



40

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

CICLOS LÍMITE EN UNA CADENA TRÓFICA DE TERCER
NIVEL CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y RESPUESTAS
FUNCIONALES DE LOTKA-VOLTERRA Y HOLLING TIPO II.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A:
RAMÓN EDUARDO CHAN LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VÍCTOR CASTELLANOS VARGAS

CUNDUACÁN, TABASCO, MÉXICO.

AGOSTO, 2016



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

Dirección



25 de julio de 2016

Lic. Ramón Eduardo Chan López
Pasante de la Maestría en Ciencias
en Matemáticas Aplicadas
P r e s e n t e.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "CICLOS LÍMITE EN UNA CADENA TRÓFICA DE TERCER NIVEL CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y RESPUESTAS FUNCIONALES DE LOTKA-VOLTERRA Y HOLLING TIPO II" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e.


Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director



**DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS**

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JLSC/emt

Miembro CUMEX desde 2008

**Consortio de
Universidades
Mexicanas**
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km. 1, Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6702

Carta Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría denominada *"Ciclos límite en una cadena trófica de tercer nivel con crecimiento logístico y respuestas funcionales de Lotka-Volterra y Holling tipo II"*, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 25 días del mes Julio del año 2016.

Autorizó



Ramón Eduardo Chan López

112A15005

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Para mi esposa Karla y mi hijo Gesù

Agradecimientos

Al Dr. Víctor Castellanos, porque bajo su dirección adopté y desarrollé el tema expuesto en este trabajo, sobre todo por llevarme a explorar uno de los temas más apasionantes en los que he trabajado, dirigiéndome con esa perspicacia y notable inteligencia que caracteriza a uno de los mejores mentores de la modelación matemática que he conocido. También al Dr. Gerardo Delgadillo por su preciada colaboración y sus valiosos apoyos como mi tutor en el programa de maestría. De manera muy especial al Dr. Jaume Llibre por una memorable reunión que nutrió de manera significativa mi interés en los sistemas dinámicos y por orientarme en este camino intrigante, sin duda, elementos importantes en mi formación como profesional en las Ciencias Matemáticas. A los doctores Manuel Falconi, Justino Alavez, Gamaliel Blé y José Leonardo Sáenz por dedicar parte de su tiempo a leer este manuscrito y proporcionarme sustanciosas observaciones.

A mi madre, por brindarme su apoyo incondicional incluso en los momentos más difíciles, por su amor y su confianza, factores importantes para alcanzar este objetivo.

A mis hermanas, por regalarme la dicha de una familia hermosa con la cual compartir mis logros.

A mi tío Ignacio, por todos sus apoyos y consejos personales, por apoyarme en las circunstancias más adversas de mi vida como profesional.

A la familia Torres Lázaro, por haberme adoptado como si fuera uno de sus miembros y con una hospitalidad entrañable.

A mi amigo y colega, el *Dr. José Alberto Martín Ruíz*, por leer el documento y realizar observaciones muy valiosas para mejorar la versión final de este

trabajo y por los años de sana convivencia en los que siempre ha compartido conmigo sus inquietudes en la ciencia.

Al grupo de profesores de la Maestría en Ciencias en Matemáticas Aplicadas por la formación que me proporcionaron, a mis compañeros de curso y a todos aquellos que de alguna u otra forma contribuyeron a que mi estancia en el posgrado fuese una experiencia agradable, son tantos y aunque omito sus nombres, al leer estas líneas sabrán de quiénes hablo.

A la universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), en particular a la División Académica de Ciencias Básicas (DACB), por brindarme el espacio para adquirir y desarrollar un perfil académico de excelencia.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) la beca que me fue otorgada durante mis estudios de maestría, apoyo que fue necesario para destinar el tiempo que este proyecto exige.

Índice general

Agradecimientos	IV
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Sistemas lineales	1
1.1.1. El operador exponencial de una matriz	2
1.1.2. Teorema fundamental de los sistemas lineales	8
1.1.3. Clasificación cualitativa de sistemas lineales planos	10
1.2. Análisis local de sistemas no lineales	18
1.2.1. Linealización y teorema de Hartman-Grobman	20
1.2.2. Teoría de la variedad central	23
1.2.3. Formas normales	27
2. Órbitas periódicas	36
2.1. Bifurcación de Hopf	36
2.1.1. Primer coeficiente de Lyapunov: caso bidimensional	40
2.1.2. Primer coeficiente de Lyapunov: caso n-dimensional	41
2.1.3. Bifurcación de Hopf en un sistema de control	42
3. Cadenas tróficas	50
3.1. Modelos poblacionales para una sola especie	50
3.2. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra	52
3.3. Respuestas funcionales	53
3.4. Modelo de una cadena trófica de tercer nivel	56
3.4.1. Análisis ecológico de los equilibrios	57
3.4.2. La cadena en ausencia del superdepredador	59
	VI

3.4.3. Bifurcación de Hopf en el equilibrio de coexistencia	63
3.4.4. Primer coeficiente de Lyapunov	66
Conclusiones	75
Apéndice A	76
Apéndice B	78
Bibliografía	79

Índice de figuras

1.1. Valores propios reales, distintos y con el mismo signo.	13
1.2. Valores propios reales, distintos y con diferente signo (sillas).	14
1.3. Centros.	15
1.4. Valores propios complejos con parte real distinta de cero.	16
1.5. Representación del teorema de la variedad central.	25
2.1. Bifurcación de Hopf supercrítica.	38
2.2. Bifurcación de Hopf subcrítica.	39
2.3. Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 100$	48
2.4. Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 100$	48
2.5. Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 1000$	49
2.6. Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 1000$	49
3.1. Gráficas de las respuestas funcionales de Holling.	55
3.2. Simulación numérica de un foco estable.	62
3.3. Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 500$	70
3.4. Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 500$	71
3.5. Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 2000$	71
3.6. Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 500$	72

Introducción

La *Biomatemática* es un área fértil para la investigación interdisciplinaria y en ella se modelan los diferentes procesos biológicos mediante técnicas matemáticas de diversa complejidad. Entre las ramas de esta área de investigación está la dinámica de poblaciones, en la actualidad conocida como *Ecología Matemática*. Para simular los distintos tipos de interacciones entre las especies, en la modelación matemática se hace uso de la teoría de sistemas dinámicos, con el propósito de esclarecer cuáles son las leyes que subyacen en ciertos mecanismos biológicos, mismos que son considerados por los ecólogos como importantes en la organización y preservación de los ecosistemas.

En general, los estados de un sistema dinámico para un modelo de interacción entre un cierto número de especies quedan definidos mediante un vector $x(t)$, donde $x_i(t)$ denota el tamaño de la población de la i -ésima especie al tiempo t . Los cambios de $x(t)$ quedan determinados por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1)$$

bajo la hipótesis de que los cambios en $x(t)$ se dan continuamente. La forma específica del campo vectorial $f(x)$ depende del tipo de interacción que se desea modelar y sus consecuencias se describen a partir del análisis de la dinámica del sistema. La información que se requiere para plantear el modelo se puede extraer de los trabajos que los ecólogos han desarrollado sobre una teoría de la organización de las comunidades, en la que por supuesto, es indispensable entender cuáles son las causas que originan los diferentes patrones de diversidad entre las especies que las conforman. Entre las hipótesis para explicar esto se encuentran la depredación y la competencia. La primera propone que, la depredación selectiva sobre los competidores dominantes mantiene una diversidad local al evitar que alguna especie monopolice los recursos. Por otra parte, la segunda afirma que en un medio ambiente estable la alta diversidad es causada por la competencia, misma que

influye directamente sobre la diversificación de los nichos. De modo que las interacciones depredador-presa y competencia han recibido especial atención no sólo de parte de los ecólogos, sino también de los matemáticos aplicados que trabajan en la modelación de múltiples clases de fenómenos.

Por otro lado, es bien conocido que, en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, es de suma importancia el estudio de la dinámica que describen las trayectorias solución de (1), en particular las órbitas periódicas y dentro de ellas, los ciclos límite. Demostrar ⁶ que una órbita periódica es un ciclo límite regularmente es una tarea complicada, así que para abordar este problema existen algunas técnicas, dentro de ellas la más conocida es la aplicación de primer retorno de Poincaré, aunque no siempre resulta fácil de utilizar. De igual forma, si se tiene un sistema diferencial que modela algún fenómeno, esto es

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu) \quad (2)$$

donde μ es un parámetro producto de la modelación, entonces resulta de particular interés, estudiar la dinámica que describen las trayectorias solución del campo vectorial que define el sistema anterior, ello cuando el parámetro involucrado es variado de alguna forma. Bajo tal situación, si se desea verificar la existencia de ciclos límite en (2), es conveniente probarlo mediante la técnica de bifurcación respecto al parámetro y un teorema muy conocido en ese sentido es el teorema de bifurcación de Poincaré–Andronov–Hopf. Al igual que en los sistemas diferenciales en el plano, los sistemas de dimensión superior, requieren del cálculo del primer coeficiente Lyapunov para demostrar la existencia de una bifurcación de Hopf y en [Kuznetsov 2004], se proporciona un resultado importante en este sentido.

En el caso de los modelos de cadenas alimentarias, los ciclos límite son de suma importancia y de acuerdo a estudios ecológicos, en la naturaleza los únicos ciclos que existen y perduran biológicamente son los ¹⁹ llamados ecológicamente estables, lo cual significa que deben ser insensibles a perturbaciones de agentes externos [May 2001]. En consecuencia, un ciclo ecológicamente estable debe ser aislado y por lo tanto, matemáticamente debe corresponder a un ciclo límite en los sistemas tróficos [Coleman 1983]. Así que, la existencia

¹ de al menos un ciclo límite estable da una explicación satisfactoria para comunidades en las cuales se ha observado que las poblaciones oscilan en forma periódica [Olivares 2011], es decir, independiente de agentes externos.

En este trabajo presentamos un análisis local, usando herramientas analíticas y numéricas para describir la dinámica de un modelo de cadena trófica de tercer nivel o sistema tritrófico. El modelo consiste de tres niveles: planta hospedera(presa), herbívoro(depredador) y carnívoro(superdepredador). A este tipo de modelos los identificaremos como presa–depredador–superdepredador. Aquí, el depredador consume a la presa y el superdepredador se alimenta de depredadores. El modelo que analizamos específicamente es aquel donde la función de crecimiento de la densidad poblacional de presas es logístico, el depredador tiene respuesta funcional de Lotka-Volterra y el superdepredador tiene respuesta funcional Holling tipo II con una tasa de mortandad limitada por el consumo de depredadores (esquema de Leslie–Gower). El modelo se estudiará bajo el supuesto de que el tiempo y los tamaños poblacionales de las tres especies varían en forma continua, no haciéndose distinción por clases de edad, ni por sexo; así mismo, las variables que representan a las densidades poblacionales y los parámetros del sistema se asumen de manera determinista considerando que las tres especies están distribuidas uniformemente, que no están afectadas por fenómenos estacionales o abióticos y que en las tasas de crecimiento no hay retardo ni influencia de generaciones anteriores.

La estructura del trabajo se divide en tres capítulos, en el primero se abordan los conceptos básicos de la teoría local de sistemas dinámicos continuos; en el segundo capítulo se describe el teorema de la bifurcación de Hopf en el enfoque de las formas normales para el caso plano y se muestra la respectiva expresión del primer coeficiente de Lyapunov, por último se presenta un teorema con el primer coeficiente de Lyapunov para sistemas de dimensión superior, ilustrando su uso en un sistema de control retroalimentado. Finalmente, ² en el capítulo tres se presentan los resultados principales de este trabajo, los cuales son:

- (1) La interpretación ecológica de los equilibrios del sistema,
- (2) El análisis del caso límite donde el superdepredador está ausente,

- (3) Se garantiza la existencia de un punto de equilibrio de coexistencia de las tres especies en el octante positivo y se demuestra, mediante el primer coeficiente de Lyapunov, la existencia de un ciclo límite que bifurca del punto de equilibrio no trivial.

Adicionalmente cabe mencionar que, en esta línea de investigación existen resultados concretos obtenidos por G. Blé, V. Castellanos y J. Llibre [Blé 2016]. Ellos analizaron un modelo de sistema tritrófico donde la presa se reproduce linealmente, el depredador posee respuesta funcional de Holling tipo III y el superdepredador posee respuesta funcional de Holling tipo II.

Capítulo 1

Preliminares

² En este capítulo recordaremos algunos resultados que desempeñan un papel importante en el análisis y desarrollo del trabajo que presentamos en capítulos posteriores. Para mayores detalles, los temas abordados en este capítulo se encuentran en [Perko 2001] y [Chicone 2006].

1.1. Sistemas lineales

El camino más común para definir un sistema dinámico continuo es mediante las *ecuaciones diferenciales*. Supongamos que el espacio de estados de un sistema es $X = \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si el sistema está definido sobre una variedad, estas pueden ser consideradas como coordenadas locales sobre ella. ¹⁵ Muy a menudo la ley de evolución de un sistema está dada implícitamente, en términos de las velocidades $\dot{x}_i$ como funciones de las coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, esto es:

$$\stackrel{12}{x_i} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

o en la forma vectorial

$$\dot{x} = f(x),$$

¹² donde la función vectorial $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se supone lo suficientemente diferenciable (suave). La función en el lado derecho de esta última ecuación define un *campo vectorial*, el cual asigna un vector $f(x)$ para cada punto x . La última ecuación representa un sistema de n

ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

Bajo condiciones muy generales, las ecuaciones diferenciales definen sistemas dinámicos (suaves) en tiempo continuo. Algunos tipos de ecuaciones diferenciales pueden resolverse en forma analítica (en términos de funciones elementales). Sin embargo, para lados derechos suaves, las soluciones están garantizadas para existir de acuerdo a un teorema de existencia y unicidad de las soluciones, mismo que abordaremos para sistemas lineales y luego para el caso no lineal.

A saber, el problema fundamental en ecuaciones diferenciales consiste en describir la evolución del sistema para cada estado inicial, en ese sentido, la estrategia de resolver la ecuación diferencial en forma analítica nos daría la descripción exacta de la evolución del sistema, pero desafortunadamente este método no siempre funciona, debido a que en una gran cantidad de ecuaciones diferenciales la solución analítica explícita es imposible de obtener. Otra opción es resolver las ecuaciones en forma numérica. Además existen métodos geométricos que se centran en el estudio del flujo de una ecuación diferencial, en otras palabras, si no se puede determinar explícitamente la parametrización de la curva solución que al tiempo t pasa por la condición inicial x_0 con velocidad $f(x_0)$ (resolver el problema de Cauchy), procedemos a dar valores a las trayectorias para saber de dónde vienen y a dónde van en tiempos muy grandes (resolver el problema en el enfoque cualitativo de Poincaré). En lo que sigue de este capítulo daremos una idea general sobre el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.1.1. El operador exponencial de una matriz

Para definir la exponencial de un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es necesario definir el concepto de convergencia en el espacio lineal $L(\mathbb{R}^n)$ de los operadores lineales en $\mathbb{R}^n$. Esto podemos hacerlo usando la norma de un operador T definida por

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|$$

donde $|x|$ denota la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$, esto es

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La norma de un operador tiene todas las propiedades usuales de una norma, así, para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$, la norma satisface que

- (a) $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$,
- (b) $\|kT\| = |k|\|T\|$ con $k \in \mathbb{R}$,
- (c) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que si $T \in L(\mathbb{R}^n)$ está representado por la matriz A con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $\|A\| \leq \sqrt{n\ell}$, donde ℓ es la longitud máxima de las filas de A .

La convergencia de una sucesión de operadores $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ está definida en términos de la norma de un operador de la siguiente manera:

Definición 1.1.1 Una sucesión de operadores lineales $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ se dice que converge a un operador lineal $T \in L(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \rightarrow \infty$, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $k \geq N$, $\|T - T_k\| < \epsilon$.

Lema 1.1.1 Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$,

- (1) $|T(x)| \leq \|T\||x|$
- (2) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$
- (3) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. (1) se cumple para $x = 0$. Para $x \neq 0$ definimos el vector unitario $y = \frac{x}{|x|}$.
20 Entonces, de la definición de la norma de un operador se tiene que

$$\|T\| \geq |T(y)| = \frac{1}{|x|} |T(x)|.$$

(2) Para $|x| \leq 1$, se sigue de (1) que

$$\begin{aligned} \|T(S(x))\| &\leq \|T\| |S(x)| \\ &\leq \|T\| \|S\| |x| \\ &\leq \|T\| \|S\| |x|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|TS\| = \max_{|x| \leq 1} |TS(x)| \leq \|T\| \|S\|$$

y (3) es una consecuencia inmediata de (2). $\square$

Teorema 1.1.1 Dado $T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $t_0 > 0$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $|t| \leq t_0$.

Demostración. Sea $\|T\| = a$. Del lema anterior se sigue que para $|t| \leq t_0$,

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}.$$

Pero sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}.$$

Y por el criterio de Weierstrass se sigue que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $|t| \leq t_0$. $\square$

La exponencial del operador lineal T está entonces definida por la serie absolutamente convergente

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Se sigue de las propiedades de los límites que e^T es un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ y como en la prueba del teorema anterior se satisface que $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

Ya que nuestro interés es encontrar la solución de sistemas lineales de la forma

$$\dot{x} = Ax,$$

asumiremos que la transformación lineal T en $\mathbb{R}^n$ está representada por la matriz A de $n \times n$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y así definir la exponencial e^{At} .

Definición 1.1.2 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces, para $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Para una matriz A de $n \times n$, e^{At} es una matriz de $n \times n$, la cual puede ser calculada en términos de los valores y los vectores propios de la matriz A . Como en la prueba del teorema anterior, también se satisface que $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$, donde $\|A\| = \|T\|$ y T es la transformación lineal $T(x) = Ax$.

Lo siguiente es establecer algunas propiedades básicas de la transformación lineal e^{At} con el propósito de facilitar el cálculo de e^T o de la matriz e^A de $n \times n$.

Proposición 1.1.1 Si P y T son transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ y $S = PTP^{-1}$, entonces $e^S = Pe^TP^{-1}$.

Demostración. Se sigue de la definición de e^S que

$$e^S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1} = Pe^TP^{-1}.$$

□

El siguiente resultado se sigue directamente de la proposición 1.1.1 y de la definición 1.1.2.

Corolario 1.1.1 Si $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$ entonces $e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$.

Proposición 1.1.2 Si S y T son dos transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ las cuales conmutan, esto es, que satisfacen $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^S e^T$.

Demostración. Si $ST = TS$, entonces por el teorema del binomio

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!}.$$

Por lo tanto,

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T.$$

□

Hemos usado el hecho de que el producto de dos series absolutamente convergentes es una serie absolutamente convergente, la cual está dada por su producto de Cauchy. Colocando $S = -T$ en la proposición 1.1.2, obtenemos

Corolario 1.1.2 Si T es una transformación lineal en $\mathbb{R}^n$, la transformación lineal inversa de e^T está dada por $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Corolario 1.1.3 Si la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Demostración. Si $\lambda = a + ib$, se sigue por inducción que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

donde Re e Im denotan la parte real e imaginaria del número complejo λ , respectivamente.

Así

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^\lambda) & -\operatorname{Im}(e^\lambda) \\ \operatorname{Im}(e^\lambda) & \operatorname{Re}(e^\lambda) \end{pmatrix} \\ &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Nótese que si $a = 0$ en el corolario 1.1.3, entonces e^A es una simple rotación a través de b radianes.

Corolario 1.1.4 Si la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Escribimos la matriz A como $A = aI + B$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego aI conmuta con B y por la proposición 1.1.2,

$$e^a = e^{aI} e^B = e^a e^B.$$

De la definición de la exponencial de una matriz se tiene que

$$e^B = I + B + B^2/2! + \cdots = I + B$$

ya que del cálculo directo $B^2 = B^3 = \cdots = 0$. $\square$

Con este último resultado es posible calcular e^{At} para cualquier matriz A de 2×2 .

1.1.2. Teorema fundamental de los sistemas lineales

En esta sección estableceremos el hecho fundamental de que, para una matriz A de dimensión $n \times n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

tiene una única solución para todo $t \in \mathbb{R}$, la cual está dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 \tag{1.2}$$

Nótese la similitud que hay entre la solución (1.2) y la solución $x(t) = e^{at}x_0$ del caso escalar $\dot{x} = ax$ con condición inicial $x(0) = x_0$.

Con la finalidad de probar este teorema, primero calcularemos la derivada respecto al tiempo de la función exponencial e^{At} usando el hecho de que dos procesos límite pueden ser intercambiados si uno de ellos converge uniformemente, ver [Rudin 1964] página 149.

Lema 1.1.2 *Dada una matriz cuadrada A , entonces*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Demostración. Como la matriz A conmuta con ella misma, se sigue de la proposición

(1.1.2) y la definición (1.1.2) de la sección (1.1.1) que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\
 &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
 &= Ae^{At}.
 \end{aligned}$$

□

La última igualdad es cierta, ya que las series de e^{Ah} convergen uniformemente para $|h| \leq 1$ y por lo tanto podemos intercambiar los límites.

Teorema 1.1.2 (Teorema fundamental de los sistemas lineales) *Dada una matriz A de $n \times n$. Entonces, para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

tiene una única solución dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (1.4)$$

Demostración. Por el lema 1.1.2, si $x(t) = e^{At}x_0$, entonces

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, $x(0) = Ix_0 = x_0$. Así, $x(t) = e^{At}x_0$ es una solución. Para ver que esta es la única solución, sea $x(t)$ cualquier solución al problema de valores iniciales (1.3)

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Entonces, del lema (1.1.2) y del hecho de que $x(t)$ es una solución de (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, ya que e^{-At} y A conmutan. Así, $y(t)$ es una constante. Colocando $t = 0$ se tiene que $y(t) = x_0$ y por lo tanto cualquier solución al problema de valores iniciales (1.3) está dado por $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$. Esto último completa la demostración del teorema. $\square$

1.1.3. Clasificación cualitativa de sistemas lineales planos

Para el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

El caracter general de sus diferentes retratos fase puede ser obtenido a través de sus soluciones. Podría pensarse que un enfoque más fácil de obtener las trayectorias del retrato fase sería mediante la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1 + dx_2}{ax_1 + bx_2},$$

pero los métodos estándar para resolver estas ecuaciones conducen a relaciones implícitas entre x e y que son difíciles de interpretar geoméricamente. Si el sistema (1.5) es la aproximación lineal cerca del origen para un sistema no lineal, entonces sus retratos fase son aproximados a los retratos fase del sistema no lineal. La linealización es una herramienta importante en el análisis del plano fase. Los patrones de los retratos fase se dividen en tres clases principales dependiendo de los valores propios, que son las soluciones λ_1, λ_2 de la ecuación característica de (1.5):

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (1.6)$$

donde $\tau = a + d$ y $\Delta = ad - bc \neq 0$ son la traza y el determinante de la matriz asociada al sistema (1.5), respectivamente. Las tres clases son

- (A) λ_1, λ_2 reales, distintos y con el mismo signo;
- (B) λ_1, λ_2 reales, distintos y con signo opuesto;
- (C) λ_1, λ_2 complejos conjugados.

Estos casos los trataremos por separado.

(A) Valores propios reales, distintos y con el mismo signo.

Denotaremos al mayor de los valores propios como λ_1 , esto es

$$\lambda_2 < \lambda_1. \quad (1.7)$$

En términos de las componentes la solución general de (1.5) en este caso es

$$x_1(t) = C_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 r_2 e^{\lambda_2 t}, \quad x_2(t) = C_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 s_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.8)$$

donde C_1, C_2 son constantes arbitrarias y r_1, s_1 y r_2, s_2 son constantes que se obtienen al buscar los vectores propios asociados a cada valor propio, cuando $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$ respectivamente. De (1.8) se obtiene además que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{C_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 s_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 r_2 e^{\lambda_2 t}} \quad (1.9)$$

Supongamos en primer lugar que λ_1 y λ_2 son negativos, esto es

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0. \quad (1.10)$$

de (1.10) y (1.8), a lo largo de cualquier trayectoria del retrato fase

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ e } y \text{ se aproximan al origen cuando } t \rightarrow \infty, \\ x \text{ e } y \text{ se aproximan a infinito cuando } t \rightarrow -\infty. \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

También hay cuatro trayectorias fase radiales, que se encuentran a lo largo del siguiente par de líneas rectas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } C_2 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{s_1}{r_1}; \\ \text{Si } C_1 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{s_2}{r_2}. \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

De (1.9), los términos dominantes involucran a $e^{\lambda_1 t}$ para t grande y positivo, y $e^{\lambda_2 t}$ para t grande y negativo, con los que obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{s_1}{r_1} \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \\ \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{s_2}{r_2} \text{ cuando } t \rightarrow -\infty. \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

Junto con (1.11) y (1.12), lo anterior demuestra que todas las trayectorias de fase son tangentes a $x_2 = (s_1/r_1)x_1$ en el origen, y se aproximan a la dirección $x_2 = (s_2/r_2)x_1$ en el infinito. Las soluciones radiales (1.12) son llamadas las asíntotas de la familia de trayectorias de fase. Estas características pueden verse en la Figura 1.1 (a). Si los valores propios λ_1, λ_2 son ambos positivos, con $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el retrato fase tiene características similares a la Figura 1.1 (b), pero todas las trayectorias de fase están dirigidas hacia el exterior, partiendo del origen hacia el infinito. Estos patrones muestran lo que se denomina un nodo. La Figura 1.1 (a) muestra un nodo estable y la Figura 1.1 (b) un nodo inestable. Las condiciones sobre los coeficientes que corresponden a estos casos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nodo estable: } D = \tau^2 - 4\Delta > 0, \Delta > 0, \tau < 0; \\ \text{Nodo inestable: } D = \tau^2 - 4\Delta > 0, \Delta > 0, \tau > 0; \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

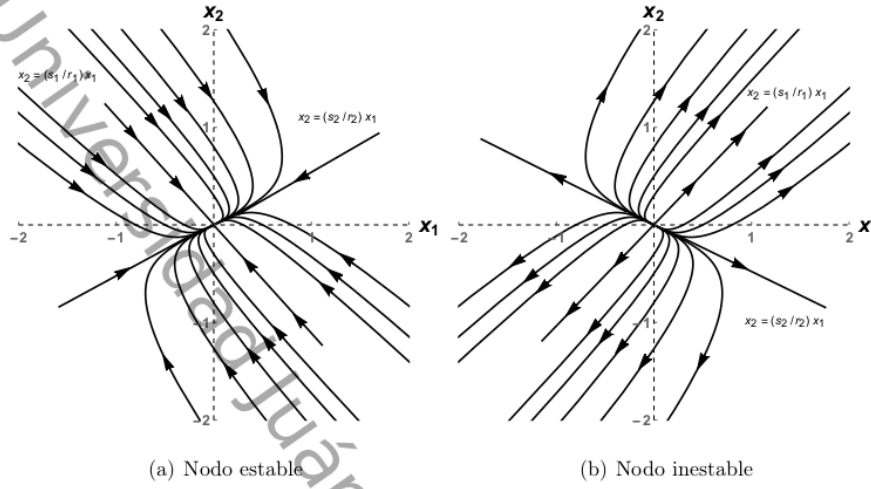


Figura 1.1: Valores propios reales, distintos y con el mismo signo.

(B) Valores propios reales, distintos y de signo opuesto.

En este caso $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, la solución (1.8) y la expresión (1.9) siguen aplicando. De la misma manera que antes, podemos deducir que cuatro de las trayectorias son líneas rectas que parten desde el origen. De (1.8) puede verse que estas son trayectorias rectas que están a lo largo de $x_2/x_1 = s_2/r_2$, obtenidas al colocar $C_1 = 0$. El otro par de trayectorias en línea recta se van a infinito cuando $t \rightarrow \infty$, como lo hacen el resto de las trayectorias. Además, cualquier trayectoria (excepto las que están a lo largo de $x_2/x_1 = s_2/r_2$) empieza en infinito cuando $t \rightarrow -\infty$.

El patrón geométrico es como una familia de hipérbolas juntas con sus asíntotas, como se ilustra en la siguiente figura:

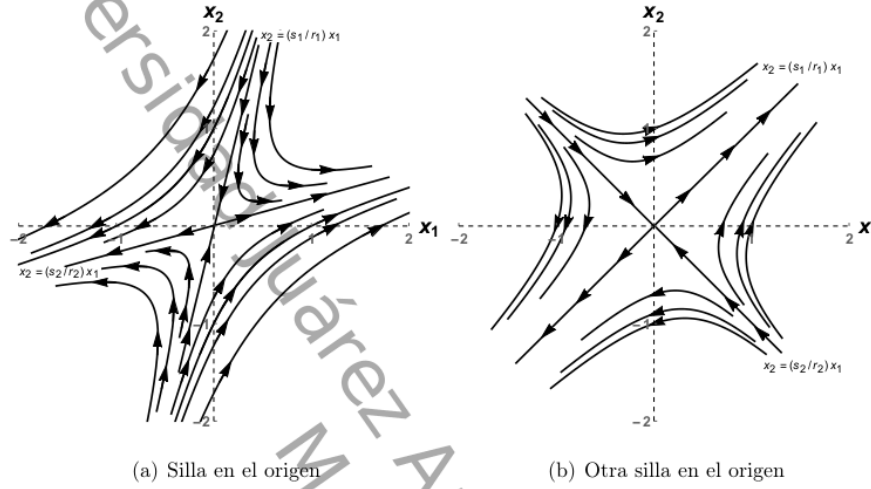


Figura 1.2: Valores propios reales, distintos y con diferente signo (sillas).

33 El punto de equilibrio en el origen es una silla y siempre es inestable. De (1.6), las condiciones sobre los coeficientes de la ecuación característica son

$$\text{Punto silla: } D = \tau^2 - 4\Delta > 0, \Delta < 0, \quad (1.15)$$

(C) Valores propios complejos conjugados.

Los valores propios complejos para matrices con entradas reales se dan como un par raíces complejas conjugadas, esto es

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \text{ con } \alpha, \beta \text{ reales.} \quad (1.16)$$

La solución general de (1.5) en este caso es

$$x(t) = \text{Re} \{ C v e^{(\alpha + i\beta)t} \}. \quad (1.17)$$

Separando por componentes la solución (1.17) obtenemos

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re}\{C r_1 e^{i\beta t}\}, \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re}\{C s_1 e^{i\beta t}\}, \quad (1.18)$$

donde C , r_1 y s_1 son todos complejos en general. Supongamos primero que $\alpha = 0$ y coloquemos C , r_1 y s_1 en su forma polar:

$$C = |C| e^{i\gamma}, \quad r_1 = |r_1| e^{i\rho}, \quad s_1 = |s_1| e^{i\sigma}.$$

Entonces (1.18), con $\alpha = 0$ se transforma en

$$x_1(t) = |C| |r_1| \cos(\beta t + \gamma + \rho), \quad x_2(t) = |C| |s_1| \cos(\beta t + \gamma + \sigma). \quad (1.19)$$

El movimiento representativo del punto $(x_1(t), x_2(t))$ en el plano fase consiste de dos componentes armónicas simples de igual frecuencia angular β , en las direcciones x_1 y x_2 , pero con diferente fase y amplitud. Las trayectorias fase por lo tanto forman una familia geométrica semejante a elipses que, en general, están inclinadas a un ángulo constante respecto a los ejes. Las condiciones algebraicas que corresponden a un centro en el origen son: $\tau > 0$ y $\Delta > 0$. Este caso se puede ilustrar mediante la siguiente gráfica:

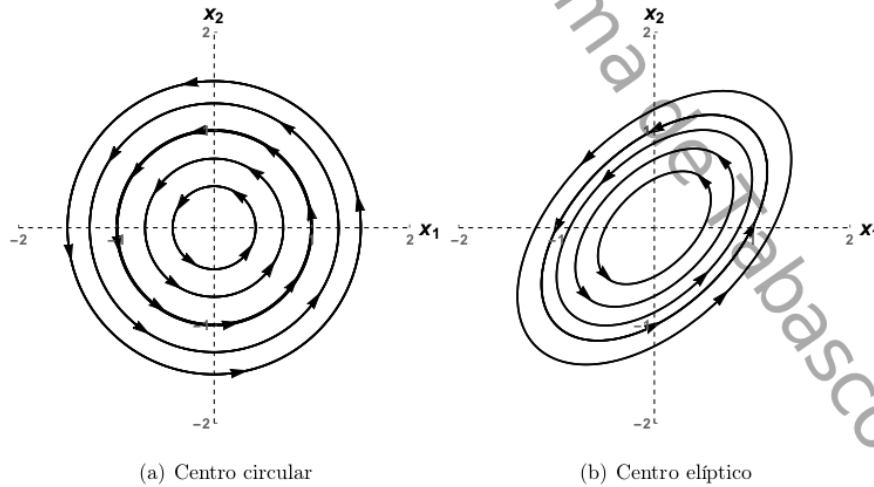


Figura 1.3: Centros.

El comportamiento cualitativo en el caso de los focos es

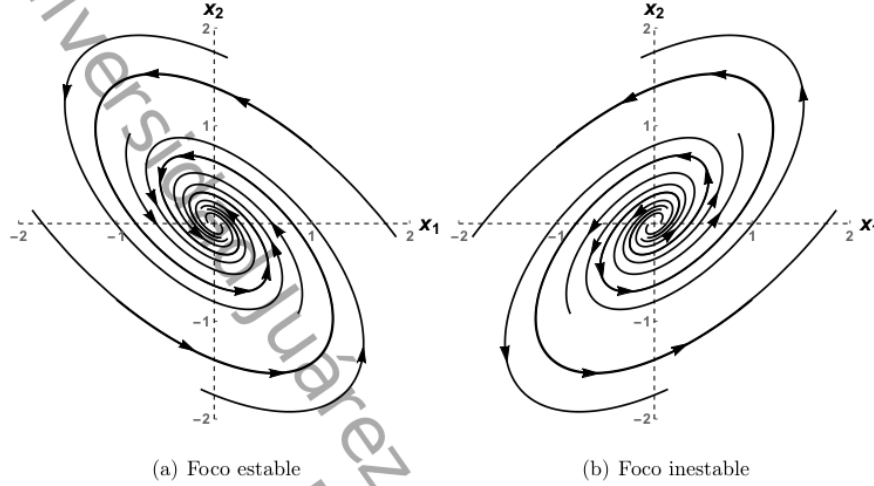


Figura 1.4: Valores propios complejos con parte real distinta de cero.

En este caso, si $\alpha \neq 0$, entonces t incrementa en las ecuaciones (1.18) y las trayectorias en el caso del centro elíptico se modifican por un factor $e^{\alpha t}$. Esto hace que las trayectorias se alejen, y cada elipse se torna en una espiral; una espiral que se cierra si $\alpha < 0$, y una espiral que se expande si $\alpha > 0$ (ver Figura 1.4). El punto de equilibrio es entonces llamado una espiral o foco, estable si $\alpha < 0$, inestable si $\alpha > 0$. Las direcciones de rotación pueden ser a favor de las manecillas del reloj o en contra. Las condiciones algebraicas que corresponden a un foco en el origen son

$$\left. \begin{array}{l} \text{Foco estable: } D = \tau^2 - 4\Delta < 0, \Delta > 0, \tau < 0; \\ \text{Foco inestable: } D = \tau^2 - 4\Delta < 0, \Delta > 0, \tau > 0; \end{array} \right\} \quad (1.20)$$

Adicional a los casos anteriores hay muchos casos de degeneración. Esto ocurre cuando hay algún valor propio repetido, o cuando algún valor propio es cero. Si $\Delta = 0$, entonces los valores propios son $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = 0$. Si $p \neq 0$, por lo que la solución general es

$$x(t) = C_1 v_1 e^{pt} + C_2 v_2.$$

Hay una línea de puntos de equilibrio dados por

$$ax + by = 0$$

Las trayectorias en el retrato fase forman una familia de líneas paralelas. Otro caso especial se presenta si $\Delta = 0$ y $\tau = 0$. Si $D = 0$, entonces los valores propios son reales e iguales con $\lambda = \frac{1}{2}p$. Si $p \neq 0$, se puede demostrar que el equilibrio se transforma en un nodo degenerado, en el cual las dos asíntotas convergen. En la siguiente tabla daremos la clasificación general de los retratos fase en términos de las cantidades τ , Δ y D .

Tipo de retrato fase	$\tau = a + d$	$\Delta = ad - bc$	$D = \tau^2 - 4\Delta$
Silla	$-$	$\Delta < 0$	$D > 0$
Nodo estable	$\tau < 0$	$\Delta > 0$	$D > 0$
Foco estable	$\tau < 0$	$\Delta > 0$	$D < 0$
Nodo inestable	$\tau > 0$	$\Delta > 0$	$D > 0$
Foco inestable	$\tau > 0$	$\Delta > 0$	$D < 0$
Centro	$\tau = 0$	$\Delta > 0$	$D < 0$
Nodo estable degenerado	$\tau < 0$	$\Delta > 0$	$D = 0$
Nodo inestable degenerado	$\tau > 0$	$\Delta > 0$	$D = 0$

Un centro puede ser considerado como un caso degenerado, formando una transición entre un foco estable y uno inestable. La existencia de centros depende de una exacta relación particular entre los coeficientes del sistema, que es $a + d = 0$, por lo que un centro es más bien una frágil característica. Más adelante veremos que, si la aproximación lineal de un sistema no lineal predice un centro, no se puede concluir que el sistema no lineal tiene un centro, en vez de ello el sistema podría tener un foco estable o uno inestable. Lo mismo aplica para todos los casos degenerados.

Si existe una vecindad de un equilibrio tal que todas las órbitas en esa vecindad se acercan al equilibrio, el punto se conoce como un atractor. El término atractor se utiliza para sistemas lineales y no lineales. El nodo estable y el foco estable son atractores. Un atractor con todas las direcciones invertidas en sus trayectorias es un repulsor, el nodo inestable y el foco inestable son repulsores, pero un punto silla no lo es. Los términos atractor

y repulsor también aplican a los ciclos, y a los conjuntos de atracción, tales como los atractores extraños en los que las trayectorias no pueden escapar.

Si los valores propios de la ecuación linealizada tienen parte real diferente de cero, entonces el punto de equilibrio se dice que es hiperbólico. En las siguientes secciones mostraremos que para puntos de equilibrio hiperbólicos los retratos fase de las ecuaciones no lineales y sus linealizaciones son, a nivel local, cualitativamente lo mismo. Focos, nodos y sillars son hiperbólicos, pero un centro no lo es.

1.2. Análisis local de sistemas no lineales

En esta sección primero estableceremos los principios fundamentales del teorema de existencia y unicidad para sistemas diferenciales no lineales autónomos, esto es

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.21)$$

bajo la hipótesis de que $f \in C^1(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El método de las aproximaciones sucesivas de Picard se utiliza para probar este teorema. Este método no sólo permite establecer la existencia y unicidad de la solución para el problema de valores iniciales asociado a (1.21), sino que también nos permite establecer la continuidad y diferenciabilidad de la solución con respecto a las condiciones iniciales y parámetros. También se usa para demostrar el teorema de Hartman-Grobman y por lo tanto el método de Picard es una herramienta básica utilizada en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.2.1 Supongamos que $f \in C(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial (1.21) en un intervalo Λ si $x(t)$ es diferenciable en Λ y si para todo $t \in \Lambda$, $x(t) \in \Omega$ y

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Dado $x_0 \in \Omega$, $x(t)$ es una solución al problema de valores iniciales

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

en un intervalo Λ si $t_0 \in \Lambda$, $x(t_0) = x_0$ y la función $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.21) en el intervalo Λ .

A fin de aplicar el método de aproximaciones sucesivas para establecer la existencia de la solución de (1.21), necesitamos definir el concepto de condición de Lipschitz y mostrar que las funciones de clase C^1 son localmente Lipschitz.

Definición 1.2.2 Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que satisface la condición de Lipschitz en Ω si hay una constante positiva K , tal que para todo $x, y \in \Omega$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

La función f se dice localmente Lipschitz en Ω si para cada punto $x_0 \in \Omega$ existe una vecindad de radio ϵ con centro en x_0 , $N_\epsilon(x_0) \subset \Omega$ y una constante $K_0 > 0$ tal que para todo $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|.$$

Lema 1.2.1 Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, si $f \in C^1(\Omega)$, f es localmente Lipschitz en Ω .

Para la demostración de este lema ver [Perko 2001] página 71.

Definición 1.2.3 Sea V un espacio lineal normado. Entonces una sucesión $\{u_k\} \subset V$ es llamada una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $k, m \geq N$ implica que

$$\|u_k - u_m\| < \epsilon.$$

Además, ⁹ el espacio V es completo si cada sucesión de Cauchy en V converge a un elemento en V .

El siguiente teorema, está demostrado por ejemplo en [Rudin 1964] en la página 151, y establece la completez del espacio lineal normado $C(\Lambda)$ con $\Lambda = [-a, a]$.

Teorema 1.2.1 Para $\Lambda = [-a, a]$, $C(\Lambda)$ es un espacio lineal normado completo.

Teorema 1.2.2 (Teorema fundamental de existencia y unicidad) Sea Ω ⁹ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 , donde asumiremos que $f \in C^1(\Omega)$. Entonces existe $a > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Para la demostración de este teorema importante ver [Perko 2001] en la página 74.

1.2.1. Linealización y teorema de Hartman-Grobman

¹⁴ Un punto $E_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema diferencial no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.22}$$

si se satisface que el campo vectorial definido por $f(x)$ se anula al evaluarlo en este punto, esto es

$$f(E_0) = 0$$

El campo lo podemos expandir en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio como sigue

$$f(x) = Df(E_0) + \frac{1}{2!} D^2 f(E_0)(x, x) + \dots$$

resultando en el primer orden de aproximación la matriz jacobiana asociada al sistema diferencial no lineal (1.22), esto es

$$Df(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(E_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(E_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(E_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(E_0) \end{pmatrix}$$

El sistema lineal

$$\dot{x} = (Df(E_0))x$$

es lo que llamaremos desde ahora linealización del sistema diferencial (1.22) en el punto E_0 . Además, si ningún valor propio de la matriz jacobiana evaluada en E_0 tiene parte real cero, el punto de equilibrio se denomina hiperbólico. Luego, si un punto de equilibrio para (1.22) es hiperbólico, entonces el comportamiento de las soluciones de (1.22) es cualitativamente equivalente al comportamiento de las soluciones de su respectiva linealización. En lo que sigue, no existirá pérdida de generalidad al suponer que el punto de equilibrio es el origen, ya que si este no fuera el caso, siempre podemos realizar un cambio de coordenadas, esto es, una traslación de los ejes

$$x_1 \longrightarrow x_1 - x_1^*, x_2 \longrightarrow x_2 - x_2^*, \dots, x_n \longrightarrow x_n - x_n^*.$$

donde x_i^* con $i = 1, \dots, n$ son las componentes del punto de equilibrio que queremos trasladar al origen. Así, en los resultados donde se requieran cálculos simplificados, se hará un cambio de coordenadas para trasladar los puntos de equilibrio al origen del sistema coordenado.

El teorema de Hartman-Grobman es otro resultado importante en la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias. Este resultado da condiciones para que cerca del punto de equilibrio E_0 , el sistema no lineal (1.22)

$$\dot{x} = f(x)$$

tenga la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad (1.23)$$

con $A = Df(E_0)$. Asumiendo, como ya habíamos mencionado, que el punto de equilibrio lo podemos trasladar al origen mediante una traslación de ejes.

Definición 1.2.4 Dos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas, como (1.22) y (1.23), se dice que son topológicamente equivalentes en una región alrededor del origen si hay un homeomorfismo H , que es un mapeo de un conjunto abierto U que contiene al origen en un conjunto abierto V que también contiene al origen, el cual asigna las trayectorias de (1.22) en U en las trayectorias de (1.23) en V y que además conserva su orientación en el tiempo, esto en el sentido de que si una trayectoria está dirigida de x_1 a x_2 en U , entonces su imagen es dirigida de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si el homeomorfismo preserva la orientación en el tiempo, entonces, los sistemas (1.22) y (1.23) se dice que son topológicamente conjugados en una vecindad del origen.

Definición 1.2.5 (Flujo de una ecuación diferencial) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^1(\Omega)$. Para $x_0 \in \Omega$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución al problema de valores iniciales $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ en su intervalo maximal $I(x_0)$. Entonces, para todo $t \in I(x_0)$, el conjunto de asignaciones ϕ_t definido por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0) \quad (1.24)$$

se llama el flujo de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Nótese que si x_0 es punto de equilibrio de (1.22), entonces $\phi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, x_0 es un punto estacionario del flujo; también se le denomina como cero, punto crítico o punto singular del campo vectorial $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Hartman-Grobman) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen, sea $f \in C^1(\Omega)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (1.22). Supongamos además que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que

contiene al origen a un conjunto abierto V que contiene al origen tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in \Lambda_0$ se cumple que

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0);$$

esto es, H mapea las trayectorias de (1.22) cerca del origen en trayectorias de (1.23) cerca del origen y preserva la parametrización para el tiempo.

¹⁷ El teorema de Hartman-Grobman afirma que es posible deformar de manera continua (alrededor del punto de equilibrio) las trayectorias del sistema no lineal en las trayectorias del sistema linealizado (vía el homeomorfismo). La demostración rigurosa de este teorema se puede revisar en el libro [Chicone 2006], página 309.

1.2.2. Teoría de la variedad central

La teoría de la variedad central que presentaremos en esta sección será para dos casos, primero para campos vectoriales no paramétricos y luego para campos vectoriales dependientes de parámetros.

Caso no paramétrico: Considere el sistema no lineal

$$\dot{\xi} = X(\xi), \tag{1.25}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ y X es un campo vectorial suave. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un invariante local para (1.25), si para $\xi_0 \in S$, la solución $\xi(t)$ de (1.25) con $\xi(0) = \xi_0$ está en S para $|t| < T$ donde $T > 0$. Si siempre podemos hacer que $T \rightarrow \infty$, entonces decimos que S es un invariante local.

Supongamos que $X(0) = 0$ y la jacobiana evaluada en el origen tiene la forma

$$DX(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz de dimensión $k \times k$ con valores propios con parte real cero y B

una matriz de dimensión $(n - k) \times (n - k)$ con valores propios con parte real negativa.

Luego, de manera natural podemos hacer $\xi = (x, y)^T$, con $x \in \mathbb{R}^k$ y $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, obteniendo la siguiente representación para el sistema (1.25),

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y), \\ \dot{y} = By + g(x, y). \end{cases} \quad (1.26)$$

donde $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ y $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$, $f, g \in C^r$, con $r \geq 2$.

Definición 1.2.6 Una variedad invariante W^c será llamada variedad central para el sistema (1.26) si puede ser representada, de manera local, con la siguiente estructura

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeña.

Observación 1.2.1 El hecho de que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ nos garantiza que la variedad central $W_{loc}^c(0)$ es tangente al subespacio propio central E^c en el origen.

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos están demostrados en [Carr 1981]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

Teorema 1.2.4 Existe una C^r variedad central para el sistema (1.26). La dinámica del sistema (1.26), restringida a la variedad central, está dada para v suficientemente pequeña por el siguiente sistema k -dimensional

$$\dot{v} = Av + f(v, h(v)), \quad (1.27)$$

con $v \in \nu \subset \mathbb{R}^k$.

El siguiente resultado establece que la dinámica de (1.27) cerca de $v = 0$, determina la dinámica de (1.26) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 1.2.5 Dados los sistemas (1.26) y (1.27) se tienen los siguientes resultados:

- (i) Supongamos que $v = 0$ es un equilibrio del sistema (1.27), que puede ser asintóticamente estable o inestable, entonces $(x, y) = (0, 0)$ es un equilibrio asintóticamente estable o inestable para el sistema (1.26).
- (ii) Supongamos que el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (1.26) es estable. Entonces, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.26) con $(x(0), y(0))$ lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución $v(t)$ de (1.27) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = h(v(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),$$

donde la constante $\gamma > 0$.

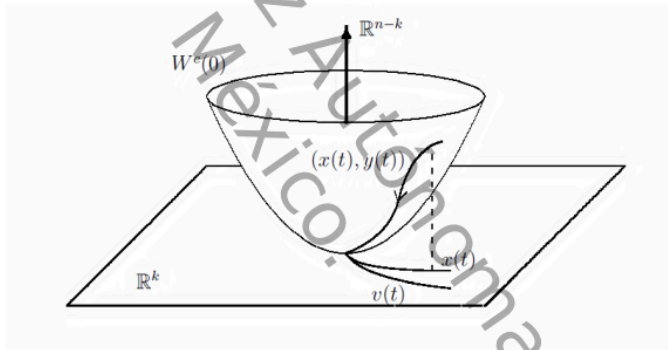


Figura 1.5: Representación del teorema de la variedad central.

Observación 1.2.2 ² Lo que nos dice el teorema (1.2.5) es que la solución $v(t)$ del sistema (1.27), representa en forma aproximada, el comportamiento local ⁴ del sistema (1.26) sobre el subespacio propio $E^c \cong \mathbb{R}^k$. Ver figura 1.5.

⁴ El último teorema proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, determinaremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya función desconocida es $h(x)$.

Sea $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$, luego entonces se cumple que $y(t) = h(x(t))$, por lo que deri-

vando con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (1.28)$$

Como todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.26), se tiene que la ecuación (1.28) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Si hacemos

$$N(h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x)) - Bh(x) - g(x, h(x))) \equiv 0. \quad (1.29)$$

El problema consiste en encontrar $h(x)$ que satisfaga la ecuación (1.29). A esta ecuación se le conoce como ecuación homológica, para mayores detalles ver [Arnold 1983]. Encontrar la solución de esta ecuación es en general más difícil que resolver el sistema (1.26), sin embargo, el próximo resultado nos permitirá aproximar la solución de (1.29) con el grado de precisión que se desee.

Teorema 1.2.6 Sea $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^1 , con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $N(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ cuando } x \rightarrow 0.$$

Caso paramétrico: Considere el sistema no lineal parametrizado, escrito ya en bloques de Jordan

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = By + g(x, y, \mu). \end{cases} \quad (1.30)$$

con $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^p$, donde A posee valores propios con parte real cero y B posee valores propios con parte real negativa, con $f(0) = Df(0) = 0$ y $g(0) = Dg(0)$. Además,

supongamos que $\mu \in \mathbb{R}^p$ es un vector de estados, luego podemos reescribir (1.30) como

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y, \mu), \\ \dot{\mu} = 0, \\ \dot{y} = By + g(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1.31)$$

llamado el sistema suspendido, que a su vez lo reescribimos como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = By + g(x, y, \mu)$$

Tenemos entonces un subespacio propio central de dimensión $k + p$, por lo tanto existe una función $h(x, \mu)$ cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$, del sistema (1.31). Luego, la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, h(x, \mu), \mu), \\ \dot{\mu} = 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

luego la ecuación (1.29) para determinar $\mathcal{N}(h(x, \mu))$ queda como

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, \mu) (Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0. \quad (1.33)$$

1.2.3. Formas normales

Dado un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = X(x),$$

con $X(0) = 0$, la teoría de las formas normales consiste en buscar un cambio de coordenadas $x = y + h(y)$ tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión “más

simple posible”.

Supongamos que el campo vectorial X ha sido desarrollado en series de Taylor alrededor del equilibrio $x = 0$, y que además, su parte lineal se encuentra en la forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots, \quad (1.34)$$

donde $F_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r . Supongamos además que este campo vectorial X posee términos no lineales de grado r en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots, \quad (1.35)$$

considerando el cambio de coordenadas

$$x = y + h_r(y), \quad (1.36)$$

donde $h_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , tal que $\|h_r(y)\| \ll 1$. La idea consiste en encontrar h_r tal que el sistema (1.35) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado r . Derivando (1.36) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y) \dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y)) \dot{y} \end{aligned} \quad (1.37)$$

pero en $(I + Dh_r(y))$ tenemos que $\|Dh_r(y)\| < 1$, entonces es una matriz invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 - \cdots,$$

luego, de (1.37) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1} \dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots) (Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots) \end{aligned}$$

pero $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \dots$, luego entonces

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots) (J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \end{aligned}$$

donde $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy$.

Observación 1.2.3 ² Obsérvese que si el campo vectorial X posee términos no lineales a partir de grado r , entonces el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$ produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de grado r .

Ahora veamos bajo qué condiciones es posible asegurar la existencia de h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$. Considerando el espacio vectorial H^r de los campos cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , y sea $L_J : H^r \rightarrow H^r$ el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y).$$

⁸ Esta operación se conoce como el corchete de Lie de los campos vectoriales Jy y $h_r(y)$. Basta demostrar que L_J es invertible, ya que $\tilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$. Entonces, L_J será invertible si y sólo si todos sus valores propios son diferentes de cero. A continuación vamos a calcular ³ sus valores propios.

Supongamos que J posee n valores propios reales diferentes λ_i para $i = 1, \dots, n$, y como está en su forma de Jordan, entonces es diagonal, y además sus vectores propios son los elementos de la base canónica en $\mathbb{R}^n$. ⁴ Regresemos ahora al espacio vectorial H^r y determinemos su base canónica. Por ejemplo, para $r = 2$ y $n = 2$, la base canónica posee seis elementos

$$\mathcal{B}_{H^2} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Así, si definimos $y^m = y_1^{m_1} y_2^{m_2}$, con $m_1 + m_2 = 2$ y $m_i \geq 0$, entonces

$$\mathcal{B}_{H^2} = \{y^m e_i | m_1 + m_2 = 2, i = 1, 2.\}$$

En general, si $y^m = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$ con $\sum_{j=1}^n m_j = r$ y $m_j \geq 0$, entonces la base canónica de H^r está dada por

$$\mathcal{B}_{H^r} = \left\{ y^m e_i \mid \sum_{j=1}^n m_j = r, i = 1, \dots, n. \right\}$$

Entonces el corchete de Lie queda como

$$L_J(y^m e_i) = D(y^m e_i)(y) Jy - J(y^m e_i),$$

donde se tiene que

$$D(y^m e_i) = D \left(0 \cdots 0 \prod_{i=0}^n y^{m_i} \ 0 \cdots 0 \right)^T$$

y $Jy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 & \cdots & \lambda_n y_n \end{pmatrix}^T$, por lo tanto obtenemos

$$D(y^m e_i) Jy = \left(0 \cdots 0 \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i y^m \ 0 \cdots 0 \right)^T = (m \cdot \lambda) y^m e_i,$$

4 donde $m = (m_1, \dots, m_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} L_J(y^m e_i) &= D(y^m e_i) Jy - J(y^m e_i) \\ &= (m \cdot \lambda) y^m e_i - \lambda_i y^m e_i \\ &= (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i \end{aligned}$$

3 es decir, $y^m e_i$ es un vector propio de L_J con valor propio

$$\Lambda_{m,i} = m \cdot \lambda - \lambda_i. \quad (1.38)$$

Luego, L_J será invertible si y sólo si $\Lambda_{m,i} \neq 0$ para toda m y toda $i = 1, \dots, n$. Esto último nos lleva al siguiente concepto:

Definición 1.2.7 *Se dice que la n -tupla de valores propios $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es resonante de orden r si es posible encontrar una relación entera de la forma*

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j,$$

para algún m con $\sum_{j=1}^n m_j = r$, y alguna $i = 1, \dots, n$.

Observación 1.2.4 *Puede probarse que la expresión (1.38) también es válida en el caso en que J no es diagonal, ver [Arnold 1983].*

Con todo lo anterior tenemos probado el teorema de linealización de Poincaré (ver [Chicone 2006]). El teorema de linealización de Poincaré dice lo siguiente:

Teorema 1.2.7 (Linealización de Poincaré) *Si los valores propios de la matriz J son no resonantes, entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots$$

puede ser reducido al sistema lineal

$$\dot{y} = Jy$$

3 *por un cambio de coordenadas $x = y + h_r(y) + \dots$, para $r = 2, 3, \dots$*

Ahora vemos cómo determinar h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$, es decir, determinar h_r tal que $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$. Entonces, expresemos h_r y F_r en términos de los vectores canónicos de H^r ,

$$\begin{aligned} h_r(y) &= \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \\ F_r(y) &= \sum_{m,i} F_{m,i} y^m e_i \end{aligned}$$

con $\sum_{j=1}^n m_j = r$, luego,

$$\begin{aligned} L_J(h_r(y)) &= L_J\left(\sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i\right) \\ &= \sum_{m,i} h_{m,i} L_J(y^m e_i) \\ &= \sum_{m,i} h_{m,i} (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i \end{aligned}$$

De esta manera, $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$ si y sólo si

$$h_{m,i} = \frac{F_{m,i}}{m \cdot \lambda - \lambda_i} \quad (1.39)$$

Como los valores propios de J no son resonantes, la expresión anterior siempre tiene sentido.

Consideremos ahora el caso en que hay resonancia, es decir, el caso en que algunos valores propios $\lambda_{m,i}$ de L_J son cero. Los vectores propios de L_J asociados a valores propios diferentes de cero forman una imagen $B^r = L_J(H^r)$. Sea $F_r \in H^r$, luego, las componentes ϖ_r de F_r que estén en B^r pueden ser eliminados mediante el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$, donde h_r se escoge de tal manera que sus coeficientes estén de acuerdo a la fórmula (1.39). Las componentes ξ_r de F_r que pertenezcan a algún subespacio complementario, G^r , de B^r , permanecerán sin cambios mediante el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$ obtenido de B^r . Así, estos términos resonantes permanecerán en el nuevo campo vectorial. Esto demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1.2.8 (Teorema de Poincaré-Dulac) *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = X(x), \quad (1.40)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $X(0) = 0$ y X es un campo vectorial suave. Existe una transformación polinomial $x = y + h(y)$, tal que transforma el sistema (1.40) en

$$\dot{y} = Jy + \sum_{r=2}^N \varpi_r + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (1.41)$$

donde todos los monomios en ϖ_r son resonantes.

El lado derecho de (1.41) es llamado la forma normal del campo X .

Ejemplo 1.2.1 Para ilustrar los conceptos anteriormente expuestos, determinaremos la forma normal del campo vectorial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

2 Solución. Observe que la Jacobiana del campo vectorial tiene valores propios imaginarios puros $\lambda = i\omega_0$ y su conjugado $\bar{\lambda}$. Cuando se tienen valores propios complejos, es conveniente cambiar de variables para representar la Jacobiana en forma diagonal, y de esta forma utilizar el método desarrollado líneas arriba. Introduciendo las variables complejas $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Luego, después de algunos cálculos obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix}$$

donde $F_1 = f_1 + if_2$ y $F_2 = \bar{f}_1$. **2** Tenemos entonces que

$$\dot{z} = \lambda z + F_1(z, \bar{z})$$

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\lambda} \bar{z} + \bar{F}_1(z, \bar{z}).$$

2 Nótese que la segunda ecuación es conjugada de la primera. Ahora busquemos términos resonantes de orden r , es decir, busquemos m y j en la ecuación (1.38) tal que $\Lambda_{m,j} = 0$, esto nos lleva a que

$$m_1\lambda + m_2\bar{\lambda} = \lambda_i \Leftrightarrow (m_1 - m_2)\lambda = \lambda_i,$$

con $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}$, además $m_1 + m_2 = r$. Para $j = 1$, la ecuación anterior se reduce a $m_1 - m_2 = 1$, por lo tanto, los términos resonantes son $z^{k+1}\bar{z}^k e_1$ para $k = 1, 2, \dots$. Para $j = 2$, tenemos la ecuación $m_1 - m_2 = -1$, por lo tanto, los términos resonantes son $z^k \bar{z}^{k+1} e_2$ para $k = 1, 2, \dots$. Luego, la forma normal del campo, en variables complejas está dado por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k, \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{\lambda} \bar{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k z^k \bar{z}^{k+1}.\end{aligned}$$

Antes de pasar este último sistema a variable real, obsérvese que, si $c_k = \alpha_{k-1} + i\beta_{k-1}$, entonces

$$\begin{aligned}c_k z^{k+1} \bar{z}^k &= c_k z (z\bar{z})^k \\ &= (\alpha_{k-1} + i\beta_{k-1}) (x + iy) (x^2 + y^2)^k \\ &= [(\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y) + i(\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y)] (x^2 + y^2)^k\end{aligned}$$

Haciendo uso de los cambios de coordenadas anteriores, tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \\ \frac{i}{2} (-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k$. Además,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Re} (\mathcal{F}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y) (x^2 + y^2)^k, \\ \frac{i}{2} (-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Im} (\bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y) (x^2 + y^2)^k\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y) (x^2 + y^2)^k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y) (x^2 + y^2)^k \end{pmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones queda como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1} x - \beta_{k-1} y) (x^2 + y^2)^k \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1} x + \alpha_{k-1} y) (x^2 + y^2)^k\end{aligned}$$

No es complicado verificar que este mismo campo en coordenadas polares es

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1} \rho^{2k+1} \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1} \rho^{2k}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Órbitas periódicas

En este capítulo hacemos una revisión de la bifurcación de Andronov-Hopf (bifurcación de órbitas periódicas), se presenta una descripción simple mediante un sistema de dos ecuaciones diferenciales escritas en una forma normal. Posteriormente, se enuncia el teorema de la bifurcación de Hopf y se muestra la expresión del primer coeficiente de Lyapunov para sistemas en el plano. Por último, presentamos un resultado que se encuentra en la página 180 del libro [Kuznetsov 2004], el cual proporciona una expresión para el primer coeficiente de Lyapunov en sistemas de dimensión $n > 2$.

2.1. Bifurcación de Hopf

Consideremos el siguiente prototipo de sistema de ecuaciones diferenciales que depende de un parámetro

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Este sistema posee el equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ para todo α con matriz jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

la cual tiene valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Introduciendo la variable compleja $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$. Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

y podemos por lo tanto reescribir el sistema (2.1) en la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (2.2)$$

Finalmente, usando la representación polar de los complejos $z = \rho e^{i\varphi}$, obtenemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi},$$

o también

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2),$$

la cual nos da la forma polar del sistema (2.1):

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Los retratos fase que representan la bifurcación del sistema cuando α atraviesa cero puede ser fácilmente analizado usando la forma polar, ya que las ecuaciones para ρ y φ en (2.3) están desacopladas. La primera ecuación por obvias razones sólo puede considerarse para $\rho \geq 0$ y posee un equilibrio en $\rho = 0$ para todos los valores de α . El equilibrio es asintóticamente estable si $\alpha < 0$; y permanece estable en $\alpha = 0$ pero no linealmente, por lo que la rapidez con que converge la solución a cero ya no es exponencial; para $\alpha > 0$ el equilibrio se vuelve inestable asintóticamente. Aún más, hay punto de equilibrio estable adicional $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ para $\alpha > 0$. La segunda ecuación describe un movimiento rotacional con rapidez constante. En consecuencia, por superposición de los movimientos definidos por las dos ecuaciones de (2.3), obtenemos el siguiente diagrama de bifurcación para el

sistema original de dos ecuaciones (2.1).

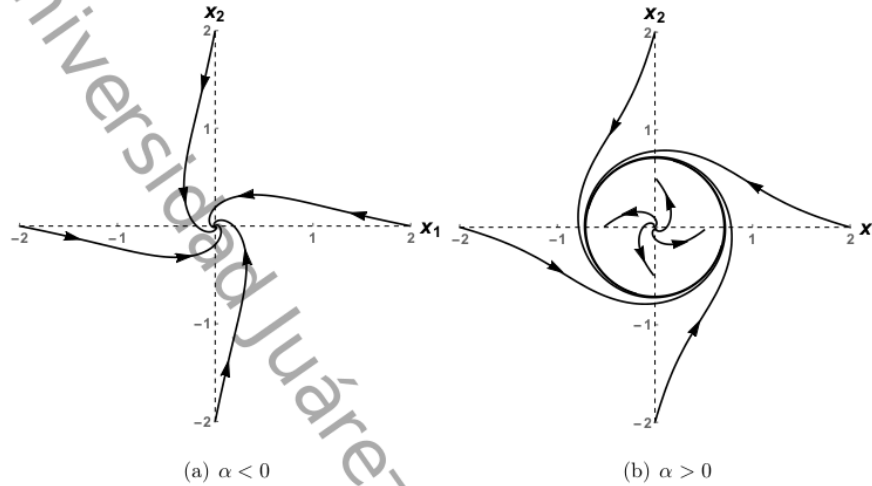


Figura 2.1: Bifurcación de Hopf supercrítica.

El sistema siempre tiene un equilibrio en el origen, este equilibrio es un foco estable para $\alpha < 0$ y un foco inestable para $\alpha > 0$. En el valor crítico del parámetro $\alpha = 0$ el equilibrio es no linealmente estable y topológicamente equivalente a un foco. Algunas veces es llamado un **foco atractor débil**. Este equilibrio está rodeado para $\alpha > 0$ por una órbita cerrada aislada (*ciclo límite*) que es única y estable. El ciclo es un círculo de radio $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo, excepto el origen, tienden a este ciclo cuando $t \rightarrow \infty$. Esta es la bifurcación de Andronov–Hopf. En el espacio (x_1, x_2, α) esta bifurcación da lugar a la aparición de una α -familia de ciclos formando una superficie parabólica. Por otro lado, si tenemos un sistema como (2.1) que tiene términos no lineales con signo opuesto,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (2.4)$$

el cual tiene la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2,$$

puede ser analizado de la misma forma. El sistema experimenta una bifurcación de Andronov-Hopf en $\alpha = 0$. Contrario al sistema (2.1) hay un ciclo límite inestable en (2.4), el cual desaparece cuando α cruza el cero desde la parte negativa hasta la parte de los valores positivos. El equilibrio en el origen tiene la misma estabilidad para $\alpha \neq 0$ como en el sistema (2.1), es estable para $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. La estabilidad en el valor crítico del parámetro α es opuesta a la del sistema (2.1), es inestable en $\alpha = 0$ pero no linealmente. El diagrama de bifurcación para el sistema (2.4) es el siguiente

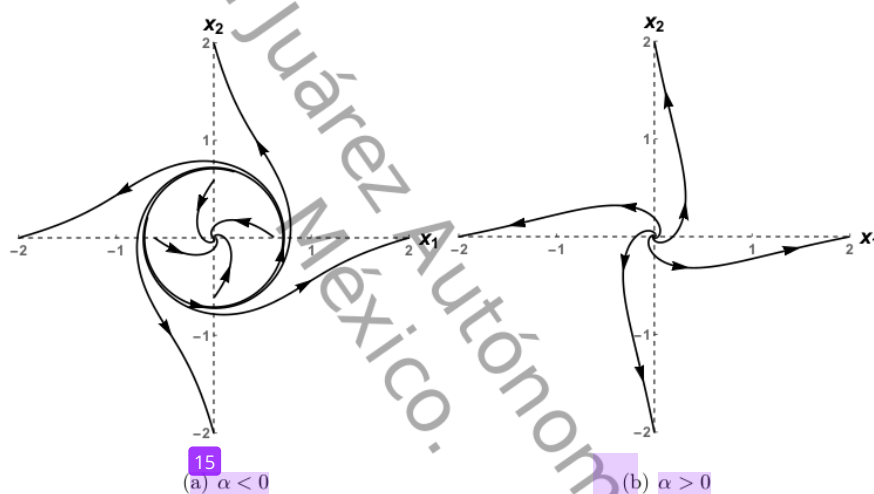


Figura 2.2: Bifurcación de Hopf subcrítica.

Teorema 2.1.1 (Teorema de la bifurcación de Hopf) Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tiene un punto de equilibrio (x_0, α_0) tal que

- (i) $D_x f(x_0, \alpha_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.
- (ii) Sean $\lambda(\alpha)$, $\bar{\lambda}(\alpha)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \alpha)$ los cuales son imaginarios puros

en $\alpha = \alpha_0$, tales que

$$d = \frac{d}{d\alpha}(\operatorname{Re}(\lambda(\alpha)))|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0. \quad (2.5)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suaves para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central, en coordenadas polares, está dada por

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(d\alpha + \ell_1 \rho^2), \\ \dot{\varphi} = \omega + c\alpha + b\rho^2. \end{cases}$$

Si $\ell_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el espacio propio de $\lambda(\alpha_0)$, $\bar{\lambda}(\alpha_0)$ que coincide en dimensión dos, con el paraboloides $\alpha = -\frac{\ell_1}{d}\rho^2$. Si $\ell_1 < 0$, entonces esas soluciones periódicas son estables, mientras que si $\ell_1 > 0$, son ciclos límite inestables.

Los coeficientes de estabilidad d y ℓ_1 son llamados la velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov, respectivamente. Como puede verificarse en [Marsden 1976], este teorema puede ser probado por una aplicación directa de los teoremas de la variedad central y de las formas normales que se presentaron en el capítulo anterior.

2.1.1. Primer coeficiente de Lyapunov: caso bidimensional

Existe una expresión para calcular el primer coeficiente de Lyapunov ℓ_1 , ver [Guckenheimer 1993].

Teorema 2.1.2 Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde J y F son

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$$

con $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Entonces, el primer coeficiente de Lyapunov para sistemas en el plano es

$$\ell_1 = \frac{1}{16\omega} (R_1 + \omega R_2), \quad (2.6)$$

donde R_1 y R_2 son

$$\begin{aligned} R_1 &= [F_{1x_1x_2} (F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2} (F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1} F_{2x_1x_1} \\ &\quad + F_{1x_2x_2} F_{2x_2x_2}]_{x=0}, \\ R_2 &= [F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}]_{x=0}. \end{aligned}$$

2.1.2. Primer coeficiente de Lyapunov: caso n-dimensional

Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales dependiente de parámetros

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

en $\mathbb{R}^n$ tiene un equilibrio E y su linealización en el equilibrio posee valores propios $\pm\omega i$, E es un candidato a exhibir una bifurcación de Hopf. Esta bifurcación es local y en ella un equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales pierde su estabilidad como un par de valores propios complejos de su linealización, alrededor de E , atravesando el eje imaginario del plano complejo. Para mostrar que la bifurcación de Hopf ocurre, es necesario calcular el primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(E)$ del sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación enunciamos el teorema de Kuznetsov para el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov.

Teorema 2.1.3 (Kuznetsov-2004) Sea $\dot{x} = F(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión n que posee como punto de equilibrio a E . Además, considere el tercer orden de aproximación en serie de Taylor de $F(x)$ alrededor de E dado por

$$F(x) = A(x) + \frac{1}{2!}B(x, x) + \frac{1}{3!}C(x, x, x) + O(|x|^4),$$

asumiendo que A posee un par de valores propios imaginarios puros $\pm i\omega$. Sea q el vector

propio normalizado de A correspondiente al valor propio $i\omega$ tal que $\langle q, \bar{q} \rangle = 1$, donde $\bar{q}$ es el vector conjugado de q . Adicional, sea p el vector propio adjunto tal que $A^T p = -i\omega p$ y $\langle \bar{p}, q \rangle = 1$. Si I_n denota a la matriz identidad, entonces el primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(E)$ para el sistema $\dot{x} = F(x)$ en el equilibrio E es

$$\begin{aligned} \ell_1(E) = & \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle \right. \\ & \left. + 2 \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega I_n - A)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La expresión (2.7) es el tratamiento analítico más conveniente para la bifurcación de Hopf en sistemas de dimensión $n \geq 2$. No se requiere una transformación preliminar del sistema en su base de vectores propios, y se expresa $\ell_1(E)$ usando los términos cuadráticos, lineales y cúbicos originales, asumiendo que sólo los vectores propios de la matriz jacobiana en los valores críticos, los ordinarios y los adjuntos, son conocidos.

Si $\ell_1(E) < 0$ se tiene un foco débil del sistema centrado en E , restringido a la variedad central de E y asociado al par de valores propios complejos que atraviesan el eje imaginario. En este caso el ciclo límite que emerge de E es estable y la bifurcación de Hopf se conoce como supercrítica. Por otro lado, si $\ell_1(E) > 0$, se tiene también un foco débil del sistema centrado en E , también restringido a la variedad central de E , pero el ciclo límite que emerge de E es inestable y en este caso la bifurcación de Hopf se conoce como subcrítica. Para mayores detalles sobre la forma en que se obtiene (2.7) ver [Kuznetsov 2004].

2.1.3. Bifurcación de Hopf en un sistema de control

Considere la siguiente ecuación diferencial no lineal que depende de los parámetros positivos α y β :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \alpha \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + y(1 - y) = 0,$$

la cual describe un sistema simple de realimentación tipo Luré. Introduciendo el cambio de variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$, y $x_3 = \dot{x}_2$, podemos reescribir la ecuación anterior como el

sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - \beta x_2 - x_1 + x_1^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Para determinar los equilibrios de (2.8) igualamos a cero el lado derecho de cada ecuación y resolvemos el sistema de ecuaciones algebraicas resultante, esto es, si $x_2 = x_3 = 0$ entonces $x_1(x_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ y $x_1 = 1$, por lo tanto, para todos los valores de α y β los equilibrios son $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_1 = (1, 0, 0)$. Analizaremos el ¹⁴equilibrio en el origen.

La matriz jacobiana de (2.8) evaluada en el origen tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

con la ecuación característica

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 = 0.$$

Para encontrar la relación entre α y β correspondiente a la bifurcación de Hopf en E_0 , imponemos que el polinomio característico tenga la siguiente estructura

$$P(\lambda) = (\lambda - \gamma)(\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega),$$

Lo que nos lleva a lo siguiente

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 &= (\lambda - \gamma)(\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega), \\ \Leftrightarrow \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1 &= \lambda^3 - \gamma\lambda^2 + \omega^2\lambda - \gamma\omega^2. \end{aligned}$$

Para que los polinomios de la última expresión tengan la misma estructura deben ser iguales coeficiente a coeficiente, esto implica que $\gamma = -1/\omega^2$, $\beta = \omega^2$ y $\alpha = 1/\omega^2$.

Entonces, la relación entre α y β es

$$\alpha = \alpha_0(\beta) = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0. \quad (2.9)$$

Esto muestra que la ecuación característica posee un par de raíces imaginarias puras $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$ con $\omega > 0$, si $\alpha_0 = 1/\beta$. Además, es inmediato verificar que para $\alpha > \alpha_0$ el origen es estable, para ello supongamos que $\alpha = 2/\beta$, entonces el polinomio característico queda como

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{2}{\beta}\lambda^2 + \beta\lambda + 1,$$

aplicando el criterio de Routh-Hurwitz tenemos que la matriz de Hurwitz asociada al polinomio en este caso es

$$\begin{pmatrix} 2/\beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 2/\beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde los determinantes de sus menores principales diagonales son $\Delta_1 = 2/\beta > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$ y $\Delta_3 = \Delta_2 > 0$, por lo tanto, como todos resultan positivos la matriz es Hurwitz y el polinomio característico de la linealización en el origen es estable. Ahora verifiquemos que para $\alpha < \alpha_0$ el origen es inestable, así que supongamos que $\alpha = 1/2\beta$, entonces el polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{2\beta}\lambda^2 + \beta\lambda + 1,$$

y la matriz Hurwitz asociada a este polinomio característico es

$$\begin{pmatrix} 1/2\beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1/2\beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde los determinantes de los menores principales diagonales de esta matriz son $\Delta_1 = -1/2 < 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3 = -1/2 < 0$, por lo tanto, por el signo de los determinantes concluimos que la matriz no es Hurwitz y el polinomio de la linealización en el origen para $\alpha < \alpha_0$ es inestable.

La transición es causada por un par de valores propios complejos conjugados atravesando el eje imaginario en $\lambda = \pm i\omega$, donde $\omega^2 = \beta$. Esto significa que la velocidad de cruce no es cero y el tercer valor propio λ_3 permanece negativo para valores cercanos de los parámetros. Así encontramos que una bifurcación de Hopf ocurre.

Con el fin de analizar la bifurcación, calculamos el primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(0)$ del sistema, restringido a la variedad central en los valores de los parámetros críticos. Si $\ell_1(0) < 0$, la bifurcación es supercrítica y un único ciclo límite estable bifurca del origen para $\alpha < \alpha_0(\beta)$. Como veremos a continuación, este es el caso del sistema (2.8) de Luré. Por lo tanto, fijamos α en su valor crítico α_0 y dejamos β libre para variar. Nótese que los elementos de la matriz jacobiana son funciones racionales de ω^2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\omega^2 & -1/\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz A no se encuentra en la forma canónica, procedemos a llevarla a la variedad central. Primero vamos a construir el vector propio q asociado al valor propio $\lambda_1 = i\omega$ para la matriz A , esto nos lleva a resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 1 \\ -1 & -\omega^2 & -1/\omega^2 - i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que $y = i\omega x$ y $z = -\omega^2 x$ con x como variable libre, por lo que el subespacio asociado al valor propio $\lambda_1 = i\omega$ es

$$S_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x, i\omega x, -\omega^2 x), \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$$

de donde se sigue que el vector propio q asociado a $\lambda_1 = \omega i$ es

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

Como segundo asunto, vamos a construir el valor propio p asociado al valor propio $\lambda_2 = -i\omega$ para la matriz A^T , así que resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega & 0 & -1 \\ 1 & i\omega & -\omega^2 \\ 0 & 1 & -1/\omega^2 + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

del cual se obtiene que $x = z/i\omega$ y $y = -((i\omega^3 - 1)/\omega^2)z$ con z como variable libre, por lo que el subespacio asociado al valor propio $\lambda_2 = -i\omega$ es

$$S_{\lambda_2} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (z/i\omega, -((i\omega^3 - 1)/\omega^2)z, z), \text{ con } z \in \mathbb{R} \}$$

y de esto se sigue que el vector propio p asociado al valor propio $\lambda_2 = -i\omega$ es

$$p = \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores q y p satisfacen desde luego que

$$Aq = i\omega q, \quad A^T p = -i\omega p$$

Con el fin de lograr la normalización $\langle \bar{p}, q \rangle = 1$, hay que escalar estos vectores. La siguiente

escala, por ejemplo, basta:

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega(\omega^3 + i)} \begin{pmatrix} i\omega \\ i\omega^3 - 1 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

Con esto la parte lineal del análisis está completa. Ahora veamos que sólo hay un término no lineal (cuadrático) en (2.8). Por lo tanto, la función bilineal $B(x, y)$, definida para dos vectores $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ y $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$, puede ser expresada como

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

Mientras que $C(x, y, z) \equiv 0$. Por lo tanto,

$$B(q, q) = B(\bar{q}, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2q_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y resolviendo los correspondientes sistemas lineales se obtiene

$$s = A^{-1}B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = (2i\omega E - A)^{-1}B(q, q) = -\frac{2}{3(1 + 2i\omega^3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\omega \\ -4\omega^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, aplicando (2.7) obtenemos que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$\ell_1(0) = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}(-4\bar{p}_3 q_1 s_1 + 2\bar{p}_3 \bar{q}_1 r_1) = -\frac{\omega^3(1 + 8\omega^6)}{(1 + 4\omega^6)(1 + \omega^6)}.$$

Para regresar al parámetro β recordemos que $\beta = \omega^2$, luego entonces

$$\ell_1(0) = -\frac{\omega^3(1 + 8\beta^3)\beta\sqrt{\beta}}{(1 + 4\beta^3)(1 + \beta^3)} < 0.$$

El primer coeficiente de Lyapunov es claramente negativo para todo β positivo. Así, la bifurcación de Hopf es siempre supercrítica y el ciclo límite que emerge del origen es estable. Lo consecuente es mostrar simulaciones numéricas donde se detecta el ciclo límite que bifurca del origen, para un valor inicial $(x_{10} = 0.1, x_{20} = 0.1, x_{30} = 0.6)$ y con valores de los parámetros $\alpha = \beta = 1$.

La gráfica de las series de tiempo para una primera simulación es:

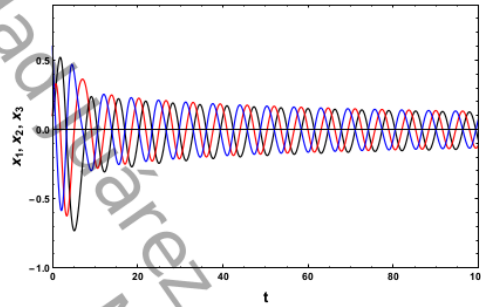


Figura 2.3: Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 100$.

y el respectivo retrato fase es

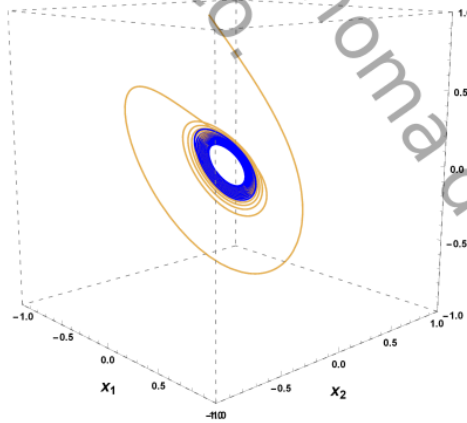


Figura 2.4: Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 100$.

Por otra parte, la gráfica de las series de tiempo para una segunda simulación es:

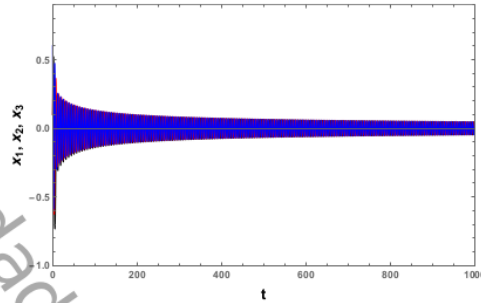


Figura 2.5: Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 1000$.

Nótese que la amplitud de las oscilaciones se estabiliza para tiempos muy grandes, esto sucede porque el valor inicial que tomamos no está ligeramente alejado del origen.

Por último, la gráfica del retrato fase para la segunda simulación es:

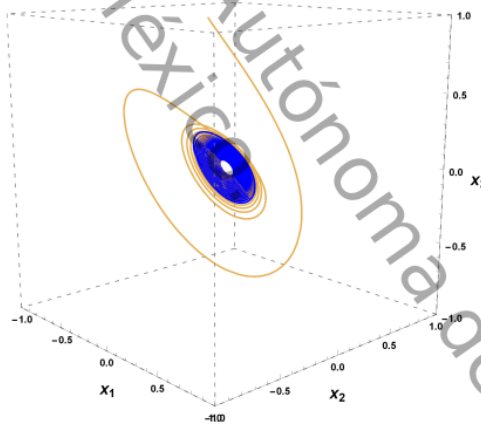


Figura 2.6: Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 1000$.

Obsérvese que el ciclo límite estable que bifurca del origen en el sistema de Luré es de pequeña amplitud. Además, de la estructura algebraica del primer coeficiente de Lyapunov se concluye que, la bifurcación de Hopf es no degenerada, esto es, no hay forma de que $\ell_1(0) = 0$ para valores del parámetro $\beta \neq 0$.

Capítulo 3

Cadenas tróficas

Como introducción de este capítulo se proporcionan los fundamentos básicos de la Ecología Matemática. Entre los aspectos a describir, están los modelos de dinámica poblacional para una sola especie, ³² en el caso de dos especies el modelo de Lotka-Volterra y la introducción a la idea de las respuestas funcionales. Posteriormente, se presenta el modelo de cadena trófica de tercer nivel (o sistema tritrofico) que es objeto de estudio en este trabajo, así como su respectiva dinámica local, particularmente en los equilibrios con sentido ecológico. Finalmente, se establecen cuáles son las condiciones sobre los parámetros involucrados para que ocurra una bifurcación de Hopf y, mediante el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov, se prueba que existe al menos un ciclo límite estable en el modelo.

¹ 3.1. Modelos poblacionales para una sola especie

Al construir un modelo que represente a una población, es necesario considerar que las interacciones con otras poblaciones sean despreciables, algo que no sucede en la naturaleza, siendo esta consideración una idealización, pues ¹ siempre se tienen cadenas tróficas; sin embargo, esta suposición resulta ser una aproximación bastante razonable si se desean conocer algunos aspectos de la dinámica de una población, proporcionando además simplificaciones en la estructura matemática de las ecuaciones.

¹ Al considerar que las poblaciones son homogéneas en todo aspecto, una variable de estado para tales poblaciones puede ser el tamaño poblacional, llamémosle x , especificado como una función del tiempo, esto es, $x = x(t)$, medido en número de individuos, biomasa o densidad por unidad de área o volumen, en cualquier instante $t > 0$.

El modelo poblacional en tiempo continuo más simple y antiguo fue propuesto por el

clérigo inglés R. T. Malthus en 1798 [Edelstein 1988], bajo el supuesto de que la rapidez con que cambia el tamaño de la población $x = x(t)$, es directamente proporcional al tamaño en cada instante t , obteniendo la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \rho x,$$

donde ρ es la *tasa neta de crecimiento intrínseco de la población o potencial biótico*.

Es conocido que las poblaciones no pueden crecer indefinidamente por razones de espacio, disponibilidad de alimentos u otras causas, en resumen, por la razón de que la capacidad del medio para soportarlas es limitada; por este motivo, el modelo de Malthus ha sido criticado fuertemente, ya que entre otras objeciones, no refleja el comportamiento real de una población, puesto que resulta contradictorio tener un crecimiento poblacional infinito con recursos limitados.

Una primera modificación al modelo de Malthus fue propuesta por un matemático y biólogo belga, Pierre-François Verhulst en 1838 [Edelstein 1988], en la cual considera que ρ es una función lineal decreciente respecto al tamaño poblacional; la función en cuestión está dada por $\rho(x) = \rho \left(1 - \frac{x}{k}\right)$. Bajo este cambio, la ecuación diferencial para el crecimiento poblacional toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = \rho x \left(1 - \frac{x}{k}\right),$$

y es la llamada ecuación logística [Turchin 2003], donde ρ se asume positiva y al igual que en el modelo Malthusiano es la *tasa de crecimiento intrínseco de la población o potencial biótico*; representa la tasa máxima de crecimiento *per capita* alcanzada cuando el tamaño poblacional es suficientemente pequeño para asegurar limitaciones de los recursos disponibles. La constante positiva k es denominada la *capacidad de carga del medio ambiente* o nivel de saturación ambiental; representa el tamaño poblacional máximo para el cual los recursos disponibles pueden continuar sustentando a la población.

3.2. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

El primer sistema diferencial para representar un modelo de interacción depredador-presa lo propuso el matemático y físico italiano Vito Volterra en 1926, en su conocida monografía "Variazioni e fluttuazioni del numero d' individui in specie animali conviventi". Las ecuaciones que obtuvo Volterra coincidieron con un modelo para una reacción química propuesto por el matemático Alfred James Lotka, mismo que puede encontrarse en su libro *Elements of Physical Biology* [Lotka 1925], y en el cual extiende el trabajo de Pierre-Françoise Verhulst.

Volterra propuso su modelo con el propósito de explicar las oscilaciones en los niveles de población para las especies de peces comestibles en el mar adriático, esto en los años posteriores a la primera guerra mundial, con su propuesta trató de descubrir cuál era la causa que provocaba que las pesquerías comerciales capturaran muchos peces no comestibles como los selacios, normalmente depredadores de las especies de peces comestibles. Al proponer su modelo asumió que el tamaño de la población de presas en ausencia de depredadores es de tipo Malthusiano, esto es, $\dot{x} = ax$. Además, consideró que este crecimiento disminuye debido a los encuentros entre las presas y los depredadores a una tasa dada b , expresado por un término bxy , donde y representa el tamaño de la población de los depredadores.

Por otro lado, bajo el supuesto de que la población de presas es la única fuente de alimento para los depredadores, la población de depredadores en ausencia de presas disminuyen su tamaño a una razón proporcional al tamaño en ese instante, es decir, $\dot{y} = -dy$, y se benefician tras cada encuentro con las presas, lo que se representará con la expresión cxy . Estas relaciones determinan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en el plano

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

Donde a es la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas, b es la tasa de captura del depredador o mortalidad de presas por depredación, c es la tasa de conversión de presas en nuevos depredadores debido al aprovechamiento de los depredadores al consumir presas (tasa de eficiencia) y d es la tasa de mortalidad natural de los depredadores en ausencia de presas.

Nótese que, algo objetable del modelo de Lotka-Volterra es que la tasa de eficiencia c es perfecta, es decir, en cada encuentro entre depredadores y presas siempre existe el consumo, lo que nos dice que el mismo no estará limitado, y desde luego en la naturaleza esto no es realizable, dado que cualquier especie depredadora siempre alcanza un estado de máxima saciedad después de haber consumido un cierto número de presas, por lo tanto su tasa de eficiencia no puede ser perfecta.

3.3. Respuestas funcionales

La introducción de respuestas funcionales en los modelos de depredación vienen a resolver, entre otras cosas, problemas como el de tasas de eficiencia perfectas, situación que ya se ha señalado en el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. La *respuesta funcional*, también llamada función de captura o consumo, se refiere al cambio de la densidad de las presas atacadas por unidad de tiempo por depredador, cuando la densidad de las presas cambia [Ruan 2001]. La clasificación de las respuestas funcionales se puede encontrar en [Freedman 1980] y en [Turchin 2003]. Por otro lado, en 1959 el Ecólogo canadiense C. S. Holling describió tres tipos de *respuesta funcional* y posteriormente, Robert J. Taylor en 1984 propuso un cuarto tipo de respuesta funcional llamada no-monótona.

El uso de las respuestas funcionales en los modelos de depredación ofrece una aproximación más cercana a lo que sucede en la naturaleza, puesto que limita las tasas de eficiencia para los consumidores de las cadenas alimentarias. De esta forma, se vuelve una tarea interesante investigar la dinámica de los sistemas diferenciales que modelan las diversas cadenas tróficas, por ejemplo, las de tercer nivel.

A continuación se describen cada una de las respuestas funcionales de Holling y se muestra cuál es su comportamiento gráfico:

i) Holling tipo I: Expresa la existencia de un aumento lineal de la tasa de ataque del depredador respecto a la densidad de la presa, hasta llegar a un valor a partir del cual la máxima tasa de ataque permanece constante. La función que representa esta respuesta funcional es una función continua a trozos conformada por una función lineal y una función constante. Una alternativa a la respuesta funcional de Holling tipo I son las del tipo Lotka-Volterra [Seokot 2008]. En una respuesta funcional de Holling tipo I la tasa de consumo es lineal creciente hasta alcanzar la tasa máxima de depredación a_1 .

ii) Holling tipo II: Expresa un incremento desacelerado del consumo a medida que aumentan las presas consumidas, hasta acercarse asintóticamente a la tasa máxima de consumo de los depredadores. La función más usada que representa esta respuesta funcional es

$$H(x) = \frac{a_1 x}{x + b_1}.$$

La respuesta funcional de Holling tipo II es monótona creciente. La tasa de consumo de los depredadores aumenta con la densidad de las presas. Nótese que, si $x \rightarrow \infty$, entonces, $H(x) \rightarrow a_1$, y significa que a_1 es el valor máximo de la tasa de depredación de $H(x)$.

iii) Holling tipo III: Expresa que a bajas densidades de población de presas el efecto de la depredación es bajo, pero que a medida que aumenta la densidad de presas, la depredación es más intensa, fenómeno que ocurre en variadas interacciones propias de la naturaleza de las cadenas tróficas. Este tipo de respuesta funcional describe el comportamiento de un depredador generalista [Turchin 2003], debido a que si el número de presas es bajo, busca otras alternativas de alimentación. La función más usada para representar esta respuesta funcional es

$$H(x) = \frac{a_1 x^2}{x^2 + b_1}.$$

La respuesta funcional de Holling tipo III es monótona creciente, pero posee además un punto de inflexión. Nótese que, si $x \rightarrow \infty$, entonces, $H(x) \rightarrow a_1$, esto quiere decir que a_1 es el valor máximo de la tasa de depredación de $H(x)$.

iv) Holling tipo IV: En la obra *Predation* de Robert J. Taylor [Taylor 1984] se postula la existencia de la respuesta funcional de Holling tipo IV o respuesta funcional no-monótona;

generalmente es usada para modelar comportamientos antidepredatorios como la formación de grupos de defensa y el fenómeno de agregación. La función más usada para representar este tipo de respuesta funcional es

$$H(x) = \frac{a_1 x}{x^2 + b_1}.$$

La respuesta funcional de Holling tipo IV es no-monótona. Nótese que, si $x \rightarrow \infty$, entonces, $H(x) \rightarrow 0$, esto quiere decir que el depredador alcanza un máximo en el aprovechamiento de presas y luego decae asintóticamente a cero alcanzando la total saciedad.

Los perfiles gráficos de las respuestas funcionales de Holling son los siguientes

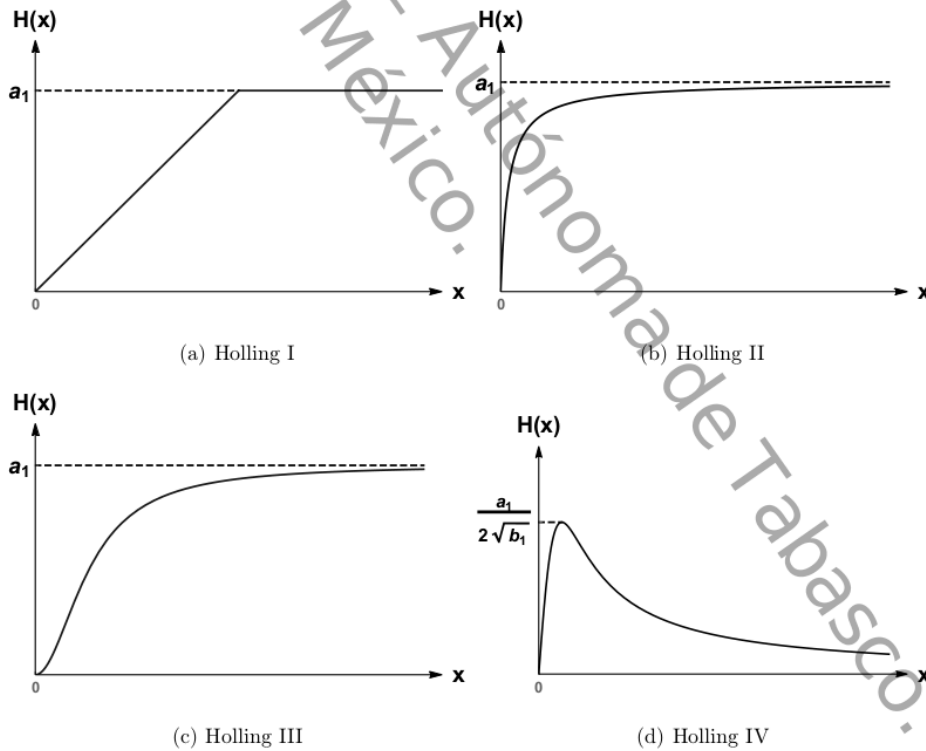


Figura 3.1: Gráficas de las respuestas funcionales de Holling.

3.4. Modelo de una cadena trófica de tercer nivel

En esta sección consideramos un modelo para tres especies llamado cadena trófica de tercer nivel (o sistema tritrófico), la cual está compuesta por una primera especie en la base de la cadena que, en ausencia de las demás especies, crece con un perfil logístico. Luego se tiene a un primer depredador especialista que consume a la especie en la base de la cadena, y por último, en la cima de la cadena existe un segundo depredador especialista (o superdepredador), el cual consume al primer depredador. Denotando por $X(\tau)$, $Y(\tau)$ y $Z(\tau)$ las respectivas densidades poblacionales, el modelo que analizamos en este trabajo es

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \rho X \left(1 - \frac{X}{k}\right) - a_1 XY, & X(0) > 0, \\ \frac{dY}{d\tau} &= c a_1 XY - dY - \frac{a_2 Y Z}{Y + b_2}, & Y(0) > 0, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \sigma Z^2 - \frac{\beta Z^2}{Y + b_2}, & Z(0) > 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde a_1 , a_2 , b_2 , c , d , β , σ , ρ y k son constantes positivas. Los significados de cada uno de estos parámetros en el modelo se explican a continuación. La primera ecuación del modelo describe el cambio en la densidad poblacional de presas y está dada por su propio crecimiento, menos la tasa con la que las presas son consumidas por el primer depredador. La constante ρ es ²⁶ la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas y k es la capacidad del medio para sostenerlas. Se asume que las presas satisfacen un crecimiento logístico que está acotado por la capacidad del medio. El término de interacción $-a_1 XY$ dice que la tasa de depredación es proporcional a la velocidad a la que el primer depredador y la presa se encuentran (esquema de Lotka-Volterra). La segunda ecuación del modelo describe el cambio en la densidad poblacional de depredadores, donde el primer término representa su crecimiento con la constante c como factor de conversión de presas en depredadores, el segundo término es ²⁴ la tasa de mortandad natural de los depredadores en ausencia de presas y el tercer término la tasa con la que disminuye la población de depredadores al tener encuentros con la población superdepredadora (modelada con una respuesta funcional de Holling tipo II). El parámetro a_2 se interpreta como la velocidad a

la que el superdepredador se encuentra con los depredadores por unidad de densidad de depredadores. La relación b_2/a_2 es el tiempo medio en el procesamiento de una comida. Finalmente, el primer término de la tercera ecuación del modelo expresa el crecimiento de la densidad poblacional superdepredadora, con σ como la tasa de crecimiento del superdepredador, el segundo término es su tasa de mortandad en un esquema de Leslie–Gower, semejante al estudiado en [Letellier 2002], donde b_2 representa la pérdida residual de la población superdepredadora debido a la escasez de su comida favorita. Esto último se basa en la idea de que la reducción en una población depredadora tiene una relación recíproca con la disponibilidad per cápita de su comida preferida, su capacidad de carga se encuentra establecida por los recursos del medio ambiente y es proporcional a la abundancia de su comida favorita, aquí β es el cociente del crecimiento intrínseco de la población entre el factor de conversión de depredadores en superdepredadores. Las siguientes secciones están dedicadas al análisis de la estabilidad y permanencia del sistema tritrófico representado por las ecuaciones (3.1).

3.4.1. Análisis ecológico de los equilibrios

Por razones ecológicas vamos a restringir el análisis del sistema al octante positivo de $\mathbb{R}^3$, es decir, $\Omega = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X > 0, Y > 0, Z > 0\}$. Como primer asunto en el análisis de estabilidad local, encontramos los equilibrios del modelo dado por el sistema de ecuaciones diferenciales (3.1), y para ello, igualamos a cero el lado derecho de cada una de las ecuaciones en (3.1) y resolvemos el sistema de ecuaciones algebraicas resultante. Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas obtenemos las siguientes soluciones para puntos de equilibrio que pueden colocarse en Ω

$$\mathbf{E}_0^* = (0, 0, 0), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E}_1^* = (k, 0, 0), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}_2^* = \left(\frac{d}{a_1 c}, \frac{\rho B_1}{a_1^2 c k}, 0 \right), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}_3^* = \left(\frac{k(\rho\sigma - a_1 B_2)}{\rho\sigma}, \frac{B_2}{\sigma}, \frac{\beta(\rho\sigma B_1 - a_1^2 c k B_2)}{a_2 \rho \sigma^2} \right), \quad (3.5)$$

donde $B_1 = a_1ck - d$ y $B_2 = \beta - b_2\sigma$. Nótese que el equilibrio $\mathbf{E}_1^*$ es consistente con el caso límite en que las especies depredadoras están ausentes y la densidad poblacional de presas crece hasta alcanzar como máximo la capacidad del medio k . Para aclarar lo anterior veamos que, la solución a la ecuación de crecimiento poblacional de presas en ausencia de depredadores es

$$X(\tau) = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{k}{X(0)}\right) e^{-\rho\tau}}$$

donde para tiempos muy grandes se tiene que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} X(\tau) = k.$$

Obsérvese que la capacidad del medio se alcanza independiente a los valores iniciales. Para garantizar que los equilibrios $\mathbf{E}_2^*$ y $\mathbf{E}_3^*$ se encuentran en el octante positivo de $\mathbb{R}^3$ basta con que se cumplan las siguientes condiciones sobre los parámetros: $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $\rho\sigma > a_1B_2$ and $\rho\sigma B_1 > a_1^2ckB_2$. Con las condiciones anteriores garantizamos que cada entrada de los equilibrios sean positivas y con ello que estén definidos en la región de interés ecológico.

Ecológicamente el equilibrio $\mathbf{E}_2^*$ abre la posibilidad de que, en ausencia del superdepredador, el depredador pueda sobrevivir junto con su presa, para ello en la siguiente sección haremos un breve análisis de la estabilidad de la cadena reducida al sistema depredador–presa y mostraremos que, en ausencia del superdepredador, la cadena reducida no exhibe una bifurcación de Hopf en su equilibrio de coexistencia. Obsérvese que este resultado inmediatamente excluye ecológicamente los equilibrios de la forma $(0, y^*, 0)$ y $(0, 0, z^*)$, ya que las poblaciones depredadoras mueren en ausencia de sus presas y los superdepredadores se extinguen si no tienen otro recurso para modificar su dieta, lo que puede verificarse por una simple inspección en las ecuaciones. Por último, el equilibrio $\mathbf{E}_3^*$ es el más importante, ya que es el equilibrio de coexistencia, así que después de analizar la estabilidad del equilibrio de coexistencia de la cadena reducida en la siguiente sección, nos centraremos en el objetivo principal del trabajo, es decir, demostrar que existe un ciclo límite estable que bifurca del equilibrio $\mathbf{E}_3^*$, en el cual las tres especies cohabitan sin extinguirse.

3.4.2. La cadena en ausencia del superdepredador

En esta sección abordamos el caso límite en el cual el superdepredador está ausente, esto es, cuando $z = 0$. A este análisis le llamaremos permanencia de la cadena. La idea consiste en verificar si esta simplificación ecológica de la cadena permite, al sistema reducido, acceder o no a un ciclo límite estable, en el cual las especies interactuantes cohabiten. Bajo este supuesto, el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de cadena trófica de tercer nivel (3.1) se reduce al siguiente sistema depredador–presa

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \rho X \left(1 - \frac{X}{k}\right) - a_1 XY, & X(0) > 0, \\ \frac{dY}{d\tau} &= ca_1 XY - dY, & Y(0) > 0,\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema algebraico que resulta de igualar a cero el lado derecho de las ecuaciones anteriores y se obtienen los siguientes equilibrios

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{p_0} &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{E}_{p_1} &= (k, 0, 0), \\ \mathbf{E}_{p_2} &= \left(\frac{d}{a_1 c}, \frac{\rho(a_1 ck - d)}{a_1^2 ck}, 0 \right),\end{aligned}$$

donde se debe satisfacer que $a_1 ck - d > 0$ para que el equilibrio $\mathbf{E}_{p_2}$ pueda estar en la región positiva de $\mathbb{R}^2$. Lo siguiente que haremos es estudiar la dinámica alrededor del equilibrio de coexistencia $\mathbf{E}_{p_2}$, por lo que calculando la linealización evaluada en $\mathbf{E}_{p_2}$ se obtiene

$$\mathbf{J}(\mathbf{E}_{p_2}) = \begin{pmatrix} -d\rho/a_1 ck & -d/c \\ \rho(a_1 ck - d)/a_1 k & 0 \end{pmatrix}$$

y cuyo polinomio característico es

$$\mathbf{P}(\lambda) = \lambda^2 + (d\rho/a_1 ck)\lambda + d\rho(a_1 ck - d)/a_1 k.$$

Para determinar la estabilidad del equilibrio aplicamos el criterio de Routh–Hurwitz, y en este caso, la matriz de Hurwitz asociada a $P(\lambda)$ es

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}(\lambda)) = \begin{pmatrix} d\rho/a_1ck & 0 \\ 1 & d\rho(a_1ck - d)/a_1ck \end{pmatrix},$$

donde los menores principales diagonales de la matriz son

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= d\rho/a_1ck, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} d\rho/a_1ck & 0 \\ 1 & d\rho(a_1ck - d)/a_1ck \end{vmatrix} \\ &= d^2\rho^2(a_1ck - d)/a_1^2c^2k^2. \end{aligned}$$

Nótese que $\Delta_1 > 0$, ya que todos los parámetros del sistema son positivos, pero $\Delta_2 > 0$ si y sólo si se satisface que $a_1ck - d > 0$, lo cual es consistente con el hecho de que es la misma condición que se exige para que el equilibrio $\mathbf{E}_{p_2}$ esté en la región positiva de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, como ¹⁸ los menores principales diagonales de la matriz son positivos, entonces la matriz es Hurwitz estable y las dos raíces de su polinomio característico $P(\lambda)$ o son complejas conjugadas con parte real negativa o ambas son reales negativas. En virtud de lo anterior y por el teorema de Hartman–Grobman, $\mathbf{E}_{p_2}$ es un equilibrio hiperbólico asintóticamente estable. Finalmente, resolviendo la ecuación $P(\lambda) = 0$ se obtienen los siguientes valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d\rho \pm \sqrt{\beta}}{2a_1ck}$$

donde la cantidad β determina el tipo de raíces y está dada por

$$\beta = d\rho(d\rho - 4a_1ck(a_1ck - d))$$

Si $\beta = 0$, se tienen raíces reales coincidentes y cualitativamente equivale a un nodo estable en $\mathbf{E}_{p_2}$. Luego, si $\beta > 0$ el único caso admisible es que las raíces sean reales y negativas, lo que cualitativamente también equivale a un nodo estable en $\mathbf{E}_{p_2}$. Por último, si $\beta < 0$ se tienen raíces complejas conjugadas con parte real negativa y cualitativamente ello equivale a un foco estable centrado en el equilibrio $\mathbf{E}_{p_2}$, pero además, como la parte real de los valores propios no cambia de signo, es nula la posibilidad de que exista una bifurcación de Hopf, ya que la condición de transversalidad (cambio de estabilidad) es una condición necesaria. Para mostrar lo anterior supongamos que el polinomio característico de la linealización tiene la estructura

$$P(\lambda) = (\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega),$$

donde todos los parámetros del sistema son estrictamente positivos, entonces, este supuesto nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales en términos de los parámetros

$$\begin{aligned} d\rho/a_1ck &= 0, \\ d\rho(a_1ck - d)/a_1k &= -\omega^2, \end{aligned}$$

pero la primera ecuación nos lleva a una contradicción, ya que todos los parámetros del sistema son estrictamente positivos, por lo tanto no se pueden colocar los valores propios en el eje imaginario del plano complejo, es decir, no existe pérdida de estabilidad, quedando así aclarado por qué no es posible que ocurra una bifurcación de Hopf en el equilibrio $\mathbf{E}_{p_2}$.

El resultado anterior es ecológicamente interesante, ya que bajo estos supuestos hemos modelado una cadena trófica de tercer nivel que no coexiste sin su superdepredador generalista. Este comportamiento ha sido documentado en muchas cadenas tróficas que presentan extinción de especies depredadoras, desafortunadamente como resultado de la intervención humana, dejando así una pérdida del equilibrio de los ecosistemas. Por mencionar un caso, se encuentra la reinserción de los lobos en el parque Yellowstone [Ripple 2011], los cuales estabilizaron el tamaño de las poblaciones de herbívoros que habían causado una pérdida cuantiosa de la masa vegetal del parque.

En esta dirección, estudios ecológicos arrojan que en los sistemas con tres niveles tróficos, los depredadores pueden afectar indirectamente a las comunidades de plantas, influyendo en el comportamiento y la densidad poblacional de presas [Ripple 2011].

A continuación se presenta una simulación numérica del sistema para valores de los parámetros: $\rho = 0.25$, $k = 1.5$, $a_1 = 0.05$, $c = 22$ y $d = 0.75$. Es claro que se satisface que $a_1ck - d > 0$, por lo que el equilibrio resultante está en el cuadrante positivo de $\mathbb{R}^2$ y además $\beta < 0$, obteniéndose cualitativamente así un foco estable. El tiempo considerado fue de $t = 0$ hasta $t = 1000$, con un valor inicial de $(X_0 = 0.1, Y_0 = 0.1)$.

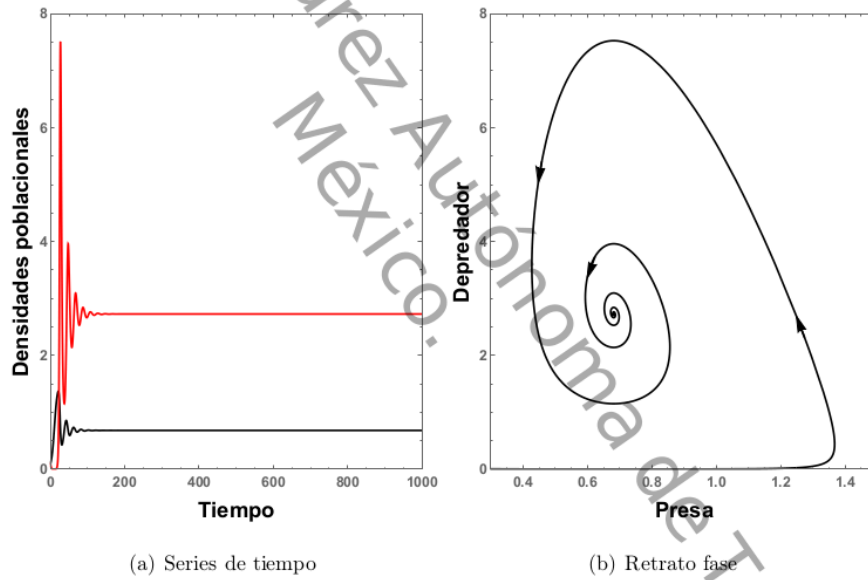


Figura 3.2: Simulación numérica de un foco estable.

En la gráfica de las series de tiempo se observa que el sistema se estabiliza muy rápido y en el retrato fase la dinámica termina, como es de esperarse, en el equilibrio de coexistencia de las dos especies, en este caso el equilibrio es: $(X \approx 0.68, Y \approx 2.72)$.

3.4.3. Bifurcación de Hopf en el equilibrio de coexistencia

Realizando un reescalamiento en el tiempo, tenemos que el sistema de ecuaciones (3.1) es equivalente a las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(b_2 + y)(a_1ky - k\rho + \rho x), \\ \dot{y} = -ky(-a_1b_2cx - a_1cxy + a_2z + b_2d + dy), \\ \dot{z} = kz^2(-\beta + b_2\sigma + \sigma y). \end{cases} \quad (3.6)$$

y realizando otro reescalamiento en el tiempo mediante las sustituciones

$$a_1 = \frac{(k-1)\rho}{k}, \quad b_2 = \frac{\beta}{\sigma} - 1, \quad y \quad c = \frac{k(a_2\sigma + \beta d)}{\beta(k-1)\rho}. \quad (3.7)$$

encontramos que el sistema posee un equilibrio de coexistencia, esto es

$$\mathbf{E}_3 = (1, 1, 1). \quad (3.8)$$

Aquí las sustituciones (3.7) se obtienen al preguntarnos cuándo el numerador de cada entrada del equilibrio (3.5) es igual a su denominador, o en otras palabras, se iguala a la unidad cada entrada del equilibrio (3.5) y se resuelve para los parámetros a_1 , b_2 y c . Además, las condiciones para que los parámetros a_1 , b_2 y c sean positivos son

H1: $k > 1$,

H2: $\beta > \sigma$,

La linealización del sistema evaluada en el equilibrio $\mathbf{E}_3$ es

$$J(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\rho}{\sigma} & -\frac{\beta(k-1)\rho}{\sigma} & 0 \\ k\left(a_2 + \frac{\beta d}{\sigma}\right) & \frac{a_2k\sigma}{\beta} & -a_2k \\ 0 & k\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico dado por

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

y los respectivos coeficientes de los términos de grado dos, uno y cero en λ son

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{a_2 k \sigma^2 - \beta^2 \rho}{\beta \sigma}, \\ A_1 &= -\frac{k(a_2 \sigma(\beta(k-1)\rho + \sigma(k\sigma - \rho)) + \beta^2 d(k-1)\rho)}{\sigma^2}, \\ A_0 &= -a_2 \beta k^2 \rho. \end{aligned}$$

Ahora vamos a caracterizar cuándo la ecuación característica de la linealización evaluada en $\mathbf{E}_3$ posee un par de valores propios complejos conjugados con parte real cero y con ello garantizar que en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.6) ocurre una bifurcación de Hopf, para posteriormente presentar el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov mediante el teorema de Kuznetsov abordado en el capítulo anterior.

Proposición 3.4.1 *Bajo las hipótesis **H1**, **H2** y $\sigma^3 \omega^2 > \beta^2 \rho^2 (\sigma - \beta(k-1))$ se tiene que el sistema (3.6) tiene un equilibrio en el octante positivo. Además, la aproximación lineal del equilibrio posee un par de valores propios imaginarios puros y uno real distinto de cero.*

Demostración. La hipótesis **H1** garantiza que los parámetros a_1 y c son positivos, y la hipótesis **H2** que el parámetro b_2 es positivo, así, con **H1** y **H2** se garantiza que las sustituciones (3.7) son apropiadas para obtener el equilibrio (3.8) en el octante positivo. Ahora vamos a analizar la aproximación lineal del sistema en el equilibrio de interés. En la aproximación lineal del equilibrio $\mathbf{E}_3$ el sistema tritrófico reescalado (3.6) tiene el polinomio característico

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0,$$

donde los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 son

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{a_2 k \sigma^2 - \beta^2 \rho}{\beta \sigma}, \\ A_1 &= -\frac{k(a_2 \sigma(\beta(k-1)\rho + \sigma(k\sigma - \rho)) + \beta^2 d(k-1)\rho)}{\sigma^2}, \\ A_0 &= -a_2 \beta k^2 \rho. \end{aligned}$$

Imponiendo que el polinomio tenga la estructura $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda + \omega i)(\lambda - \omega i)$, obtenemos un sistema de tres ecuaciones polinomiales que corresponden a los coeficientes de grado cero, uno y dos en λ , esto es

$$\begin{aligned} -a_2 \beta k^2 \rho - \alpha \omega^2 &= 0, \\ \sigma(a_2 k(\beta(\rho - k\rho) + \sigma(\rho - k\sigma)) + \sigma \omega^2) - \beta^2 d(k-1)k\rho &= 0, \\ -\alpha \beta \sigma + a_2 k \sigma^2 - \beta^2 \rho &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que a_2 es de grado uno en las tres ecuaciones, d es de grado uno en la segunda ecuación y de grado cero en las ecuaciones uno y tres, además α es de grado uno en la primera y en la tercera ecuación, pero de grado cero en la segunda. Entonces podemos resolver el sistema en forma sencilla para a_2 , d y α en términos de los demás parámetros, esto es

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\beta^2 \rho \omega^2}{\beta^2 k^2 \rho \sigma + k \sigma^2 \omega^2}, \\ d &= \frac{\beta^2 \rho^2 \omega^2 (\sigma - \beta(k-1)) + \sigma^3 \omega^4}{\beta^2 (k-1) k \rho (\beta^2 k \rho + \sigma \omega^2)}, \\ \alpha &= -\frac{\beta^3 k \rho^2}{\beta^2 k \rho \sigma + \sigma^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

El parámetro a_2 resulta ser estrictamente positivo, pero en el caso del parámetro d se necesita que se satisfagan las condiciones **H1** y

$$\sigma^3 \omega^2 > \beta^2 \rho^2 (\sigma - \beta(k-1))$$

para garantizar su positividad, y α que es el valor propio real resulta ser estrictamente negativo. Finalmente, sustituyendo lo obtenido para a_2 , d y α en el polinomio característico de la linealización evaluada en $\mathbf{E}_3$ se obtiene que

$$P(\lambda) = -\frac{(\lambda^2 + \omega^2)(\beta^3 k \rho^2 + \lambda(\beta^2 k \rho \sigma + \sigma^2 \omega^2))}{\sigma(\beta^2 k \rho + \sigma \omega^2)},$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +i\omega, \\ \lambda_2 &= -i\omega, \\ \lambda_3 &= -\frac{\beta^3 k \rho^2}{\beta^2 k \rho \sigma + \sigma^2 \omega^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que existe un conjunto de parámetros para los cuales el polinomio característico de la linealización en $\mathbf{E}_3$ posee dos valores propios imaginarios puros conjugados y un valor propio real diferente de cero, quedando demostrada la proposición.

□

La prueba anterior nos dice que la velocidad de cruce no es cero y uno de los valores propios permanece negativo para cualquier valor que se tome en los parámetros. Por lo tanto, ocurre una bifurcación de Hopf.

Con el fin de analizar la bifurcación, en la siguiente sección presentamos el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(\mathbf{E}_3)$ del sistema, restringido a la variedad central en los valores críticos de los parámetros a_2 y d , mostrando así que $\ell_1(\mathbf{E}_3) < 0$ y que además existe una bifurcación de Hopf supercrítica, es decir, que un único ciclo límite estable bifurca del equilibrio $\mathbf{E}_3$. En lo que sigue trabajamos con el equilibrio trasladado al origen.

3.4.4. Primer coeficiente de Lyapunov

En esta sección probamos el resultado principal de este trabajo, el cual se resume en el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1 *El sistema (3.6) posee una órbita periódica estable en el interior del octante positivo si se satisfacen las hipótesis $\mathbf{H1}$, $\mathbf{H1}$, $\sigma^3 \omega^2 > \beta^2 \rho^2 (\sigma - \beta(k-1))$ y que $\ell_1(0) < 0$ ($\ell_1(0)$ es el primer coeficiente de Lyapunov).*

Demostración. La prueba la vamos a realizar calculando explícitamente el primer coeficiente de Lyapunov en el punto de equilibrio $\mathbf{E}_3 = (1, 1, 1)$ trasladado al origen, y cuya existencia está garantizada por la Proposición 3.4.1.

Entonces, evaluando la linealización en el origen para los valores críticos de a_2 y d se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\rho}{\sigma} & -\frac{\beta(k-1)\rho}{\sigma} & 0 \\ \frac{\omega^2(\beta^2\rho^2+\sigma^2\omega^2)}{\beta(k-1)\rho(\beta^2k\rho+\sigma\omega^2)} & \frac{\beta\rho\omega^2}{\beta^2k\rho+\sigma\omega^2} & -\frac{\beta^2\rho\omega^2}{\beta^2k\rho\sigma+\sigma^2\omega^2} \\ 0 & k\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz A no está en su forma canónica de Jordan, procedemos a llevarla a la variedad central, para ello primero construimos el vector propio q asociado con el valor propio $\lambda_1 = i\omega$, y esto nos lleva a resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta\rho}{\sigma} - i\omega & -\frac{\beta(k-1)\rho}{\sigma} & 0 \\ \frac{\omega^2(\beta^2\rho^2+\sigma^2\omega^2)}{\beta(k-1)\rho(\beta^2k\rho+\sigma\omega^2)} & \frac{\beta\rho\omega^2}{\beta^2k\rho+\sigma\omega^2} - i\omega & -\frac{\beta^2\rho\omega^2}{\beta^2k\rho\sigma+\sigma^2\omega^2} \\ 0 & k\sigma & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de esto se sigue que el vector propio q ya normalizado y asociado a $\lambda_1 = i\omega$ es

$$q = \begin{pmatrix} -\frac{\beta(k-1)\rho\omega\xi}{k\sigma(\sigma\omega+i\beta\rho)} \\ \frac{i\omega\xi}{k\sigma} \\ \xi \end{pmatrix}$$

donde ξ está dado por

$$\xi = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}},$$

y donde s_1, s_2 están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} s_1 &= k^2\sigma^2(\beta^2\rho^2 + \sigma^2\omega^2), \\ s_2 &= \omega^2(k^2\sigma^4 + \beta^2((k-2)k+2)\rho^2) + \beta^2k^2\rho^2\sigma^2 + \sigma^2\omega^4. \end{aligned}$$

Además, el vector conjugado de q es

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta(k-1)\rho\omega\xi}{k\sigma(\sigma\omega+i\beta\rho)} \\ \frac{-i\omega\xi}{k\sigma} \\ \xi \end{pmatrix}$$

de forma tal que q y $\bar{q}$ satisfacen que $\langle q, \bar{q} \rangle = 1$. Ahora calculamos el vector propio p asociado al valor propio $\lambda_2 = -i\omega$ para la matriz A^T , así que resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta\rho}{\sigma} + i\omega & \frac{\omega^2(\beta^2\rho^2 + \sigma^2\omega^2)}{\beta(k-1)\rho(\beta^2k\rho + \sigma\omega^2)} & 0 \\ -\frac{\beta(k-1)\rho}{\sigma} & \frac{\beta\rho\omega^2}{\beta^2k\rho + \sigma\omega^2} + i\omega & k\sigma \\ 0 & -\frac{\beta^2\rho\omega^2}{\beta^2k\rho + \sigma\omega^2} & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces el vector propio p ya normalizado y asociado a $\lambda_2 = -i\omega$ es

$$p = \begin{pmatrix} \frac{k\sigma^2\omega(\sigma\omega+i\beta\rho)^2}{2\beta(k-1)\xi\rho(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega+i\beta\rho))} \\ \frac{k\sigma(\beta\rho-i\sigma\omega)(\beta^2k\rho + \sigma\omega^2)}{2\xi\omega(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega+i\beta\rho))} \\ \frac{\beta^2k\rho(\sigma\omega+i\beta\rho)}{2\xi(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega+i\beta\rho))} \end{pmatrix}$$

y el vector conjugado de p es

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} -\frac{k\sigma^2\omega(\sigma\omega-i\beta\rho)^2}{2\beta(k-1)\xi\rho(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega-i\beta\rho))} \\ \frac{k\sigma(\beta\rho+i\sigma\omega)(\beta^2k\rho + \sigma\omega^2)}{2\xi\omega(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega-i\beta\rho))} \\ \frac{\beta^2k\rho(\sigma\omega-i\beta\rho)}{2\xi(\sigma^2\omega^3 + \beta^2k\rho(\sigma\omega-i\beta\rho))} \end{pmatrix}$$

de forma tal que se satisface que $\langle \bar{p}, q \rangle = 1$. Así, por lo anterior, la parte lineal del análisis queda terminada. Por último, veamos que el sistema (3.6) posee términos no lineales cuadráticos y cúbicos, por lo que haciendo uso de la expresión (2.7) para el primer

coeficiente de Lyapunov, obtenemos

$$\ell_1(0) = \frac{\delta Q}{RUV}, \quad (3.9)$$

donde δ , Q , R , U y V están dados por

$$\begin{aligned} \delta &= \beta^2 \rho^2 + \sigma^2 \omega^2, \\ Q &= \beta^{10} B k^6 \rho^5 \sigma^2 - 4D \rho \sigma^6 \omega^{10} + 2F k \sigma^5 \omega^8 + 2\beta^4 H k^3 \rho^2 \sigma^3 \omega^6, \\ R &= 6\beta^2 \rho (k^2 (\beta^6 \rho^4 + \beta^4 \rho^2 \sigma^2 \omega^2) + 2\beta^2 k \rho \sigma^3 \omega^4 + \sigma^4 \omega^6), \\ U &= k^2 (\beta^6 \rho^4 + 4\beta^4 \rho^2 \sigma^2 \omega^2) + 8\beta^2 k \rho \sigma^3 \omega^4 + 4\sigma^4 \omega^6, \\ V &= 2\beta^2 \rho^2 \omega^2 + k^2 (\beta^2 \rho^2 (\sigma^2 + \omega^2) + \sigma^4 \omega^2) - 2\beta^2 k \rho^2 \omega^2 + \sigma^2 \omega^4. \end{aligned}$$

Aquí hemos renombrado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} B &= \beta^4 \rho^4 + 5\beta^2 \rho^2 \sigma^2 \omega^2 + 4\sigma^4 \omega^4, \\ D &= 2\beta^4 \rho^4 + 10\beta^3 \rho^2 \sigma \omega^2 - \beta^2 \sigma^2 \omega^2 (\omega^2 + 5\rho^2) + 12\beta \sigma^3 \omega^4 + 6\sigma^4 \omega^4, \\ E &= -3\beta^4 \rho^4 - 4\beta^3 \rho^3 \sigma^2 + \beta^2 \rho^2 \sigma^2 (17\sigma^2 + 6\omega^2) + 8\beta \rho \sigma^4 \omega^2 + 20\sigma^6 \omega^2, \\ F &= 10\beta^6 \rho^6 - 40\beta^5 \rho^4 \sigma \omega^2 + \beta^4 \rho^2 \sigma^2 \omega^2 (7\rho^2 + 8\omega^2) + 2\beta^3 \rho^2 \sigma^2 \omega^4 (\rho - 36\sigma) \\ &\quad + 9\beta^2 \rho^2 \sigma^4 \omega^4 + 12\beta \rho \sigma^4 \omega^6 + 24\sigma^6 \omega^6, \\ H &= 5\beta^6 \rho^4 + \beta^5 \rho^4 (3\sigma - 10\rho) + 2\beta^4 \rho^2 \sigma (29\rho^2 \sigma - 2\rho \omega^2 + 4\sigma \omega^2) + 78\sigma^6 \omega^4 \\ &\quad - \beta^3 \rho^2 \sigma^2 \omega^2 (31\rho + 32\sigma) + \beta^2 \rho^2 \sigma^2 \omega^2 (127\sigma^2 + 7\omega^2) + 40\beta \rho \sigma^4 \omega^4, \\ M &= 4\beta^8 \rho^8 + 2\beta^7 \rho^6 \sigma \omega^2 + \beta^6 \rho^4 \sigma^2 \omega^2 (38\rho^2 + 5\omega^2) + 72\beta \rho \sigma^6 \omega^8 \\ &\quad + \beta^4 \rho^2 \sigma^3 \omega^4 (107\rho^2 \sigma - 4\rho \omega^2 + 24\sigma \omega^2) - 2\beta^5 \rho^4 \sigma^2 \omega^4 (9\rho + 17\sigma) \\ &\quad - 4\beta^3 \rho^2 \sigma^4 \omega^6 (7\rho + 38\sigma) + 4\beta^2 \rho^2 \sigma^4 \omega^6 (49\sigma^2 + \omega^2) + 144\sigma^8 \omega^8, \\ N &= \beta^8 \rho^6 + \beta^6 \rho^4 \sigma (10\rho^2 \sigma + 2\rho \omega^2 + 5\sigma \omega^2) + 4\beta^5 \rho^4 \sigma^3 \omega^2 \\ &\quad + 2\beta^4 \rho^2 \sigma^2 \omega^2 (\rho^2 (31\sigma^2 - \omega^2) - 2\rho \sigma \omega^2 + 2\sigma^2 \omega^2) + 40\beta \rho \sigma^6 \omega^6 \\ &\quad - 2\beta^3 \rho^2 \sigma^4 \omega^4 (15\rho + 4\sigma) + 4\beta^2 \rho^2 \sigma^4 \omega^4 (29\sigma^2 + 4\omega^2) + 76\sigma^8 \omega^6. \end{aligned}$$

□

Ahora mostramos que el Teorema 3.4.1 es no vacío mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.1 Si asignamos valores a los parámetros de los que depende $\ell_1(0)$, esto es, $k = 3/2$, $\sigma = 1/15$, $\rho = 1/4$, $\beta = 1/5$ y $\omega = 1$ tenemos que el valor del primer coeficiente de Lyapunov es

$$\ell_1(0) = -\frac{6361899437}{2393310738060} \approx -0.0026582$$

El primer coeficiente de Lyapunov resulta negativo para estos valores de los parámetros, por lo tanto, existe una familia de valores de los parámetros para los cuales la bifurcación de Hopf es supercrítica y el ciclo límite que bifurca del equilibrio de coexistencia es estable.

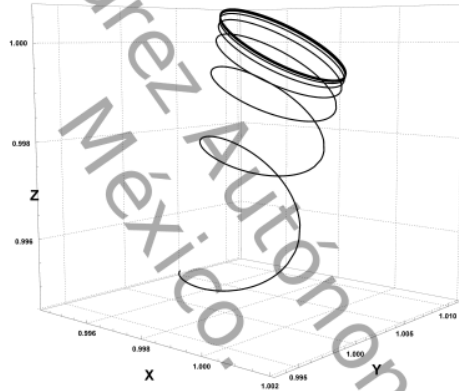


Figura 3.3: Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 500$.

Los valores de los parámetros a_1 , a_2 , c , d y b_2 son

$$a_1 \approx 0.0833, \quad a_2 \approx 1.2244, \quad c \approx 9.0702, \quad d \approx 0.3476, \quad b_2 = 2.$$

Así, si nos movemos ligeramente del equilibrio tomando el valor inicial

$$(x = 0.998, y = 0.998, z = 0.998)$$

detectamos el ciclo límite con mucha precisión como puede verse en el retrato fase de la figura 3.3. Las respectivas series de tiempo son

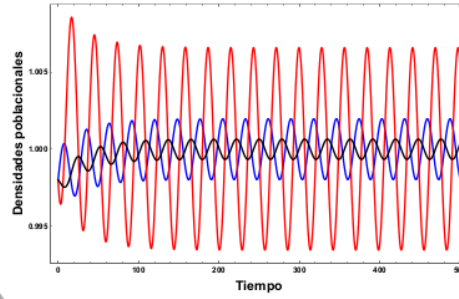


Figura 3.4: Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 500$.

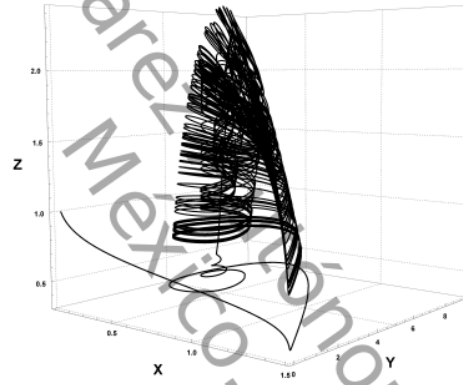


Figura 3.5: Retrato fase con $t = 0$ hasta $t = 2000$.

El modelo (3.1) pese a ser sencillo presenta mucha riqueza dinámica, por ejemplo, si cambiamos los valores de los parámetros a_1 , d y ρ por

$$a_1 = 0.1333, \quad d = 0.3476, \quad \rho = 1.$$

para el valor inicial

$$(x = 0.1, y = 0.1, z = 1)$$

tenemos un atractor como el de la figura 3.5. Las series de tiempo del atractor son

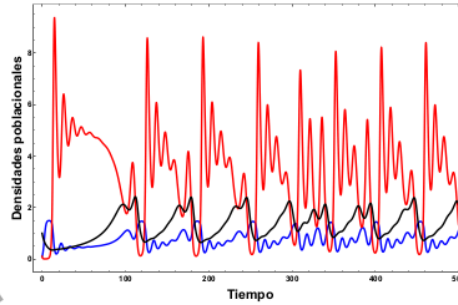


Figura 3.6: Series de tiempo con $t = 0$ hasta $t = 500$.

Como último asunto, revisamos brevemente la degeneración de la bifurcación de Hopf, es decir, al análisis para determinar cuándo $\ell_1(0) = 0$. Con este propósito modificamos la expresión (3.9) del primer coeficiente de Lyapunov, fijando primero los valores de los parámetros k , β , ρ y σ , esto es

$$k = 3/2, \quad \beta = 1/5, \quad \rho = 1/4, \quad \sigma = 1/15,$$

y con estos valores de los parámetros la expresión (3.9) se reduce a

$$\ell_1(0) = -\frac{(16\omega^2 + 9)B_1}{18(1600\omega^4 + 1141\omega^2 + 9)B_2B_3} \quad (3.10)$$

donde B_1 , B_2 y B_3 están dados por

$$\begin{aligned} B_1 &= 104857600000\omega^{14} - 44728320000\omega^{12} - 24496128000\omega^{10} - 659404800\omega^8 \\ &\quad - 1266710400\omega^6 - 1545194232\omega^4 - 350751060\omega^2 - 1594323, \\ B_2 &= 25600\omega^6 + 11520\omega^4 + 1296\omega^2 + 729, \\ B_3 &= 102400\omega^6 + 46080\omega^4 + 5184\omega^2 + 729. \end{aligned}$$

Nótese que (3.10) sólo depende del parámetro ω . Ahora, si despejamos ω del valor crítico para a_2 obtenemos

$$\omega = \sqrt{-\frac{a_2\beta^2k^2\rho\sigma}{a_2k\sigma^2 - \beta^2\rho}}, \quad (3.11)$$

y si el valor para ω lo sustituimos en (3.10) obtenemos una expresión del primer coeficiente de Lyapunov equivalente a (3.9), pero un tanto más reducida, esto es

$$\ell_1(0) = -\frac{D_5 D_1}{18 D_2 D_3 D_4}, \quad (3.12)$$

donde hemos renombrado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{789189885 a_2 \beta^2 \rho \sigma}{\frac{3a_2 \sigma^2}{2} - \beta^2 \rho} + \frac{30611001600000 a_2^7 \beta^{14} \rho^7 \sigma^7}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^7} - \frac{5803335720000 a_2^6 \beta^{12} \rho^6 \sigma^6}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^6} \\ &+ \frac{1412570178000 a_2^5 \beta^{10} \rho^5 \sigma^5}{(\frac{3a_2 \sigma^2}{2} - \beta^2 \rho)^5} - \frac{16899823800 a_2^4 \beta^8 \rho^4 \sigma^4}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^4} + \frac{14428623150 a_2^3 \beta^6 \rho^3 \sigma^3}{(\frac{3a_2 \sigma^2}{2} - \beta^2 \rho)^3} \\ &- \frac{15645091599 a_2^2 \beta^4 \rho^2 \sigma^2}{2(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^2} = 1594323, \\ D_2 &= \frac{2916 a_2 \beta^2 \rho \sigma}{\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2}} + \frac{291600 a_2^3 \beta^6 \rho^3 \sigma^3}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^3} + \frac{58320 a_2^2 \beta^4 \rho^2 \sigma^2}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^2} + 729, \\ D_3 &= \frac{11664 a_2 \beta^2 \rho \sigma}{\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2}} + \frac{1166400 a_2^3 \beta^6 \rho^3 \sigma^3}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^3} + \frac{233280 a_2^2 \beta^4 \rho^2 \sigma^2}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^2} + 729, \\ D_4 &= \frac{10269 a_2 \beta^2 \rho \sigma}{4(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})} + \frac{8100 a_2^2 \beta^4 \rho^2 \sigma^2}{(\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2})^2} + 9, \\ D_5 &= \frac{36 a_2 \beta^2 \rho \sigma}{\beta^2 \rho - \frac{3a_2 \sigma^2}{2}} + 9. \end{aligned}$$

Entonces, si resolvemos $\ell_1(0) = 0$ para el parámetro ρ encontramos una raíz real positiva que está dada por la expresión

$$\rho = \frac{9 a_2 k \sigma^2}{\beta^2 (16 a_2 k^2 \sigma + 9)}, \quad (3.13)$$

de la misma manera, si resolvemos para el parámetro σ encontramos otra raíz real positiva que es

$$\sigma = \frac{\sqrt{64 a_2^2 \beta^4 k^4 \rho^2 + 81 a_2 \beta^2 k \rho} + 8 a_2 \beta^2 k^2 \rho}{9 a_2 k}, \quad (3.14)$$

Es importante notar que, debido a la complejidad algebraica del primer coeficiente de Lyapunov, la degeneración es analizada fijando algunos valores de los parámetros y dejando libre al menos uno. Otra forma de poder analizar la degeneración es sustituir (3.11) en la expresión (3.9) y luego fijar algunos parámetros, dejar libres otros y resolver en términos de alguno de los parámetros libres. También puede hacerse de manera general, aunque ello consume demasiados recursos de cómputo, y, para el propósito de mostrar que existe la degeneración, dar algún ejemplo numérico basta.

Ejemplo 3.4.2 Si fijamos los parámetros en los valores $a_2 = 2$, $\beta = 1/5$, $k = 3/2$ y $\sigma = 1/15$ obtenemos que el valor del parámetro ρ (de acuerdo a (3.13)) donde se anula el primer coeficiente de Lyapunov (3.12) es $\rho = 5/23$.

Conclusiones

Estudiamos una cadena trófica de tercer nivel que presenta un ciclo límite estable y una aportación interesante es que, cuando se tiene la cadena reducida a un sistema depredador-presa no se presenta ciclo límite alguno, pero la introducción de una tercera especie depredadora logra que la nueva cadena trófica (de tercer nivel) sí presente un ciclo límite estable en el que cohabitan las tres especies.

Encontramos valores de los parámetros para los cuales $\ell_1(0)$ es negativo, sin embargo, en general es muy difícil determinar las condiciones para que esto suceda, ya que su estructura algebraica es bastante complicada. Además, verificamos que existen valores de los parámetros para los cuales la bifurcación de Hopf es degenerada, esto es, aquellos valores donde el primer coeficiente de Lyapunov es cero.

En cuanto a la parte numérica, lo más importante para detectar el ciclo límite estable fue considerar una tasa baja de crecimiento para la densidad poblacional de presas comparada con la tasa de crecimiento de los superdepredadores. Además, se consideró que la tasa de conversión de presas en depredadores debe ser más alta que la tasa de conversión de depredadores en superdepredadores, debido a que el consumo del depredador es tipo Lotka-Volterra y la eficiencia es perfecta, en cambio, el superdepredador que no posee enemigo natural dentro de la estructura de la cadena, debe tener una tasa baja de conversión de depredadores en superdepredadores, puesto que su consumo y su eficiencia son limitados por ser modelado mediante una respuesta funcional de Holling tipo II, y además, su tasa de mortandad que depende explícitamente de ese consumo está dada en un esquema de Leslie-Gower.

En trabajos posteriores resulta conveniente estudiar la degeneración de la bifurcación de Hopf en el modelo (3.1), tal y como se muestra en la teoría expuesta en [Kuznetsov 2004]. Otra idea sería mejorar el modelo asumiendo que el consumo de los depredadores está ligeramente limitado y así tener una cadena menos ideal.

Apéndice A

Aquí se incluyen los códigos Mathematica de las figuras importantes de este trabajo.

Código *Mathematica* 1: Retrato fase figura 3.3

```
odetrifrophic := {D[x[t], t] == rho x[t] (1 - x[t]/k) - a1 x[t] y[t],
D[y[t], t] == -d y[t] + a1 c x[t] y[t] - (a2 y[t] z[t])/(b2 + y[t]),
D[z[t], t] == sigma z[t]^2 - (beta z[t]^2)/(b2 + y[t])};
a1 := 0.08333333333333333; a2 := 1.2244897959183674; b2 := 2;
k := 3/2; d := 0.3476946334089191; sigma := 1/15;
c := 9.070294784580499; rho := 1/4; beta := 1/5;
Tmin := 0; Tmax := 500; Detail = 200;
SolnOde := NDSolve[{odetrifrophic[[1]], odetrifrophic[[2]],
odetrifrophic[[3]], x[0] == 0.998, y[0] == 0.998,
z[0] == 0.998}, {x, y, z}, {t, Tmin, Tmax}, MaxSteps -> Infinity]
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. SolnOde], {t, Tmin, Tmax},
PlotPoints -> Detail, PlotRange -> All, PlotTheme -> "Detailed",
BoxRatios -> {1, 1, 1}, PlotStyle -> {Black, Thickness[.003]},
AxesLabel -> {Style["X", 18], Style["Y", 18], Style["Z", 18]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, Small],
PerformanceGoal -> {pg, "HighQuality"}, ImageSize -> Large,
ViewPoint -> {2.1, - 2.4, 0.5}, DisplayFunction -> Identity]
```

Código *Mathematica* 2: Series de tiempo figura 3.4

```
a1 := 0.08333333333333333; a2 := 1.2244897959183674; b2 := 2;
k := 3/2; d := 0.3476946334089191; sigma := 1/15;
c := 9.070294784580499; rho := 1/4; beta := 1/5;
InitialPoint = {0.998, 0.998, 0.998}; TimeMin = 0; TimeMax = 500; Detail = 200;
Solution = NDSolve[{D[x[t], t] == rho x[t] (1 - x[t]/k) - a1 x[t] y[t],
D[y[t], t] == -d y[t] + a1 c x[t] y[t] - (a2 y[t] z[t])/(b2 + y[t]),
D[z[t], t] == sigma z[t]^2 - beta z[t]^2/(b2 + y[t]),
x[0] == InitialPoint[[1]], y[0] == InitialPoint[[2]],
z[0] == InitialPoint[[3]]}, {x, y, z}, {t, TimeMin, TimeMax},
MaxSteps -> Infinity];
TritrophicFunction[t_] = {x[t], y[t], z[t]} /. First[Solution];
Plot[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. Solution], {t, TimeMin, TimeMax},
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Blue, Red, Black}, Frame -> True,
FrameLabel -> {Style["Tiempo", 18], Style["Densidades poblacionales", 18]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, Medium], RotateLabel -> True,
PlotPoints -> Detail, ImageSize -> 700, DisplayFunction -> Identity]
```

Código *Mathematica* 3: Retrato fase figura 3.5

```

odetritrophic := {D[x[t], t] == rho x[t] (1 - x[t]/k) - a1 x[t] y[t],
D[y[t], t] == -d y[t] + a1 c x[t] y[t] - (a2 y[t] z[t])/(b2 + y[t]),
D[z[t], t] == sigma z[t]^2 - beta z[t]^2/(b2 + y[t])};
a1 := 0.1333333333333333; a2 := 1.2244897959183674; b2 := 2;
k := 3/2; d := 0.4476946334089191; sigma := 1/15;
c := 9.070294784580499; rho := 1; beta := 1/5;
Tmin := 0; Tmax := 2000; Detail = 200;
SolnOde := NDSolve[{odetritrophic[[1]], odetritrophic[[2]],
odetritrophic[[3]], x[0] == 0.1, y[0] == 0.1,
z[0] == 1}, {x, y, z}, {t, Tmin, Tmax}, MaxSteps -> Infinity]
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. SolnOde], {t, Tmin, Tmax},
PlotPoints -> Detail, PlotRange -> All, PlotTheme -> "Detailed",
BoxRatios -> {1, 1, 1}, PlotStyle -> {Black, Thickness[.003]},
AxesLabel -> {Style["X", 18], Style["Y", 18], Style["Z", 18]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, Small],
PerformanceGoal -> {pg, "HighQuality"}, ImageSize -> Large,
ViewPoint -> {2.1, - 2.4, 0.5}, DisplayFunction -> Identity]

```

Código *Mathematica* 4: Series de tiempo figura 3.6

```

a1 := 0.1333333333333333; a2 := 1.2244897959183674; b2 := 2;
k := 3/2; d := 0.4476946334089191; sigma := 1/15;
c := 9.070294784580499; rho := 1; beta := 1/5;
InitialPoint = {0.1, 0.1, 1}; TimeMin = 0; TimeMax = 500; Detail = 200;
Solution = NDSolve[{D[x[t], t] == rho x[t] (1 - x[t]/k) - a1 x[t] y[t],
D[y[t], t] == -d y[t] + a1 c x[t] y[t] - (a2 y[t] z[t])/(b2 + y[t]),
D[z[t], t] == sigma z[t]^2 - beta z[t]^2/(b2 + y[t]),
x[0] == InitialPoint[[1]], y[0] == InitialPoint[[2]],
z[0] == InitialPoint[[3]]}, {x, y, z}, {t, TimeMin, TimeMax},
MaxSteps -> Infinity];
TritrophicFunction[t_] = {x[t], y[t], z[t]} /. First[Solution];
Plot[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. Solution], {t, TimeMin, TimeMax},
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Blue, Red, Black}, Frame -> True,
FrameLabel -> {Style["Tiempo", 18], Style["Densidades poblacionales", 18]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, Medium], RotateLabel -> True,
PlotPoints -> Detail, ImageSize -> 700, DisplayFunction -> Identity]

```

Apéndice B

En la última sección de este trabajo se omitieron todas las expresiones del cálculo simbólico para el primer coeficiente de Lyapunov, excepto la principal, ya que limita la comprensión de lo expuesto y desvía la atención de la idea central, que es interpretar ecológicamente los resultados obtenidos. En vez de colocar expresiones simbólicas extensas, presentamos los principales códigos *Mathematica*.

Los códigos de los elementos de la expresión (2.7) para realizar el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov son

Código *Mathematica* 5: Primer coeficiente de Lyapunov

```
K = FullSimplify[Inverse[2 omega I {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}} - A]];
x1 = Simplify[K.B[q[[1]], q[[2]], q[[3]], q[[1]], q[[2]], q[[3]]];
aa1 = Simplify[pc.B[qc[[1]], qc[[2]], qc[[3]], x1[[1]], x1[[2]], x1[[3]]];
i1 = Simplify[Inverse[A].B[q[[1]], q[[2]], q[[3]], qc[[1]], qc[[2]], qc[[3]]];
bb = Simplify[-2 pc.B[q[[1]], q[[2]], q[[3]], i1[[1]], i1[[2]], i1[[3]]];
cc = Simplify[pc.CC[q[[1]], q[[2]], q[[3]], q[[1]], q[[2]], q[[3]],
qc[[1]], qc[[2]], qc[[3]]];
prevLyap = Simplify[(aa1 + bb + cc)/(2 omega)]
```

donde $pc = \bar{p}$ y $qc = \bar{q}$, vectores que fueron calculados en la última sección. La cantidad denominada prevLyap es un cociente de complejos

$$z = \frac{a + ib}{c + id}$$

así que para poder tomar su parte real debemos llevarlo a la forma $z = e + im$. Considerando todo esto es que se llega a la expresión (3.9) del primer coeficiente de Lyapunov.

Bibliografía

- [Arnold 1983] Arnold, V. I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Blé 2016] Gamaliel Blé, Víctor Castellanos and Jaume Llibre, *Existence of limit cycles in a tritrophic food chain model with Holling functional responses of type II and III*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, **128** , 7–22.
- [Carr 1981] Carr, Jack, *Applications of Centre Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol. **35**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Coleman 1983] S. Coleman, Courtney, Braun, Martin and A. Drew, Donald. *Differential Equations Models*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Chicone 2006] Chicone, Carmen, *Differential equations and dynamical systems, Ordinary differential equations with applications*, Second Edition, Texts in Applied Mathematics 34, Springer, 2006.
- [Edelstein 1988] L. Edelstein-Keshet , *Mathematical models in Biology*, McGraw, Hill, Inc., 1988.
- [Freedman 1980] Freedman, Herbert I., *Deterministic mathematical models in populations ecology*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 57, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.
- [Guckenheimer 1993] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear oscillations, Dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, 1993.
- [Kuznetsov 2004] Kuznetsov, Yuri A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Third Edition, Vol. 112, Springer-Verlag: New York, 2004.
- [Letellier 2002] Christophe Letellier and M. A. Azis–Alaoui *Analysis of the dynamics of a realistic ecological model*, Chaos, Solitons and Fractals, **13**, 2002, 95–107.

- [Lotka 1925] Lotka, Alfred James, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Company, 1925.
- [Marsden 1976] Marsden, Jerrold E. and McCracken, M. *The Hopf bifurcations and its applications*, Springer-Verlag: New York, 1976.
- [May 2001] May, Robert M., *Stability and complexity in model ecosystems*, Second Edition, Princeton University Press, 2001.
- [Olivares 2011] E. González-Olivares and A. Rojas Palma, *Multiple limit cycles in a Gause type predator-prey model with Holling type III functional response and Allee effect on prey*, Bulletin of Mathematical Biology **35** (2011), 366–381.
- [Perko 2001] Perko, Lawrence, *Differential equations and dynamical systems*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Ripple 2011] William J. Ripple and Robert L. Beschta. *Trophic cascades in Yellowstone: The first 15 years after wolf reintroduction*, Biological Conservation, Elsevier, 2011.
- [Ruan 2001] S. Ruan and D. Xiao, *Global analysis in a predator-prey system with non-monotonic functional response*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, **61**, 1445–1472.
- [Rudin 1964] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1964.
- [Seokot 2008] G. Seo and M. Kot, *A comparison of tow predator-prey models with Holling's type I functional response*, Mathematical Biosciences, **212**, 2008, 161–179.
- [Taylor 1984] Taylor, Robert J., *Predation, Population and community Biology*, Vol. 3, Chapman and Hall, 1984.
- [Turchin 2003] Turchin, Peter, *Complex Population Dynamics, A Theoretical/Empirical Synthesis*, Monographs in Population Biology, Vol. 35, Princeton University Press, 2003.

CICLOS LÍMITE EN UNA CADENA TRÓFICA DE TERCER NIVEL CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y RESPUESTAS FUNCIONALES DE LOTKA-VOLTERRA Y HOLLING TIPO II.

ORIGINALITY REPORT

15%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	repositorio.uniquindio.edu.co Internet	481 words — 3%
2	posgrado.mat.uson.mx Internet	417 words — 2%
3	repositorioinstitucional.unison.mx Internet	262 words — 1%
4	lic.mat.uson.mx Internet	260 words — 1%
5	doczz.es Internet	219 words — 1%
6	zaguan.unizar.es Internet	157 words — 1%
7	es.scribd.com Internet	103 words — 1%
8	1library.co Internet	75 words — < 1%
9	dgsa.uaeh.edu.mx:8080 Internet	69 words — < 1%

10	ri.uagro.mx Internet	66 words — < 1 %
11	eprints.uanl.mx Internet	57 words — < 1 %
12	repositorio.usm.cl Internet	53 words — < 1 %
13	accesoabierto.uh.cu Internet	49 words — < 1 %
14	repositorio.unal.edu.co Internet	37 words — < 1 %
15	www.fcfm.buap.mx Internet	35 words — < 1 %
16	www.sys.eng.shizuoka.ac.jp Internet	33 words — < 1 %
17	prezi.com Internet	28 words — < 1 %
18	www.lic.mat.uson.mx Internet	28 words — < 1 %
19	docplayer.es Internet	27 words — < 1 %
20	repositorio.unsaac.edu.pe Internet	26 words — < 1 %
21	bdigital.unal.edu.co Internet	24 words — < 1 %

22	www.docme.ru Internet	24 words — < 1 %
23	hdl.handle.net Internet	23 words — < 1 %
24	www.matehipermaticas.cl Internet	23 words — < 1 %
25	d-nb.info Internet	18 words — < 1 %
26	www.scielo.sa.cr Internet	17 words — < 1 %
27	Verduzco, F.. "Hopf bifurcation control: A new approach", Systems & Control Letters, 200606 Crossref	13 words — < 1 %
28	www.scopus.com Internet	13 words — < 1 %
29	Daniel J. Duffy. " The Method of Lines (), Splitting and the Matrix Exponential ", Wiley, 2021 Crossref	12 words — < 1 %
30	ciencias.unex.es Internet	12 words — < 1 %
31	is.muni.cz Internet	12 words — < 1 %
32	acfiman.org Internet	11 words — < 1 %
33	archive.org Internet	11 words — < 1 %

34	libreriaonline.org.pe Internet	11 words — < 1%
35	repositorio.uptc.edu.co Internet	11 words — < 1%
36	repository.libertadores.edu.co Internet	11 words — < 1%
37	core.ac.uk Internet	10 words — < 1%
38	oa.upm.es Internet	10 words — < 1%
39	pt.slideshare.net Internet	10 words — < 1%
40	www.coursehero.com Internet	10 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES ON

EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE SOURCES

EXCLUDE MATCHES

OFF

< 10 WORDS