



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



**CONJUNTOS DE JULIA DE FUNCIONES
POLINOMIALES CUÁRTICAS**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS
APLICADAS**

PRESENTA
CARLOS FRANCISCO ARIAS MÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

Cunduacán, Tab.

Diciembre 2016



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ciencias
Básicas

DIRECCIÓN

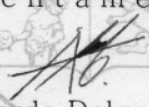
24 de octubre de 2016

Mat. Carlos Francisco Arias Méndez
Pasante de la Maestría en Ciencias
en Matemáticas Aplicadas
P r e s e n t e.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "Conjuntos de Julia de Funciones Polinomiales Cuárticas", en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL POR TESIS DE MAESTRÍA para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.


Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director

DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DIRECCIÓN.

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JLSC/emt

Miembro CUMEX desde 2008

 Consorcio de
Universidades
Mexicanas

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km. 1, Carretera Cunduacán - Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco.
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6701 E-mail: direccion.dacb@ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

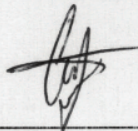
El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "Conjuntos de Julia De Funciones Polinomiales Cuárticas", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 24 días del mes de noviembre del año 2016.

AUTORIZÓ



CARLOS FRANCISCO ARIAS MÉNDEZ

142A15003

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres y a mis hermanos quienes me apoyaron todo el tiempo.

A mi asesor de tesis el Dr. Gamaliel Blé González quien nunca desistió en enseñarme cosas nuevas de sistemas dinámicos y sobre todo por tenerme paciencia en la realización de este trabajo.

A mis amigos de la maestría en ciencias en matemáticas aplicada.

A mis maestros de la maestría por enseñarme y orientarme en cada asignatura.

A los revisores de la tesis por sus sugerencias y hacer de este un mejor trabajo.

A CONACYT por su apoyo en la realización de este trabajo.

Para ellos es esta dedicatoria de tesis, ya que es a ellos a quienes les debo su apoyo.

Conjuntos de Julia de Funciones Polinomiales
Cuárticas

Carlos Francisco Arias Méndez
Asesor de Tesis: Dr. Gamaliel Blé González

28 de noviembre de 2016

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Clasificación de órbitas periódicas	5
1.1.1. Atractores y Repulsos	8
1.1.2. Indiferente	9
1.2. Conjuntos de Julia y Fatou; Definiciones y Propiedades	12
1.2.1. Definiciones y Notación	13
1.2.2. Clasificación de las componentes de Fatou	14
1.3. Hiperbolicidad	16
2. Dinámica de Polinomios	18
2.1. Conjunto de Julia lleno	18
2.2. Polinomios cuadráticos	20
2.2.1. Rayos Externos	23
2.2.2. Rayos externos en el Mandelbrot	25
2.3. Polinomios Cuárticos	27
2.3.1. Clases de Conjugaciones	27
2.3.2. Espacio de Parámetros	31
2.3.3. Lugar de Simetría	34
3. Dinámica de Polinomios Acoplados	37
3.1. Lugar de conexidad	37
3.2. Conjunto de Julia Lleno	41
3.3. Conclusión	70
Bibliografía	72

Introducción

Los modelos matemáticos han sido una herramienta muy importante en el análisis y comprensión del crecimiento de poblaciones [Ma, Mu]. Uno de los modelos que más se han utilizado tanto en ecología como en otras áreas de las ciencias es el modelo basado en la función logística, la cual fue introducido por Verhulst en 1838 [V]. Este modelo ha tenido muchas aplicaciones gracias a su sencillez algebraica y a su linealidad, la cual le permite presentar una serie de comportamientos dinámicos que van desde el orden hasta el caos [D, Ro].

La familia de funciones logísticas $f_a(x) = ax(1 - x)$, $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$, ha sido la base de muchos estudios y se ha aplicado a la modelación de crecimiento de poblaciones en modelos continuos (con ecuaciones diferenciales) y en modelos discretos (con ecuaciones en diferencias) [Mu]. El uso de esta familia, para modelar el crecimiento de poblaciones que sufren variaciones temporales, fue introducido por Kot y Schaffer en 1984 [KF]. Ellos consideran una población que se reproduce en dos estaciones, primavera e invierno, de modo que una función logística f_a modela el crecimiento en primavera y otra función logística f_b el crecimiento en invierno. Tomando estas dos funciones logísticas, el crecimiento de la población en un año está determinado por la composición de las dos funciones $F_{ba} = f_b \circ f_a$ y su evolución temporal está dada por la composición de esta función de grado cuatro consigo mismo [KS].

Kot y Schaffer comenzaron el análisis de esta familia de polinomios de grado cuatro y se plantearon la pregunta de cuándo la composición de dos logísticas bien comportadas (ordenadas) generaban una cuártica ordenada y cuándo dos caóticas generaban una caótica. Este problema ellos lo abordaron numéricamente y posteriormente Radulescu (2007) analizó el comportamiento caótico en esta familia cuártica, mostrando que el conjunto de parámetros, correspondientes a funciones cuárticas con la misma entropía es conexo [R]. Blé, *etal* en 2011, mostraron que en la familia cuártica se da la coexistencia de las diferentes dinámicas ordenadas que se tienen en la familia logística y determinaron las condiciones en las que ésta se presenta. Asimismo, describieron las componentes hiperbólicas de periodo pequeño [BCF].

ÍNDICE GENERAL

Ya que el espacio natural para el estudio de los polinomios es el campo de los números complejos, el análisis dinámico de los modelos polinomiales (en variable real) ha sido llevado a modelos en variable compleja. En particular, en la década de los 80's, el estudio de la dinámica de los polinomios en los complejos tuvo un gran despertar con los trabajos de Douady, Hubbard y Sullivan, [DH1, S]. Douady-Hubbard demuestran una gama de propiedades que presenta la dinámica de los polinomios y en particular analizan el espacio de parámetros de la familia de polinomios cuadráticos. Por otro lado, Sullivan resuelve la conjetura de no errancia para las funciones racionales que había sido propuesta por P. Fatou en los años 20.

En este trabajo analizaremos la dinámica de la familia de polinomios cuárticos propuesta por Kot-Schaffer [KS], desde el punto de vista complejo. Para ello, analizaremos el espacio de parámetros de la familia de polinomios cuárticos y mostraremos el lugar que ocupa la subfamilia obtenida por composición de polinomios cuadráticos. Asimismo, mostraremos que la dinámica de un polinomio cuártico en particular, puede ser obtenida como resultado de diferentes dinámicas de polinomios cuadráticos. En particular, mostraremos que la composición de polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo puede generar un polinomio cuártico con conjunto de Julia conexo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el capítulo uno presentamos algunos conceptos básicos de dinámica holomorfa como, órbita, punto fijo, puntos periódicos, conjugación analítica, clasificación de puntos periódicos, conjunto de Julia y conjunto de Fatou. Además, presentamos el teorema de no errancia de Sullivan, el teorema de clasificación de Fatou y los teoremas que determinan el comportamiento del punto crítico en cada uno de los tipos de componentes de Fatou periódicas.

En el capítulo dos definimos el conjunto de Julia lleno y enunciamos sus propiedades. En particular, presentamos algunos resultados sobre la dinámica de la familia cuadrática $z^2 + c$ y definimos los rayos externos, los cuales han sido una herramienta importante en el estudio de la conexidad local de los conjuntos de Julia y del conjunto de Mandelbrot. Por otra parte, analizamos el espacio de parámetros de los polinomios cuárticos, sus clases bajo conjugación afín y el lugar de conexidad.

En el capítulo tres trabajamos con la subfamilia de polinomios cuárticos mónicos y centrados que se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $z^2 + \lambda z$. Analizamos su lugar de conexidad y presentamos la dinámica de diferentes polinomios cuárticos. Éstos son elegidos por tener alguna de las dinámicas mencionadas en el teorema de clasificación de Fatou y mostramos que estas dinámicas se pueden obtener de

ÍNDICE GENERAL

la composición de dos polinomios cuadráticos, cuyas dinámicas no necesariamente tiene relación con la del polinomio que resulta de la composición. En particular, mostramos que parejas de dinámicas diferentes pueden generar una misma dinámica.

Capítulo 1

Preliminares

¹ En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos de dinámica holomorfa que nos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos. Los resultados que aquí presentamos pueden ser consultados en [Be, CG].

1.1. Clasificación de órbitas periódicas

En esta sección daremos algunas definiciones y resultados restringiéndonos a las funciones de variable compleja, en particular a las funciones racionales. Una función racional $f(z)$ está definida como el cociente de dos polinomios P y Q , es decir,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde P y Q son primos entre sí, $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función analítica y el grado de f es el máximo de los grados de P y Q . En este trabajo suponemos que todas las aplicaciones ³ de grado mayor o igual a 2.

Uno de los ² problemas principales en el estudio de la iteración de una función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, es mostrar la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ generada a partir de una condición inicial $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ definida recursivamente, como $z_n = f(z_{n-1})$. Note que si la sucesión $\{z_n\}$ tiene un límite L , entonces L es un punto fijo de f , ya que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = f(L).$$

¹ **Definición 1.1.1** ² Un punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de f si $f(z) = z$ y es un punto periódico de periodo k si $f^k(z) = z$ y $f^j(z) \neq z$ para $j < k$, donde f^k denota la composición de f consigo mismo k veces.

1. Preliminares

Ejemplo 1 Los puntos fijos de $f(z) = z^2 + 5z + 3$ se encuentran resolviendo la ecuación $f(z) = z$, es decir, $z^2 + 5z + 3 = z$. Así

$$z^2 + 4z + 3 = 0. \quad (1.1)$$

Resolviendo la ecuación (1.1), se tienen los siguientes puntos fijos de la función $f(z)$,

$$z_1 = -1 \quad y \quad z_2 = -3.$$

Dado $z \in \hat{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\mathcal{O}_f(z) = \{w \in \mathbb{C} : w = f^k(z) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

se le llama la *órbita de z bajo f* . En el caso que z sea periódico, este conjunto es finito y se le llama *órbita periódica* o *ciclo*.

Definición 1.1.2 Un punto z_0 es un punto preperiódico o eventualmente periódico de periodo n si su órbita no es periódica, pero $f^{n+j}(z_0) = f^j(z_0)$ para algún entero positivo $j > 0$.

Ejemplo 2 Si iteramos la función $f(z) = z^2 - 1$ en $x_0 = 0$ obtenemos la órbita

$$\mathcal{O}_f(0) = \{0, -1\},$$

entonces 0 es de periodo 2. El 1 es preperiódico porque en la primera iterada cae en cero que es periódico de periodo dos.

Definición 1.1.3 Dadas f y g funciones analíticas, se dice que son topológicamente (analíticamente) conjugadas en el abierto $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, si existe un homeomorfismo (isomorfismo) $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\varphi \circ f(z) = g \circ \varphi(z)$ para toda $z \in U$. Esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{g} & \varphi(U) \end{array}$$

conmuta.

De la definición 1.1.3 se sigue que:

1. Los puntos fijos de la función f se corresponden con los puntos fijos de la función g .

1. Preliminares

2. Las órbitas periódicas de la función f van a dar en órbitas periódicas de la función g .

Proposición 1.1.1 Para cada polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, existe $c \in \mathbb{C}$, tal que $P(z)$ y $f_c(z) = z^2 + c$ son analíticamente conjugados. De hecho, la conjugación φ es un biholomorfismo del plano complejo, una función afín de la forma $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Demostración 1 Sea $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, $f_c(z) = z^2 + c$ y $\varphi(z) = az + b$ con $a_0, a_1, a_2, a, b, c \in \mathbb{C}$, tales que $aa_2 \neq 0$. Entonces $\varphi \circ P(z) = f_c \circ \varphi(z)$ si y sólo si $aa_0 + aa_1z + aa_2z^2 + b = a^2z^2 + 2abz + b^2 + c$.

Igualando los coeficientes en la última igualdad y resolviendo las tres ecuaciones se obtiene,

$$\begin{aligned} a &= a_2 \\ b &= \frac{a_1}{2} \\ c &= a_0a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{4}. \end{aligned}$$

■

Esta proposición nos muestra que el estudio dinámico de los polinomios cuadráticos se puede reducir a los polinomios de la forma f_c , con la ventaja que estos últimos están parametrizados por el campo $\mathbb{C}$. Por lo que encontrar los puntos fijos de P se reduce a encontrar los puntos fijos de f_c , es decir, las raíces del polinomio $f_c(z) = z$.

Resolviendo la ecuación $f_c(z) - z = z^2 - z + c = 0$, se obtienen los puntos fijos de $f_c(z)$,

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

los cuales son dos, salvo el caso $c = \frac{1}{4}$, donde f_c tiene a $\frac{1}{2}$ como único punto fijo.

Definición 1.1.4 Sea f una función analítica y z un punto periódico de f de período k con multiplicador $\lambda = Df^k(z)$, donde $Df^k(z)$ denota la derivada compleja de f^k en z . Decimos que:

1. z es atractor si $|\lambda| < 1$; si $\lambda = 0$ diremos que z es super-atractor,
2. z es repulsor si $|\lambda| > 1$, y
3. z es indiferente si $|\lambda| = 1$.

Ejemplo 3 Usando la función f del ejemplo 1 tenemos que $f'(z) = 2z + 5$. Sustituyendo los puntos fijos $z_1 = -1$ y $z_2 = -3$ en $f'(z)$ se verifica que $|f'(-1)| = |3| = 3 > 1$. Por lo tanto -1 es un punto fijo repulsor. Por otro lado, $|f'(-3)| = |1| = 1$. Así -3 es un punto fijo indiferente.

1. Preliminares

Notar que si $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ es una órbita periódica de f , usando la regla de la cadena, se demuestra que la derivada $Df^k(z_j)$ no depende de la j en consecuencia la definición 1.1.4 tiene sentido para órbitas periódicas.

1.1.1. Atractores y Repulsores

El estudio de la dinámica de una función racional holomorfa en una vecindad del punto fijo es muy importante, ya que esta teoría local es una herramienta fundamental en la comprensión de la dinámica global de la función racional.

Los siguientes resultados que enunciaremos permiten entender la dinámica local de una función alrededor de sus puntos periódicos. Las demostraciones pueden ser consultadas en [Be, CG, M].

Teorema 1.1.1 (*G.Köenigs-1884*) Sea f una función analítica con un punto fijo en z_0 y cuyo multiplicador es λ . Si $0 < |\lambda| < 1$ ó $|\lambda| > 1$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y de 0 , respectivamente, y un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue analíticamente f con $g(z) = \lambda z$. Además, esta conjugación es única, módulo multiplicación por un escalar real.

Este teorema nos dice que cerca de los puntos fijos atractores o repulsores las funciones se comportan como multiplicación por una rotación λ . En particular, si z_0 es atractor, las órbitas de los puntos en una vecindad de z_0 convergen a z_0 . Note que este teorema también es válido para órbitas periódicas atractoras o repulsoras de periodo k , sustituyendo f por f^k .

Definición 1.1.5 (*Cuenca de Atracción*) Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una aplicación racional y z^* un punto fijo atractor de f . La cuenca de atracción de z^* es el conjunto

$$A_f(z^*) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z^*\}.$$

La cuenca inmediata de atracción de z^* denotada por $A_f^*(z^*)$, es la componente conexa de $A_f(z^*)$ que contiene a z^* .

Las cuencas de atracción para puntos k -periódicos atractores se definen usando a f^k en vez de f . Por definición, los puntos k -periódicos atractores siempre tienen dominios inmediatos de atracción abiertos y diferentes del vacío.

Ejemplo 4 La función $f(z) = z^2$ tiene dos puntos fijos, 0 e infinito. $A_f(0)$ es el disco unitario y $A_f(\infty)$ es el complemento de la cerradura del disco unitario.

1. Preliminares

En el caso de super-atractor la dinámica en una vecindad del punto, está determinada por el siguiente resultado demostrado por Böttcher-1904.

Teorema 1.1.2 (L.E. Böttcher-1904) Sea f una aplicación analítica y z_0 un punto fijo super-atractor. Si $f(z) = z_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$, con $a_k \neq 0$ entonces existen U, V vecindades de z_0 y 0 , respectivamente, y un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjugue $f(z)$ a $g(z) = z^k$. Esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz $(k-1)$ -ésima de la unidad.

De igual manera que en el teorema de Koenigs, este teorema es válido para órbitas periódicas super-atractoras.

1.1.2. Indiferente

Si una función analítica f tiene un punto fijo en z_0 con multiplicador λ de módulo uno, entonces pueden ocurrir dos casos, que exista una vecindad U de z_0 donde f es conjugado a la rotación λz o que no exista tal vecindad, si ocurre el primer caso decimos que f es linealizable en z_0 . Cuando λ es una raíz de unidad, se sabe que f no es linealizable [CG, M]. Pero si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ y θ es irracional, el problema de linealización está determinado por la aritmética de θ , por lo que es necesario dar algunas definiciones y resultados que pueden ser consultados en [HW].

Usando el algoritmo de la división para cada $t \in [0, 1]$ se puede desarrollar en fracciones continuas y obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} := [a_1, \dots, a_n],$$

que converge a t . A $\frac{p_n}{q_n}$, se le llama n -ésima reducida o n -ésima aproximación a t . En general, se puede obtener la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y salvo a_0 todos son enteros no negativos. Además, la sucesión es finita cuando t es racional e infinita para t irracional.

Definición 1.1.6 Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ es de tipo acotado si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

Definición 1.1.7 Sea $t \in \mathbb{R}$, t es diofantino de exponente k si existe $C > 0$, tal que

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^k} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

1. Preliminares

Proposición 1.1.2 Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tal que $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, t es de tipo acotado, si y sólo si, t es diofantino de exponente dos.

Este resultado nos dice que los números reales peor aproximados por racionales son los de tipo acotado, de hecho todos los números algebraicos son diofantinos y casi todo número real es diofantino.

Ejemplo 5 Consideremos la siguiente fracción continua :

$$t = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 \dots}}}$$

Para determinar el número irracional al que esta fracción continua converge, sólo necesitamos observar la n -ésima reducida.
Sea

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 \dots}}}$$

El límite de esta sucesión satisface:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{x} \\ \Rightarrow 0 &= x^2 - x - 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Resolviendo tenemos que una de las soluciones es $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ que es la razón áurea. Por lo que la razón áurea es de tipo acotado y diofantino de exponente dos.

Teorema 1.1.3 ² (Siegel-1942) Sea f una función analítica en z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ y $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i \theta}$. Si θ es diofantino, entonces f es linealizable en z_0 .

Al dominio máximo de linealización Δ de f se le llama disco de Siegel y a θ se le llama número de rotación de f en Δ . A partir de estos resultados se tiene la siguiente clasificación de los puntos indiferentes en términos de θ .

1. Preliminares

Definición 1.1.8 Sea f una función analítica en z_0 , tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Decimos que z_0 es :

1. Parabólico, si θ es racional.
2. Siegel, si θ es irracional y f es linealizable en una vecindad de z_0 .
3. Cremer, si θ es irracional y f no es linealizable en z_0 .

Observación 1.1.1 Un disco de Siegel es un dominio donde la dinámica es conforme-mente conjugada a una rotación irracional sobre el disco unitario. Por lo tanto, la dinámica alrededor del punto periódico es como una rotación.

En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de un disco de Siegel que corresponde al polinomio $P(z) = z^2 + e^{\pi i(\sqrt{5}+1)}z$.

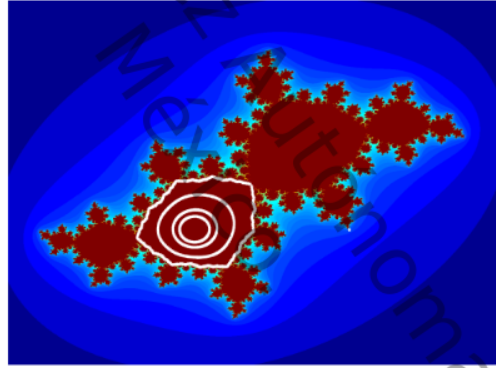


Figura 1.1: Disco de Siegel

Teorema 1.1.4 ² (Brjuno-1965) Sea f una función analítica en z_0 tal que z_0 es un punto fijo de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Si $\frac{p_n}{q_n}$ denota la n -ésima aproximación a θ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

entonces f es linealizable en z_0 .

1. Preliminares

Yoccoz demostró en 1998 que para la familia de polinomios cuadráticos, la condición de Brjuno es necesaria para tener linealización pero en general no se tiene una condición necesaria.

Ejemplo 6 Sea

$$f(z) = z^2 + e^{2\pi i \frac{3}{7}} z.$$

Los puntos fijos de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = -e^{2\pi i \frac{3}{7}} + 1$, por otra parte

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z + e^{2\pi i \frac{3}{7}}, \\ f'(0) &= e^{2\pi i \frac{3}{7}}, \\ f'(-e^{2\pi i \frac{3}{7}} + 1) &= 2(-e^{2\pi i \frac{3}{7}} + 1) + e^{2\pi i \frac{3}{7}} = 2 - e^{2\pi i \frac{3}{7}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por la definición 1.1.8 $z_1 = 0$ es un punto fijo parabólico y como $|f'(z_2)| = 2.933236348$, por la definición 1.1.4, z_2 es un punto fijo repulsor.

Ejemplo 7 Sea

$$f(z) = z^2 + e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}} z.$$

Los puntos fijos de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = -e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + 1$, y los multiplicadores son los siguientes:

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z + e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \\ f'(0) &= e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \\ f'(-e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + 1) &= 2 - e^{2\pi i \frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Del ejemplo 5 sabemos que $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es diofantino, por lo que f es linealizable en $z_1 = 0$ y por la definición 1.1.8, $z_1 = 0$ es un punto fijo Siegel.

1.2. Conjuntos de Julia y Fatou; Definiciones y Propiedades

En esta sección daremos la definición de conjunto de Julia y de conjunto de Fatou, así como las propiedades mas importantes de cada uno. Además enunciaremos el teorema de clasificación de Fatou que establece las posibles dinámicas que se presentan en una función racional.

1. Preliminares

1.2.1. Definiciones y Notación

Para definir los conjuntos de Julia y de Fatou de una aplicación racional, es necesario dar la definición de familia normal y algunas propiedades que pueden ser consultadas en [Co, Be].

Definición 1.2.1 Sea $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en U . La familia $\mathcal{F}$ es normal en $z_0 \in U$ si para toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente en subconjuntos compactos de U , en una vecindad de z_0 , a una función f_0 .

El siguiente teorema nos describe un criterio para determinar cuando una familia de funciones es normal.

Teorema 1.2.1 (Montel) Sea $\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en un subconjunto abierto $U \subset \hat{\mathbb{C}}$. Si la familia $\mathcal{F}$ omite tres puntos en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal.

Definición 1.2.2 Sea R una aplicación racional. Decimos que $z_0 \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto de Fatou de R , F_R , si la familia $\{R^n\}$ es normal en una vecindad de z_0 . El conjunto de Julia J_R se define como el complemento de F_R .

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para aplicaciones racionales, las cuales pueden ser consultadas en [Be, CG].

1. El conjunto de Julia es compacto, perfecto y diferente del vacío.
2. Los conjuntos J_R y F_R son completamente invariantes, es decir, $R^{-1}(J_R) = R(J_R) = J_R$ y $R^{-1}(F_R) = R(F_R) = F_R$.
3. Si f denota la k -ésima iterada de R para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir $f = R^k$, entonces $J_R = J_f = J_{R^k}$ y $F_R = F_f = F_{R^k}$.
4. Si $z \in J_R$, entonces el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(z)$ es denso en J_R .
5. Sea z un punto periódico de periodo k de R .
 - a) Si z es atractor, entonces $z \in F_R$
 - b) Si z es repulsor, entonces $z \in J_R$.
 - c) Los puntos periódicos repulsores de R son un conjunto denso en J_R , es decir $J_R = \{\text{puntos periódicos repulsores de } R\}$.

1. Preliminares

1.2.2. Clasificación de las componentes de Fatou

De la sección 1.2.1 se tiene que el conjunto de Fatou es completamente invariante. Además, la imagen de una componente conexa de Fatou es otra componente conexa, por lo que si U denota una componente de Fatou de una función analítica f , entonces a priori uno puede esperar que ocurra alguno de los siguientes casos.

1. U es una componente fija de F_f , es decir $R(U) = U$.
2. U es una componente periódica de F_f de periodo n , para un n mínimo, es decir $f^n(U) = U$.
3. U es una componente preperiódica de F_f , es decir $f^m(U)$ es periódica para algún $m > 1$.
4. U es una componente errante, es decir, $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$, para toda $n > m \geq 0$.

En 1976 I.N. Baker mostró que existen algunas funciones enteras cuyo conjunto de Fatou tiene componentes errantes. Sin embargo D. Sullivan demostró en 1985 que en funciones racionales el caso 4 no ocurre. De hecho él demostró el siguiente resultado que puede ser consultado en [Be, CG].

Teorema 1.2.2 (Sullivan-1985) *El conjunto de Fatou F_R de una aplicación racional no tiene componentes errantes. Es decir, cada componente de F_R es eventualmente periódica.*

El teorema 1.2.2 nos dice que la órbita de cualquier componente de Fatou de una aplicación racional termina en una componente periódica. Para clasificar las componentes de Fatou de una función racional y determinar las componentes totalmente invariantes tenemos los siguientes teoremas, cuya demostración puede ser consultada en [Be, CG].

Teorema 1.2.3 *El número de componentes del conjunto de Fatou puede ser 0, 1, 2 o ∞ .*

Como consecuencia del teorema de Sullivan tenemos que toda la dinámica de una función racional se concentra en las componentes de Fatou periódicas ya que al final toda órbita que empieza en una componente de Fatou termina en una componente periódica. De acuerdo con Fatou, existen cinco tipos de componentes periódicas.

Teorema 1.2.4 *Sea U una componente periódica de periodo n de F_R , entonces ocurre uno de los siguientes casos:*

1. Existe un punto fijo atractor de R^n en U y U está contenido en el dominio de atracción del punto fijo.

1. Preliminares

2. Existe un punto fijo super-atractor de R^n en U y U está contenido en el dominio de atracción del punto fijo.
3. Existe un único punto fijo de R^n en la frontera de U , este punto fijo es racional indiferente y U está contenido en el dominio de atracción de este punto fijo.
4. U es un disco de Siegel.
5. U es un anillo de Herman.

La clasificación de las componentes periódicas del conjunto de Fatou fue realizada por Fatou y Julia, la existencia de dominios del tipo 4 y 5 fue demostrada posteriormente por Siegel y Herman, respectivamente.

Observación 1.2.1 Los puntos periódicos parabólicos pertenecen al conjunto de Julia.

Antes de dar los siguientes resultados daremos la definición de un conjunto poscrítico, la cual será muy importante para determinar todos los tipos de dinámicas que pueden aparecer en una función racional.

Definición 1.2.3 El conjunto poscrítico de una función racional R , es

$$P_R = \overline{\{R^n(z_0) : z_0 \text{ es punto crítico de } R \text{ y } n \in \mathbb{N}\}},$$

es decir, P_R es la cerradura de la unión de las órbitas de todos los puntos críticos.

Teorema 1.2.5 Si U es un disco de Siegel, entonces existe un punto crítico c de R tal que la cerradura de la órbita de c contiene a la frontera de U .

Usando este resultado y cirugía cuasiconforme Shishikura demostró que en el caso de un anillo de Herman, la órbita de los puntos críticos se hace densa en la frontera, [Sh].

Teorema 1.2.6 Si R tiene un punto periódico atractor p , entonces la cuenca inmediata de atracción de p contiene un punto crítico.

En particular, este resultado nos dice que cada ciclo atractor atrae un punto crítico.

Teorema 1.2.7 Si R tiene un punto fijo parabólico p , entonces p está en el conjunto de Julia y los pétalos de atracción de p contienen un punto crítico.

En resumen tenemos el siguiente resultado.

1. Preliminares

Teorema 1.2.8 *El conjunto poscrítico P_R contiene, los ciclos atractores de R , los ciclos indiferentes que pertenecen al conjunto de Julia y la frontera de cada disco de Siegel y anillo de Herman.*

Como consecuencia de este teorema, tenemos que el número de órbitas no repulsoras de una función racional está acotado por su número de puntos críticos.

Teorema 1.2.9 *Si el conjunto poscrítico de R es finito y no hay ciclos super-atractores, entonces $J = \hat{\mathbb{C}}$.*

La demostración de estos teoremas se puede consultar en [CG, Be].

1.3. Hiperbolicidad

En esta sección daremos la definición de aplicación racional hiperbólica y mostraremos las propiedades que hacen a este tipo de aplicaciones bien comportadas.

Definición 1.3.1 *Una aplicación racional, $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, es hiperbólica si las órbitas de los puntos críticos convergen a los ciclos periódicos atractores de R .*

De todas las funciones racionales, las funciones hiperbólicas son las que tienen un mejor comportamiento ya que cuando R es hiperbólica, existe un conjunto finito $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ que atrae a un subconjunto abierto de $\hat{\mathbb{C}}$ de medida total. El siguiente resultado presenta algunas equivalencias a la definición de hiperbolicidad (véase [McM]).

Teorema 1.3.1 (*Caracterización de Hiperbolicidad*) *Sea R una aplicación racional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El conjunto poscrítico P_R es ajeno al conjunto de Julia J_R .*
2. *No hay puntos críticos o ciclos parabólicos en el conjunto de Julia.*
3. *Cada punto crítico de R converge a un ciclo atractor.*
4. *Existe una métrica conforme suave ρ definida en una vecindad del conjunto de Julia tal que $\|R'(z)\|_\rho > C > 1$ para toda $z \in J_R$.*
5. *Existe un entero $n > 0$ tal que R^n expande estrictamente la métrica esférica en el conjunto de Julia.*

3 Uno de los problemas centrales en dinámica holomorfa es resolver la siguiente conjetura de Fatou.

1. Preliminares

Conjetura (*Densidad de Hiperbolicidad*) *El conjunto de aplicaciones racionales hiperbólicas es abierto y denso en el espacio de todas las funciones racionales de grado d .*

La propiedad de que el conjunto de aplicaciones racionales hiperbólicas sea abierta es consecuencia del teorema de la función implícita, la propiedad de densidad es difícil demostrar y es conocida únicamente para familias particulares, por ejemplo para la familia de polinomios cuadráticos con parámetro real, [L, GS].

Capítulo 2

Dinámica de Polinomios

⁵ Es importante mencionar que si P es un polinomio de grado $d > 1$, entonces el infinito es un punto fijo super-atractor y por el teorema de Böttcher, existe una vecindad U del infinito donde P es analíticamente conjugada a la función z^d , por lo que la órbita de cualquier punto $z \in U$ converge al infinito, en consecuencia $z \in F_P$. Por lo tanto la dinámica de cualquier polinomio está dividida en las órbitas acotadas y las que se van a infinito. En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados que ayudan a entender la dinámica de los polinomios. Esta teoría puede ser ampliada en [CG, Be, M].

2.1. Conjunto de Julia lleno

² Definición 2.1.1 El dominio de atracción del infinito es

$$A_P(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(z) = \infty \right\} \subset F_P,$$

y el conjunto de Julia lleno de P es

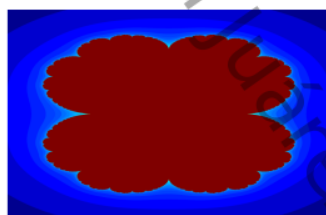
$$K_P = \{ z \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_P(z) \text{ es acotada} \}.$$

Como el interior de K_P está contenido en F_P , se tiene que J_P es igual a la frontera de K_P que a su vez es igual a la frontera de $A_P(\infty)$.

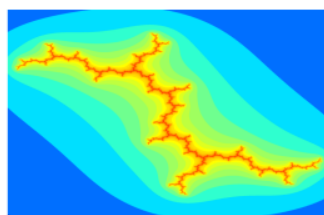
Por definición tenemos las siguientes propiedades de K_P .

1. Es compacto, perfecto y diferente del vacío.
2. Es un conjunto lleno, es decir, su complemento en $\hat{\mathbb{C}}$ es conexo.
- ¹ 3. Su frontera es igual al conjunto de Julia de P .

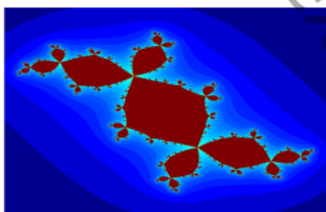
2. Dinámica de Polinomios



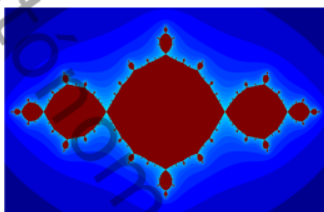
(a) $P(z) = z^2 + \frac{1}{4}$



(b) $P(z) = z^2 + i$



(c) $P(z) = z^2 - 0.122561 + 0.744862i$



(d) $P(z) = z^2 - 1$

Figura 2.1: Conjunto de Julia lleno

2. Dinámica de Polinomios

Algunos resultados importantes para el estudio de la dinámica de una familia de polinomios son los siguientes.

Teorema 2.1.1 *Si z_0 es un punto periódico atractor, entonces la cuenca de atracción $A(z_0)$ es la unión de componentes del conjunto de Fatou y la frontera de $A(z_0)$ está contenida en el conjunto de Julia.*

Un resultado importante que nos permitirá determinar cuando un conjunto de Julia lleno es conexo es el teorema de *Fatou-1919*.

Teorema 2.1.2 (*Fatou-1919*) *El conjunto de Julia lleno K_P es conexo si y sólo si la órbita de cada punto crítico es acotada.*

Teorema 2.1.3 *Si la órbita de cada punto crítico de P converge a infinito, entonces el conjunto de Julia J_P es totalmente desconexo.*

2.2. Polinomios cuadráticos

La familia de polinomios mas sencilla con dinámica interesante es la familia de polinomios cuadráticos de la forma $P_c(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$. En la proposición 1.1.1 mostramos que cualquier polinomio de esta familia es afinmente conjugado a un polinomio de la forma $P_c(z) = z^2 + c$ donde c es un número complejo.

Para la familia cuadrática $\{P_c\}$ denotaremos por $K_c = K_{P_c}$ y $J_c = J_{P_c}$. El punto crítico de $P_c(z)$ es el cero así que del teorema de Fatou 2.1.2 se tiene la siguiente dicotomía para el caso cuadrático.

Corolario 2.2.1 *El conjunto J_c es conexo si y sólo si la órbita del cero queda acotada.*

Corolario 2.2.2 *El conjunto J_c es un conjunto de Cantor si y sólo si la órbita del cero converge a infinito, es decir, $0 \in A_c(\infty)$.*

Definición 2.2.1 *Definimos el conjunto de Mandelbrot M como*

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la órbita } \mathcal{O}_c(0) \text{ es acotada}\}.$$

Si consideramos $c = 0$, entonces K_c es el disco unitario cerrado centrado en cero y por lo tanto K_c es conexo, en consecuencia $0 \in M$ y M es diferente del vacío (véase la figura 2.2). En esta sección mostraremos las propiedades mas importantes de M y su relación con la dinámica de $P_c(z)$. Los resultados que aquí presentamos pueden ser consultados en [CG, DH2].

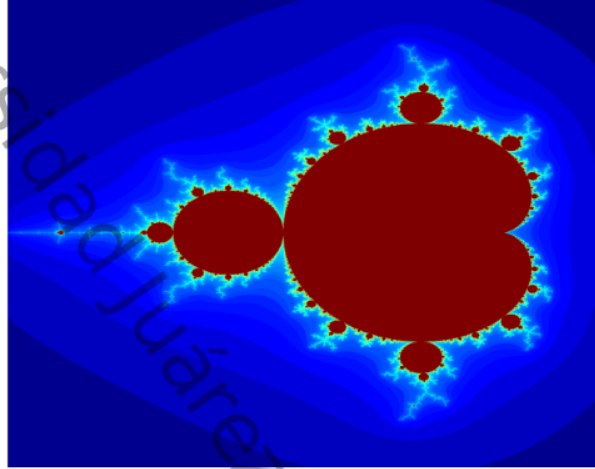


Figura 2.2: Conjunto de Mandelbrot

Proposición 2.2.1 El conjunto M está contenido en el disco

$$\overline{D_2(0)} = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}.$$

Teorema 2.2.1 (Douady-Hubbard-1982) El conjunto M es conexo y compacto. Además, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ es conexo.

Teorema 2.2.2 La frontera del conjunto de Mandelbrot M es igual al conjunto de las $c \in \mathbb{C}$ tales que las funciones $\{c \mapsto P_c^n(0) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ no forma una familia normal en c .

De la definición de hiperbolicidad se tiene que para c en el conjunto de Mandelbrot, $P_c(z) = z^2 + c$ es hiperbólico si y sólo si P_c tiene un ciclo atractor en $\mathbb{C}$.

Definición 2.2.2 Una componente U del interior del conjunto de Mandelbrot M es hiperbólica, si existe alguna $c \in U$, tal que P_c es hiperbólico.

Proposición 2.2.2 Sea U una componente hiperbólica del interior de M y $c_0 \in U$ un parámetro hiperbólico, tal que P_{c_0} tiene una órbita atractor de periodo k , entonces P_c tiene una órbita atractor de periodo k , para todo $c \in U$.

2. Dinámica de Polinomios

Teorema 2.2.3 Si P_c tiene un ciclo indiferente, entonces c pertenece a la frontera del conjunto de Mandelbrot.

La conjetura de Fatou sobre la densidad de los polinomios hiperbólicos, restringida a la familia cuadrática $\{P_c\}$ es la siguiente:

Conjetura El conjunto de las c para las cuales $P_c(z) = z^2 + c$ es hiperbólico forma un conjunto abierto y denso de $\mathbb{C}$.

Observemos que si $c \notin M$ entonces P_c es hiperbólico ya que el punto crítico converge al punto fijo super-atractor ∞ . Así, una formulación equivalente a la conjetura anterior es la siguiente:

Conjetura Cada componente del interior del conjunto de Mandelbrot es hiperbólica.

Conjetura (MLC)

La frontera del conjunto del Mandelbrot es localmente conexa.

La importancia de la conjetura (MLC) radica en el hecho de que Douady y Hubbard mostraron en [DH1] que MLC implica que el interior de Mandelbrot está formado sólo por componentes hiperbólicas y en consecuencia se tiene la conjetura de Fatou para el caso cuadrático.

Con el fin de demostrar la conexidad local del conjunto M , Douady y Hubbard comenzaron a demostrar la conexidad local de los conjuntos de Julia llenos de algunos polinomios P_c con $c \in M$ y posteriormente demostraron la conexidad local en ese parámetro $c \in M$. En particular demostraron el siguiente resultado que puede ser consultado en [DH1].

Teorema 2.2.4 Sea P_c un polinomio cuadrático con $c \in M$.

- 1.- Si P_c es hiperbólico, entonces J_c es localmente conexo.
- 2.- Si P_c tiene un ciclo parabólico, entonces J_c es localmente conexo.
- 3.- Si el punto crítico es preperiódico entonces J_c es localmente conexo.

Estas propiedades de J_c permitieron demostrar la conexidad local de M en todos los parámetros parabólicos y Misiurewicz, los cuales se encuentran en la frontera de M . Por otro lado, también encontraron que el conjunto de Julia de los parámetros que corresponden a puntos periódicos de Cremer, no es localmente conexo [DH2]. Posteriormente, Petersen demostró el siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en [Pe].

Teorema 2.2.5 Si P_c tiene un disco de Siegel con ángulo de rotación de tipo acotado, entonces J_c es localmente conexo.

Con el fin de demostrar la conexidad local de la frontera de M , además de buscar la conexidad local de J_c , se buscaron estrategias para extender el isomorfismo que se tiene del complemento de M al complemento del disco. En particular se desarrolló la teoría de rayos externos que detallaremos en la siguiente sección.

2. Dinámica de Polinomios

2.2.1. Rayos Externos

El polinomio $P_c(z)$ tiene un punto fijo superatractor en el infinito y por el teorema de *Böttcher*, existe una vecindad U del infinito donde el polinomio $P_c(z)$ es analíticamente conjugado a la función z^2 . Denotamos por ϕ_c la coordenada de *Böttcher* al infinito para $P_c(z)$, es decir, ϕ_c es el biholomorfismo que realiza dicha conjugación, deja fijo al infinito y es tangente a la identidad en el infinito. El dominio de definición U es una vecindad del infinito. Por otro lado, Douady-Hubbard demostraron que cuando $c \in M$, esta vecindad es $\mathbb{C} \setminus K_c$ y en el caso que $c \notin M$, la vecindad U se puede extender a un abierto que contiene al valor crítico de P_c , [DH2]. El siguiente teorema nos ayuda a determinar, en términos de la función ϕ_c , cuándo J_c es localmente conexo.

Teorema 2.2.6 (*Carathéodory*) Sea D un dominio simplemente conexo distinto del plano complejo, entonces ∂D es un conjunto localmente conexo si y solo si la transformación de Riemann $\psi : \mathbb{D} \rightarrow D$ se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

Este teorema aplicado a la función ϕ_c nos traduce el problema de demostrar la conexidad local de J_c , a extender continuamente la función ϕ_c .

Definición 2.2.3 (*Equipotencial*) Sea $r > 1$

$$E_c(r) = \phi_c^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}).$$

Definición 2.2.4 Sea $\theta \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces el rayo externo a J_c de ángulo θ es el conjunto

$$R_c(\theta) = \phi_c^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2i\pi\theta}, 1 < r < \infty\}).$$

Un rayo externo es la imagen inversa bajo ϕ_c de trayectorias ortogonales a las circunferencias concéntricas a $\mathbb{D}$ de radio $r > 1$, las pre-imágenes de estas circunferencias concéntricas son las curvas que llamamos equipotenciales. Por lo que los rayos externos y los equipotenciales forman una familia de curvas ortogonales en el complemento de K_c , cuando $c \in M$. En el caso que $c \notin M$, el conjunto de Julia es un conjunto de Cantor y tanto los equipotenciales como los rayos externos convergen a un punto que se encuentra en el exterior del conjunto de Julia lleno y los equipotenciales dejan de ser curvas de Jordan.

Por otra parte, decimos que un rayo externo $R_c(\theta)$ es racional si $\theta \in \mathbb{Q}$ e irracional en otro caso. Los rayos racionales se caracterizan porque su límite lo alcanzan en un punto periódico o preperiódico. Esto se debe a que la función ϕ_c conjugaba la dinámica con z^2 y los ángulos racionales en S^1 son periódicos o preperiódicos bajo la función doblamiento de ángulos d . En particular, si θ es racional $\theta = \frac{q}{p}$, donde p y q son primos relativos entonces:

1. θ es periódico bajo D si p es impar.

2. Dinámica de Polinomios

2. θ es preperiódico bajo D si p es par.

Definición 2.2.5 Un rayo externo $R_c(\theta)$ converge a un punto a_θ si

$$\lim_{r \rightarrow 1} R_c(\theta)$$

existe y es igual a a_θ .

Cuando este límite existe, diremos que el rayo aterriza en a_θ , el cual pertenece al conjunto de Julia.

Los siguientes dos teoremas nos muestran que los rayos con ángulos racionales convergen.

Teorema 2.2.7 Sea P_c un polinomio cuadrático, tal que J_c es conexo, entonces cada rayo externo de ángulo racional es convergente.

Teorema 2.2.8 (Convergencia de rayos periódicos).

1. Sea P_c un polinomio cuadrático, tal que J_c es conexo, entonces cada rayo externo periódico converge a un punto periódico, el cual es repulsor o parabólico y cada rayo externo racional pero no periódico converge a un punto, el cual es preperiódico.
2. Si J_c es localmente conexo, entonces cada punto periódico en J_c es repulsor o parabólico.

Aunque los rayos racionales siempre convergen, se conocen casos como el de Cremer donde J_c no es localmente conexo y por lo tanto la función ϕ_c no se puede extender continuamente a la frontera.

Cuando la función ϕ_c se extiende continuamente a la frontera, entonces obtenemos la siguiente parametrización del conjunto J_c ,

$$\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J_c,$$

que resulta ser una ⁴ semiconjugación que envía la circunferencia sobre el conjunto de Julia y que satisface la siguiente identidad

$$\gamma(2t) = P(\gamma(t)).$$

Por otra parte se sabe que si el polinomio P_c tiene ³ un punto Cremer o un disco de Siegel cuyo ³ frontera no contiene ningún punto crítico, entonces el conjunto de J_c no es localmente conexo.

2. Dinámica de Polinomios

2.2.2. Rayos externos en el Mandelbrot

El conjunto M es un conjunto compacto, porque es cerrado y está contenido en un disco cerrado de radio 2 centrado en cero. Para demostrar la conexidad de M , Douady-Hubbard construyeron una función Φ_M del complemento de M al complemento del disco $\mathbb{D}$. Para definir esta función recordemos que cuando $c \notin M$, la vecindad U donde está definida la coordenada de Böttcher contiene a c . Por lo que se define

$$\Phi_M(c) = \phi_c(c).$$

Teorema 2.2.9 (Douady-Hubbard) *La aplicación $\Phi_M : \mathbb{C} \setminus M \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, es un biholomorfismo.*

De este teorema y el teorema de Caratheodory se traduce el problema de la conexidad local de M a demostrar que la función Φ_M se extiende continuamente a la frontera. Para ello, nos apoyaremos del lenguaje de rayos externos y equipotenciales definidos para los conjuntos de Julia llenos.

Definición 2.2.6 *Sea $\theta \in \mathbb{T}$, entonces el rayo externo de ángulo θ es el conjunto*

$$R_M(\theta) := \Phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, r > 1\}).$$

Si el $\lim_{r \rightarrow 1} R_M(\theta) = c$, se dice que el rayo de ángulo θ aterriza en c y que c tiene a θ como argumento externo. Se define el equipotencial $E_M(r)$ de M de radio $r > 1$, como

$$E_M(r) = \phi_M^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : z = re^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{T}\}).$$

Teorema 2.2.10 *Sea $c \in M$ tal que 0 es estrictamente preperiódico para P_c (Punto Misiurewicz).*

1. *El punto c tiene un número finito de rayos externos en K_c , donde todos los rayos externos son racionales con denominador par.*
2. *Para cada argumento externo θ de c en K_c , el correspondiente rayo externo $R_M(\theta)$ aterriza en c .*

Para finalizar esta sección veamos un ejemplo sobre como calcular los ángulos externos de los rayos externos que aterrizan en el conjunto de Julia para el parámetro $c = i$, es decir el conjunto de Julia del polinomio $P(z) = z^2 + i$. Primero calcularemos la órbita del punto crítico que en este caso es el cero.

2. Dinámica de Polinomios

$$P(0) = i$$

$$P(i) = -1 + i$$

$$P(-1 + i) = (-1 + i)^2 + i = -2i + i = -i.$$

Como se puede observar la órbita del cero bajo el polinomio $P(z) = z^2 + i$, es una órbita preperiódica de período dos.

$$\mathcal{O} = \{0, i, -1 + i, -i\},$$

y su árbol de Hubbard se muestra la figura 2.3.

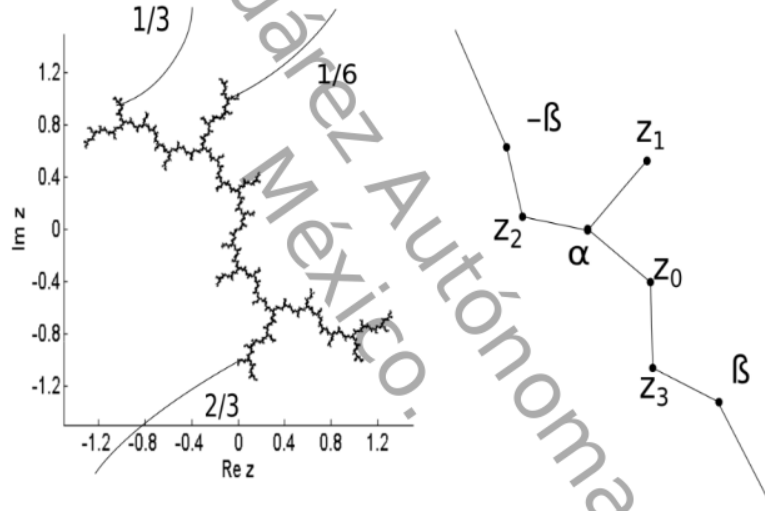


Figura 2.3: Árbol de Hubbard

A continuación calcularemos ¹ los ángulos de los rayos que aterrizan en cada elemento de la órbita de 0. Para determinar los ángulos nos apoyamos del árbol H y de su dorsal Γ que es la curva que une el punto fijo β con $-\beta$ en H . En β aterriza el rayo externo de ángulo $\frac{1}{2}$. La unión de las curvas Γ , $R_c(0)$ y $R_c(\frac{1}{2})$ nos da una curva que separa el plano $\mathbb{C}$ en dos conjuntos. A la parte superior le asignamos 0 y al complemento le asignamos 1. Con esta asignación tomamos el punto c y seguimos su órbita en el árbol asignando un cero si está arriba de la curva o un uno si está debajo. Esto nos da la representación binaria del ángulo. Si θ_j denota el ángulo externo de $P_c^j(0)$, tenemos lo siguiente:

2. Dinámica de Polinomios

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0.00101\bar{0} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{6} \\ \theta_2 &= 0.0101\bar{0} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots = \frac{1}{3} \\ \theta_3 &= 0.10101\bar{0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

13 En la figura 2.3 se muestra el árbol de Hubbard y los correspondientes rayos externos a J_c .

2.3. Polinomios Cuárticos

En esta sección analizaremos el espacio de polinomios cuárticos y daremos una descripción de su espacio de parámetro.

2.3.1. Clases de Conjugaciones

Consideremos $\mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ como el espacio de todos los polinomios cuárticos de la forma

$$P(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (a_4 \neq 0).$$

Dos polinomios $P_1(z), P_2(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ son holomórficamente conjugados si y sólo si existe una transformación g afín, tal que $g \circ P_1 \circ g^{-1}(z) = P_2(z)$. La conjugación es una relación de equivalencia y todos los polinomios en una misma clase tienen la misma dinámica. Al espacio de clases de equivalencias lo denotamos por $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$, [M]. Este espacio nos determina las dinámicas diferentes que presenta la familia $\mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$.

Proposición 2.3.1 *Todo polinomio $P(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ es holomórficamente conjugado a un polinomio mónico y centrado, es decir*

$$p(z) = z^4 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Demostración 2 Sean $P(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $p(z) = z^4 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$ y $\rho(z) = az + b$ con $a, b, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$ con $a_4 a \neq 0$. Resolviendo la ecuación $\rho \circ P(z) = p \circ \rho(z)$, se obtiene que a es igual a las raíces de $z^3 - a_4$. Si α denota una de

2. Dinámica de Polinomios

las raíces de $z^3 - a_4$, entonces

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{a_3} \\ b &= \frac{4\alpha^2}{(64a_3a_4^2 - 3a_3^4 + 16a_3^2a_4a_2 - 64a_4^2a_3a_1 + 256a_0a_4^3)\alpha} \\ c_0 &= \frac{a_3^3 - 4a_4a_3a_2 + 8a_4^2a_1}{8a_4^2} \\ c_1 &= \frac{(-3a_3^2 + 8a_4a_2)\alpha^2}{8a_4^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(z)$ y $p(z)$ son holomórficamente conjugados.

Observación 2.3.1 De la demostración se puede deducir que cada polinomio cuártico $P(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ es holomórficamente conjugado a tres polinomios mónicos y centrados, estos tres polinomios pertenecen a la misma clase.

Para determinar cuantas clases diferentes hay, analizaremos la familia $\mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ desde otra perspectiva. Notemos que cada $p(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ tiene cuatro puntos fijos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Denotemos a sus multiplicadores por $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, donde cada $\mu_i = p'(z_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, las funciones simétricas elementales de los multiplicadores,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \\ \sigma_2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 \\ \sigma_3 &= \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4 \\ \sigma_4 &= \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se define el índice de Fatou de una función racional en un punto fijo $\zeta \in \mathbb{C}$ como el número complejo

$$\iota(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{dz}{z - f(z)},$$

donde la curva de integración $|z - \zeta| = \varepsilon$ está orientada de manera positiva y ε se elige de tal manera que $z - f(z) \neq 0$. Este índice tiene las siguientes propiedades, las cuales se pueden consultar en [M].

2. Dinámica de Polinomios

Proposición 2.3.2 1. Si ζ es un punto fijo de f y $f'(\zeta) \neq 1$ entonces tenemos que

$$\iota(f, \zeta) = \frac{1}{1 - f'(\zeta)}.$$

2. Si ζ es un punto fijo de f y F es conjugada a f en una vecindad de ζ por una función holomorfa e inyectiva, entonces

$$\iota(f, \zeta) = \iota(F, h(\zeta)).$$

Teorema 2.3.1 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función racional, distinta de la función identidad, con puntos fijos ζ_j , entonces

$$\sum_i \iota(f, \zeta_j) = 1,$$

donde la suma es tomada sobre todos los puntos fijos de f .

Observación 2.3.2 Si f es un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces f tiene al infinito como punto fijo super-atractor por lo que el multiplicador correspondiente es igual a cero, así $\iota(f, \infty) = 1$. En consecuencia, cuando f es un polinomio, la suma de $\iota(f, \zeta)$ sobre todos los puntos fijos de f en $\mathbb{C}$ es igual a cero.

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ las funciones simétricas elementales de los multiplicadores de $P(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$, definidas en (2.1). El siguiente teorema nos muestra que no necesitamos las cuatro funciones simétricas, ya existe una relación lineal entre ellas.

Teorema 2.3.2 Si σ'_i denota las funciones simétricas definidas en (2.1), entonces ellas satisfacen la siguiente relación lineal

$$4 - 3\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 0.$$

Demostración 3 Sean μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 , los multiplicadores de los puntos fijos del polinomio $P(z) \in \mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$. Por la observación (2.3.2), tenemos que la suma de los índices de Fatou sobre los puntos fijos debe ser igual a cero, es decir,

$$0 = \sum_{j=1}^4 i(P, \zeta_j) = \frac{1}{1 - \mu_1} + \frac{1}{1 - \mu_2} + \frac{1}{1 - \mu_3} + \frac{1}{1 - \mu_4}.$$

Calculando esta suma, tenemos un cociente que debe ser cero, y por lo tanto su numerador

$$4 - 3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4) - (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4),$$

es cero. Sustituyendo en esta expresión las funciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 obtenemos la relación buscada

2. Dinámica de Polinomios

$$4 - 3\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 0.$$

□

Dado un polinomio mónico centrado $p(z) = z^4 + c_2z^2 + c_1z + c_0$, se pueden determinar los valores de las funciones σ_1, σ_2 y σ_4 , en términos de los parámetros c_0, c_1 y c_2 . Para encontrar esta dependencia debemos tener presente tres relaciones:

1. Las funciones simétricas de los puntos fijos z_j determinan los coeficientes del polinomio $p(z) - z$.
2. La definición de los μ_j y
3. La relación (2.1).

Explícitamente, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 0 \\
 z_1(z_2 + z_3 + z_4) + z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4 &= c_2 \\
 z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 &= -c_1 + 1 \\
 z_1z_2z_3z_4 &= c_0 \\
 p'(z_1) &= \mu_1 \\
 p'(z_2) &= \mu_2 \\
 p'(z_3) &= \mu_3 \\
 p'(z_4) &= \mu_4 \\
 \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= \sigma_1 \\
 \mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \mu_2(\mu_3 + \mu_4) + \mu_3\mu_4 &= \sigma_2 \\
 \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= \sigma_4.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Con la ayuda de MAPLE podemos resolver este sistema de once ecuaciones y obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -8c_1 + 12 \\
 \sigma_2 &= 4c_2^3 - 16c_0c_2 + 18c_1^2 - 60c_1 + 48 \\
 \sigma_4 &= 16c_0c_2^4 - 4c_1^2c_2^3 - 128c_0^2c_2^2 + 144c_0c_1^2c_2 - 27c_1^4 + 8c_1c_2^3 + 256c_0^3 \\
 &\quad - 288c_0c_1c_2 + 108c_1^3 + 128c_0c_2 - 144c_1^2 + 64c_1.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

En particular, podemos observar que la relación entre σ_1 y c_1 es la única relación lineal.

2. Dinámica de Polinomios

2.3.2. Espacio de Parámetros

Usando las relaciones obtenidas en (2.3) podemos definir la función

$$\begin{aligned}\Psi_4 : \mathbf{M}_4(\mathbb{C}) &\longrightarrow \Sigma(4) \subset \mathbb{C}^3 \\ \langle P \rangle &\longrightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4),\end{aligned}$$

donde $\Sigma(4)$ es la imagen de $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ bajo Ψ_4 . Al complemento $\mathbb{C}^3 \setminus \Sigma(4)$ se le denota por $\varepsilon(4)$ y se le llama el conjunto excepcional [FN]. Dados σ_1, σ_2 y σ_4 , de la relación (2.3) es posible encontrar los valores de los parámetros c_0, c_1 y c_2 que definen al o los polinomios que son enviados a la terna $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) \in \mathbb{C}^3$ bajo la función Ψ_4 . Despejando los parámetros c_0, c_1 y c_2 del sistema de ecuaciones (2.3) en términos de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$, obtenemos

$$\begin{aligned}c_2 &= r \\ c_1 &= \frac{3}{2} - \frac{\sigma_1}{8} \\ c_0 &= \frac{128r^3 + 24\sigma_1 + 9 - 32\sigma_2 - 48}{512r},\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde r es la raíz del siguiente polinomio cuadrático (véase [FN]),

$$G(c) = A_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)c^2 + A_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)c + A_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)\tag{2.5}$$

y

$$\begin{aligned}A_2 &= 262144(\sigma_1 - 4)^2 \\ A_1 &= (27648\sigma_1^4 - 147456\sigma_1^2\sigma_2 - 589824\sigma_1^2 + 393216\sigma_1\sigma_2 + 131072\sigma_2^2 \\ &\quad + 1310720\sigma_1 - 262144\sigma_2 - 524288\sigma_4 - 786432) \\ A_0 &= (9\sigma_1^2 + 24\sigma_1 - 32\sigma_2 - 48)^3.\end{aligned}$$

el número de clases de conjugación para una terna $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) \in \mathbb{C}^3$ vía Ψ_4 , está determinado por el número de raíces de $G(c)$, las cuales pueden ser 0, 1, 2 o ∞ , es decir, $\#\Psi_4^{-1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.

Proposición 2.3.3 *El conjunto $\Psi_4^{-1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)$ es infinito si y solo si $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 6$ y $\sigma_4 = 1$. Además $\Psi_4^{-1}(4, 6, 1) = \{p(z) = (z^2 + \frac{a}{2})^2 + z \mid a \in \mathbb{C}\}$.*

Demostración 4 *$G(c)$ tiene infinitas raíces si y solo si es idénticamente cero, es decir, $A_2 = A_1 = A_0 = 0$, entonces de (2.5), se tiene el sistema de ecuaciones*

2. Dinámica de Polinomios

$$\begin{aligned}\sigma_1 - 4 &= 0 \\ 27648\sigma_1^4 - 147456\sigma_1^2\sigma_2 - 589824\sigma_1^2 + 393216\sigma_1\sigma_2 + 131072\sigma_2^2 \\ + 1310720\sigma_1 - 262144\sigma_2 - 524288\sigma_4 - 786432 &= 0 \\ 9\sigma_1^2 + 24\sigma_1 - 32\sigma_2 - 48 &= 0,\end{aligned}$$

cuya solución es

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) = (4, 6, 1).$$

Por lo que de (2.4) la terna $(4, 6, 1)$ tiene infinitas preimágenes. Más aún, podemos determinar el conjunto $\Psi_4^{-1}(4, 6, 1)$ encontrando las clases que bajo Ψ_4 van a la terna $(4, 6, 1)$; para esto usamos la ecuación (2.3), luego necesitamos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned}-8c_1 + 12 &= 4 \\ 4c_2^3 - 16c_0c_2 + 18c_1^2 - 60c_1 + 48 &= 6 \\ 16c_0c_2^4 - 4c_1^2c_2^3 - 128c_0^2c_2^2 + 144c_0c_1^2c_2 - 27c_1^4 + 8c_1c_2^3 + 256c_0^3 \\ - 288c_0c_1c_2 + 108c_1^3 + 128c_0c_2 - 144c_1^2 + 64c_1\sigma_4 &= 1.\end{aligned}$$

Usando MAPLE obtenemos,

$$c_0 = \frac{a^2}{4}, c_1 = 1, c_2 = a.$$

Por lo tanto

$$P(z) = z^4 + az^2 + z + \frac{a^2}{4} = (z^2 + \frac{a}{2})^2 + z,$$

así

$$\Psi_4^{-1}(4, 6, 1) = \left\{ P(z) = (z^2 + \frac{a}{2})^2 + z \right\}_{a \in \mathbb{C}}.$$

■

Proposición 2.3.4 La cardinalidad de $\Psi_4^{-1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)$ es cero si y solo si $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = s$, $\sigma_4 = \frac{(s-4)^2}{4}$ para $s \neq 6$.

Demostración 5 $G(c)$ no tiene raíces si y solo si es constante y diferente de cero, es decir, $A_2 = A_1 = 0$ y $A_0 \neq 0$. Por lo que se deben satisfacer las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\sigma_1 - 4 &= 0 \\ 27648\sigma_1^4 - 147456\sigma_1^2\sigma_2 - 589824\sigma_1^2 + 393216\sigma_1\sigma_2 + 131072\sigma_2^2 \\ + 1310720\sigma_1 - 262144\sigma_2 - 524288\sigma_4 - 786432 &= 0.\end{aligned}$$

2. Dinámica de Polinomios

Resolviendo obtenemos que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) = \left(4, s, \frac{(s-4)^2}{4}\right)$ para $s \neq 6$. Luego, $G(c)$ no tiene raíces si y sólo si $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) = \left(4, s, \frac{(s-4)^2}{4}\right)$, $s \neq 6$. Por lo que dichas ternas no están en la imagen de $\Psi_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)$. Más aún, por definición y usando la ecuación (2.4) y (2.3) se sigue

$$\epsilon(4) = \left\{ \left(4, s, \frac{(s-4)^2}{4}\right) \right\},$$

obteniendo así una caracterización del conjunto excepcional. ■

Observación 2.3.3 Cuando $\sigma_1 \neq 4$ y el discriminante de $G(c)$ es cero, el polinomio tiene una raíz y en el complemento de la proposición 2.3.3 y 2.3.4 se tiene 2 raíces.

Corolario 2.3.1 El conjunto excepcional $\epsilon(4)$ es una superficie contenida en el plano $\{(4, \sigma_2, \sigma_4)\} \subset \mathbb{C}^3$.

Proposición 2.3.5 Ningún polinomio de grado cuatro tiene puntos fijos con multiplicadores $\mu, \mu, 2 - \mu, 2 - \mu$ ($\mu \neq 1$).

Demostración 6 Supongamos que existe un polinomio cuártico con estos multiplicadores. Sustituyendo en las funciones simétricas elementales obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \mu + \mu + 2 - \mu + 2 - \mu = 4 \\ \sigma_2 &= \mu\mu + 4\mu(2 - \mu) + (2 - \mu)(2 - \mu) = -2\mu^2 + 4\mu + 4 \\ \sigma_4 &= \mu\mu(2 - \mu)(2 - \mu) = \mu^2(2 - \mu)^2.\end{aligned}$$

Si tomamos como $s = -2\mu^2 + 4\mu + 4$, entonces

$$\frac{(s-4)^2}{4} = \frac{(-2\mu^2 + 4\mu + 4 - 4)^2}{4} = \mu^2(2 - \mu)^2 = \sigma_4.$$

Como $\sigma_4 = \frac{(\sigma_2-4)^2}{4}$, tenemos que esta terna pertenece al conjunto excepcional, esto es una contradicción, por lo tanto no existe un polinomio cuártico con estos multiplicadores. ■

Proposición 2.3.6 Si tomamos una terna de la forma $(4, \sigma_2, \sigma_4) \in \mathbb{C}^3$, entonces los polinomios que están en la imagen inversa de la terna bajo Ψ_4 , tienen como los multiplicadores a $\mu, 2 - \mu, \lambda, 2 - \lambda$.

2. Dinámica de Polinomios

Demostración 7 Sean $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ los multiplicadores de los puntos fijos del polinomio P , tal que $\Psi_4(P) = (4, \sigma_2, \sigma_4)$. Como los multiplicadores deben satisfacer la relación (2.1) y la condición de la observación (2.3.2), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= 4 \\ \mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \mu_2(\mu_3 + \mu_4) + \mu_3\mu_4 &= \sigma_2 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= \sigma_4 \\ \frac{1}{1-\mu_2} + \frac{1}{1-\mu_3} + \frac{1}{1-\mu_4} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Resolviendo el sistema (2.6) con respecto a μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 se obtiene los cuatro valores buscados. ■

2.3.3. Lugar de Simetría

Un automorfismo de un polinomio p de grado n es una transformación afín g tal que $g \circ p \circ g^{-1} = p$. Dado un polinomio p , la colección de todos los automorfismos de p forman un grupo y lo denotaremos por $\text{Aut}(p)$.

Al conjunto

$$S_n = \{ \langle p \rangle \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) : \text{Aut}(p) \text{ es no trivial} \}$$

se le llama **lugar de simetría**.

Teorema 2.3.3 Un polinomio cuártico mónico tiene un automorfismo no trivial si y sólo si es conjugado al polinomio

$$z^4 + a_1 z,$$

donde $a_1 \in \mathbb{C}$.

Demostración 8 Sea $T(z) = \alpha z + \beta$ y $p(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, por la definición, un automorfismo T debe satisfacer lo siguiente:

$$T \circ p \circ T^{-1}(z) - p(z) = 0. \quad (2.7)$$

Sustituyendo tenemos la ecuación,

$$\alpha \left(\frac{a_4 (z - \beta)^4}{\alpha^4} + \frac{a_3 (z - \beta)^3}{\alpha^3} + \frac{a_2 (z - \beta)^2}{\alpha^2} + \frac{a_1 (z - \beta)}{\alpha} + a_0 \right) + \beta - (a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) = 0. \quad (2.8)$$

2. Dinámica de Polinomios

Como es una ecuación polinomial, para que sea idénticamente cero, sus coeficientes deben ser cero, es decir,

$$\begin{aligned}a_0\alpha^4 - a_1\alpha^3\beta + a_2\alpha^2\beta^2 - a_3\alpha\beta^3 + a_4\beta^4 - a_0\alpha^3 + \alpha^3\beta &= 0 \\-2a_2\alpha^2\beta + 3a_3\alpha\beta^2 - 4a_4\beta^3 &= 0 \\-a_2\alpha^3 + a_2\alpha^2 - 3a_3\alpha\beta + 6a_4\beta^2 &= 0 \\-a_3\alpha^3 + a_3\alpha - 4a_4\beta &= 0 \\-a_4\alpha^3 + a_4 &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.9) con respecto a $\alpha, \beta, a_0, a_1, a_2, a_3$ y a_4 , se tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= a_1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= 1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

El parámetro α es una raíz del polinomio cuadrático de la forma $z^2 + z + 1$, por lo tanto $\text{Aut}(p)$ es no trivial cuando $p(z)$ es conjugado al polinomio $z^2 + a_1z$.

A esta familia de polinomios que está en el lugar de simetría de los polinomios cuadráticos, le podemos aplicar la función Ψ_4 y obtenemos el siguiente resultado.

2. Dinámica de Polinomios

Teorema 2.3.4 *El lugar de simetría de $\mathbf{Poly}_4(\mathbb{C})$ se puede ver en $\mathbb{C}^3$ como la siguiente superficie,*

$$\begin{cases} \sigma_1 = s \\ \sigma_2 = \frac{3(3s-4)(s+4)}{3s} \\ \sigma_4 = \frac{-(3s-4)^2(s-12)}{4096} \end{cases} \quad s \in \mathbb{C}$$

Demostración 9 *Del teorema 2.3.3 tenemos que el lugar de simetría de la familia de polinomios cuárticos está dado por los polinomios*

$$p(z) = z^4 + a_1 z$$

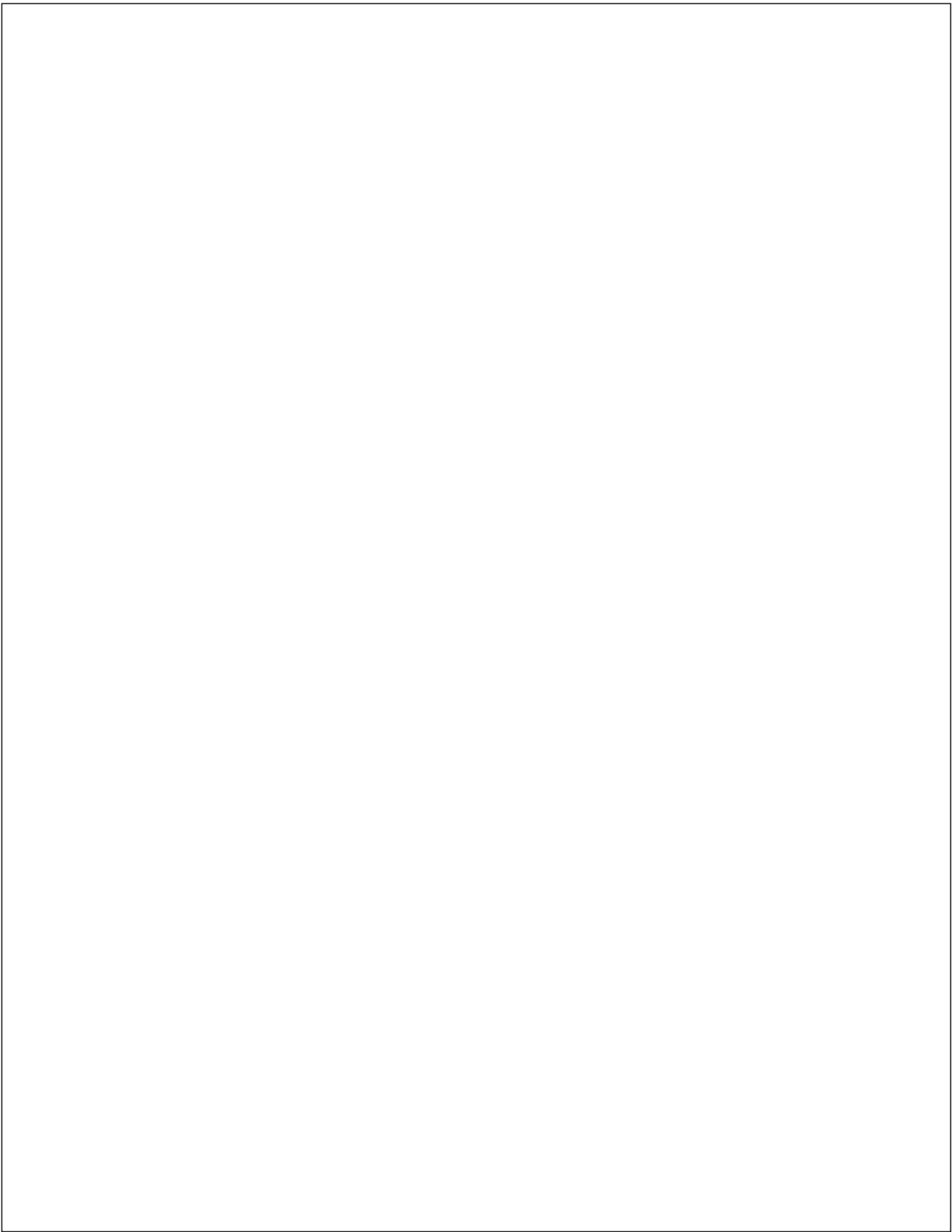
Sustituyendo en (2.3) tenemos,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -8a_1 + 12 \\ \sigma_2 &= 18a_1^2 - 60a_1 + 48 \\ \sigma_4 &= -27a_1^4 + 108a_1^3 - 144a_1^2 + 64a_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

de σ_1 se tiene que $a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}\sigma_1$, sustituyendo el valor de a_1 en la ecuación (2.11) y resolviendo el sistema de ecuación que resulta de realizar la sustitución de a_1 , se concluye que el lugar de simetría en $\mathbb{C}^3$ es el siguiente:

$$\begin{cases} \sigma_1 = s \\ \sigma_2 = \frac{3(3s-4)(s+4)}{3s} \\ \sigma_4 = \frac{-(3s-4)^2(s-12)}{4096} \end{cases}$$

Donde $s \in \mathbb{C}$. ■



3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Si consideramos A y B parámetros reales, entonces el lugar de conexidad (conjunto de parámetros $A - B$ para los cuales el conjunto de Julia J_P es conexo) es un subconjunto compacto del plano y se muestra en la figura 3.1.

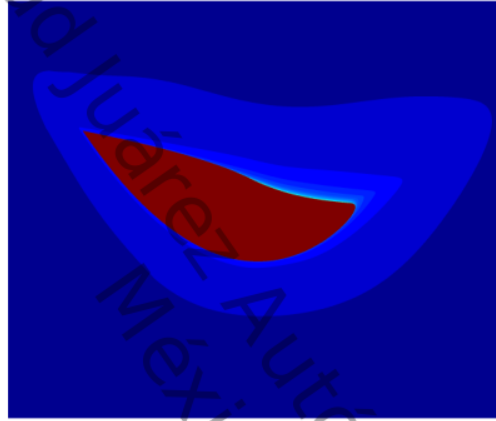


Figura 3.1: Lugar de conexidad para la familia $P_{AB}(z)$, cuando A y B son parámetros reales.

Definición 3.1.1 Para cada $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Per}_1(\eta) \subset M_4(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las clases de conjugación $\langle \mathcal{P} \rangle$ de polinomios de $\mathcal{P}(z)$ que tienen un punto fijo con multiplicador igual a η .

Definición 3.1.2 El lugar de conexidad $\mathcal{C}$, en el espacio de parámetros Γ de una familia de polinomios P_λ se define como :

$$\mathcal{C} = \{ \lambda \in \Gamma : K(P_\lambda) \text{ es conexo} \}.$$

Para entender el lugar de conexidad de la familia P_{AB} , en este trabajo analizaremos el $\text{Per}_1(0)$ de la familia. De acuerdo a la definición 3.1.1 $\text{Per}_1(0)$ es igual al siguiente conjunto:

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

$\text{Per}_1(0) = \{(A, B) \in \mathbb{C}^2 : P_{AB} \text{ tiene un punto fijo con multiplicador igual a } 0\}$.

Los puntos críticos de $P_{AB}(z) = z^4 + Az^2 + B$ son los siguientes:

1. $c_1 = 0$
2. $c_2 = \frac{\sqrt{-2A}}{2}$
3. $c_3 = -\frac{\sqrt{-2A}}{2}$.

Para encontrar el $\text{Per}_1(0)$ consideramos los siguientes casos:

Caso 1. Los polinomios que fijan el punto crítico $c_1 = 0$ satisfacen ,

$$P_{AB}(c_1) = c_1. \quad (3.3)$$

Esto se cumple, cuando

$$B = 0,$$

así

$$P_{AB}(z) = z^4 + Az^2.$$

Como el punto crítico c_1 es un punto fijo de $\mathcal{P}(z)$, el lugar de conexidad está determinado por los parámetros $A \in \mathbb{C}$ para los cuales la órbita de c_2 queda acotada (véase figura 3.2). Note que sólo consideramos la órbita de c_2 ya que la órbita de c_3 coincide desde la primera iterada con la órbita de c_2 .

Caso 2. Los polinomios que fijan el punto crítico $c_2 = \frac{\sqrt{-2A}}{2}$, satisfacen

$$P_{AB}(c_2) = c_2. \quad (3.4)$$

Por lo tanto

$$B = \frac{A^2}{4} + \frac{\sqrt{-2A}}{2}.$$

Así

$$P_{AB}(z) = z^4 + Az^2 + \frac{A^2}{4} + \frac{\sqrt{-2A}}{2}.$$

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

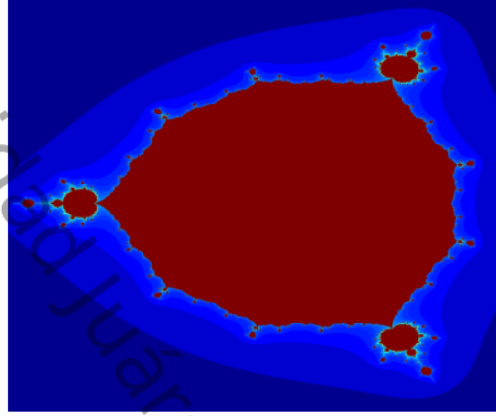


Figura 3.2: Lugar de conexidad de la familia $P_{AB}(z) = z^4 + Az^2$.

Ya que los puntos críticos c_2 y c_3 son puntos fijos de $P_{AB}(z)$, el lugar de conexidad de la familia es el conjunto de parámetros $A \in \mathbb{C}$, para los cuales la órbita de c_1 queda acotada (véase figura 3.3).

Caso 3. Los polinomios que fijan el punto crítico $c_3 = -\frac{\sqrt{-2A}}{2}$, satisfacen

$$P_{AB}(c_3) = c_3. \quad (3.5)$$

Por lo tanto

$$B = \frac{A^2}{4} - \frac{\sqrt{-2A}}{2}.$$

Así,

$$P_{AB}(z) = z^4 + Az^2 + \frac{A^2}{4} - \frac{\sqrt{-2A}}{2}.$$

Como los puntos críticos c_2 y c_3 son puntos fijos de $P_{AB}(z)$, el lugar de conexidad de la familia es el conjunto de los parámetros $A \in \mathbb{C}$ para los cuales la órbita de c_1 queda acotada (véase figura 3.4).

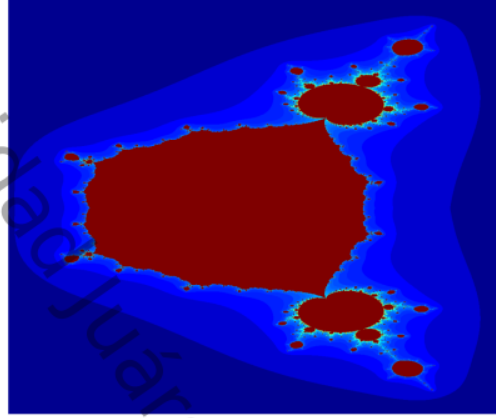


Figura 3.3: Lugar de conexidad de la familia $P_{AB}(z) = z^4 + Az^2 + \frac{A^2}{4} + \frac{\sqrt{-2A}}{2}$.

3.2. Conjunto de Julia Lleno

Cuando elegimos dos parámetros en $\mathbb{C}$ y componemos sus correspondientes polinomios en la familia cuadrática $P_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$ (véase figura 3.5), el resultado es un polinomio cuártico con a lo mas dos dinámicas distintas. La pregunta es cuantas dinámicas diferentes podemos obtener y que relación guarda con la dinámica original. En la siguiente sección analizaremos esta pregunta.

Recordemos que de la composición de $P_a(z) = z^2 + az$ y $P_b(z) = z^2 + bz$ obtenemos el polinomio cuártico,

$$\mathcal{P}(z) = z^4 + Az^2 + B,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= b - \frac{a^2}{2} \\ B &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones (3.6) obtendremos cuatro pares de parámetros (a_j, b_j) que corresponden a parejas de polinomios $P_{a_j}(z) = z^2 + a_j z$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + b_j z$, tales

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

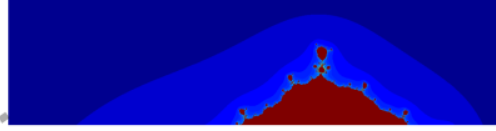


Figura 3.4: Lugar de conexidad de la familia $P_{AB}(z) = z^4 + Az^2 + \frac{A^2}{4} - \frac{\sqrt{-2A}}{2}$.

que bajo la composición generan el mismo polinomio cuártico, es decir $P_{b_j}(P_{a_j}(z)) = \mathcal{P}(z)$ para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Para poder obtener las diferentes dinámicas haremos uso de las herramientas desarrolladas en la sección 2.3, donde se obtiene la relación que existe entre los σ 's y los coeficientes del polinomio $\mathcal{P}(z)$. Además del hecho que las funciones simétricas de los puntos fijos de $\mathcal{P}$ determinan los coeficientes del polinomio $\mathcal{P}(z) - z$.

Usando la definición de los multiplicadores y las funciones simétricas σ 's, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones que satisfacen los multiplicadores:

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

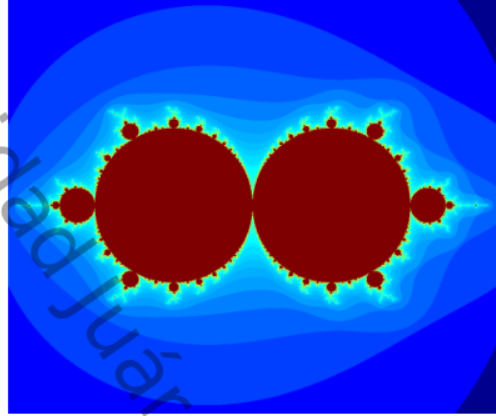


Figura 3.5: Lugar de conexidad de $P_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$.

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 0 \\
 z_1(z_2 + z_3 + z_4) + z_2(z_3 + z_4) + z_2 z_4 &= b - \frac{a^2}{2} \\
 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 &= 1 \\
 z_1 z_2 z_3 z_4 &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16} \\
 4z_1^3 + 2\left(b - \frac{a^2}{16}\right)z_1 &= m_1 \\
 4z_2^3 + 2\left(b - \frac{a^2}{16}\right)z_2 &= m_2 \\
 4z_3^3 + 2\left(b - \frac{a^2}{16}\right)z_3 &= m_3 \\
 4z_4^3 + 2\left(b - \frac{a^2}{16}\right)z_4 &= m_4 \\
 \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= \sigma_1 \\
 \mu_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \mu_2(\mu_3 + \mu_4) + \mu_3\mu_4 &= \sigma_2 \\
 \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= \sigma_4.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Con la ayuda de MAPLE, resolvemos el sistema (3.7), y obtenemos las siguientes relaciones que existe entre los multiplicadores y los coeficientes del polinomio $\mathcal{P}(z)$.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -12 \\ \sigma_2 &= 48 + 4b^3 + 2a^6 + 24a^4b + 18a^2b^2 - 8ab - 20a^3 \\ \sigma_4 &= a(-4ab + 8 + a^3)(a^8 - 4a^6b + 4a^5 + 2a^4b^2 - 8a^3b + 4a^2b^3 - 4ab^2 + 8b + b^4). \quad (3.8)\end{aligned}$$

El procedimiento que llevaremos a cabo para poder encontrar un polinomio cuártico $\mathcal{P}$ con una dinámica determinada, será condicionar los valores de uno o dos multiplicadores y verificando lo que le ocurre a la órbita de los puntos críticos.

Consideremos $\mu_1 = s$ y $\mu_2 = t$. Sustituyendo en el siguiente sistema de ecuaciones que deben satisfacer los multiplicadores,

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= -12 \\ \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 &= s_1 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= s_2 \\ \frac{1}{1-\mu_1} + \frac{1}{1-\mu_2} + \frac{1}{1-\mu_3} + \frac{1}{1-\mu_4} &= 0,\end{aligned} \quad (3.9)$$

así obtenemos los valores de los multiplicadores μ_3, μ_4 y las funciones σ 's. Sustituyendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ en el sistema de ecuaciones (3.8), obtenemos los valores de los parámetros a y b , los cuales determinan el polinomio con los multiplicadores dados.

Proposición 3.2.1 *Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_1(z)$, cuyo conjunto de Julia lleno contiene en su interior una sola componente de Fatou. Esta componente corresponde a un punto fijo atractor y el polinomio puede ser obtenido tomando:*

- (1) $P_a(z)$ con un punto fijo atractor y $P_b(z)$ con un punto fijo atractor.
- (2) $P_a(z)$ con un punto atractor de período dos y $P_b(z)$ con un punto fijo atractor.
- (3) $P_a(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y $P_b(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Demostración 10 *Para poder obtener el polinomio cuártico $\mathcal{P}_1(z)$ con un punto fijo atractor haremos uso del sistema (3.9). Asignando valores a los primeros dos multiplicadores y resolviendo para los otros dos.*

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Sea $\mu_1 = 0.511996121$ y $\mu_2 = 1.70289556$, resolviendo el sistema (3.9) con los valores de μ_1 y μ_2 dados, se obtiene que $\mu_3 = 1.70289556$ y $\mu_4 = 8.24078396$. En consecuencia, se tiene $\sigma_2 = 36.92924346$ y $\sigma_4 = 12.235204$. Usando la ecuación (3.8) se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio $P_1(z)$.

$$P_1(z) = z^4 + \left(-\sqrt{\frac{2}{5}} - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)z^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}. \quad (3.10)$$

Para determinar la dinámica del polinomio $P_1(z)$, calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.6. En la figura 3.6 se muestran las órbitas de los puntos críticos, las cuales convergen al punto fijo -0.61803398 . Por lo tanto el polinomio cuártico (3.10) tiene un atractor global.

Como $P_1(z)$ se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $P_{a_j}(z) = z^2 + a_jz$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + a_jz$, la relación entre los coeficientes del polinomio cuártico $P_1(z)$ y los polinomios cuadráticos está dada por la ecuación (3.6), es decir

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2}{5}} - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} &= b - \frac{a^2}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Resolviendo la ecuación (3.11), se obtienen los siguientes valores de los parámetros a_j, b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ de los polinomios cuadráticos, cuya composición es $P_1(z)$. Los valores obtenidos para los parámetros a_j, b_j se muestran en la tabla 3.1. Así mismo usando el teorema 1.2.6, en la tercera columna de la tabla 3.1 se muestra la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica la figura correspondiente donde se puede observar el conjunto de Julia lleno y la órbita del punto crítico del polinomio cuadrático.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.7
1)	$a_1 = 2.85217309288$	Un punto fijo atractor	(a)
	$b_1 = 2.88930009101$	Un punto fijo atractor	(b)
2)	$a_2 = -\sqrt{5} + 1$	Un punto de periodo dos	(c)
	$b_2 = -\sqrt{2} + 1$	Un solo punto fijo atractor	(d)
3)	$a_3 = -0.8080525576 + 0.87848978i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -1.237543264 - 0.70986591i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(f)
4)	$a_4 = -0.8080525576 - 0.87848978i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(g)
	$b_4 = -1.237543264 + 0.70986591i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(h)

Cuadro 3.1: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_1(z)$

En la pareja uno de la tabla 3.1 se muestran dos parámetros cuyos polinomios cuadráticos tienen un punto fijo atractor y la composición es el polinomio $\mathcal{P}_1(z)$, mostrando que la composición de dos atractores puede generar un polinomio cuártico con un atractor global, con esto se tiene (1). La pareja dos de la tabla 3.1 nos muestra dos parámetros de los polinomios cuadráticos, $P_{a_2}(z)$ con una órbita de periodo dos atractor (véase 3.6 (c)) y $P_{b_2}(z)$ con un punto fijo atractor (véase 3.6 (d)). La composición de ellos genera el polinomio $\mathcal{P}_1(z)$ con un atractor global, con esto se tiene (2). De la misma forma se muestran los parámetros de polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo, y cuya composición es el mismo polinomio cuártico $\mathcal{P}_1(z)$ con un conjunto de Julia lleno conexo y un atractor global, con esto se tiene (3). ■

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

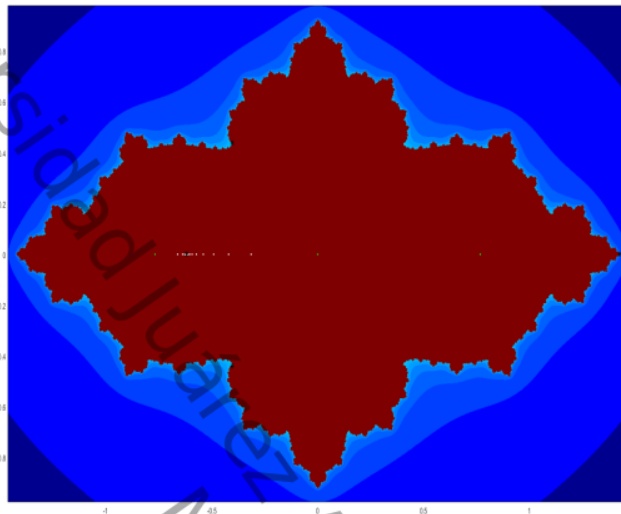
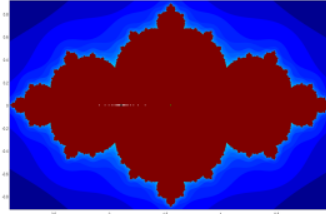


Figura 3.6: Conjunto de Julia lleno con un solo punto fijo atractor

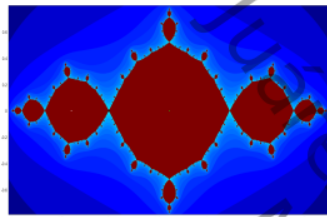
3. Dinámica de Polinomios Acoplados



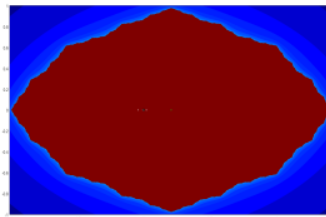
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



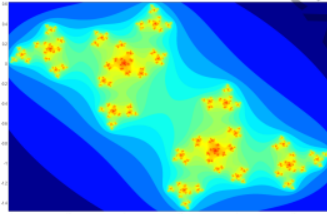
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



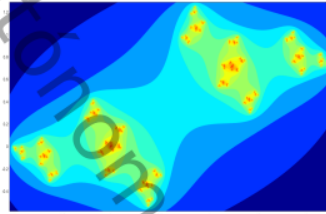
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



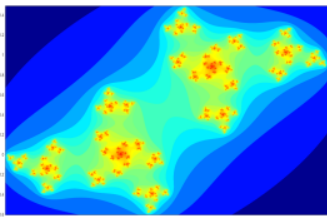
(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



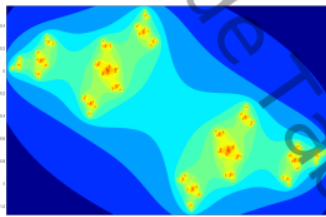
(e) Conjunto de Julia de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia de $P_{b_3}(z)$



(g) Conjunto de Julia de $P_{a_4}(z)$



(h) Conjunto de Julia de $P_{b_4}(z)$

Figura 3.7: Conjuntos de Julia llenos

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Proposición 3.2.2 *Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$ con dos puntos fijos atractores en su conjunto de Julia lleno el cual se obtiene tomando:*

- (1) $P_a(z)$ con un punto fijo atractor y $P_b(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.
- (1) $P_a(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y P_b con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Demostración 11 *Para poder obtener el polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$ con dos puntos fijos atractores haremos uso del sistema (3.9). Asignando valores a los primeros dos multiplicadores y resolviendo para los otros dos.*

Sea $\mu_1 = 0.436319869405036$ y $\mu_2 = 0.722521677729442$. Resolviendo el sistema (3.9) con los valores de μ_1 y μ_2 dados se obtiene que $\mu_3 = 11.4055161893003$ y $\mu_4 = 2.23625326407938$. En consecuencia, se tiene $\sigma_2 = 41.62952259$ y $\sigma_4 = 8.040661975$. Usando la ecuación (3.8) se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio cuártico,

$$\mathcal{P}_2(z) = z^4 + (\sqrt{-2} + 1)z^2 + \frac{1}{7}. \quad (3.12)$$

Para determinar la dinámica del polinomio $\mathcal{P}_2(z)$, calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.6. En la figura 3.8 se muestran las órbitas de los puntos críticos $z_1 = 0, z_2 = 0.42779983 - 0.82644582i$ y $z_3 = -0.42779983 + 0.82644582i$, donde la órbita de z_1 converge al punto fijo atractor 0 y las órbitas de z_2, z_3 convergen al punto fijo atractor $0.47170593 - 0.65388663i$. Por lo tanto, el polinomio cuártico (3.12) tiene dos atractores. Como $\mathcal{P}_2(z)$ se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $P_{a_j}(z) = z^2 + a_j z$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + a_j z$, la relación entre los coeficientes del polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$ y los polinomios cuadráticos está dada por la ecuación (3.6), es decir

$$\begin{aligned} \sqrt{-2} + 1 &= b - \frac{a^2}{2} \\ \frac{1}{7} &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Resolviendo la ecuación (3.13), se obtienen los siguientes valores de los parámetros a_j, b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, de los polinomios cuadráticos cuya composición es $\mathcal{P}_2(z)$. Los valores de los parámetros a_j y b_j se muestran en la tabla 3.2. Así mismo usando el teorema 1.2.6, en la tercera columna de la tabla 3.2, se muestra la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica la figura correspondiente donde se puede observar el conjunto de Julia lleno y la órbita del punto crítico del polinomio cuadrático.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.9
1)	$a_1 = 0.292521443 + 0.080380736i$	Un punto fijo atractor	(a)
	$b_1 = 1.03955386 + 1.43772665i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(b)
2)	$a_2 = -1.49644534 + 2.71284272i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(c)
	$b_2 = -1.56008350 - 2.64540730i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(d)
3)	$a_3 = 0.260512024 - 1.48545018i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -0.06934787 + 1.02723592i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(f)
4)	$a_4 = 0.943411873 - 1.30777327i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(g)
	$b_4 = 0.589877507 + 0.18044472i$	Un solo punto fijo atractor	(h)

Cuadro 3.2: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$

En la pareja uno y cuatro de la tabla 3.2 se muestran cuatro parámetros. Los polinomios cuadráticos $P_{a_1}(z)$ y $P_{b_1}(z)$ tienen un punto fijo atractor y los polinomios $P_{b_1}(z)$ y $P_{a_4}(z)$ tienen un conjunto de Julia totalmente desconexo. La composición de $P_{a_1}(z)$ con $P_{b_1}(z)$ y $P_{a_2}(z)$ con $P_{b_2}(z)$ es el polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$ con dos atractores, con esto se tiene (1). Así mismo las parejas dos y tres de la tabla 3.2 muestran los parámetros de polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo y la composición de $P_{a_2}(z)$ con $P_{b_2}(z)$ y $P_{a_3}(z)$ con $P_{b_3}(z)$ es el polinomio cuártico $\mathcal{P}_2(z)$ con conjunto de Julia lleno conexo y dos atractores, con esto se tiene (2). ■

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

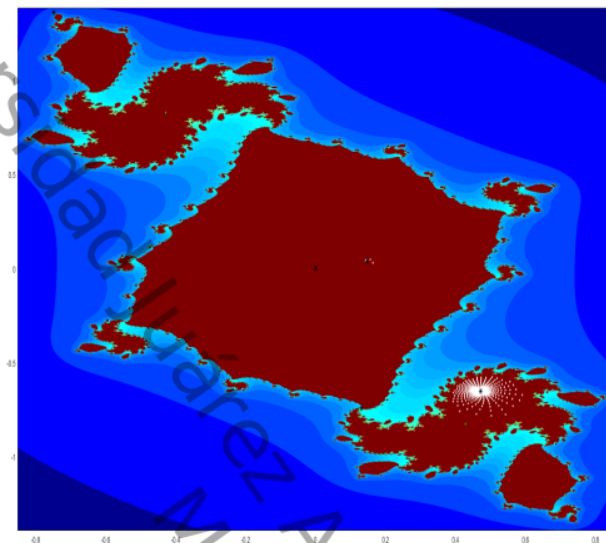
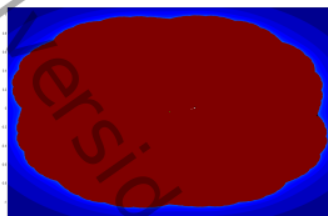
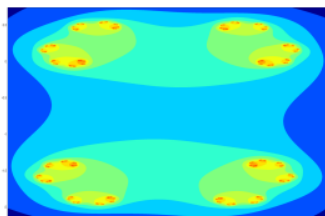


Figura 3.8: Conjunto de Julia lleno con dos puntos fijos atractores

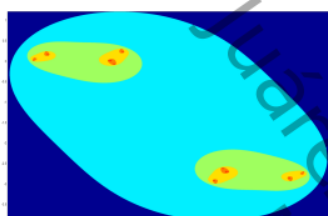
3. Dinámica de Polinomios Acoplados



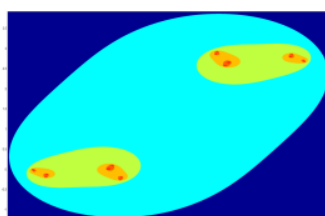
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



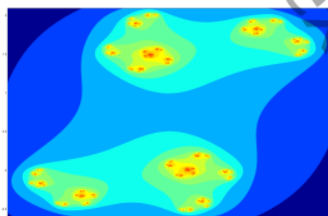
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



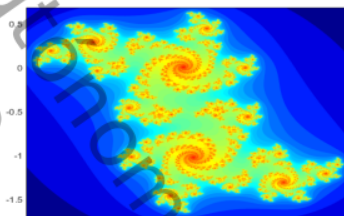
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



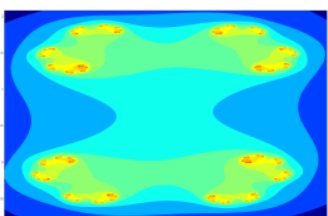
(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



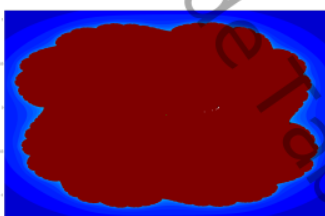
(e) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_3}(z)$



(g) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_4}(z)$



(h) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_4}(z)$

Figura 3.9: Conjuntos de Julia llenos

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Proposición 3.2.3 *Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_3(z)$ con un punto fijo atractor y un punto fijo parabólico en su conjunto de Julia lleno, resultado de la composición de :*

- (1) $P_a(z)$ con un punto atractor de período dos y $P_b(z)$ con un punto atractor de período dos.
- (2) $P_a(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y P_b con un punto fijo atractor.

Demostración 12 *Para obtener el polinomio cuártico $\mathcal{P}_3(z)$ con un punto fijo atractor y un punto parabólico haremos uso del sistema (3.9). Asignando valores a los primeros dos multiplicadores y resolviendo para los otros dos.*

Sea $\mu_1 = 0.40880843$ y $\mu_2 = e^{2\pi i \frac{7}{3}}$. Resolviendo el sistema (3.9) con los valores de μ_1 y μ_2 dados se obtiene $\mu_3 = 10.632343$ y $\mu_4 = 1.499999$. En consecuencia se tiene, $\sigma_2 = 33.44947071$ y $\sigma_4 = 6.5198873$. Usando la ecuación (3.8) se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio cuártico,

$$\mathcal{P}_3(z) = z^4 + (-2.108893535 + 0.3570353803i)z^2 + 0.09068800125 - 0.2909712453i. \quad (3.14)$$

Para determinar la dinámica del polinomio $\mathcal{P}_3(z)$, calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.6 y 1.2.7. En la figura 3.10 se muestran las órbitas de los puntos críticos $z_1 = 0$, $z_2 = 1.03050916 - 0.086616255i$ y $z_3 = -1.0305091 + 0.086616255i$. Donde la órbita de z_1 converge al punto fijo parabólico $0.13890314 - 0.18592168i$ y las órbitas de z_2 y z_3 convergen al punto fijo atractor $-0.97916556 + 0.081719594i$. Así el polinomio cuártico (3.14) tiene un punto fijo atractor y un punto fijo parabólico.

Como $\mathcal{P}_3(z)$ se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $P_{a_j}(z) = z^2 + a_j z$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + a_j z$, la relación entre los coeficientes del polinomio cuártico $\mathcal{P}_3(z)$ y los polinomios cuadráticos está dada por la ecuación (3.6), es decir

$$\begin{aligned} -2.10889353 + 0.35703538i &= b - \frac{a^2}{2} \\ 0.090688001 - 0.29097124i &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Resolviendo la ecuación (3.15), se obtienen los otros valores de los parámetros a_j, b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, de los polinomios cuadráticos cuya composición es $\mathcal{P}_3(z)$. Los valores de los parámetros a_j y b_j , se muestran en la tabla 3.3. Así mismo, usando el teorema 1.2.6 y 1.2.7, en la tercera columna de la tabla 3.3, se muestra la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica la figura correspondiente donde se puede observar el conjunto de Julia lleno y la órbita del punto crítico del polinomio cuadrático.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.11
1)	$a_1 = 3.274496901 - 0.138150743i$	Un punto atractor de periodo dos	(a)
	$b_1 = 3.24272862 - 0.09533880i$	Un punto atractor de periodo dos	(b)
2)	$a_2 = -1.59397207 + 0.34655491i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(c)
	$b_2 = -0.89857021 - 0.19536348i$	Un punto fijo atractor	(d)
3)	$a_3 = -1.95833113 + 0.16343918i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -0.20471931 + 0.03696732i$	Un punto fijo atractor	(f)
4)	$a_4 = 0.27780629 - 0.37184336i$	Un punto fijo atractor	(g)
	$b_4 = -2.13943910 + 0.25373495i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(h)

Cuadro 3.3: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_3(z)$

La pareja uno de la tabla 3.3 muestra dos parámetros cuyos polinomios cuadráticos tienen un punto fijo atractor de periodo dos y de la composición de estos dos polinomios resulta el polinomio cuártico (3.14), esto muestra que de la composición de dos polinomios cuadráticos con un atractor de periodo dos se puede obtener un polinomio cuártico con un punto fijo atractor atractor y un punto fijo parabólico, con esto se tiene (1). Así mismo las parejas dos, tres, cuatro de la tabla 3.3 muestran los parámetros de los polinomios cuadráticos $P_{a_2}(z)$, $P_{a_3}(z)$ y $P_{b_4}(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y $P_{b_2}(z)$, P_{b_3} y $P_{a_4}(z)$ con un punto fijo atractor y cuya composición de $P_{a_j}(z)$ con P_{b_j} , para $j \in \{2, 3, 4\}$, resulta el polinomio cuártico $\mathcal{P}_3(z)$ con un punto fijo atractor y un punto fijo parabólico, con esto se tiene (2). ■

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

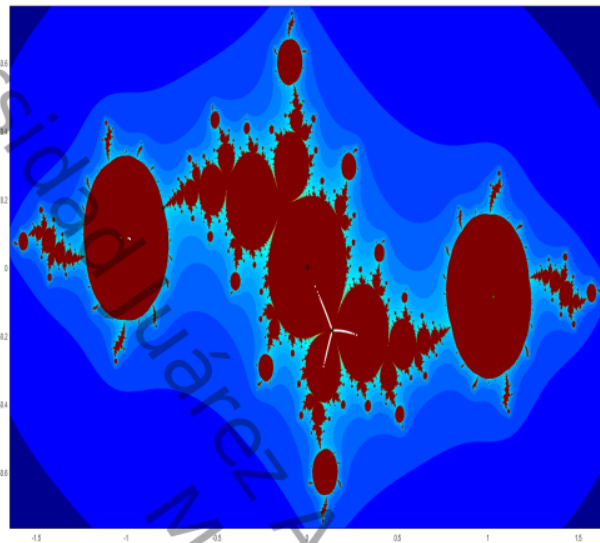
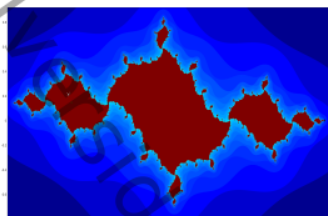
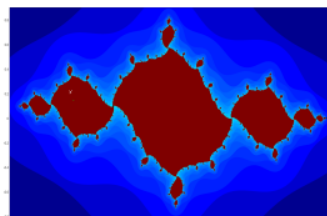


Figura 3.10: Conjunto de Julia lleno con un punto fijo atractor y un punto fijo parabólico

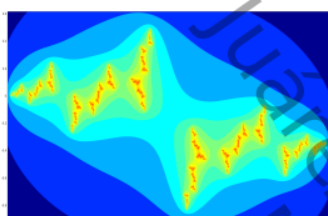
3. Dinámica de Polinomios Acoplados



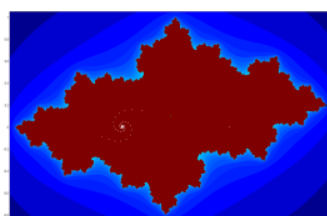
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



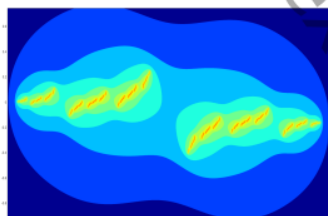
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



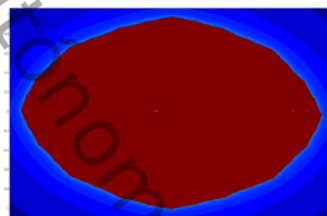
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



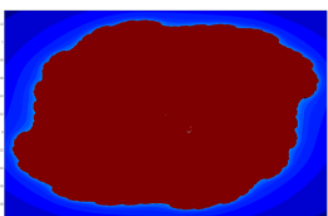
(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



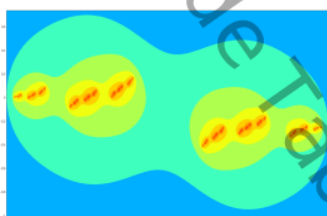
(e) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_3}(z)$



(g) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_4}(z)$



(h) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_4}(z)$

Figura 3.11: Conjuntos de Julia llenos

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Proposición 3.2.4 Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$ con un punto fijo atractor y un disco de Siegel resultado de la composición de :

- (1) $P_a(z)$ con un punto fijo atractor y $P_b(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.
- (2) P_a con conjunto de Julia totalmente desconexo y P_b con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Demostración 13 Para poder obtener el polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$ con un punto fijo atractor y un disco de Siegel haremos uso del sistema (3.9). Asignando valores a los primeros dos multiplicadores y resolviendo para los otros dos.

Sea $\mu_1 = e^{\pi i(\sqrt{5}-1)}$ y $\mu_2 = 0.9121$, resolviendo el sistema (3.9) con los valores de μ_1 y μ_2 dados se obtiene que $\mu_3 = 10.74036027 + 0.67413941i$ y $\mu_4 = 1.08490861 + 0.0013508826i$.

En consecuencia se tiene $\sigma_2 = 13.50137413 - 7.74005124i$ y $\sigma_4 = -7.37664363 - 7.68024843i$. Usando la ecuación (3.8) se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio cuártico,

$$\mathcal{P}_4(z) = z^4 + (1.13354586 - 1.63183350i)z^2 + 0.07465710 + 0.10527705 \quad (3.16)$$

Para determinar la dinámica del polinomio $\mathcal{P}_4(z)$, notemos que $\mu_1 = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es diofantino. Por el teorema de Siegel, concluimos que $\mathcal{P}_4(z)$ tiene un disco de Siegel. Para determinar la otra dinámica, calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.5 y 1.2.6. En la figura 3.12 se muestran las órbitas de los puntos críticos $z_1 = 0$, $z_2 = -0.46188824 - 0.88324044i$ y $z_3 = 0.46188824 + 0.88324044i$. Donde la órbita de z_1 converge al punto fijo atractor 0 y por teorema 1.2.5, las órbitas de z_2 y z_3 se hacen densas en la frontera del disco de Siegel. Por lo tanto el polinomio cuártico (3.16) tiene un punto fijo atractor y un disco de Siegel.

Como $\mathcal{P}_4(z)$ se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $P_{a_j}(z) = z^2 + a_j z$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + a_j z$, la relación entre los coeficientes del polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$ y los polinomios cuadráticos está dada por la ecuación (3.6), es decir

$$\begin{aligned} 1.13354586 - 1.63183350i &= b - \frac{a^2}{2} \\ 0.07465710 + 0.10527705i &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Resolviendo la ecuación (3.17), se obtienen los otros valores de los parámetros a_j, b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, de los polinomios cuadráticos cuya composición es $\mathcal{P}_4(z)$. Los valores de los parámetros a_j y b_j se muestran en la tabla 3.4. Así mismo usando el teorema 1.2.5 y 1.2.6, en la tercera columna de la tabla 3.4, se muestra la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica la figura correspondiente donde se puede observar el conjunto de Julia lleno y la órbita del punto crítico del polinomio cuadrático.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.13
1)	$a_1 = 0.35423412 + 0.48025520i$	Un punto fijo atractor	(a)
	$b_1 = 1.08096423 - 1.46171071i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(b)
2)	$a_2 = 0.28484118 + 0.39480957i$	Un punto fijo atractor	(c)
	$b_2 = 1.09617580 - 1.51937547i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(d)
3)	$a_3 = 0.91147049 + 1.98533420i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -0.42184086 + 0.17774004i$	Con un punto fijo atractor	(f)
4)	$a_4 = -1.55054580 - 2.86039898i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(g)
	$b_4 = -1.75529918 + 2.80334614i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(h)

Cuadro 3.4: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$

Las parejas uno, dos y tres de la tabla 3.4 muestran los parámetros de los polinomios cuadráticos $P_{a_1}(z), P_{a_2}(z)$ y P_{b_3} con un punto fijo atractor y $P_{b_1}(z), P_{b_2}(z)$ y $P_{a_3}(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo, de cuya composición resulta el polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$ con conjunto de Julia lleno conexo y un atractor y un disco de Siegel, esto muestra (1). Por otra parte la pareja cuatro nos muestra dos parámetros de polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo. Sin embargo, de la composición resulta el polinomio cuártico $\mathcal{P}_4(z)$ con un punto fijo atractor y un disco de Siegel, por lo tanto se tiene (2). ■

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

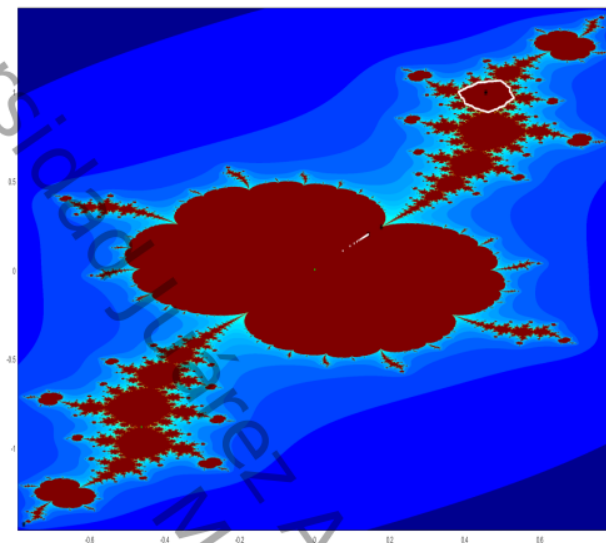
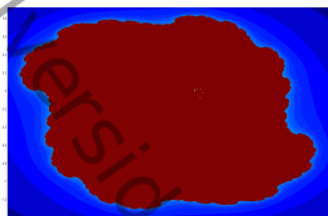
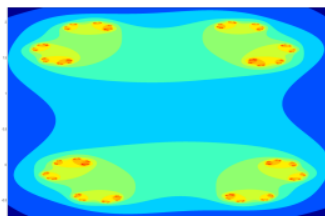


Figura 3.12: Conjunto de Julia lleno con un punto fijo atractor y un disco de Siegel

3. Dinámica de Polinomios Acoplados



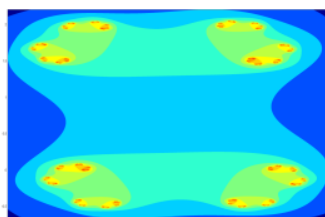
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



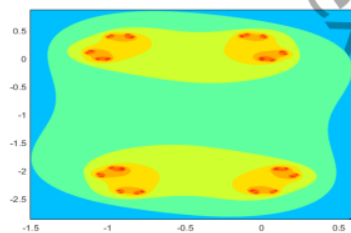
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



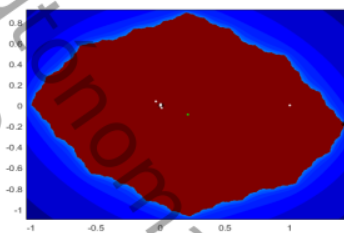
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



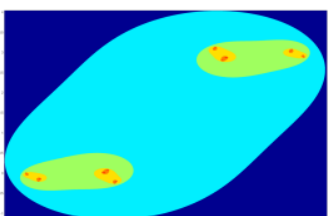
(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



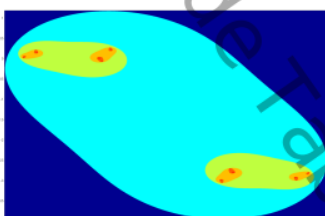
(e) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_3}(z)$



(g) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_4}(z)$



(h) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_4}(z)$

Figura 3.13: Conjuntos de Julia llenos

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Proposición 3.2.5 *Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_5(z)$ con conjunto de Julia lleno conexo y una única componente de Fatou acotada fija, correspondiente a un disco de Siegel. Este polinomio se puede obtener al componer una pareja de polinomios cuadráticos con las siguientes dinámicas :*

- (1) $P_a(z)$ con un disco de Siegel y $P_b(z)$ con un disco de Siegel.
- (2) $P_a(z)$ con punto fijo atractor y $P_b(z)$ con un punto fijo atractor.
- (3) $P_a(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y $P_b(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Demostración 14 *Recordemos que la composición de dos polinomios cuadráticos con dominios de rotación y ángulo de rotación de tipo algebraico, nos proporciona un polinomio cuártico con un dominio de rotación (disco de Siegel). Vamos a comenzar la demostración fijando como número de rotación $\theta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $\theta_2 = \frac{3\sqrt{5}-1}{6}$. Sea*

$$P_a(z) = z^2 + ze^{\pi i(\sqrt{5}-1)}, \quad P_b(z) = z^2 + ze^{\pi i(\frac{3\sqrt{5}-1}{6})}, \quad (3.18)$$

polinomios cuadráticos con disco de Siegel (Véase figura 3.15 (a) y figura 3.15 (b)). De la composición de $P_a(z)$ con $P_b(z)$ se obtiene un polinomio cuártico con dominio de rotación alrededor de cero y que es conjugado al siguiente polinomio cuártico.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5(z) = & z^4 + \left(e^{2\pi i \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)} \right)^2 \right) z^2 + \frac{e^{4\pi i (\sqrt{5}-1)}}{16} \\ & - \frac{e^{\frac{\pi i (9\sqrt{5}-8)}}{3}}{4} + \frac{e^{\pi i (\sqrt{5}-1)}}{2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Este polinomio cuártico tiene un punto fijo en $-0.3686844 - 0.3377451i$ con multiplicador $e^{2\pi i\theta}$, con θ de tipo diofantino. Por el teorema de Siegel existe una vecindad U del punto fijo, donde la dinámica es conjugada a una rotación, es decir, se tiene un disco de Siegel (véase 3.14).

Para determinar la dinámica en todo $K(\mathcal{P}_5)$, calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.5. En la figura 3.14 se muestran las órbitas de los puntos críticos $z_1 = 0$, $z_2 = 0.572687518 + 0.643636713i$ y $z_3 = -0.572687518 - 0.643636713i$, y puede observarse que las órbitas de los puntos críticos z_2, z_3 están en la frontera y la órbita de z_1 esta dentro del disco de Siegel. Por lo tanto los tres puntos críticos de $\mathcal{P}_5(z)$, están atrapadas por la dinámica del disco de Siegel. En consecuencia $K(\mathcal{P}_5)$ es conexo y tiene una sólo componente de Fatou fija, la cual corresponde al disco de Siegel.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

De acuerdo a la ecuación (3.6) el polinomio cuártico $\mathcal{P}_5(z)$ se puede obtener de la composición de otros tres pares de polinomios cuadráticos de la forma $P_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$, es decir

$$e^{2\pi i \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)} \right)^2 = b - \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{e^{4\pi i (\sqrt{5}-1)}}{16} - \frac{e^{\frac{\pi i (9\sqrt{5}-8)}{3}}}{4} + \frac{e^{\pi i (\sqrt{5}-1)}}{2} = \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \quad (3.20)$$

Resolviendo la ecuación (3.20), se obtienen los otros valores de los parámetros a_j, b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, de los polinomios cuadráticos cuya composición es $\mathcal{P}_5(z)$. Los valores de los parámetros a_j y b_j se muestran en la tabla 3.5. Así mismo, usando el teorema 1.2.5 y 1.2.6, en la tercera columna de la tabla 3.5, se especifica la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica el inciso de la figura 3.15, en el cual se muestra el conjunto de Julia lleno y la órbita del punto crítico del polinomio cuadrático.

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.15
1)	$a_1 = e^{\pi i (\sqrt{5}-1)}$	Disco de Siegel	(a)
	$b_1 = e^{\pi i (\frac{3\sqrt{5}-2}{3})}$	Disco de Siegel	(b)
2)	$a_2 = 2.269572069 + 0.908705758i$	Un punto fijo atractor	(c)
	$b_2 = 2.335200064 + 0.587962360i$	Un punto fijo atractor	(d)
3)	$a_3 = 0.015639824 + 1.903573009i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -1.639078345 - 1.444639299i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(f)
4)	$a_4 = -1.547843015 - 2.136788473i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(g)
	$b_4 = -0.912429035 + 1.833002266i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(h)

Cuadro 3.5: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_5(z)$

En la pareja dos de la tabla 3.5 se muestra dos parámetros cuyos polinomios cuadráticos tienen un punto fijo atractor y la composición de $P_{a_2}(z)$ con $P_{b_2}(z)$ resulta el polinomio cuártico (3.19), mostrando que la composición de dos atractores puede generar un polinomio cuártico con un disco de Siegel. Así mismo, en la tabla 3.5 se muestran las parejas tres y cuatro de parámetros, las cuales corresponden a polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo. De

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

la composición de $P_{a_3}(z)$ con $P_{b_3}(z)$ y $P_{a_4}(z)$ con $P_{b_4}(z)$ se obtiene el polinomio cuártico con conjunto de Julia lleno conexo y un disco de Siegel, por lo tanto se tiene (3). ■

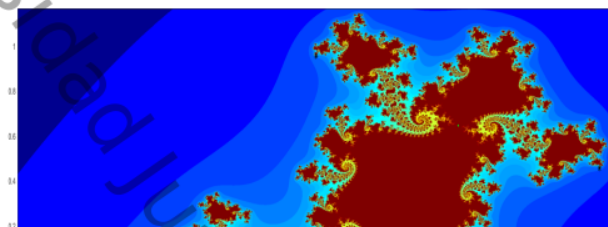
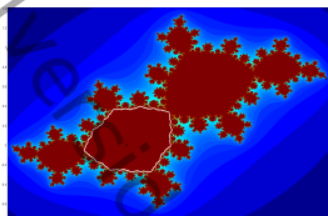
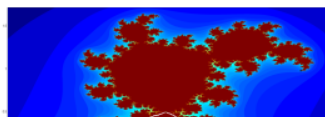


Figura 3.14: Conjunto de Julia lleno con un disco de Siegel

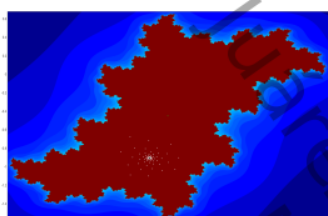
3. Dinámica de Polinomios Acoplados



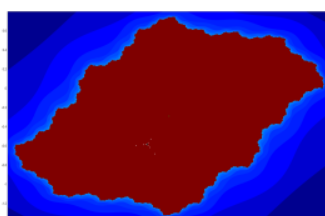
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



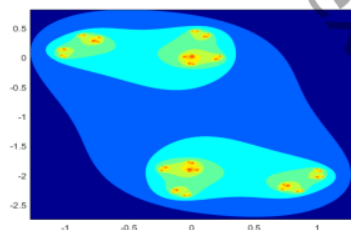
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



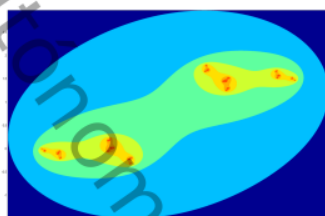
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



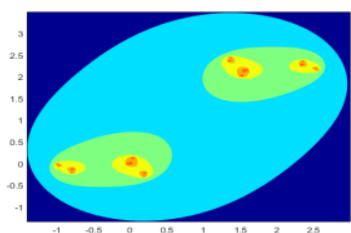
(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



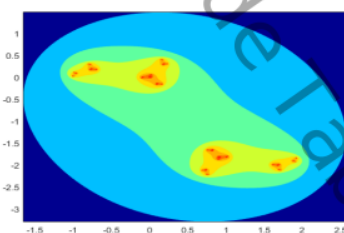
(e) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_3}(z)$



(g) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_4}(z)$



(h) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_4}(z)$

Figura 3.15: Conjuntos de Julia llenos

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Proposición 3.2.6 *Existe un polinomio cuártico $\mathcal{P}_6(z)$ con un conjunto de Julia lleno conexo y su interior es una única componente de Fatou generada por un punto fijo parabólico. Este polinomio puede ser obtenido de la composición de dos polinomios cuadrático, con las siguientes dinámicas:*

- (1) $P_a(z)$ con un punto fijo parabólico y $P_b(z)$ con un punto fijo parabólico.
- (2) $P_a(z)$ con punto fijo atractor y $P_b(z)$ con un punto fijo atractor.
- (3) $P_a(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y $P_b(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Demostración 15 *Recordemos que de la composición de dos polinomios cuadráticos con puntos fijos parabólicos resulta un polinomio cuártico con un punto fijo parabólico, por lo que el primer resultado de teorema se tiene. Para mostrar los siguientes incisos. Sean*

$$P_a(z) = z^2 + ze^{\pi i \frac{1}{3}}, \quad P_b(z) = z^2 + ze^{\pi i \frac{2}{3}},$$

polinomios cuadráticos con puntos fijos parabólicos (Véase figura 3.17 (a) y figura 3.17 (b)), de la composición de $P_a(z)$ con $P_b(z)$ se obtiene un polinomio cuártico con un punto fijo parabólico en cero, el cual es conjugado al siguiente polinomio cuártico.

$$\mathcal{P}_6(z) = z^4 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \right) z^2 + \frac{5i\sqrt{3}}{32} - \frac{5}{32}. \quad (3.21)$$

Para determinar la dinámica del polinomio cuártico (3.21), calculamos la órbita de los puntos críticos y usamos el teorema 1.2.7. En la figura 3.16 se muestra las órbitas de los puntos críticos $z_1 = 0, z_2 = 0.433012702 - 0.25i$ y $z_3 = 0.433012702 + 0.25i$, las cuales convergen al punto fijo indiferente $z_1 = -0.25 + 0.433012702i$. Por lo tanto $\mathcal{P}_6(z)$ tiene una sola componente de Fatou acotada, determinada por el pétalo atractor del punto fijo parabólico z_1 .

De acuerdo a la ecuación (3.6) el polinomio cuártico $\mathcal{P}_6(z)$ se puede obtener de la composición de otros tres pares de polinomios cuadráticos de la forma $P_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$, los cuales satisfacen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} &= b - \frac{a^2}{2} \\ \frac{5i\sqrt{3}}{32} - \frac{5}{32} &= \frac{a(a^3 - 4ab + 8)}{16}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Resolviendo la ecuación (3.22), se obtienen los otros valores de los parámetros a_j y b_j para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, de los polinomios cuadráticos cuya composición es $\mathcal{P}_6(z)$. Los valores de los parámetros a_j y b_j se muestran en la tabla 3.6. Por el teorema 1.2.6 y 1.2.7, en la tercera columna de la tabla 3.6, colocamos la dinámica correspondiente a cada polinomio cuadrático y en la cuarta columna se indica el inciso de la figura 3.17, en el cual se muestra el conjunto de Julia lleno y la órbita de los puntos críticos, del polinomio cuadrático correspondiente.

Parejas	Parámetros	Dinámica	Figura 3.17
1)	$a_1 = e^{\pi i \frac{1}{3}}$	Un punto parabólico	(a)
	$b_1 = e^{\pi i \frac{2}{3}}$	Un punto parabólico	(b)
2)	$a_2 = 2.232050807 + 0.133974596i$	Un punto fijo atractor	(c)
	$b_2 = 2.232050807 - 0.133974596i$	Un punto fijo atractor	(d)
3)	$a_3 = -1.232050807 - 1.866025403i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(e)
	$b_3 = -1.232050807 + 1.866025403i$	Conjunto de Julia totalmente desconexo	(f)

Cuadro 3.6: Parejas de parámetros que generan el polinomio cuártico $\mathcal{P}_6(z)$

En la pareja dos de la tabla 3.6 se muestra dos parámetros correspondientes a dos polinomios cuadráticos con un punto fijo atractor, los cuales al componerlos genera un polinomio cuártico con un punto fijo parabólico, con esto se tiene (2). Por otra parte, tenemos a la pareja tres que corresponde a polinomios cuadráticos con conjuntos de Julia totalmente desconexo. Sin embargo, de la composición de estos dos polinomios resulta un polinomio cuártico con conjunto de Julia lleno conexo y un punto fijo parabólico, por lo tanto se tiene (3). ■

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

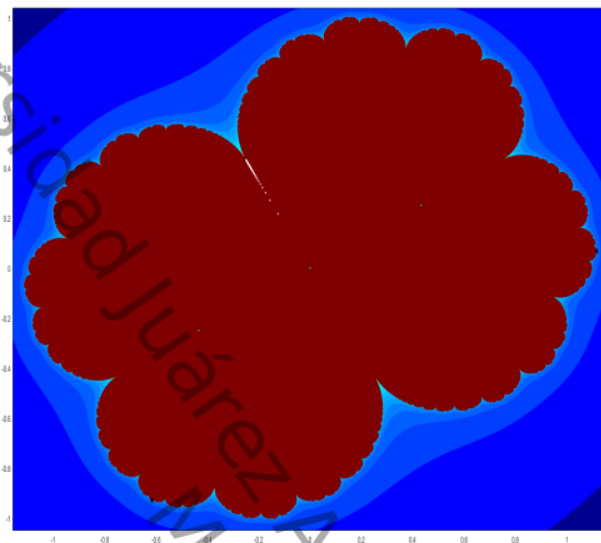
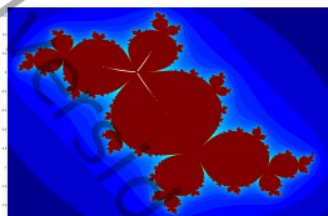
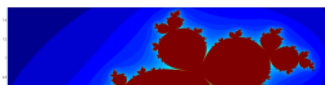


Figura 3.16: Conjunto de Julia lleno de un polinomio cuártico con un punto parabólico

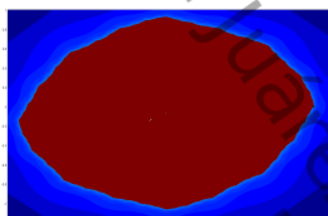
3. Dinámica de Polinomios Acoplados



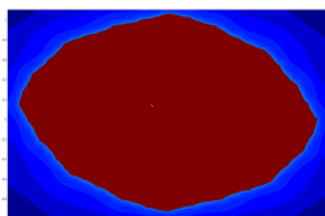
(a) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_1}(z)$



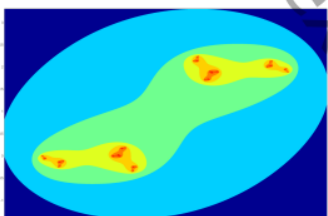
(b) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_1}(z)$



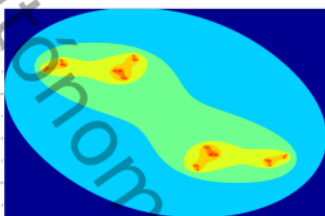
(c) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_2}(z)$



(d) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_2}(z)$



(e) Conjunto de Julia lleno de $P_{a_3}(z)$



(f) Conjunto de Julia lleno de $P_{b_3}(z)$

Figura 3.17: Conjuntos de Julia lleno

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

Observación 3.2.1 Recordemos que hay tres polinomios mónicos centrados que son conjugados, si consideramos el polinomio cuártico (3.19) con un disco de Siegel, éste es conjugado a los siguiente polinomios cuárticos con disco de Siegel:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{51}(z) &= z^4 + (-1.363174476 + 0.5877342445i)z^2 + 0.6502922325 - 0.4075600726i \\ \mathcal{P}_{52}(z) &= z^4 + (1.190580025 + 0.8866766040i)z^2 + 0.02781126006 + 0.7669496294i.\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (3.2) se obtienen los cuatros pares de parámetros (a_j, b_j) correspondientes a los polinomios cuadráticos $P_{a_j}(z) = z^2 + a_j z$ y $P_{b_j}(z) = z^2 + b_j z$ para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Estos dos polinomios $\mathcal{P}_{51}(z)$ y $\mathcal{P}_{52}(z)$ se obtienen de la composición de dos polinomios cuadráticos con la siguiente dinámica:

- (1) $P_{a_j}(z)$ con un disco de Siegel y $P_{b_j}(z)$ con un disco de Siegel.
- (2) $P_{a_j}(z)$ con punto fijo atractor y $P_{b_j}(z)$ con un punto fijo atractor.
- (3) $P_{a_j}(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo y $P_{b_j}(z)$ con conjunto de Julia totalmente desconexo.

Por lo tanto, al realizar la conjugación de los polinomios cuárticos las dinámicas de los polinomios cuadráticos se conserva. En conclusión, no aparecen nuevas dinámicas en las parejas de los polinomios cuadráticos obtenidos bajo conjugación.

3. Dinámica de Polinomios Acoplados

3.3. Conclusión

El teorema de clasificación de Fatou nos da las posibles dinámicas que se pueden presentar en cualquier función racional, en particular en la familia de polinomios cuárticos mónicos centrados que se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $z^2 + \lambda z$. En este trabajo mostramos que al realizar la composición de dos polinomios cuadráticos, la dinámica del polinomio cuártico no se conserva, es decir, en general la dinámica del polinomio cuártico resulta diferente a la de los polinomios cuadráticos, es mas el conjunto de Julia lleno del polinomio cuártico puede ser conexo, pero venir de la composición de dos polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo. En particular, mostramos que la composición de dos polinomios cuadráticos con conjunto de Julia totalmente desconexo, puede generar un polinomio con conjunto de Julia conexo y además puede tener en su conjunto de Julia lleno, cualquier dinámica de las enunciadas en el teorema de clasificación de Fatou.

Por otro lado, en la familia de polinomios cuárticos existen tres polinomios que son conjugados, es decir que pertenecen a la misma clase de conjugación afín, estos tres polinomios tienen la misma dinámica y cada uno de estos tres polinomios se puede obtener de cuatro parejas diferentes de polinomio cuadráticos. Sin embargo, la dinámica de cada uno de los polinomios cuadráticos que conforman las cuatro parejas son iguales para los tres polinomios cuárticos conjugados, por lo que no aparecen nuevas dinámicas.

Bibliografía

- [DH1] A. Douady. *Systèmes Dynamiques Holomorphes*. Séminaire Bourbaki, 35^e année. **599**, Astérisque 105-106, (1982), 39-63.
- [DH2] A. Douady y J. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication Mathématiques d'Orsay. **84-02**, (1984); **85-04**, (1985).
- [DH3] A. Douady y J. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **18**, (1985), 287-344.
- [Fa] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. Frances, **47**, 1919, pp. 161-271; 48, 1920, pp. 33-94, pp. 208-313.
- [FN] M. Fujimura y K. Nishizawa. *Some Dynamical Loci of Quartic Polynomials*. Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, 2005.
- [HW] G. H. Hardy y E. M. Wright. *An introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, 1954.
- [Ju] G. Julia. *Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, J. Math. **8**, (1918), 47-245.
- [KF] M. Kot y W.M. Schaffer , *The effects of seasonality on discrete models of population growth*. *Theor. Pop. Biol.* **26**, (1984), 340-360.
- [McM] C. T. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press.
- [Mu] J.D. Murray *Mathematical Biology: I. An Introduction: Part I*, Springer, 2002.
- [R] A. Radulescu , *The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials* . *Discrete Cont. Dyn. Syst.* **19** (1), (2007). 139-175.
- [S] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains* , Ann. of Math. **122**, (1985), 401-418.
- [V] P. F. Verhulst . *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. *Correspondance mathématique et physique* **10**, (1838), 113-121.
- [D] R. L. Devaney , *A first course in chaotic dynamical systems*, Adison-Wesley, 1992.

BIBLIOGRAFÍA

- [Be] A. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [BCF] G. Ble, V. Castellanos & M. Falconi, *On the coexisting dynamics in the alternate iteration of two logistic maps*. Dynamical Systems, **26**, **2**, (2011), 189-197.
- [Br] A. D. Brjuno. *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*. Dokl. Akad. Nauk, **165**, (1965), 987-989.
- [CG] L. Carleson y T. Gamelin. *Complex Dynamics*. Springer Verlag, New York, 1993.
- [Co] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, 2nd edition. Springer, 1978.
- [GS] J. Graczyk y G. Świątek. *The real Fatou conjecture*. Annals of Math. Studies **144**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [L] M. Lyubich. *Dynamics of quadratic polynomials, I-II*. Acta Mathematica. **178**, (1997), 185-297.
- [Ma] R. M. May , *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261**, (1976), 459-467.
- [M] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Third edition. Annals of Math. Studies. **160**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [Pe] C. L. Petersen y S. Zakeri, *On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk* , Ann. of Math. **159**, (2004), 1-52.
- [Ro] C. Robinson , *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos* , CRC Press, 1998.
- [Sh] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20**, (1987), 1-29.

CONJUNTOS DE JULIA DE FUNCIONES POLINOMIALES CUÁRTICAS

ORIGINALITY REPORT

13%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	ri.ujat.mx Internet	642 words — 5%
2	www.matcuer.unam.mx Internet	470 words — 4%
3	sociedadmatematicamexicana.org.mx Internet	255 words — 2%
4	www.uacj.mx Internet	99 words — 1%
5	revistas.ujat.mx Internet	53 words — < 1%
6	www.jssac.org Internet	33 words — < 1%
7	estadisticas.repositorioinstitucional.buap.mx Internet	28 words — < 1%
8	Mohamed Faouzi Atig. "On Yen's Path Logic for Petri Nets", Lecture Notes in Computer Science, 2009 Crossref	27 words — < 1%
9	fddocuments.es	

Internet

23 words — < 1%

10

fdocumenti.com

Internet

21 words — < 1%

11

docslib.org

Internet

10 words — < 1%

12

es.scribd.com

Internet

10 words — < 1%

13

qdoc.tips

Internet

10 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES ON

EXCLUDE BIBLIOGRAPHY ON

EXCLUDE SOURCES

OFF

EXCLUDE MATCHES

< 10 WORDS