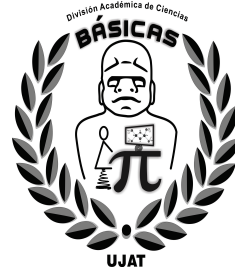




UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA
DIRECTO ASOCIADO A UN TUMOR
CEREBRAL EN $\mathbb{R}^2$

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ANDRY ALEXANDER PEREGRINO RODRÍGUEZ

DIRECTORES:

DR. JORGE LÓPEZ LÓPEZ

DR. JOSÉ JACOBO OLIVEROS OLIVEROS

Cunduacán, Tab.

Octubre 2024

Declaración de Autoría y Originalidad

En la ciudad de Villahermosa, Centro, Tabasco, el día 28 del mes Octubre del año 2024, el que suscribe Andry Alexander Peregrino Rodríguez alumno de la División Académica de Ciencias Básicas con número de matrícula 192A31008 adscrito a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, como autor de la Tesis presentada para la obtención del título y titulada Simulación numérica de un problema directo asociado a un tumor cerebral en $\mathbb{R}^2$ dirigida por el Dr. Jorge López López y el Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros.

Declaro que:

La tesis es una obra dirigida que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, LA LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR (Decreto por el que se reforman y adicionan diversas disposiciones de la Ley Federal del Derecho de Autor del 01 de Julio del 2020 regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia) en particular, las disposiciones referidas al derecho de citas.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad o contenido de la Tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

Villahermosa, Tabasco a 22 de octubre del 2024.



Andry Alexander Peregrino Rodríguez



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



2024
Felipe Carrillo
PUERTO
RECONOCIMIENTO DEL GOBIERNO DEL ESTADO DE TABASCO
GOBIERNO DE MÉXICO

DIRECCIÓN

Cunduacán, Tabasco; a 22 de octubre de 2024.

**C. ANDRY ALEXANDER PEREGRINO RODRÍGUEZ
PASANTE DE LA LIC. EN MATEMÁTICAS
PRESENTE**

Por medio del presente, me dirijo a usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DIRECTO ASOCIADO A UN TUMOR CEREBRAL EN R^2 ”**, dirigido por el Dr. Jorge López López con la codirección del Dr. José Jacobo Oliveros Oliveras, bajo la modalidad de titulación por **TESIS**. La comisión de revisión conformada por el Dr. Justino Alavez Ramírez, Dr. Miguel Ángel De la Rosa Castillo, Dr. Iván Loreto Hernández y Dr. Gamaliel Blé González, liberó el documento en virtud de que reúne los requisitos para el **EXAMEN PROFESIONAL** correspondiente.

Sin otro particular, reciba usted un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL
DIRECTORA**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p. Archivo.

DIR´DRA.HPV/kfvg

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

Villahermosa, Tabasco a 22 de octubre del 2024

Por medio de la presente manifestamos haber colaborado como autores en la producción, creación y/o realización de la obra denominada Simulación numérica de un problema directo asociado a un tumor cerebral en $\mathbb{R}^2$. Con fundamento en el artículo 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y toda vez que la creación y/o realización de la obra antes mencionada se realizó bajo la comisión de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco; aceptamos el alcance del artículo en mención, de que tenemos el derecho al reconocimiento como autores de la obra, y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco mantendrá en un 100% la titularidad de los derechos patrimoniales por un periodo de 20 años sobre la obra en la que colaboramos, por lo anterior cedemos el derecho patrimonial exclusivo en favor de la Universidad.

COLABORADORES



Andry Alexander Peregrino Rodríguez



Dr. Jorge López López



Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros

TESTIGOS



Alejandro Peregrino Pérez



Iojany Abigail Valle Queb

Alojamiento de la Tesis en el Repositorio Institucional	
Título de Tesis:	Simulación numérica de un problema directo asociado a un tumor cerebral en $\mathbb{R}^2$.
Autor de la Tesis:	Andry Alexander Peregrino Rodríguez
ORCID:	0009-0009-3844-9114
Resumen de la Tesis:	El electroencefalograma (EEG) es un método no invasivo para identificar en que parte del cerebro se encuentra una anomalía, es decir, que a través del estudio de un EEG se busca la parte del cerebro afectada. En esta tesis, estudiaremos el problema directo para tumores cerebrales, por ello daremos como conocido el tumor cerebral y llegaremos a un EEG.
Palabras Claves de la Tesis:	Tumor cerebral, Electroencefalograma, Elemento finito, Método de Fourier.
Referencias Citadas:	• E. Estrada, J. Oliveros, J. Conde (2021). Modelos matemáticos asociados a patologías en el cerebro y análisis de problemas directos e inversos. BUAP. • J. Fernández (2019). Ecuaciones diferenciales parciales. IMAS--CONICET y DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA., (1428). • M. Hirsch, S. Smale y R. Devaney. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. Vol 60, No. 2, 2004. • J. López, D. Chablé, H. Juárez. Generación de campos de viento por métodos variacionales. Revista de Ciencias Básicas UJAT. Volumen 1, No. 1.

LICENCIATURA - SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DIRECTO ASOCIADO A UN TUMOR CEREBRAL EN R2

INFORME DE ORIGINALIDAD

18%

ÍNDICE DE SIMILITUD

FUENTES PRIMARIAS

1	revistas.ujat.mx Internet	977 palabras — 7%
2	www.ce-mat.org Internet	760 palabras — 5%
3	repositorioinstitucional.buap.mx Internet	281 palabras — 2%
4	pt.scribd.com Internet	250 palabras — 2%
5	speckle.inaoep.mx Internet	112 palabras — 1%
6	www.researchgate.net Internet	93 palabras — 1%
7	es.scribd.com Internet	60 palabras — < 1%
8	fr.slideshare.net Internet	59 palabras — < 1%
9	es.wikipedia.org Internet	50 palabras — < 1%



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS
ESTUDIOS
TERMINALES

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	IV
Marco teórico	VII
Justificación	VIII
Objetivo General	IX
Metodología	X
Requerimientos	XI
Cronograma de Actividades	XII
1. Fisiología del cerebro y conceptos básicos	1
1.1. Electroencefalografía	1
1.2. Anomalías en el cerebro humano	3
1.3. Actividad lenta polimórfica y las ondas tipo Z	5
1.4. Modelo cuasi-estático para identificación de fuentes	5
1.4.1. Problema de Contorno Electroencefalográfico (PCE)	7
1.5. Modelo matemático asociado a un tumor cerebral	10
1.5.1. Problemas directos para un tumor	11
2. Solución del problema directo por series de Fourier	13
2.1. Series trigonométricas y polinomios trigonométricos	13
2.2. Series de Fourier	14
2.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier	15
2.3.1. Núcleo de Dirichlet	15
2.3.2. Propiedad de localización	17
2.3.3. Teoremas de convergencia puntual de Fourier	17

ÍNDICE GENERAL

2.3.4. El teorema de Dirichlet	18
2.4. Convergencia uniforme de la serie de Fourier	19
2.4.1. Localización uniforme	20
2.5. Series de Fourier en un disco	21
2.6. Solución por series de Fourier	25
2.7. Construcción de un Ejemplo	27
2.8. Planteamiento Operacional	30
3. El método de elemento finito	32
3.1. Formulación Variacional	32
3.2. Espacio de elemento finito	35
3.3. Detalles computacionales	37
3.3.1. Cálculo de A	39
3.3.2. Contribución de f al lado derecho del sistema $Au = b$.	41
4. Método del elemento finito aplicado al modelo cuasi-estático de un tumor cerebral	43
4.1. El modelo y su formulación variacional	43
4.2. Espacio de elemento finito	45
4.3. El problema variacional de dimensión finita y el sistema lineal algebraico	47
4.4. Detalles computacionales	48
4.4.1. Cálculo de las entradas de la matriz A	48
4.4.2. Cálculo del lado derecho del sistema	48
4.5. Ejemplo numérico	50
Conclusión	53

Agradecimientos

- A Dios por darme la vida la inteligencia necesaria, darme la fortaleza y levantarme en cada momento y cada tropiezo de mi vida. Por darme la fuerza necesaria y sabiduría y nunca abandonarme en todo mi proceso y en toda mi vida. Darme la oportunidad de cumplir una meta más en la vida.
- A mi familia, en especial a mi padre Alejandro Peregrino Pérez quien me inculcó el trabajo duro y me ayudó en los momentos complicados de mis estudios y a mi madre Elsa Rodríguez López por darme el amor y cariño, así como los consejos y las llamadas de atención que necesitaba para lograr mis objetivos.
y a ambos por darme siempre el apoyo económico y el confort familiar para seguir adelante.
- A mis asesores de tesis Dr. Jorge López López y Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros por permitirme trabajar bajo su dirección. Por su apoyo para realizar y corregir los errores de la tesis, paciencia para aclarar mis dudas y tiempo para revisar y dirigir el trabajo hoy presentado.
- A mi novia, por su apoyo incondicional y siempre animarme en los momentos mas complicados de mi vida, siempre dándome el espacio y comprendiendo el tiempo que debía dedicarle al trabajo.

Introducción

El cerebro humano representa un gran desafío para la ciencia debido a su complejidad y ha sido estudiado desde diferentes perspectivas y con diferentes herramientas como la electroencefalografía, la cual es una técnica de exploración neurofisiológica que registra la actividad bioeléctrica cerebral a partir de electrodos colocados en el cuero cabelludo, un electroencefalograma es el registro obtenido mediante esta técnica.

De esta manera, se considera el electroencefalograma (EEG) para estudiar anomalías patológicas en el cerebro tales como focos epilépticos, calcificaciones y tumores (edemas); ya que su registro corresponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas que trabajan simultáneamente y son llamados generadores del EEG o fuentes bioeléctricas que pueden ser corticales y subcorticales. En este caso, para establecer correlaciones entre las fuentes y las mediciones, se han utilizado problemas de valores en la frontera. El estudio de estas correlaciones lleva a considerar a la cabeza modelada por una región compuesta por capas conductoras. Dicha región se llamará dominio que, como se mencionó, se subdivide en varias subregiones (capas) separadas por sus respectivas fronteras, que pueden considerarse como interfaces que separan a las mencionadas capas conductoras. Utilizando la aproximación cuasi-estática de las ecuaciones de Maxwell, se llega a un problema de contorno elíptico que considera una condición de contorno de Neumann nula en la frontera de la región que representa a la cabeza. En este caso, dicha frontera representa al cuero cabelludo. En las interfaces que separan las capas, se consideran las llamadas condiciones de transmisión (continuidad de los potenciales y de los flujos normales de la corriente).

Un modelo matemático para el cerebro en este contexto es el que se presenta en [1], [5] y [8]. En este modelo la cabeza humana se divide en diferentes capas conductoras con conductividad constante y diferente en cada capa. Consideraremos que la conductividad de la región ocupada por el tumor es mayor a la del cerebro sano [5] y [11]. Esto debido a que los tumores pre-

sentan un contenido de agua mayor al de los tejidos sanos; en el caso de las células cancerosas se despolarizan, sus cargas migran hacia las membranas y esto hace que su polaridad sea más negativa. Por todo lo anterior, se pueden considerar los siguientes dos casos:

1. La capa fibrosa es muy delgada y la podemos considerar como una interfaz S_1 que separa al cerebro sano, Ω_2 , del tumor, Ω_1 . De esta manera, habrá una fuente g que genera el EEG anormal. Dicha fuente es una función definida sobre la superficie S_1 que representa dicha interfaz. La región Ω_2 tiene una frontera exterior S_2 . Esta fuente g genera un potencial eléctrico u_i en cada una de las regiones Ω_i , $i = 1, 2$
2. La capa fibrosa no es tan delgada, si no que es una capa anular, Ω_2 , que de igual manera separa al cerebro sano, Ω_3 , del enfermo o tumor, Ω_1 . En este caso, la fuente f que genera al EEG anormal se encuentra definida en Ω_2 . Entre las regiones Ω_1 y Ω_2 hay una interfaz de separación, S_1 . Entre las regiones Ω_2 y Ω_3 hay una interfaz de separación S_2 . Y finalmente Ω_3 tiene una frontera externa S_3 . En estas interfaces se deben considerar las condiciones de transmisión, la igualdad de los potenciales respectivos y de las componentes normales de la corriente respectiva.

Nos concentraremos en el primer caso, que se modela con el siguiente problema de valores en la frontera [1].

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1 \quad (1)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2 \quad (2)$$

con las condiciones de frontera

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad \text{sobre } S_1, \quad (4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2 \quad (5)$$

donde n_1 es el vector normal a S_1 y n_2 es el vector normal a S_2 .

En relación con el modelo (1)–(5) tenemos las siguientes dos definiciones:

Definición 0.0.1. Problema Directo. Dada la función g definida sobre S_1 , el problema directo consiste en hallar la restricción a la frontera de la región de la solución del problema anterior (medición), es decir, hallar $V = u_2|_{S_2}$.

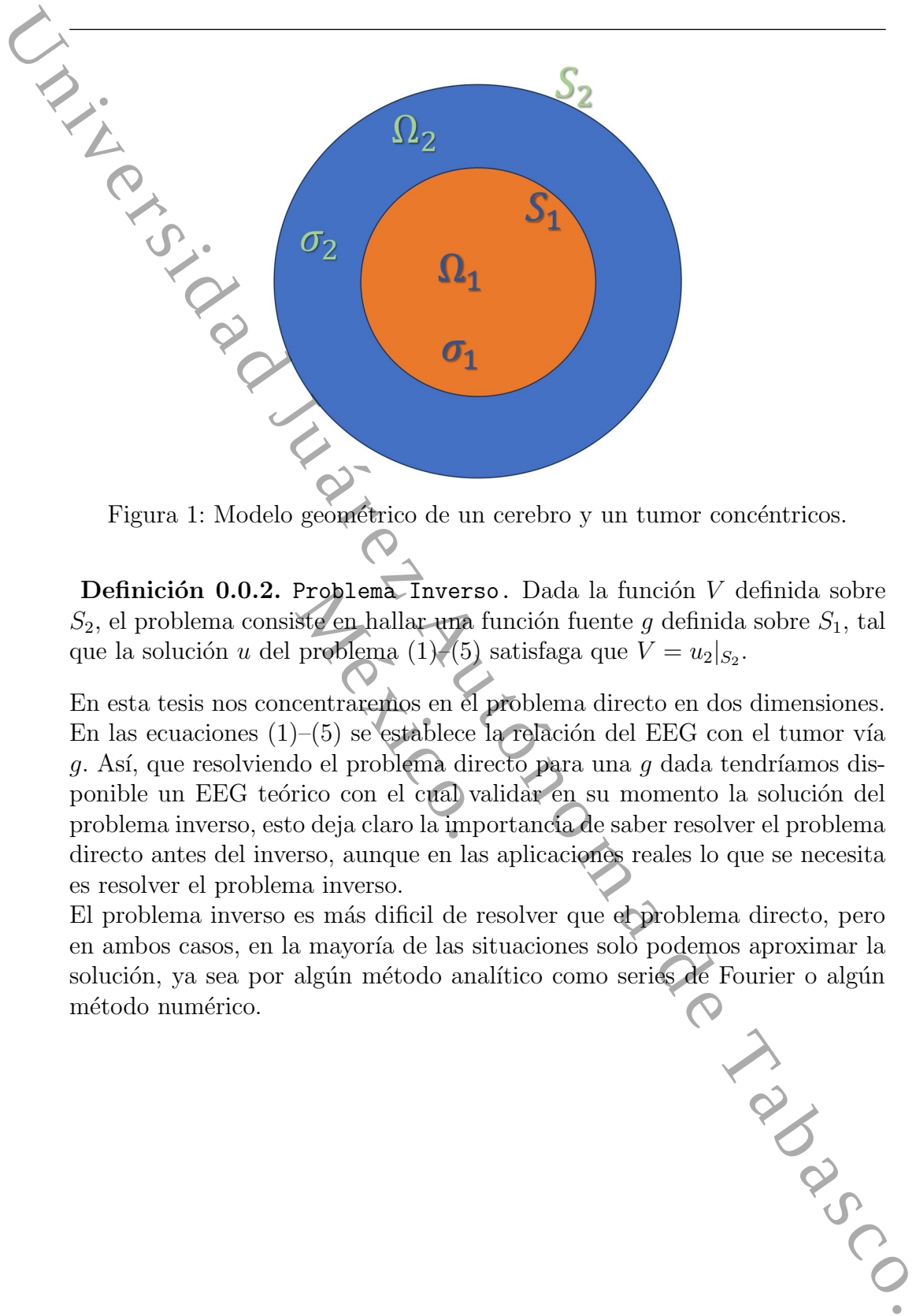


Figura 1: Modelo geométrico de un cerebro y un tumor concéntricos.

Definición 0.0.2. Problema Inverso. Dada la función V definida sobre S_2 , el problema consiste en hallar una función fuente g definida sobre S_1 , tal que la solución u del problema (1)–(5) satisfaga que $V = u_2|_{S_2}$.

En esta tesis nos concentraremos en el problema directo en dos dimensiones. En las ecuaciones (1)–(5) se establece la relación del EEG con el tumor vía g . Así, que resolviendo el problema directo para una g dada tendríamos disponible un EEG teórico con el cual validar en su momento la solución del problema inverso, esto deja claro la importancia de saber resolver el problema directo antes del inverso, aunque en las aplicaciones reales lo que se necesita es resolver el problema inverso.

El problema inverso es más difícil de resolver que el problema directo, pero en ambos casos, en la mayoría de las situaciones solo podemos aproximar la solución, ya sea por algún método analítico como series de Fourier o algún método numérico.

Marco teórico

En 1935, Foster describió registros de EEG directamente de un cerebro abierto durante una operación. Demostró que el tumor por sí mismo no produce actividad eléctrica, si no que, el tejido cerebral que lo rodea produce ondas regulares lentas. Por otra parte, durante sus experimentos, Sarkisov encontró que en el EEG sobre la región de la ubicación del tumor, en ocasiones se registran ondas lentas [7] y [10]. Otros investigadores confirmaron sus observaciones. Este EEG anormal, sugiere que hay una fuente que genera ese EEG anormal. Como en el tumor no puede haber fuentes, se propone que dicha fuente, se encuentre en la capa fibrosa. Como se mencionó, la capa fibrosa puede ser delgada o gruesa, lo que lleva a dos modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera tipo Neumann.

En este trabajo, nos concentraremos en el estudio de un tumor cerebral (edema). Cuando un paciente tiene un tumor, la zona afectada cambia su conductividad y se genera una capa fibrosa que lo envuelve. Es allí donde se genera una corriente secundaria que produce un EEG anormal. La capa fibrosa puede ser delgada o gruesa:

En el caso que sea delgada: Puede considerarse como la superficie de separación entre la región ocupada por el tumor y el cerebro sano.

En el caso que sea gruesa: La fuente generadora del EEG se puede considerar como una fuente volumétrica.

En esta tesis nos concentraremos en el problema directo en dos dimensiones, considerando su solución mediante series de Fourier [1] y por elemento finito.

Justificación

El electroencefalograma (EEG) es un método no invasivo para identificar en que parte del cerebro se encuentra una anomalía, es decir, que a través del estudio de un EEG se busca la parte del cerebro afectada. Sin embargo, para poder resolver el problema inverso, que es el interesante desde el punto de vista médico, se debe poder saber resolver primero el problema directo, es decir, suponer que se conoce la parte del cerebro afectado y en particular cual sería su efecto en el cuero cabelludo (que se mide con el EEG).

En esta tesis, estudiaremos el problema directo para tumores cerebrales, por ello daremos como conocido el tumor cerebral y llegaremos a un EEG.

Pregunta de Investigación

Dado un tumor en el interior del cerebro, ¿Se puede conocer su efecto en la corteza craneal o cuero cabelludo (donde se colocan los electrodos)?

Hipótesis

Para un tumor en el interior del cerebro, para el cual se conoce su descripción matemática se puede conocer su efecto en la superficie craneal o cuero cabelludo modelando el fenómeno como un problema en ecuaciones diferenciales parciales.

Objetivo General

Dada una fuente sobre una región interna cerebral (la frontera del tumor), encontrar la función potencial que se genera sobre la superficie cerebral (EEG).

Objetivos Específicos

1. Estudiar el modelo matemático para un tumor cerebral en $2D$ descrito en [1] y [2].
2. Estudiar la existencia y unicidad de la solución del modelo.
3. Resolver numéricamente el problema directo asociado con el modelo en [1] y dada una fuente obtener el EEG.

Metodología

Para alcanzar los objetivos de este trabajo, se requiere:

- Estudiar la fisiología de los tumores cerebrales [1].
- Estudiar el modelo en EDP's asociado a un tumor cerebral descrito en [1], [2] y [4].
- Estudiar el concepto de existencia y unicidad de soluciones débiles en EDP [3].
- Resolver numéricamente el modelo para un tumor cerebral en 2D, en su versión de problema directo por series de Fourier y elemento finito [1], [5].

Requerimientos

- Acceso a una base de datos de matemáticas como Mathscinet.
- Acceso a préstamos en la biblioteca.
- Una computadora con MATHEMATICA para hacer las simulaciones y las gráficas, así como con un procesador de LATEX para la redacción del trabajo.
- Papelería para impresión (500 hojas).

Cronograma de Actividades

Actividades	Meses					
	1	2	3	4	5	6
Estudiar la fisiología del cerebro y conceptos básicos.						
Estudiar el concepto de problemas directos e inversos para un tumor cerebral.						
Estudio del modelo (1)–(5).						
Estudiar el concepto de soluciones débiles del problema directo para un tumor cerebral.						
Estudiar soluciones por series de Fourier de (1)–(5).						
Estudiar la teoría básica del método de elemento finito para resolver EDPs.						
Aplicar el método de elemento finito para resolver el problema (1)–(5).						
Redacción de la tesis.						

Capítulo 1

Fisiología del cerebro y conceptos básicos

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos del cerebro que están asociados con la técnica de la electroencefalografía, por ejemplo la actividad bioeléctrica y el resultado de la electroencefalografía, que es el electroencefalograma (EEG).

1.1. Electroencefalografía

Definición 1.1.1. Definimos la electroencefalografía como el estudio de un EEG que mide la actividad del cerebro mediante electrodos (tubos con discos de metal) colocados sobre el cuero cabelludo en estado de reposo, vigilia o sueño, entre otras activaciones para el cerebro, todo lo obtenido es impreso en un papel en movimiento o proyectado en un monitor. Lo que se registra del EEG corresponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas que trabajan simultáneamente y son llamados generadores del EEG o fuentes bioeléctricas que pueden ser corticales o subcorticales [1].

La actividad bioeléctrica cerebral que se registra en el EEG con el sistema de electrodos antes mencionado, está compuesto por un número diverso de ondas que se encuentran, ya sea aisladas o en grupos, las cuales difieren unas de otras por los siguientes parámetros [12]:

Frecuencia: Se refiere al número de veces que una onda se repite en un segundo (ciclos por segundo o Herzios (Hz)) y de acuerdo a esto se puede clasificar en cuatro tipos: Delta, Theta, Alfa y Beta.

Amplitud: Es la distancia entre la línea base y el pico de la onda expresada en microvoltios (μV).

Forma: Es la forma de una onda, la cual puede ser regular, irregular, aguda, compleja, etc.

Distribución Topográfica: Indica el lugar en el cerebro, en el cual aparece un fenómeno eléctrico. De igual manera, puede ubicar fisiológicamente las distintas frecuencias dependiendo del área del cerebro al que corresponda, esto se puede apreciar de mejor manera en la Figura 1.1.

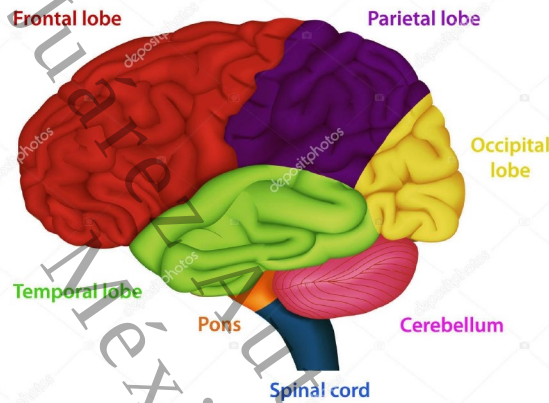


Figura 1.1: Partes del cerebro.

Las bandas de frecuencia, tienen ciertas características que las distinguen, las cuales describiremos a continuación, ver Figura 1.2.

Banda Delta:

- Frecuencia de 0.1 a 4Hz.
- Amplitud: Variable, Mayor de $50\mu V$.
- Distribución: Propia de la infancia, niños menores de tres meses.

Banda Theta:

- Frecuencia de 4 a 7Hz.
- Amplitud: Mayor de $40\mu V$, si es menor de $15\mu V$ puede considerarse como anormal.
- Distribución: Fronto-central.

Banda Alfa:

- Frecuencia de 8 a 12Hz.
- Amplitud: De $15\mu\text{V}$, la cual puede variar según: la distancia ínter electrodos, cambio en la densidad ósea, la edad, es decir, a mayor edad, menor voltaje.
- Distribución: Occipital.

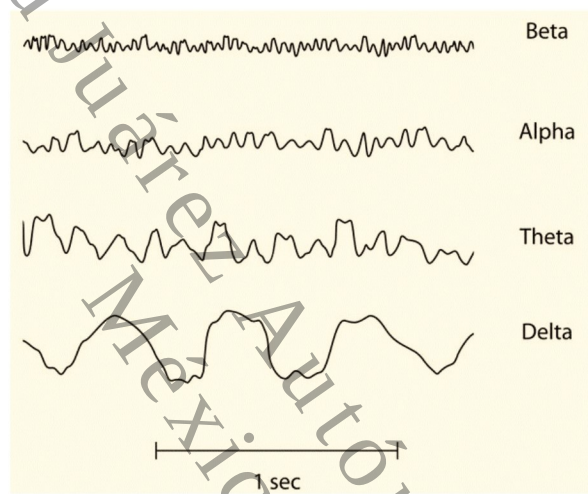


Figura 1.2: Bandas de Frecuencia [1].

1.2. Anomalías en el cerebro humano

Definición 1.2.1. Una anomalía fisiológica corresponde a una alteración en el tejido cerebral sano causadas por enfermedades, alteraciones o herencia familiar, las cuales deben ser tratadas por médicos especialistas en el área.

Podemos clasificar las anomalías como:

- **Tumores:** Es una masa de células en el cerebro o cerca de este. Se pueden formar en el tejido cerebral o cerca del mismo. Dentro de los que se ubican cerca del cerebro se incluyen las que ocurren en: los nervios, la glándula pituitaria, la glándula pineal. Los tumores pueden ser benignos (sin células de cáncer) y malignos (con células cancerígenas). A los

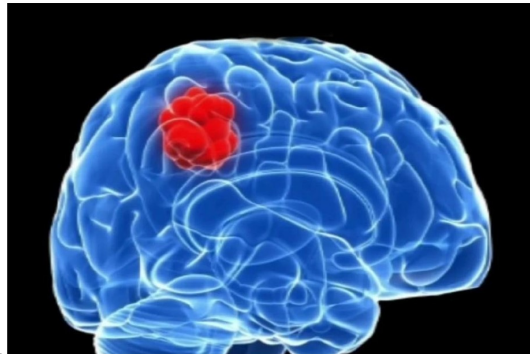


Figura 1.3: Zona afectada en el cerebro por un tumor.
ver: <https://www.dacer.org/como-se-diagnostica-un-tumor-cerebral/>

tumores que comienzan en el cerebro se les denomina tumores primarios y a los tumores que avanzan al cerebro de otra parte del cuerpo se les conoce como metastásicos o secundarios (Figura 1.3).

- **Calcificaciones:** Es un trastorno mediante el cual el calcio que entra en el cuerpo y que generalmente es absorbido por los huesos y los dientes, se deposita en el cerebro, lo cual puede causar daños en el órgano e interferir en sus funciones (Figura 1.4).



Figura 1.4: Zona afectada en el cerebro por una calcificación [1].

- **Edemas:** Los edemas resultan cuando hay una acumulación de líquidos en las células cerebrales, lo cual provoca una inflamación, esto debido a que las neuronas cerebrales aumentan su tamaño y aumentan de manera anormal el volumen del plasma (la sangre) intracraneal (Figura 1.5).

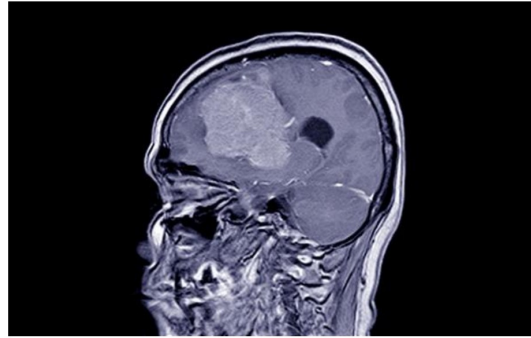


Figura 1.5: Zona afectada en el cerebro por un Edema.
ver: ver: <https://www.dacer.org/como-se-diagnostica-un-tumor-cerebral/>

En este trabajo, consideraremos el caso de una sola anomalía, un tumor cerebral.

1.3. Actividad lenta polimórfica y las ondas tipo Z

Definición 1.3.1. Las ondas tipo Z, que de igual manera se les conoce como ondas agudas anchas, son un tipo de onda Delta con una forma distintiva y bruscamente difásica las cuales ocurren de 1 a 3 segundos en una amplitud mayor a $100\mu\text{Volts}$ alcanzando un máximo de $500\mu\text{Volts}$.

Definición 1.3.2. La actividad lenta polimórfica, consiste en ondas epileptiformes que normalmente se generan al comienzo del crecimiento del tumor cerebral (astrocitoma y meningioma). Mayormente, en este caso, las ondas se encuentran en el lugar donde se ubica el tumor (solo en el cerebro) y se vuelven prominentes en la región donde se ubica la anomalía.

1.4. Modelo cuasi-estático para identificación de fuentes

En esta sección describiremos un modelo matemático general para la identificación de fuentes, el cual ha sido utilizado en diversos artículos [1], [5]. En este modelo la cabeza se modela a través de capas conductoras que mantienen conductividad constante pero diferente en cada capa. La actividad eléctrica del cerebro se genera por el intercambio iónico entre las células y se registra

por medio de electrodos colocados en el cuero cabelludo (EEG). El intercambio iónico mencionado anteriormente, genera una corriente primaria, la cual denotamos por J^p . Por lo cual, J^p genera potenciales electromagnéticos que se relacionan con 2 campos vectoriales: Uno eléctrico E y otro magnético B los cuales están acoplados.

Experimentalmente se ha logrado obtener que para frecuencias de hasta 1KHz, los tejidos corporales actúan como un medio resistivo, debido a que la impedancia capacitiva entre los tejidos es demasiado pequeña. Por lo cual, la corriente de desplazamiento se puede despreciar; esto quiere decir que la ley de Ampere–Maxwell se puede escribir como:

$$\nabla \times H = J, \quad (1.1)$$

donde H es el campo de inducción magnética. Ahora tomamos la divergencia en ambos lados de la igualdad:

$$\nabla \cdot J = 0. \quad (1.2)$$

Debemos resaltar que (1.1) describe el estado estacionario del sistema. En parte de la literatura es llamado modelo cuasi–estático [1] y [5] y de igual manera mantendremos este nombre a lo largo de esta tesis.

Por otro lado, debido a que las fuentes bioeléctricas no radian una cantidad notoria de energía y debido que la distancia de observación como el tamaño de la fuente son mucho menores a la longitud de onda asociada a la frecuencia más grande producida por los procesos bioeléctricos del cerebro, estas señales se comportan con variación lenta, por lo cual:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

De lo anterior y la ley de Faraday se halla que:

$$\nabla \times E = 0. \quad (1.4)$$

A partir de ello consideramos:

$$E = -\nabla u, \quad (1.5)$$

es decir, E es un campo conservativo. Ahora tomando las propiedades de linealidad y homogeneidad de los tejidos cerebrales, las corrientes dependen

de las fuentes en el instante correspondiente y además obedecen el principio de superposición. Por lo cual, la corriente total puede ser expresada como la superposición de una corriente debido a una fuente impresa J^P y la corriente producida por el campo eléctrico E en una región de conductividad σ , del cerebro, esto lo podemos ver como:

$$J^T = J^P + \sigma E.$$

Calculamos la divergencia en ambos lados y sustituimos (1.5) para obtener:

$$-\nabla \cdot (-\nabla u) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot J^P. \quad (1.6)$$

Por lo que

$$\Delta u = f, \quad (1.7)$$

donde $f = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot J^P$ y se denomina como fuente bioeléctrica. Además, $\Delta = \nabla^2$ es el operador de Laplace o laplaciano. De este modelo podemos decir que la fuente y el potencial producido están relacionados por medio de (1.6).

En la región Ω_2 , el potencial producido por la fuente bioeléctrica satisface la ecuación de Laplace, es decir,

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.8)$$

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.9)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} + j^P \cdot n_1, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (1.11)$$

1.4.1. Problema de Contorno Electroencefalográfico (PCE)

Tenemos que en el PCE la influencia de una fuente volumétrica de corriente neuronal se refleja en la parte derecha de la ecuación (1.7) y la de una fuente de corriente neuronal concentrada en la corteza cerebral en la segunda condición de contorno sobre S_1 , (1.10), es decir:

$$f(x) = -\frac{1}{\sigma_1} \nabla \cdot J(x), \quad x \in \Omega_1; \quad g(x) = -(j^P \cdot n)(x), \quad x \in S_1.$$

En este caso el potencial u satisface

$$\Delta u_1 = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.12)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.13)$$

donde $u_i = u$ restringido a Ω_i , para $i = 1, 2$. Además, σ_1 y σ_2 son conductividades de Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

Las condiciones de frontera sobre S_1 y S_2 corresponden a:

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.14)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.15)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (1.16)$$

En el caso en el que se encuentra una fuente cortical $g = j \cdot n_1$ se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g. \quad (1.17)$$

De lo anterior, el problema de contorno queda totalmente descrito de la manera siguiente

$$\Delta u_1 = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.18)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.19)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.20)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.21)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (1.22)$$

Podemos separar este problema en dos subproblemas, uno correspondiente a una fuente subcortical f y el otro correspondiente a una fuente cortical g .

Hasta ahora ya logramos ver el modelo cuasi-estático, debido a ello podemos establecer una correlación entre las fuentes bioeléctricas y la medición electroencefalográfica:

El EEG está relacionado con el potencial u de la siguiente forma (tomando un instante de tiempo t)

$$\text{EEG} = u_2|_{S_2}. \quad (1.23)$$

Las ideas desarrolladas anteriormente deducidas por el modelo cuasi-estático, serán usadas para el caso de anomalías (patologías), esto se aprecia de mejor manera en la Figura 1.6.

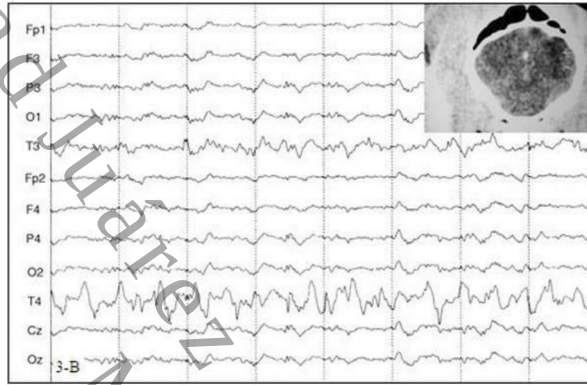


Figura 1.6: EEG de un paciente con un tumor cerebral [1].

1.5. Modelo matemático asociado a un tumor cerebral

Para poder estudiar e identificar una anomalía asociada a un tumor cerebral el modelo anterior debe de ser modificado dependiendo de las características principales de la anomalía, de esta manera con base en el modelo anterior se genera uno nuevo, para ser aplicado a tumores cerebrales de tal manera que pueda generar EEG que se registren en pacientes con dicha anomalía.

Para generar el modelo nuevo, se considera el resultado que ha sido validado experimentalmente:

Ante la presencia de la anomalía de un tumor cerebral, recortar una capa fibrosa que lo envuelve [1]

Para dicha capa fibrosa, se pueden considerar dos posibles casos:

1. El primer caso, es cuando el espesor de la capa fibrosa es delgado y por ello puede ser considerado como una interfaz que separa al cerebro sano del enfermo. De esta manera, la fuente g que genera el EEG anormal es una función definida sobre la superficie que representa dicha interfaz.
2. El segundo caso es cuando el espesor de la capa fibrosa es demasiado grueso y por ello es considerado como otra región conductora la cual separa al cerebro sano del enfermo. Por lo cual, la fuente f que genera el EEG anormal se encuentra definida en la región anular Ω_2 .

En el primer caso donde se consideran solo dos regiones el modelo se obtiene del modelo cuasi-estático tomando $f = 0$:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.24)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.25)$$

con las condiciones de frontera

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.26)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.27)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (1.28)$$

Para el segundo caso, en el que tenemos tres regiones el modelo es:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.29)$$

$$\Delta u_2 = f, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.30)$$

$$\Delta u_3 = 0, \quad \text{en } \Omega_3, \quad (1.31)$$

con las condiciones de frontera

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.32)$$

$$u_2 = u_3, \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.33)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_1 \frac{\partial u_2}{\partial n_1}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.34)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_2}, \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.35)$$

$$\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_3} = 0, \quad \text{sobre } S_3. \quad (1.36)$$

En este trabajo de tesis resolveremos el modelo (1.24)–(1.28).

1.5.1. Problemas directos para un tumor

Aunque ya dijimos que nos restringiremos al modelo (1.24)–(1.28), presentamos dos conceptos que se aplican a los dos modelos mencionados anteriormente.

Definición 1.5.1. Primer Problema Directo. Dada una función g definida sobre S_1 , debemos hallar la restricción de la solución u_2 del problema (1.24)–(1.28) (medición) a la frontera S_2 de la región, es decir, hallar $V = u_2|_{S_2}$.

Definición 1.5.2. Segundo Problema Directo. Dada la función f definida sobre Ω_2 , debemos hallar la restricción de la solución u_3 del problema (1.29)–(1.36) (medición) a la frontera de la región S_3 , es decir, hallar $u_3|_{S_3}$.

En este trabajo analizaremos el primer problema directo para un tumor y en la siguiente sección consideraremos su solución por el método de series de Fourier considerando que las regiones Ω_1 y Ω_2 son circulares (Figura 1.7).

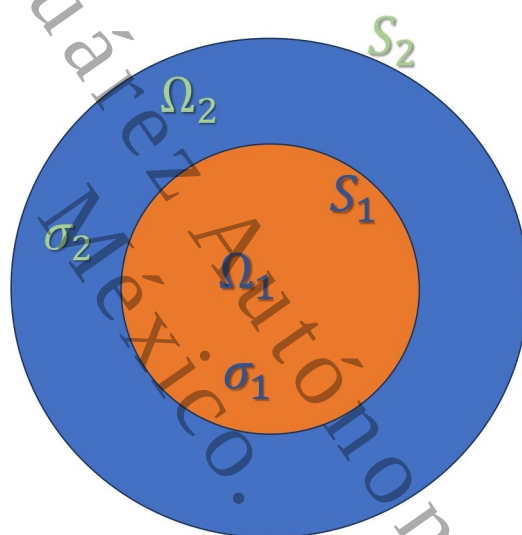


Figura 1.7: Modelo geométrico de un cerebro y un tumor concéntricos.

Capítulo 2

Solución del problema directo por series de Fourier

El problema de contorno (1.24)–(1.28) es un modelo mediante el cual podemos establecer correlaciones entre un EEG y un tumor. A través de este modelo, se busca generar un EEG teórico que contenga las características principales de un EEG real, en este caso producido por un tumor cerebral. Esto se logrará a través del problema directo, el cual consiste de forma general, en determinar la medición (EEG o $u_2|_{S_2}$) suponiendo conocida la fuente (g producida por el tumor). Para encontrar la solución a este problema, primero debemos encontrar la solución al problema de contorno, posteriormente restringir esa solución a la frontera S_2 . En este caso, suponemos que conocemos la región Ω y las subregiones Ω_i , $i = 1, 2$, que la componen (de esta manera, se conocen las fronteras de separación entre la región ocupada por el cerebro sano y el tumor, S_1 y S_2).

2.1. Series trigonométricas y polinomios trigonométricos

Llamamos *serie trigonométrica* con periodo 2π a toda serie de funciones de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \quad (2.1)$$

De igual manera, llamamos *polinomio trigonométrico* de grado N y con periodo 2π a los de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \quad (2.2)$$

Notemos que si al menos, el valor de uno de los coeficientes a_N y b_N es distinto de 0, entonces el grado del polinomio debe ser la máxima N . Además, se observa que las sumas parciales de las series trigonométricas son polinomios trigonométricos.

2.2. Series de Fourier

Las series de Fourier son series compuestas de términos cosenos y senos, en la práctica éstas representan funciones periódicas generales. Es complicado estudiar la teoría sobre las series de Fourier pero, en la práctica no es difícil resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales usando esta teoría. En esta sección se presentan los conceptos básicos y algunos resultados de convergencia sobre series de Fourier, si desea profundizar más, puede recurrir a [15] y [14].

Las funciones periódicas que se estudian con frecuencia son complicadas y la idea es representarlas en términos de funciones periódicas simples. Cualquier función periódica $f(t)$ de periodo 2π se podrá representar como una serie trigonométrica la cual se conoce como la serie de Fourier.

Dada una función $f(x)$ continua a trozos en $[0, L]$, ésta tiene una expansión de la forma

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.3)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (2.4)$$

o

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.5)$$

con

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.6)$$

Definición 2.2.1. Sea $f(x)$ una función real continua a trozos definida en $[-L, L]$ la serie de Fourier para f está dada por

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.7)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (2.8)$$

y

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.9)$$

Podemos afirmar que las expansiones (2.3) y (2.5) son casos especiales de la serie de Fourier (2.7).

2.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Representamos la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f como

$$S_N f(\theta) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (2.10)$$

donde la serie trigonométrica es

$$\frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)). \quad (2.11)$$

2.3.1. Núcleo de Dirichlet

La suma parcial $S_N f(\theta)$ la escribiremos de manera más manejable, así que sustituyendo los coeficientes a_n y b_n por sus expresiones integrales tenemos

$$\begin{aligned} S_N f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(nt) \cos(n\theta) + \sin(nt) \sin(n\theta)] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(\theta - t)) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(\theta - t) dt, \end{aligned}$$

donde $D_N(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) + \cdots + \cos(Nt)$ y a esta función la llamamos **núcleo de Dirichlet**. Multiplicando por $\sin(t/2)$ y por la siguiente relación trigonométrica

$$2\cos(nt) \sin(t/2) = [\sin(n + 1/2)t - \sin(n - 1/2)t],$$

llegamos a

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin(t/2)}. \quad (2.12)$$

El núcleo de Dirichlet cuenta con las siguientes propiedades:

1. D_N es una función periódica de periodo 2π .
2. D_N es una función par, es decir, $D_N(-t) = D_N(t)$.
3. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

De las propiedades anteriores, la primera nos permite cambiar el intervalo de integración con el que sea de longitud 2π . Además, como f es del mismo periodo podemos poner

$$S_N f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) D_N(t) dt.$$

Cambiando la variable t por $-t$ en el intervalo $(-\pi, 0)$ y por la segunda propiedad tenemos

$$S_N f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(\theta + t) + f(\theta - t)] D_N(t) dt.$$

Al siguiente lema se le conoce como el “lema de Riemann–Lebesgue”

Lema 2.3.1. Si f es integrable y λ real,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\lambda t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

Demostración. Si definimos a f como la función característica de un intervalo (a, b) tenemos

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \int_a^b \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{\cos(\lambda b) - \cos(\lambda a)}{\lambda} \right|,$$

lo cual tiende a cero cuando λ tiende a infinito. Esto es cierto para cualquier función escalonada. Si f es integrable, dado $\epsilon > 0$ existe g_ϵ escalonada tal que

$$\int |f - g_\epsilon| < \epsilon/2.$$

Haciendo

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_\epsilon(t)| dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(t) \sin(\lambda t) dt \right|.$$

Y si tomamos a λ lo suficientemente grande, el término de la izquierda se hace menor que ϵ .

2.3.2. Propiedad de localización

Teorema 2.3.1. (Principio de localización de Riemann)

1. Sea f integrable y periódica de periodo 2π tal que $f(x) = 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y algún $\delta > 0$; entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = 0.$$

2. Si f y g son integrables y periódicas de periodo 2π y $f(x) = g(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, o bien, existen $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0)$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N g(x_0)$ y son iguales, o bien no existe ninguno de los dos.

La demostración se puede encontrar en el capítulo 2.3 de [14].

2.3.3. Teoremas de convergencia puntual de Fourier

Gracias al lema de Riemann–Lebesgue se pueden presentar los dos siguientes teoremas de convergencia.

Teorema 2.3.2. Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$ que tiene derivada en el punto x_0 . Entonces, la serie de Fourier de f converge a $f(x_0)$ en x_0 .

Demostración. Por la propiedad 3 del núcleo de Dirichlet (sección 2.3.1), podemos escribir

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0)] \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \frac{t}{2 \sin(t/2)} \sin(N + 1/2)t dt. \end{aligned}$$

Del último integrando, el primer factor es una función integrable en $(-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)$ y además está acotado en un entorno de 0 e integrable en $(-\pi, \pi)$. El segundo factor es continua en el mismo intervalo, ya que es notorio que su discontinuidad en el origen puede ser evitable. Entonces, el producto de ambas funciones será integrable y aplicando el lema de Riemann–Lebesgue se deduce que el límite de $S_N f(x_0) - f(x_0)$ es 0.

Teorema 2.3.3. Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$ que tiene derivadas laterales en el punto x_0 en el sentido mencionado. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x_0 a $(f(x_0+) + f(x_0-))/2$.

La demostración del teorema se puede verificar en [14]

2.3.4. El teorema de Dirichlet

Debido a Dirichlet el primer teorema de convergencia de series de Fourier, comenzó a verse en 1829 y se refiere a funciones monótonas a trozos.

Antes de comenzar a hablar sobre el teorema se harán algunos comentarios y se presentarán algunos teoremas de los cuales su demostración formal y detallada puede verse en [14]:

Una función monótona y acotada en un intervalo $[a, b]$ es integrable y tiene límites laterales finitos en cada punto. Si estos límites no coinciden la función tendrá una discontinuidad con un salto finito. La suma de todos estos saltos no deben ser mayor que la diferencia de los valores del intervalo de la función, de tal manera que el conjunto de las discontinuidades con salto mayor que $1/n$ es finito y, por tanto, es a lo más numerable. Una función monótona a trozos, es monótona en una cantidad finita de intervalos que unidos dan el intervalo original.

Teorema 2.3.4. Sea f una función monótona a trozos y acotada en $[-\pi, \pi]$. Entonces, $S_N f(x)$ converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$. En particular, converge a $f(x)$ si la función es continua en x .

Debemos de entender que la función se ha extendido por periodicidad cuando el punto x es uno de los extremos del intervalo. Así, $f(\pi+) = f((-\pi)+)$ y $f((-\pi)-) = f(\pi-)$. Utilizaremos en su demostración los siguientes lemas:

Lema 2.3.2. Sea g no decreciente y no negativa en $[a, b]$ y h continua con un número finito de cambios de signo en $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b g(t)h(t)dt = g(b) \int_c^b h(t)dt.$$

Lema 2.3.3. Existe una constante M (independiente de N) tal que

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} D_N(t)dt \right| \leq M \quad \text{para todo } 0 \leq \eta \leq \delta \leq \pi.$$

En 1837 se extendió el enunciado original de Dirichlet de 1829, esto permitió, que las funciones tuviesen un número finito de discontinuidades infinitas siempre que fuera absolutamente integrable. El resultado de convergencia se obtiene en aquellos puntos en los que los límites laterales existen y son finitos.

Se pueden analizar otros teoremas, como el teorema de Dini (1880) que utiliza de manera sencilla el Lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 2.3.5. (Teorema de Dini). Sea f integrable en $[-\pi, \pi]$, x_0 un punto del intervalo y l un número real tal que la función

$$\Phi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2l,$$

satisface $\int_0^\delta \frac{|\Phi(t)|}{t} dt < \infty$ para algún $\delta > 0$. Entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = l.$$

Notemos que si f es continua en x_0 , l no puede ser más que $f(x_0)$, pero la continuidad no es suficiente por sí sola para garantizar la condición de Dini. Este resultado tiene como caso particular el siguiente teorema de Lipschitz (1864).

Teorema 2.3.6. (Teorema de Lipschitz). Si f es integrable en $[-\pi, \pi]$ y en un punto x_0 de ese intervalo se cumple

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq L|t|, \quad (2.13)$$

para alguna constante L y $|t| < \delta$, entonces $S_N f(x_0)$ converge a $f(x_0)$.

Una función f cumple la condición de Lipschitz si

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para todo par de puntos x, y de su dominio. Es una condición de Lipschitz uniforme, mientras que el resultado del teorema anterior es una condición puntual. También podemos hablar de condición de Lipschitz de orden α ($0 < \alpha \leq 1$) cuando

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

La condición puntual asociada también es suficiente para la convergencia, es decir, basta tener $|t|^\alpha$ en el segundo miembro de (2.13) para aplicar el teorema de Dini.

2.4. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

El criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme asegura que si para una serie de funciones encontramos una serie numérica mayormente

convergente, la serie de funciones converge uniformemente. Al aplicar este criterio a (2.11) necesitamos que la siguiente serie sea convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|). \quad (2.14)$$

Como una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente tiene como límite una función continua, entonces solo hay convergencia uniforme por series de Fourier a funciones continuas. Tenemos entonces los siguientes teoremas y lemas en los cuales se presenta la demostración en el capítulo 3 de [14].

Teorema 2.4.1. Sea f una función continua en $[-\pi, \pi]$ cuya derivada existe excepto en un número finito de puntos y es continua a trozos y acotada. Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

En los extremos del intervalo la continuidad es periódica y por ello $f(\pi) = f(-\pi)$.

2.4.1. Localización uniforme

El principio de localización nos asegura que el comportamiento de la serie de Fourier en un punto sólo depende de como sea la función en su entorno. Consideramos subintervalos $[-\pi, \pi]$ para casos semejantes para la convergencia uniforme. Para ello tenemos el siguiente lema de Riemann–Lebesgue.

Lema 2.4.1. Sea f una función periódica de periodo 2π , integrable y acotada, y g una función monótona a trozos y acotada. Entonces,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(\lambda t)dt = 0,$$

es uniformemente en x .

Teorema 2.4.2. Si f es una función nula en un intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de f converge a cero uniformemente en $[a + \delta, b - \delta]$ para $\delta > 0$.

Teorema 2.4.3. Sea f continua, con derivada continua a trozos y acotada en un intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $[a + \delta, b - \delta]$ para $\delta > 0$.

Otros criterios de convergencia uniforme semejantes a los de Dirichlet–Jordan y Dini–Lipschitz, son:

Teorema 2.4.4. Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$, de variación acotada y continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces, la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[a + \delta, b - \delta]$, para $\delta > 0$.

Para el siguiente teorema definimos el “módulo de continuidad” de una función f en un intervalo I como

$$w(\delta) = \sup \{|f(t) - f(s)| : t, s \in I, |t - s| < \delta\}.$$

Así que, f cumple una condición de Lipschitz de orden α en I equivale a $w(\delta) \geq L\delta^\alpha$ con L independiente de δ .

Teorema 2.4.5. Sea f integrable en $(-\pi, \pi)$, continua en $I = [a, b]$ y tal que $w(\delta)/\delta$ es integrable en $(0, \eta)$ para algún $\eta > 0$, donde $w(\delta)$ es el módulo de continuidad de f en I . Entonces, la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, para $\epsilon > 0$.

2.5. Series de Fourier en un disco

Asociado con la ecuación de Laplace en un disco G tenemos dos problemas en el sentido de Hadamard:

$$\Delta u = 0 \text{ en } G, \quad u = f \text{ en } \partial G, \quad (2.15)$$

y

$$\Delta u = 0 \text{ en } G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ en } \partial G. \quad (2.16)$$

Resolveremos el problema (2.15) (Problema de Dirichlet) en el disco abierto $G = D_\rho \subset \mathbb{R}^2$ de radio ρ centrado en el origen. Para ello cambiamos x y y a coordenadas polares mediante la sustitución

$$x = r \cos(\theta) \quad y \quad y = r \sin(\theta).$$

Tenemos que $r^2 = x^2 + y^2$ y derivando implícitamente con respecto de x tenemos

$$2rr_x = 2x,$$

despejando r_x obtenemos

$$r_x = \frac{2x}{2r} = \frac{x}{r}.$$

De forma análoga tenemos que $r_y = \frac{y}{r}$. Por lo tanto,

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}.$$

Por otro lado

$$r_{xx} = \frac{r - x \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{\frac{r^2 - x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

y procediendo de forma similar

$$r_{yy} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}.$$

De lo anterior tenemos que el Laplaciano de r , está dado por

$$\Delta r = r_{xx} + r_{yy} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} = \frac{2r^2 - (x^2 + y^2)}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Derivamos ahora implícitamente con respecto de x la sustitución $x = r \cos \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= r[-\sin(\theta)]\theta_x + r_x \cos(\theta) = -r \sin(\theta)\theta_x + \frac{x}{r} \cos(\theta) \\ &= -r \sin(\theta)\theta_x + \cos^2(\theta). \end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a

$$1 - \cos^2(\theta) = -r \sin(\theta)\theta_x,$$

usando la identidad trigonométrica $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

$$\sin^2(\theta) = -r \sin(\theta)\theta_x,$$

así que al despejar θ_x se obtiene finalmente

$$\theta_x = -\frac{\sin(\theta)}{r}.$$

Un procedimiento similar nos lleva a

$$\theta_y = \frac{\cos(\theta)}{r}.$$

No es difícil verificar que el Laplaciano de θ es igual a

$$\Delta \theta = \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0.$$

Ahora, usamos la regla de la cadena y un poco de álgebra para verificar que el operador de Laplace de u en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} \\ &= u_{rr}(r_x^2 + r_y^2) + 2u_{r\theta}(r_x\theta_x + r_y\theta_y) + u_{\theta\theta}(\theta_x^2 + \theta_y^2) + (\Delta r)u_r + (\Delta \theta)u_\theta \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Escribimos la ecuación de Laplace (2.15) en coordenadas polares como sigue:

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(\rho, \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

buscamos soluciones producto:

$$u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta).$$

claramente

$$u_r = R'(r)\Phi(\theta), \quad u_{rr} = R''(r)\Phi(\theta), \quad u_{\theta\theta} = R(r)\Phi''(\theta)$$

y sustituyendo en (2.17) llegamos a que:

$$\frac{rR''}{R} + \frac{rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (2.18)$$

De la última ecuación, podemos ver que el lado izquierdo solo depende de r , mientras que el lado derecho solo depende de θ . Por lo que, podemos igualar ambos lados a una constante μ y deducimos que, para que R y Φ formen una solución producto se deben satisfacer las siguientes dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \text{donde } \Phi \text{ tiene periodo } 2\pi, \quad (2.19)$$

$$r^2R'' + rR' - \mu R = 0, \quad \text{donde } R \text{ esta acotada cuando } r \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Las soluciones 2π periódicas de (2.19) están dadas por

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad \mu_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde A_n y B_n son constantes arbitrarias.

Ahora buscamos la solución de (2.20) con $\mu = n^2$ en la forma r^α . Sustituyendo esto, la ecuación (2.20) nos da:

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2r^\alpha = 0,$$

o

$$r^\alpha(\alpha^2 - n^2) = 0.$$

Por lo tanto, la solución general de (2.20) viene dada por:

$$A_0 + B_0 \log(r) \quad \text{con} \quad n = 0,$$

y

$$A_n r^n + B_n r^{-n} \quad \text{con} \quad n \geq 1.$$

Como solo podemos admitir soluciones de (2.20) que estén acotadas cuando $r \rightarrow 0$, nuestras soluciones bases son:

$$1 \quad \text{para} \quad n = 0; \quad r^n \cos(n\theta) \quad \text{y} \quad r^n \sin(n\theta) \quad \text{con} \quad n \geq 1.$$

Buscaremos una solución de (2.15) de la forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Para satisfacer la condición de frontera $u(\rho, \theta) = f(\theta)$, debemos elegir los coeficientes a_n, b_n de tal manera que

$$f(\theta) = u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (2.21)$$

donde $f(\theta)$ de periodo 2π , tiene la serie de Fourier:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta),$$

Aquí, A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de f y se calculan como:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

y

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Con esto la ecuación (2.21) se satisface si escogemos:

$$a_0 = A_0, \quad a_n = \rho^{-n} A_n \quad \text{y} \quad b_n = \rho^{-n} B_n \quad \text{con} \quad n \geq 1.$$

Con todo esto, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 2.5.1. Sea $D_\rho \subset R^2$ un disco abierto de radio ρ con centro en el origen. Sea $f(\theta)$ una función continua con periodo 2π . Entonces hay una única solución $u \in C^\infty(D_\rho)$ de (2.15) que es continuo en $\bar{D}_\rho$. En coordenadas polares

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)],$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de f .

2.6. Solución por series de Fourier

Para hallar la solución del problema (1.24)–(1.28) se considera que $g \in L_2^{(1)}(S_1)$ donde:

$$L_2(S_1) = \left\{ g : S_1 \rightarrow \mathbb{R} : \int_{S_1} g^2(x) dx < \infty \right\}, \quad (2.22)$$

y

$$L_2^{(1)}(S_1) = \left\{ g \in L_2(S_1) : \int_{S_1} g(x) dx = 0 \right\}. \quad (2.23)$$

Supondremos que la función g se puede escribir en su serie de Fourier como:

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n Y_n(\theta), \quad (2.24)$$

en términos de las eigenfunciones Y_n y donde los coeficientes g_n están dados por

$$g_n = \int_{S_1} g(\theta) Y_n(\theta) dS_1,$$

y son llamados los coeficientes de Fourier asociados a la fuente g la cual está localizada en la frontera S_1 de la región Ω_1 . La solución del problema (1.24)–(1.28) se busca de la forma:

$$u_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 r^n Y_n(\theta), \quad (2.25)$$

y

$$u_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 r^n + B_n^2 r^{-n-1}) Y_n(\theta), \quad (2.26)$$

donde los coeficientes A_n y B_n de los potenciales son desconocidos y se determinan de las condiciones de frontera del problema.

De la condición $u_1 = u_2$, sobre S_1 , se halla que

$$A_n^1 R_1^n = A_n^2 R_1^n + B_n^2 R_1^{-n-1}, \quad (2.27)$$

donde R_1 es el radio de la región Ω_1 y de la condición $\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g$ sobre S_1 , se tiene:

$$\sigma_1 A_n^1 n R_1^{n-1} = \sigma_2 [A_n^2 n R_1^{n-1} + B_n^2 R_1^{-n-2}(-n-1)] + g_n. \quad (2.28)$$

De la condición de frontera $\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} = 0$ (se está suponiendo que las fronteras S_1 y S_2 son concéntricas), se halla:

$$\sigma_2 [A_n^2 n R_2^{n-1} + B_n^2 R_2^{-n-2}(-n-1)] = 0, \quad (2.29)$$

donde R_2 es el radio de la región Ω_2 y despejando A_n^2 de la ecuación (2.29) se obtiene:

$$A_n^2 = \frac{(n+1)B_n^2 R_2^{-n-2}}{n R_2^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right) B_n^2 R_2^{-2n-1}. \quad (2.30)$$

Multiplicando por R_1 la ecuación (2.28) se llega a:

$$\sigma_1 A_n^1 n R_1^n = \sigma_2 A_n^2 n R_1^n + \sigma_2 B_n^2 R_1^{-n-1}(-n-1) + g_n R_1. \quad (2.31)$$

Multiplicando la ecuación (2.27) por $n\sigma_1$ se obtiene:

$$A_n^1 n \sigma_1 R_1^n = n \sigma_1 A_n^2 R_1^n + n \sigma_1 B_n^2 R_1^{-n-1}. \quad (2.32)$$

Comparando las ecuaciones (2.31) y (2.32) resulta en:

$$\sigma_2 A_n^2 n R_1^n + \sigma_2 B_n^2 R_1^{-n-1}(-n-1) + g_n R_1 = n \sigma_1 A_n^2 R_1^n + n \sigma_1 B_n^2 R_1^{-n-1}. \quad (2.33)$$

De la ecuación anterior despejamos $g_n R_1$ y obtenemos:

$$g_n R_1 = n(\sigma_1 - \sigma_2) A_n^2 R_1^n + [n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2] B_n^2 R_1^{-n-1}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo en (2.34) A_n^2 dado por (2.30) se obtiene

$$B_n^2 = \frac{g_n R_1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1) R_2^{-2n-1} R_1^n + R_1^{-n-1} [n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]}. \quad (2.35)$$

Sustituyendo B_n^2 en (2.30) se obtiene

$$A_n^2 = \frac{(n+1)g_n R_1 R_2^{-2n-1}}{n \{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]\}}. \quad (2.36)$$

Por lo tanto, el potencial exacto generado sobre S_2 por la fuente $g \in L_2(S_1)$, está dado por

$$V(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[n + (n+1)R_2^{-2n-1}]g_n R_1}{n \{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]\}} \right\} Y_n(\theta). \quad (2.37)$$

Además, despejando A_n^1 en (2.32) se obtiene

$$A_n^1 = \frac{[(n+1)R_2^{-2n-1} + nR_1^{-2n-1}]g_n R_1}{n \{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]\}}. \quad (2.38)$$

De la expresión (2.37) para $V = u_2|_{S_2}$ se tiene que los coeficientes de Fourier de V están dados por

$$V_n = \frac{(2n+1)R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + [n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]R_2^{2n+1}]} g_n, \quad (2.39)$$

los cuales son los coeficientes resultantes de las condiciones de frontera. Recordar que los armónicos $Y_n(\theta)$ forman una base ortogonal para el espacio de las funciones armónicas ortogonales a las constantes, espacio que surge de la condición de compatibilidad de la función g .

2.7. Construcción de un Ejemplo

Realizamos los siguientes pasos:

1. Definimos nuestros dominios y sus fronteras. Consideramos que:

- $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R_1^2\}.$
- $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}.$

Con esto tenemos que sus fronteras son:

- $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = R_1^2\}.$

$$\blacksquare S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = R_2^2\}.$$

Consideramos también a $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$

2. Damos una g definida sobre S_1 en términos de algunas funciones propias, $y_n : \sin(n\theta)$ o $\cos(n\theta)$:

$$g(\theta) = 5 \sin(\theta) - 6 \sin(2\theta) + \sin(3\theta).$$

3. Obtenemos los coeficientes de Fourier g_n de g . En este caso, son: $g_1 = 5$, $g_2 = -6$ y $g_3 = 1$.
4. Obtenemos las A_n^2 en términos de R_1 , R_2 y g_n :

$$A_n^2 = \frac{(n+1)g_n R_1 R_2^{-2n-1}}{n \{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]\}}.$$

De esto los valores de A_n^2 son $A_n^2 = 0$ para $n > 3$ y:

$$\begin{aligned} \blacksquare A_1^2 &= \frac{10R_2^{-3}}{4R_2^{-3} + 5R_1^{-3}}. \\ \blacksquare A_2^2 &= \frac{-3R_1}{2R_1^2 + 3R_1^{-3}R_2^5}. \\ \blacksquare A_3^2 &= \frac{4R_1}{24R_1^3 + 39R_1^{-4}R_2^7}. \end{aligned}$$

5. Obtenemos los coeficientes B_n^2 en términos de R_1 , R_2 y g_n .

$$B_n^2 = \frac{g_n R_1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]}.$$

De esto los valores de B_n^2 son $B_n^2 = 0$ para $n > 3$ y:

$$\begin{aligned} \blacksquare B_1^2 &= \frac{5}{4R_2^{-3} + 5R_1^{-3}}. \\ \blacksquare B_2^2 &= \frac{-2}{2R_2^{-5}R_1 + 3R_1^{-4}}. \\ \blacksquare B_3^2 &= \frac{1}{8R_2^{-7}R_1^2 + 13R_1^{-5}}. \end{aligned}$$

6. Obtenemos los coeficientes A_n^1 en términos de R_1, R_2 y g_n .

$$A_n^1 = \frac{[(n+1)R_2^{-2n-1} + nR_1^{-2n-1}]g_n R_1}{n \{(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + R_1^{-n-1}[n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]\}}.$$

De esto los valores para A_n^1 son $A_n^1 = 0$ para $n > 3$ y:

- $A_1^1 = \frac{10R_2^{-3} + 5R_1^{-3}}{4R_2^{-3} + 5R_1^{-3}}.$
- $A_2^1 = \frac{-3R_2^{-5} - 2R_1^{-5}}{2R_2^{-5}R_1 + 3R_1^{-4}}.$
- $A_3^1 = \frac{4R_2^{-7} + 3R_1^{-7}}{24R_2^{-7}R_1^2 + 39R_1^{-5}}.$

7. Gráficar u_1 y u_2 . En la Figura 2.1 se presentan las funciones u_1 y u_2 con una cierta “separación” para ver claramente dónde se encuentra la región 1 y la región 2 (Ω_1, Ω_2 , respectivamente).

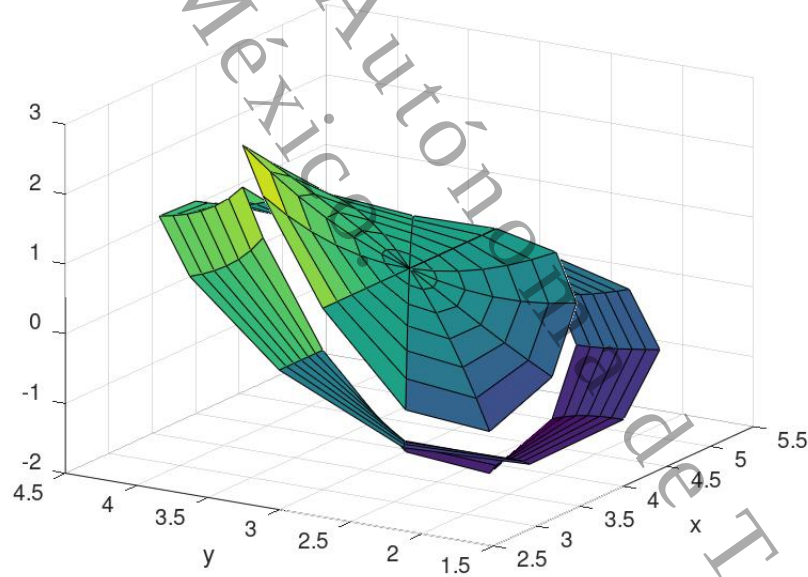


Figura 2.1: Representación gráfica de u_1 y u_2

En la Figura 2.2 presentamos otro ángulo de las soluciones u_1 y u_2 , donde ambas dan lo que es el cerebro humano y la intersección de ambos.

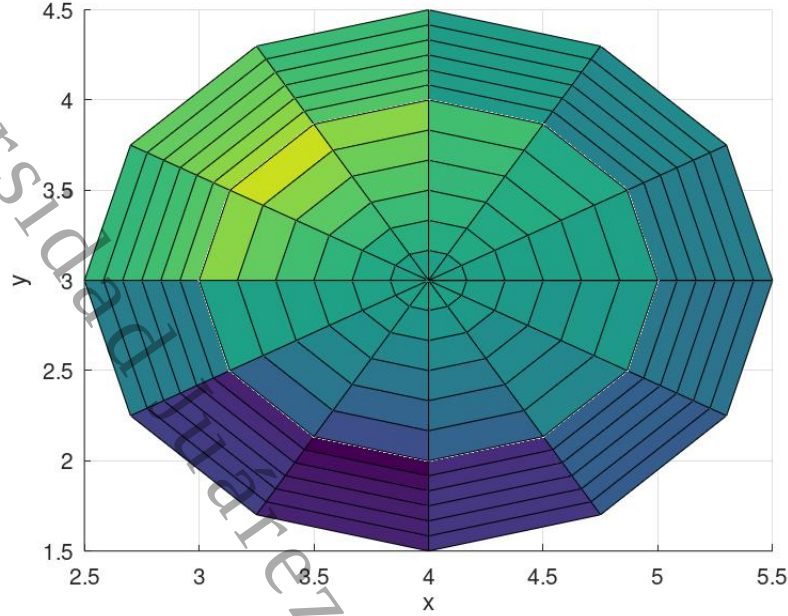


Figura 2.2: Gráfica de las soluciones u_1 y u_2 , con diferente vista.

2.8. Planteamiento Operacional

El análisis de los problemas directos, se puede realizar a través de un planteamiento operacional que permita deducir un buen o mal planteamiento. Para ello, se requiere la definición de la solución del problema de contorno.

Definición 2.8.1. Una función u tal que

$$u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2), \quad (2.40)$$

es una solución clásica del problema (1.24)–(1.28) si las relaciones asociadas satisfacen en el sentido clásico la diferenciación.

De ello surge el siguiente teorema visto en la tesis de Estrada [1]

Teorema 2.8.1. Dada $g \in C(S_1)$, la condición de compatibilidad (2.23), es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de la solución clásica del problema (1.24)–(1.28).

Consideramos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ cuyos elementos tienen derivada débil y pertenecen a $L_2(\Omega)$. Denotaremos por medio de $L_2^1(S_1)$ al subespacio de $L_2(S_1)$ compuesto por las funciones que satisfacen la condición de compatibilidad. De esta manera se tiene la siguiente definición:

Definición 2.8.2. Dada $g \in L_2(S_1)$, que satisface la condición de compatibilidad, una función $u \in H^1(\Omega)$, es llamada una solución débil del problema (1.24)–(1.28) si satisface la siguiente relación

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v d\Omega = \int_{S_1} g v ds, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.41)$$

Teorema 2.8.2. La condición de compatibilidad de la función g es necesaria y suficiente para la existencia de la solución débil del problema (1.24)–(1.28). Hay una única solución débil u que satisface

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \langle u, 1 \rangle_{L_2(S_1)} = 0,$$

y además

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_2(S_1)}, \quad (2.42)$$

donde la constante C no depende de g .

Nótese que la condición de compatibilidad es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad (salvo constantes) tanto de la solución clásica como de la débil. A través del teorema anterior, podemos definir el siguiente operador:

$$T : L_2^1(S_1) \longrightarrow H^1(\Omega_1), \quad \text{tal que} \quad T(g) = u,$$

donde u es la única solución débil del problema. Este operador está bien definido y además, por la condición (2.42), es continuo. El operador A que se obtiene de la composición del operador continuo T con el operador compacto traza T_r a la frontera S_2 de la región Ω , es compacto. Más precisamente, el operador

$$A : L_2^{(1)}(S_1) \longrightarrow L_2(S_2),$$

se define a través de la regla de correspondencia $g \mapsto V$ donde $V = u|_{S_2}$ y u es la solución del problema (1.24)–(1.28) que satisface que $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$. Este operador está bien definido, pues para cada fuente $g \in L_2^{(1)}(S_1)$ existe un único potencial u , solución del problema de contorno, que es ortogonal a las constantes en el producto escalar de $L_2(\Omega)$.

En este caso particular de esferas concéntricas, usando los cálculos dados anteriormente, se halla que la regla de correspondencia del operador A vista en [1] y definida como:

$$A(g)(\theta, \varphi) = R_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{(2n+1)R_1^{n+2}R_2^n g_{nm}}{n[(n+1)(\sigma_1-\sigma_2)R_1^{2n+1} + [n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2]R_2^{2n+1}]} \right\} Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Capítulo 3

El método de elemento finito

En este capítulo describiremos los conceptos y detalles de la aplicación del método del elemento finito para la solución numérica de un problema elíptico, en un dominio general en $\mathbb{R}^2$, pero cuando sea necesario, los ilustraremos en un dominio circular Ω porque así lo requiere nuestro problema de EEG que trataremos en el capítulo 4. El problema que trabajaremos aquí, es el siguiente α y ν reales positivos, f continua en Ω , g_0 continua en Γ_1 , g_1 continua en Γ_2 , encontrar u en Ω que satisfaga las siguientes ecuaciones

$$\alpha u - \nu \Delta u = f \quad \text{en } \Omega. \quad (3.1)$$

$$u = g_0 \quad \text{sobre } \Gamma_1. \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_1 \quad \text{en } \Gamma_2. \quad (3.3)$$

Γ_1 y Γ_2 se intersectan a lo más en 2 puntos y su Γ es la frontera de Ω .

Para resolver el problema por elemento finito, primero obtendremos la formulación variacional del problema que es una ecuación integral que se debe cumplir para todo un conjunto de funciones llamadas de prueba, que es un espacio vectorial de dimensión infinita. Después de esto, deberemos construir un subespacio de dimensión finita para obtener la versión discreta de la formulación variacional. Resolver la versión discreta de la formulación variacional equivale a obtener un sistema de ecuaciones lineales donde la matriz A es simétrica y definida positiva y cuya solución es una aproximación del valor de u en ciertos puntos discretos. En las siguientes secciones describiremos esto con más detalle.

3.1. Formulación Variacional

Nos interesa resolver el problema (3.1) y (3.2) aplicando el método del elemento finito. Para ello, debemos obtener la formulación variacional, lo

cual implica ciertos espacios de funciones, como los espacios de Sobolev de los cuales algunos de ellos son espacios de Hilbert. Así que definimos los espacios a continuación:

Definición 3.1.1. Sea $w \subset \mathbb{R}^n$ un abierto con frontera γ y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. Se define el llamado espacio de Sobolev, denotado por $W^{1,p}(w)$ de la manera siguiente

$$W^{1,p}(w) = \left\{ u \in L^p \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(w) \text{ tal que } \int_w u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_w g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(w), \quad \forall i = 1, \dots, n. \right\}$$

Se introduce la siguiente notación para un caso especial:

$$H^1(w) = W^{1,2}(w) \text{ y } H_0^1(w) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(w)$ se denota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ y } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \text{grad}(u).$$

El espacio $W^{1,p}(w)$ está dotado de la siguiente norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(w)} = \|u\|_{L^p(w)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(w)},$$

donde

$$\|u\|_{L^p(w)} = \left[\int_w |u|^p \right]^{1/p};$$

o también equivalentemente a:

$$\left(\|u\|_{L^p(w)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(w)}^p \right)^{1/p}.$$

Lo normal del espacio $H^1(w)$ viene dado por el siguiente producto escalar:

$$(u, v)_{H^1(w)} = (u, v)_{L^2(w)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(w)};$$

con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(w)} = \left(\|u\|_{L^2(w)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(w)}^2 \right)^{1/2}.$$

La demostración formal de las siguientes afirmaciones puede verse en [17] correspondientes a los capítulos VIII y IX respectivamente.

Proposición 3.1.2. El espacio $H^1(w)$ es un espacio de Hilbert separable.

Definición 3.1.3. Sea $1 \leq p \leq \infty$. A la cerradura de $C_c^1(w)$ en $W^{1,p}(w)$ se le denota como $W_0^{1,p}(w)$ o de igual manera se denota como:

$$H_0^1(w) = W_0^{1,2}(w) = \{v \in H^1(w) | v = 0 \text{ sobre } \gamma\},$$

donde $H_0^1(w)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar en H^1 .

Consideremos el problema (3.1) y (3.2) con $g \in C(w)$ y w abierto acotado. Una solución clásica del problema es una función $u \in C^2(w) \cap C(\bar{w})$ que verifica las ecuaciones (3.1) y (3.2). Pero si lo vemos desde el punto de vista de la aproximación numérica es difícil pedir que u esté en $C^2(w)$. Adicionalmente a este punto, notemos que la función g no tiene que ser necesariamente continua. Por ello, en lugar de resolver el problema (3.1) y (3.2) definimos

$$V = \{v \in H^1(w) | v = g_0 \text{ sobre } \gamma_0\},$$

y

$$W = \{v \in H^1(w) | v = 0 \text{ sobre } \gamma_0\},$$

y con ello se resuelve el problema de encontrar $u \in V$ tal que

$$\nu \int_w \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \alpha \int_w u v dx dy = \int_w f v dx dy + \int_{\gamma_1} g_1 v d\gamma, \quad \forall v \in W. \quad (3.4)$$

A la ecuación anterior se le conoce como la formulación débil de (3.1) y (3.2) y a una función u que satisface (3.3) se le llama una solución débil de (3.1) y (3.2).

Si $f \in L^2(w)$, se aplica entonces el teorema de Stampachia [17] con $H = H^1(w)$ y concluimos que existe una única solución de (3.3), además de que:

$$u = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \left(\nu \int_w \|\nabla v\|^2 + \alpha \int_w v^2 - 2 \int_w f v - 2 \int_{\gamma_1} g_1 v \right) \right\} \quad (3.5)$$

A esta ecuación se le conoce como la formulación variacional de (3.1)–(3.3).

Por lo tanto, existe una única solución débil para (3.1)–(3.3) y se sabe que si f, g_0 y g_1 son lo suficientemente suaves, entonces la solución débil, también será la solución clásica [18].

3.2. Espacio de elemento finito

Luego de obtener la formulación variacional para nuestro problema elíptico, para poder obtener una aproximación por elemento finito es necesario tomar un conjunto V_h y un subespacio W_h de dimensión finita contenidos en V y W respectivamente que intervienen en la formulación variacional. Un conjunto V_h y un espacio W_h se forma de la siguiente manera:

1. Se hace una discretización del dominio w por medio de triángulos K satisfaciendo:
 - $\bar{w} = \cup K$ (cuando el dominio es un círculo la discretización por triángulos nunca puede cubrir completamente al dominio, pero siempre se puede hacer que la diferencia sea tan pequeña como uno quiera).
 - $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$ para $i \neq j$. ($\mathring{K}$ =interior de K).
 - Si K_i y K_j son adyacentes, dos de sus vértices deben coincidir, es decir, no se permite que un vértice de K_i sea punto interior de una arista de K_j .
2. Se define un espacio H_h y los elementos que serán base para tal espacio.

Con la triangulación anterior de w , la cual se denota por τ_h se asocian la siguiente definición así como los siguientes conjuntos y espacios de dimensión finita.

Definición 3.2.1. Si $K \in \tau_h$ entonces se define a h_K como el diámetro del triángulo K , esto es, la longitud del lado más largo de K . De igual manera, se define ρ_K como el diámetro del círculo inscrito en K . Así que se define:

$$h = \max_{K \in \tau_h} (h_K).$$

Definición 3.2.2. Para $K \in \tau_h$ y $w \subset \mathbb{R}^2$ se define:

- $P_1(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x, y) = a + bx + cy\},$
- $H_h(w) = \{v \in C^0(w) : v|_K \in P_1(K), \quad \forall K \in \tau_h\},$
- $V_h(w) = \{v \in H_h(w) : u_h = g_0 \text{ sobre } \gamma_0\},$
- $W_h(w) = \{v \in H_h(w) : v(n_j) = 0, \quad \forall n_j \in \gamma_0\},$

Se tiene que una base de H_h son las funciones v_i^h definidas de la siguiente manera

$$v_i^h(n_j) = \delta_{ij},$$

donde n_j es el vértice j de la triangulación τ_h . Si se etiquetan los vértices de 1 a N , entonces la base de H_h debe tener tantos elementos como cantidad de nodos tenga la triangulación. Por otro lado, la base de W_h se obtiene al quitar de la base de H_h las funciones v_i^h asociadas con los nodos que pertenecen a γ_0 . Se puede ver que las v_i^h son linealmente independientes y que cualquier función $u \in H_h$ se puede escribir como combinación lineal de ellas, es decir, $\{v_i^h\}_{i=1}^N$ es una base para H_h (Figura 3.1) [16].

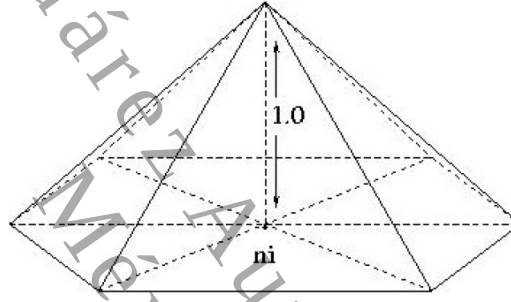


Figura 3.1: Función base local v_i^h .

Al espacio H_h se le llama un espacio de elemento finito. Una vez que se realizó todo el procedimiento anterior sustituimos V_h por V y W_h por W en la formulación variacional (3.4) para obtener el problema discreto asociado:

$$u_h \in V_h \quad \text{tal que} \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in W_h. \quad (3.6)$$

donde

$$a(u_h, v_h) = \nu \int_w \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \alpha \int_w u_h v_h,$$

y

$$\langle f, v_h \rangle = \int_w f v_h + \int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma_1.$$

Suponiendo que $\{v_1^h, \dots, v_n^h, v_{n+1}^h, \dots, v_N^h\}$ es una base para H_h y $\{v_1^h, \dots, v_n^h\}$ es la base para W_h , se tiene que si $u = (u_1, \dots, u_N)$ es el vector de aproximación para la solución u :

$$u_j = u_h(n_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

entonces $u_j = g_0(n_j)$ para $j = n + 1, \dots, N$, y

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j v_j^h,$$

así que las u_j deben satisfacer que

$$\sum_{j=1}^n u_j a(v_i^h, v_j^h) = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

o equivalentemente las u_j resuelven el sistema algebraico:

$$Au_h = b, \quad (3.8)$$

donde $a_{ij} = a(v_i^h, v_j^h)$ y $b_i = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h)$. Ya que la matriz A es simétrica y definida positiva, el vector solución u_h existe y es único, lo que lleva a que la aproximación de la solución exista y sea única.

Para calcular los elementos de la matriz A hacemos uso de la propiedad de la aditividad en la integral y la forma en la que se discretizó w :

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nu \nabla v_i^h \cdot \nabla v_j^h + \alpha v_i^h v_j^h),$$

notemos que si el nodo n_j no es vértice de algún triángulo del que n_i sea vértice, entonces $a_{ij} = 0$.

3.3. Detalles computacionales

Con todo lo anterior, desarrollamos un programa en OCTAVE/MATLAB el cuál construye y muestra la malla (triangulación, que en caso nuestro es de un dominio circular) y numeración, para luego calcular la matriz A y el vector b de (3.7). El cálculo de A tiene que ver con la discretización de w , esto quiere decir, de cómo se etiquetó cada uno de los nodos y la manera en la que se identifica cada triángulo o elemento de la discretización; esto significa, etiquetar cada triángulo y saber qué nodos lo forman. En la Figura 3.2 se muestra una malla y una forma de etiquetar nodos y triángulos en un dominio circular. Para obtener la malla se da N_r , un número de radios en nuestro dominio Ω y N_{c_i} un número de círculos concéntricos dentro del dominio Ω . Las intersecciones de estos radios con estos círculos concéntricos

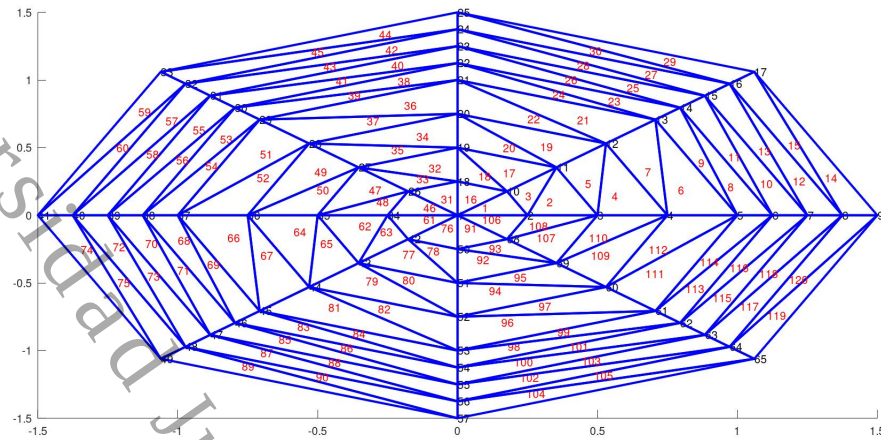


Figura 3.2: Un ejemplo de malla en un dominio Ω circular.

definen los nodos.

Regla de numeración de nodos: Comenzamos definiendo al nodo 1 como el centro de nuestro dominio Ω . Enseguida numeramos los nodos del radio que coincide con el eje x , avanzando de dentro hacia afuera. Una vez terminado con este radio avanzamos al siguiente radio hacia arriba (o recorriendo los radios en sentido contrario a las manecillas del reloj), siguiendo el mismo patrón de numerar los nodos en este radio de dentro hacia afuera, saltando el $(0, 0)$ que ya se numeró.

Regla de numeración de triángulos: Tomamos el ángulo formado por nuestro radio 1 y 2, e intersectándolo con cada uno de nuestros círculos concéntricos vamos formando trapecios, salvo el primer círculo concéntrico que tengamos. Entonces al primer triángulo formado lo numeramos tal cual y a los trapecios formados los dividimos con una recta de tal manera de obtener dos triángulos donde el triángulo de abajo formado tendrá el siguiente orden en la numeración y a continuación el triángulo de arriba y así sucesivamente. Luego de ello se seguirá con el ángulo formado por nuestros radios 2 y 3 y así hasta completar toda la vuelta hasta llegar a nuestro radio principal, todo esto en contra de las manecillas del reloj.

Regla para numerar localmente los vértices de cada triángulo: Aquí lo que deseamos hacer es definir en cada triángulo cuál será el vértice 1, cuál será el vértice 2 y cuál será el vértice 3. En nuestro caso, para la malla obtenida notemos que tenemos 3 diferentes tipos de triángulos, por lo cual

tenemos la siguiente numeración correspondiente a cada uno de ellos:

1. *Tipo I.* Es un triángulo que tiene un vértice en el $(0,0)$. Para estos triángulos el vértice 1 es el punto $(0,0)$ y la numeración de los otros dos se hace siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj.
2. *Tipo II:* Para definir un triángulo de este tipo notamos que entre cada dos radios consecutivos y dos círculos consecutivos se forma un trapecio con las 4 intersecciones. De este trapecio se obtienen dos triángulos de la malla, dividiéndolo con el segmento de recta que une la intersección del primer radio con el primer círculo con la intersección del segundo radio y el segundo círculo. Con esto, un triángulo del tipo 2 es el que tiene una arista en el segundo radio. Un triángulo del tipo 3 es el que tiene una arista en el primer radio (ver Figura 3.3). Para el triángulo tipo II, el vértice 1 es el que está mas cerca del origen (existe y es único) y se continúa su numeración en sentido contrario a las manecillas del reloj.
3. *Tipo III.* Ya se definieron los triángulos tipo III. En este caso, el vértice 1 es el que está en el primer radio y la numeración de los otros se hace siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj.

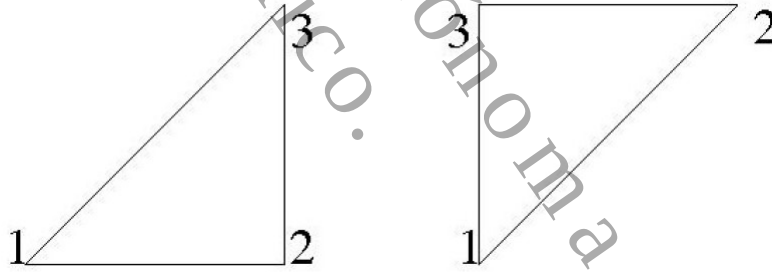


Figura 3.3: Numeración de los vértices de los tipos de triángulos [16].

3.3.1. Cálculo de A

Ya se definió anteriormente la base $\{v_i\}_1^N$ para H_h , la cual satisface

$$v_i(n_j) = \delta_{ij},$$

donde n_j representa el nodo j de la triangulación τ_h para w , y se considera que

$$v_i|_K = a_k + b_k x + c_k y,$$

para cada $K \in \tau_h$. Las funciones base locales pueden ser definidas en términos de las coordenadas de los nodos que definen K . De igual manera sabemos que

$$a_{ij} = a_w(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha v_i v_j + \nu \nabla v_i \cdot \nabla v_j) dx.$$

Entonces hacemos los cálculos elemento por elemento y estos se acumulan a su respectivo a_{ij} .

Pero como la forma bilineal $a_w(\cdot, \cdot)$ es simétrica, solo se necesita calcular la parte inferior de la matriz A .

Algo muy importante que no debemos perder de vista es que la matriz A es “rala y bandeada”.

Hemos definido la estructura de A . Lo que nos falta hacer es calcular los valores numéricos a_{ij} de cada una de sus entradas. Para cada a_{ij} , debemos calcular integrales de la forma:

$$\int_K (v_i v_j) dx \quad \text{y} \quad \int_K \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx,$$

donde K es cada uno de los elementos de la triangulación. Esto lo haremos con ayuda de un cambio de coordenadas o mediante una transformación afín, definida por:

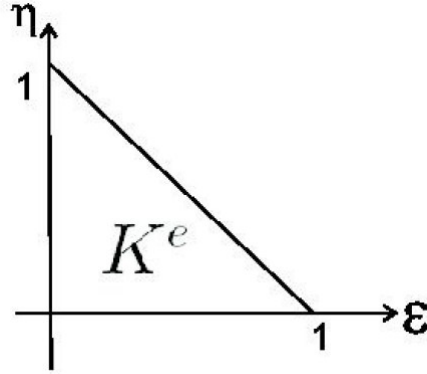
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} \epsilon \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde $T_k = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ y (x_i, y_i) son las coordenadas del nodo local i , en el triángulo K .

Notemos que el vértice $(0, 0)$ se transforma en el nodo local 1, el vértice $(1, 0)$ en el nodo local 2 y el vértice $(0, 1)$ en el nodo local 3, es decir, cada triángulo K bajo la transformación T_k se transforma en el triángulo especial K^e que no varía de triángulo a triángulo.

Las funciones bases en K , si las definimos en términos de las coordenadas de los nodos son

$$v_1^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_2 y_3 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (3.10)$$

Figura 3.4: Elemento maestro K^e .

$$v_2^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_3 y_1 - y_3 x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \quad (3.11)$$

$$v_3^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_1 y_2 - y_1 x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y], \quad (3.12)$$

y las funciones bases en K^e son

$$\begin{aligned} v_1^e(\epsilon, \eta) &= 1 - \epsilon - \eta, \\ v_2^e(\epsilon, \eta) &= \epsilon, \\ v_3^e(\epsilon, \eta) &= \eta. \end{aligned}$$

y tenemos que

$$\int_K (v_i^K v_j^K) dx = \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) |det(T_K)| d\epsilon d\eta = |det(T_K)| \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) d\epsilon d\eta.$$

Por lo tanto

$$\int_K (v_i^K v_j^K) dx = \frac{|det(T_K)|}{24} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j. \\ 1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3.3.2. Contribución de f al lado derecho del sistema $Au = b$

Una contribución para b en $Ax = b$ son las integrales $\int_w f v_i dx$. Para su cálculo se considera que f es una función definida en cada nodo de la triangulación de w . Entonces podemos escribir

$$f = \sum_{j=1}^N f_j v_j,$$

donde f_j representa el valor de f en el nodo $j : f_j = f(n_j)$. Así que

$$\int_w f v_i dx = \int_w \left(\sum_{j=1}^N f_j v_j \right) v_i dx = \sum_{j=1}^N f_j \int_w v_i v_j dx.$$

Así podemos escribir el vector

$$\begin{pmatrix} \int_w f v_1 dx \\ \vdots \\ \int_w f v_n dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \int_w v_1 v_1 dx + f_2 \int_w v_1 v_2 dx + \cdots + f_N \int_w v_1 v_N dx \\ \vdots \\ f_1 \int_w v_N v_1 dx + f_2 \int_w v_N v_2 dx + \cdots + f_N \int_w v_N v_N dx \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Utilizando la aditividad de la integral sobre el dominio de integración y como para cada triángulo K de la discretización existen tres funciones bases locales v_i^k se debe calcular

$$\int_K v_l^K v_p^K dx,$$

para $l, p = 1, 2, 3$ y para cada triángulo K . Además los índices l y p denotan funciones bases locales o nodos globales. Así que definiendo a i, j como los nodos globales asociados con los nodos locales l y p , respectivamente, entonces

$$f_i \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente j del vector en (3.13) y el valor

$$f_j \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumulan a la componente i del vector en (3.13). De acuerdo a esto, el vector b se puede ir ensamblando simultáneamente con el cálculo de A , sabiendo que el vector b tiene solo n componentes.

Por último, otra contribución de b son las integrales de la forma $\int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma$. Estas integrales de línea se pueden calcular numéricamente.

Todos los detalles descritos para el cálculo de A y del lado derecho funcionan para un dominio general mallado con triángulos, sin embargo, en esta tesis estamos interesados en dominios circulares que se mallarán como ya se describió anteriormente.

Capítulo 4

Método del elemento finito aplicado al modelo cuasi-estático de un tumor cerebral

Resolveremos (1.24)–(1.28) a través del método del elemento finito similarmente a como resolvimos el problema elíptico del capítulo anterior, es decir obtendremos primero la formulación variacional o débil del modelo (1.24)–(1.28), es decir, debemos calcular una ecuación integral similar a (3.3). La formulación variacional se debe cumplir para toda función en un espacio de prueba de dimensión infinita, así que el siguiente paso deberá ser sustituir ese espacio de dimensión infinita por un espacio de dimensión finita, que implica definir una malla de elemento finito en el dominio y definir el conjunto de dimensión finita como un conjunto donde las funciones están determinadas por sus valores en los nodos de la triangulación, esto nos permitirá formular un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuya solución son los valores de la solución buscada en cada uno de los nodos de la malla. En las secciones siguientes se describen los detalles de todos estos pasos.

4.1. El modelo y su formulación variacional

Recordemos que el modelo cuasi-estático para un tumor cerebral es el siguiente:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.1)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.2)$$

con las condiciones de frontera

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (4.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad \text{sobre } S_1, \quad (4.4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (4.5)$$

En este modelo los datos son σ_1, σ_2 y g y deseamos encontrar una función u_1 definida en la cerradura de Ω_1 y una función u_2 definida en la cerradura de Ω_2 , es decir, buscamos una función u definida como $u = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, donde

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} u_1 & \text{en } S_1, \\ 0 & \text{en } S_2, \end{cases}$$

y

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} 0 & \text{en } S_1, \\ u_2 & \text{en } S_2. \end{cases}$$

note que este problema no tiene solución única.

Para encontrar la formulación variacional del problema utilizamos los espacios de Sobolev definidos en el capítulo 3, y consideramos como en el capítulo 3 al espacio V y al espacio W , pero ahora definidos como

$$V = W = H^1(\Omega), \quad \text{donde } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

dado que aquí las fronteras son en su totalidad del tipo Γ_1 , $\Gamma = \Gamma_1$.

De (4.1) y de (4.2), tenemos que:

$$-\sigma_1 \Delta u_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1 \quad \text{y} \quad -\sigma_2 \Delta u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2,$$

integrando cada una de las ecuaciones tenemos:

$$-\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nu \Delta u_1 = 0$$

y

$$-\sigma_2 \int_{\Omega_2} \nu \Delta u_2 = 0,$$

lo cuál equivale por Green a

$$\sigma_1 \left[\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v - \int_{\partial \Omega_1} v \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega_1$$

$$\sigma_2 \left[\int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_2} v \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega_2,$$

así que sumando las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v - \int_{S_1} \sigma_1 v \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v + \int_{S_1} \sigma_2 v \frac{\partial u_2}{\partial n_1} - \int_{S_2} \sigma_2 v \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0,$$

entonces

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v = \int_{S_1} \left[\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} - \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \right] v = \int_{S_1} g v.$$

como $u_1 = u_2$ sobre S_1 , y ya definimos $u = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, donde

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} u_1 & \text{en } S_1 \\ 0 & \text{en } S_2 \end{cases}$$

y

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} 0 & \text{en } S_1 \\ u_2 & \text{en } S_2 \end{cases}$$

entonces

$$\sigma_1 \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_1 \cdot \nabla v dA + \sigma_2 \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_2 \cdot \nabla v dA = \int_{S_1} g v ds. \quad (4.6)$$

En resumen, obtenemos que la formulación variacional para nuestro problema es: encontrar $u = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ en $H^1(\Omega)$ tal que

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla \bar{u}_1 \cdot \nabla v dA + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla \bar{u}_2 \cdot \nabla v dA = \int_{S_1} g v ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.7)$$

4.2. Espacio de elemento finito

Similar a la sección 3.2, construiremos aquí el espacio de elemento finito. Lo que debemos considerar es que nuestro dominio Ω se forma con la unión de dos regiones $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ como se ilustra en la Figura 4.1 y debemos calcular una integral de línea sobre la frontera común S_1 , así que para facilitar estos cálculos debemos asegurar que los triángulos de la malla pertenezcan a solo una región, Ω_1 o Ω_2 , o bien que los triángulos tengan un vértice en S_1 y los otros dos vértices en una sola región o por último, que los triángulos tengan dos vértices en S_1 y el otro vértice en una región. Para ello basta definir un número de círculos concéntricos para la región Ω_1 y un número de

círculos concéntricos para la región Ω_2 . La numeración de nodos, triángulos y más detalles son idénticos a los descritos en el capítulo 3.

Con esta malla se construye el espacio $H_h^1(\Omega)$ que interviene en la formulación variacional, similar a como se hizo en el capítulo 3. En la Figura 4.2 se presenta una numeración de los nodos y triángulos de una malla circular.

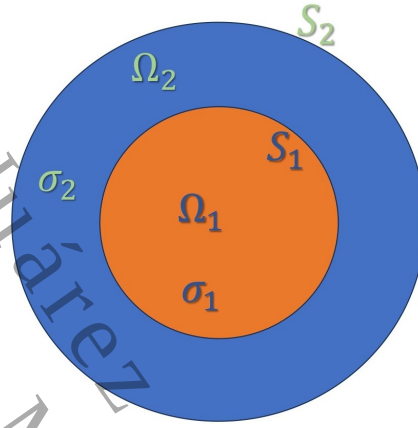


Figura 4.1: Regiones cocentricas Ω_1 y Ω_2 .

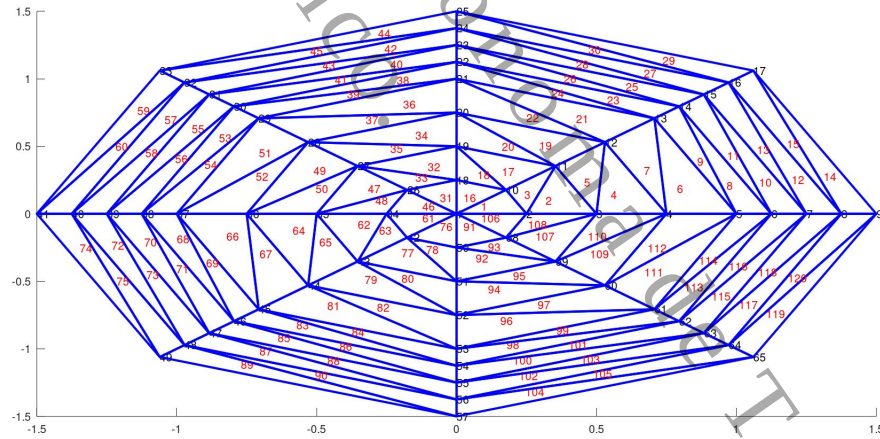


Figura 4.2: Numeración de nodos y triángulos con $Nc = 10$ y $Nr = 20$ tomando los radios $R_1 = 1$ y $R_2 = 1.5$.

4.3. El problema variacional de dimensión finita y el sistema lineal algebraico

Al espacio $H_h^1(\Omega)$ se le llama un espacio de elemento finito. Una vez que se realizó todo el procedimiento anterior sustituimos V_h y W_h por V y W , recordando que $V = W = H^1(\Omega)$ en la formulación variacional (4.7) para obtener el problema discreto asociado:

$$u_h \in H_h^1(\Omega) \quad \text{tal que} \quad a(u_h, v_h) = \langle g, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in H_h^1(\Omega), \quad (4.8)$$

donde

$$a(u_h, v_h) = \sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla \bar{u}_1 \cdot \nabla v_h dA + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla \bar{u}_2 \cdot \nabla v_h dA,$$

y

$$\langle g, v_h \rangle = \int_{S_1} g v_h ds.$$

Como $\{v_1^h, \dots, v_n^h, v_{n+1}^h, \dots, v_N^h\}$ es una base para $H_h^1(\Omega)$ se tiene que si $u = (u_1, \dots, u_N)$ es el vector de aproximación para la solución u :

$$u_j = u_h(n_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

entonces

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j v_j^h,$$

así que las u_j deben satisfacer que

$$\sum_{j=1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h) = \langle g, v_i^h \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.9)$$

o equivalentemente las u_j resuelven el sistema algebraico:

$$A u_h = b, \quad (4.10)$$

donde $a_{ij} = a(v_i^h, v_j^h)$ y $b_i = \langle g, v_i^h \rangle$. Como la solución de nuestro problema continuo no es única (no tenemos condición de Dirichlet), la matriz A es no invertible. Así que para encontrar una aproximación debemos fijar la solución en un nodo, por ejemplo en el nodo 1 y esto lo podemos hacer dando un valor arbitrario, por ejemplo el valor 0.

Para calcular los elementos de la matriz A hacemos uso de la propiedad de la aditividad en la integral y la forma en la que se discretizó Ω :

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K a(v_i^h, v_j^h).$$

Notemos que si el nodo n_j no es vértice de algún triángulo del que n_i sea vértice, entonces $a_{ij} = 0$. Esto significa que la matriz va a ser rala, es decir, que muchas de sus entradas van a ser 0.

4.4. Detalles computacionales

4.4.1. Cálculo de las entradas de la matriz A

Notemos que a comparación de la subsección 3.3.1 en nuestro caso $\alpha = 0$ y ν toma dos valores. En Ω_1 , $\nu = \sigma_1$ y en Ω_2 , $\nu = \sigma_2$.

4.4.2. Cálculo del lado derecho del sistema

Para calcular el lado derecho solo debemos calcular la integral de línea $\int_{S_1} gv_i ds$, que por definición es

$$\int_{S_1} gv_i ds = \int_a^b (gv_i)(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma(t)$ es una parametrización de la curva S_1 . Aproximaremos numéricamente el valor de la integral de línea. Para esto, aproximaremos la curva S_1 por una curva formada por segmentos de recta, las aristas definidas por nodos consecutivos en la frontera S_1 .

Numeramos localmente los nodos de la frontera S_1 , tomamos como el nodo 1 al que le corresponde un ángulo 0 y continúa la numeración en sentido contrario a las manecillas del reloj. Calculamos el valor de la g en cada nodo local de la frontera S_1 , parametrizamos la curva S_1 donde tomamos a $x = R_1 \cos(\theta)$ y $y = R_1 \sin(\theta)$.

Lo que queremos aproximar es $b = \left(\int_{S_1} gv_1 dS, \dots, \int_{S_1} gv_N dS \right)$. Notemos que la mayoría de esas entradas serán 0. Las que son diferente de 0 son las entradas asociadas o que dependen de un nodo n_i que está en la frontera S_1 . Así que para facilitar los cálculos etiquetaremos los nodos de la frontera S_1 .

desde 1 hasta K y los relacionaremos con la numeración global de los nodos con el siguiente arreglo:

$$ns1(k); \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

con esto, si $ns1(k) = i$, significa que el nodo k de la frontera S_1 corresponde al nodo i de la numeración global de los nodos. Así que las entradas distintas de 0 son las entradas

$$ns1(k), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, K.$$

Debemos calcular entonces las integrales

$$\begin{aligned} \int_{S_1} gv_{ns1(k)} ds &= \int_0^{2\pi} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_{ns1(k-1)}^{ns1(k+1)} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_{ns1(k-1)}^{ns1(k)} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt + \int_{ns1(k)}^{ns1(k+1)} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Una parametrización de S_1 es

$$\gamma(t) = (R_1 \cos(t), R_1 \sin(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = R_1(-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = R_1.$$

Así que

$$\int_{S_1} gv_{ns1(k)} ds = \int_{ns1(k-1)}^{ns1(k)} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) R_1 dt + \int_{ns1(k)}^{ns1(k+1)} gv_{ns1(k)}(\gamma(t)) R_1 dt,$$

donde $k = 1, 2, \dots, K$. Aproximamos las integrales por el método del trapecio para obtener que la aproximación viene dada por

$$\int_{S_1} gv_{ns1(k)} ds = \frac{d(ns1(k-1), ns1(k)) g(ns1(k)) R_1}{2} \quad (4.11)$$

$$+ \frac{d(ns1(k), ns1(k+1)) g(ns1(k)) R_1}{2} \quad (4.12)$$

este valor va en la entrada $ns1(k)$ de b .

4.5 Ejemplo numérico

4.5. Ejemplo numérico

Con las ideas expuestas se hizo un programa para resolver un problema de EEG (4.7) y lo aplicamos al caso cuando Ω es una región circular centrada en el origen que es la unión de Ω_1 con Ω_2 . A Ω_1 la define el radio $R_1 = 1$ y a Ω_2 la define el radio $R_2 = 1.5$, además consideramos $g(\theta) = 5 \sin(\theta) - 6 \sin(2\theta) + \sin(3\theta)$, como la fuente en S_1 . Tomamos las conductividades $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$. En la Figura 4.3 se muestra la solución aproximada para

$$u = \begin{cases} \bar{u}_1, & (x, y) \in \Omega_1 \\ \bar{u}_2, & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

y en la Figura 4.4 se muestra la solución exacta. Además en la Figura 4.5, mostramos la diferencia absoluta entre la solución aproximada y la solución exacta.

Por último, en la Figura 4.6 se presenta el valor de g sobre la frontera S_1 , la cual entre más fina sea la malla será más suave.

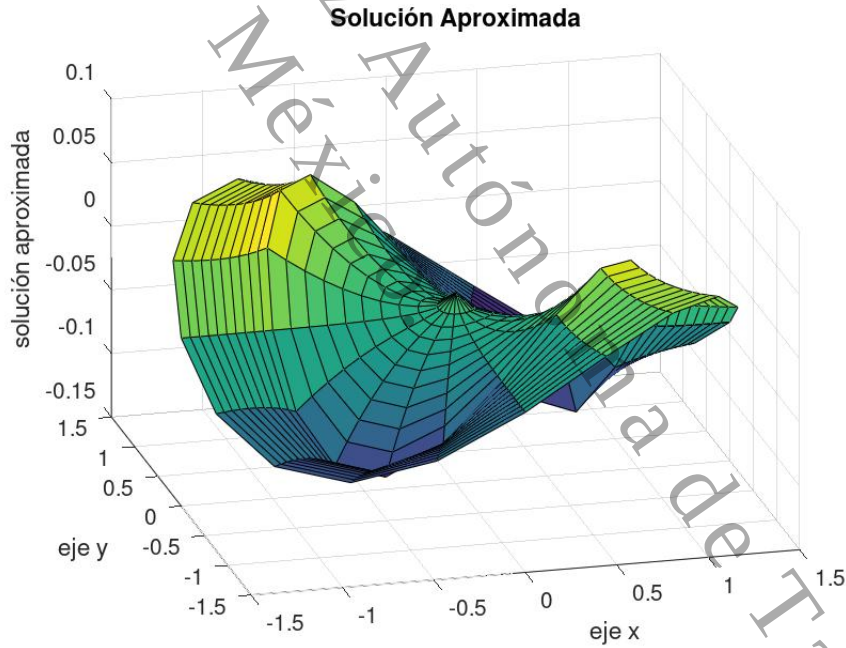


Figura 4.3: Solución aproximada del problema, con un número de radio $Nr = 10$ y un número de ángulo $Na = 20$.

4.5 Ejemplo numérico

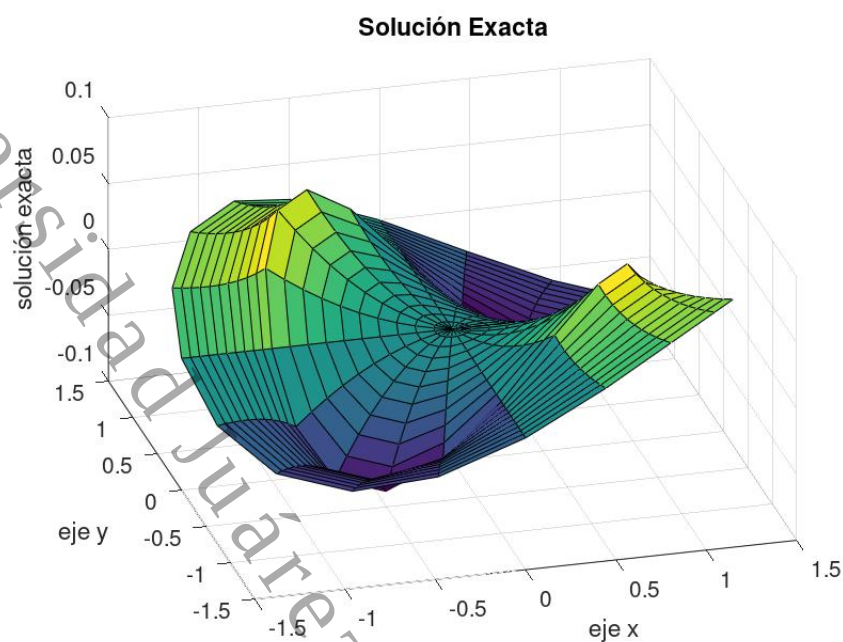


Figura 4.4: Solución exacta del problema, con un número de radio $Nr = 10$ y un número de ángulo $Na = 20$.

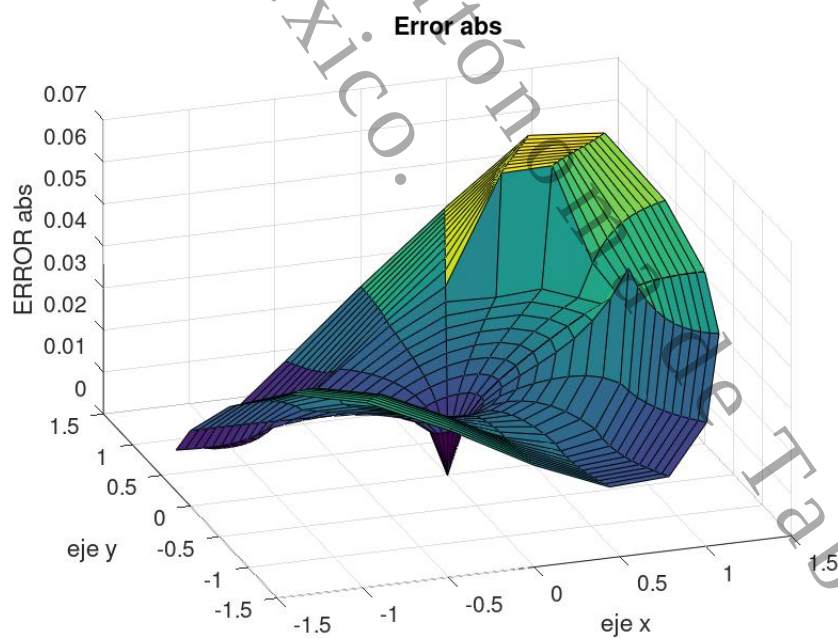


Figura 4.5: Diferencia geométrica de la solución exacta y de la solución aproximada.

4.5 Ejemplo numérico

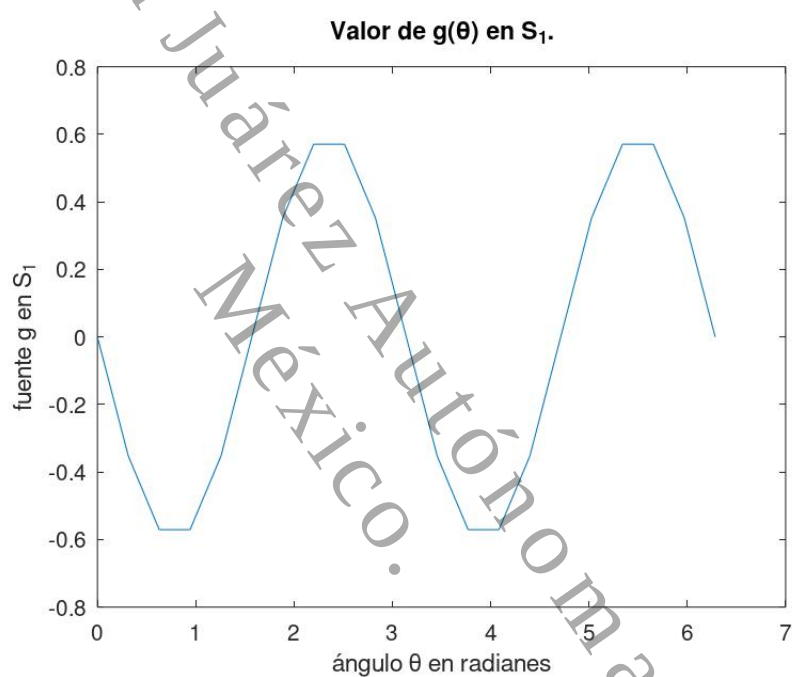


Figura 4.6: Gráfica de los valores de g en la frontera S_1 .

Conclusión

En este trabajo se consideró la solución de un modelo en EDP de los potenciales eléctricos u_1 y u_2 generados por una fuente g , asociada con un tumor en el cerebro. El cerebro se modela en $\mathbb{R}^2$ como un círculo centrado en $(0, 0)$ cuya frontera es la circunferencia de radio R_2 , que denotamos como S_2 , y el tumor se modela como un círculo de radio $R_1 < R_2$, centrado también en $(0, 0)$. El modelo consiste en dos problemas elípticos, uno asociado con el dominio Ω_2 , el cerebro menos el tumor, y el otro asociado con el dominio Ω_1 , el tumor, que tienen la frontera común S_1 , donde se define la fuente g .

Los dos problemas están acoplados debido a que los potenciales eléctricos deben ser iguales en la frontera en común S_1 . Se mostró que la solución del modelo es única en el espacio de las funciones cuya integral es nula en $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. También se mostró cómo encontrar la solución de este problema vía series de Fourier, procedimiento que es muy eficiente en términos computacionales, pero difícil de aplicar en dominios más generales.

Además se mostró cómo aproximar la solución del modelo vía el método de elemento finito basado en triángulos, el cual es conceptual y computacionalmente complicado, pero permite la solución del modelo en dominios no triviales. Tanto por series de Fourier como por elemento finito, la solución obtenida fue similar, como lo mostraron las gráficas de la solución exacta Figura 4.4 y aproximada Figura 4.3.

El problema que se ha resuelto en esta tesis es lo que se conoce como un problema directo asociado con el estudio de tumores en el cerebro. Esto significa que dada una fuente g en el interior del cerebro, queremos saber cuál es su efecto en la corteza cerebral o en el cuero cabelludo. Este problema, aunque no es trivial, se considera el problema fácil en este contexto. Como trabajo futuro consideraremos el problema inverso asociado, que desde el punto de vista médico es más realista e interesante: conocida una función potencial $u_2|_{S_2}$ en el cuero cabelludo o la corteza cerebral, queremos saber cuál es la fuente que la produjo, es decir, cuál es el tumor que la produjo.

Bibliografía

- [1] E. Estrada, J. Oliveros, J. Conde (2021). *Modelos matemáticos asociados a patologías en el cerebro y análisis de problemas directos e inversos*. BUAP.
- [2] J. Fernández (2019). *Ecuaciones diferenciales parciales*. IMAS-CONICET y DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA., (1428).
- [3] M. Hirsch, S. Smale y R. Devaney. *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Vol 60, No. 2, 2004.
- [4] M. M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. J. Conde, J. J. Oliveros, A. Santillán. *Stable Identification of Sources Associated with Epileptic Focus on the Cerebral Cortex*. Vol 40, No. 3, 2019.
- [5] L. Bergues, L. Gómez Luna. *La electroterapia: una alternativa terapéutica para el tratamiento de tumores*. Revista Cubana de Medicina, vol. 42, no.6, 2003.
- [6] S. Ueno, H. Wakisako. *Determination of the spatial distribution of abnormal EEG and MEG from current dipole in inhomogeneous volume conductor*; II Nuovo Cimento, 1983, 2(D) pp. 558–566.
- [7] R. Shmelkina. *Electroencephalography and local pathological brain processes atlas*. New York. USA, 2008. New addition. New York. 2016.
- [8] A. Fraguera, J. Oliveros, L. Cervantes, M. Morín and S. Gómez. *A non-iterative algorithm for the electrical capacitance Tomography (in Spanish)*, Rev. Mex. Fis. 47 (2001), 162–174
- [9] D. Jackson John. *Classical Electrodynamics*. 3 ed. Wiley and Son, 1999.
- [10] Walter W. Grey. *The electro-encephalogram in cases of Cerebral Tumour*. Proceedings of the Royal Society of Medicine, 1936, pp. 579–598 (33–52).

BIBLIOGRAFÍA

- [11] C. Mones, J. Estrada, J. Oliveros, C. Hernández, M. Castillo. *Stable Identification of Source Located on Interface of Nonhomogeneous Media*. Mathematics, 2021, 9, 1932.
- [12] M. Martínez, G. Trout. *Conceptos Básicos de Electroencefalografía*. DUAZARY, 2006, vol.3.
- [13] A. Perronet, *Les Methodes de Resolution des Systemes Lineaires. Leur Technique de Storage*. Universite Pierre et Marie Curie. LABORATOIRE ANALYSE NUMERIQUE. No. Enregistrement: 81 022.
- [14] J. Duoandikoetxea. *LECCIONES SOBRE LAS SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER*. UNAN-Managua, 2003.
- [15] J. Cooper. *Introduction to partial Differential Equations with MATLAB*. University of Maryland, 2000.
- [16] J. López, D. Chablé, H. Juárez. *Generación de campos de viento por métodos variacionales*. Revista de Ciencias Básicas UJAT. Volumen 1, No. 1.
- [17] H. Brezis. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1978.
- [18] P. Mikhailov. *Partial Differential Equations*. MIR Publishers, Moscow, 1978.