



**Universidad Juárez Autónoma
de Tabasco**

División Académica de Ciencias Básicas

**ENTROPÍA TOPOLÓGICA
DE FUNCIONES MULTIMODALES**

Tesis

que para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

Presenta

¹Domingo González Martínez

Director de tesis:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco, Septiembre de 2014.

Carta Autorización

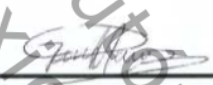
El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría: **"ENTROPÍA TOPOLÓGICA DE FUNCIONES MULTIMODALES,"** de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 02 días del mes de Septiembre del año 2014.

Autorizó


Domingo González Martínez

122A15003



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dirección



"2014. Conmemoración del 150 Aniversario de
la Gesta Heroica del 27 de Febrero de 1864"

1 de septiembre de 2014

Lic. en Matemáticas Domingo González Martínez
Pasante del Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas
Presente.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**ENTROPÍA TOPOLÓGICA DE FUNCIONES MULTIMODALES**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente

Dr. Víctor Castellanos Vargas
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'VCV/Dr'GBG/emt

Miembro CUMEX desde 2009

Consortio de
Universidades
Mexicanas

Km. 1, Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6702

Índice general

Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Clasificación de puntos periódicos	1
1.2. Puntos recurrentes y no errantes	5
1.3. Dinámica simbólica	9
1.3.1. Itinerarios	9
1.3.2. Sucesiones admisibles	15
1.3.3. La función σ	21
1.4. Dinámica de funciones logísticas acopladas	23
1.4.1. Combinatoria e itinerario principal	23
1.4.2. Tiendas truncadas	26
1.5. Teorema de Sarkovskii	31
2. Entropía Topológica	38
2.1. Entropía topológica para funciones en espacios métricos	38
2.2. Entropía para funciones de un intervalo en un intervalo	49
2.3. Entropía y caos	64
2.3.1. La frontera del caos	64
2.4. Entropía e itinerario principal	68
3. Aproximaciones numéricas	72
3.1. Algoritmo para calcular entropía topológica	72
3.2. Simulaciones numéricas	78
3.2.1. Aproximación de la entropía para una familia exponencial	78
3.2.2. Aproximación de la entropía en la familia logística	80
3.2.3. Aproximaciones numéricas para funciones de dos parámetros	83

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
Conclusiones	89
A. Matrices no negativas	91
B. Implementación del algoritmo en MATLAB	95
Bibliografía	105

Dedicatorias

A Dios...

Por concederme sabiduría,
capacidad y voluntad para
desarrollar este trabajo.

1

A la memoria de mi padre...

Pedro González Jiménez, por ser siempre
un impulsor en mi educación y superación.
Por depositar su confianza en mí.

A mi madre...

Elsa Martínez Correa, por apoyarme
y procurar mi bienestar, e inculcarme
valores que me lleven a ser mejor persona.

A mi esposa...

Diana Emily Peregrino J. por su solidaridad
en las dificultades y su comprensión en las
ausencias.

1

A mis Hermanos...

Ma. Cristina, Cipriano, Ma. Dimas,
Saturnino y Miguel A.
por brindarme su incondicional
apoyo para salir adelante.

Agradecimientos

A mi director de tesis Dr. Gamaliel Blé González. Por dedicar su tiempo, por su paciencia y voluntad para lograr concluir con éxito esta tesis.

A mis amigos. Que estuvieron conmigo en las buenas y en las malas, brindándome una cálida y desinteresada amistad.

A ¹³ todos aquellos que de una u otra forma me apoyaron para alcanzar esta meta.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

ENTROPÍA TOPOLÓGICA DE
FUNCIONES MULTIMODALES

Introducción

¹ El concepto de entropía fue introducido por el Físico-Matemático ⁵ Clausius Rudolf Emmanuel en 1865, y establece que la energía no sólo puede medirse en cantidad, sino también en calidad; a mayor entropía, menor calidad de la energía y mayor tendencia al caos.

Si observamos nuestro andar cotidiano veremos que se presentan varios acontecimientos que se relacionan con el concepto de entropía y de la generación de la misma, por ejemplo: la gente organizada lleva vidas de baja entropía, ellos tienen un lugar para todo (incertidumbre mínima), y requieren energía mínima para encontrar algo; en contraparte la gente desorganizada lleva una vida de alta entropía, a estas personas les cuesta minutos, si no es que horas, encontrar algo que necesitan, y es probable que ocasionen un gran desorden mientras buscan.

En matemáticas, este concepto fue introducido con la finalidad de medir la complejidad de un sistema. Usando la similitud con la física, se propone que el incremento en el desorden de las órbitas de un sistema tenga asociado el incremento de su entropía, por lo que un sistema se dice que es caótico cuando éste tiene entropía positiva.

² Para calcular la entropía de un sistema de órbitas generado por las iteradas de una función, se han desarrollado diferentes herramientas, una de ellas es el cálculo de conjuntos separados y otra es el cálculo a partir de los itinerarios de los valores críticos [dMvS, MiT]. En este trabajo se abordarán aplicaciones multimodales y para el cálculo de la entropía se utilizarán las herramientas de la dinámica simbólica introducidas en los trabajos de Mackay, Milnor y Tresser, basadas en el comportamiento de las órbitas de los valores críticos. [MT, MiT].

¹ Este trabajo consta de tres capítulos. En el capítulo uno se muestran algunos conceptos importantes en el estudio de los sistemas dinámicos discretos, como por ejemplo puntos periódicos, conjuntos errantes. Además contiene el estudio de la dinámica simbólica de un sistema y el teorema de Sarkovskii. En el capítulo dos se

1 define el concepto de entropía topológica en un espacio topológico, y se muestran algunos resultados para funciones definidas de un intervalo en un intervalo. En el capítulo tres se estudia un algoritmo que permite hacer cálculos de la entropía topológica y se muestran algunos resultados numéricos.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se muestran los itinerarios de los puntos, los cuales son sucesiones que se construyen a partir de una condición inicial e indican la posición en el dominio a medida que se le va aplicando una función f . Asimismo, trabajaremos con órbitas, puntos periódicos y la clasificación de éstos. Los conceptos y resultados de este capítulo están basados en los trabajos de Coppel, Devaney, de Melo Van Strien y Milnor Tresser, [BC, D, dMvS, MT].

1.1. Clasificación de puntos periódicos

Si consideramos $f : X \rightarrow X$ una función continua del espacio métrico X en si mismo, podemos suponer que X es el conjunto de condiciones iniciales del sistema y que si tomamos $x \in X$, entonces $f(x)$ representa la evolución del estado x en una unidad de tiempo. Por ejemplo, si x representa la cantidad inicial de individuos de una población y $f(x)$ la población después de una unidad de tiempo, entonces la sucesión $f^n(x)$ es el número de individuos que la población tiene al tiempo n , dado que inicialmente tenía x . Una pregunta interesante es: ¿qué ocurre con la población cuando dejamos correr el tiempo? ¿existe un valor límite para la población cuando transcurre el tiempo?, es decir, si

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n-\text{veces}}$$

¿cuál es el límite de la sucesión $\{f^n(x)\}$ cuando n tiende al infinito?, notemos que si la sucesión $\{f^n(x)\}$ tiene un límite L , entonces L es un punto

fijo de f , ya que por la continuidad de f se tiene,

$$f(L) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(f^n(x))) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{n+1}(x)) = L.$$

Por lo que los puntos fijos de f juegan un papel muy importante en la dinámica global de f . Notemos que si en lugar de tomar toda la sucesión $\{f^n(x)\}$, tomamos la subsucesión generada por los múltiplos de k , para un k fijo, es decir, la subsucesión $\{f^{nk}(x)\}$, entonces, cuando ésta converja, por el argumento anterior, debe hacerlo a un punto periódico de periodo l , donde $l|k$, por lo que también son importantes en el comportamiento límite los puntos periódicos.

Definición 1.1.1 Sea $f : I = [a, b] \rightarrow I$ una función continua, un punto $x \in I$ es un punto periódico de periodo k de f , si $f^k(x) = x$ y $f^j(x) \neq x$ para $j < k$ y decimos que x es un punto preperiódico o eventualmente periódico de periodo n , si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x)$ es un punto periódico de periodo n .

Al conjunto de puntos periódicos lo denotamos por $Per(f)$.

Dado $x \in X$, al conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{w \in X : w = f^k(x) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

se le llama la *órbita* de x bajo f . En el caso que x es periódico, este conjunto es finito y se le llama *órbita periódica*.

Por ejemplo si $f(x) = \sqrt{x}$, y $x_0 = 256$, los primeros puntos de $\mathcal{O}_f(x_0)$ son

$$\begin{aligned} x_0 &= 256 \\ x_1 &= \sqrt{256} = 16 \\ x_2 &= \sqrt{16} = 4 \\ x_3 &= \sqrt{4} = 2 \\ x_4 &= \sqrt{2} = 1.41..., \end{aligned}$$

por otro lado si $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, la órbita de $x_0 = 0$ es una órbita de periodo 3, ya que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$.

Definición 1.1.2 Sea f una función continua, si f es invertible, entonces la órbita negativa de x , se define como el conjunto

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}^-\} = \{x_{-1} = f^{-1}(x_0), x_{-2} = f^{-1}(x_{-1}), \dots\}.$$

Si f no es invertible, entonces haciendo una elección podemos construir una sucesión $x_1, x_2, \dots$ tales que $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ o que $x_{-n} \in f^{-1}(x_{-n+1})$.

Definición 1.1.3 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua y sea x un punto periódico de f de periodo k con multiplicador $\lambda = Df^k(x)$, donde $Df^k(x)$ denota la derivada de f^k en x . Decimos que:

1. x es atractor si $|\lambda| < 1$; si $\lambda = 0$ decimos que x es super-atractor,
2. x es repulsor si $|\lambda| > 1$ y
3. x es indiferente si $|\lambda| = 1$.

Si $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es una órbita periódica de f , entonces aplicando la regla de la cadena, se obtiene que

$$Df^k(x_j) = Df(f^{k-1}(x_j))Df(f^{k-2}(x_j)) \cdots Df(x_j).$$

Observemos que $Df^k(x_j)$ no depende de la j ; en consecuencia, la definición anterior tiene sentido para órbitas de periodo k o k -ciclos.

Definición 1.1.4 (Cuenca de Atracción). Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y sea $x \in X$ un punto fijo atractor de f . La cuenca de atracción de f es el conjunto

$$A_f(x) = \{y \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x\}.$$

La cuenca inmediata de atracción de x denotada por $A_f^*(x)$, es la componente conexa de $A_f(x)$ que contiene a x .

Las cuencas de atracción para puntos k -periódicos atractores se definen usando a f^k en vez de f . Por definición, los puntos k -periódicos atractores siempre tienen dominios inmediatos de atracción abiertos y diferentes del vacío.

Para caracterizar las órbitas periódicas y sus respectivas cuencas de atracción, para algunas funciones, introducimos el concepto de derivada Schwarziana.

Si $f : I \rightarrow I$ es una función de clase C^3 y $Df(x) \neq 0$, entonces la derivada Schwarziana de f se define como

$$Sf(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2.$$

En 1978 Singer demostró que si una función con derivada Schwarziana negativa tiene un número finito de puntos críticos, entonces tiene un número finito de órbitas atractoras [dMvS], pues observó que para este tipo de funciones, cada órbita atractora siempre tiene un punto crítico en su cuenca de atracción, lo cual plasmó en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5 (Singer) Si $f : I \rightarrow I$ es una función de clase C^3 , con derivada Schwarziana negativa, entonces la cuenca inmediata de atracción de cualquier órbita periódica, contiene un punto crítico de f , o la cuenca inmediata se extiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Una prueba de este teorema se puede revisar en [dMvS].

Definición 1.1.6 Dadas f y g funciones analíticas, se dice que son topológicamente (analíticamente) conjugadas en el abierto $U \subset X$, si existe un homeomorfismo (bi-holomorfismo) $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ tal que $\sigma \circ f(x) = g \circ \sigma(x)$ para toda $x \in U$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \sigma(U) & \xrightarrow{g} & \sigma(U). \end{array}$$

Observación 1.1.7 1) Directamente de la definición tenemos que la conjugación es una relación de equivalencia.

2) Si f y g son topológicamente conjugadas por σ , se verifica usando inducción matemática que: x es un punto periódico de periodo n para f si y sólo si $\sigma(x)$ es un punto periódico de periodo n para g .

La conjugación topológica se usa como un recurso para estudiar sistemas con dinámica muy complicada estudiando uno que sea topológicamente conjugado y el cual sea más sencillo de estudiar.

Ejemplo 1.1.8 Si $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces existen $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, tales que $\phi(x) = \alpha x + \beta$ conjugue analíticamente $P(x)$, con el polinomio mónico centrado $P_c(x) = x^2 + c$.

En efecto, como queremos que $\phi(x) = \alpha x + \beta$ conjugue P con P_c , éste debe satisfacer

$$P_c \circ \phi = \phi \circ P,$$

es decir,

$$(\alpha x + \beta)^2 + c = \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta.$$

Resolviendo se obtiene $\alpha = a_2$, $\beta = \frac{a_1}{2}$ y $c = \beta - \beta^2$.

Definición 1.1.9 Sea $A \subset X$, se dice que A es un subconjunto invariante de f , si $f(A) \subset A$. Si además $f^{-1}(A) \subset A$, entonces se dice que A es totalmente invariante.

1.2. Puntos recurrentes y no errantes

Las órbitas de los puntos bajo una función los podemos caracterizar en función de su recurrencia o no. Los conceptos y resultados aquí citados serán importantes en el desarrollo de este trabajo y pueden ser consultados en [BC].

Definición 1.2.1 Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que $y \in X$ pertenece al ω -límite de x si existe una sucesión creciente $\{n_k\}$ de números naturales tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y.$$

O equivalentemente

$$\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} f^n(x)}.$$

A x se le llama un punto recurrente si $x \in \omega(x)$. Es decir, cuando la órbita del punto x regresa arbitrariamente cerca de sí mismo. Al conjunto de puntos recurrentes, se le denota por $R(f)$.

Los puntos periódicos, por ejemplo, son recurrentes. De hecho, si p es tal que $f^k(p) = p$, para algún $k \in \mathbb{N}$, no importa cual vecindad U de p tomemos, siempre se cumple que $f^{nk}(p) \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, es posible que una órbita no sea periódica y sí recurrente.

Los puntos recurrentes son muy interesantes porque son ellos los que cargan con toda la dinámica. Si x es un punto no recurrente, su dinámica es relativamente sencilla, de hecho, su órbita se aleja y quizás converge a un punto fijo o a una órbita periódica, o quizá se acumula en alguna región de X alejada de x .

Lema 1.2.2 Para cualquier $x \in I$, el conjunto límite $\omega(x)$ es no vacío, cerrado y totalmente invariante.

Demostración. De la definición se desprende que $\omega(x)$ es no vacío y cerrado, ya que un subconjunto cerrado de I es compacto y la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos es de nuevo un conjunto compacto no vacío. Por otra parte usando la continuidad de f se tiene que $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$. Por

otro lado si $y \in \omega(x)$ y $f^{n_k}(x)$ es la sucesión que converge a y , nos fijamos en la sub-sucesión $f^{n_k-1}(x) \rightarrow z$. Entonces $y = f(z)$, lo cual demuestra que $\omega(x) \subseteq f(\omega(x))$. En consecuencia $\omega(x) = f(\omega(x))$. ◀

Sea

$$\Lambda = \bigcup_{x \in I} \omega(x)$$

el conjunto de puntos donde se acumulan las órbitas. Del lema 1.2.2 se deduce inmediatamente que

$$f(\Lambda) = \Lambda.$$

Llamamos conjunto límite de f a la cerradura del conjunto Λ y lo denotamos por $L(f)$. Este conjunto por definición es un conjunto cerrado, como los puntos periódicos evidentemente son puntos límites, tenemos la siguiente inclusión trivial.

$$\overline{\text{Per}(f)} \subseteq L(f).$$

Observemos que si $p \in X$ es un punto periódico entonces $\omega(p) = \mathcal{O}_f(p)$.

El siguiente resultado notable, obtenido por Sarkovskii, proporciona una condición suficiente para que un punto pertenezca a Λ .

Proposición 1.2.3 *Un punto $c \in I$ está en Λ si cada intervalo abierto con extremo izquierdo c contiene al menos dos puntos de una órbita. La misma conclusión es válida si “izquierdo” se sustituye por “derecho”.*

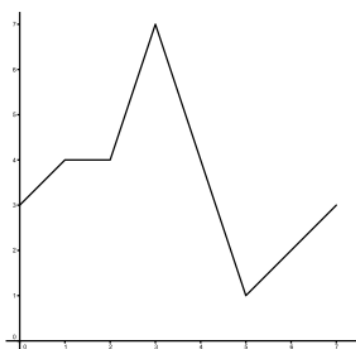
Una prueba de esta proposición se puede revisar en [BC].

Ejemplo 1.2.4 Sea $I = [0, 7]$ y sea $f : I \rightarrow I$ la función lineal por pedazos definidos por

$$f(0) = 3, \quad f(1) = f(2) = 4, \quad f(3) = 7,$$

$$f(4) = 4, \quad f(5) = 1, \quad f(7) = 3.$$

Notemos que $1 \notin \Lambda$, debido a que $f(x) \geq 1$ para toda $x \in I$ y $f^n(x) = 4$ para todo $n > 0$ y $x \in [1, 2]$, véase la figura 1.1



9

Figura 1.1: Gráfica de la función en el ejemplo 1.2.4.

Lema 1.2.5 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua y sea J un subintervalo de I que no contiene ningún punto periódico de f . Si $x \in J$, $f^m(x) \in J$ para algún $m > 0$ y $y \in J$, $f^n(y) \in J$ para algún $n > 0$, entonces

$$y < f^n(y) \text{ si } x < f^m(x) \quad y \quad y > f^n(y) \text{ si } x > f^m(x).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < f^m(x)$. Si hacemos $g = f^m$, entonces el intervalo $[x, g(x)]$ no contiene ningún punto periódico de g .

Si $g^k(x) > x$ para algún $k \geq 1$, entonces $g^{k+1}(x) > g(x)$, ya que si $g^{k+1}(x) = g^k(g(x)) \leq g(x)$ entonces g^k tiene un punto fijo en $[x, g(x)]$ lo cual no es posible debido a que g^k no tiene puntos fijos en el intervalo $[x, g(x)]$. De ello se deduce, por inducción, que $g^k(x) > x$, para todo $k > 1$. En particular $f^{mn}(x) > x$. Luego si $f^n(y) < y$, entonces procederíamos de la misma manera para obtener $f^{mn}(y) < y$. Pero entonces $f^{mn}(z) = z$ para algún z entre x y y , lo que significa que f tiene un punto periódico, lo cual es una contradicción. ◀

Corolario 1.2.6 Si J es un subintervalo de I que no contiene puntos periódicos de f , entonces para cualquier $x \in I$ los puntos de $\mathcal{O}_f(x)$ que se encuentran en J , forman una sucesión estrictamente monótona (finita o infinita).

1

Definición 1.2.7 Decimos que un punto $x \in X$, es un punto no errante si para todo entorno U de x existe $m \geq 1$ tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no errantes se llama el conjunto no errante de f y se denota por $\Omega(f)$.

En otras palabras, $x \in X$ es un punto no errante si cada conjunto abierto que contiene a x , contiene al menos dos puntos de una misma órbita. En la figura 1.2 se muestra gráficamente un punto no errante.

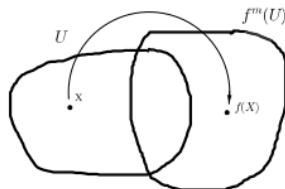


Figura 1.2: x un punto no errante.

Observación 1.2.8 i) El conjunto $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.
ii) $L(f) \subseteq \Omega(f)$.

Lema 1.2.9 Sea J un subintervalo abierto que no contiene puntos periódicos de f . Entonces

- (i) J contiene a lo más un punto de cualquier conjunto límite $\omega(x)$.
- (ii) J no contiene puntos recurrentes.
- (iii) Si $x \in J$ es no errante, entonces no hay otro punto de la órbita de x que se encuentre en J .

Demostración. Las dos primeras afirmaciones se siguen inmediatamente del corolario 1.2.6, ya que si la órbita de x en J es estrictamente monótona, entonces todas las subsucesiones de $\mathcal{O}_f(x)$ son estrictamente monótonas y convergen al límite de $\mathcal{O}_f(x)$, si existe. Para probar la tercera afirmación, supongamos que tenemos

$f^m(x) \in J$ para alguna $m > 0$. Como $f^m(x) \neq x$, entonces existe un intervalo abierto G que contiene a x tal que $G \subseteq J$, $f^m(G) \subseteq J$ y $G \cap f^m(G) = \emptyset$. Como $x \in \Omega$ podemos elegir $y \in G$ y $n > m$ para que también $f^n(y) \in G$. Entonces $f^m(y)$ no está entre y y $f^n(y)$, lo que contradice el lema 1.2.5. ◀

La siguiente proposición da una relación entre los puntos límites, puntos periódicos y puntos no errantes.

Proposición 1.2.10 *Cualquier punto no aislado de Ω se encuentra en Λ y cualquier punto no aislado de un conjunto límite $\omega(x)$ se encuentra en $\overline{Per}(f)$. Por otra parte*

$$\overline{Per}(f) = \overline{R} = \Omega(f|_{\Omega}).$$

Es decir, R es el conjunto no errante de f , considerando a f sobre el conjunto invariante compacto Ω .

Demostración. La primera afirmación se deduce inmediatamente de la proposición 1.2.3 y la segunda del lema 1.2.9(i). Para demostrar que $\overline{Per}(f) = \overline{R}$ es claro que $\overline{Per}(f) \subseteq \overline{R}$ y la contención $\overline{Per}(f) \supseteq \overline{R}$ se sigue del lema 1.2.9(ii). La inclusión $\overline{Per}(f) \subseteq \Omega(f|_{\Omega})$ es evidente. Para demostrar que $\overline{Per}(f) \supseteq \Omega(f|_{\Omega})$ tomemos $y \in \Omega(f|_{\Omega})$ y sea G un intervalo abierto que contiene y . Entonces $G \cap \Omega$ tiene intersección no vacía con $f^m(G \cap \Omega)$ para algún $m > 0$. Por lo tanto, por el lema 1.2.9(iii), G debe contener un punto periódico de f . Por lo tanto $\Omega(f|_{\Omega}) \subseteq \overline{Per}(f)$. ◀

1.3. Dinámica simbólica

En esta sección se estudia, la dinámica simbólica de funciones l -modales (funciones continuas con l valores críticos) la cual se basa en el uso de los valores críticos de la función, introduciendo el concepto de itinerarios para funciones multimodales. Los conceptos y resultados aquí citados pueden ser consultados en [MT].

1.3.1. Itinerarios

Definición 1.3.1 *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de números reales, una función $f : I \rightarrow I$ se llamará monótona por piezas, si existen I_i , con $i = 1, \dots, n$ subintervalos cerrados tal que,*

$$I = \bigcup_{i=1}^n I_i$$

y f es monótona (creciente o decreciente) en cada I_i .

Definimos σ , una sucesión alternada de $l+1$ signos, es decir, $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ con $\sigma_0 \in \{-1, 1\}$ y $\sigma_{j+1} = -\sigma_j$ para $j = 0, 1, \dots, l-1$.

Esta sucesión nos permite introducir el concepto de función l -modal, para caracterizar las funciones monótonas por piezas de clase C^1 a través de sus puntos críticos.

Definición 1.3.2 Una función continua $f : I = [a, b] \rightarrow I$, es l -modal si existe una sucesión de puntos

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_l < c_{l+1} = b$$

tal que f es estrictamente monótona en cada intervalo $[c_i, c_{i+1}]$ y alternadamente creciente, decreciente en esos intervalos.

Al número $l + 1$ se le llama número de doblez¹ de f y se denota por $\ell(f)$. Esto es, $\ell(f)$ es la cantidad mínima de intervalos que se requieren para cubrir el intervalo I , de tal manera que f es monótona en cada uno de estos intervalos.

Definición 1.3.3 Sea σ una sucesión alternada de signos. Una función l -modal tiene la forma σ , si f restringida a $[c_j, c_{j+1}]$ es creciente cuando $\sigma_j = 1$ o es decreciente cuando $\sigma_j = -1$. Si f es diferenciable σ_j se identifica con el signo de $f'(x)$ con $c_j \leq x \leq c_{j+1}$. Si $\sigma_0 = 1$ diremos que f tiene forma positiva y si $\sigma_0 = -1$ diremos que f tiene forma negativa.

Para una función l -modal usaremos la notación $f(x, \mathbf{c})$ con

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l) \in I^l.$$

Note que cuando $f \in \mathcal{C}^1$, claramente los c_i son los puntos críticos de f , es decir $f'(c_i) = 0$ para $i = 1, \dots, l$. Para la función l -modal denotaremos por v_i a los valores críticos, $v_i = f(c_i)$.

El vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_l) \in I^l$ asociado a $f(x, \mathbf{c})$, satisface:

$$\begin{array}{ll} v_j < v_{j+1}, & \text{cuando } \sigma_j = +1 \\ v_j > v_{j+1}, & \text{cuando } \sigma_j = -1 \end{array}$$

para $0 \leq j < l$.

En la figura 1.3 se muestra la gráfica de una función 4-modal, donde $\sigma = (+, -, +, -, +)$, y $\ell(f) = 5$.

Sea $f : I \rightarrow I$ una función l -modal, seccionemos el intervalo I en subconjuntos disjuntos

¹Del inglés *lap number*.

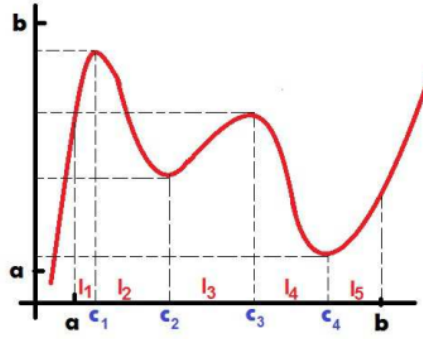


Figura 1.3: Gráfica de una función 4-modal.

$$I = I_0 \cup c_1 \cup I_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_l \cup I_l,$$

donde los conjuntos

$$I_0 = [a, c_1), I_1 = (c_1, c_2), \dots, I_l = (c_l, b]$$

son las componentes conexas de

$$I \setminus \bigcup_{i=1}^l \{c_i\},$$

donde la función f no cambia de monotonía.

Ahora tomando los c_j 's y los I_j 's como símbolos abstractos se forma el conjunto

$$\mathfrak{U} = \{I_0, c_1, I_1, c_2, \dots, c_l, I_l\}.$$

2 Definimos un orden natural en $\mathfrak{U}$

$$I_0 < c_1 < I_1 < c_2 < \dots < c_l < I_l.$$

Definición 1.3.4 **2** El itinerario de un punto $x \in I$ se define como la sucesión de símbolos $\{A_k(x)\}$ en $\mathfrak{U}$ tal que

$$A_k(x) = \begin{cases} I_j, & \text{si } f^k(x) \in I_j, \\ c_j, & \text{si } f^k(x) = c_j. \end{cases}$$

Donde $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ denota la composición de f consigo misma k veces.

Ejemplo 1.3.5 Sea $f(x) = 3x(1-x)$ la función logística de parámetro 3, f tiene la forma $\sigma = (+, -)$, el único punto crítico de f es $x = \frac{1}{2}$, por lo tanto $\mathfrak{A} = \{I_0, c_1, I_1\}$ con $I_0 = [0, \frac{1}{2})$, $I_1 = (\frac{1}{2}, 1]$, $c_1 = \{\frac{1}{2}\}$. Sea $x_0 = .1$, luego

$$I(x_0) = I_0 I_0 I_1 I_1 \dots,$$

como se muestra en la figura 1.4.

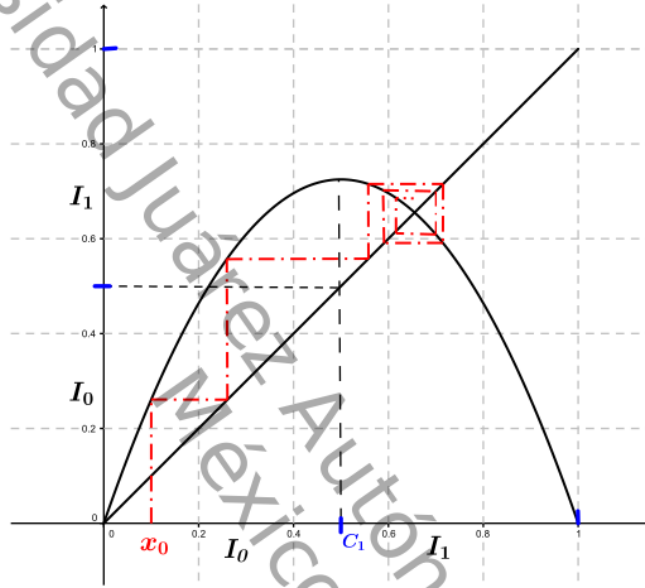


Figura 1.4: Itinerario para x_0 .

Algunos aspectos de la estructura de la órbita de x se reflejan de manera directa en el itinerario. Por ejemplo, si x pertenece a una órbita periódica, su itinerario debe ser periódico. Además, si hay órbitas periódicas de periodo 1 o 2, el periodo del itinerario de x o es el periodo de la órbita o la mitad de él.

Definición 1.3.6 El itinerario de una órbita periódica se llamará simplemente itinerario periódico de la órbita.

Nota 1.3.7 Una función l -modal f tiene asociado un único vector $\mathbf{c}$ que depende estrictamente de f , por lo que la sucesión de puntos

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_l < c_{l+1} = b$$

se construye de acuerdo a cada f , en consecuencia cada función determina su propio espacio de sucesiones $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ con el que se estudia su dinámica.

Definiremos un orden parcial $\prec$ en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, apoyándonos en el orden natural de $\mathfrak{U}$ y en una función $\epsilon : \mathfrak{U} \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ que se define de acuerdo a la forma σ de la función l -modal, como sigue

$$\epsilon(v) = \begin{cases} \sigma_j, & \text{si } v = I_j \\ 0, & \text{si } v = c_j. \end{cases}$$

Sean $A = A_0 A_1 \dots$ y $B = B_0 B_1 \dots$ sucesiones en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, diremos que $A \prec B$ si existe un entero k tal que

$$A_i = B_i \quad \text{para } i < k,$$

y

$$\begin{aligned} A_k < B_k, & \quad \text{si } \epsilon(A_0)\epsilon(A_1)\dots\epsilon(A_{k-1}) = +1, \text{ o} \\ A_k > B_k, & \quad \text{si } \epsilon(A_0)\epsilon(A_1)\dots\epsilon(A_{k-1}) = -1. \end{aligned}$$

Si $\epsilon(A_0)\epsilon(A_1)\dots\epsilon(A_{k-1}) = 0$, es decir, si $A_i = B_i = c_j$ para $i < k$ y algún $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, el orden no se define.

Ejemplo 1.3.8 Sea f la función del ejemplo 1.3.5 y sean $A, B \in \mathfrak{U}^{\mathbb{N}} = \{I_0, c_1, I_1\}^{\mathbb{N}}$ las sucesiones dadas por

$$A = I_0 I_0 I_1 I_0 I_0 \dots$$

$$B = I_0 I_0 I_1 I_1 I_1 \dots$$

Como $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, 2$, $A_3 < B_3$ y $\epsilon(I_0)\epsilon(I_0)\epsilon(I_1) = (+)(+)(-) = -$, se concluye que $B \prec A$.

Más generalmente se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.3.9 ² Sea $\preceq$ el orden en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, correspondiente a una función l -modal f , sea $I(x)$ e $I(y)$ el itinerario de x y y , respectivamente, bajo f , entonces se cumplen

- i) Si $x < y$, entonces $I(x) \preceq I(y)$.
- ii) Si $I(x) \prec I(y)$, entonces $x < y$.

Demostración. Supongamos que $x < y$ y que $I(x) = A_0A_1A_2\ldots \neq I(y) = B_0B_1B_2\ldots$. Sea $n \geq 0$ tal que $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$ y $A_n \neq B_n$. Como $A_i = B_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$, tenemos que no hay puntos de doblez en los intervalos $[x, y]$, $f([x, y])$, $\dots$, $f^{n-1}([x, y])$, pero sí existe un punto de doblez c_k en el intervalo $f^n([x, y])$, por lo que f^n es monótona en el intervalo $[x, y]$. Además, si $\epsilon(I_0)\epsilon(I_1)\dots\epsilon(I_{k-1})$ es positivo (negativo) f^n es creciente (decreciente) en el intervalo $[x, y]$.

En el caso positivo $x < y \rightarrow f^n(x) \leq f^n(y) \rightarrow A_n \leq B_n$,

en el caso negativo $x < y \rightarrow f^n(x) \geq f^n(y) \rightarrow A_n \geq B_n$,

de donde se concluye que $I(x) \preceq I(y)$.

El inciso ii) se demuestra usando el mismo argumento. ◀

Si $\mathbf{I}(x) = \{y : I(x) = I(y)\}$, de la proposición anterior se tiene que $\mathbf{I}(x)$ es conexo.

Dentro de los itinerarios de los puntos del dominio de f , distinguiremos los *itinerarios de los valores críticos*², denotándolos por

$$K_j = I(v_j) \in \mathfrak{U}^{\mathbb{N}},$$

los cuales juegan un papel muy importante, en el estudio de la dinámica del sistema.

² A cada función l -modal se le asocia la l -ada formada por los m itinerarios de los valores críticos.

$$K(f) = (K_1, K_2, \dots, K_l),$$

a este vector de itinerarios le llamaremos el *itinerario principal*³ de la función monótona por piezas f .

El *itinerario principal* impone restricciones para que una sucesión pueda ser realizable por algún itinerario de $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, lo cual se estudia en la próxima sección.

²En inglés *kneading sequences*.

³En inglés *kneading data*.

1.3.2. Sucesiones admisibles

Es importante mencionar que no todas las sucesiones en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, representan el itinerario de algún punto x . Por ejemplo, si $f : X \rightarrow X$ es una función continua, no constante y $c_i \in X$ es un punto crítico que no es punto fijo de f , entonces la sucesión $(c_i c_i c_i \dots)$ no representa un itinerario de f . Lo que es cierto, es que si $x \in I$ y su itinerario está dado por

$$I(x) = A_0 A_1 \dots,$$

entonces se debe cumplir:

Condición de compatibilidad 1: Si el símbolo A_k es igual a algún c_j , entonces la sucesión $(A_{k+1} A_{k+2} \dots)$ es igual K_j , el itinerario del valor crítico $f(c_j)$. En vista de esta condición, es conveniente determinar en la sucesión $(A_0 A_1 \dots)$ el primer c_j que aparece en ésta.

Condición de compatibilidad 2: Si $A_k = I_{j-1}$ o $A_k = I_j$, entonces la sucesión $(A_{k+1} A_{k+2} \dots)$ satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

$$(A_{k+1} A_{k+2} \dots) \preceq K_j$$

o

$$(A_{k+1} A_{k+2} \dots) \succeq K_j$$

dependiendo si se tiene un mínimo local $\sigma_j = -1$ o si $\sigma_j = +1$ (se tiene un máximo local).

Con estas dos condiciones podemos empezar a caracterizar las sucesiones en $\mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ que representan un posible itinerario.

Definición 1.3.10 Una sucesión de símbolos $(A_0 A_1 \dots) \in \mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$ se dice que es **admisibile** para el itinerario principal $K(f) = (K_1, K_2, \dots, K_m) \in (\mathfrak{U}^{\mathbb{N}})^m$, si satisface las condiciones de compatibilidad 1 y 2.

Ejemplo 1.3.11 En el ejemplo 1.3.5 se tiene el valor crítico $x = \frac{3}{4}$, $\mathfrak{U} = \{I_0, c_1, I_1\}$ con $I_0 = [0, \frac{1}{2})$, $I_1 = (\frac{1}{2}, 1]$, $c_1 = \{\frac{1}{2}\}$. El itinerario del valor crítico está dado por,

$$K_1 = I(\frac{3}{4}) = I_1 I_1 I_1 I_1 \dots$$

Sea $A \in \mathfrak{U}^{\mathbb{N}}$, la sucesión

$$A = I_0 I_0 I_0 c_1 I_1 I_1 \dots$$

observemos que $A_4 = c_1$ y

$$(A_5 A_6 \dots) = I_1 I_1 I_1 I_1 \dots = I\left(\frac{3}{4}\right)$$

por lo tanto A satisface la condición de compatibilidad 1, por otro lado observemos que $A_1 = A_2 = A_3 = I$ y $\sigma_1 = 1$ y además

$$(A_2, A_3, A_4, \dots) = I_0 I_0 c_1 I_1 I_1 \dots \preceq K_1$$

$$(A_3, A_3, A_5, \dots) = I_0 c_1 I_1 I_1 I_1 \dots \preceq K_1$$

$$(A_4, A_5, A_6, \dots) = c_1 I_1 I_1 I_1 I_1 \dots \preceq K_1.$$

Por lo tanto la sucesión A satisface la condición de compatibilidad 2. Concluimos que A es admisible.

Observación 1.3.12 Note que la órbita de un punto crítico c_j es periódica si y sólo si el itinerario de c_j $I(c_j) = (c_j, K_j)$ es periódico. Usando la condición de compatibilidad 1, una condición completamente equivalente es que la sucesión K_j contiene el símbolo c_j como una de sus entradas.

Ejemplo 1.3.13 Sea f la función $f(x) = (4x - 1)^2(1 - x)$ con forma $(- + -)$, definida en el intervalo $I = [0, 1]$,

$$f'(x) = (4x - 1)(9 - 12x),$$

por lo tanto los valores críticos de f son $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{3}{4}$ y los itinerarios de valores críticos son $K_1 = \overline{I_0 I_1}$ y $K_1 = \overline{I_1 I_0}$, respectivamente, (donde la línea sobre los símbolos indica una sucesión que será repetida infinitamente). La observación anterior dice que los puntos críticos para este ejemplo no son periódicos, de hecho f manda los puntos críticos $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ a los extremos del intervalo y el conjunto $\{0, 1\}$ es una órbita periódica de periodo 2.

Ejemplo 1.3.14 Sea $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$ con forma $(+ - +)$ definida en el intervalo $I = \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$,

$$f'(x) = 6x(x - 1)$$

por lo tanto los puntos críticos de f son $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ con $I(0) = \overline{c_1, c_2}$ e $I(1) = \overline{c_1, c_2}$, lo que muestra que estos itinerarios son periódicos.

En general, uno no puede esperar que el conjunto de todos los itinerarios para una función dada sea completamente determinado por su itinerario principal. De hecho el primer problema que encontramos es que el itinerario principal normalmente no determina los itinerarios de los extremos de intervalo. Sin embargo cualquier itinerario $I(x)$ que es realizable debe satisfacer

$$I(a) \preceq I(x) \preceq I(b).$$

Tomando los itinerarios de los extremos del intervalo, definimos $K_0 = I(f(a))$ y $K_{l+1} = I(f(b))$. Con esto introducimos una versión modificada de la condición de compatibilidad 2 para un itinerario $I(x) = (A_0 A_1 A_2 \dots)$.

Condición de compatibilidad 2[#]: Si $A_k = I_j$ entonces

$$K_j \preceq (A_{k+1}, A_{k+2}, \dots) \preceq K_{j+1} \text{ cuando } \sigma_j = 1$$

$$K_j \preceq (A_{k+1}, A_{k+2}, \dots) \preceq K_{j+1} \text{ cuando } \sigma_j = -1.$$

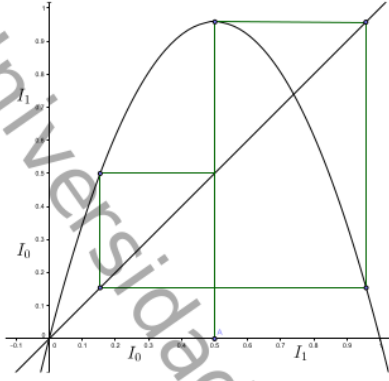
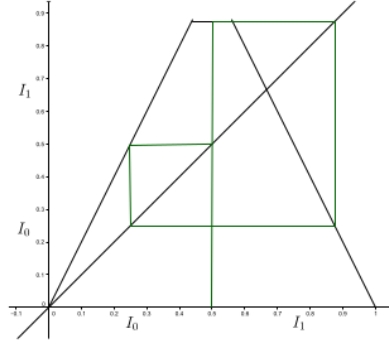
Sin embargo, de manera general no se cumple que cada sucesión que satisface las condiciones 1 y 2[#] necesariamente ocurre como el itinerario para la función l -modal dada, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.15 En la familia cuadrática $Q_v(x) = 4vx(1-x)$ se tiene $Q'_v(x) = 4v - 8vx$, por lo tanto el punto crítico de Q_v es $c = \frac{1}{2}$. De manera similar para la familia $F_{v'}(x) = \min(2x, v', 2-2x)$ se tiene que $c = \frac{1}{2}$ es un punto crítico.

Para los parámetros $v = 0.95796\dots$ y $v' = \frac{7}{8}$, se puede demostrar que la órbita del valor crítico de Q_v y $F_{v'}$ es de período 3, por lo tanto el itinerario del valor crítico es de la forma $K_1 = \overline{I_1 I_0 c_1}$, para ambas funciones. Este hecho se muestra gráficamente en las figuras 1.5 y 1.6. Luego si nos fijamos en las sucesiones

$$I_0 K_1 = I_0 \overline{I_1 I_0 c_1} \quad \text{o} \quad I_1 K_1 = I_1 \overline{I_1 I_0 c_1},$$

dado que $F_{\frac{7}{8}}$ es constante alrededor del punto crítico es claro que hay una infinidad de puntos que tienen estos itinerarios bajo esta función, por lo tanto estos itinerarios son admisibles para el itinerario principal, pero estos itinerarios no son realizables por órbitas de un punto x bajo $Q_{0.95796\dots}$ ya que esta función es estrictamente monótona por pedazos y estos itinerarios pueden ocurrir sólo si la función es constante en todo el intervalo entre x y c .

Figura 1.5: Gráfica de $Q_{0.95796...}$.Figura 1.6: Gráfica de $F_{\frac{7}{8}}$.

Con esto se demuestra que las condiciones de compatibilidad no son suficientes para garantizar la existencia de los itinerarios, o incluso de truncamientos finitos de itinerarios que contienen los símbolos del punto crítico. Sin embargo, el siguiente teorema proporciona una declaración de existencia útil sólo trabajando con sucesiones finitas que no contienen ningún símbolo c_j .

Observación 1.3.16 *Los análogos de las condiciones de compatibilidad 1, 2 y $2^\#$ para las sucesiones finitas en $\mathcal{U}^*$ tienen perfecto sentido. En particular, el concepto de la admisibilidad para las sucesiones finitas también tiene sentido.*

Definición 1.3.17 *Una sucesión (finita o infinita) de símbolos $\{A_i\}$ se llamará acrítica si todos los A_i pertenecen al conjunto*

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0(l) = \{I_0, I_1, \dots, I_l\} \subset \mathcal{U}(l).$$

Es decir, sucesiones que no tienen los símbolos de los valores críticos como elementos.

Teorema 1.3.18 *Sean f una función l -modal y $s = (I_{\alpha_0}, I_{\alpha_1}, \dots, I_{\alpha_k})$ una sucesión finita de elementos $I_{\alpha_j} \in \mathcal{U}_0$. Entonces existe una órbita*

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots, \mapsto x_k \mapsto \dots$$

con $x_i \in I_{\alpha_i}$ si y solo si la sucesión s satisface la condición $2^\#$.

Demostración. Si existe una órbita

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots, \mapsto x_k \mapsto \dots$$

tal que $x_i \in I_{\alpha_i}$ claramente la sucesión $(I_{\alpha_0}, I_{\alpha_1}, \dots, I_{\alpha_k})$ satisface la condición $2^\#$.

Recíprocamente usando inducción sobre k se demuestra que cada sucesión $(I_{\alpha_0}, I_{\alpha_1}, \dots, I_{\alpha_k})$ que satisface la condición $2^\#$ puede ser realizada por una órbita de f . Claramente esto es cierto para $k = 0$. Supongamos entonces que es cierto para todas las sucesiones de longitud k , para fijar ideas también supongamos que $\sigma_{\alpha_0} = +1$, entonces

$$K_{\alpha_0}^k \leq (I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I_{\alpha_k}) \leq K_{\alpha_0+1}^k \quad (1.1)$$

por la condición de compatibilidad $2^\#$, (el superíndice indica que es un truncamiento de longitud k .) Por la hipótesis de inducción existe un punto $x_1 \in I$ con itinerario

$$(I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I_{\alpha_k}).$$

La prueba ahora se dividirá en dos partes, de acuerdo a la desigualdad (1.1) cuando es estricta y cuando no lo es. Si la desigualdad es estricta se sigue que $v_{\alpha_0} < x_1 < v_{\alpha_0+1}$, por el teorema del valor intermedio se sigue que existe un punto $x_0 \in I_{\alpha_0}$ tal que $f(x_0) = x_1$, x_0 tiene el itinerario requerido. En el caso de que se tenga alguna igualdad, por ejemplo

$$K_{\alpha_0}^k = (I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \dots, I_{\alpha_k})$$

entonces el punto $x_0 = c_{\alpha_0} + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ tiene el itinerario requerido, debido a que I_{α_0} es un subconjunto abierto de I . El otro caso es análogo. ◀

Es preciso comentar, que este teorema es válido para sucesiones acrícticas infinitas, en este trabajo nos será suficiente caracterizar las sucesiones realizables de longitud finita. Es práctico primero considerar funciones para las cuales se conoce el comportamiento en la frontera del dominio. Supongamos que f es una función definida en el intervalo $I = [a, b]$ en sí mismo, con forma σ .

Definición 1.3.19 La función l -modal $f : I \rightarrow I$ se llama **de frontera anclada** si $f(\{a, b\}) \subseteq \{a, b\}$ bajo la siguiente regla:

$$f(a) = \begin{cases} a, & \text{si } \sigma_0 = +1 \\ b, & \text{si } \sigma_0 = -1, \end{cases} \quad f(b) = \begin{cases} b, & \text{si } \sigma_m = +1 \\ a, & \text{si } \sigma_m = -1. \end{cases}$$

2 En la figura 1.7 se muestran los cuatro casos posibles de gráficas de funciones l -modales con frontera anclada. El caso l impar corresponde a las dos gráficas del centro y el caso l par a las gráficas de los extremos.

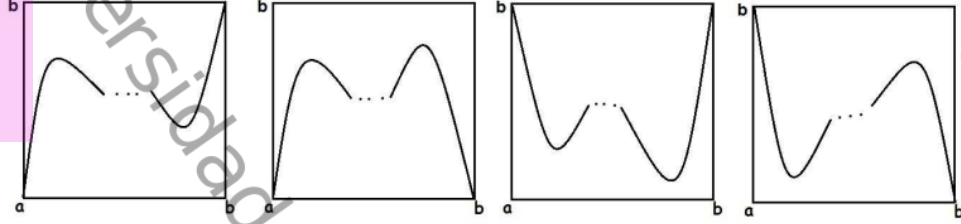


Figura 1.7: Funciones de frontera anclada.

En adelante trabajaremos casi siempre con funciones de frontera anclada, para las cuales la distinción entre las condiciones 2 y 2[#] desaparece.

Para una función l -modal de frontera anclada, de la proposición 1.3.9 se sigue que $I(a)$ es precisamente I_{min} , e $I(b)$ es I_{max} . De lo anterior se sigue que $K_0 = I(f(a))$ y $K_m = I(f(b))$ están determinadas por la forma σ , y una es I_{min} , y la otra I_{max} .

Del teorema 1.3.18 se tiene la siguiente corolario.

Corolario 1.3.20 *Sea f una función l -modal de frontera anclada. Entonces una sucesión $(I_{\alpha_0} I_{\alpha_1} \dots I_{\alpha_k})$ es realizable por alguna órbita*

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_k \mapsto \dots$$

si y sólo si es admisible. De hecho, para cualquier k , el conjunto de todas las sucesiones en $\mathfrak{U}_0^k$ está determinado por el itinerario principal de f .

Los itinerarios de valores críticos K_j , ellos mismos son itinerarios que satisfacen las dos condiciones de compatibilidad y también satisfacen lo siguiente:

Condición de compatibilidad 3 (para el itinerario principal):

$$K_j \preceq K_{j+1}, \quad \text{si } \sigma_j = +1$$

$$K_j \preceq K_{j+1}, \quad \text{si } \sigma_j = -1.$$

Definición 1.3.21 El itinerario principal $K(f) = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ se dice que es admisible para la función f con forma σ , si satisface las tres condiciones de compatibilidad.

1.3.3. La función σ

Definición 1.3.22 Sea p un entero mayor o igual a 2 y denotamos por

$$\Sigma_p^+ = \{1, 2, \dots, p\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}},$$

al espacio de sucesiones formadas por p elementos.

Definimos una métrica en Σ_p^+ , como

$$d_p(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^k}$$

para $s = (s_0, s_1, \dots)$ y $t = (t_0, t_1, \dots)$, donde

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definimos $\sigma : \Sigma_p^+ \rightarrow \Sigma_p^+$, donde la nueva sucesión $\sigma(s) = t$ es tal que $t_k = s_{k+1}$, es decir $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, \dots)$. A σ se le llama la *función olvido* o *función desplazamiento*.

Lema 1.3.23 Sean $s, t \in \Sigma_p^+$, si $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces la distancia $d_p(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Por otro lado si $d_p(s, t) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} d_p(s, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^k} = \sum_{k=0}^n \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Para el otro caso, suponemos que $d_p(s, t) < \frac{1}{2^n}$, si $s_j \neq t_j$ para $j \leq n$, entonces $d_p(s, t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. ◀

En la siguiente proposición se muestra que la función σ es continua.

Proposición 1.3.24 *La función olvido $\sigma : \Sigma_p^+ \rightarrow \Sigma_p^+$ es continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $s = s_0 s_1 s_2 \dots$, elijamos n tal que $2^{-n} < \epsilon$. Sea $\delta = 2^{-(n+1)}$, tomemos $t = t_0 t_1 t_2 \dots$, tal que $d(s; t) < \delta$, por el lema 1.3.23 tenemos que $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Como $\sigma(s) = s_1 s_2 \dots s_n \dots$ y $\sigma(t) = t_1 t_2 \dots t_n \dots$ para $i \leq n$, tenemos que $d(\sigma(s); \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Por lo tanto σ es continua. ◀

A continuación construiremos una sucesión cuya órbita bajo la función σ es densa. Sin perder generalidad podemos suponer que $p = 2$. Sea t la sucesión que primero tiene los bloques de un elemento, luego todos los bloques de dos elementos y así sucesivamente hasta enumerar todos los bloques que tienen n elementos.

$$t = 1, 2 : (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2) : (1, 1, 1), (2, 1, 1), \dots$$

(El uso de paréntesis, comas y dos puntos es únicamente para mostrar la construcción de la sucesión). Entonces, para cualquier $s \in \Sigma_2^+$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una n tal que $\sigma^n(t)$ y s coinciden en los primeros k términos. Así $d(\sigma^n(t); s) \leq 2^{-k}$. Como k y s son arbitrarios, la órbita de t es densa en Σ_2^+ .

Definición 1.3.25 *Una sucesión de símbolos $I(x) = (A_0, A_1, \dots)$ es flaca si algún segmento terminal*

$$\sigma^k(I(x)) = (A_k, A_{k+1}, \dots)$$

tiene la forma (I_j, K_j) o la forma (I_{j-1}, K_j) , para algún $1 \leq j \leq m$. En otras palabras, algún punto de la órbita de x , que no es un punto crítico, tiene el mismo itinerario que un punto crítico adyacente. Por otro lado la sucesión de símbolos se llama estrecha si no es flaca. Similarmente el itinerario principal K es estrecho si cada itinerario crítico K_i es estrecho.

Existen polinomios que están directamente relacionados con su itinerario principal. Thurston estudió esa relación con los polinomios llamados postcríticos finitos y que a continuación se definen.

Definición 1.3.26 *Un polinomio se llama postcrítico finito, si las órbitas de todos los puntos críticos son periódicas o eventualmente periódicas.*

Teorema 1.3.27 (Thurston) *Un polinomio real de grado $m+1$ con conjunto postcrítico finito con m distintos puntos críticos reales está unívocamente determinado, (salvo conjugación afín) por su itinerario principal, si y sólo si, cada itinerario crítico K_i es periódico o eventualmente periódico y además es estrecho.*

La implicación necesaria fue demostrada por Thurston y la implicación inversa fue demostrado por Poirier. Una demostración de este resultado puede encontrarse en [MiT].

1.4. Dinámica de funciones logísticas acopladas

En esta sección se comienza el estudio de la dinámica de la familia de polinomios de grado cuatro, que se obtiene como composición de dos funciones logísticas. Para ello se introducen los conceptos de diórbita y ditinerario, los cuales son la extensión de órbita e itinerario, respectivamente, estudiados anteriormente. La familia de funciones que emplearemos para ilustrar la teoría son las funciones conocidas como tiendas truncadas, ya que estas funciones son modelos útiles para codificar de manera canónica los itinerarios principales. Los conceptos y resultados aquí citados pueden ser consultados en [R].

1.4.1. Combinatoria e itinerario principal

Empezamos estudiando el sistema dinámico que se genera al iterar alternadamente dos funciones unimodales arbitrarias. En este sentido es conveniente considerar dos intervalos $I_1 = [a, b]$ e $I_2 = [c, d]$ y un par de funciones (h_1, h_2) de la siguiente manera, $h_1 : I_1 \rightarrow I_2$, $h_2 : I_2 \rightarrow I_1$ con puntos críticos $\gamma_1 \in I_1$ y $\gamma_2 \in I_2$, respectivamente.

Definición 1.4.1 Se llama diórbita bajo el par (h_1, h_2) , a la sucesión

$$x \rightarrow h_1(x) \rightarrow h_2(h_1(x)) \rightarrow h_1(h_2(h_1(x))) \rightarrow \dots$$

Diremos que una órbita es crítica, si contiene alguno de los puntos críticos γ_1 o γ_2 . Si contiene a ambos se llamará bicrítica. Además diremos que es de periodo $2n$ bajo (h_1, h_2) si n es el entero positivo mas pequeño tal que $(h_2 \circ h_1)^n(x) = x$. Es decir x es periódico de periodo n para la función $f = h_2 \circ h_1$.

Denotamos a la diórbita periódica de (h_1, h_2) de periodo $2n$ como,

$$x_1 = x_{i_1} \xrightarrow{h_1} y_{j_1} \xrightarrow{h_2} x_{i_2} \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_1} y_{j_n} \xrightarrow{h_2} x_{i_n},$$

donde $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset I_1$ y $\{y_j\}_{1 \leq j \leq n} \subset I_2$, están ordenados de forma creciente.

Definición 1.4.2 El orden-dato de una diórbita periódica está definido como el par (σ, τ) de permutaciones en S_n dado por:

$$h_1(x_i) = y_{\sigma_i}$$

$$h_2(y_j) = x_{\tau_j}$$

de modo que $\sigma_{i_k} = j_k$ y $\tau_{j_k} = i_{k+1}$. (Los subíndices deben ser entendidos como enteros módulo n).

Definición 1.4.3 Un orden-dato $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ es admisible, si es el orden-dato de una órbita periódica de algún par (h_1, h_2) de funciones unimodales.

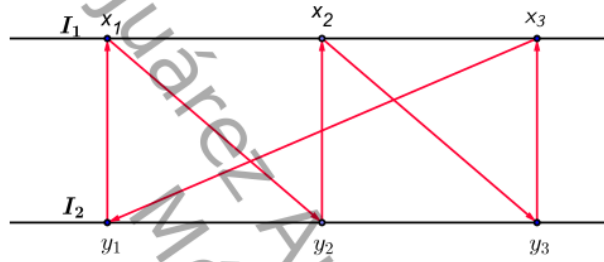


Figura 1.8: Orden principal admisible de periodo 6, $\sigma = (231)$, $\tau = (123)$.

Si partimos los intervalos I_1 e I_2 como en la sección 1.3, entonces $I_1 = L_1 \cup \Gamma_1 \cup R_1$ e $I_2 = L_2 \cup \Gamma_2 \cup R_2$, con $L_1 = [a, \gamma_1)$, $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$, $R_1 = (\gamma_1, b]$, $L_2 = [c, \gamma_2)$, $\Gamma_2 = \{\gamma_2\}$ y $R_2 = (\gamma_2, d]$.

Ahora vamos a estudiar las sucesiones usando como espacios de símbolos los conjuntos $\{L_1, \Gamma_1, R_1\}$ y $\{L_2, \Gamma_2, R_2\}$. Con estas particiones podemos trasladar el concepto de itinerario a sistemas dinámicos generados por la iteración de dos funciones, en donde se llaman ditinerarios y se definen de la siguiente manera.

Definición 1.4.4 El ditinerario de una condición inicial x , es la sucesión $\{J_k\}_{k \geq 0}$ tales que si $J_k \in \{L_1, \Gamma_1, R_1\}$, entonces $J_{k+1} \in \{L_2, \Gamma_2, R_2\}$ y se denota por $\mathfrak{J}(x)$.

Igual que antes, se verifica que no toda sucesión de símbolos alternando en $\{L_1, \Gamma_1, R_1\}$ y $\{L_2, \Gamma_2, R_2\}$, representa el ditinerario de alguna condición inicial x bajo el par de funciones (h_1, h_2) . Por otro lado, usando la regla de la cadena podemos observar que los puntos críticos de $h_2 \circ h_1$ son γ_1 y $h_1^{-1}(\gamma_2)$. Por lo tanto, los ditinerarios $I(\gamma_1)$, $I(\gamma_2)$ bajo un par de funciones unimodales (h_1, h_2) determinan el itinerario principal de $h_2 \circ h_1$.

El primer objetivo es estudiar la relación entre el ditinerario y el orden principal de un diórbita crítica periódica.

Supongamos que γ_1 es periódico de periodo $2n$ bajo (h_1, h_2) y sea

$$x_1 \rightarrow x_{i_1} \rightarrow y_{j_1} \rightarrow \cdots \rightarrow y_{j_n} \rightarrow x_{i_1}$$

su diórbita, entonces el orden principal $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ de la diórbita, determina su itinerario vía la posición de los elementos $y_{j_l} \in I_2$ mas cercanos a γ_2 . En otras palabras, hay a lo mas dos ditinerarios críticos que contienen a γ_1 que corresponden al orden principal dado y lo mismo para γ_2 . En particular si la diórbita es bicrítica entonces $y_{j_l} = \gamma_2$. Por lo tanto, el ditinerario está completamente definido. Observemos también, que el orden de los puntos en una diórbita crítica periódica de una función unimodal de forma $(+-)$, se preserva en el orden de sus ditinerarios, es decir, si $x < x'$ entonces $\mathfrak{I}(x) < \mathfrak{I}(x')$. Inversamente conociendo el ditinerario del diórbita bicrítica, podemos obtener el orden en que aparecen en I_1 e I_2 los puntos de la diórbita. Esto demuestra el siguiente resultado:

Teorema 1.4.5 *Si la diórbita de γ_1 es bicrítica de periodo $2n$ bajo las funciones unimodales (h_1, h_2) , entonces el ditinerario de γ_1 determina el orden principal de la diórbita y viceversa.*

Como se mencionó antes, nos interesa estudiar el sistema (q_v, q_w) , donde $q_v = 4vx(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Esta es una familia de funciones de frontera anclada. A la familia (q_v, q_w) , $(v, w) \in [0, 1]^2$, la llamaremos la Q -familia y denotamos el espacio de parámetros como

$$P^Q = \{(v, w) \in [0, 1]^2\}.$$

El comportamiento dinámico de (q_v, q_w) , es muy complicado y en algunos casos imposibles de estudiar, por lo que la estrategia a seguir es estudiar las funciones conocidas en la literatura como tiendas truncadas, para las cuales es mas sencillo estudiar su comportamiento, posteriormente encontrar una relación entre esta familia y la familia logística.

1.4.2. Tiendas truncadas

Las tiendas truncadas son funciones $st_v : I_1 \rightarrow I_2$, $v \in [0, 1]$ definidas como

$$st_v(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{v}{2} \\ v, & \text{si } \frac{v}{2} \leq x \leq 1 - \frac{v}{2} \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq 1 - \frac{v}{2} \end{cases}$$

En la figura 1.9 se muestran dos ejemplos de tiendas truncadas.

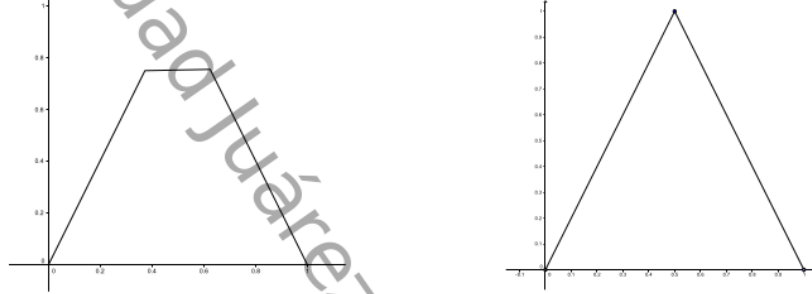


Figura 1.9: Tienda truncada con $v = \frac{3}{4}$ (izquierda) y $v = 1$ (derecha).

Observemos que todos los puntos en $[\frac{v}{2}, 1 - \frac{v}{2}]$ son puntos críticos de st_v , pero por convención tomamos el punto medio de este intervalo $\gamma = \frac{1}{2}$ como punto crítico, por lo tanto el valor crítico es v . A la familia (st_v, st_w) , $(v, w) \in [0, 1]^2$, la llamaremos la ST -familia y denotamos su correspondiente espacio de parámetros como

$$P^{ST} = \{(v, w) \in [0, 1]^2\}.$$

El siguiente resultado nos garantiza la existencia de parámetros en la familia de tiendas truncadas para todos los ordenados admisibles. Su demostración puede ser consultada en [R1].

Teorema 1.4.6 *Dado $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ un orden principal admisible, existe un único par de tiendas truncadas (st_v, st_w) con diórbita periódica bicrítica de orden principal (σ, τ) .*

Volviendo al caso general, para los pares (h_1, h_2) de funciones unimodales arbitrarias, si ambos puntos críticos γ_1 y γ_2 son periódicos, entonces, hay dos casos

posibles que pueden ocurrir: (h_1, h_2) tiene una diórbita bicrítica (discutido anteriormente), o dos diórbitas críticas disjuntas, por lo que es necesario introducir las siguientes definiciones.

Definición 1.4.7 Sea $(\sigma, \tau) \in S_{m+n}^2$ un par de permutaciones que se pueden descomponer en dos-ciclos: $(\sigma_1, \tau_1) \in S_m^2$ y $(\sigma_2, \tau_2) \in S_n^2$. Diremos que dos diórbitas periódicas disjuntas o_1, o_2 , bajo el par de funciones unimodales (h_1, h_2) con forma $(+-)$, tienen orden principal conjunto si:

1. o_1 y o_2 tienen orden principal (σ_1, τ_1) y (σ_2, τ_2) , respectivamente.
2. El orden de los puntos en I_1 e I_2 están dados por $(\tau \circ \sigma)$ y $(\sigma \circ \tau)$, respectivamente.

Vamos a decir que una permutación $(\sigma, \tau) \in S_{m+n}^2$ es admisible como orden principal conjunta, si existen dos diórbitas disjuntas bajo algún par de funciones unimodales con forma $(+-)$ que tienen orden principal conjunta (σ, τ) .

Del mismo modo que para los órdenes principales regulares, se cumplen los siguientes dos resultados, de los cuales se puede encontrar una prueba detallada en el trabajo de Radulescu [R1].

Teorema 1.4.8 Supongamos que un par (h_1, h_2) de funciones unimodales con forma $(+-)$, tiene diórbitas críticas disjuntas o_1 y o_2 , entonces sus itinerarios determinan su orden principal y viceversa.

Teorema 1.4.9 Dado $(\sigma, \tau) = ((\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2)) \in S_{m+n}^2$ un orden principal conjunto admisible, existe un único par de tiendas truncadas (st_v, st_w) con diórbita críticas periódicas disjuntas $o_1 \ni \gamma_1$ y $o_2 \ni \gamma_2$, que tienen orden principal conjunta (σ, τ) .

Ahora queremos ver que podemos decir de la dinámica del sistema (st_v, st_w) en términos de los parámetros en P^{ST} .

Definición 1.4.10 Sea $(\sigma, \tau) \in S_n^2$, un orden principal admisible. El hueso izquierdo $B_L^{ST}(\sigma, \tau)$ es el conjunto de todos los parámetros para los cuales γ_1 está en una diórbita periódica de orden principal (σ, τ) , bajo (st_v, st_w) . El hueso derecho $B_R^{ST}(\sigma, \tau)$ es el conjunto de todos los parámetros para los cuales γ_2 está en una diórbita periódica de orden principal (σ, τ) , bajo (st_v, st_w) .

Para estudiar un poco mas los huesos en la ST -familia, hacemos uso del par (v_0, w_0) para el cual la órbita de γ_1 es bicrítica, el cual nos lo da el teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.11 Sea (σ, τ) un orden principal admisible. Si (v_0, w_0) es el par de parámetros en P^{ST} , cuya diórbita bicrítica asociada tiene orden principal (σ, τ) , entonces existen $v_1, v_2 \in (0, 1)$ tal que $v_1 < v_0 < v_2$ y el hueso izquierdo $B_L^{ST}(\sigma, \tau)$ es la unión de los siguientes tres segmentos $\{v_1\} \times [w_0, 1]$, $\{v_2\} \times [w_0, 1]$ y $(v_1, v_2) \times \{w_0\}$, como se muestra en la figura 1.10. La descripción del hueso derecho es completamente análogo.

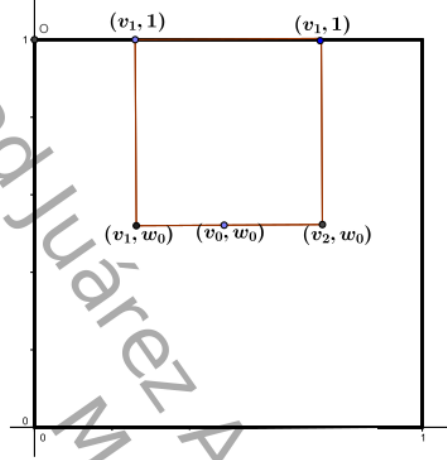


Figura 1.10: Hueso izquierdo.

Demostración. Sea (v_0, w_0) la pareja de parámetros en la familia de tiendas truncadas que nos da el teorema 1.4.6 y sea

$$\gamma_1 \rightarrow v_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \gamma_2 \rightarrow w_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \gamma_1$$

la diórbita bicrítica bajo (st_{v_0}, st_{w_0}) . La diórbita bicrítica alcanza la parte plana de la función una sola vez y lo hace en su centro. Al deslizar la parte constante hacia arriba o hacia abajo, la diórbita de γ_1 cambia de manera continua. Para una altura fija v , sea $y_1(v)$ el elemento en la diórbita de γ_1 que está mas cerca a γ_2 en I_2 . Observemos que si $v = v_0$ entonces $y_1(v_0) = \gamma_2$. Podemos mover v continuamente dentro $[v_1, v_2] = [v_0 - \epsilon, v_0 + \epsilon]$, $\epsilon > 0$, tal que $y_1(v)$ se mueve de $\frac{w_0}{2}$ a $1 - \frac{w_0}{2}$. A lo largo de este proceso, la diórbita permanece periódica y el orden de aparición de puntos sigue siendo el mismo, De donde se tiene que

$B_L^{ST}(\sigma, \tau) = \{v_1, v_2\} \times [w_0, 1] \cup (v_1, v_2) \times \{w_0\}$. En particular existe exactamente dos valores $v = v_1$ y $v = v_2$ tal que la diórbita de γ_1 tiene el orden principal dado (σ, τ) bajo (st_v, st_w) . Es decir hay exactamente dos valores frontera de B_L^{ST} en $[0, 1] \times \{1\}$. ◀

Cada tienda truncada tiene distintos conjuntos de puntos críticos, sin embargo todas ellas comparten el punto crítico $\frac{1}{2}$, de manera que cuando hablamos del hueso de ST_{wv} , nos estaremos refiriendo al hueso asociado a éste punto crítico. Además, el punto $\frac{1}{2}$ también es punto crítico de la familia logística, lo cual nos ayudara a relacionar la dinámica de ambas familias.

El concepto de hueso no es propio de las tiendas truncadas, es un concepto general para cualquier espacio de parámetros, asociado a los sistemas que se generen con las iteraciones de dos funciones en dos familias de funciones unimodales, a continuación se muestra la definición general.

Definición 1.4.12 Sea $(\sigma, \tau) \in S_n^2$, un orden principal admisible. El hueso izquierdo $B_L(\sigma, \tau)$, es el conjunto de todos los parámetros para los cuales γ_1 está en una diórbita periódica de orden principal (σ, τ) . El hueso derecho $B_R(\sigma, \tau)$, es el conjunto de todos los parámetros para los cuales γ_2 está en una diórbita periódica de orden principal (σ, τ) .

De la definición se puede observar que en cualquier espacio de parámetros, cualesquiera dos huesos izquierdos son disjuntos y cualesquiera dos huesos derechos también son disjuntos.

Definición 1.4.13 En cualquier espacio de parámetros, una intersección de un hueso derecho $B_L(\sigma_1, \tau_1)$ y un hueso izquierdo $B_R^{ST}(\sigma_2, \tau_2)$ se llama una intersección primaria, si $(\sigma_1, \tau_1) = (\sigma_2, \tau_2)$, y el par de funciones correspondientes a la intersección, tiene diórbita bicrítica con este orden principal y es llamada intersección secundaria, si la funciones correspondientes a la intersección tiene diórbitas críticas disjuntas de orden principal (σ_1, τ_1) , (σ_2, τ_2) respectivamente, y orden principal conjunta (σ, τ) .

Un punto importante que debemos considerar, es el comportamiento de los puntos críticos de la función correspondiente a los parámetros (v, w) , cuando estos varían. Por ejemplo la composición $q_w \circ q_v$ de dos funciones logísticas, es tres modal o unimodal. Por lo que consideramos importante mencionar algunos detalles de los itinerarios principales de funciones en P^{ST} y P^Q .

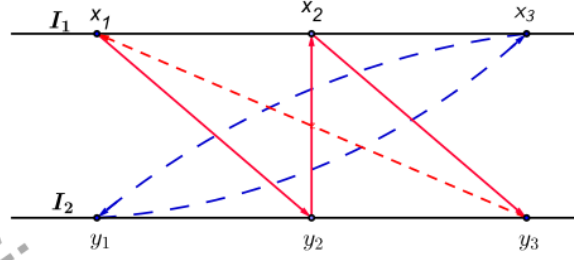


Figura 1.11: Combinatoria de una intersección secundaria de un hueso izquierdo de periodo 4 y un hueso derecho de periodo 2, con orden principal $(\sigma, \tau) = ((231), (321))$.

Funciones en P^{ST} . Para cualquier $(v, w) \in P^{ST}$ la función $st_w \circ st_v$ puede considerarse 3-modal, con puntos críticos $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \gamma_1 = \frac{1}{2}$ y $c_3 = \frac{3}{4}$. Por lo tanto su espacio de símbolos asociado es

$$\{I_1, c_1, I_2, c_2, I_3, c_3, I_4\},$$

y el itinerario principal correspondiente es

$$K_{ST} = (K_1, K_2, K_3).$$

Podemos considerar el espacio de parámetros P^{ST} , formado de tres partes: $P^{ST} = P_1^{ST} \cup P_2^{ST} \cup P_3^{ST}$, donde $P_1^{ST} = \{(v, w) \in [0, 1]^2, w > 2v\}$, $P_2^{ST} = \{(v, w) \in [0, 1]^2, w < 2v, w \leq 2 - 2v\}$ y $P_3^{ST} = \{(v, w) \in [0, 1]^2, w > 2 - 2v\}$.

De esta forma podemos decir que

1.- No hay huesos derechos en P_1^{ST} , por lo tanto aquí no hay intersecciones entre huesos.

2.- P_2^{ST} no contiene intersecciones secundarias ya que $\frac{w}{2} \leq v \leq 1 - \frac{w}{2}$. Podría ser que $st_w(\gamma_2) = w = (st_w \circ st_v)(\gamma_1)$, por lo que las órbitas de γ_1 y γ_2 no son disjuntas. Por otra parte si $(v, w) \in P_2^{ST}$ es una intersección primaria, entonces la función $st_w \circ st_v$ es estrictamente 3-modal, excepto para $(v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.- Para $(v, w) \in P_3^{ST}$ se tiene que $st_w \circ st_v$ es estrictamente 3-modal, por lo tanto, $K_1 = K_3 \neq K_2$.

Funciones en P^Q . El comportamiento de los polinomios de grado 4 en la Q -familia también varía cuando se mueven los parámetros (v, w) .

1.- Si $v < \frac{1}{2}$ entonces $q_w \circ q_v$ tiene un único punto crítico $c_2 = \gamma_1 = \frac{1}{2}$. Este subconjunto de parámetros será de poco interés, ya que no contiene ningún hueso y por lo tanto no contiene intersecciones. Puede ocurrir que $q_v \leq v \leq \frac{1}{2}$, para todo $x \in I_1$, por lo que no pasa por la diórbita de γ_2 .

2.- Si $v = \frac{1}{2}$ entonces $q_w \circ q_v$ tiene un punto crítico degenerado $c_1 = c_2 = c_3 = \gamma_1$. Esta línea contiene una intersección primaria con los huesos derechos. Mas precisamente, si un hueso izquierdo cruza la línea $v = \frac{1}{2}$ entonces el punto de cruce es una intersección primaria. Sin embargo su simétrica $q_v \circ q_w$ es estrictamente 3-modal, excepto para $v = w = \frac{1}{2}$. La cual, es la intersección primaria de periodo 2.

3.- Si $v > \frac{1}{2}$ hay tres puntos críticos distintos para $q_w \circ q_v$: $c_1 < c_2 < c_3$, con $c_2 = \gamma_1$ y $q_v(c_1) = q_v(c_3) = \gamma_2$. Por lo tanto la función es 3-modal y su espacio de símbolos es

$$\{I_1, c_1, I_2, c_2, I_3, c_3, I_4\}.$$

De lo anterior podemos ir sospechando, que hay una relación entre la forma y posición de dos huesos con el mismo orden principal, en los dos espacios de parámetros P^{ST} y P^Q . Por ejemplo, la intersección primaria de periodo dos $(v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2}) \in P^{ST}$ claramente corresponde al punto $(v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P^Q$. Estas relaciones serán muy importantes para estudiar la entropía en el espacios de parámetros.

1.5. Teorema de Sarkovskii

En esta subsección se muestra el teorema de Sarkovskii. Este resultado utiliza un orden especial de los números naturales y este orden es en el que aparecen las órbitas periódicas en una familia de funciones continuas a un parámetro. La demostración de este teorema la basamos en [dMvS].

Definición 1.5.1 Considere el siguiente orden en el conjunto de los números na-

ordinales llamado el orden de Sarkovskii

$$\begin{aligned}
 &3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2n+1 \dots \\
 &\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \dots \succ 2 \cdot (2n+1) \dots \\
 &\succ 2^m \cdot 3 \succ 2^m \cdot 5 \succ 2^m \cdot 7 \dots \succ 2^m \cdot (2n+1) \dots \\
 &\succ \dots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \dots \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

Teorema 1.5.2. (Sarkovskii) Sea $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$ una función continua que tiene un punto periódico de periodo n . Si $n \succ m$ en el orden de Sarkovskii, entonces f tiene un punto periódico de periodo m .

Para la demostración de este teorema se requiere de algunos resultados previos, que enunciamos a continuación.

Lema 1.5.3 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua.

i) Si $J \subset I$ es un intervalo tal que $f(J) \supset J$, entonces f tiene un punto fijo en la cerradura de J .

ii) Si $\{I_i \subset I : i = 0, 1, 2, \dots\}$ es una familia de subconjuntos cerrados tal que $f(I_i) \supset I_{i+1}$, entonces existe una sucesión anidada y decreciente de intervalos J_n en I_0 tal que $f^n(J_n) = I_n$. En particular existe $x \in I_0$ tal que $f^i(x) \in I_i$ para todo $i \geq 0$.

Demostración. i) Sean $a < b$ los puntos de la frontera del intervalo J . Dado que $f(J) \supset J$, entonces existen z y w en J tales que $f(z) \leq a$ y $f(w) \geq b$. Sea $g(x) = f(x) - x$, entonces $g(z) = f(z) - z \leq f(z) - a \leq 0$, luego $g(w) \geq 0$. Por el teorema del valor intermedio existe $x \in J$ tal que $g(x) = 0$, x es un punto fijo de f .

ii) Como $f(I_0) \supset I_1$, entonces existe un intervalo cerrado $J_1 \subset I_0$ tal que $f(J_1) = I_1$. Usando inducción, supongamos que existe una sucesión anidada de intervalos $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_n$, tal que $f^i(J_i) = I_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Dado que $f(I_n) \supset I_{n+1}$ existe un intervalo $\hat{I}_n \subset I_n$ tal que $f(\hat{I}_n) = I_{n+1}$, por otro lado como $f^n(\hat{I}_n) = I_n \supset \hat{I}_n$, existe un intervalo $J_{n+1} \subset \hat{I}_n$ tal que $f(J_{n+1}) = \hat{I}_n$. Se sigue que $f^{n+1}(J_{n+1}) = f(\hat{I}_n) = I_{n+1}$. Como los intervalos J_i están anidados existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$. Además como $f^n(J_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$, x satisface la propiedad requerida. ◀

Definición 1.5.4 Diremos que una colección $P = \{I_k\}$ de subintervalos cerrados forman una partición de I , si cubren a I y sus interiores son disjuntos por pares. Dada una partición P de I , el grafo de Markov de $f : I \rightarrow I$ asociado a la partición P , es el grafo que tiene como vértices los intervalos de la partición P y como aristas los pares (I_i, I_k) tal que $f(I_i) \supset I_k$, tal arista se denota por $I_i \rightarrow I_k$.

Si x es un punto periódico de periodo n , de una función continua $f : I \rightarrow I$ la órbita de x , $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ forma una partición del intervalo $J = [x_0, x_{n-1}]$ en $n - 1$ intervalos cerrados. A continuación se describen algunas de las propiedades del grafo de Markov de f asociado a esta partición.

Lema 1.5.5 Existe un vértice $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ del grafo de Markov tal que $f(I_1) \supset I_1$. De hecho $f(x_{a+1}) \leq x_a \leq x_{a+1} \leq f(x_a)$.

Demostración. Dado que $\mathcal{O}_f(x) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \subset [x_0, x_{n-1}]$ se tiene que $f(x_0) > x_0$ y $f(x_{n-1}) < x_{n-1}$. Entonces existe un entero $0 < a < n - 1$ tal que

$$x_a = \max\{x_i : f(x_i) > x_i\}.$$

Tomando $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ se tiene que $f(x_a) > x_a$ y $f(x_{a+1}) < x_{a+1}$ por lo tanto $f(I_1) \supset I_1$. ◀

El vértice I_1 del lema anterior tiene algunas características particulares, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 1.5.6 Sea I_1 el vértice del grafo de Markov tal que $f(I_1) \supset I_1$, entonces para cualquier vértice K del grafo de Markov, existe una trayectoria que conecta I_1 con K .

Demostración. Sea V_i el conjunto de vértices que están al final de alguna trayectoria de longitud i que comienza en I_1 , es decir, $K' \in V_i$ si existe una trayectoria $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_i$ con $I_i = K'$. Como $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_i$ es una trayectoria de longitud $i + 1$ que empieza en I_1 , tenemos que $V_i \subset V_{i+1}$. Sea U_i el conjunto de puntos contenidos en algún $K' \in V_i$, esto es $U_i = \bigcup \{K' : K' \in V_i\}$. Se tiene que $U_i \subset U_{i+1}$.

Afirmación: si existe $K' \in V_i$ tal que $f(\partial K') \not\subset U_i$, entonces $V_{i+1} \neq V_i$. En efecto si $f(z) \notin U_i$ para algún $z \in \partial K'$ entonces $f(K')$ contiene un vértice (es decir un intervalo) que contiene a $f(z)$ como punto frontera, este vértice no

está contenido en V_i . Esto prueba la afirmación.

Ahora, como el número de vértices es $n - 1$, entonces existe un $i \leq n - 1$ tal que $V_i = V_{i+1}$. De la afirmación se concluye que $U_i \cap \mathcal{O}_f(x)$ es invariante bajo f , por lo tanto $U_i = [x_0, x_{n-1}]$ y V_i es el conjunto de todos los vértices, los cuales están conectados con I_1 . ◀

Lema 1.5.7 *Suponga que no existe vértice distinto de I_1 , conectado con I_1 através de una trayectoria en el grafo de Markov. Entonces f manda los elementos de la órbita de x que están a la izquierda de x y en el interior del intervalo I_1 , en puntos que están a la derecha de I_1 y viceversa. Además en este caso el periodo de x es par y f tiene un punto periódico de periodo 2.*

Demostración. Si $I = [x_a, x_{a+1}]$ es como en el lema 1.5.5, entonces $f(x_a) \geq x_{a+1}$ y $f(x_{a+1}) \leq x_a$. Si existe $x_i < x_a$ tal que $f(x_i) \leq x_a$ tomando $x_b = \max\{x_i < x_a : f(x_i) \leq x_a\}$, entonces $f(x_b) \leq x_a$ y $f(x_{b+1}) \geq x_{a+1}$, por lo tanto $f([x_b, x_{b+1}]) \supset I_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto para cualquier $x_i < x_a$ se tiene que $f(x_i) \geq x_{a+1}$. Similarmente $f(x_i) \leq x_a$ para todo $x_i > x_{a+1}$. De aquí obtenemos que para cualquier x en el interior del intervalo I , su órbita una vez está a la izquierda del intervalo y otra vez está a la derecha, por lo que su periodo tiene que ser par. Sea $J_0 = [x_0, x_a]$ y $J_1 = [x_{a+1}, x_{n-1}]$, entonces $f(J_0) \supset J_1$ y $f(J_1) \supset J_0$. Por lo tanto existe $z \in J_0$ tal que $f^2(z) = z$ y $f(z) \in J_1$, de donde se concluye que f tiene un punto de periodo 2. ◀

Lema 1.5.8 *Suponga que f tiene puntos periódicos de periodo impar, si $n > 1$ es el periodo impar mínimo y x es un punto de periodo n , entonces el correspondiente grafo de Markov contiene las siguientes trayectorias,*

- i) $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$
- ii) $I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$ para todo i tal que $2i + 1 < n$.

Además, no existen aristas del tipo $I_j \rightarrow I_{j+k}$ si $k > 1$. Es decir el grafo de Markov asociado a esta partición es como el que se muestra en la figura 1.12.

Demostración. De los lemas 1.5.5-1.5.7 se tiene que existen vértices $I_1, \dots, I_k$ con k par, tal que $f(I_k) \supset I_1$ y tales que existe una trayectoria $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k$. Sea $k > 1$ el mínimo entero para el cual existe una trayectoria de la forma $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$.

Afirmación: $k = n - 1$.

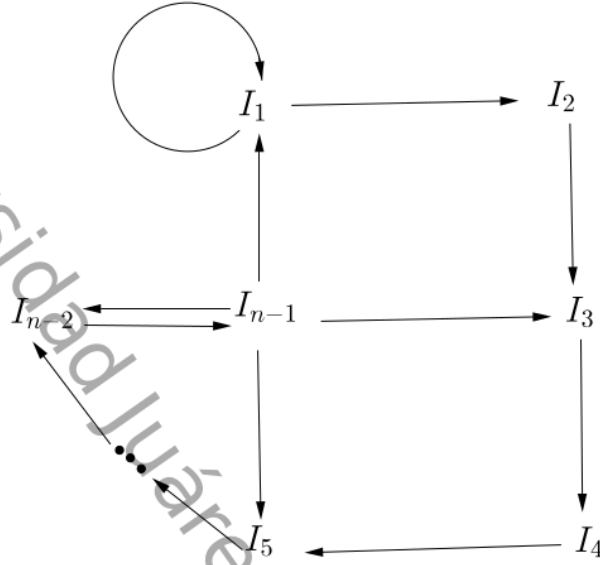


Figura 1.12: Grafo de Markov asociada a un punto de periodo impar.

En efecto, si $k < n - 1$ considerando la trayectoria $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ (si k es impar) e $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ (si k es par) se concluye que existe un punto de periodo impar menor que n . Esto contradice la hipótesis. Como $k = n - 1$ es el mínimo con esa característica, se tiene que no existen las aristas del tipo $I_j \rightarrow I_{j+k}$ si $k > 1$, porque de lo contrario existiera una trayectoria cerrada de longitud menor que $n - 1$ que conecta I_1 con el mismo. Sea $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ del lema 1.5.5 se tiene que $f(x_a) \geq x_{a+1}$ y $f(x_{a+1}) \leq x_a$, como x no es de periodo dos se tiene también que $f(x_{a+1}) < x_a$ o $f(x_a) > x_{a+1}$. Supongamos que es cierta la primera desigualdad (en el otro caso el argumento es similar). Por lo tanto $f(x_a) = x_{a+1}$ y $f(x_{a+1}) = x_{a-1}$, ya que en otro caso $f(I_1)$ no contendría solamente a I_1 y I_2 si no a otro vértice mas, esto contradice la propiedad demostrada, por lo tanto $I_2 = [x_{a-1}, x_a]$, y así, I_2 es el primer intervalo de la partición que está a la izquierda de I_1 . Ahora, como $f(x_a) = x_{a+1}$ y $f(x_{a-1}) \geq x_{a+1}$, entonces $f(x_{a-1}) = x_{a+2}$, ya que de otro modo $f(I_2)$ contendría mas de un vértice, así $I_3 = [x_{a+1}, x_{a+2}]$, además I_3 es el primer intervalo de la partición que va a la derecha de I_1 . Usan-

do este argumento, por inducción se tiene que los intervalos con índice par van a la izquierda de I_1 y los que tienen índice impar están a la derecha y que están acomodados en el intervalo de la siguiente manera: $I_{n-1}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{n-2}$. Como para $i = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}$ $f(I_{2i}) \supset I_{2i+1}$ y no a otro vértice, entonces tenemos que $f(x_1) = x_{n-1}$, y además $f(I_{n-1}) \ni x_{n-1}$. Por otro lado del lema 1.5.6 se tiene que $f(I_{n-1})$ contiene a I_1 , de donde se obtiene que $f(I_{n-1}) \supset [x_a, x_{n-1}]$, que es el lado del intervalo donde están los subintervalos de índice impar. ◀

Corolario 1.5.9 *Si f tiene un punto de periodo impar n , entonces f tiene puntos de todos los periodos mayores que n y todos los periodos pares.*

Demostración. Si m es un entero mas grande que n , fijémonos en la trayectoria de longitud m , $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1$, por lo tanto $f^m(I_1) \supset I_1$; por el lema 1.5.3 se tiene que f^m tiene un punto fijo en I_1 , el cual es un punto periódico de periodo m . Por otro lado si $m = 2i < n$ nos fijamos en la trayectoria $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2i} \rightarrow I_{n-2i+1} \dots \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1}$, que da una órbita de periodo m . ◀

Lema 1.5.10 *Si f tiene un punto periódico de periodo par, entonces f tiene un punto de periodo dos.*

Demostración. Sea $n \geq 2$ el mínimo entero tal que f tiene punto periódico de periodo n . Supongamos por contradicción que $n > 2$, entonces por el corolario 1.5.9 n es par ya que en otro caso f tendría un punto de periodo 2. Ahora usando el lema 1.5.7 se tiene que existe un vértice I_k , tal que $f(I_k) \supset I_1$, ya que f no tiene puntos de periodo dos, igual que antes. Sea k el mínimo entero tal que el grafo de Markov tiene una trayectoria $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$. Como f no tiene puntos de periodo menor que n , como en la prueba de 1.5.8 $k = n - 1$, y por lo tanto no existen aristas del tipo $I_j \rightarrow I_{j+k}$ si $k > 1$. Usando un argumento similar al que se usó en la prueba del lema 1.5.8, se puede ver que existen aristas que conectan I_n con los vértices de índice par. Por lo tanto la trayectoria $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ via el lema 1.5.3 da una órbita de periodo dos. Con lo cual se tiene la demostración. ◀

Con los resultados anteriores se tienen las herramientas necesarias para la demostración del teorema de Sarkovskii (1.5.2).

Demostración del teorema 1.5.2. En la demostración de este teorema se tienen dos casos:

10

CASO 1: Supongamos que f tiene un punto periódico de periodo $n = 2^k$, si $n > m$ en el orden de Sarkovskii, entonces $m = 2^l$ con $l < k$. Si $l = 0$ el resultado es obvio. Si $l \neq 0$, entonces $g = f^{\frac{m}{2}}$ tiene puntos de periodo 2^{k-l+1} , ya que $g^{2^{k-l+1}} = (f^{\frac{m}{2}})^{2^{k-l+1}} = f^{(2^l)(2^{k-l})} = f^{2^k}$. Por lo que los puntos de periodo 2^k de f son puntos de periodo 2^{k-l+1} de g . Por el lema 1.5.10 g tiene un punto periódico de periodo dos el cual es un punto periódico de periodo m de f .

CASO 2: Si $n = p2^k$, donde p es un número impar y $k \geq 0$. Este caso lo trabajaremos en tres incisos.

a) $m = q2^k$ con $q > p$ impar.

b) $m = q2^k$ con q par.

c) $m = 2^l$ con $l \leq k$.

En el caso a) y b) la función $g = f^{2^k}$ tiene un punto de periodo impar igual a p . Como $q > p$ en el caso a) y q es par en el caso b) el corolario 1.5.9 da un punto de periodo q para g . Este es un punto de periodo exactamente m para f . Para el caso c), de b) se tiene que f tiene un punto de periodo 2^{k+1} . Como $l \leq k$, se sigue del caso 1, que f tiene un punto de periodo m . Con cual se tiene completa la demostración del teorema 1.5.2. ◀

Capítulo 2

Entropía Topológica

En este capítulo discutiremos la relación entre la dinámica de una función de un intervalo a si mismo y un invariante topológico, el concepto de entropía topológica, el cual es una medida de la complejidad dinámica de la función. La entropía de una función nos dice como están acomodadas las órbitas. Para una función f continua, monótonas por piezas definida en un intervalo mostraremos que la entropía topológica se relaciona con el crecimiento del “número de dobles” de las iteraciones de f , es decir con el número máximo de segmentos monótonos de las iteraciones. Los conceptos y resultados aquí citados pueden ser consultados en [BC].

2.1. Entropía topológica para funciones en espacios métricos

¹ En esta sección daremos la definición de entropía topológica para una función $f : X \rightarrow X$, con X un espacio topológico compacto. La definición de la entropía la abordaremos usando el concepto de cubierta abierta.

² **Definición 2.1.1** Sea X un espacio topológico compacto. Una cubierta abierta de X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X . Una cubierta abierta β se dice que es un refinamiento de una cubierta abierta α , si cada conjunto abierto de β se encuentra en un conjunto abierto de α , y se denota por $\alpha < \beta$.

3 Se dice que β es una subcubierta de α si cada conjunto abierto de β es un conjunto abierto de α .

Definición 2.1.2 Si α y β son dos cubiertas abiertas, su “unión” es la cubierta abierta que consta de todos los conjuntos $A \cap B$ con $A \in \alpha$ y $B \in \beta$ y se denota por $\alpha \vee \beta$. Así, $\alpha \vee \beta$ es un refinamiento de las dos cubiertas α y β .

Dado que X es compacto, cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. La entropía de una cubierta abierta α se define como

$$H(\alpha) = \log(N(\alpha)),$$

donde $N(\alpha)$ es el número mínimo de conjuntos abiertos en cualquier subcubierta finita. Se puede observar que $H(\alpha) \geq 0$, y la igualdad se da si y sólo si, $X \in \alpha$.

Observación 2.1.3 i) Si $\alpha < \beta$, entonces

$$H(\alpha) \leq H(\beta) \text{ y } H(\alpha \vee \beta) = H(\beta).$$

Debido a que los elementos de α son más grandes, por lo tanto es posible que se requieran menos elementos de α que de β para cubrir X . La igualdad se tiene debido que cada abierto de β está contenido en algún abierto de α . Por lo tanto los elementos de $\alpha \vee \beta$ son elementos de β , de donde se concluye que $\text{Card}(\alpha \vee \beta) = \text{Card}(\beta)$.

$$\text{ii) } H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

1 Lo cual se obtiene del hecho de que $\text{Card}(\alpha \vee \beta) \leq \text{Card}(\alpha)\text{Card}(\beta)$, y de la propiedad del logaritmo natural de un producto.

Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para cualquier cubierta abierta α de X , denotamos por $f^{-n}\alpha$ a la cubierta que consta de los subconjuntos de la forma $f^{-n}(A)$, con $A \in \alpha$, y por α^n al conjunto $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha$, luego

$$\text{1 iii) si } \alpha < \beta, \text{ entonces } f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta.$$

Ya que si $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Además, como la imagen inversa es bien comportada con respecto a la intersección de conjuntos se tiene

$$\text{iv) } f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta.$$

Ahora se puede ver que

v) $H(f^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$, y la igualdad se tiene si f es suprayectiva.

Ya que $f(X) \subseteq X$, cualquier cubierta de X es cubierta de $f(X)$. Si f es sobre $X = f(X)$, por lo tanto en este caso se da la igualdad.

De iv) ii) y v) se obtiene que para cualesquiera enteros positivos m y n

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m-n+1}\alpha) &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha \vee f^{-m}\alpha \vee f^{-m-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-m-n+1}\alpha) \\ &= H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha \vee f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(f^{-m}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \dots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha). \end{aligned}$$

En consecuencia el límite

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n}$$

existe por el siguiente resultado de análisis.

Lema 2.1.4 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, la cual es subaditiva, es decir

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ existe y es igual a $\inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$.

Demostración. Para m fijo tomamos el conjunto $n = qm + r$, con q y r enteros no negativos y $0 \leq r < m$. De la subaditividad de $\{a_n\}$ se sigue que $a_n \leq qa_m + a_r$. Luego $\frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \frac{r}{mn}$, por lo tanto, para m fijo si n tiende a ∞ , entonces $\frac{q}{n}$ tiende a $\frac{1}{m}$, y a_r toma sólo un número finito de valores.

Por lo tanto

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

Dado que ésto es válido para m arbitraria se tiene que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf \frac{a_n}{n} = c.$$

Por otro lado, dado que $\frac{a_n}{n} \geq c$ para cada n , también se cumple que

$$c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}.$$

◀

Al límite $h(f, \alpha)$ se le llama entropía topológica de f relativa a la cubierta α y satisface

$$0 \leq h(f, \alpha) \leq H(\alpha).$$

1 Dadas dos cubiertas α y β de X , de i), iii) y usando las propiedades del mínimo se obtiene:

vi) si $\alpha < \beta$, entonces $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

2 Además, usando las propiedades de la imagen directa con respecto a la intersección de conjuntos se obtiene la siguiente afirmación.

Afirmación 2.1.5 Si f es un homeomorfismo, entonces $h(f^{-1}, \alpha) = h(f, \alpha)$.

Demostración. Como f es biyectiva, se tiene que

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha) &= H(f^{n-1}(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &= H(f^{n-1}\alpha \vee \dots \vee \alpha) \\ &= H(\alpha \vee f\alpha \vee \dots \vee f^{n-1}\alpha) \\ &= H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\textbf{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha)}{n}.$$

◀

Definición 2.1.6 Sea $f : X \rightarrow X$, al número

$$h(f) = \sup_{\alpha} h(f, \alpha)$$

se le llama entropía topológica de f , donde el supremo se toma sobre todas las cubiertas abiertas α de X .

De hecho por vi), es suficiente tomar el supremo sobre todas las cubiertas abiertas finitas, además $0 \leq h(f) \leq +\infty$.

Lema 2.1.7 Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua en un espacio métrico compacto X , entonces

$$h(f^k) = kh(f),$$

para todo entero $k > 0$.

Demostración. Para cualquier cubierta abierta α se tiene que

$$\begin{aligned} h(f^k) &\geq h(f^k, \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-k+1}\alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kH(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-k+1}\alpha \vee f^{-k}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha)}{nk} \\ &= kh(f, \alpha). \end{aligned}$$

Como esto se cumple para cualquier cubierta abierta α por la propiedad del supremo se concluye que

$$h(f^k) \geq kh(f).$$

Por otro lado

$$\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha \leq \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}\alpha)}{nk} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha)}{nk} \\ &= \frac{h(f^k, \alpha)}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$kh(f, \alpha) \geq h(f^k, \alpha).$$

De donde se concluye que

$$kh(f) \geq h(f^k).$$

Lo cual completa la demostración. ◀

Proposición 2.1.8 Si $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces $h(f) = h(f^{-1})$.

La prueba de esta proposición se sigue directamente de la afirmación 2.1.5.

Proposición 2.1.9 Sean X y Y espacios topológicos compactos. Si $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$, son funciones continuas conjugadas por el homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$, entonces $h(f) = h(g)$.

1 Demostración. Si α es una cubierta abierta de Y , puesto que φ es sobreyectiva, entonces $\varphi^{-1}\alpha$ es una cubierta abierta de X . Además, como f y g son conjugadas por φ , tenemos que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ y en consecuencia $\varphi \circ f^k = g^k \circ \varphi$,

$$\begin{aligned} h(g, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha))}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee \varphi^{-1}g^{-1}\alpha \vee \dots \vee \varphi^{-1}g^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee f^{-1}\varphi^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\varphi^{-1}\alpha)}{n} \\ &= h(f, \varphi^{-1}\alpha). \end{aligned}$$

1 Como por cada cubierta α de Y , tenemos la correspondiente cubierta de X $\varphi^{-1}\alpha$, entonces por la propiedad del supremo

$$h(g) \leq h(f).$$

Como φ es un homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1} \circ g = f \circ \varphi^{-1}$, y por cada cubierta abierta α de X existe la correspondiente cubierta $\varphi\alpha$, de Y por lo tanto $h(f) \leq h(g)$.

De las dos desigualdades se concluye que

$$h(f) = h(g).$$

Este resultado muestra que la entropía topológica es un invariante bajo la conjugación topológica.

Ahora vamos estudiar como se relaciona la entropía topológica de una función en todo su dominio X , con la entropía de f restringida a un subconjunto invariante Y , posteriormente como un caso especial mostramos un teorema de Bowen, que dice que la entropía topológica de una función se concentra en su conjunto no errante. La siguiente proposición nos muestra dicha relación.

Proposición 2.1.10 Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua, y Y un subconjunto cerrado e invariante de X bajo f , entonces $h(f|_Y) \leq h(f)$.

Demostración. Sea α una cubierta abierta de Y , para cada $A \in \alpha$ existe un subconjunto abierto $\tilde{A}$ de X tal que $A = \tilde{A} \cap Y$. La colección de estos subconjuntos $\tilde{A}$, junto con el conjunto abierto $X \setminus Y$, forman una cubierta abierta $\tilde{\alpha}$ de X . Si $g = f|_Y$ y n es un entero positivo, entonces

$$H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \dots \vee g^{-n+1}\alpha) = H(\tilde{\alpha} \vee f^{-1}\tilde{\alpha} \vee \dots \vee f^{-n+1}\tilde{\alpha}).$$

De ello se deduce que $h(g, \alpha) \leq h(f, \tilde{\alpha}) \leq h(f)$ y por lo tanto, como α fue arbitraria $h(g) \leq h(f)$. ◀

Entre todos los subconjuntos cerrados, existe uno de gran importancia para el estudio de la dinámica de un sistema, este es el conjunto no errante definido en la sección 1.2, pues como se muestra en el siguiente teorema la entropía de f se acumula en este subconjunto. Es decir, en la proposición anterior cuando $Y = \Omega$ se tiene la igualdad.

Teorema 2.1.11 Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua, entonces $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.

Demostración. De la proposición 2.1.10 se tiene que $h(f|_{\Omega(f)}) \leq h(f)$. Por lo que, sólo tenemos que demostrar que $h(f) \leq h(f|_{\Omega(f)})$.

Para ello primero vamos a demostrar que si una cubierta abierta α de X , tiene la propiedad de que $\Omega(f) \subseteq A$ para algún $A \in \alpha$, entonces $h(f, \alpha) = 0$.

En efecto, para cada $x \in X \setminus \Omega(f)$, sea A_x un conjunto abierto en α que contiene a x . Entonces existe una vecindad abierta B_x de x tal que $B_x \subseteq A_x$ y $f^k(B_x) \cap B_x = \emptyset$ para cada número entero positivo k . La colección α' de todos los

conjuntos B_x junto con A es una cubierta abierta de X , la cual es un refinamiento de α . Sea $\beta = \{A, B_{x_1}, \dots, B_{x_t}\}$ una subcubierta finita de α' con $t > 1$. Como $\alpha < \beta$, entonces es suficiente demostrar que $h(f, \beta) = 0$.

Para un número entero positivo n , sea β^n el conjunto de todas las sucesiones $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$, donde cada C_i es un conjunto abierto de β . Se define un mapeo φ de β^n a $\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta$ por

$$\varphi(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) = C_0 \cap f^{-1}(C_1) \cap \dots \cap f^{-n+1}(C_{n-1}).$$

Si para alguna sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) \in \beta^n$, el número de términos C_i diferentes de A es mayor que t , entonces no existe j y k con $j < k$, tal que $C_j = C_k = B_{x_s}$ para alguna s . Entonces $\varphi(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) = \emptyset$, ya que si $x \in C_0 \cap f^{-1}(C_1) \cap \dots \cap f^{-n+1}(C_{n-1})$ implica que $x \in f^{-j}(B_{x_s}) \cap \dots \cap f^{-k}(B_{x_s})$, lo que significa que $f^j(x) \in B_{x_s}$ y $f^k(x) \in B_{x_s}$, por lo tanto $f^{k-j}(B_{x_s}) \cap B_{x_s} \neq \emptyset$, esto contradice la definición de los conjuntos B_x . Por lo tanto el número de conjuntos no vacíos en la cubierta abierta $\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta$ no es mayor que el número de sucesiones $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}) \in \beta^n$ con a lo más t términos diferentes de A . Así,

$$\begin{aligned} N(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta) &\leq 1 + \binom{n}{1}t + \dots + \binom{n}{t}t^t \\ &\leq n^t t^{t+1}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(f, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta)}{n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^t t^{t+1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \log n + (t+1) \log t}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(f, \beta) = 0$, como queríamos probar.

Si α es cualquier cubierta abierta de X y k cualquier entero positivo, entonces

$$k\alpha = \{A_1 \cup \dots \cup A_k : A_i \in \alpha\}$$

es una cubierta abierta de X .

Observemos que

i) $N(\alpha) \leq kN(k\alpha)$.

ii) $f^{-1}(k\alpha) = kf^{-1}(\alpha)$.

iii) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ son cubiertas abiertas de X , entonces

$$k\alpha_0 \vee \dots \vee k\alpha_{n-1}$$

es un subcubierta de $k^n(\alpha_0 \vee \dots \vee \alpha_{n-1})$.

1

De lo anterior se sigue que

iv) $h(f, k\alpha) \geq h(f, \alpha) - \log k$,

ya que

$$\begin{aligned} h(f, k\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k\alpha \vee f^{-1}(k\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(k\alpha))}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k\alpha \vee kf^{-1}\alpha \vee \dots \vee kf^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(k^n(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha))}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)/k^n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)/n - \frac{n \log k}{n}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n} - \log k \\ &= h(f, \alpha) - \log k. \end{aligned}$$

1 Si α es cualquier cubierta abierta de X y Y es un subconjunto cerrado invariante de X , denotamos por $\alpha|_Y$ la cubierta abierta $\{A \cap Y : A \in \alpha\}$ de Y . De ello se sigue que

v) $f^{-1}(\alpha) \mid_Y = (f \mid_Y)^{-1}(\alpha \mid_Y)$.

vi) Si β es cualquier otra cubierta abierta de X , entonces

$$(\alpha \vee \beta) \mid_Y = (\alpha \mid_Y) \vee (\beta \mid_Y).$$

vii) Si Z es un subconjunto cerrado e invariante de Y , entonces

$$N(\alpha \mid_Z) = N(\alpha \mid_Y).$$

viii) También se cumple que si α es cualquier cubierta abierta de X , entonces $h(f, \alpha) \leq H(f \mid_{\Omega(f)})$.

Sea $k = N(\alpha \mid_{\Omega(f)})$ y sea $\{A_1 \cap \Omega(f), \dots, A_k \cap \Omega(f)\}$, donde $A_1, \dots, A_k$ es una subcubierta de $\alpha \mid_{\Omega}$ que contiene k elementos. Entonces

$$\alpha'' = \{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A : A \in \alpha\}$$

es una subcubierta de $k\alpha$. Usando (iv) se tiene que

$$h(f, \alpha'') \geq h(f, k\alpha) \geq h(f, \alpha) - \log k.$$

Pero $h(f, \alpha'') = 0$ por la primera parte de la prueba, ya que $\Omega(f) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k$. Así por (viii) $h(f, \alpha) \leq \log k$.

Finalmente, sea α cualquier cubierta abierta de X y m un entero positivo, tomando $\gamma = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-(m-1)}\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-(n-1)}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-(mn-1)}\alpha)}{mn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\gamma \vee f^{-m}\gamma \vee \dots \vee f^{-(n-1)m}\alpha)}{mn} \\ &= \frac{h(f^m, \gamma)}{m}, \end{aligned}$$

pero por (viii)

$$h(f^m, \gamma) \leq H(\gamma \mid_{\Omega(f^m)}) \leq H(\gamma \mid_{\Omega(f)})$$

y por (v) y (vi),

$$H(\gamma |_{\Omega(f)}) = H(\alpha |_{\Omega(f)} \vee (f |_{\Omega(f)})^{-1}(\alpha |_{\Omega(f)}) \vee \dots \vee (f |_{\Omega(f)})^{-m+1}(\alpha |_{\Omega(f)})),$$

de donde se tiene que

$$h(f, \alpha) \leq h(f |_{\Omega(f)}, \alpha |_{\Omega(f)}).$$

Como esto se vale para cualquier cubierta α concluimos que $h(f) \leq h(f |_{\Omega(f)})$.

Como se dijo al principio, esto es todo lo que necesitábamos para tener la prueba.

◀

Este resultado fue demostrado originalmente por Bowen en 1970, diecinueve años después Xiong Jincheng dio una demostración mejorada, la cual es la que se presenta en este trabajo.

Corolario 2.1.12 ¹ Si $f: I \rightarrow I$ es una función continua de un intervalo cerrado en sí mismo, entonces,

i) $h(f) = h(f |_{\text{Per}(f)})$.

ii) $h(f) = h(f |_{R(f)})$.

La prueba de este corolario se sigue del teorema 2.1.11 y la proposición 1.2.10.

Usando el corolario anterior se puede estudiar la entropía topológica de la familia logística $f_\mu = \mu x(1-x)$ para algunos parámetros específicos como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.1.13 Consideremos la familia logística $f_\mu = \mu x(1-x)$ con $\mu > 0$. Para $0 < \mu < 3$, f_μ tiene solamente puntos fijos, dados por $p_1 = 0$ y $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Por lo tanto para estos parámetros $h(f_\mu) = h(f_\mu |_{\{0, p_\mu\}}) = 0$.

Para $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, f_μ únicamente tiene puntos fijos y puntos de periodo dos, pero igual que antes $\text{Per}(f_\mu)$ sigue siendo un conjunto finito, por lo tanto $h(f_\mu) = h(f_\mu |_{\text{Per}(f_\mu)}) = 0$. Cuando $\mu > 1 + \sqrt{6}$, f tiene puntos de periodo 4, 2 y 1 y se puede demostrar que a medida que va creciendo el parámetro, f_μ tiene órbitas periódicas de orden $2^n, 2^{n-1}, \dots, 2, 1$, pero $\text{Per}(f_\mu)$ sigue siendo un conjunto finito, por lo tanto $h(f_\mu) = 0$. Este fenómeno se observa hasta llegar a un valor de μ (Feigenbaum) [D], después del Feigenbaum aparecen órbitas periódicas cuyo periodo no es potencia de 2, en este caso el número de puntos periódicos es infinito, en esos parámetros $h(f_\mu)$ es positiva.

2.2. Entropía para funciones de un intervalo en un intervalo

A partir de ahora nos limitamos al caso en que $X = I$ es un intervalo compacto. Por otra parte, aunque, de manera natural se asume que I tiene interior no vacío, todo el resto de esta sección vamos a utilizar la palabra “intervalo” para referirse a cualquier subconjunto conexo de I . Así, un intervalo puede consistir en un sólo punto.

Proposición 2.2.1 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Si existen intervalos cerrados disjuntos $J_1, \dots, J_p$ tales que

$$J_1 \cup \dots \cup J_p \subseteq f(J_i), \quad i = 1, \dots, p,$$

entonces $h(f) \geq \log p$.

2 Demostración. Como los J_i son disjuntos podemos elegir intervalos abiertos disjuntos por pares $G_1, \dots, G_p$ con $J_i \subset G_i$, para $i = 1, \dots, p$. Podemos tomar intervalos abiertos $G_{p+1}, \dots, G_q$, que satisfagan $G_i \cap J_k = \emptyset$ para $p+1 \leq i \leq q$ y $1 \leq k \leq p$, de modo que obtengamos una cubierta abierta finita α . Para cualquier entero positivo n y cualquier i_k con $1 \leq i_k \leq p$ el conjunto

$$J_{i_1 \dots i_n} = \{x : x \in J_{i_1}, f(x) \in J_{i_2}, \dots, f^{n-1}(x) \in J_{i_n}\}$$

es no vacío. Cada punto de este conjunto está contenido en un único elemento de $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha$, a saber,

$$G_{i_1} \cap f^{-1}(G_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(G_{i_n}).$$

De donde se obtiene que

$$H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha) \geq n \log p.$$

Por lo tanto $h(f, \alpha) \geq \log p$ y en consecuencia, $h(f) \geq \log p$. ◀

La proposición 2.2.1 es un resultado que puede ser mejorado considerablemente. Sin embargo, dado que para entrar mas a fondo se requiere cierto conocimiento de las propiedades de las matrices no negativas, retomando algunos resultados presentados en el apéndice A se puede reformular de la siguiente manera.

Proposición 2.2.2 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Sean $J_1, \dots, J_p$ intervalos cerrados, con interiores disjuntos por pares y sea $A = (a_{ik})$ la matriz de tamaño $p \times p$ definida por

$$a_{ik} = 1, \text{ si } J_k \subseteq f(J_i), \text{ } a_{ik} = 0 \text{ en caso contrario.}$$

Entonces $h(f) \geq \log \lambda$, donde λ es el valor propio máximo de A .

Demostración: Como la matriz consta sólo de ceros y unos podemos suponer que $\lambda > 1$.

Usando el lema A.0.6 se obtiene que

$$\begin{aligned} \log \lambda &= \log \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [tr(A^n)]^{\frac{1}{n}} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log [tr(A^n)]^{\frac{1}{n}} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log tr(A^n)}{n}. \end{aligned}$$

Como

$$max_i(A^n)_{ii} \leq tr(A^n) \leq p max_i(A^n)_{ii},$$

entonces para alguna i entre 0 y p , se tiene que

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [tr(A^n)]^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (p max_i(A^n)_{ii})^{\frac{1}{n}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \log \lambda &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log p(A^n)_{ii}^{\frac{1}{n}} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(A^n)_{ii} + \log p}{n} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(A^n)_{ii}}{n}. \end{aligned}$$

En el apéndice A se puede ver que $\|A^n\|$ es la suma de todas las trayectorias de longitud n , y la proposición A.0.5 dice que $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, por lo tanto para $1 < \mu < \lambda$ existe un entero n arbitrariamente grande de modo que existen mas de μ^n trayectorias de longitud n de J_i en J_i . Es claro que cada J_i tiene interior no vacío, por lo tanto existen mas de μ^n intervalos cerrados K_j con interiores disjuntos por pares, tales que $K_i \subseteq K_j$, $f^n(K_j) = J_i$. Pero si quitamos el intervalo

que está mas a la izquierda y el que está mas a la derecha obtenemos que hay al menos $\mu^n - 1$ intervalos cerrados disjuntos tal que

$$\bigcup_j L_j \subseteq \text{int } f^n(L_m) \quad \forall m,$$

usando las proposiciones 2.1.7 y 2.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} h(f) &= \frac{h(f^n)}{n} \geq \frac{\log(\mu^n - 2)}{n} \\ &= \frac{\log[\mu^n(1 - \frac{2}{\mu^n})]}{n} \\ &= \frac{\log \mu^n}{n} + \frac{\log(1 - \frac{2}{\mu^n})}{n}. \end{aligned}$$

Como n fue arbitrariamente grande se sigue que $h(f) \geq \log \mu$. Dado que esto es válido para cualquier $\mu < \lambda$ se concluye que

$$h(f) \geq \log \lambda.$$

◀

Los siguientes ejemplos exhiben la proposición anterior.

Ejemplo 2.2.3 Sea $f : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$ la función lineal por piezas, definida por $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 0$. (La gráfica de esta función se muestra en la figura 2.1.)

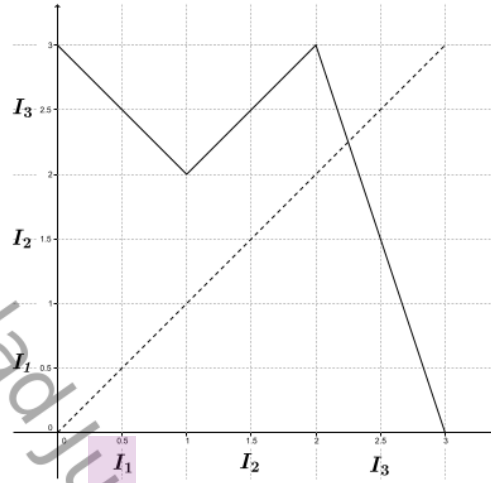
Observemos que

$$\begin{aligned} f(I_1) &\supseteq I_3. \\ f(I_2) &\supseteq I_3. \\ f(I_3) &\supseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz asociada a esta función, está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es $P(x) = x(x-2)(x+1)$, por lo tanto sus valores propios están dados por $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$. Se concluye que $h(f) \geq \log 2$.



9 Figura 2.1: Gráfica de la función del ejemplo 2.2.3.

Ejemplo 2.2.4 Sea $f : [0, 4] \rightarrow [0, 4]$ la función lineal por piezas, definida por $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$. (La gráfica de esta función se muestra en la figura 2.1.)

Observemos que

$$f(I_1) \supseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$

$$f(I_2) \supseteq I_2 \cup I_3.$$

$$f(I_3) \supseteq I_2 \cup I_3 \cup I_4.$$

$$f(I_4) \supseteq I_3 \cup I_4.$$

Por lo tanto la matriz asociada a esta función, está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es $P(x) = (x-1)^2(x^2-2x-1)$, por lo tanto sus valores propios están dados por $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$. Concluimos que $h(f) \geq \log(1 + \sqrt{2})$.

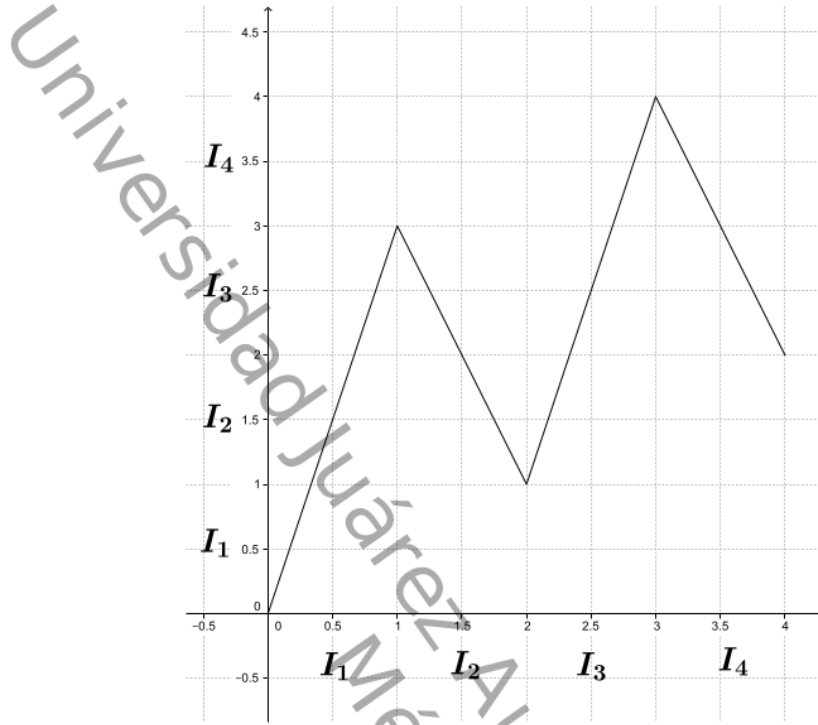


Figura 2.2: Gráfica de la función del ejemplo 2.2.4.

Definición 2.2.5 Sea α una colección de un número finito de intervalos disjuntos. Diremos que una sucesión finita $\{A_1, \dots, A_n\}$ de intervalos $A_k \in \alpha$ es una cadena de longitud n , si existe un punto x tal que

$$x \in A_1, f(x) \in A_2, \dots, f^{n-1}(x) \in A_n$$

es decir, si el conjunto

$$A_1 \cap f^{-1}(A_2) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_n)$$

es no vacío.

Vamos a denotar por α^n al conjunto de todas las cadenas de longitud n y $c_n(\alpha)$ su cardinalidad, es decir, el número de cadenas diferentes de longitud n . Entonces

$$c_{m+n}(\alpha) \leq c_m(\alpha)c_n(\alpha),$$

ya que si $\{A_1, \dots, A_{m+n}\}$ es una cadena de longitud $m+n$ entonces $\{A_1, \dots, A_m\}$ es una cadena de longitud m y $\{A_{m+1}, \dots, A_{m+n}\}$ es una cadena de longitud n . Por lo tanto $\{\log c_n(\alpha)\}$ es una sucesión subaditiva, del lema 2.1.4 se sigue que,

$$h^*(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n(\alpha)}{n}$$

existe y $h^*(f, \alpha) \leq \frac{1}{n} \log c_n(\alpha)$ para toda n .

En principio no podemos esperar que el límite $h^*(f, \alpha)$ tenga relación con la entropía topológica, a menos que α fuera una cubierta, es decir, que la unión de los intervalos de α fuera I . Sin embargo, en este caso si hay una relación.

Proposición 2.2.6. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Para cualquier cubierta abierta β , existe una cubierta α que consta de un número finito de intervalos disjuntos, de tal manera que*

$$h(f, \beta) \leq h^*(f, \alpha).$$

Recíprocamente, para cualquier cubierta α que consiste en un número finito de intervalos disjuntos, existe una cubierta abierta β tal que

$$h^*(f, \alpha) \leq h(f, \beta) + \log 3.$$

Demostración. Sea β cualquier cubierta abierta de I . Como I es compacto, podemos suponer que β es la unión de un número finito de intervalos abiertos, ya que si se reemplaza β por un refinamiento, no disminuye la entropía de f con respecto a la cubierta. Sea α una cubierta que consta de un número finito de intervalos disjuntos tal que cada intervalo $A \in \alpha$ está contenido en algún intervalo abierto $B \in \beta$. Para cualquier cadena $\{A_1, \dots, A_n\}$ en α^n escogemos intervalos $B_k \in \beta$ tal que $A_k \subseteq B_k$ ($1 \leq k \leq n$). Dado que la colección de todos los conjuntos abiertos

$$B_1 \cap f^{-1}(B_2) \cap \dots \cap f^{-n+1}(B_n)$$

obtenidos en esta manera cubren I , se deduce que

$$H(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta) \leq \log c_n(\alpha)$$

y por lo tanto $h(f, \beta) \leq h^*(f, \alpha)$.

Ahora, sea α cualquier cubierta que consiste en un número finito de intervalos disjuntos. Sea β una cubierta abierta finita de I , que consiste en los interiores

de los intervalos de α , junto con intervalos abiertos pequeños que contienen a los puntos finales de estos intervalos, los cuales se eligen de tal manera que cada intervalo abierto en β esté contenida en la unión de a lo más tres intervalos en α (se necesitan tres intervalos si un intervalo consiste de un solo punto). Si σ_n denota un subcubierta de $\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta$ de cardinalidad mínima, para cualquier cadena $\{A_1, \dots, A_n\}$ en α^n existe un punto x con $f^{j-1}(x) \in A_j$ para $j = 1, \dots, n$. Entonces x pertenece a algún elemento

$$B_1 \cap f^{-1}(B_2) \cap \dots \cap f^{-n+1}(B_n)$$

de σ_n .

Observamos que $A_k \cap B_k \neq \emptyset$ ($1 \leq k \leq n$). Ahora, dado que el número de diferentes cadenas $\{A_1, \dots, A_n\}$ que corresponden a la misma sucesión $\{B_1, \dots, B_n\}$ es a lo más 3^n , resulta que

$$\log c_n(\alpha) \leq H(\beta \vee f^{-1}\beta \vee \dots \vee f^{-n+1}\beta) + n \log 3,$$

de donde se concluye que

$$h^*(f, \alpha) \leq h(f, \beta) + \log 3.$$

◀

De la proposición anterior se deduce como corolario que

$$h(f) \leq \sup_{\alpha} h^*(f, \alpha) \leq h(f) + \log 3.$$

El caso de las funciones monótonas es importante pues de ellas se puede decir mucho mas, como se verá mas adelante.

Existen un tipo de cubiertas muy especial, para las cuales la entropía de una función f en un intervalo respecto a estas cubiertas coincide con la entropía de f . Estas son llamadas cubiertas f -mono y se definen de la siguiente manera.

Definición 2.2.7 Sea $f : I \rightarrow I$ una función monótona por piezas, una cubierta $\mathfrak{A}$ de I se llama f -mono, si es finita, consiste de intervalos y f es monótona en cada elemento de $\mathfrak{A}$.

Observemos que si f es f -mono, entonces $\mathfrak{A}^n = \bigvee_{i=1}^n \mathfrak{A}^i$ es una cubierta f^n -mono de I . Es claro que, existe una cubierta f -mono si y sólo si f es monótona por piezas.

Proposición 2.2.8 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua y sea α una cubierta f -mono, entonces

$$h^*(f, \alpha) = h(f).$$

Demostración. Primero se demuestra que $h(f) \geq h^*(f, \alpha)$. Sea n un entero positivo fijo. Para cualquier cadena $\{A_1, \dots, A_n\}$ en α^n el conjunto de todos los x tales que $x \in A_1, f(x) \in A_2, \dots, f^{n-1}(x) \in A_n$ es un intervalo, debido a que f es monótona en cada A_j . Por otra parte los intervalos correspondientes a dos cadenas distintas en α^n son disjuntos y cada punto de I pertenece a alguno de estos intervalos. Así se obtiene una cubierta α_n que consta de un número finito de intervalos disjuntos.

Tomando $\beta = \alpha_n, g = f^n$ y k un entero positivo, para cualquier cadena $\{A_1, \dots, A_{kn}\}$ en α^{kn} las sucesiones $\{A_1, \dots, A_n\}, \dots, \{A_{(k-1)n+1}, \dots, A_{kn}\}$ son cadenas en α^n . Sean $B_1, \dots, B_k$ los intervalos correspondientes en $\beta = \alpha_n$, y C el intervalo en α_{kn} correspondiente a la cadena $\{A_1, \dots, A_{kn}\}$ en α_{kn} . Si $x \in C$, entonces $x \in B_1, f^n(x) \in B_2, \dots, f^{(k-1)n}(x) \in B_k$ y por lo tanto, $\{B_1, \dots, B_k\}$ está en $\beta^k(g)$. Note que, a cadenas distintas en α^{kn} le corresponden cadenas distintas en $\beta^k(g)$. Recíprocamente para cualquier cadena $\{B_1, \dots, B_k\}$ en $\beta^k(g)$ existen intervalos $A_1, \dots, A_{kn}$ en α tal que B_1 es el conjunto de todas las x para los cuales $x \in A_1, f(x) \in A_2, \dots, f^{n-1}(x) \in A_n$; B_2 es el conjunto de todos los x tales que $x \in A_{n+1}, f(x) \in A_{n+2}, \dots, f^{n-1}(x) \in A_n$; y así sucesivamente. Pero existe un y tal que

$$y \in B_1, f^n(y) \in B_2, \dots, f^{(k-1)n}(y) \in B_k.$$

Por lo tanto $f^{j-1}(y) \in A_j$ ($1 \leq j \leq kn$) y $\{A_1, \dots, A_{kn}\}$ están en α^{kn} . Así $c_{kn}(\alpha, f) = c_k(\beta, g)$ para cada k , por lo tanto,

$$h^*(f, \alpha) = \frac{h^*(g, \beta)}{n},$$

de las proposiciones 2.2.6 y 2.1.7,

$$\begin{aligned} h^*(f, \alpha) &\leq \frac{h(g) + \log 3}{n} \\ &= h(f) + \frac{\log 3}{n}. \end{aligned}$$

Dado que esto es para n arbitraria, se deduce que $h^*(f, \alpha) \leq h(f)$.

Para completar la prueba se muestra a continuación que $h(f) \leq h^*(f, \alpha)$. Para ello es suficiente demostrar que si $\tilde{\alpha}$ es cualquier refinamiento de α que consta de

un número finito de intervalos disjuntos, entonces

$$h^*(f, \tilde{\alpha}) = h^*(f, \alpha).$$

Sea β una cubierta arbitraria que consiste en un número finito de intervalos abiertos y sea δ un refinamiento de β que consiste de un número finito de intervalos disjuntos. De aquí se sigue que $h(f, \beta) \leq h^*(f, \delta) = h^*(f, \alpha)$. Como β es arbitraria, se tiene que $h(f) \leq h^*(f, \alpha)$.

Ahora, como $\tilde{\alpha}$ refina a α , para cualquier cadena $\{A_1, \dots, A_n\}$ en α^n existe una cadena $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\}$ en $\tilde{\alpha}^n$ con $\tilde{A}_k \subseteq A_k$ ($1 \leq k \leq n$). Por lo tanto $c_n(\alpha) \leq c_n(\tilde{\alpha})$ y $h^*(f, \alpha) \leq h^*(f, \tilde{\alpha})$.

Consideremos una cadena $\{A_1, \dots, A_n\}$ fija en α^n y sea Γ el conjunto de todas las cadenas $\gamma = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\}$ en $\tilde{\alpha}^n$ con $\tilde{A}_k \subseteq A_k$ ($1 \leq k \leq n$). La unión de todos los intervalos $\tilde{A}_k$ que aparecen en las cadenas $\gamma \in \Gamma$ es de nuevo un intervalo B_k . Supongamos que B_k contiene m_k intervalos de $\tilde{A}_k$. Entonces existe una cadena $\{\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n\}$ en Γ , la cual es extrema en el sentido de que $\tilde{E}_k$ es un extremo del intervalo de B_k , para todo k . Para cualquier cadena $\gamma = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\}$ en Γ sea μ_k ($0 \leq \mu_k \leq m_k$) el número de intervalos en B_k en el mismo lado de $\tilde{A}_k$ como $\tilde{E}_k$ (excluyendo $\tilde{A}_k$) y sea $\mu(\gamma) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$. Si $\gamma' = \{\tilde{A}'_1, \dots, \tilde{A}'_n\}$ es cualquier otra cadena en Γ entonces, como f es monótona en cada A_k , se tiene que $\mu'_k \leq \mu$ para todo k o $\mu \leq \mu'_k$ para todo k , con al menos una desigualdad estricta. Por lo tanto $\mu(\gamma) \neq \mu(\gamma')$ por lo que el número total de cadenas en Γ es a lo más

$$1 + \sum_{k=1}^n (m_k - 1) = \sum_{k=1}^n m_k + 1 - n.$$

Si m es el número máximo de intervalos en $\tilde{\alpha}$ que están contenidos en un mismo intervalo de α se sigue que $c_n(\tilde{\alpha}) \leq (mn + 1 - n)c_n(\alpha)$ para cada n . Por lo tanto $h^*(f, \tilde{\alpha}) \leq h^*(f, \alpha)$. ◀

Ahora estamos en condiciones de dar una forma sencilla y muy útil para calcular la entropía de funciones monótonas por piezas de intervalo en si mismo, el cual se apoya fuertemente en la proposición 2.2.8.

Proposición 2.2.9 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua monótona por piezas. Entonces

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n},$$

donde $\ell(f^n)$ es el número de doblez de f^n .

3 Demostración. Existe una cubierta $\alpha = \alpha(n)$ de I que consiste exactamente de $\ell(f^n)$ intervalos disjuntos y en cada uno de ellos f^n es monótona. Para cada entero positivo j ,

$$c_j(\alpha, f^n) \leq (\ell(f^n))^j,$$

y por lo tanto

$$\frac{\log c_j(\alpha, f^n)}{j} \leq \log \ell(f^n).$$

De la proposición 2.2.8, se sigue que

$$h(f^n) = h^*(f^n, \alpha) < \log \ell_n.$$

2 Por lo tanto $h(f) = \frac{h(f^n)}{n} \leq \frac{\log \ell(f^n)}{n}$ para cada entero positivo n , en consecuencia

$$h(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n}.$$

Por otro lado, sea γ la colección de intervalos abiertos máximos en los que f es monótona y sea δ la colección de puntos que son extremos de estos intervalos. Entonces $\beta = \gamma \cup \delta$ es una cubierta de I que consiste de $2\ell_1 + 1$ intervalos disjuntos. Sea n un entero positivo y J un intervalo máximo en el que f^n es monótona. Para cada $i = 1, \dots, n$ existe un único elemento A_i de γ tal que $f^{i-1}(J) \subseteq \overline{A_i}$. Entonces $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una cadena en β^n . De su maximalidad se sigue que los intervalos máximos distintos en los cuales f^n es monótona corresponden a elementos distintos de β^n . Así $\ell(f^n) \leq c_n(\beta, f)$ para cada entero positivo n , y por lo tanto

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n} \leq h^*(f, \beta) = h(f).$$

◀

Usando la proposición 2.2.8 también se puede obtener un resultado para el cálculo de la entropía topológica, relacionando los subintervalos con la imágenes de éstos a través de una matriz. Para estudiar este resultado se requiere del siguiente lema de análisis matemático, que permite calcular el límite del logaritmo de la suma de dos sucesiones de números positivos.

Lema 2.2.10 Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números positivos, entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n + b_n)}{n} = \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b_n}{n} \right\}.$$

Demostración. Sea $\lambda = \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b_n}{n} \right\}$. Es claro que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n + b_n)}{n} \geq \lambda.$$

Por otro lado, para $\sigma > \lambda$ existe N tal que,

$$\begin{aligned} \sigma &> \frac{\log a_n}{n} \text{ y } \sigma > \frac{\log b_n}{n} \quad \forall n > N \\ e^n \sigma &> a_n \text{ y } e^n \sigma > b_n \quad \forall n > N, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n + b_n &< 2e^n \sigma \\ \log(a_n + b_n) &< \log 2 + n\sigma \\ \frac{\log(a_n + b_n)}{n} &< \frac{\log 2}{n} + \sigma, \quad \forall n > N. \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n + b_n)}{n} \leq \sigma.$$

Como esto es valido para cualquier $\sigma > \lambda$, se concluye que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_n + b_n)}{n} \leq \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b_n}{n} \right\}.$$

Con lo cual se completa la demostración. $\blacktriangleleft$

Proposición 2.2.11 (Misiurewicz and Szlenk) Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua, supongamos que

$$I = J_1 \cup \dots \cup J_p,$$

donde $J_1, \dots, J_p$ son intervalos cerrados con interiores no vacíos y disjuntos por pares, tales que f es monótona por piezas en los J_i 's y el conjunto de los puntos extremos de los intervalos es invariante bajo la función.

Sea $A = (a_{ik})$ la matriz de tamaño $p \times p$ definida por

$$a_{ik} = 1 \text{ si } J_k \subseteq f(J_i), \quad a_{ik} = 0 \text{ en otro caso,}$$

y denotemos por λ el valor propio máximo de A , entonces $h(f) = \max\{0, \log \lambda\}$.

Si f no es constante en cada intervalo J_i ($i = 1, \dots, p$), entonces $h(f) = \log \lambda$.

Demostración. Sea α una cubierta de I que consta de intervalos disjuntos $K_1, \dots, K_{2p+1}$, formados por los puntos extremos de los intervalos J_i y sus interiores. Entonces por la proposición 2.2.8, $h(f) = h^*(f, \alpha)$.

Sea $B = (b_{ij})$ la matriz de tamaño $(2p+1) \times (2p+1)$ definida por

$$b_{ij} = 1 \text{ si } J_j \subseteq f(J_i), \quad b_{ij} = 0 \text{ en otro caso,}$$

por hipótesis los extremos de los intervalos van en extremos vía la función por lo que $K_j \cap f(K_i) \neq \emptyset$ solamente si $K_j \subseteq f(K_i)$. Por lo tanto el número de cadenas en α^n es igual al número de caminos de longitud n en B , es decir, $c_n(\alpha) = \|B^n\|$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} h(f) &= h^*(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n(\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(c_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \|B^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \log \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Si μ es el valor propio máximo de B , del lema A.0.5 se sigue que $\mu \geq 1$ y $h(f) = \log \mu$.

Podemos elegir la notación de modo que $K_1, \dots, K_{p+1}$ son los puntos extremos de los intervalos J_i . Entonces B tiene la forma

$$B = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D & A \end{bmatrix}.$$

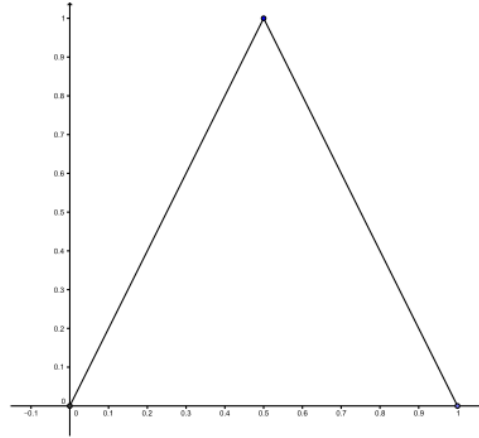
Por lo tanto $tr B^n = tr C^n + tr A^n$. Como $0 \leq tr C^n \leq p+1$ para todo n se sigue del lema A.0.6 y del lema 2.2.10, que $\log \mu = \max\{0, \log \mu\}$. Si f es no constante sobre cualquier intervalo J_i , entonces $\lambda \geq 1$. ◀

2 En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo de la entropía usando el número de dobles $\ell(f^n)$.

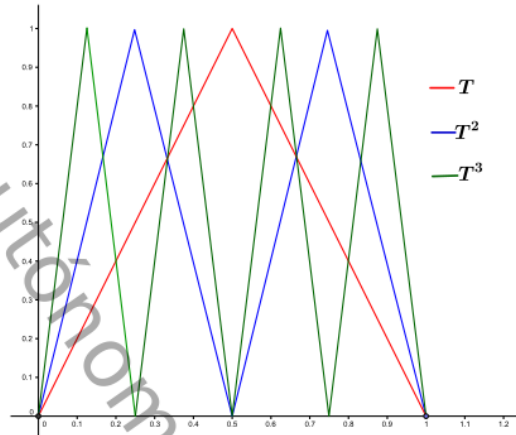
Ejemplo 2.2.12 Sea $I = [0; 1]$; sea $T : I \rightarrow I$, con la siguiente regla de correspondencia

2 La función T es conocida como la tienda, por la forma de su gráfica (figura 2.3).

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 2.3: Gráfica de la función T .

$$T^2(x) = \begin{cases} 2^2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2(1-2x), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(2x-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2^2(1-x), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 2.4: Gráfica de T , T^2 , y T^3 .

² Notemos que $\ell(T^2) = 4$ y $\ell(T^3) = 8$, como lo muestra la figura 2.4. Por inducción se obtiene que $\ell(T^n) = 2^n$. Usando el teorema 2.2.9 se tiene que

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(2)}{n} = \log(2).$$

Otro ejemplo de función con entropía topológica positiva es la función $f(x) = 3x \bmod 1$, que se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.13 Sea $f : I \rightarrow I$, definida como $f(x) = 3x \bmod 1$. entonces $f^2(x) = 9x \bmod 1$. Las gráficas de f y f^2 se muestran en 2.5 y 2.6 respectivamente.

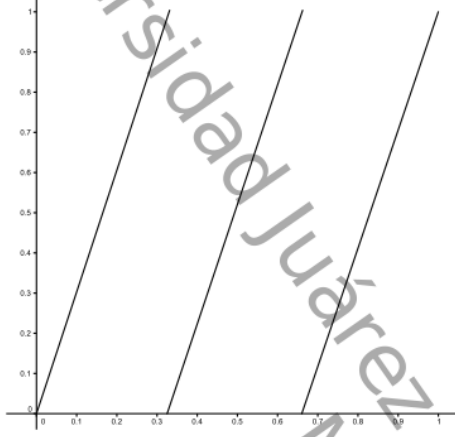


Figura 2.5: Gráfica de $f(x) = 3x \bmod 1$.

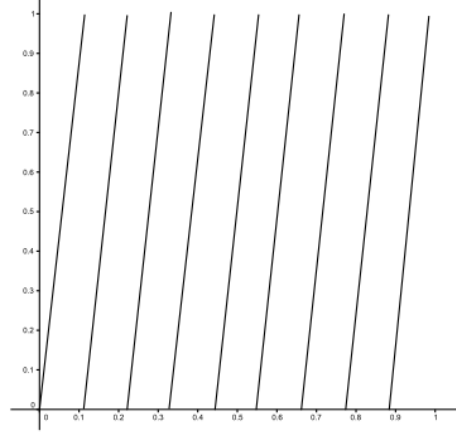


Figura 2.6: Gráfica de $f^2(x)$.

Claramente $f^n(x) = 3^n(x) \bmod 1$, por lo tanto

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(3)}{n} = \log(3).$$

Rothschild y Misiurewicz, demostraron que la entropía de una función en un intervalo para la cual hay una partición f -mono está determinada por esta partición.

La prueba de la siguiente proposición la podemos consultar en [ALM].

Proposición 2.2.14 Sean $f : I \rightarrow I$, y $\mathfrak{C}$ una cubierta f -mono de I , entonces

$$h(f) = h(f, \mathfrak{C}).$$

Enseguida vamos a mostrar algunas propiedades de la entropía topológica, vista como una función de valores reales, definida en el espacio $C^0(I)$ de todas las funciones continuas de un intervalo I en si mismo, con la métrica uniforme.

Definición 2.2.15 Una función g de valores reales se llama inferiormente (superiormente) semi-continua si para cada punto x se tiene que

$$\liminf_{y \rightarrow x} h(y) \geq h(x), \quad \limsup_{y \rightarrow x} h(y) \leq h(x),$$

respectivamente.

De la definición se puede ver que una función es continua si y sólo si es superior e inferiormente semi-continua.

Lema 2.2.16 La función $h(f)$ es inferiormente semi-continua en $C^0(I)$

Este resultado fue demostrado por Misiurewicz y Szlenk para el caso de las funciones monótonas por piezas. Posteriormente Misiurewicz dió una prueba para el caso general. Este resultado y una prueba del mismo es el teorema 4.5.2 de [ALM].

Para el caso de funciones $C^0(I)$, $h(f)$ no es superiormente semi-continua. De hecho, dada una función $f \in C^0(I)$, con una perturbación pequeña se puede construir una función con entropía muy grande. Sin embargo esto no es posible si nos restringimos a funciones $C^\infty(I)$, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 2.2.17 La función $h(f)$ es superiormente semi-continua en $C^\infty(I)$.

Este resultado lo demostró Yomdin en [Y]. De los lemas 2.2.16 y 2.2.17 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.18 La función entropía topológica

$$h : C^\infty(I) \rightarrow [0, \infty)$$

es continua.

Demostración. La continuidad se obtiene directamente de los lemas 2.2.16 y 2.2.17. La afirmación $h(f) \leq \infty$, de hecho es cierta para cualquier función en $C^1(I)$ y se deriva verificando que en el caso 1-dimensional una cota para $h(f)$ es de la forma

$$h(f) \leq \log^+ \max_x |f'(x)|$$

donde $\log^+(x) = \max\{\log(x), 0\}$. ◀

2.3. Entropía y caos

Preguntarse la manera de la transición hacia el caos conduce al problema de caracterizar la frontera del caos topológico para sistemas dinámicos. Como se mencionó al inicio de este capítulo, la entropía topológica mide como están acomodadas las órbitas periódicas de un sistema dinámico.

2.3.1. La frontera del caos

En esta sección introducimos la definición de caos según C. Tresser en términos de la entropía topológica [MiT]

Definición 2.3.1 Diremos que una aplicación f es caótica o que tiene caos topológico si tiene entropía topológica positiva.

En este apartado se estudia con más detalle las órbitas periódicas. Para ello empezamos introduciendo el concepto de turbulencia, que nos permitirá detallar y unificar algunos resultados relativos a funciones continuas de un intervalo en si mismo.

Definición 2.3.2 Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua, diremos que f es turbulenta si existen subintervalos compactos J, K con a lo más un punto en común tales que

$$J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K). \quad (2.1)$$

Además, diremos que es estrictamente turbulenta si los intervalos J, K son disjuntos.

De la proposición 2.2.1 se puede observar que si f es turbulenta, entonces $h(f) \geq \log 2$.

En el siguiente ejemplo se muestra una función turbulenta.

Ejemplo 2.3.3 Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función lineal por piezas definida por

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \quad f(1) = 1.$$

8

La gráfica de esta función se muestra en la figura 2.7.

Tomando $J = [0, \frac{1}{3}]$ y $K = [\frac{2}{3}, 1]$, se tiene que $f(J) = f(K) = [0, 1]$, es claro que f es turbulenta. Por lo tanto $h(f) \geq 2$. Concluimos que f es caótica.

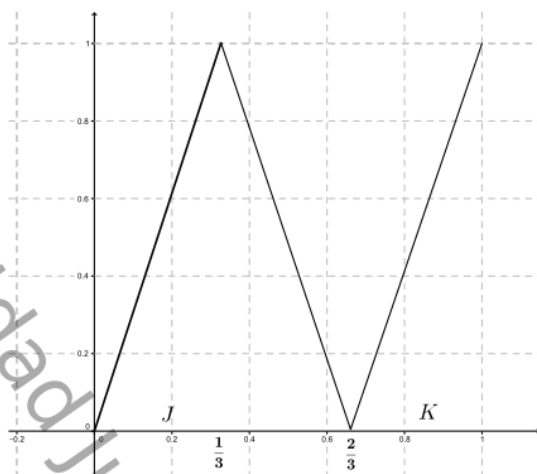


Figura 2.7: Gráfica de la función del ejemplo 2.3.3.

Lema 2.3.4 Si f es turbulenta, entonces existen puntos a, b y c tales que, $f(a) = f(b) = a$, $f(c) = b$, además,

$$a < c < b$$

$$f(x) > a \text{ para } a < x < b$$

$$x < f(x) < b \text{ para } a < x < c.$$

o

$$b < c < a$$

$$f(x) < a \text{ para } b < x < a$$

$$b < f(x) < x \text{ para } c < x < a.$$

Demostración. Sea $J = [\alpha, \beta]$ y $K = [\gamma, \delta]$ subintervalos tal que se cumple (2.1). Si $\beta = \gamma$ podemos suponer que $f(\beta) \neq \beta$, de otro modo existe $J_0 \subset J$ tal que $f(J_0) = f(J)$ y $J_0 \cap K = \emptyset$. Sea a' el punto fijo más pequeño en J , y b' el punto más grande en K que satisface $f(b') = a'$. Supongamos que $f(c') = b'$ para algún $c' \in (a', b')$, entonces tomamos a como el punto fijo de f mas grande en $[a', c']$ y b como el número menor en (c', b') , para el cual $f(a) = b$.

Por otro lado, si $f(x) < b'$ para $a' < x < b'$, entonces f toma el valor δ en los intervalos $[\alpha, a']$ y $[b', \delta]$ y $f(x) > x > \alpha$ para $\alpha \leq x \leq a'$. Así, $f(a'') = a''$ para algún $a'' \in [b', \delta]$ y $f(b'') = a''$ para algún $c' \in [a', \beta]$. Igual al caso anterior, tomando a como el punto fijo de f más pequeño en $[c'', a'']$ y b el punto más grande en $[b'', c'']$ tal que $f(b) = a$, y c el valor más grande en $[c'', a]$ tal que $f(c) = b$. ◀

A continuación estudiamos la siguiente relación entre la turbulencia de una función f y la existencia de órbitas periódicas.

Lema 2.3.5 *Si f es turbulenta, entonces tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

Demostración. Sean J, K subintervalos compactos con a lo más un punto en común que satisfacen (2.1). Por el lema 2.3.4 se asume que si J y K no son disjuntos, entonces el punto en común no es periódico. Por otro lado, dado que $f(J) \supset J$, por el lema 1.5.3 i) f tiene un punto fijo en J y por 1.5.3 ii) se tiene que para $n > 1$ existe un punto $x \in J$ tal que $f^n(x) = x$ y $f^k(x) \in K$ para $k < n$. Por lo tanto x es punto periódico de periodo n . ◀

Lema 2.3.6 *Si f tiene un punto periódico de periodo impar $n > 1$, entonces f^2 es estrictamente turbulenta. Además, f^m también es estrictamente turbulenta para $m \geq n$.*

Demostración. Por el teorema de Sarkovskii podemos suponer que f no tiene un punto de periodo impar menor que n . En la demostración del lema 1.5.8 se mostró que la órbita de un punto periódico x de periodo impar, está ordenada de la siguiente manera

$$f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \dots < x < f^2(x) < \dots < f^{n-2}(x),$$

o a la inversa. Sin perder generalidad podemos suponer que tiene el orden que se muestra. Seleccionamos a, b, c y d de la siguiente manera:

d entre x y $f(x)$, tal que $f(d) = x$ y $d < f^2(d)$,

a entre $f^{n-1}(x)$ y $f^{n-3}(x)$, cerca de $f^{n-1}(x)$ de modo que $f^2(a) > d$,

b entre a y $f^{n-3}(x)$, cerca de $f^{n-3}(x)$ de modo que $f^2(b) < a$,

y c entre $f^{n-3}(x)$ y d , cerca de $f^{n-3}(x)$ de modo que $f^2(c) < a$.

Los intervalos $J = [a, b]$ y $K = [c, d]$ son disjuntos y

$$f^2(J) \supset [f^2(b), f^2(a)] \supset [a, d]$$

$$f^2(K) \supset [f^2(c), f^2(c)] \supset [a, d].$$

Por lo tanto f^2 es estrictamente turbulenta.

Por otro lado, en el lema 1.5.8 se mostró que el grafo de Markov es como el de la figura 1.12. Por lo tanto para $m \geq n$ nos fijamos en las trayectorias

$$\begin{aligned} I_{n-1} &\rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1}. \\ I_{n-1} &\rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_{n-2}, \end{aligned}$$

de lo cual se tiene que $f^m(I_{n-1}) \supset I_{n-1} \cup I_{n-2}$.

Por otro lado, tomando las trayectorias

$$\begin{aligned} I_{n-2} &\rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \dots \rightarrow I_{n-2}. \\ I_{n-2} &\rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \dots \rightarrow I_{n-1}, \end{aligned}$$

se tiene $f^m(I_{n-2}) \supset I_{n-1} \cup I_{n-2}$. Por lo tanto f^m es estrictamente turbulenta para $m \geq n$. ◀

El siguiente teorema describe condiciones necesarias y suficientes, para poder afirmar cuando una función definida en un intervalo, tiene entropía positiva.

Teorema 2.3.7 *Si $f : I \rightarrow I$ es una función continua de un intervalo en si mismo, entonces f tiene entropía topológica positiva si y sólo si, tiene una órbita periódica cuyo periodo no es una potencia de dos.*

Demostración. Supongamos que f tiene entropía topológica positiva, si f tiene órbitas periódicas con periodos únicamente potencias de dos, entonces tomando la potencia más grande obtenemos el periodo más grande en el orden de Sarkovskii para el sistema, por lo tanto el conjunto de puntos periódicos es finito, por el corolario 2.1.12 la entropía es cero, lo cual es una contradicción.

Por otro lado si suponemos que f tiene un punto periódico de periodo n tal que n no es una potencia de 2, entonces se tiene los siguientes casos.

CASO 1: n es impar, entonces por el lema 2.3.6 f^2 es turbulenta, por lo tanto $h(f^2) > \log 2$. Del lema 2.1.7 concluimos que $h(f) = \frac{h(f^2)}{2} > \frac{\log 2}{2} > 0$.

CASO 2: $n = q2^k$ con q impar. Sea x un punto periódico de periodo $n = q2^k$, por lo tanto $x = f^{2^k q}(x) = (f^{2^k})^q(x)$. Por lo tanto x es un punto periódico de periodo q (impar) de f^{2^k} . Por el lema 2.3.6 $(f^{2^k})^2$ es turbulenta,

$$(f^{2^k})^2 = f^{2^k} \circ f^{2^k} = f^{2^{k+1}}.$$

Por lo tanto $f^{2^{k+1}}$ es estrictamente turbulenta. Igual que el caso 1, usando el lema 2.1.7 se tiene que $h(f) = \frac{h(f^{2^{k+1}})}{2^{k+1}} > \frac{\log 2}{2^{k+1}} > 0$. Con lo cual se completa la demostración. ◀

2.4. Entropía e itinerario principal

En esta sección se muestra como están relacionadas la entropía topológica y las sucesiones admisibles, también se mostrará que la entropía de una función f , está determinada por el itinerario principal.

Para una función l -modal denotamos por $Adm(f, k)$ al número de sucesiones acrílicas de longitud k que son admisibles. En el caso de funciones de frontera anclada, este número se relaciona con el número de doblez y la cubierta $\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U}$ de la siguiente manera.

Lema 2.4.1 Sea $f : I \rightarrow I$ una función l -modal de frontera anclada, entonces

$$\ell(f^k) \leq Adm(f, k) \leq \text{card} \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U} \right). \quad (2.2)$$

Demostración. Para verificar la primera desigualdad, sea $m = \ell(f^k)$ es decir, f^k tiene m subintervalos I_i donde f^k no cambia de monotónia. Si tomamos $x_i \in I_i$ se tiene que el itinerario de x_i de longitud k , $\{I_j(x_i) : j = 0, \dots, k-1\}$ es una sucesión admisible de longitud k , en consecuencia $\ell(f^k) \leq Adm(f, k)$.

Por otro lado, si $A_0, \dots, A_{k-1}$ es una sucesión admisible de longitud k , entonces $\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i}A_i$ es un elemento de la cubierta $\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U}$, por lo que $Adm(f, k) \leq \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathfrak{U})$. ◀

Observemos que el lema 2.4.1, nos garantiza la desigualdad (2.2) para el caso de funciones de frontera anclada. Cuando la función no es de frontera anclada, se pueden extender a una función de este tipo, con el mismo itinerario principal.

Teorema 2.4.2 Sea $f : I \rightarrow I$ una función l -modal, entonces la entropía topológica de f está determinada por su itinerario principal.

Demostración. Primero suponemos que f es de frontera anclada. Recordemos que el corolario 1.3.20 muestra que las sucesiones admisibles están determinadas

por el itinerario principal de f .

Como la función logaritmo natural es creciente, de la ecuación (2.2) del lema 2.4.1 se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \ell(f^k)}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Adm}(f, k)}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-1} \mathfrak{U})}{k}.$$

Es decir

$$h(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Adm}(f, k)}{k} \leq h(f, \mathfrak{U}) \leq h(f).$$

De donde se obtiene que

$$h(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Adm}(f, k)}{k}.$$

2 Esto nos dice, que la entropía de una función f de frontera anclada, está determinada por su itinerario principal.

Ahora consideremos el caso cuando f no es de frontera anclada. No es difícil extender f a una función $g : J \rightarrow J$ de frontera anclada, con $I \subset J$, donde g tiene la misma forma σ e itinerario principal que f . Sean R y L las dos componentes conexas de $J \setminus I$. (Alguna de éstas puede ser vacía.) Como $g(I) = f(I) \subset I$, para cualquier órbitas $\mathcal{O}_g(x)$ de g se tienen los siguientes casos:

1. $\mathcal{O}_g(x)$ está completamente contenida en I .
2. $\mathcal{O}_g(x)$ está completamente contenida en $L \cup R$.
3. $\mathcal{O}_g(x)$ tiene la primera parte en $L \cup R$ y termina en I .

Además, observe que tanto $g(L)$ como $g(R)$ intersectan a los más a uno de los intervalos L y R . Por lo tanto para cualquier longitud dada, únicamente hay dos sucesiones totalmente contenidas en $L \cup R$. Se sigue que

$$\text{Card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} g^{-1} \mathfrak{U}) \leq 2 \sum_{j=1}^k \text{Card}(\bigvee_{i=0}^{j-1} f^{-1} \mathfrak{U}). \quad (2.3)$$

Ahora, para cada constante c , tal que $\log c \geq h(f)$ y para k suficientemente grande se tiene

$$\frac{\log \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-1} \mathfrak{U})}{k} \leq \log c,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \log \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i} \mathfrak{U}) &\leq \log c \\ \log[\text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i} \mathfrak{U})]^{\frac{1}{k}} &\leq \log c \\ [\text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i} \mathfrak{U})]^{\frac{1}{k}} &\leq c \\ \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i} \mathfrak{U}) &\leq c^k.\end{aligned}$$

Por lo tanto hay una constante a de manera que $\text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i} \mathfrak{U}) \leq ac^k$ para todo k y de la ecuación (2.3) se tiene que

$$\text{Card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} g^{-i} \mathfrak{U}) \leq 2a(1 + c + \dots c^k) \leq a'c^k,$$

para alguna constante a' . De donde se sigue que

$$\begin{aligned}h(g) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \text{card}(\bigvee_{i=0}^{k-1} g^{-i} \mathfrak{U})}{k} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log a'c^k}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log c^k}{k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log a'}{k} \\ &= \log(c).\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo c tal que $\log c \geq h(f)$, se concluye que $h(g) \leq h(f)$. En consecuencia $h(g) = h(f)$. Como se requería. ◀

Usando este resultado podemos comparar la entropía de dos funciones l -modales con la misma forma σ , comparando los itinerarios principales de ambas funciones. Para ello introducimos un orden parcial $\gg$ entre los posibles itinerarios principales $K(f)$, definido de la siguiente manera.

Diremos que $K(f) \gg K(g)$ si y sólo si

$$K_i(f) \succeq K_i(g) \text{ si } \sigma_i = 1,$$

$$K_i(f) \preceq K_i(g) \text{ si } \sigma_i = -1,$$

para $1 \leq i \leq m$.

Corolario 2.4.3 Sean $f, g : I \rightarrow I$ dos funciones continuas, si $K(f) \gg K(g)$, entonces $h(f) \geq h(g)$.

Demostración. Si $K(f) \gg K(g)$, entonces se tiene que dada una sucesión acrítica admisible para g , es admisible para f .

En efecto, si $(A_0, A_1, A_2, \dots)$ es una sucesión acrítica admisible para g , entonces cuando $A_k = I_{j-1}$ o $A_k = I_j$, la sucesión $(A_{k+1}, A_{k+2}, \dots)$ satisface

$$(A_{k+1}, A_{k+2}, \dots) \leq K_j(g) \leq K_j(f) \quad \text{si } \sigma_j = 1$$

o

$$(A_{k+1}, A_{k+2}, \dots) \geq K_j(g) \geq K_j(f) \quad \text{si } \sigma_j = -1.$$

En consecuencia $\text{Adm}(f, k) \geq \text{Adm}(g, k)$, de donde se concluye que $h(f) \geq h(g)$. ◀

Para concluir este capítulo citamos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [R].

Teorema 2.4.4 *La entropía topológica es creciente a lo largo de los huesos, cuando los parámetros varían de la intersección primaria hacia la frontera ∂P^Q y en la frontera, a lo largo de los segmentos $[0, 1] \times \{1\}$ y $\{1\} \times [0, 1]$ cuando nos movemos hacia la esquina superior derecha.*

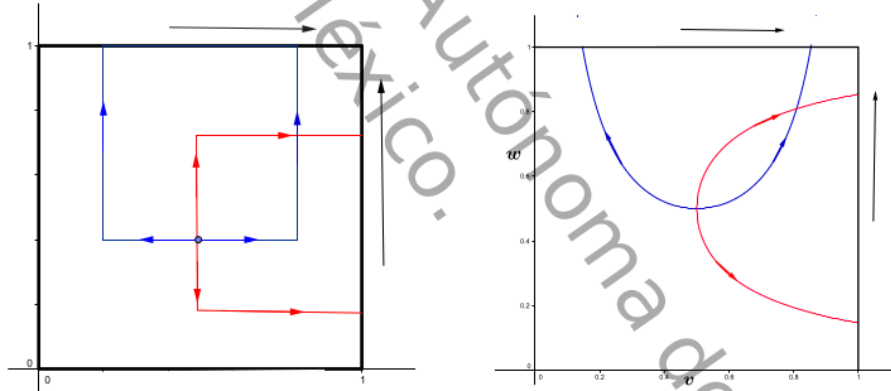


Figura 2.8: Direcciones en los huesos, en las que la entropía es creciente.

Capítulo 3

Aproximaciones numéricas

En este capítulo se muestra un algoritmo que permite aproximar la entropía topológica de funciones continuas l -modales, calculando el número de doblez de las iteradas f^n de f . Además a partir de una implementación en MATLAB de este algoritmo se obtienen resultados numéricos de entropía de algunas funciones.

3.1. Algoritmo para calcular entropía topológica

El algoritmo que describimos en esta sección, aproxima la entropía topológica de una función l -modal a través de la fórmula

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \ell(f^n)}{n},$$

dada por la proposición 2.2.9. El algoritmo calcula el número de doblez usando las sucesiones min-max y resulta útil para funciones en las cuales no es posible calcular los dobleces manualmente. El algoritmo que aquí presentamos está basado en los trabajos de Amigó-Giménez, [AG].

Dado que la entropía de una función l -modal no depende de la forma σ , en esta sección suponemos que $f : I \rightarrow I$ tiene forma positiva. Por lo tanto si f es diferenciable, $f(c_i)$ es un máximo si i es impar y es un mínimo si i es par.

Haremos uso de la notación c_{impar} , c_{par} para referirnos a c_i con i impar e i par, respectivamente y análogamente I_{impar} , I_{par} para los intervalos.

De la regla de la cadena es fácil verificar que los puntos críticos de f^n , son puntos críticos de f^{n+1} , el siguiente teorema muestra la relación que existe entre los valores extremos de f^n y los valores extremos de f^{n+1} .

Teorema 3.1.1 Si f es una función l -modal con forma positiva y $n \geq 1$, entonces

a) Si $f^n(x) = c_{\text{impar}}$, entonces f^{n+1} es un máximo de f^{n+1} . Si $f^n(x) = c_{\text{par}}$, entonces f^{n+1} es un mínimo.

b) Si $f^n(x)$ es un mínimo, entonces

$$f^{n+1}(x) \text{ es un } \begin{cases} \text{mínimo,} & \text{si } f^n(x) \in I_{\text{impar}} \\ \text{máximo,} & \text{si } f^n(x) \in I_{\text{par}}. \end{cases}$$

c) Si $f^n(x)$ es un máximo, entonces

$$f^{n+1}(x) \text{ es un } \begin{cases} \text{máximo,} & \text{si } f^n(x) \in I_{\text{impar}} \\ \text{mínimo,} & \text{si } f^n(x) \in I_{\text{par}}. \end{cases}$$

La prueba de este teorema se puede consultar en [AG].

Ahora a los entradas de los itinerarios de los valores críticos le asociaremos una información adicional, la cual nos dirá si se trata de un máximo o un mínimo local. Las sucesiones resultantes se conocen como sucesiones min-max.

Definición 3.1.2 Las sucesiones min-max de una función l -modal f ,

$$w^i = (w_1^i, w_2^i, \dots, w_n^i, \dots), \quad 1 \leq i \leq l,$$

se definen como

$$w_n^i = \begin{cases} m^{k_n^i}, & \text{si } f^n(c_i) \text{ es un mínimo} \\ M^{k_n^i}, & \text{si } f^n(c_i) \text{ es un máximo,} \end{cases}$$

donde k_n^i es la n -ésima entrada del itinerario k_i del valor crítico $f(c_i)$.

La información que proporciona el teorema 3.1.1, para la construcción de las sucesiones min-max, se puede extraer en las siguientes tablas que muestra la figura 3.1. La tabla de la izquierda para el caso de funciones con forma positiva y la tabla de la derecha para el caso de funciones con forma negativa.

Un ingrediente importante en el desarrollo de este algoritmo, propio de las sucesiones min-max, es el siguiente. Sea $y = c_i$ la i -ésima línea crítica $1 \leq i \leq l$, en el plano cartesiano $I \times I$. Los símbolos min-max, los clasificamos en símbolos buenos y malos, respecto a la i -ésima línea crítica. Geométricamente los símbolos buenos corresponden a máximos locales estrictamente arriba de la línea $y = c_i$ o

w_n^i	$\rightarrow$	w_{n+1}^i	w_n^i	$\rightarrow$	w_{n+1}^i
$m^{c_{par}}, M^{c_{par}}$	$\rightarrow$	$m^{k_{n+1}^i}$	$m^{c_{par}}, M^{c_{par}}$	$\rightarrow$	$M^{k_{n+1}^i}$
$m^{c_{impar}}, M^{c_{impar}}$	$\rightarrow$	$M^{k_{n+1}^i}$	$m^{c_{impar}}, M^{c_{impar}}$	$\rightarrow$	$m^{k_{n+1}^i}$
$m^{I_{par}}, M^{I_{par}}$	$\rightarrow$	$m^{k_{n+1}^i}$	$m^{I_{par}}, M^{I_{par}}$	$\rightarrow$	$M^{k_{n+1}^i}$
$m^{I_{impar}}, M^{I_{impar}}$	$\rightarrow$	$M^{k_{n+1}^i}$	$m^{I_{impar}}, M^{I_{impar}}$	$\rightarrow$	$m^{k_{n+1}^i}$

Figura 3.1: Regla de transición de la sucesiones min-max. Para funciones con forma positiva (izquierda) y para funciones con forma negativa (derecha).

a mínimos locales estrictamente por debajo de $y = c_i$. Todos los demás símbolos min-max son:

$$B^i = \{M^{I_1}, M^{c_1}, \dots, M^{I_i}, M^{c_i}, m^{c_i}, m^{I_{i+1}}, \dots, m^{c_l}, m^{c_{l+1}}\}.$$

El conjunto B^i se conoce como el conjunto de símbolos malos, respecto a la línea $y = c_i$. Además B^i tiene exactamente $2l + 1$ elementos.

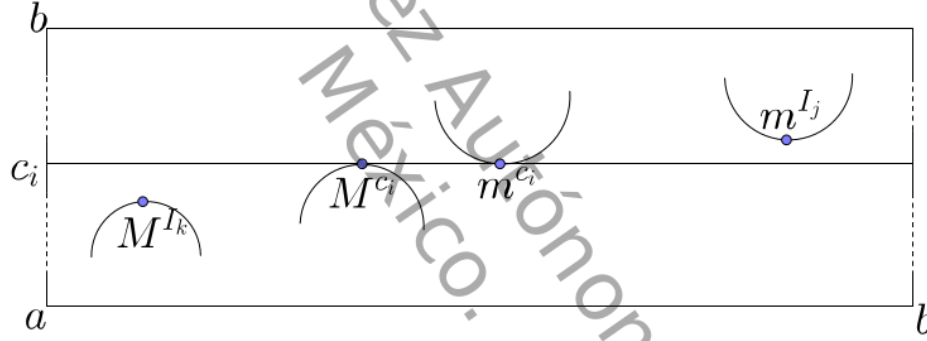


Figura 3.2: Símbolos malos. $I_k \in \{I_1, c_1, \dots, I_i, c_i\}$ y $I_j \in \{c_i, \dots, I_{i+1}, \dots, I_{m+1}\}$.

Sea s_v^i , $1 \leq i \leq l$ que representa el número de raíces simples de $f^v(x) - c_i$, $v \geq 0$ en I . Es decir, soluciones de $x - c_i = 0$, $v = 0$ o soluciones de $f^v(x) = c_i$ con $f^k(x) \neq c_i$ para $0 \leq k \leq v - 1$. Geométricamente s_v^i es el número de intersecciones transversales de la curva $y = f^v(x)$ y la línea $y = c_i$. Note que $s_0^i = 1$ para toda i ,

y definimos s_v para $v \geq 0$ como:

$$s_v = \sum_{i=1}^l s_v^i. \quad (3.1)$$

En particular

$$s_0 = \sum_{i=1}^l 1 = l.$$

Además, el número de dobléz de f^n , ℓ_n , satisface

$$\ell_n = 1 + \sum_{v=0}^{n-1} s_v = \ell_{n-1} + s_{n-1} \quad (3.2)$$

para $n \geq 1$. En particular $\ell_1 = \ell_0 + s_0 = 1 + l$.

Y se define

$$K_v^i = \{(k, \kappa), 1 \leq k \leq l, 1 \leq \kappa \leq v : w_\kappa^k \in B^i\}$$

para $v \geq 1$ e $1 \leq i \leq L$. Esto es, K_v^i colecta los subíndices y superíndices (k, κ) de los símbolos malos respecto a la i -ésima línea crítica, que aparecen en los bloques

$$\begin{array}{c} w_1^1, w_2^1, \dots, w_v^1; \\ w_1^2, w_2^2, \dots, w_v^2; \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \\ w_1^l, w_2^l, \dots, w_v^l; \end{array} \quad (3.3)$$

de las sucesiones min-max de f . De la definición podemos observar que $K_{v-1}^i \subset K_v^i$, mas aún, de la definición de K_v^i se tiene que

$$K_v^i \setminus K_{v-1}^i = \{(k, v), 1 \leq k \leq l : w_v^k \in B^i\}.$$

Por lo tanto

$$K_v^i = K_{v-1}^i \cup \{(k, v), 1 \leq k \leq l : w_v^k \in B^i\}. \quad (3.4)$$

Los índices en K_v^i se utilizan para relacionar el número de cruces de f^v con todas las líneas críticas, como se mostrará en el teorema 3.1.3.

Sea

$$S_v^i = 2 \sum_{(k,\kappa) \in K_v^i} s_{v-\kappa}^k \quad (3.5)$$

donde $S_v^i = 0$ si $K_v^i = \emptyset$ y de forma análoga a la ecuación (3.1)

$$S_v = \sum_{i=1}^l = S_v^i. \quad (3.6)$$

Teorema 3.1.3 *Sea f una función l -modal de frontera anclada, entonces*

$$s_v^i = 1 + \sum_{k=0}^{v-1} s_k - S_v^i. \quad (3.7)$$

Una prueba de este resultado se puede consultar en [AG].

Este resultado es muy importante ya que nos permite reescribir s_v en términos de l, s_k y S_v . Además, conocemos las expresiones $s_0^k, s_1^k, \dots, s_{v-1}^k$, $1 \leq k \leq l$, por lo que se puede calcular s_v^i vía las ecuaciones (3.7) y (3.5). Sumando la expresión (3.7) corriendo i desde 1 hasta l , se obtiene la siguiente relación

$$s_v = l(1 + \sum_{k=0}^{v-1} s_k) - S_v \quad (3.8)$$

para toda $v \geq 1$. De la ecuación (3.2), la ecuación anterior se reescribe como $s_v = l\ell_v - S_v$, por lo tanto, despejando ℓ_v obtenemos

$$\ell_v = \frac{1}{l}(s_v + S_v), \quad (3.9)$$

de donde se concluye que

$$h(f) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \log \frac{s_v + S_v}{l}. \quad (3.10)$$

El algoritmo que a continuación se presenta, aproxima la entropía topológica de una función l -modal continua, no necesariamente de frontera anclada, como

$$h(f) \approx \frac{1}{v} \log \frac{s_v + S_v}{l},$$

para v suficientemente grande.

En cada iteración el algoritmo calcula $h(f)$ y la compara con el valor de la iteración anterior. Observemos que el calculo de S_v^i , $1 \leq i \leq l$, requiere $s_0^i, s_1^i, \dots, s_{v-1}^i$ y de la ecuación (3.5). Mientras que el cálculo de s_v^i , $1 \leq i \leq l$ requiere de $s_0^i, s_1^i, \dots, s_{v-1}^i$ y S_v^i a través de la ecuación (3.7).

Algoritmo 3.1.4 (A1) Datos de entrada: $l \geq 1$, número de puntos críticos, $\epsilon > 0$ criterio de convergencia y n_{max} número máximo de iteraciones.

(A2) Inicialización: $s_0^i = 1$ y $K_1^i = \{(k, 1), 1 \leq k \leq l : w_1^k \in B^i\}$, para $1 \leq i \leq l$.

(A3) Primera iteración: Para $1 \leq i \leq l$,

$$s_0^i, K_1^i \rightarrow S_1^i, S_1^i, \text{ usando las ecuaciones (3.5)-(3.6)}$$

$$s_0^i, S_1^i \rightarrow s_1^i, s_1^i, \text{ usando las ecuaciones (3.7)-(3.8)}.$$

(A4) Ciclo principal: Para $1 \leq i \leq l$ y $v \geq 2$, vamos calcular K_v^i, S_v^i, s_v^i de acuerdo a las siguientes reglas recursivas:

$$K_{v-1}^i \rightarrow K_v^i, \text{ usando la ecuación (3.4) y las tablas 3.1, ??}$$

$$s_0^i, s_1^i, \dots, s_{v-1}^i, K_v^i \rightarrow S_v^i, S_v^i, \text{ usando las ecuaciones (3.5)-(3.6)}.$$

$$s_0^i, s_1^i, \dots, s_{v-1}^i, S_v^i \rightarrow s_v^i, s_v^i, \text{ usando las ecuaciones (3.7)-(3.8)}.$$

(A5) Criterios de paro: hasta que

$$i) \left| \frac{1}{v} \log \frac{s_v + S_v}{m} - \frac{1}{v-1} \log \frac{s_{v-1} + S_{v-1}}{m} \right| \leq \epsilon,$$

o hasta que

$$ii) v = n_{max} + 1.$$

stop.

Si sucede i), entonces la entropía de f es aproximadamente $h(f)$, si pasa ii), entonces el algoritmo falla.

3.2. Simulaciones numéricas

En esta sección presentamos aproximaciones numéricas de la entropía topológica de algunas funciones I -modales. Los resultados se obtuvieron de la implementación en lenguaje MATLAB del algoritmo descrito anteriormente.

Un punto de referencia para los estimadores de entropía, consiste en determinar la entropía para funciones que dependen de un parámetro y calcular la entropía en función del parámetro.

3.2.1. Aproximación de la entropía para una familia exponencial

El ejemplo que mostramos a continuación, es el ejemplo 1 reportado en [AG].

Ejemplo 3.2.1 Sea $\alpha = 2.8$, $-1 < \beta \leq 0$ y $f_{\alpha,\beta} : [-(1+\beta), (1+\beta)] \rightarrow [-(1+\beta), (1+\beta)]$ definida como

$$f_{\alpha,\beta} = e^{-\alpha^2 x^2} + \beta.$$

Estas funciones tienen la particularidad de presentar bifurcación doblamiento de periodo, directa e inversamente a medida que el parámetro crece. Además, tienen un único punto crítico, $c = 0$.

En la parte inferior de la figura 3.3 se muestra la gráfica de h_β , calculada con el algoritmo 3.1.4 con $\epsilon = 10^{-4}$. La cual nos muestra los mismos resultados que los que se reportan en [AG] y en la parte superior de la misma se muestra el diagrama de órbitas atractoras existentes en la familia (diagrama de bifurcación) para $-1 \leq \beta \leq 0$.

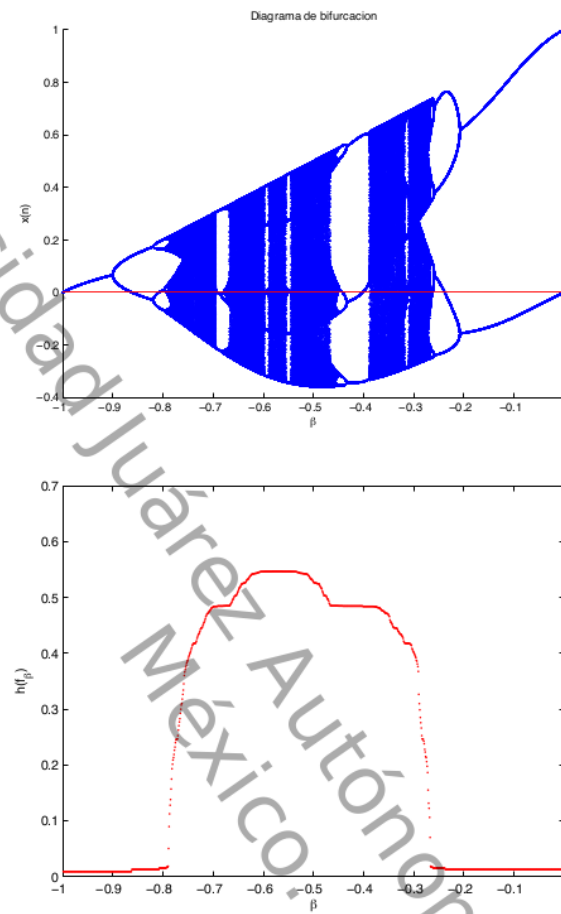


Figura 3.3: Diagrama de bifurcación y gráfica de $h_2(f_\beta)$, con $-1 < \beta \leq 0$.

Estas funciones tienen derivada Schwarziana negativa, por el teorema 1.1.5 de Singer, tienen una única órbita atractora. Como se puede observar de -1 a -0.8 , aproximadamente solo hay órbitas con periodo potencias de dos. Las partes constantes de $h(f_\beta)$, corresponden a intervalos de parámetros donde el periodo de la órbita tractora no cambia.

En la figura 3.4 se muestra un acercamiento de la función entropía y del diagrama de bifurcación. Se puede observar que después de -0.8 aparece una órbita que ya no es potencia de dos, por lo que tenemos entropía positiva. De hecho va creciendo según van apareciendo las órbitas periódicas, siguiendo el orden de Sarkovski. Cerca de -0.39 desaparece la órbita de periodo tres y se sigue este comportamiento siguiendo el orden de Sarkovski (en orden decreciente), por lo que la entropía empieza a decrecer hasta que solamente quedan órbitas con periodos potencias de dos. Por lo que la entropía decrece hasta llegar a cero.

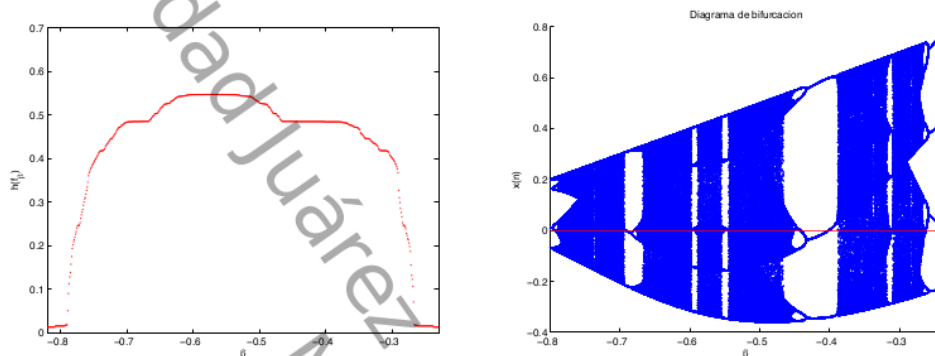


Figura 3.4: Función entropía (izquierda). Diagrama de bifurcación (derecha).

3.2.2. Aproximación de la entropía en la familia logística

Una de las funciones que es muy importantes, son las funciones logísticas, empleadas en el estudio de crecimiento de diferentes poblaciones, debido a que es un modelo sencillo y se ajusta al desarrollo de diferentes poblaciones.

Para este modelo mostraremos aproximaciones numéricas de la entropía topológica para parámetros entre 0 y 1.

Sea $f_v = 4vx(1-x)$ $0 < v \leq 1$, la familia logística, como se ha visto anteriormente el único punto crítico de estas funciones es $c = \frac{1}{2}$ y el valor crítico es v . Además, esta familia presenta bifurcación doblamiento de periodo a medida que crece el parámetro v .

En el cuadro 3.1 se muestra aproximaciones de la entropía de esta familia para algunos valores de v .

v	0.0020	0.5	0.5020	0.8105	0.875	0.887	0.8926
$h(f_v)$	2.625E-4	2.625E-4	1.842 E-3	3.406E-3	3.406E-3	4.751E-3	2.894E-2
v	0.8945	0.9063	0.9180	0.9355	0.9707	1	
$h(f_v)$	0.1059	0.2430	0.3279	0.4153	0.5206	0.6931	

Cuadro 3.1: Valores de la entropía para algunos parámetros en la familia logística.

En la parte inferior de la figura 3.5 se muestra la gráfica de $h(f_v)$ para $0 < v \leq 1$, con $\epsilon = 10^{-4}$ y en la parte superior se muestra el diagrama de bifurcación correspondiente. En el diagrama se puede observar que cuando $v < \frac{3}{4}$ existe un punto fijo atractor, seguidamente aparece una órbita de periodo 2 atractor la cual se bifurca y da origen a una órbita de periodo 4 y así sucesivamente hasta llegar al parámetro de Feigenbaum ($v_F \approx 0.8925$), a partir del cual aparecen órbitas atractoras de periodo diferentes a 2^n .

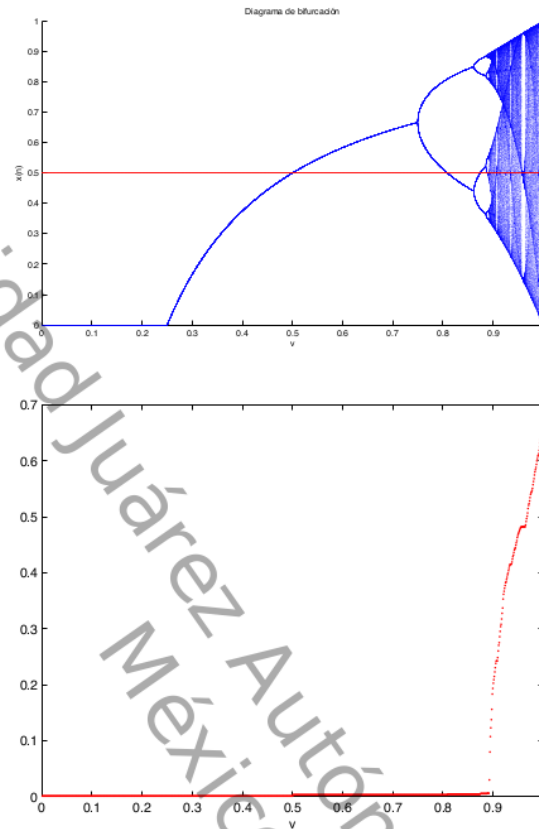


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación y gráfica de h_v para la familia logística.

En la figura 3.6, se muestra un acercamiento de la gráfica de la función entropía y del diagrama de bifurcación.

En el caso de la familia logística, se tienen un único atractor ya que sólo tiene un punto crítico y por lo tanto si el periodo de la órbita atractor no cambia, tampoco lo hace la entropía. Este fenómeno ocurre porque el itinerario principal tampoco cambia.

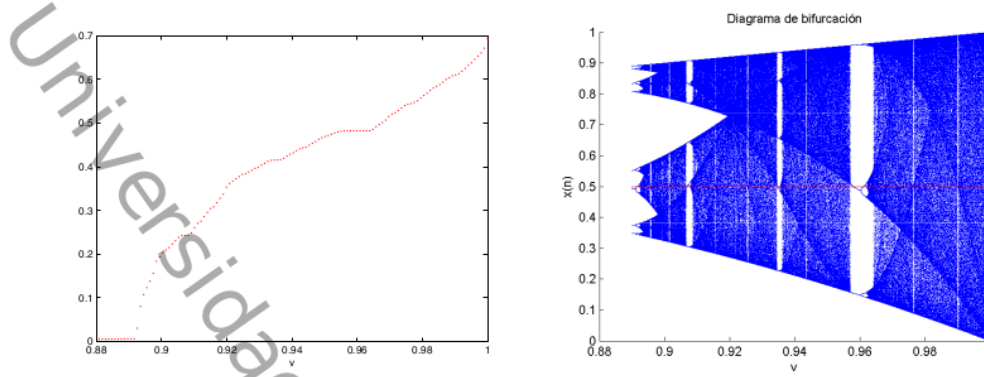


Figura 3.6: Función entropía y diagrama de bifurcación.

3.2.3. Aproximaciones numéricas para funciones de dos parámetros

En este apartado se muestran las aproximaciones numéricas obtenidas al calcular la entropía de una familia de funciones a dos parámetros, empleando el algoritmo 3.1.4.

Comenzaremos mostrando uno de los ejemplos reportados en [AG] y comparando los resultados obtenidos con la implementación del algoritmo en MATLAB y los que ahí se reportan.

Sea f la función del apartado 3.2.1.

$$f_{\alpha,\beta}(x) = e^{-\alpha^2 x^2} + \beta, \text{ con } \alpha > 0, \text{ y } -1 < \beta \leq 0.$$

En el ejemplo 3.2.1 se mostró las aproximaciones de la entropía topológica para el caso $\alpha = 2.8$. Ahora haremos un análisis mas general en el espacio de parámetros $[2, 3] \times [-1, 0]$. En las figuras 3.7 y 3.8, se muestran los resultados obtenidos al calcular la entropía de esta familia a dos parámetros, estas figuras se obtuvieron haciendo una malla en el dominio con tamaño de paso $\frac{1}{2^{10}}$ y $\epsilon = 10^{-5}$. En [AG] para $\alpha = 2.8$ y $\beta = -0.5$ se reporta $h(f_{\alpha,\beta}) = 0.527305$, usando la implementación en MATLAB se obtiene $h(f_{\alpha,\beta}) = 0.527505$, lo cual muestra que se tiene una precisión de tres dígitos en los cálculos realizados.

Note que para valores positivos de α menores que 2, independientemente del valor de β la entropía es cero; cerca de $\alpha = 2.2$ y alrededor de $\beta = -0.6$ la entropía empieza a crecer y alcanza sus valores mas altos cuando α se aproxima a 3.

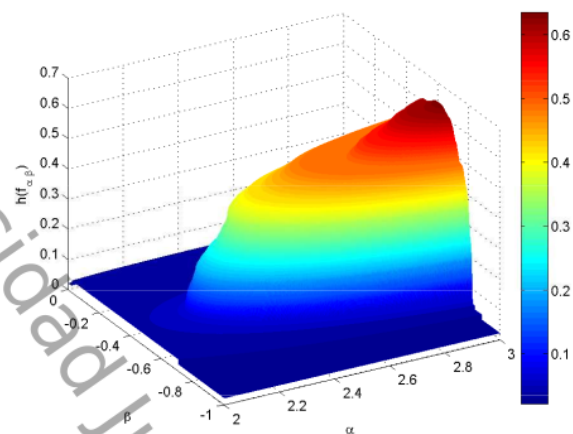


Figura 3.7: Gráfica de h en el espacio de parámetros α, β .

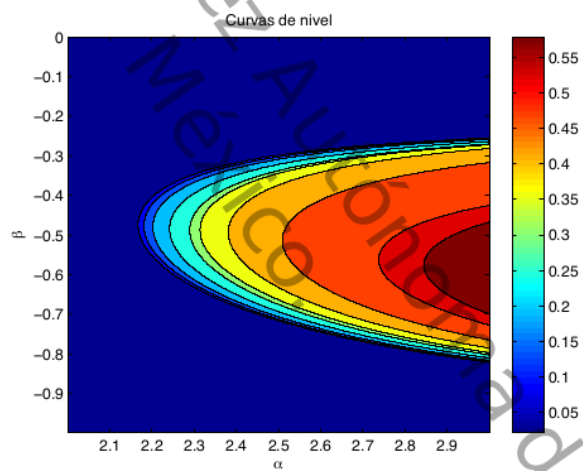


Figura 3.8: Curvas de nivel de la entropía.

2 Para mostrar el comportamiento de la entropía en funciones l -modales, mostraremos los resultados numéricos correspondientes a la familia cuártica obtenida al componer dos funciones logísticas.

Sea $f_{wv} = f_w \circ f_v$, la familia de funciones a dos parámetros obtenida al componer dos funciones logísticas. Dependiendo del parámetro en esta familia se encuentran funciones unimodales, o tres modales, con la característica que todas ellas tienen en común el punto crítico $c = \frac{1}{2}$. El cálculo de la entropía de f_{wv} se realiza haciendo una malla con tamaño de paso $\frac{1}{2^{10}}$ en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ y usando como condición de paro $\epsilon = 10^{-5}$, los resultados obtenidos se muestran en las figura 3.9 y 3.10. Tomando en cuenta que la entropía es localmente constante alrededor de parámetros donde hay una órbita atractora se eligieron algunos valores de los parámetros y los resultados se muestran en el cuadro 3.2.

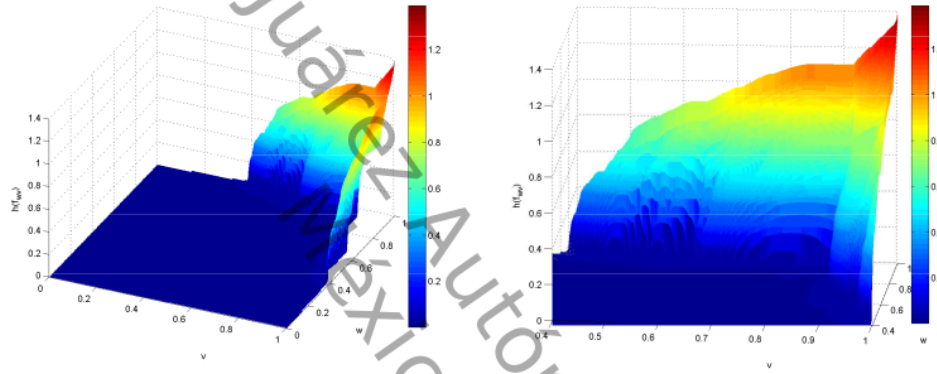


Figura 3.9: Gráfica de h en el espacio de parámetros vw .

Recordemos que en la familia logística el caos aparece despu3 del parámetro de Feigenbaum, $v_F \approx 0.8925$. En la figura 3.10 podemos observar que la composición de dos funciones logísticas caóticas da una función caótica, lo cual coincide con los resultados de Kot y Schaffer [KS]. Además, en la misma figura podemos observar el crecimiento de la entropía a lo largo de los huesos de periodo 2 en P^Q definidos en el apartado 1.4.2. Para verificar de manera mas precisa este crecimiento mostraremos los resultados en una tabla. Notemos que en el caso de huesos de periodo dos se puede encontrar algebraicamente la relación que existe entre v y w , en particular para el hueso izquierdo

$$w = -\frac{1}{8v(v-1)}.$$

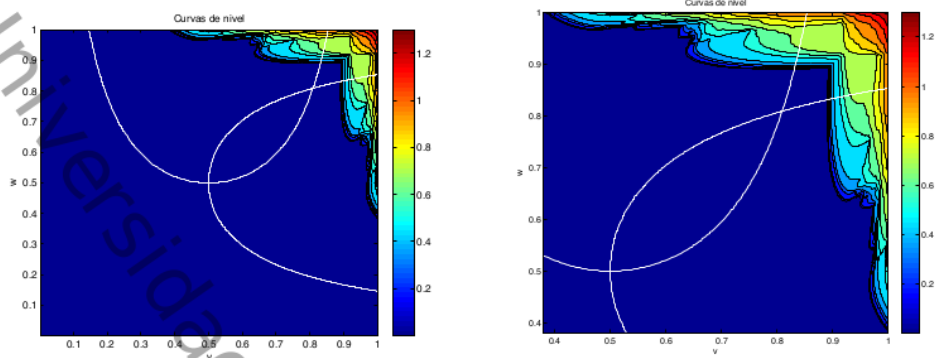


Figura 3.10: Curvas de nivel de h en el espacio de parámetros vw .

Para conocer la entropía sobre esta curva se toman valores de los parámetros sobre ella y se realizan los cálculos de la entropía, los resultados se muestran en el cuadro 3.3.

Para el hueso de periodo 4 no es posible obtener una expresión explícita para las curvas, por lo que calculamos numéricamente el hueso izquierdo, el cual se muestra en a figura 3.11. De nuevo tomamos valores de los parámetros v, w sobre esta curva y se realizan los cálculos de la entropía, los resultados se muestran en el cuadro 3.4. Estos resultados concuerdan con los mostrados en el teorema 2.4.4 de Radulescu. En el cual demuestra el crecimiento de la entropía a lo largo de los huesos [R].

$v \backslash w$	0.0020	0.3906	0.5078	0.7813	0.8789	0.9180	0.9375	0.9570	1
0.0020	0.0013	0.0014	0.0027	0.0027	0.0027	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
0.3906	0.0013	0.0013	0.0138	0.0138	0.0138	0.0138	0.0249	0.0249	0.2162
0.5078	0.0013	0.0138	0.0152	0.0160	0.0249	0.0249	0.0271	0.0307	0.8457
0.7813	0.0013	0.0138	0.0160	0.0152	0.0292	0.5033	0.6125	0.6238	1.0582
0.8789	0.0013	0.0138	0.0249	0.0292	0.0379	0.6173	0.6961	0.6975	1.1
0.9180	0.0014	0.0138	0.0249	0.5038	0.6178	0.6565	0.7004	0.7040	1.1034
0.9375	0.0014	0.0248	0.0270	0.6129	0.6963	0.6997	0.8390	0.8917	1.1689
0.9766	0.0014	0.0248	0.3509	0.7596	0.7873	0.7790	0.9431	1.0237	1.2754
1	0.0014	0.2148	0.8453	1.0581	1.0996	1.1029	1.1685	1.2192	1.3862

Cuadro 3.2: Valores de la entropía para logísticas acopladas.

$v \backslash w$	w	$h(f_{wv})$
0.2	0.7825	0.0034
0.5	0.5	0.0034
0.7	0.5952	0.0335
0.8	0.7812	0.4927
0.82	0.8468	0.0601
0.83	0.8859	0.0777
0.84	0.93	0.6921
0.85	0.9803	0.8543

Cuadro 3.3: Entropía sobre el hueso izquierdo de periodo dos.

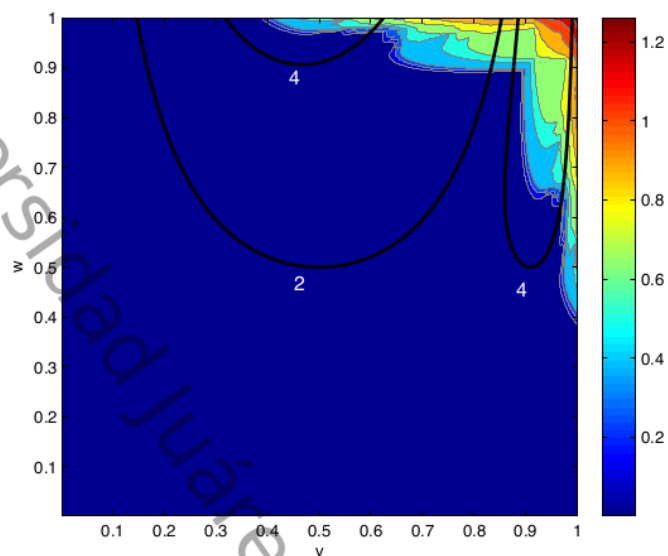


Figura 3.11: Huesos izquierdos de periodo 2 y 4, en el espacio de parámetros.

v	w	$h(f_{wv})$
0.8875	1	1.1016
0.8835	0.9759	0.7658
0.8795	0.9277	0.6970
0.8714	0.8473	0.0334
0.903	0.5	0.0167
0.9397	0.5220	0.0340
0.9718	0.6546	0.4035
0.9759	0.6827	0.6067
0.9792	0.7469	0.7307
0.9879	0.8634	0.8952
0.9919	1	1.3211

Cuadro 3.4: Entropía sobre el hueso izquierdo de periodo cuatro.

Conclusiones

En este trabajo se mostraron algunas propiedades de la entropía topológica y se hicieron cálculos numéricos para algunas funciones específicas.

El primer ejemplo en el que se aplicó el algoritmo fue una familia exponencial y verificamos que los resultados obtenidos coinciden para el caso uniparamétrico y de dos parámetros publicados en [AG]. Esta comparación nos permitió corroborar la implementación del algoritmo y aplicarlo a otras familias de funciones.

Para la familia logística, en la figura 3.5 se puede observar que en los parámetros menores al Feigenbaum ($v_F \approx 0.8925$), el valor que se obtiene es menor que 10^{-3} . Analíticamente es conocido que el valor de la entropía para estos parámetros es cero [BC, dMvS], por lo que la diferencia con el valor obtenido numéricamente corresponde al error cometido en la aproximación computacional. Para parámetros mayores a v_F , el valor de la entropía es positiva y además es creciente hasta alcanzar el valor $\log(2)$, el cual corresponde a la entropía del parámetro $v = 1$. En otras palabras, después del parámetro v_F se presenta el caos en la familia logística. La familia logística es un ejemplo de familia unimodal y como solo hay un punto crítico, la entropía está determinada por la órbita de éste.

En la figura 3.9 se muestra el cálculo de la entropía para la familia 3-modal f_{wv} , la cual resulta de la composición de dos logísticas. Allí se puede observar que la entropía en el cuadrado $[0, v_F] \times [0, v_F]$ sigue siendo cero, por lo que en ese conjunto de parámetros no existe el caos. Por otro lado se puede observar que en el cuadrado $[v_F, 1] \times [v_F, 1]$ la entropía es positiva por lo que la composición de dos funciones caóticas genera una función caótica. Además, podemos observar que en el rectángulo $[v_F, 1] \times [0, v_F]$ se tiene tanto entropía cero como positiva, de esto podemos concluir que la composición de una función caótica con una función ordenada (entropía cero) puede dar como resultado una función caótica o una ordenada. Por otro lado en la figura 3.11 se muestran los huesos de periodo 4 y en el cuadro 3.4 se puede observar el crecimiento de la entropía a lo largo del hueso. En general se tiene que sobre un hueso izquierdo la entropía crece del la

intersección primaria del hueso alcanzando su valor máximo cuando $w = 1$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice A

Matrices no negativas

1 En esta sección se muestran algunos resultados importantes sobre matrices no negativas, que se emplean para construir herramientas que nos permitirán calcular entropía topológica para algunas funciones.

Lema A.0.2 Sea $A = (a_{ik})$ una matriz de tamaño $p \times p$ de números reales no negativos. Entonces existen $\lambda \geq 0$ y un vector $x = (x_k)$ distinto de cero con $x_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, p$) tales que $Ax = \lambda x$ y $|\mu| \leq \lambda$, para cualquier otro valor propio μ de A .

Intuitivamente, se puede ver la veracidad de este lema. Considere el caso de una matriz positiva A de 2×2 . La correspondiente transformación matricial mapea el primer cuadrante del plano adecuadamente en sí mismo, pues todas las componentes son positivas. Si repetidamente se permite a A actuar sobre las imágenes que se tienen, necesariamente convergen hacia algún rayo en el primer cuadrante. Un vector director para este rayo será un vector positivo x , que debe mapearse en algún múltiplo positivo de sí mismo (por decir, $\lambda_1 x$), pues A deja el rayo fijo. En otras palabras, $Ax = \lambda_1 x$, con x y λ_1 ambos positivos.

Demostración. Para algunos vectores distintos de cero x , $Ax \geq \lambda x$ para algún escalar λ . Cuando esto sucede, entonces $A(kx) \geq \lambda(kx)$ para toda $k > 0$; por tanto, sólo es necesario considerar vectores unitarios x . A mapea al conjunto de todos los vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$ (la esfera unitaria) en un “elipsoide generalizado”. De este modo, conforme x varía sobre los vectores no negativos en esta esfera unitaria, habrá un valor máximo de λ tal que $Ax \geq \lambda x$. Denote este número mediante λ_1 y el correspondiente vector unitario mediante x_1 .

11

Ahora se demostrará que $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Si no, entonces $Ax_1 > \lambda_1 x_1$ y al aplicar A nuevamente, se obtiene

$$A(Ax_1) > A(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 (Ax_1)$$

donde la desigualdad se conserva, pues A es positiva. Pero entonces $y = \frac{1}{\|Ax_1\|} Ax_1$ es un vector unitario que satisface $Ay > \lambda_1 y$, de modo que habrá algún $\lambda_2 > \lambda_1$ tal que $Ay \geq \lambda_2 y$. Esto contradice el hecho de que λ_1 era el valor máximo con esta propiedad. En consecuencia, debe ser el caso que $Ax_1 = \lambda_1 x_1$; esto es: λ_1 es un eigenvalor de A .

Ahora A es positivo y x_1 es positivo, de modo que $\lambda_1 x_1 = Ax_1 > 0$. Esto significa que $\lambda_1 > 0$ y $x_1 > 0$, lo que completa la demostración. ◀

Nos referiremos a λ , como el valor propio máximo de A . Una matriz A no negativa se dice que es reducible si existe una matriz de permutación P de tal manera que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} B & C \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

donde B y D son matrices cuadradas irreducibles de menor tamaño que A .

Lema A.0.3 Para cualquier matriz no negativa A , existe una matriz de permutación P tal que

$$P^t A P = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix},$$

donde cada block de la diagonal A_{kk} ($k = 1, \dots, v$) es irreducible.

Lema A.0.4 Sea A una matriz no negativa con valor propio máximo λ . Si A es irreducible, entonces existe un entero positivo h tal que los valores propios de A con valor absoluto λ son

$$\lambda, \lambda\omega, \dots, \lambda\omega^{h-1},$$

donde $\omega = e^{\frac{2\pi}{h}}$.

Equipamos el espacio de matrices de tamaño $n \times n$ con la norma dada por

$$\|A\| = \sum_{ik} |a_{ik}|.$$

El valor propio máximo está relacionado con esta norma de la siguiente manera.

Lema A.0.5 Sea A una matriz no negativa con valor propio máximo λ , entonces

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Sea $x = (x_k)$ el vector propio no negativo correspondiente al valor propio λ , de modo que

$$\lambda x_i = \sum_k a_{ik} x_k.$$

Si elegimos i de modo que $x_i = \max x_k$ obtenemos

$$\lambda \leq \sum_k a_{ik} \leq \|A\|.$$

Aplicando esta desigualdad a A^n , en lugar de A , se obtiene que $\lambda^n \leq \|A^n\|$ y por lo tanto

$$\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea T una matriz no singular tal que $J = T^{-1}AT$ es la forma canónica de Jordan. Si $p > \lambda$, entonces $\frac{p^n}{p^n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto también $\frac{A^n}{p^n} \rightarrow 0$. Así $\|A^n\| < p^n$ para todo n grande y en consecuencia

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq p.$$

Como esto es para cualquier $p > \lambda$ se sigue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

Por lo tanto

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

En esencia, el mismo argumento muestra que, para cualquier matriz A ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \mu$$

donde μ es el valor absoluto más grande de todos los valores propios de A .

El valor propio máximo también se puede caracterizar en términos de la traza.

Lema A.0.6 Sea A una matriz no negativa con valor propio máximo λ , entonces

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}}.$$

1 **Demostración.** Si A es una matriz de tamaño $p \times p$, entonces $\text{tr } A^n \leq p\lambda^n$, y entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

Queda por demostrar la otra desigualdad.

Para ello, primero supongamos que A es irreducible. Por el lema A.0.4 los valores propios con valor absoluto λ son de la forma $\lambda, \lambda\omega, \dots, \lambda\omega^{h-1}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi}{h}}$. Si denotamos por $\lambda_{h+1}, \dots, \lambda_p$ a los valores propios restantes de A , entonces

$$\text{tr } A^n = \lambda^n + \lambda^n \omega^n + \dots + \lambda^n \omega^{(h-1)n} + \lambda_{h+1}^n + \dots + \lambda_p^n.$$

En particular si tomamos $n = kh$ un múltiplo de h , entonces $\omega^n = 1$ y

$$\begin{aligned} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}} &= [h\lambda^n + \sum_{i=h+1}^p \lambda_i^n]^{\frac{1}{n}} \\ &= [h\lambda^n + \lambda^n \sum_{i=h+1}^p \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^n]^{\frac{1}{n}} \\ &= \lambda \left[h + \sum_{i=h+1}^p \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &\rightarrow \lambda \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{A.1}$$

En el caso general, aplicamos el lema A.0.3. Para alguna k el bloque irreducible A_{kk} de la diagonal tiene el valor propio máximo λ . Como

$$\text{tr } A^n \geq \text{tr } (A_{kk})^n$$

de (A.1) se sigue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{tr } A^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

◀

En particular supongamos que cada elemento de la matriz A es 0 o 1. Definimos una trayectoria de longitud n a una sucesión finita $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$ tal que

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_{n+1}} \neq 0.$$

1 Entonces $\|A^n\|$ es simplemente el número de trayectorias de longitud n , debido a que

$$\|A^n\| = \sum a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_{n+1}}.$$

Del mismo modo $(A^n)_{ik}$ es el número de trayectorias de longitud n con $i_1 = i, i_{n+1} = k$.

Apéndice B

Implementación del algoritmo en MATLAB

En este apéndice se muestra la rutina de MATLAB que se empleó para obtener las aproximaciones numéricas mostradas en el capítulo 3.

```
function h=entropia(a)
%Esta función calcula la entropía
%de una función continua

clc;
n=4000;           %Numero máximo de iteraciones
ep=10^(-4);       %Criterio de paro

format long

%+++++
%DEFINIMOS LA FUNCION
%+++++
syms x;
f=-4*x.^2+4*x;
%f=x.^2-2;
%f=9.375*x.^3-15.4688*x.^2+6.75*x+0.1;
%f=x+0.7326*sin(2*pi*x);
```

```

%f=fun1(a);

%+++++
%SI DESEAMOS GRAFICAR LA FUNCIÓN
%+++++

% x=[0;1/2^20:1];
% y=subs(f);
% plot(x,y);

f1=diff(f);
[raices]=solve(f1,x);      %Raices de la derivada
raices=unique(raices);     %unique me quita las raices repetidas

d=(1:1:length(raices));    %Detectando raices reales
k=0;
for i=1:length(raices)
    if imag(raices(i))==0
        k=k+1;
        d(k)=raices(i);
    end
end

raices=d(1:k);             %Puntos criticos (Solucionres reales de f1)
raices=sort(raices);
l=length(raices);
%vc=subs(f,raices);
%plot(raices,vc,'or');     %Plotea valores criticos

%*****%
%      Clasificando los valores extremos      %
%*****%

```

```

segdif=diff(f1);           %derivada2 es la segunda derivada de f
derivada4=diff(diff(segdif));%derivada4 es la cuarta derivada de f
derivada2=zeros(1,1);

for j=1:1
    derivada2j=subs(segdif,raices(j));

    if derivada2j~=0       %Criterio de la segunda derivada
        if derivada2j<0
            derivada2(j)=1;
            %fprintf('maximo en %g \n',raices(j))
        elseif derivada2j>0
            derivada2(j)=0;
            %fprintf('minimo en %g \n ',raices(j))
        end

    else
        derivada4j=subs(derivada4,raices(j));
        %Criterio de la cuarta derivada
        if derivada4j<0
            derivada2(j)=1;
            %fprintf('maximo en %g \n',raices(j))
        elseif derivada4j>0
            derivada2(j)=0;
            %fprintf('minimo en %g \n ',raices(j))
        end
    end
end

%*****%
%    %%Cálculo de los itinerarios    %
%*****%

I=zeros(1,n); % En este vector se se almacenan los itinerarios

```

```

for i=1:l;
y=raices(i);
for j=1:n
y=subs(f,y);
[r,li]=busquedabinaria(raices,y);%Verifica si y es un crítico
if r~-1 % o en que posición está respecto
I(i,j)=10+ r; % a los puntos críticos
else
I(i,j)=li;
end
end
end
end

```

```

%*****%
% %SUCESIONES MIN-MAX. MINIMO m-0, MAXIMO M-1 %
%*****%
%Para el caso positivo
%*****%
M=zeros(1,n);
if derivada2(1)==1
for i=1:l
derivada2j=derivada2(i);
if derivada2j==1
M(i,1)=1;
elseif derivada2j==0
M(i,1)=0;
end

for j=2:n
if (I(i,j-1)>=10 && rem(I(i,j-1),2)==0)
M(i,j)=0;

elseif (I(i,j-1)>=10 && rem(I(i,j-1),2)~=0)
M(i,j)=1;

```

```

elseif ( M(i,j-1)==0 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)~=0 )
    M(i,j)=0;

elseif ( M(i,j-1)==1 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)==0 )
    M(i,j)=0;

elseif ( M(i,j-1)==0 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)==0)
    M(i,j)=1;

elseif ( M(i,j-1)==1 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)~=0 )
    M(i,j)=1;
end
end
end

else
    %*****%
    %    Para el caso negativo    %
    %*****%
    for i=1:l
        derivada2j=derivada2(i);
        if derivada2j==1
            M(i,1)=1;
        elseif derivada2j==0
            M(i,1)=0;
        end

        for j=2:n
            if (I(i,j-1)>=10 && rem(I(i,j-1),2)==0)
                M(i,j)=1;

            elseif (I(i,j-1)>=10 && rem(I(i,j-1),2)~=0)
                M(i,j)=0;

            elseif ( M(i,j-1)==0 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)~=0 )
                M(i,j)=1;

            elseif ( M(i,j-1)==1 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)==0 )

```

```

        M(i,j)=1;

        elseif ( M(i,j-1)==0 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)==0)
            M(i,j)=0;

        elseif ( M(i,j-1)==1 && I(i,j-1)<10 && rem(I(i,j-1),2)~=0 )
            M(i,j)=0;
        end
    end
end
end

%Guardando las sucesiones min-Max
%En las filas impares digo de que tipo
%es MAX o Min, y la filas pares el itinerario
%*****

sucesionesMm=zeros(2*l,n);
j=0;
for i=1:2:2*l-1
    j=j+1;
    sucesionesMm(i,:)=I(j,:);
    sucesionesMm(i+1,:)=M(j,:);
end

%*****
%      SIMBOLOS MALOS      %
%*****

Bad=zeros(2*l,2*(l+1));

for i=1:l
    z=zeros(1,2*(l+1));
    for j=2:2:2*i
        z(1,j)=j/2+10;
        z(1,j-1)=j/2;
    end
end

```

```

        z(1,2*i+1)=i+10;
    end
    for j=2*(i+1):2:2*(l+1)
        z(1,j)=j/2;
        z(1,j-1)=j/2+9;
    end
    Bad(2*i-1,:)=z;
end

for k=2:2:2*l;
    for j=1:k
        Bad(k,j)=1;
    end
    for j=k+1:2*(l+1)
        Bad(k,j)=0;
    end
end

%+++++
%      Algoritmo de caculo de entropia      %
% +++++

%Para imprimir resultados

% fprintf(' \n \n iteracion      lap      Entropía de f')
% fprintf(' \n *****\n')

K=zeros(2*l,1*(n));

for m=1:n;                % m sobre que iterada estoy

    for i=2:2:2*l          %i/2 En que conjunto simbolos malos me muevo
        for k=2:2:2*l      % k/2 Que itinerario reviso
            for j=1:2*(l+1) % j se mueve sobre los simbolos malos

                if sucesionesMm(k,m)==Bad(i,j)&&sucesionesMm(k-1,m)==Bad(i-1,j)

```

```

        K(i,m*1-(1-k/2))=m;      %en que posicion estoy
        K(i-1,m*1-(1-k/2))=k/2;  % relativo a que itinerario
    end

    end

    end

    end

end

%+++++Primer Iteracion+++++
%          Primera Iteracion          %
%+++++

ss=zeros(1,n+1);
SS=zeros(1,n);
S=zeros(1,n);
s=zeros(1,n+1);
ss(:,1)=1;
s(1)=1;

for i=1:l %i entrada de la columna m que se quiere modificar S_m^i

    for k=1:l % k Columnas involucradas de $$$ en la iteracion m
        if K(2*i-1,k)~=0
            SS(i,1)=SS(i,1)+ss(K(2*i-1,k),1-K(2*i,k)+1);
        end
    end

    SS(i,1)=2*SS(i,1);
    S(1)=S(1)+SS(i,1);

    suma=1+l;
    ss(i,2)=suma-SS(i,1);
    s(2)=1*(suma)-S(1);
end

lap=(s(2)+S(1))/l;

```

```

h=log(lap);
hh=h;

%fprintf('    %g  ----->    %g  ---->%g \n', 1,lap, h)

%+++++
%      %Ciclo principal      %
%+++++

v=2;
e=1;
while v<=n && e>ep
    for i=1:l      %i entrada de la columna m que se quiere modificar S_m^i

        for k=1:l*v      % k Columnas involucradas de $$$ en la iteracion m
            if K(2*i-1,k)~=0
                SS(i,v)=SS(i,v)+ss(K(2*i-1,k),v-K(2*i,k)+1);
            end
        end
        SS(i,v)=2*SS(i,v);
        S(v)=S(v)+SS(i,v);

        suma=0;
        for j=1:v
            suma=suma+s(j);
        end
        suma=1+suma;
        ss(i,v+1)=suma-SS(i,v);
        s(v+1)=1*(suma)-S(v);
    end
    lap=(s(v+1)+S(v))/l;
    h=(1/v)*log(lap);

    %*****
    %   CRITERIO DE PARO           %
    % Comparando cada 10 iteraciones %
    %*****

    if rem(v,10)==0

```

```
        e=abs(hh-h);  
        if abs(hh-h)>ep  
            hh=h;  
        end  
    end  
  
    %fprintf('    %g ----->    %g ----->    %g \n', v,lap,h)  
    v=v+1;  
end  
end
```

Bibliografía

- [AG] J. M. Amigó y A. Giménez (2014). *A simplified Algorithm for the Topological Entropy of Multimodal Maps*. Entropy 2014, 16, 627-644.
- [ALM] L. Alsedà, J. Llibre y M. Misiurewicz. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One (second edition)*.
- [B] A. Beardon. (1991) *Iteration of Rational Functions*. Springer Verlag, New York.
- [BC] L. S. Block y W.A. Coppel. (1991). *Dynamics in One Dimension*. Springer Verlag, New York.
- [BC] X. Buff y A. Cheritat. (2010). *Quadratic Julia sets with positive area*. Proceeding of the International Congress of Mathematicians. Hyderabad, India.
- [CG] L. Carleson y T. Gamelin. (1993). *Complex Dynamics*. Springer Verlag, New York.
- [D] R. Devaney. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems theory and experiment*. Springer Verlag, New York.
- [DH1] A. Douady y J. Hubbard. (1985). *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication Mathématiques d'Orsay. **84-02**; (1984); **85-04**.
- [dMvS] W. de Melo and S. van Strien (1993). *One-dimensional dynamics*, Springer, Berlin.
- [KS] M. Kot, W.M. Schaffer (1984). *The effects of seasonality on discrete models of population growth*. Theor. Pop. Biol, **26**, 340-360.
- [MT] R. S. MacKay and C. Tresser, (1987). *Boundary of topological chaos for bimodal maps of the interval*, J. London Math. Soc., **2**(37), 164-189.

- [MiT] J. Milnor and C. Tresser, (2000). *On entropy and monotonicity for real cubic maps*, Commun. Math Phys. **209**, 123-178.
- [P] D. Pole. (20061). *Linear Algebra, A Modern Introduction (Second Edition)*. Thomson, Belmont, USA.
- [R] A. Radulescu, (2007). *The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (1), 139-175.
- [R1] A. Radulescu, (2005). *The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials*. Ph.D. thesis, Stony Brook University.
- [Y] Y. Yomdin, (1987). *Volume growth and entropy*. Isr. J. Math. **57**, 285-300.

ENTROPÍA TOPOLÓGICA DE FUNCIONES MULTIMODALES

ORIGINALITY REPORT

13%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	ri.ujat.mx Internet	1467 words — 6%
2	revistas.ujat.mx Internet	1150 words — 5%
3	docplayer.es Internet	138 words — 1%
4	es.scribd.com Internet	78 words — < 1%
5	alianzafraternal.org Internet	68 words — < 1%
6	smm.org.mx Internet	59 words — < 1%
7	vdoc.pub Internet	27 words — < 1%
8	vsip.info Internet	22 words — < 1%
9	qdoc.tips Internet	20 words — < 1%
10	uvadoc.uva.es Internet	20 words — < 1%

11	leeydescarga.com Internet	16 words — < 1%
12	opac.pucv.cl Internet	13 words — < 1%
13	www.slideshare.net Internet	12 words — < 1%
14	pdffox.com Internet	11 words — < 1%
15	José M. Amigó, Ángel Giménez. "Formulas for the topological entropy of multimodal maps based on min-max symbols", Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 2015 Crossref	10 words — < 1%
16	doczz.com.br Internet	10 words — < 1%
17	doku.pub Internet	10 words — < 1%
18	hdl.handle.net Internet	10 words — < 1%
19	livrosdeamor.com.br Internet	10 words — < 1%
20	www.itk.ilstu.edu Internet	10 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES ON

EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE SOURCES

EXCLUDE MATCHES

OFF

< 10 WORDS