejemplo 2.3.3 analizamos el cambio de estabilidad de la derivada, así que ahora solamente vamos a comprobar que se cumplen las condiciones del teorema 2.4.1 para  $x = 0$  y  $\mu = 1$ . Para esto, observamos que  $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0) = 1$ ,  $\frac{\partial \psi_1}{\partial \mu}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \mu \partial x}(0) = 1 \neq 0$  y  $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}(0) = 2 \neq 0$ . En la figura 2.4 mostramos, además de la bifurcación doblamiento de periodo, la bifurcación transcítica en  $\mu = 1$ .

## 2.5. Bifurcación tridente

Esta bifurcación ocurre cuando de un lado de  $\mu_0$  tenemos un único punto fijo  $x_1$  atractor (repulsor) y del otro lado de  $\mu_0$  aparecen otros dos puntos fijos, además  $x_1$  se vuelve repulsor (atractor).

**Teorema 2.5.1.** Sea  $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^r$  en la variable  $x$  y el parámetro  $\mu$  con  $r \geq 3$ . Dadas las siguientes hipótesis:

1.  $f_{\mu_0}(x_0) = x_0$ ,
2.  $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x_0) = 1$ ,
3.  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0$ ,
4.  $\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0) \neq 0$ ,
5.  $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x^2}(x_0) = 0$  y
6.  $\frac{\partial^3 f_{\mu_0}}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$ .

Entonces  $f$  tiene una bifurcación tridente en el punto  $(x_0, \mu_0)$ .

**Ejemplo 2.5.2.** Sea  $H_\mu(x) = \mu x - x^3$  con  $x, \mu \in \mathbb{R}$  una familia de funciones. Para encontrar sus puntos fijos, resolvemos

$$\begin{aligned} H_\mu(x) &= x, \\ \mu x - x - x^3 &= 0, \\ x_0 = 0 \text{ ó } x_\mu &= \pm \sqrt{\mu - 1}. \end{aligned}$$

Note que  $x_0$  existe para toda  $\mu \in \mathbb{R}$ , en cambio  $x_\mu$  solo existe si  $\mu > 1$ .

Para verificar cuando ocurre el cambio de estabilidad, queremos ver cuando  $|H'_\mu(x)|$  pasa de ser mayor que 1 a ser menor que 1. Primero, observe que

$$\begin{aligned} H'_\mu(x) &= \mu - 3x^2, \\ H'_\mu(x_0) &= \mu \text{ y } H'_\mu(x_\mu) = 3 - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

1. Dado que  $|H'_\mu(x_0)| = |\mu|$  el punto fijo  $x_0$  es atractor cuando  $|\mu| < 1$  y es repulsor cuando  $|\mu| > 1$ .
2.  $|H'_\mu(x_\mu)| = |3 - 2\mu| < 1$  cuando  $1 < \mu < 2$ , es decir, en este intervalo, el punto fijo  $x_\mu$  es atractor.
3.  $|H'_\mu(x_\mu)| = |3 - 2\mu| > 1$  cuando  $\mu > 2$ , es decir, en este intervalo, el punto fijo  $x_\mu$  es repulsor.

Además,  $\frac{\partial H_1}{\partial x}(0) = 1$ ,  $\frac{\partial H_1}{\partial \mu}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \mu \partial x}(0) = 1 \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}(0) = 6(0) = 0$  y  $\frac{\partial H_1^3}{\partial x^3}(0, 1) = -6 \neq 0$ . De esta manera hemos comprobado que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.5.1. Por lo tanto, la familia de funciones  $H_\mu$  tiene una bifurcación tridente cuando  $x = 0$  y  $\mu = 1$ .

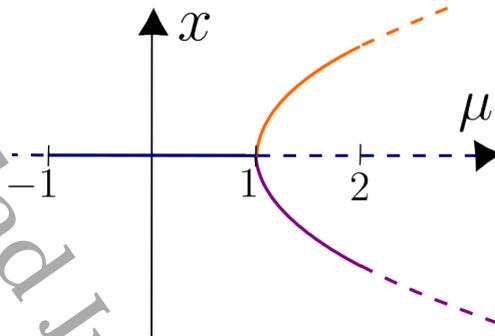


Figura 2.6: Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones  $H_\mu(x) = \mu x - x^3$ , cuando  $\mu = 1$  y  $x = 0$ .

---

## 3. Dinámica de polinomios cúbicos

---

En este capítulo haremos un análisis para determinar los valores en los cuales se presentan las diferentes bifurcaciones en la familia de polinomios cúbicos. Ya que la familia general de polinomios cúbicos  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  tiene cuatro parámetros, en su lugar, estudiaremos a las familias conjugadas  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  y  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  para reducir la cantidad de parámetros, ya que el espacio de parámetros de  $P_1$  está en  $\mathbb{R}^4$  y el espacio de parámetros de  $Q_1$  y  $Q_2$  está en  $\mathbb{R}^2$ , esto facilita los cálculos y permite hacer gráficas para ilustrar sus comportamientos. Ambas familias de polinomios son mónicos, la diferencia entre ellas es que la familia de polinomios  $Q_1$  tiene al 0 como punto fijo y la familia  $Q_2$  tiene al 0 como punto crítico.

### 3.1. Familias conjugadas

En esta sección analizaremos algunas familias que son conjugadas a la familia general de polinomios cúbicos  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

La primera familia que analizaremos es  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  y mostraremos que es conjugada a  $P_1(x)$  y que la conjugación está dada por una función de la forma  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , donde  $\alpha$  y  $a_3$  son diferentes de cero.

Para comprobar que son conjugados, resolvemos la ecuación

$$P_1(\varphi(x)) = \varphi(Q_2(x)),$$

de la cual obtenemos

$$a_3(\alpha x + \beta)^3 + a_2(\alpha x + \beta)^2 + a_1(\alpha x + \beta) + a_0 = \alpha(x^3 + b_1x + b_0) + \beta.$$

Desarrollando la parte izquierda

$$a_3\alpha^3x^3 + 3a_3\beta\alpha^2x^2 + a_2\alpha^2x^2 + 3a_3\alpha\beta^2x + 2a_2\beta\alpha x + a_1\alpha x + a_3\beta^3 + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0,$$

de igual manera, en la parte derecha tenemos

$$\alpha x^3 + \alpha b_1x + \alpha b_0 + \beta.$$

Como la igualdad es entre polinomios, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$a_3\alpha^3 = \alpha, \tag{3.1}$$

$$3a_3\beta\alpha^2 + a_2\alpha^2 = 0, \tag{3.2}$$

$$3a_3\alpha\beta^2 + 2a_2\beta\alpha + a_1\alpha = \alpha b_1, \tag{3.3}$$

$$a_3\beta^3 + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 = \alpha b_0 + \beta. \tag{3.4}$$

Como  $\alpha$  es diferente de cero, de la ecuación (3.1) obtenemos que  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_3}}$ . Si dividimos la ecuación (3.2) entre  $\alpha^2$  entonces tenemos que

$$3a_3\beta + a_2 = 0,$$

$$\beta = -\frac{a_2}{3a_3}.$$

Ahora dividimos la ecuación (3.3) entre  $\alpha$  y reemplazamos el valor de  $\beta$ , con lo cual obtenemos

$$b_1 = \frac{a_2^2}{3a_3} - \frac{2a_2^2}{3a_3} + a_1 = \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3}.$$

Finalmente, en la ecuación (3.4) reemplazamos los valores de  $\beta$  y  $\alpha$ , así nos queda

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{\sqrt{a_3}} &= a_3 \left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + a_2 \left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + a_1 \left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) + a_0 - \left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) \\ &= \frac{b_0}{\sqrt{a_3}} = \frac{-a_2^3 + 3a_2^2 - 9a_1a_2a_3 + 9a_3a_2 + 27a_0a_3^2}{27a_3^2} \\ b_0 &= \frac{2a_2^3 + 9a_2a_3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_0a_3^2}{(3\sqrt{a_3})^3}. \end{aligned}$$

De esta manera, encontramos los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b_1$  y  $b_0$  que nos permiten hacer la conjugación de  $P_1$  con  $Q_2$ . En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.1.** *La familia  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$  es analíticamente conjugada a la familia  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  y la conjugación está dada por  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ , donde  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_3}}$  y  $\beta = -\frac{a_2}{3a_3}$ .*

Por otro lado, tenemos a  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ , que también es una conjugación de  $P_1$ . Nuevamente la conjugación está dada por la función  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha$  y  $a_3$  diferentes de cero. Para verificar la conjugación resolvemos la ecuación

$$P_1(\varphi(x)) = \varphi(Q_1(x)),$$

de la cual obtenemos

$$\begin{aligned} a_3(\alpha x + \beta)^3 + a_2(\alpha x + \beta)^2 + a_1(\alpha x + \beta) + a_0 &= \alpha(x^3 + c_2x^2 + c_1x) + \beta \\ a_3\alpha^3x^3 + 3a_3\beta\alpha^2x^2 + a_2\alpha^2x^2 + 3a_3\alpha\beta^2x + 2a_2\beta\alpha x + a_1\alpha x + a_3\beta^3 + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 & \\ &= \alpha x^3 + \alpha c_2x^2 + \alpha c_1x + \beta. \end{aligned}$$

Como la igualdad es entre polinomios, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$a_3\alpha^3 = \alpha, \quad (3.5)$$

$$3a_3\beta\alpha^2 + a_2\alpha^2 = \alpha c_2, \quad (3.6)$$

$$3a_3\alpha\beta^2 + 2a_2\beta\alpha + a_1\alpha = \alpha c_1, \quad (3.7)$$

$$a_3\beta^3 + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 = \beta. \quad (3.8)$$

Resolvemos con la ayuda de Mathematica y tenemos que una de las soluciones del sistema es la siguiente

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{a_3}},$$

$$\beta = -6a_3 \left( 2^{2/3} \sqrt[3]{\gamma} + \frac{2\sqrt[3]{2}(a_2^2 - 3(a_1 - 1)a_3)}{\sqrt[3]{\gamma}} - 2a_2 \right),$$

$$c_1 = \frac{2a_2^2(\gamma)^{2/3} - 6a_1a_3(\gamma)^{2/3} + 12a_3(\gamma)^{2/3} + \sqrt[3]{2}(\gamma)^{4/3}}{6a_3(\gamma)^{2/3}} + \frac{2^{2/3}(9a_1^2a_3^2 - 6a_1a_2^2a_3 - 18a_1a_3^2 + 6a_2^2a_3 + a_2^4 + 9a_3^2)}{3a_3(\gamma)^{2/3}},$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}(\gamma)^{2/3} - 6a_1a_3 + 2a_2^2 + 6a_3}{2^{2/3}\sqrt{a_3}\sqrt[3]{\gamma}}.$$

Donde  $\gamma = \sqrt{(27a_0a_3^2 - 9(a_1 - 1)a_2a_3 + 2a_2^3)^2 - 4(a_2^2 - 3(a_1 - 1)a_3)^3} - 27a_0a_3^2 + 9(a_1 - 1)a_2a_3 - 2a_2^3$ .

De esta manera verificamos el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.2.** *La familia  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$  es analíticamente conjugada a la familia  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  por la función  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ , donde  $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{a_3}}$  y  $\beta = -6a_3 \left( 2^{2/3} \sqrt[3]{\gamma} + \frac{2\sqrt[3]{2}(a_2^2 - 3(a_1 - 1)a_3)}{\sqrt[3]{\gamma}} - 2a_2 \right)$ .*

## 3.2. Análisis de bifurcación en la familia de funciones $Q_1(x)$

En esta sección, vamos a analizar la dinámica de la familia de funciones  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ . Además, determinaremos los tipos de bifurcación que presenta esta familia en el espacio de parámetros.

Para encontrar los puntos fijos de  $Q_1$  resolvemos

$$Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x = x.$$

Por lo tanto, los puntos fijos de  $Q_1(x)$  son

$$x_1 = 0$$

y

$$x_{2,3} = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 - 1)}}{2}.$$

Observe que, cuando  $c_2^2 - 4(c_1 - 1) < 0$  los puntos  $x_{2,3}$  no existen en  $\mathbb{R}$ . En la figura 3.1 mostramos los valores de los parámetros para los cuales existen los puntos fijos  $x_2$  y  $x_3$ .

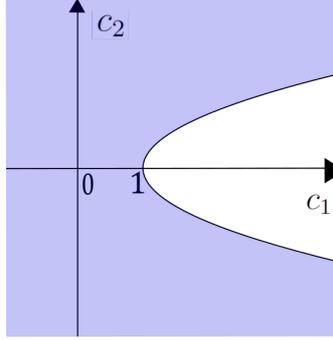


Figura 3.1: Región donde  $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos, vamos a estudiar cuándo  $|Q'_1(x_i)| < 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Observe que  $Q'_1(x) = 3x^2 + 2c_2x + c_1$ . Evaluando  $Q'_1(x)$  en  $x_1 = 0$ , tenemos que  $|Q'_1(x_1)| = |c_1| < 1$ , cuando  $c_1 \in (-1, 1)$ . Por lo tanto, en este intervalo el punto fijo  $x_1$  es atractor. Esta región está delimitada por las rectas  $c_1 = -1$  y  $c_1 = 1$ , la cual se puede apreciar en la figura 3.2. A continuación, vamos a determinar las bifurcaciones que se presentan en estas rectas.

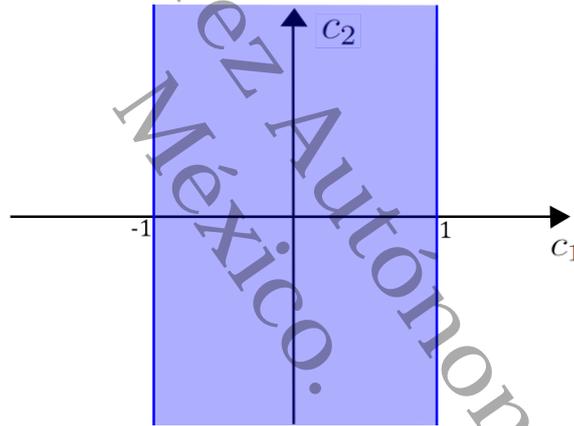


Figura 3.2: Región donde el punto fijo  $x_1$  de la función  $Q_1(x)$  es atractor.

Cuando  $c_1 = -1$ , tenemos que  $Q'_1(x_1) = c_1 = -1$ . Esto nos hace pensar que en esta recta puede existir una bifurcación doblamiento de periodo. Para ello verificaremos las hipótesis del teorema 2.3.1. Observe que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \left[ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial c_1 \partial x} (0) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial Q_1}{\partial c_1} \right) \left( \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \right) (0) \right]_{c_1=-1} \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right) (0)(0 + 2c_2) \right]_{c_1=-1} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left[ \left( \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q_1}{\partial x^3} (0) \right) + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} (-0) \right)^2 \right]_{c_1=-1} \\ &= \left[ \left( \frac{1}{6} \right) (6) + \left( \frac{0 + 2c_2}{2} \right)^2 \right]_{c_1=-1} = 1 + c_2^2. \end{aligned}$$

Como podemos observar,  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  son diferentes de 0 independientemente de  $c_2$ , por lo que la familia de funciones  $Q_1(x)$  tiene una bifurcación doblamiento de periodo cuando  $c_1 = -1$  y  $c_2 \in \mathbb{R}$  en el punto fijo  $x_1 = 0$ , véase la figura 3.3.

Ahora, si  $c_1 = 1$  y  $c_2 \in \mathbb{R}$ . Aunque  $Q_1'(x_1) = c_1 = 1$  y esto nos podría hacer pensar que existe una bifurcación silla nodo, note que  $\frac{\partial Q_1}{\partial c_1}(0) = 0$ , es decir, no se cumple una de las hipótesis del teorema 2.1.1. Así que vamos a ver si cumple las hipótesis del teorema 2.4.1 para tener una bifurcación transcítica, ya que cumple las tres primeras. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_1}{\partial c_1}(0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial c_1 \partial x}(0) &= 1 \neq 0,\end{aligned}$$

y

$$\left[ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}(0) \right]_{c_1=1} = [2c_2]_{c_1=1} = 2c_2.$$

De esta manera,  $\left[ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}(0) \right] \neq 0$ , cuando  $c_2 \neq 0$ . Es decir, la familia de funciones  $Q_1(x)$  tiene una bifurcación transcítica en el punto fijo  $x_1 = 0$  cuando  $c_1 = 1$  y  $c_2 \neq 0$ , véase la figura 3.3.

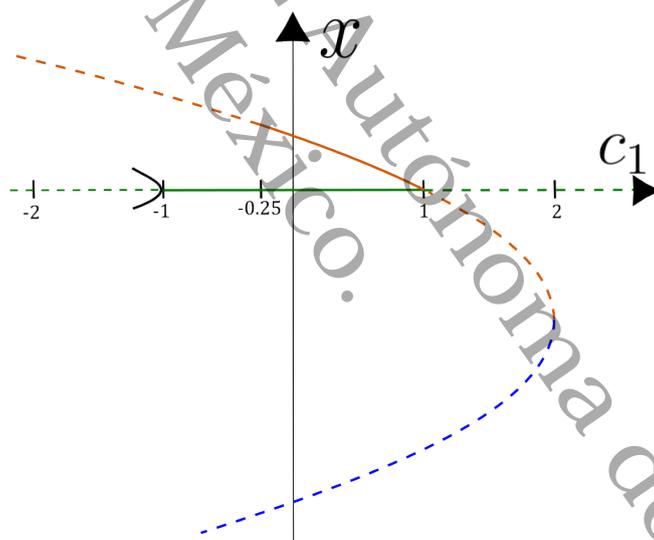


Figura 3.3: Diagrama de bifurcación de la familia  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  con  $c_2 = 2$ .

Por otro lado, cuando  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$ , ya que  $Q_1'(x_1) = c_1 = 1$ , vamos a comprobar si se cumplen las hipótesis del teorema 2.5.1.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial c_1}(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial c_1 \partial x}(0) = 1 \neq 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}(0) \right]_{c_1=1, c_2=0} = [2c_2]_{c_1=1, c_2=0} = 0,$$

y

$$\frac{\partial Q_1^3}{\partial x^3}(0) = 6 \neq 0.$$

Por lo tanto, si  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$  la familia de funciones  $Q_1$  tiene una bifurcación tridente en el punto fijo  $x_1 = 0$ , véase la figura 3.4.

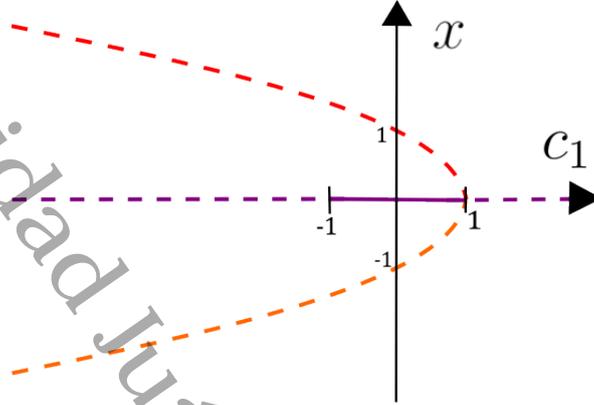


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  con  $c_1 \in \mathbb{R}$  y  $c_2 = 0$  en el punto fijo  $x_1 = 0$ .

Ahora determinaremos los parámetros para los cuales los puntos fijos

$$x_{2,3} = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 - 1)}}{2}$$

son atractores. Para ello verificaremos cuándo  $Q_1'(x) = 3x^2 + 2c_2x + c_1$  evaluada en  $x_{2,3}$  es 1 o  $-1$ .

Sustituyendo,

$$Q_1'(x_{2,3}) = 3 - 2c_1 + \frac{c_2 \mp c_2 \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 - 1)}}{2}.$$

La curva que corresponde a  $Q_1'(x_{2,3}) = 1$  está dada por

$$\mathcal{C}_1 = \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : 4c_1^2 - c_1c_2^2 - 8c_1 + c_2^2 + 4 = 0\}$$

y la curva que corresponde a  $Q_1'(x_{2,3}) = -1$  está dada por

$$\mathcal{C}_2 = \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : 4c_1^2 - c_1c_2^2 - 16c_1 + 3c_2^2 + 16 = 0\}.$$

Usando Mathematica determinamos que las curvas en  $\mathcal{C}_1$  están dadas por  $c_1 = 1$  y  $c_1 = 1 + \frac{c_2^2}{4}$  y las curvas en  $\mathcal{C}_2$  están dadas por  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Ahora, estudiaremos las bifurcaciones que se presentan en estas curvas. En primer lugar, si  $c_1 = 1$  y  $c_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $x_2 = 0$  y  $x_3 = -c_2$ . Es decir, el punto fijo  $x_1 = 0$  tiene multiplicidad dos. Anteriormente mostramos que si  $c_1 = 1$  y  $c_2 \neq 0$  la familia de funciones tiene una bifurcación transcítica en el punto fijo  $x_1 = 0$ , mientras que si  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$  tiene una bifurcación tridente, en este caso  $x_1 = x_2 = x_3$ . Por lo que falta verificar lo que ocurre en  $x_3 = -c_2$  cuando  $c_2 \neq 0$ .

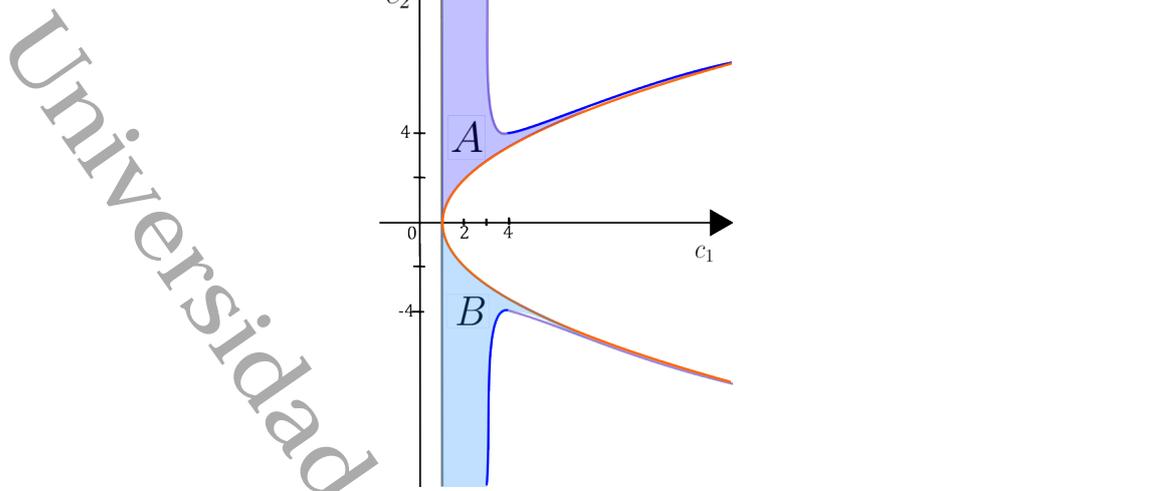


Figura 3.5: Las regiones  $A$  y  $B$  corresponden a los parámetros donde los puntos fijos  $x_2$  y  $x_3$  son atractores, respectivamente.

Si  $x_3 = -c_2 \neq 0$ , entonces  $Q'_1(x_3) = 1 + c_2^2 > 1$ ; por lo tanto, la familia de funciones  $Q_1(x)$  no presenta bifurcación en el punto fijo  $x_3$ .

En la curva  $c_1 = 1 + \frac{c_2^2}{4}$  y  $c_2 \neq 0$  tenemos que  $x_{2,3} = -\frac{c_2}{2}$ . Cuando  $c_2 = 0$  esto implica que  $c_1 = 1$  y ese caso ya lo consideramos. Por otro lado,  $Q'_1(-\frac{c_2}{2}) = 1$ , lo cual nos hace pensar en la posibilidad de una bifurcación silla nodo, para ello vamos a verificar si se cumplen las condiciones del teorema 2.1.1.

Ya que  $Q''_1(-\frac{c_2}{2}) = c_2$  y  $\frac{\partial Q_1}{\partial c_2}(-\frac{c_2}{2}) = \frac{c_2^2}{4}$  y  $c_2 \neq 0$ , entonces  $Q''_1(-\frac{c_2}{2}) \neq 0$  y  $\frac{\partial Q_1}{\partial c_2}(-\frac{c_2}{2}) \neq 0$ . Por lo tanto, en la curva  $c_1 = 1 + \frac{c_2^2}{4}$  la familia de funciones  $Q_1$  tiene una bifurcación silla nodo en el punto fijo  $x_{2,3} = -\frac{c_2}{2}$ , cuando  $c_2 \neq 0$ , véase la figura 3.6.

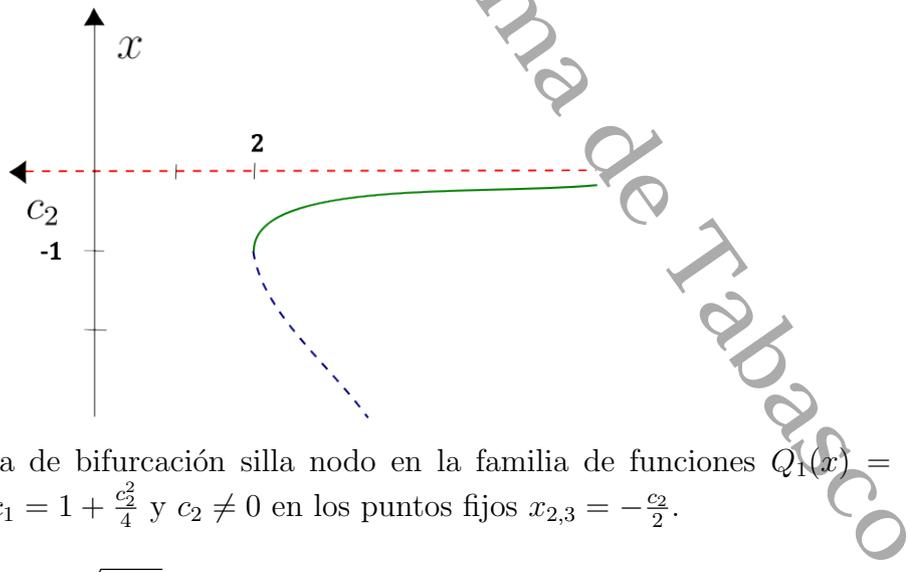


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  con  $c_1 = 1 + \frac{c_2^2}{4}$  y  $c_2 \neq 0$  en los puntos fijos  $x_{2,3} = -\frac{c_2}{2}$ .

En la curva  $c_1 = \frac{16+c_2^2 \pm c_2 \sqrt{c_2^2-16}}{8}$ , tenemos que  $Q'_1(x_2) = -1$  si  $c_2 \in [4, \infty)$ , así que vamos a verificar las condiciones en los parámetros para que se cumplen las hipótesis del teorema 2.3.1, para ello tenemos que calcular  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$ .

Como  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ , tenemos que

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{32} \left( -2c_2 + \sqrt{2}\delta_1 \right) \left( 8 + c_2(-5c_2 + 3\sqrt{-16 + c_2^2} + 4\sqrt{2}\delta_1) \right)$$

y

$$\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{4} \left( 2c_2 - 3\sqrt{2}\delta_1 \right)^2,$$

donde  $\delta_1 = \sqrt{-8 + c_2^2 - c_2\sqrt{c_2^2 - 16}}$ .

Graficando las expresiones de  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  como función de  $c_2$ , se aprecia que siempre son distintas de 0, véase las figuras 3.7 y 3.8 respectivamente.

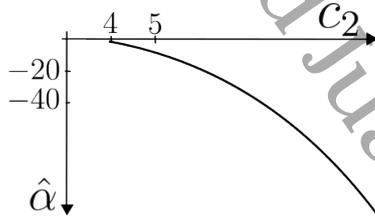


Figura 3.7: Gráfica de  $\hat{\alpha}$  como función de  $c_2$  para el punto fijo  $x_2$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

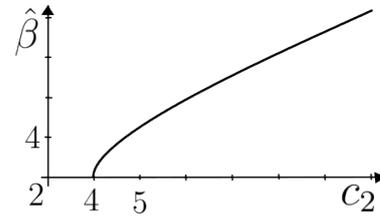


Figura 3.8: Gráfica de  $\hat{\beta}$  como función de  $c_2$  en el punto fijo  $x_2$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ , entonces

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{32} \left( -2c_2 + \sqrt{2}\delta_2 \right) \left( 8 + c_2(-5c_2 + 3\sqrt{-16 + c_2^2} + 4\sqrt{2}\delta_2) \right)$$

y

$$\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{4} \left( 4c_2 + 3\sqrt{2}\delta_2 \right)^2,$$

donde  $\delta_2 = \sqrt{-8 + c_2^2 + c_2\sqrt{c_2^2 - 16}}$ .

Graficando las expresiones de  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  como funciones de  $c_2$ , se aprecia que siempre son distintas de 0, véase las figuras 3.9 y figura 3.10.

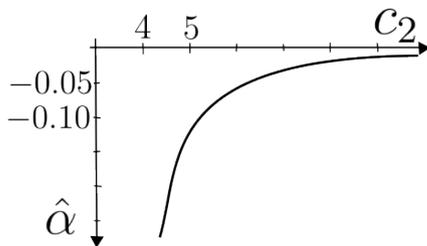


Figura 3.9: Gráfica de  $\hat{\alpha}$  como función de  $c_2$  para el punto fijo  $x_2$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

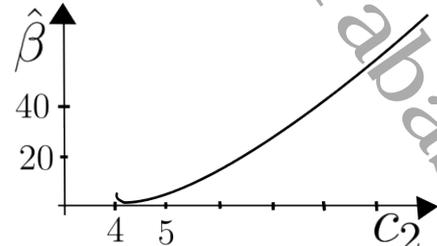


Figura 3.10: Gráfica de  $\hat{\beta}$  como función de  $c_2$  para el punto fijo  $x_2$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Por lo tanto, la familia de funciones  $Q_1(x)$  tiene una bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo  $x_2$ , cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y  $c_2 \in \mathbb{R}$  o cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y  $c_2 \in [4, \infty)$ , véase la figura 3.11.

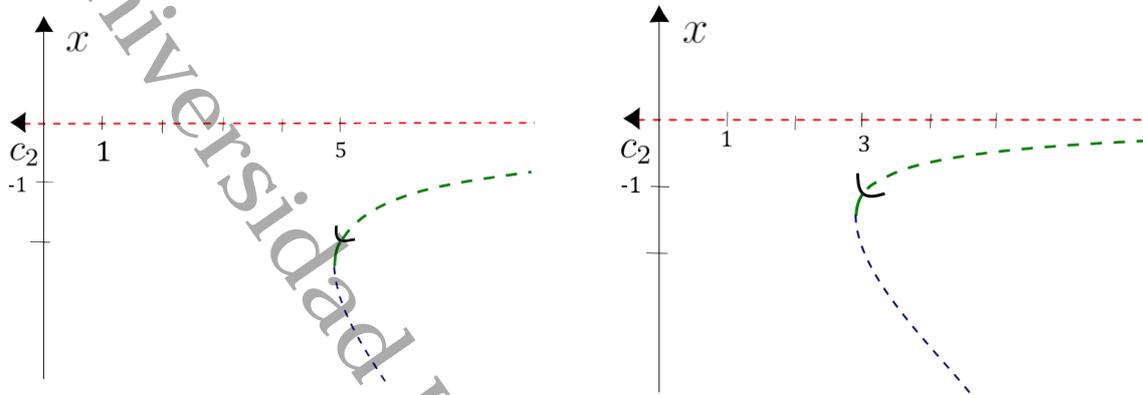


Figura 3.11: Diagramas de bifurcación doblamiento de periodo en la familia de funciones  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$ , con  $c_2 \in [4, \infty)$ , en el punto fijo  $x_2$ . En la figura de la izquierda  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y en la figura de la derecha  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Ahora vamos a estudiar el caso donde  $Q_1'(x_3) = -1$ . Es decir,  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  con  $c_2 \in (-\infty, -4]$ . Nuevamente, vamos a verificar si se cumplen las hipótesis del teorema 2.3.1.

Cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ , entonces

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{32} \left( -2c_2 + \sqrt{2}\delta_1 \right) \left( 8 + c_2(5c_2 - 3\sqrt{-16 + c_2^2} + 4\sqrt{2}\delta_1) \right)$$

y

$$\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{4} \left( 4c_2 + 3\sqrt{2}\delta_1 \right)^2,$$

donde  $\delta_1 = \sqrt{-8 + c_2^2 - c_2\sqrt{c_2^2 - 16}}$ .

Graficando las expresiones de  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  como funciones de  $c_2$ , se aprecia que siempre son distintas de 0, véase las figuras 3.12 y 3.13.

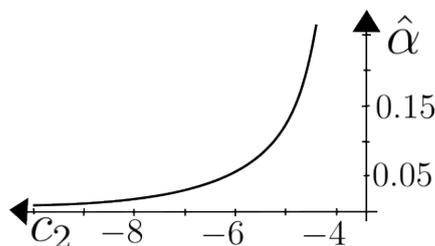


Figura 3.12: Gráfica de  $\hat{\alpha}$  como función de  $c_2$  para el punto fijo  $x_3$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

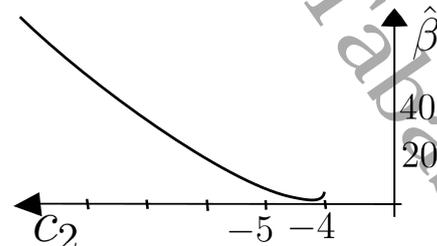


Figura 3.13: Gráfica de  $\hat{\beta}$  como función de  $c_2$  para el punto fijo  $x_3$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ , entonces

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{32} \left( 2c_2 + \sqrt{2}\delta_2 \right) \left( -8 + c_2(5c_2 + 3\sqrt{-16 + c_2^2} + 4\sqrt{2}\delta_2) \right)$$

y

$$\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{4} \left( 4c_2 + 3\sqrt{2}\delta_2 \right)^2,$$

donde  $\delta_2 = \sqrt{-8 + c_2^2 + c_2\sqrt{c_2^2 - 16}}$ .

Graficando las expresiones de  $\alpha$  y  $\beta$  como funciones de  $c_2$ , se aprecia que siempre son distintas de 0, véase las figuras 3.14 y 3.15.

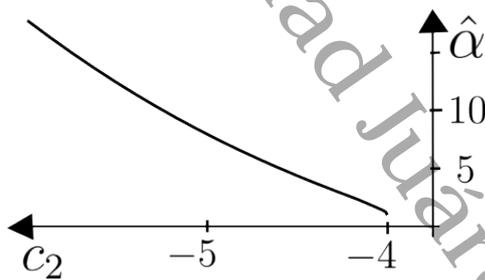


Figura 3.14: Gráfica de  $\hat{\alpha}$  como función de  $c_2$  para  $x_3$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

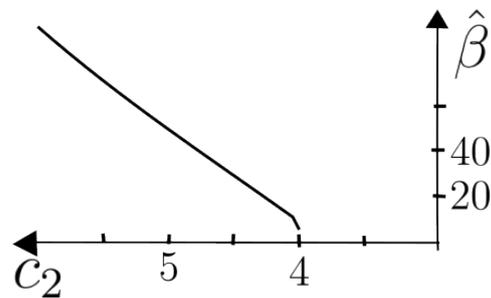


Figura 3.15: Gráfica de  $\hat{\beta}$  como función de  $c_2$  para  $x_3$  y  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$ .

Por lo tanto, la familia de funciones  $Q_1(x)$  tiene una bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo  $x_3$ , cuando  $c_1 = \frac{16+c_2^2+c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  o  $c_1 = \frac{16+c_2^2-c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y  $c_2 \in (-\infty, -4]$ , véase la figura 3.16

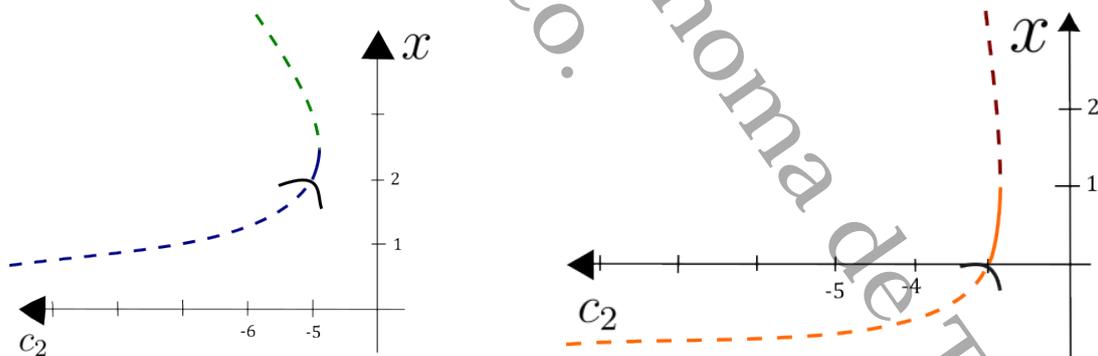


Figura 3.16: Diagramas de bifurcación doblamiento de periodo en la familia de funciones  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  con  $c_1 = \frac{16+c_2^2 \pm c_2\sqrt{c_2^2-16}}{8}$  y  $c_2 \in [4, \infty)$  en el punto fijo  $x_3$ .

### 3.3. Análisis de bifurcación en la familia de funciones $Q_2(x)$

Sea  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  una familia de funciones conjugada a  $P_1$ . Para analizar la dinámica de la familia de funciones  $Q_2(x)$  vamos a analizar el comportamiento de sus

puntos fijos.

Si  $b_0 = b_1 = 0$ , entonces  $Q_2(x) = x^3$  y para encontrar sus puntos fijos resolvemos la ecuación

$$Q_2(x) = x,$$

la cual es equivalente a

$$x(x^2 - 1) = 0.$$

Por lo tanto  $Q_2$  tiene tres puntos fijos  $x_1 = 0$  y  $x_{2,3} = \pm 1$ . Observe que  $Q'_1(x) = 3x^2$ , así que  $Q'_2(0) = 0$  y  $Q'_2(\pm 1) = 3$ . Por lo tanto,  $x_1$  es un punto fijo atractor y los puntos fijos  $x_2$  y  $x_3$  son repulsores. Además, la órbita de los puntos  $x_0 \in (-1, 1)$  converge asintóticamente a 0 y si  $x_0 \in (-\infty, -1)$  o  $x_0 \in (1, \infty)$  la órbita de  $x_0$  converge a  $-\infty$  o  $\infty$ , respectivamente, véase la figura 3.17.

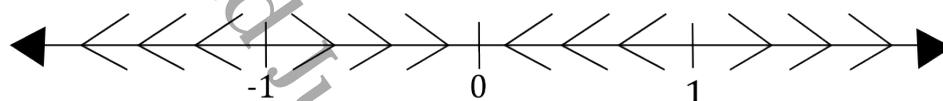


Figura 3.17: Órbitas de la función  $x^3$ .

Por otro lado, si  $b_0 = 0$  y  $b_1 \neq 0$  entonces  $Q_2(x) = x^3 + b_1x$  y para encontrar sus puntos fijos resolvemos

$$\begin{aligned} x^3 + b_1x &= x, \\ x(x^2 + b_1 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos tres puntos fijos  $x_1 = 0$  y  $x_{2,3} = \pm\sqrt{1-b_1}$ . Note que  $x_1$  existe para todo  $b_1 \in \mathbb{R}$  y  $x_{2,3} \in \mathbb{R}$  si  $b_1 \leq 1$ .

Por otro lado,  $Q'_1(x) = 3x^2 + b_1$ , por lo que  $Q'_2(0) = b_1$ . Esto implica que  $x_1 = 0$  es atractor si  $|b_1| < 1$ . Ya que  $Q'_2(\pm\sqrt{1-b_1}) = 3 - 2b_1$  tenemos que  $|3 - 2b_1| > 1$  cuando  $b_1 < 1$  por lo que los puntos fijos  $x_{2,3}$  son repulsores. Además, si  $b_1 = 1$ ,  $x_1 = x_2 = x_3$  y se presenta una bifurcación.

Ya que

$$\frac{\partial Q_2}{\partial b_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 Q_2}{\partial b_1 \partial x}(0) = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}(0) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 Q_2}{\partial x^3}(0) = 6 \neq 0,$$

tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.5.1 y en consecuencia cuando  $b_0 = 0$  y  $b_1 = 1$  la familia  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  tiene una bifurcación tridente en el punto fijo  $x_1 = 0$ , véase la figura 3.18.

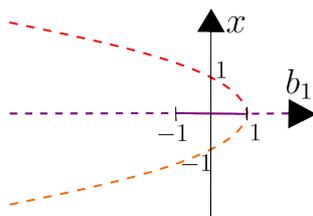


Figura 3.18: Diagrama de bifurcación tridente en la familia de funciones  $Q_2(x) = x^3 + b_1x$  con  $b_0 = 0$  y  $b_1 = 1$  en el punto fijo  $x_1$ .

Para determinar dónde puede haber bifurcación silla nodo, transcritical o tridente, resolvemos la ecuación  $Q'_2(x) = 3x^2 + b_1 = 1$ , y esto nos da  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-b_1}{3}}$ .

Sin embargo, para que exista alguna bifurcación también es necesario que  $x_{1,2}$  sean puntos fijos, es decir, que sean solución a la ecuación  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0 = x$ , para  $x_1$  esto ocurre cuando  $b_0 = -\frac{2}{9}\sqrt{3-3b_1}(-1+b_1)$  y para  $x_2$  ocurre cuando  $b_0 = \frac{2}{9}\sqrt{3-3b_1}(-1+b_1)$ .

Si graficamos a  $b_0$  como función de  $b_1$  obtenemos las curvas que se muestran en la figura 3.19. La de color azul corresponde a  $x_1$  y la de color verde a  $x_2$ .

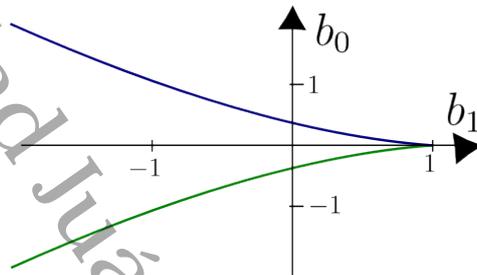


Figura 3.19: Curvas donde los puntos fijos  $x_i$  son indiferentes, para  $i = 1, 2$ .

De esta manera tenemos los valores de  $x_{1,2}$  y  $b_0$  para los cuales se cumplen las primeras dos condiciones de los teoremas 2.1.1, 2.4.1 y 2.5.1. Ahora bien, vamos a verificar las demás condiciones para poder concluir cual bifurcación existe en estos parámetros.

Como  $Q''_2(x) = 6x$ , tenemos que  $Q''_2(x_{1,2}) = \pm 2\sqrt{3}\sqrt{1-b_1}$ , es decir,  $Q''_2(x_{1,2}) = 0$  si  $b_1 = 1$  y  $Q''_2(x_{1,2}) \neq 0$  si  $b_1 < 1$ .

Por otro lado,  $\frac{\partial}{\partial b_1}Q_2 = x$ , y ya que  $x_{1,2} \neq 0$ , entonces existe bifurcación silla nodo para  $b_1 < 1$ , tal como se muestra en la figura 3.20. Ahora, dado que  $\frac{\partial^3 Q_2}{\partial x^3} = 6$  hay bifurcación tridente si  $b_1 = 1$ , como se ve en la figura 3.18.

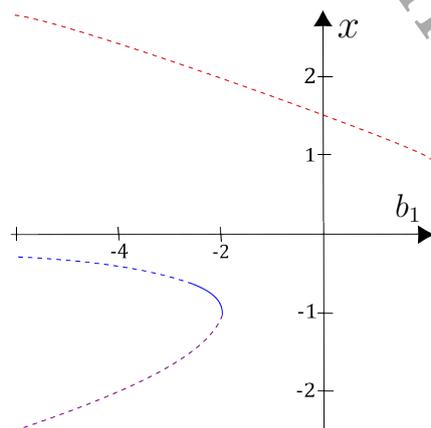


Figura 3.20: Diagrama de bifurcación silla nodo en la familia de funciones  $Q_2(x) = x^3 + b_1x - 2$ , en el punto fijo  $x = -1$  para el parámetro  $b_0 = -2$ .

Para determinar dónde puede haber bifurcación doblamiento de periodo, queremos que  $Q'_2(x) = 3x^2 + b_1 = -1$ , y esto nos da  $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-1-b_1}{3}}$ , es decir, los puntos fijos existen si  $b_1 \leq -1$ .

Ya que también deben ser puntos fijos, deben ser soluciones de la ecuación  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0 = x$ , para  $x_3$  esto ocurre cuando  $b_0 = -\frac{2\sqrt{-1+b_1}(-2+b_1)}{3\sqrt{3}}$  y para  $x_4$  ocurre cuando  $b_0 = \frac{2\sqrt{-1+b_1}(-2+b_1)}{3\sqrt{3}}$ . Ambas curvas se pueden ver en la figura 3.21 en color azul y verde, respectivamente.

Como las curvas solo están definidas cuando  $b_1 \geq 1$  y para que los puntos fijos existan  $b_1 \leq -1$ , concluimos que esta familia no presenta bifurcación doblamiento de periodo.

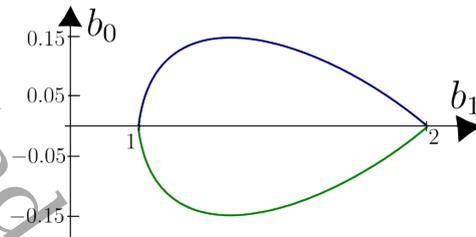


Figura 3.21: Curvas donde los puntos fijos  $x_i$  son indiferentes, para  $i = 3, 4$ .

---

## Conclusión

---

En la sección 1.8 mostramos que cuando dos funciones son difeomórficamente conjugadas, estas tienen la misma dinámica. En este trabajo mostramos que la familia general de polinomios cúbicos  $P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  es analíticamente conjugada a la familia  $Q_1(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x$  de polinomios mónicos que fijan al 0 y a la familia de polinomios mónicos  $Q_2(x) = x^3 + b_1x + b_0$  que tienen al 0 como punto crítico. Por lo que fue suficiente estudiar la dinámica de estas dos familias de polinomios cúbicos que sólo tienen dos parámetros para entender la dinámica de todos los polinomios cúbicos. Para ambas familias se pudo calcular los puntos fijos y las curvas donde estos presentan bifurcación. Además, con la ayuda de Mathematica pudimos caracterizar todos los parámetros sobre estas curvas donde los polinomios cúbicos presentan alguna bifurcación tal como silla-nodo, doblamiento de periodo, transcítica y tridente. Es importante mencionar que la bifurcación tridente no se presenta en los puntos fijos de la familia de polinomios cuadráticos.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

---

## Bibliografía

---

- [B] Beardon, A. (1991). *Iteration of Rational Functions*. Springer Verlag.
- [BKM] Bonifant, A., Kiwi, J., and Milnor, J. (2010). Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, part ii: escape regions. *Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society*, 14(4), 68-112.
- [BH] Branner, B., Hubbard, J. H. (1992). *The iteration of cubic polynomials Part II: Patterns and parapatterns*.
- [CG] Carleson, L., Gamelin, T. (1993). *Complex Dynamics*. Springer Verlag.
- [D] Devaney, R. L. (1992). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd Edition).
- [dMvS] de Melo, W., van Strien, S. (1992). *One Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag.
- [DH] Douady, A., Hubbard, J. (1984). *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication Mathématiques d'Orsay, 84-02, 85-04.
- [H] Hirsch, M. W. (1976). *Differential Topology*. Springer Verlag.
- [L] Lyubich, M. (1997). *Dynamics of quadratic polynomials, I-II*. *Acta Mathematica*, 178, 185-297.
- [M1] Milnor, J. (2006). *Dynamics in one complex variable* (Third edition). *Annals of Math. Studies*, 160, Princeton University Press.
- [M2] Milnor, J. (1992). *Remarks on iterated cubic maps*. *Experimental Mathematics*, 1(1), 5-24.
- [MT] Marsden, J. E., Tromba, A. J. (1991). *Cálculo vectorial* (Vol. 69). Addison-Wesley Iberoamericana.
- [P] Perko, L. (2013). *Differential Equations and Dynamical Systems* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
- [R] Robinson, R. C. (2012). *An introduction to dynamical systems: continuous and discrete* (Vol. 19). American Mathematical Society.