



Universidad Juárez
Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas



FAMILIAS COMPLETAS Y RENORMALIZACIÓN
EN LOS POLINOMIOS CUÁRTICOS

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

CARALAMPIO MÉNDEZ VÁZQUEZ

² Director de tesis:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco, México.

Noviembre 2016.



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE



División
Académica
de Ciencias
Básicas

DIRECCIÓN

14 de noviembre de 2016

Mat. Caralampio Méndez Vázquez
Pasante de la Maestría en Ciencias
en Matemáticas Aplicadas
Presente.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "Familias completas y renormalización en los polinomios cuárticos", en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL POR TESIS DE MAESTRÍA para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón

Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JLSC/emt

Miembro CUMEX desde 2008

Consortio de
Universidades
Mexicanas

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km. 1, Carretera Cunduacán - Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco.
Tel/Fax (914)3360928, (993)3581500 Ext. 6701 E-mail: direccion.dacb@ujat.mx

Carta Autorización

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría denominada *"Familias completas y renormalización en los polinomios cuárticos"*, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 14 días del mes de noviembre del año 2016.

Autorizó



Caralampio Méndez Vázquez

142A15002

Agradecimientos

A Dios:

Por las bendiciones que me ha dado aún sin merecer, permitiendo terminar este trabajo.

A mis padres:

Por el apoyo incondicional que me han brindado desde que siquiera tengo memoria.

Al CONACYT:

Por su apoyo con una beca durante mis estudios y una beca tesis del proyecto CB-2012/181247 dirigido por el Dr. Gamaliel Blé González.

A mi asesor:

² Dr. Gamaliel Blé González por la paciencia y dedicación en este trabajo.

Introducción

Una de las herramientas matemáticas que más se han utilizado en la modelación de crecimiento de poblaciones son las ecuaciones en diferencias, las cuales aparecen como modelos de poblaciones con reproducción a tiempo discreto y con generaciones que no se traslapan a lo largo del tiempo (ver por ejemplo, el trabajo clásico de Robert May [M], o el trabajo de Guckenheimer et al [G2]).

Las funciones que aparecen en estas ecuaciones, en general son no lineales, por lo que éstas constituyen un tema importante de estudio en los sistemas dinámicos [D, dMvS]. Con la finalidad de comprender los sistemas no lineales, se ha trabajado con la familia de polinomios cuadráticos, los cuales son, ³⁶ a familia sencilla desde el punto de vista algebraico, pero con una riqueza importante desde el punto de vista dinámico, gracias a la amplia gama de comportamientos dinámicos que presenta [D, R]. Asimismo, el hecho de que en estas funciones cuadráticas se presenten comportamientos caóticos, las ha convertido en un objeto de estudio matemático, [D, L].

Es posible demostrar que todo polinomio cuadrático es conjugado a uno de la familia logística $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) = ax(1-x)$ con $a \in \mathbb{R}^+$, por lo que podemos restringir nuestro estudio a esta familia. Además, cuando $a > 4$, la órbita de casi todos los puntos se va a menos infinito y sólo tienen órbita acotada un conjunto de Cantor [D]. Por lo que desde el punto de vista de modelación el estudio se reduce a comprender la familia cuando $a \in [0, 4]$ y $x \in [0, 1]$, [D, R].

La iteración de una función cuártica, obtenida por la composición de dos funciones logísticas, para modelar crecimiento de poblaciones que sufren variaciones temporales fue analizado primeramente por Kot-Schaffer, [KS]. Ellos consideran dos estaciones: primavera e invierno, de modo que si N_P y N_I representan las densidades de la población en primavera e invierno, respectivamente, entonces la evolución anual del sistema está dada por la composición de las funciones N_P y N_I .

En particular, si estas funciones son logísticas con parámetros diferentes, entonces el problema se traduce a estudiar la dinámica de la siguiente familia de polinomios cuárticos a dos parámetros

$$F_{ba}(x) = F_b(F_a(x)),$$

donde ²³ $F_a(x) = ax(1-x)$ y $F_b(x) = bx(1-x)$.

En este trabajo analizamos la dinámica local de las funciones polinomiales cuárticas. En primer lugar las estudiamos como funciones de variable real y las vemos como una función multimodal. Para estudiar las funciones multimodales, la herramienta que usamos es la renormalización y en particular

mostramos conjuntos de parámetros donde la familia cuártica es renormalizable y se obtiene una familia unimodal completa. En segundo lugar abordamos el problema de renormalización en la familia de polinomios cuárticos complejos y usando un resultado de Katagata [K2], mostramos que dado dos polinomios cuadráticos diferentes, siempre existe un polinomio cuártico que al renormalizarlo tiene las dos dinámicas cuadráticas.

Este documento está organizado de la siguiente manera: en el capítulo uno, presentamos algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos discretos. En particular abordamos diferentes tipos de conjugación y algunos resultados de dinámica simbólica y las condiciones de admisibilidad.

En el capítulo dos, introducimos los conceptos de familias completas y renormalización y damos algunos resultados para caracterizar este tipo de familias. En particular, obtenemos intervalos de parámetros donde es posible renormalizar la familia de polinomios cuárticos y obtener una familia unimodal completa.

En el capítulo tres, abordamos la renormalización desde el punto de vista de funciones de variable compleja. En particular introducimos el concepto de funciones de tipo polinomial y mostramos la relación que éstas guardan con los polinomios. Por último mostramos usando la teoría de funciones cuasiconformes que la dinámica de cualquier pareja de polinomios cuadráticos aparece localmente en el conjunto de Julia lleno de un polinomio cuártico.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Órbitas	1
1.1.1. Puntos periódicos	2
1.2. Conjugación	4
1.2.1. Equivalencia combinatoria	7
1.2.2. Relación entre equivalencia combinatoria y conjugación	8
1.3. Dinámica Simbólica	14
1.3.1. Itinerarios	14
1.3.2. Itinerarios admisibles	22
2. Familias Completas	29
2.1. Conjugación esencial	29
2.2. Familias completas	32
2.3. Funciones persistentemente suprayectivas	33
2.4. Renormalización en un intervalo	54
2.5. Renormalización en la familia cuártica $f_b(x) = bx^2 + x^4$	56
3. Polinomios Cuárticos	79
3.1. Funciones cuasiconformes	79
3.1.1. Funciones tipo polinomial	82
3.2. Dinámica de los polinomios cuárticos	83
3.2.1. Itinerarios de los Julias cuárticos	84
3.2.2. Renormalización compleja	92
Conclusión	102

Preliminares

En este capítulo daremos las herramientas básicas de dinámica unidimensional, las cuales nos permitirán abordar los resultados principales de este trabajo. Las definiciones y resultados que aquí presentamos pueden ser consultados en [dMvS].

1.1. Órbitas

En esta sección veremos la clasificación de los tipos de órbitas, centrándonos en las de los puntos periódicos, ya que éstos adquieren mayor importancia en el estudio de la dinámica local.

En primer lugar trabajaremos con funciones que están definidas en un espacio métrico X y posteriormente nos restringiremos a un intervalo.

De ahora en adelante para hacer más práctica la notación denotaremos como f^n la composición de f consigo mismo n -veces, es decir,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}}.$$

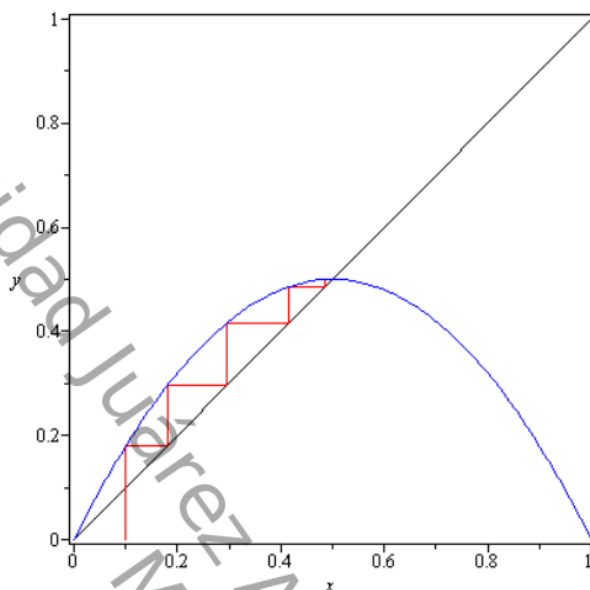
Definición 1.1.1. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y $x \in X$, la órbita de x bajo f denotada por $\mathcal{O}_f(x)$ es el conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

Ejemplo 1.1.1. Si $f_2(x) = 2x(1-x)$ y $x_0 = 0.1$, la órbita de x_0 bajo f_2 es

$$\mathcal{O}_{f_2(0.1)} = \{0.1, 0.18, \dots\},$$

(véase la figura 1.1)

Figura 1.1: Órbita de 0.1 bajo f_2 .

En el dominio de f existen puntos especiales cuya órbita es finita. En la siguiente sección los clasificaremos.

1.1.1. Puntos periódicos

Definición 1.1.2. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, $x \in X$ es un punto periódico de periodo n , si $f^n(x) = x$ y $f^k(x) \neq x$ para toda $k < n$.

Cuando $n = 1$, se dice que x es un punto fijo de f .

Ejemplo 1.1.2. La función $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ donde $\mu > 0$, tiene dos puntos fijos.

Solución

Para encontrar sus puntos fijos lo único que tenemos que hacer es resolver la igualdad

$$f_\mu(x) = x,$$

en nuestro caso sería

$$\mu x(1-x) = x.$$

Resolviendo obtenemos que

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{\mu-1}{\mu},$$

son los puntos fijos de la función $f_\mu(x)$. $\square$

A continuación encontraremos los puntos periódicos de periodo dos para la función $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

Para esto resolvemos la siguiente igualdad

$$f_\mu^2(x) = x.$$

Esto es

$$-\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + (\mu^2 - 1)x = 0.$$

Factorizando tenemos,

$$x \left(x - \frac{\mu-1}{\mu} \right) \left(-\mu x^2 + (\mu+1)x - \frac{\mu+1}{\mu} \right) = 0.$$

Como los puntos fijos obviamente son solución de esta ecuación tenemos que excluirlas, de esta manera los puntos de periodo dos son las soluciones de la ecuación,

$$-\mu x^2 + (\mu+1)x - \frac{\mu+1}{\mu} = 0.$$

De aquí que

$$x_1^* = \frac{(\mu+1) - \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu} \text{ y } x_2^* = \frac{(\mu+1) + \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu}.$$

Notemos que para tener puntos periódicos reales de periodo dos es necesario que $\mu > 3$. $\square$

Definición 1.1.3. Sea $f : A \subset I \rightarrow I$ una función continua:

1. A es invariante si $f(A) \subset A$.
2. A es invariante hacia atrás si $f^{-1}(A) \subset A$.

A es totalmente invariante si cumple 1 y 2.

Definición 1.1.4. Sean $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ una función diferenciable y $x_0 \in I$ un punto periódico de periodo n de f , se dice que x_0 es atractor si $|Df^n(x_0)| < 1$.

Es posible dar una definición más general de atractor, la cual permite considerar el caso cuando f no es diferenciable en el punto periódico y es la siguiente.

Definición 1.1.5. Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua y x_0 un punto periódico de periodo n . Se dice que x_0 es atractor, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{jn}(x) = x_0.$$

Cuando f es diferenciable la definición 1.1.4 implica 1.1.5. $\square$

Definición 1.1.6. Sean $f : I \rightarrow I$ una función diferenciable y $x_0 \in I$ un punto periódico de periodo n de f , se dice que x_0 es repulsor si $|Df^n(x_0)| > 1$.

De igual manera, podemos dar una definición más general de repulsor.

Definición 1.1.7. Sea x_0 un punto periódico de periodo n de una función continua $f : I \rightarrow I$. Decimos que x_0 es repulsor, si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ejemplo 1.1.3. La familia logística tiene dos puntos fijos que son $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$. Como $f'_\mu(0) = \mu$, tenemos que el punto fijo $x_1 = 0$ es atractor cuando $0 < \mu < 1$ y es repulsor para $\mu > 1$. Por otro lado, el punto $x_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$ es atractor cuando $1 < \mu < 3$, ya que $f'_\mu(x_2) = 2 - \mu$. Así, x_2 es repulsor cuando $\mu > 3$. $\square$

1.2. Conjugación

Definición 1.2.1. Sea $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$ una función continua, f es l -modal si tiene exactamente l valores extremos

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_l < 1,$$

$f(\{0, 1\}) \subset \{0, 1\}$ y es monótona en cada uno de los $l + 1$ intervalos $I_1 = [0, c_1]$, $I_2 = (c_1, c_2)$, $I_3 = (c_2, c_3)$, $\dots$, $I_{l+1} = (c_l, 1]$. A los puntos c_j para $j = 1, \dots, l$, se les llaman puntos de doblez y a los intervalos I_j para $j = 1, \dots, l + 1$, se les llama intervalos de monotonicidad de f .

En el caso en que la función es diferenciable se tiene que los puntos de doblez coinciden con los puntos críticos de la función.

Ejemplo 1.2.1. La familia de funciones $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ donde $\mu > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ es unimodal.

Solución

Como esta familia de funciones es diferenciable, los puntos críticos están dados por la ecuación

$$f'_\mu(x) = 0,$$

de donde se obtiene que $c = \frac{1}{2}$ es el único punto crítico para esta familia.

Como $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0$, se tiene que $f_\mu(\{0, 1\}) = \{0\} \subset \{0, 1\}$, en consecuencia $f_\mu(x)$ es unimodal. $\square$

A menudo nos preguntamos cuando dos funciones definen el “mismo” sistema dinámico. La siguiente definición es vital para responder esta pregunta.

Definición 1.2.2. Sean $I = [0, 1]$ y $f, g : I \rightarrow I$ dos funciones continuas, decimos que f y g son topológicamente conjugadas o simplemente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : I \rightarrow I$ tal que $h \circ f = g \circ h$ es decir, hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{h} & I \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ I & \xrightarrow{h} & I \end{array}$$

Ejemplo 1.2.2. La función tienda

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y la función logística $f_4(x) = 4x(1-x)$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)$, (ver figura 1.2).

Solución

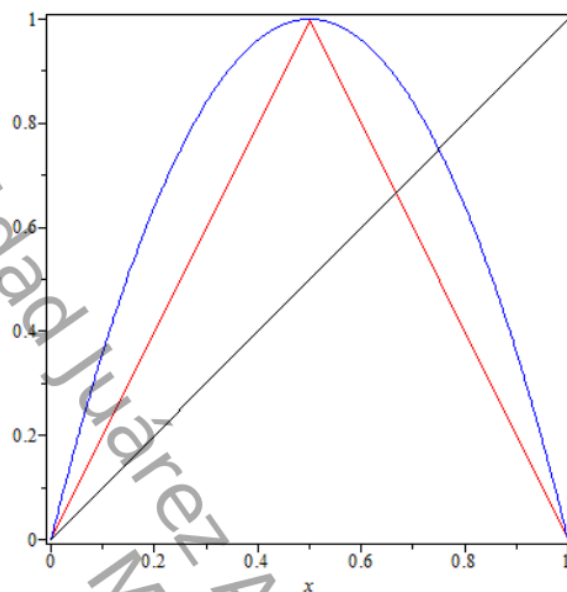


Figura 1.2: Gráfica de la función logística y la tienda.

Veamos que la siguiente igualdad se cumple $h \circ T = f_4 \circ h$.

En efecto

$$\begin{aligned}(f_4 \circ h)(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)\right)\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi x)\right)}{\left(1 - \cos(\pi x)\right) \left(1 + \cos(\pi x)\right)} = 1 - \cos^2(\pi x).\end{aligned}$$

Ahora veamos la otra composición

$$\begin{aligned}(h \circ T)(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi(1-x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (2 \cos^2(\pi x) - 1) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi - 2\pi x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \cos^2(\pi x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Así hemos verificado la igualdad $h \circ T = f_4 \circ h$, en consecuencia la función tienda y la logística son conjugadas. $\square$

1.2.1. Equivalencia combinatoria

Definición 1.2.3. Decimos que dos funciones l -modales $f, g : I \rightarrow I$ con puntos de doblez $c_1 < c_2 < \dots < c_l$ y $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2 < \dots < \tilde{c}_l$ respectivamente, son combinatoriamente equivalentes si existe una biyección h que preserva el orden tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(c_i) & \xrightarrow{h} & \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\tilde{c}_i) \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\tilde{c}_i) & \xrightarrow{h} & \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\tilde{c}_i)
 \end{array}$$

y $h(c_i) = \tilde{c}_i$ para $i = 1, \dots, l$. A la función h se le llama **equivalencia combinatoria** entre f y g .

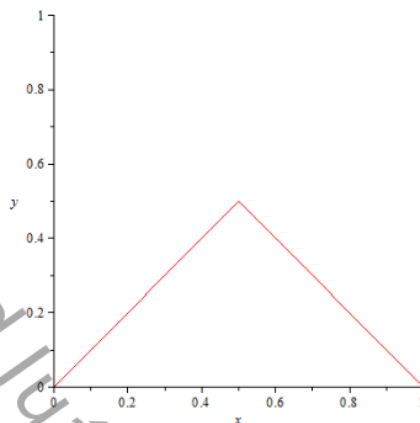
Estamos interesados realmente en las iteraciones de los puntos de doblez y de alguna manera relacionarlo con la noción de conjugación, para ello tenemos que introducir los conceptos de “homo-intervalo”, “cuenca” y el de “intervalo errante”.

Definición 1.2.4. Un homo-intervalo de f es un intervalo donde f^n es monótona para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la función tienda

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Note que $T^n(x)$ siempre es monótona en $[0, \frac{1}{2}]$ para toda $n \geq 0$ y como $[\frac{1}{2}, 1]$ es la preimagen bajo T de $[0, \frac{1}{2}]$ se tiene que también $T^n(x)$ es monótona en $[0, \frac{1}{2}]$. En consecuencia $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ son homo-intervalos de T , véase la figura [1.3](#) $\square$

Figura 1.3: Homo-intervalos de T .

La definición anterior está relacionada con los intervalos errantes y las órbitas periódicas atractoras que a continuación definiremos.

Definición 1.2.5. Un intervalo J es errante si todas las iteradas $J, f(J), f^2(J), \dots$ son disjuntas y $(f^n(J))_{n \geq 0}$ no tiende a una órbita periódica.

Definición 1.2.6. Sea $\mathcal{O}(p)$ una órbita periódica. Esta órbita es llamada atractora si

$$B(p) = \{x : f^k(x) \rightarrow \mathcal{O}(p) \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

contiene un conjunto abierto. El conjunto $B(p)$ es llamado cuenca de $\mathcal{O}(p)$. La cuenca inmediata $B_0(p)$ de $\mathcal{O}(p)$ es la unión de las componentes de $B(p)$ que contienen puntos de $\mathcal{O}(p)$.

Si $B_0(p)$ es una vecindad de $\mathcal{O}(p)$ entonces esta órbita periódica se llama bilateral en otro caso se dice que es una órbita atractora unilateral.

1.2.2. Relación entre equivalencia combinatoria y conjugación

Lema 1.2.1. Sea J un homo-intervalo de $f : I \rightarrow I$. Entonces hay dos posibilidades:

- a) J es un intervalo errante ó,

b) alguna iteración de J es enviada en un intervalo L tal que f^p manda a L monótonamente en sí mismo, para algún $p \in \mathbb{N}$. En consecuencia, cualquier punto de J está contenida en la cuenca de una órbita periódica.

Demostración.

Suponga que no todos los intervalos $J, f(J), f^2(J), \dots$ son disjuntos. Entonces existen enteros $n \geq 0, p \geq 0$ tales que los interiores de $f^n(J)$ y $f^{n+p}(J)$ tienen una intersección vacía.

Por lo tanto, para toda $k \geq 0$, $f^{n+kp}(J)$ y $f^{n+(k+1)p}(J)$ también se intersectan y así $L = \bigcup_{k \geq 0} f^{n+kp}(J)$ es un intervalo y f^p manda a L homomórficamente en

sí mismo. Es decir $f^p(L) \subseteq L$ por lo que existe un punto fijo de f^p en L , así los puntos fijos de J son finalmente enviados en puntos fijos de $f^p|_L$ o alguna iteración hasta cierto punto fijo de $f^p|_L$. ■

Teorema 1.2.1. *Supongamos que $f, g : I \rightarrow I$ son dos funciones l -modales con puntos de doblez $c_1 < c_2 < \dots < c_l$ y $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2 < \dots < \tilde{c}_l$ respectivamente. Suponga que la función*

$$h : \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f^n(c_i) \rightarrow \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} g^n(\tilde{c}_i) \quad (1.1)$$

definida por $h(f^n(c_i)) = g^n(\tilde{c}_i)$ es una biyección que preserva orden. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. Las funciones f y g son combinatoriamente equivalentes.
2. Si $PT(f)$ denota el conjunto de puntos de doblez periódicos de f entonces la “conjugación” h manda a

$$\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f^n(c_i) \cap (B_0(f) \cup PT(f))$$

en el conjunto correspondiente de g .

3. Supongamos que

- i) f y g no tienen intervalos errantes.
- ii) No existen intervalos que consisten en puntos periódicos de período constante.

- iii) Cada punto de doblez es atractor.
- iv) La restricción de la función h a $B_0(f)$, es decir

$$h : \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f^n(c_i) \cap B_0(f) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} g^n(\tilde{c}_i) \cap B_0(g)$$

se extiende a una conjugación de $B_0(f)$ a $B_0(g)$.

Entonces h puede extenderse a una conjugación en I .

Antes de demostrar este teorema primero probaremos las siguientes afirmaciones y un corolario.

Afirmación 1.2.1. Sea $J \subset \mathbb{R}$, si cada punto en J es periódico entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = x$ para toda $x \in J$.

Demostración.

Como todo $x \in J$ es periódico entonces $J \subset \text{Per}(f)$ y supongamos que J es una componente conexa de $\text{Per}(f)$. Si $x \in J$ y es un punto periódico de periodo k entonces $f^k(x) = x$, así $f^k(J) \cap J \neq \emptyset$. Tenemos que para cada $y \in J$ existe una órbita periódica, así $f^k(J) \subseteq \text{Per}(f)$.

Por otro lado, como f es continua y J es un intervalo, $f^k(J)$ es un intervalo, por lo tanto $f^k(J) \cup J$ es un intervalo que está contenida en $\text{Per}(f)$.

Así $f^k(J) \cup J$ es conexo y puesto que J es una componente conexa de $\text{Per}(f)$ tenemos que $f^k(J) \cup J = J$ implica que $f^k(J) = J$. ■

Afirmación 1.2.2. f^k restringido al intervalo J es un homeomorfismo y en consecuencia cada punto de J es de periodo k o $2k$.

Demostración.

Como f^k es continua, abierta y sobreyectiva en el intervalo J , sólo necesitamos mostrar la inyectividad. Si $x, y \in J$ y $f^k(x) = f^k(y)$ entonces $f^k(x)$ y $f^k(y)$ tienen el mismo periodo. Como $x, y \in \text{Per}(f)$ esto implica que x y y tienen el mismo periodo $37 \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $x = f^{n-k}(f^k(x)) = f^{n-k}(f^k(y)) = y$ y así mostramos la inyectividad.

Por consiguiente $f^k : J \longrightarrow J$ es un homeomorfismo, además cada punto de J es de periodo k o $2k$. ■

Corolario 1.2.1. Sean f y g como en el teorema 1.2.1 y supongamos que:

1. La función h de (1.1) es una biyección que preserva orden.
2. La cuenca de atracción de cada punto periódico atractor de f y g , contiene un punto de doblez y cada punto de doblez periódico es atractor.
3. Las cuencas inmediatas de atracción de dos periódicos atractores no tienen un punto límite en común.

Entonces existe una correspondencia inyectiva entre los puntos periódicos atractores de f y los de g . Además, un punto periódico atractor de f es unilateral si y sólo si el periódico atractor correspondiente en g es unilateral. En consecuencia, la biyección monótona h de (1.1) puede extenderse a una conjugación entre $f|_{B_0(f)}$ y $g|_{B_0(g)}$.

Demostración.

Sea p un punto periódico de periodo n atractor, es decir, $\mathcal{O}(p)$ es atractora. De 2) tenemos que la cuenca de atracción $\mathcal{O}(p)$ atrae un punto de doblez, sea c_j el punto de doblez que pertenece al dominio de atracción de $\mathcal{O}(p)$. Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(c_j) = p \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(\tilde{c}_j) = \tilde{p}$$

definimos $h(p) = \tilde{p}$ y $h(f^n(p)) = g^n(\tilde{p})$. De 3) tenemos que h definida de esta manera en cada órbita atractora es biyectiva.

Por lo tanto h manda órbita atractora de f en órbita atractora de g además podemos detectar las órbitas atractoras siguiendo las órbitas de los puntos de doblez.

Con esto hemos definido h en las órbitas atractoras y hemos demostrado la primera parte del corolario, para demostrar la segunda parte necesitamos extender h a la cuenca inmediata de atracción de f , de tal manera que siga siendo una conjugación.

CASO I.

Supongamos que f^n preserva orientación en una vecindad de p . Entonces existe una vecindad $U(p) = (a, b)$ tal que f es creciente y como p es atractor podemos elegir $U(p)$ tal que $f^n(U(p)) \subset U(p)$.

Sea $V(p) = U(p) \setminus f^n(U(p))$. En este caso $V(p)$ está formado por dos intervalos.

CASO II.

Por otro lado, cuando f^n invierte orientación en $U(p)$, observamos que f^{2n} preserva orientación en $U(p)$, es decir, cae en el primer caso.

Elegimos un intervalo unilateral con extremo en p tal que $f^{2n}(U(p)) \subset U(p)$ y $V(p) = U(p) \setminus f^n(U(p))$ consta de un intervalo.

CASO III.

Si f^n tiene un extremo local en p tomamos $U(p)$ una vecindad unilateral de tal forma que f^n preserva orden en $U(p)$ y $f^n(U(p)) \subset U(p)$.

Tomamos el intervalo $V(p) = U(p) \setminus f^n(U(p))$. Por hipótesis si p es unilateral $\tilde{p}$ también es unilateral y cuando p es bilateral $\tilde{p}$ también. A los intervalos $V(p)$ se les llama dominios fundamentales de $\mathcal{O}(p)$.

Los dominios fundamentales $V(p)$ de $\mathcal{O}(p)$ los podemos escoger de tal manera que la órbita del punto de doblez que intersecta a $B_0(p) \setminus \mathcal{O}(p)$ también intersecte a esta vecindad. Por hipótesis $\mathcal{O}(p)$ atrae al menos un punto crítico c_i y como h preserva el orden tenemos que $\tilde{c}_i$ está en la cuenca de atracción de un atractor periódico $\mathcal{O}(\tilde{p})$. Por la hipótesis 3) tenemos que esta correspondencia entre los atractores es inyectiva y en consecuencia podemos extender el homeomorfismo h del dominio fundamental $V(p)$ a $V(\tilde{p})$, enviando los intervalos de $V(p)$ homeomórficamente a los intervalos de $V(\tilde{p})$.

Solo falta extender h a la cuenca inmediata de atracción, esto lo haremos de la siguiente manera. Para $x \in f^n(U(p))$ podemos aplicar $h(x) = g^n(h(f^{-n}(x)))$. Si $x \in V(p)$ ya estaba definida anteriormente. Por último si $x \notin f^n(U(p))$ y $x \notin V(p)$ se define h como $h(x) = g^{-m}(h(f^m(x)))$ por lo tanto h se extiende homeomórficamente en $B_0(f)$ y $B_0(g)$. ■

Corolario 1.2.2. Si f y g no tienen intervalos errantes y no tienen intervalos que consisten en puntos periódicos de periodo constante, entonces f y g son conjugadas.

Demostración.

En el corolario anterior logramos definir h en las cuencas de los atractores, ahora si $J \subset I$ y $J \not\subset B_0(f)$ entonces J es eventualmente periódico de aquí $f^k(J) \subset B_0(f)$.

Si $x \in J$ definimos $h(x) = g^{-n}(h(f^n(x)))$ por lo tanto concluimos que f y g son conjugadas. ■

Demostración del teorema 1.2.1

Ya se probó en el corolario 1.2.1 que f y g son conjugadas mediante h restringido en $B_0(f)$ y $B_0(g)$. Para terminar la demostración del teorema probaremos ahora que la conjugación h puede extenderse a todas las cuencas de atracción.

Sin pérdida de generalidad, sea $I = [0, 1]$, así h puede extenderse a un homeomorfismo $H_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que la restricción de H_0 es la conjugación h entre $f : B_0(f) \rightarrow B_0(f)$ y $g : B_0(g) \rightarrow B_0(g)$, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccc} B_0(f) & \xrightarrow{f} & B_0(f) \\ \downarrow H_0=h & & \downarrow H_0=h \\ B_0(g) & \xrightarrow{g} & B_0(g). \end{array}$$

Como H_0 manda la i -ésima imagen de los puntos de doblez de f a la i -ésima imagen de los puntos de doblez de g , tenemos que $g(\tilde{c}) = H_0(f(c_i))$ con $H_0(c_i) = \tilde{c}_i$, esto implica que las funciones g y $H_0 \circ f$ tienen los mismos valores locales extremos y los mismos números de puntos de doblez.

Por lo tanto existe un único homeomorfismo $H_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $g \circ H_1 = H_0 \circ f$, $H_1(0) = 0$ y $H_1(1) = 1$. Observemos que H_1 coincide con h en las iteradas de c_i para $n \leq 0$.

$$g \circ H_1(f^n(c_i)) = H_0 \circ f^{n+1}(c_i) = h(f^{n+1}(c_i)) = g^{n+1}(\tilde{c}_i).$$

De aquí tenemos que $H_1(f^n(c_i)) = g^n(\tilde{c}_i)$. Si $x \in f^{-1}(B_0(f)) \setminus B_0(f)$ y $x \neq c_i$, entonces $H_1(x) \in g^{-1}(H_0(f(x)))$ y podemos elegirla de manera única ya que f y g tienen el mismo número de doblez, es decir $H_1(x) = g^{-1}(H_0(f(x)))$ así $g \circ H_1 = H_0 \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} B(f) & \xrightarrow{f} & B(f) \\ \downarrow H_1 & & \downarrow H_0 \\ B(g) & \xrightarrow{g} & B(g). \end{array}$$

Note que H_1 es biyectiva y preserva orden, además envía $f^{-1}(c_i)$ a $g^{-1}(\tilde{c}_i)$, así tenemos que dado H_0 podemos definir H_1 . De la misma manera podemos definir H_2 y así inductivamente se define hasta H_{n+1} de la siguiente manera:

$$g \circ H_{n+1} = H_n \circ f.$$

De aquí se deduce que

$$H_n : \bigcup_{k \geq -n} f^k(C(f) \cup B_0(f)) \rightarrow \bigcup_{k \geq -n} g^k(C(g) \cup B_0(g)),$$

es una biyección que preserva el orden, donde $C(f) = \{c_1, \dots, c_l\}$ y $C(g) = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_l\}$. Además H_{n+1} coincide con H_n sobre este conjunto, y se tiene que $g \circ H_n = H_n \circ f$. En particular existe un único límite

$$H_* : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C(f) \cup B_0(f)) \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(C(g) \cup B_0(g)),$$

tal que $H_* \circ f = g \circ H_*$ sobre este conjunto y $H_*(c_i) = \tilde{c}_i$. Es importante mencionar que en general el límite de las funciones H_n no está bien definido sobre todo el intervalo $[0, 1]$, véase [dMvS](#).

Si g no tiene intervalos errantes y no tiene intervalos que consisten de puntos periódicos del mismo periodo, entonces por el lema [1.2.1](#) tenemos que el conjunto de preimágenes de los puntos de doblez y de puntos que son eventualmente enviados a $B_0(g)$ es denso en $[0, 1]$. Como esto ocurre, para todo $x \in [0, 1]$ existe una sucesión monótona x_n que converge a x , la cual permite extender de manera única la función H_* a una función monótona y suprayectiva en el intervalo $[0, 1]$, definida por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_*(x_n) = H_*(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)) = H_*(x).$$

Así las funciones f y g son semiconjugadas. Si estas mismas propiedades se satisfacen para f entonces H_* se extiende de manera única a un homeomorfismo y f y g son conjugadas. ■

1.3. Dinámica Simbólica

En esta sección analizamos la teoría combinatoria desarrollada por Milnor y Thurston para las funciones con un número finito de puntos de doblez.

1.3.1. Itinerarios

Como veremos más adelante, es posible caracterizar la dinámica de una función casi por completo por una cadena de símbolos.

Definición 1.3.1. Sea $S = \{I_1, I_2, \dots, I_{l+1}, c_1, c_2, \dots, c_l\}$ el espacio de símbolos y $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$ donde $\mathbb{N}$ son los números naturales, es decir, Σ es el espacio de sucesiones infinitas tales que cada $x \in \Sigma$ es de la forma $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, donde cada $x_i \in S$.

Definición 1.3.2. Sean $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ y $t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma$. Definimos la función $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(s_i, t_i)}{2^i} \text{ donde } \delta(s_i, t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = t_i \\ 1 & \text{si } s_i \neq t_i \end{cases}$$

Proposición 1.3.1. La función d es una métrica en Σ .

Demostración.

1. Veamos que $d(s, t) \geq 0$.

Es claro que $\delta(s_i, t_i) \geq 0$, por otro lado tenemos que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ y

$$0 \leq d(s, t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(s_i, t_i)}{2^i} = d(s, t) \leq 2.$$

Ahora tenemos que,

$$\begin{aligned} d(s, t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta(s_i, t_i) &= 0 \\ \Leftrightarrow s_i &= t_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

2. Para demostrar $d(s, t) = d(t, s)$, observe que $\delta(s_i, t_i) = \delta(t_i, s_i)$. Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(t_i, s_i)$$

en consecuencia $d(s, t) = d(t, s)$.

3. Por último verifiquemos la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(s_i, u_i) + \delta(u_i, t_i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, u_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(u_i, t_i) \\ &= d(s, u) + d(u, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(s, t) \leq d(s, u) + d(u, t)$. ■

Proposición 1.3.2. Sean $s, t \in \Sigma$. Si las sucesiones s y t coinciden en al menos los primeros $n + 1$ términos entonces $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

Demostración.

Si $s_i = t_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(s_i, t_i) \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. ■

Proposición 1.3.3. Si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ entonces $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración.

Supongamos por contradicción que $s_i \neq t_i$, para algún $i \leq n$.

En consecuencia $d(s, t) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n} \Rightarrow d(s, t) \geq \frac{1}{2^n}$ pero esto es una contradicción, ya que $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$.

Por lo tanto $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. ■

En Σ definimos la función desplazamiento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ como sigue, si $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ entonces $\sigma(s) = (s_1, s_2, \dots)$.

Proposición 1.3.4. La función desplazamiento σ es continua.

Demostración.

Sea $s \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $d(s, t) < \delta$ entonces $d(\sigma(s), \sigma(t)) < \epsilon$.

Dado $\epsilon > 0$ por la propiedad arquimediana siempre podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ y $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ tenemos que si $d(s, t) < \delta$, por la proposición 1.3.3 s y t deben coincidir al menos en los primeros $n+2$ dígitos, en consecuencia $\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ son iguales en los primeros $n+1$ dígitos y así $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Por lo tanto σ es continua. ■

Definición 1.3.30 Sea $f : I \rightarrow I$ una función l -modal, definimos $i_f : I \rightarrow \Sigma$ como $i_f(x) = (i_0(x), i_1(x), \dots, i_n(x), \dots)$, donde

$$i_n(x) = \begin{cases} I_k & \text{si } f^n(x) \in I_k \\ c_k & \text{si } f^n(x) = c_k \end{cases}$$

a la sucesión $i_f(x)$ se le llama el itinerario de x bajo f .

A las sucesiones $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$, definidas por $\nu_i = i_f(c_i^+) = \lim_{x \rightarrow c_i^+} i_f(x)$ se les llama itinerarios principales, además $\nu_0 = i_f(0)$ y $\nu_{l+1} = i_f(1)$.

Las siguientes observaciones son importantes ya que haremos uso de ellas más adelante. Supongamos que f y g son l -modales.

Observación 1. Si f y g son combinatoriamente equivalentes entonces tienen los mismos itinerarios principales.

Mostraremos más adelante, que si f y g tienen los mismos itinerarios principales y ambas no tienen atractores periódicos, ni intervalos errantes y no tienen intervalos de puntos periódicos entonces son combinatoriamente equivalentes.

Observación 2. Si f y g tienen los mismos itinerarios principales, no necesariamente son combinatoriamente equivalentes. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1. Sea $f_2(x) = 2x(1-x)$ y $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ donde $0 < \mu < 2$. Note que ambas funciones son unimodales con punto de doblez $c = \frac{1}{2}$ y con mismos itinerarios principales $I_f(\frac{1}{2}) = (I_2, I_1, I_1, \dots)$ pero $\mathcal{O}_{f_2}(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$ y $\mathcal{O}_{f_\mu}(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4}, \dots\}$. Por lo tanto, no pueden ser combinatoriamente equivalentes. ■

Aún cuando f y g tengan los mismos itinerarios principales y tengan el mismo número de atractores periódicos con la misma orientación no necesariamente son combinatoriamente equivalentes, como vimos en el ejemplo 1.3.1.

Observación 3. Dada una función l -modal $f : I \rightarrow I$ se le puede asociar una función continua $\tilde{f} : I \rightarrow I$ tal que su modalidad es menor o igual a l , simplemente colapsando todos los homo-intervalos de f .

Si f no tiene homo-intervalos que sean iguales a intervalos de monotonicidad I_i , entonces la modalidad de $\tilde{f}$ coincide con la de f , además f y $\tilde{f}$ tienen los mismos itinerarios principales.

Observación 4. A veces los itinerarios principales dan poca información sobre la dinámica dentro de las cuencas de los atractores periódicos y además no detectan la presencia de intervalos errantes que están estrictamente contenidos dentro de un homo-intervalo.

El itinerario principal definido en este trabajo fue usado originalmente por Milnor y Thurston, [MT]. Sin embargo algunos autores usan itinerarios principales ligeramente diferentes. De hecho si la órbita hacia adelante de un punto de doblez c_k no contiene un punto de doblez, entonces $\sigma\nu_k$ coincide con el itinerario de $f(c_k)$. En este caso $\sigma\nu_k$ determina a ν_k , por lo tanto, algunas veces se usan los itinerarios principales alternativos $i_f(f(c_k))$ en lugar de los itinerarios principales obtenidos por límites.

Proposición 1.3.5. La función itinerario i_f es continua, excepto en las $x \in I$ tales que $f^n(x) = c_k$ para alguna $n \geq 0$ y $k = 1, \dots, l$.

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Buscamos una vecindad de $x \in I$ de tal manera que todos caigan dentro de $V_\epsilon(i(x))$.

Supongamos que $f^n(x) \neq c_k$ y $k = 1, \dots, l$. Entonces $f^n(x) = I_j$, donde $j = 1, \dots, l+1$.

Como $i_j(x) = I_j$ es abierto entonces $f^{-j}(i_j(x))$ también es abierto por ser f continua, en consecuencia

$$A = \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(i_j(x)) \text{ es abierto.}$$

Así existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(x) \subset A$, luego $\forall y \in V_\delta(x)$ cumple que $f^j(y) \in i_j(x)$, lo cual implica que $i_j(y) = i_j(x)$ para $j = 0, \dots, n$. En consecuencia, $i_f(y) \in V_\epsilon(i_f(x))$.

Por lo tanto, i_f es continua.

Note que esto falla cuando $f^m(x) = c_k$ para alguna m , además $m < n$ ya que si ϵ es muy pequeña entonces n es muy grande.

Como

$$f^m(x) = c_k \Rightarrow i_f(x) = (i_0(x), \dots, i_{m-1}(x), c_k, \dots, i_n(x), \dots)$$

pero

$$i_f(x^+) = (i_0(x), \dots, i_{m-1}(x), I_k, \dots, i_n(x), \dots)$$

o bien

$$i_f(x^+) = (i_0(x), \dots, i_{m-1}(x), I_{k+1}, \dots, i_n(x), \dots).$$

Lo cual hace imposible encontrar la δ , ya que $i_m(x) \neq i_m(x^+)$ para $m < n$.

Por lo tanto i_f no es continua en aquellas x tales que $f^m(x) = c_k$. ■

Definición 1.3.4. Definimos el orden lexicográfico $\prec$ en Σ de la siguiente manera: Asociamos a cada intervalo I_j un signo $\epsilon(I_j) = \pm 1$, tal que $(-1)^j \epsilon(I_j)$ es constante y $\epsilon(c_j) = 0$, para $j = 1, \dots, l$. $s \prec t$ si existe $n \geq 0$ tal que $s_i = t_i$ para toda $i = 0, 1, \dots, n-1$ y

$$\left(\prod_{j \in J} \epsilon(s_j) \right) s_n < \left(\prod_{j \in J} \epsilon(t_j) \right) t_n$$

donde $J = \{j : 0 \leq j \leq n-1 \text{ y } \epsilon(s_j) \neq 0\}$ si $n \geq 1$ y $J = \emptyset$ si $n = 0$.

La razón de excluir en J los enteros tales que $\epsilon(s_j) = 0$ es que $\prec$ no sería un orden total en Σ puesto que

$$\prod_{j \in J} \epsilon(s_j) = \prod_{j \in J} \epsilon(t_j) = 0$$

y no se podrían comparar cualesquiera dos elementos que están en Σ .

Denotaremos $s \preceq t$, si $s \prec t$ o $s = t$. Podemos definir un orden natural $<$ en S como sigue:

$$-I_{l+1} < -c_l < -I_l < \dots < -c_1 < -I_1 < 0 < I_1 < c_1 < \dots < c_l < I_{l+1}.$$

Asimismo, para una función l -modal podemos asignar a cada intervalo I_j un signo ϵ_f como sigue

$$\epsilon_f(I_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \text{ es creciente en } I_j \\ -1 & \text{si } f \text{ es decreciente en } I_j \end{cases}$$

y $\epsilon_f(c_j) = 0$ para $j = 1, \dots, l$.

Afirmación 1.3.1. Sean $s, t \in \Sigma$, si $s = i_f(x)$ y $t = i_f(y)$ para algunas $x, y \in I$. Además si $s = t$ en los primeros n términos y $s_j \in \{c_1, \dots, c_l\}$ para alguna $j = 0, 1, \dots, n-1$ entonces $s = i_f(x) = i_f(y) = t$.

Demostración.

Sean $x, y \in I$ y $s = i_f(x), t = i_f(y)$, sabemos que $i_j(x) = i_j(y)$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$ y existe $k \leq n-1$ tal que $i_k(x) = i_k(y) = c_k$, como esto ocurre tenemos que

$$f^{k+1}(x) = f^{k+1}(y) = f(c_k) \implies f^n(x) = f^{n-k}(c_k) = f^n(y).$$

Es decir, $i_n(x) = i_n(y)$ para $n \geq k \in \mathbb{N}$ y de aquí concluimos que $s = t$. ■

Proposición 1.3.6. Sea $\preceq$ el orden lexicográfico en Σ , f una función l -modal y sea $i_f(x)$ el itinerario de x bajo f .

1. Si $x < y$ entonces $i_f(x) \preceq i_f(y)$.
2. Si $i_f(x) \prec i_f(y)$ entonces $x < y$.

Demostración.

- a) Notemos que si $x < y$ e $i_f(x) = i_f(y)$, entonces 1 se cumple. Supongamos que $x < y$ y que $i_f(x) \neq i_f(y)$. Sea $n \geq 0$ tal que $i_j(x) = i_j(y)$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Como las primeras n entradas de los itinerarios $i_j(x)$ y $i_j(y)$ son iguales, tenemos que los puntos $f^j(x)$ y $f^j(y)$ están en el mismo intervalo I_{j_k} para $j = 0, 1, \dots, n-1$, es decir, no existen puntos de doblez en los intervalos

$$[x, y], f([x, y]), f^2([x, y]), \dots, f^{n-1}([x, y]).$$

Por otro lado, como $i_n(x) \neq i_n(y)$ existe un punto de doblez $c_k \in f^n([x, y])$. Por lo tanto f^n es monótona en el intervalo $[x, y]$. Además si $\epsilon(i_0(x))\epsilon(i_1(x)) \cdots \epsilon(i_{n-1}(x))$ es positivo entonces f^n es creciente y decreciente si es negativo.

En el caso positivo: si $x < y$ entonces $f^n(x) < f^n(y)$ y de aquí tenemos que $i_f(x) \prec i_f(y)$.

En el caso negativo: si $x < y$ entonces $f^n(x) > f^n(y)$ y tenemos también que $i_f(x) \prec i_f(y)$.

En cualquiera de los dos casos concluimos que $i_f(x) \prec i_f(y)$.

- b) Ahora supongamos que $i_f(x) \prec i_f(y)$, de aquí tenemos que $x \neq y$ y vamos a demostrar que $x < y$. Como $x \neq y$ existe una $n \geq 0$ tal que $i_j(x) = i_j(y)$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Además

$$\left(\prod_{j \in J} \epsilon(i_j(x)) \right) i_n(x) < \left(\prod_{j \in J} \epsilon(i_j(y)) \right) i_n(y)$$

donde $J = \{j : 0 \leq j \leq n-1 \text{ y } \epsilon(i_j(x)) \neq 0\}$.

En el caso en que

$$\prod_{j \in J} \epsilon(i_j(x))$$

es positivo se tiene que f^n es creciente en el intervalo $[a, b]$, donde $a, b \in \{x, y\}$ y existe un punto de doblez $c_k \in f^n([a, b])$. De lo anterior tenemos que $i_n(x) < i_n(y)$ en consecuencia $f^n(x) < f^n(y)$ y de aquí concluimos que $x < y$.

En el otro caso en que

$$\prod_{j \in J} \epsilon(i_j(x))$$

es negativo f^n es decreciente en $[a, b]$, es decir $i_n(x) > i_n(y)$ en consecuencia $f^n(x) > f^n(y)$ y obtenemos que $x < y$.

En cualquiera de los casos tenemos que si $i_f(x) \prec i_f(y)$ entonces $x < y$.

■

Definimos $I(x) = \{y : i_f(y) = i_f(x)\}$.

Afirmación 1.3.2. $I(x)$ es conexo.

Demostración.

Sean $w, z \in I(x)$, $w \neq z$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $w < z$, vamos a demostrar que $(w, z) \in I(x)$.

Sea $y \in (w, z)$, como $w, z \in I(x)$ entonces $i_f(w) = i_f(z)$, por la proposición 1.3.6 tenemos que $y < z$ entonces $i_f(y) \preceq i_f(z)$ y por la misma proposición $i_f(w) \preceq i_f(y)$. En consecuencia

$$i_f(w) = i_f(y) = i_f(z) \text{ es decir } y \in I(x).$$

Como la y fue arbitraria concluimos que $(w, z) \in I(x)$. Por lo tanto $I(x)$ es conexo. ■

Afirmación 1.3.3. Si $I(x)$ es un intervalo no trivial, es decir, contiene al menos otro punto distinto de x , entonces es un homo-intervalo.

Demostración.

Sea $I(x) = [a, b]$, $a \neq b$. Por definición $i_f(a) = i_f(b)$. Supongamos ahora por contradicción que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n no es monótona en $[a, b]$, entonces existe $c_k \in f^n([a, b])$, pero esto es una contradicción, porque $f^{n+1}(x)$ y $f^{n+1}(y)$ están en el mismo intervalo ya que $i_{n+1}(x) = i_{n+1}(y)$.

Por lo tanto $I(x)$ es un homo-intervalo.

Más adelante probaremos que si f y g tienen el mismo itinerario principal y si no tienen periódicos atractores y no tienen intervalos errantes entonces son conjugadas.

1.3.2. Itinerarios admisibles

En esta parte veremos que para conocer la dinámica simbólica de una función f es suficiente con trabajar con los itinerarios principales, si nos restringimos en las funciones que no tienen periódicos atractores ni intervalos errantes y si no nos interesa la dinámica en la cuenca de atracción de periódicos atractores. Antes de seguir sean $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ los itinerarios principales de una función l -modal y $\nu_0 = i_f(0)$ y $\nu_{l+1} = i_f(1)$.

Definición 1.3.5. Sea $\Sigma(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l, \nu_{l+1})$ el espacio de sucesiones $\alpha \in \Sigma$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $n \geq 0$ y $k = 0, 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} \sigma^n \alpha &= i_f(c_k) && \text{si } \alpha_n = c_k, \\ \sigma \nu_k < \sigma^{n+1} \alpha < \sigma \nu_{k+1} && \text{si } \alpha_n = I_{k+1} \text{ y } \epsilon_f(I_{k+1}) > 0, \\ \sigma \nu_{k+1} < \sigma^{n+1} \alpha < \sigma \nu_k && \text{si } \alpha_n = I_{k+1} \text{ y } \epsilon_f(I_{k+1}) < 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

El conjunto ligeramente más grande $\hat{\Sigma}(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l, \nu_{l+1})$ se define como $\Sigma(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l, \nu_{l+1})$ pero reemplazando $<$ por $\preceq$.

Teorema 1.3.1. Sea $f : I \rightarrow I$ una función l -modal. Si f tiene itinerarios principales $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l \in \Sigma_0$ y ν_0, ν_{l+1} son los itinerarios de los puntos frontera de I , entonces para cada $j = 0, \dots, l$, $k = 0, \dots, l$ y $n = 0, 1, 2, \dots$ uno tiene $\nu_j = (I_{j+1}, \dots)$ y si $\sigma^n(\nu_j) = (I_{k+1}, \dots)$ entonces

$$\begin{aligned} \sigma \nu_k &\preceq \sigma^{n+1} \nu_j \preceq \sigma \nu_{k+1} && \text{si } \epsilon_f(I_{k+1}) = 1, \\ \sigma \nu_{k+1} &\preceq \sigma^{n+1} \nu_j \preceq \sigma \nu_k && \text{si } \epsilon_f(I_{k+1}) = -1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

1. La función i_f manda a I en $\hat{\Sigma}(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l, \nu_{l+1})$.
2. En intervalos errantes, intervalos de puntos periódicos y en intervalos que se encuentran en la cuenca de algún atractor periódico, i_f es constante.
3. El conjunto $i_f(I) \supset \Sigma(\nu_0, \dots, \nu_{l+1})$.

4. Si f no tiene intervalos errantes y no tiene atractores periódicos entonces i_f es una biyección que preserva orden.
5. Si f y g tienen el mismo itinerario principal, no tienen intervalos errantes y no tienen atractores periódicos, entonces son conjugadas.

Demostración.

1. Si $f^n(x) \in I_{k+1} = (c_k, c_{k+1})$ y $\epsilon(I_{k+1}) = 1$ entonces

$$f(c_k) < f^{n+1}(x) < f(c_{k+1}),$$

cuando $\epsilon(I_{k+1}) = -1$ entonces $f(c_{k+1}) < f^{n+1}(x) < f(c_k)$.

Por la proposición 1.3.6 la función i preserva orden, es decir, si

$$f(c_k) < f^{n+1}(x) < f(c_{k+1})$$

entonces

$$i_f(f(c_k)) \preceq i_f(f^{n+1}(x)) \preceq i_f(f(c_{k+1})). \quad (1.4)$$

Por otro lado

$$\lim_{x \rightarrow c_j^+} i_f(f^{n+1}(x)) = i_f(f^{n+1}(c_j^+)) = \sigma^{n+1} i_f(c_j^+) = \sigma^{n+1} \nu_j,$$

además como $f(c_k) \in I_j$ para alguna j tenemos que

$$i_f(f(c_k)) = i_f(f(c_j^+)) = \sigma \nu_k$$

y análogamente se tiene que $i_f(f(c_{k+1})) = \sigma \nu_{k+1}$.

Así tomando el límite cuando $x \rightarrow c_j^+$ en la desigualdad (1.4) obtenemos

$$\sigma \nu_k \preceq \sigma^{n+1} \nu_j \preceq \sigma \nu_{k+1} \quad \text{si } \epsilon_f(I_{k+1}) = 1.$$

Similarmente obtenemos

$$\sigma \nu_{k+1} \preceq \sigma^{n+1} \nu_j \preceq \sigma \nu_k \quad \text{si } \epsilon_f(I_{k+1}) = -1.$$

Por lo tanto se cumplen las desigualdades de (1.2), en consecuencia $i_f(I) \subset \hat{\Sigma}(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l, \nu_{l+1})$.

2. CASO I

Supongamos que $J \subset I$ es un intervalo errante. Sean $x, y \in J$ con $x \neq y$, como J es errante tenemos que $i_n(x) = i_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $i_f(x) = i_f(y)$, como x y y fueron arbitrarios entonces i_f es

constante.

CASO II

Supongamos que $A \subset I$ es un intervalo de puntos periódicos. Por la afirmación 1.2.1 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) = A$. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$ así tenemos que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ están en el mismo intervalo I_k , por lo que $i_n(x) = i_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en consecuencia $i_f(x) = i_f(y)$. Con esto tenemos que i_f es constante en A .

CASO III

Sea p un periódico atractor y $J \subset B(p)$, así dados $x, y \in J$ tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ están en $B(p)$, así tenemos que a partir de esta n se tiene que $i_n(x) = i_n(y)$, además ya eran iguales en los primeros n símbolos. Por lo tanto $i_f(x) = i_f(y)$ y como x y y fueron arbitrarios tenemos que i_f es constante en J .

3. Vamos a mostrar ahora que $i_f(I) \supset \Sigma(\nu_0, \dots, \Sigma\nu_{l+1})$.

Supongamos por contradicción que no existe algún punto $x \in I$ tal que $i_f(x) = \alpha$, $\alpha \in \Sigma$, es decir, veremos que la función en este conjunto es suprayectiva. Veamos primero que I lo podemos escribir como la unión de conjuntos disjuntos.

Sea $I = A \cup B$, donde $A = \{x \in I : i_f(x) \prec \alpha\}$ y $B = \{x \in I : \alpha \prec i_f(x)\}$. Por la proposición 1.3.6 A y B son intervalos.

Sean $a = \sup A$ y $b = \inf B$. Si $a \notin A$ y $b \notin B$ tenemos una contradicción, ya que A y B son intervalos disjuntos no vacíos y por lo tanto constituyen una separación de I el cual es conexo.

A continuación probaremos que $a \notin A$ y la prueba de que $b \notin B$, se sigue de manera similar.

Supongamos por contradicción que $a \in A$, entonces

$$i_f(a) \prec \alpha \quad (1.5)$$

y

$$\alpha \preceq i_f(a^+) \quad (1.6)$$

Por la proposición 1.3.5, i_f es continua en x a menos que $f^n(x)$ sea un punto de doblez para alguna n . Observe que como $a < a^+$ entonces $i_f(a) \prec i_f(a^+)$ y por las desigualdades (1.5) y (1.6) tenemos que $f^n(a) = c_k$, para alguna $n \geq 0$ y alguna k . Sea n el entero mas pequeño con esta propiedad. Entonces $i_j(a) = i_j(a^+) = \alpha_j$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$

y $i_n(a) = c_k$. Dado que $f^n(a) = c_k$ se tiene que $f^n(x) \in I_{k+1}$ o $f^n(x) \in I_k$ para cada $x > a$ suficientemente cerca de a .

Supongamos que $f^n(x) \in I_{k+1}$, entonces $i_f(a^+) = (c_k, c_{k+1}) = I_{k+1}$ y por (1.5) y (1.6), $c_k \leq \alpha_n \leq I_{k+1}$. Si $\alpha_n = c_k$ y como $\alpha \in \Sigma(v_0, \dots, v_{l+1})$, por la definición 1.3.5 tenemos que $\sigma^n \alpha = i_f(c_k)$ y por la afirmación 1.3.1 $i_f(a) = \alpha$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\alpha_n = I_{k+1}$. Por otra parte, $\sigma^n i_f(a) = i_f(c_k)$ y $\sigma^n i_f(a^+) = i_f(c_k^+) = \nu_k$. Así por el orden en $\Sigma(v_0, \dots, v_{l+1})$ y por (1.6), $\sigma^n \alpha < \sigma^n i_f(a^+) = \nu_k$. Pero veamos que esto es imposible, si el signo de I_{k+1} es positivo tenemos que $\sigma^{n+1} \alpha < \sigma \nu_k$ y si el signo es negativo entonces $\sigma \nu_k < \sigma^{n+1} \alpha$. Puesto que $\sigma^n(\alpha) = (I_{k+1}, \dots)$ ambos casos son contradictorios de acuerdo a la definición 1.3.5 y tenemos la demostración.

4. Por 2 tenemos que i_f es inyectiva, si f no tiene intervalos errantes, ni intervalos de puntos periódicos, ni atractores periódicos, y por 3 tenemos que i_f es suprayectiva, por lo tanto tenemos que i_f es una biyección que preserva orden y además $i_f(I) = \Sigma(v_0, \dots, v_{l+1})$.
5. Del último inciso tenemos que la biyección $i_g^{-1} \circ i_f : I \rightarrow I$ es una conjugación entre f y g . ■

Finalmente, en el resto de esta sección caracterizaremos las sucesiones en Σ que pueden ser itinerarios principales de una función l -modal.

Sea $S_0 = \{I_1, \dots, I_{l+1}\}$ y β una cadena finita de símbolos con elementos en S_0 , es decir $\beta = (I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_n})$ donde $I_{j_i} \in S_0$ para $j_i = 1, \dots, n$. Denotaremos por $\Sigma_0 = S_0^{\mathbb{N}}$ y por

$$\bar{\beta} = \overline{(I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_n})} = (I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_n}, I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_n}, \dots) \in \Sigma_0$$

como la repetición infinita de la cadena β .

Sean $s, t \in \Sigma_0$, diremos que $s \sim t$ si cumple una de las siguientes condiciones:

1. $s = t$,
2. $s = (I_{k+1}, s_1, s_2, \dots)$ y $t = (I_k, s_1, s_2, \dots)$,
3. $s = (I_{k-1}, s_1, s_2, \dots)$ y $t = (I_k, s_1, s_2, \dots)$.

Ejemplo 1.3.2. $i(c_k^+)$ e $i(c_k^-)$ están relacionados.

Solución

Observe que $i(c_k^+) = (I_{k+1}, s_1, s_2, \dots)$ e $i(c_k^-) = (I_k, s_1, s_2, \dots)$ y por la definición de la relación $\sim$ concluimos que $i(c_k^+) \sim i(c_k^-)$. $\square$

A continuación probaremos un teorema muy importante que nos dirá cuando sucesiones en Σ_0 son los itinerarios principales de una función l -modal.

Teorema 1.3.2. *Considere Σ_0 y el orden lexicográfico $\prec$ en Σ . Además, sean $\nu_1, \dots, \nu_l$ las sucesiones en Σ_0 de la forma $\nu_j = (I_{j+1}, \dots)$ y defina ν_0 y ν_{l+1} como sigue:*

$$\begin{array}{llll} \nu_0 = \overline{I_1}, & \nu_{l+1} = \overline{I_{l+1}} & \text{si} & \epsilon(I_1) = 1, \quad \epsilon(I_{l+1}) = 1 \\ \nu_0 = \overline{I_1}, & \nu_{l+1} = I_{l+1}\overline{I_1} & \text{si} & \epsilon(I_1) = 1, \quad \epsilon(I_{l+1}) = -1 \\ \nu_0 = I_1\overline{I_{l+1}}, & \nu_{l+1} = \overline{I_{l+1}}\overline{I_1} & \text{si} & \epsilon(I_1) = -1, \quad \epsilon(I_{l+1}) = -1 \\ \nu_0 = I_1\overline{I_{l+1}}, & \nu_{l+1} = \overline{I_{l+1}} & \text{si} & \epsilon(I_1) = -1, \quad \epsilon(I_{l+1}) = 1. \end{array}$$

Si $\nu_0, \dots, \nu_{l+1}$ satisfacen las condiciones de admisibilidad (1.3) entonces existe una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l -modal con puntos de doblez $c_1, \dots, c_l$ y con itinerarios principales $i_j(c_i^+) = \nu_i$.

Demostración.

Tomemos $N \in \mathbb{N}$ fija, para $n = 0, \dots, N-1$ y $j = 0, \dots, l+1$, le asociamos a $\sigma^n \nu_j$ un punto p_j^n en el intervalo $[0, 1]$ de tal manera que el orden de estas sucesiones respecto a $\prec$ coincida con el orden natural en $[0, 1]$ y tal que $p_j^0 = c_j$. Además tomamos a $c_0 = 0$ y $c_{l+1} = 1$.

Los puntos del intervalo $[0, 1]$ los elegimos de tal manera que:

$$p_i^n < p_j^m \quad \text{si} \quad \sigma^n \nu_i \prec \sigma^m \nu_j \quad \text{y} \quad \sigma^n \nu_i \not\sim \sigma^m \nu_j \quad (1.7)$$

$$p_i^n = p_j^m \quad \text{si} \quad \sigma^n \nu_i \sim \sigma^m \nu_j \quad (1.8)$$

$$p_i^n > p_j^m \quad \text{si} \quad \sigma^m \nu_j \prec \sigma^n \nu_i \quad \text{y} \quad \sigma^m \nu_j \not\sim \sigma^n \nu_i. \quad (1.9)$$

Antes de continuar probaremos el siguiente enunciado

Proposición 1.3.7. *Si $\sigma^n \nu_j = (I_k, \dots)$ entonces $\nu_{k-1} \preceq \sigma^n \nu_j \preceq \nu_k$ y por lo tanto el punto correspondiente $p_j^n \in [c_{k-1}, c_k]$.*

Demostración.

Como $\sigma^n \nu_j = (I_k, \dots)$, de las condiciones de admisibilidad (1.3) tenemos que

$$\sigma\nu_{k-1} \preceq \sigma^{n+1}\nu_j \preceq \sigma\nu_k \quad \text{si } \epsilon(I_{k+1}) = 1, \quad (1.10)$$

$$\sigma\nu_k \preceq \sigma^{n+1}\nu_j \preceq \sigma\nu_{k-1} \quad \text{si } \epsilon(I_{k+1}) = -1. \quad (1.11)$$

Por otro lado, de la definición del orden lexicográfico, se tiene que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha_0 = \beta_0 = I_k$

$$\alpha \prec \beta \quad \text{implica} \quad \sigma(\alpha) \prec \sigma(\beta) \quad \text{si} \quad \epsilon(I_k) = 1, \quad (1.12)$$

$$\alpha \prec \beta \quad \text{implica} \quad \sigma(\beta) \prec \sigma(\alpha) \quad \text{si} \quad \epsilon(I_k) = -1. \quad (1.13)$$

De (1.12) tenemos

$$\sigma(\alpha) \succeq \sigma(\beta) \implies \alpha \succeq \beta \quad \text{si} \quad \epsilon(I_k) = 1, \quad (1.14)$$

y de (1.13) se obtiene

$$\sigma(\beta) \succeq \sigma(\alpha) \implies \alpha \succeq \beta \quad \text{si} \quad \epsilon(I_k) = -1. \quad (1.15)$$

Si $\epsilon(I_k) = 1$ aplicamos (1.14) a (1.10) y obtenemos

$$\nu_{k-1} \preceq \sigma^n \nu_j \preceq \nu_k.$$

En el otro caso en que $\epsilon(I_k) = -1$ aplicamos (1.15) a (1.11) y se obtiene

$$\nu_{k-1} \preceq \sigma^n \nu_j \preceq \nu_k.$$

Y en cualquier caso se tiene que

$$\nu_{k-1} \preceq \sigma^n \nu_j \preceq \nu_k \quad (1.16)$$

De (1.16) y de (1.7) tenemos que

$$p_{k-1}^0 \leq p_j^n \leq p_k^0 \implies c_{k-1} \leq p_j^n \leq c_k$$

Lo cual implica que $p_j^n \in [c_{k-1}, c_k]$. ■

Continuando con la demostración del teorema, si una de las desigualdades en (1.3) es estricta, se tiene que $\epsilon(I_k) = 1$ si y sólo si $\sigma\nu_{k-1} \prec \sigma\nu_k$. En efecto es claro que si $\epsilon(I_k) = 1$ entonces $\sigma\nu_{k-1} \prec \sigma\nu_k$, ahora supongamos que $\sigma\nu_{k-1} \prec \sigma\nu_k$, por el orden lexicográfico se tiene $\nu_{k-1} \prec \nu_k$ si $\epsilon(I_k) = 1$.

De la misma manera si $p_j^n < p_i^m \in [c_k, c_{k+1}]$, entonces por la definición de $\sim$ se tiene que $F_N(p_j^n) = p_j^{n+1} < p_i^{m+1} = F_N(p_i^m)$ si $\epsilon(I_k) = 1$, esto se deduce fácilmente observando que $p_j^n < p_i^m$ si $\sigma^n(\nu_j) \prec \sigma^m(\nu_i)$ implica que $\sigma^{n+1}(\nu_j) \prec$

$\sigma^{m+1}(\nu_i)$ si $\epsilon(I_k) = 1$. Análogamente se cumple $F_N(p_j^n) = p_j^{n+1} > p_i^{m+1} = F_N(p_i^m)$ si $\epsilon(I_k) = -1$. Así tenemos que F_N preserva orden en $[c_{k-1}, c_k]$ si $\epsilon(I_k) = 1$ e invierte orden en el otro caso, como el signo de I_k es alternante esto implica que F_N es una función l -modal con los puntos de doblez $c_1, c_2, \dots, c_l$. Construimos F_{N+1} inductivamente eligiendo nuevos puntos p_j^N en el intervalo asociado a $\sigma^N \nu_j$, $j = 1, 2, \dots, l$, entre los puntos que escogimos previamente, así obtenemos una sucesión de funciones F_N que converge en la topología C^0 , esto debido a que no estamos haciendo modificaciones bruscas en el compacto I . Además los itinerarios principales de F_N coinciden con $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ hasta la n -ésima posición, por otro lado la posición de las primeras $N - 1$ iteradas bajo F_k de c_i es la misma para cada $k \geq N$ ya que no cambiamos la posición de los puntos p_j^n para $k \geq N$, de esto se concluye que la función límite f tiene los mismos itinerarios principales $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$. ■

Familias Completas

En este capítulo definimos lo que es una conjugación esencial entre dos funciones l -modales y cuando una familia de funciones l -modales es completa. Además damos las condiciones que deben verificar una familia para que sea completa. En particular, mostramos que una familia de polinomios de grado $l+1$ es una familia completa de funciones l -modales. Esta teoría de familias completas puede ser consultada en [\[dMvS\]](#).

2.1. Conjugación esencial

En esta sección consideraremos familias de funciones suaves l -modales, de tal manera que cualquier otra función l -modal tenga un representante en la familia, dado el representante via cierta conjugación. Para ello daremos las siguientes hipótesis generales.

Hipótesis 1.

1. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $\mu \in \Delta$ y $f_\mu : I \rightarrow I$ una función l -modal.
2. f_μ depende continuamente de μ en la topología de C^0 inducida por la métrica $d(f, g) = \max_{x \in I} (f(x), g(x))$ y donde los puntos de doblez de f_μ dependen continuamente de μ . Por simplicidad, supongamos que $I = [0, 1]$ y denotemos los puntos de doblez de f_μ por

$$0 < c_1(\mu) < \dots < c_l(\mu) < 1.$$

Por supuesto, f_μ es estrictamente monótona en cada uno de los intervalos $I_1 = [0, c_1(\mu))$, $I_2(\mu) = (c_1(\mu), c_2(\mu))$, $\dots$, $I_{l+1}(\mu) = (c_l(\mu), 1]$ y $f_\mu(\partial I) \subset \partial I$.

3. La norma de Lipschitz de f_μ está acotada uniformemente, es decir,

$$\sup_{x \neq y, \mu} \frac{|f_\mu(x) - f_\mu(y)|}{|x - y|} < \infty$$

y para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $i = 1, 2, \dots, l$ y cada $\mu \in \Delta$

$$|x - c_i(\mu)| < \delta \Rightarrow \frac{|f_\mu(x) - f_\mu(c_i(\mu))|}{|x - c_i(\mu)|} < \epsilon.$$

4. Para cada $\delta > 0$, si $\mu(n)$ es una sucesión en Δ que converge a μ , con $\mu(n) \in \Delta$ y si la norma Lipschitz de f_μ tiende a 0 en algún subintervalo de $I_i(\mu(n))$ de longitud δ entonces la norma Lipschitz de $f_{\mu(n)}$ restringida a $I_i(\mu(n))$ tiende a 0 (note que Δ no necesita estar cerrado y por lo tanto f_μ puede no estar definida).

Definición 2.1.1. Decimos que dos funciones l -modales $f, g : I \rightarrow I$ tienen la misma orientación si f y g ambas son crecientes ó decrecientes en los intervalos I_i , $i = 1, \dots, l+1$ correspondientes.

Definición 2.1.2. Un atractor periódico es esencial si contiene un punto de doblez en su cuenca inmediata de atracción.

Ejemplo 2.1.1. En la familia logística $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ donde $\mu \in (1, 3)$, el punto fijo $p = \frac{\mu-1}{\mu}$ es atractor y $B_0(p) = (0, 1)$. Como el punto crítico $c = \frac{1}{2} \in B_0(p)$ se tiene que p es un atractor periódico esencial. ■

Por otro lado, definimos una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$x \sim y$ siempre que $[x, y] \subseteq \bigcup_{i=1}^n H_i$ donde H_i es un homo-intervalo. Además los intervalos H_i son disjuntos de las cuencas de los atractores periódicos esenciales.

A continuación mencionaremos los intervalos $[x, y]$ con $x \sim y$:

- La cerradura de una componente de la cuenca de un atractor periódico que no es esencial.
- Una componente de una preimagen de un intervalo que consiste en puntos de periodo constante.
- Un intervalo errante.

De hecho por el lema 1.2.1 las clases de equivalencias son la unión de los intervalos que mencionamos arriba y además dichos intervalos son cerrados y por lo tanto podemos definir la función cociente $g/\sim: I/\sim \rightarrow I/\sim$ de tal manera que sea continua.

Sin embargo, en general $g/\sim$ no es l -modal.

Ejemplo 2.1.2. Consideremos la función tienda

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Note que $T^n(x)$ siempre es monótona en $[0, \frac{1}{2}]$ para toda $n \geq 0$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ es la preimagen bajo T de $[0, \frac{1}{2}]$ y como $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ por lo que $0 \sim 1$ y en consecuencia tenemos que $T/\sim$ consiste en un solo punto y obviamente no es unimodal. $\square$

Definición 2.1.3. Dos funciones f y g , l -modales, son esencialmente conjugadas, si existe un homeomorfismo h que preserve orden, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} I/\sim & \xrightarrow{f/\sim} & I/\sim \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ I/\sim & \xrightarrow{g/\sim} & I/\sim \end{array}$$

Por otra parte, decimos que f y g son esencial y combinatoriamente equivalentes, si la función

$$h: \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f^n(c_i)/\sim \longrightarrow \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} g^n(\tilde{c}_i)/\sim \quad (2.1)$$

definida por $h[f^n(c_i)] = g^n(\tilde{c}_i)$, es una biyección que preserva el orden.

Claramente, si f y g son esencialmente conjugadas entonces son esencial y combinatoriamente equivalentes.

La otra implicación también se cumple siempre y cuando cada atractor periódico unilateral de f corresponde de manera única a un atractor periódico unilateral de g , (ver el corolario del teorema 1.2.1).

2.2. Familias completas

Definición 2.2.1. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ conexo y $\mu \in \Delta$. Una familia de funciones l -modales f_μ es completa, si dada una función l -modal $g : I \rightarrow I$ tal que

1. ningún intervalo de monotonicidad de g está contenido en una clase de equivalencia de $\sim$,
2. cada punto de doblez periódico de g es atractor,
3. g tiene la misma orientación que las funciones de la familia f_μ ,

entonces existe $\mu' \in \Delta$ tal que g y $f_{\mu'}$ son esencialmente conjugadas.

Ejemplo 2.2.1. Si tomamos la familia $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, con $\mu \in \Delta = [0, 4]$ y

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

existe un valor $\mu' \in [0, 4]$ tal que T y $f_{\mu'}$ son esencialmente conjugadas.

Solución

Note que g tiene un único punto de doblez en $c = \frac{1}{2}$, así los intervalos de monotonicidad de T son $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ e $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$.

En este caso las clases de equivalencias son puntos ya que para cualquier $x \in I$ no existe $y \neq x \in I$ tal que $x \sim y$ por lo que 1 se cumple. Como el punto de doblez c de T no es periódico, entonces 2 no es necesario y claramente 3 se tiene, por último dado $\mu' = 4$ como se vió en el ejemplo 1.2.2 $f_4(x) = 4x(1-x)$ es topológicamente conjugada con $T(x)$ en particular son esencialmente conjugadas. $\square$

La razón por la que imponemos la primera condición sobre g es que de otra manera la función $g/\sim: I/\sim \rightarrow I/\sim$ podría no tener la modalidad l como vimos en el ejemplo 2.1.2. La segunda condición excluye funciones que tengan puntos de doblez periódicos repulsores.

Ejemplo 2.2.2. La función $g(x) = -s |x - \frac{1}{2}| + \frac{s}{2}$ con $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tiene un punto de doblez repulsor de periodo 3.

Solución

$$g(x) = \begin{cases} x(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Note que $g(x)$ tiene un punto de doblez en $x_0 = \frac{1}{2}$. Haciendo los cálculos obtenemos que

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{4} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Por lo que $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto periódico de periodo 3. Ahora observe que si damos un $\delta > 0$ cumple que para todo $x \neq x_0 \in (x_0 + \delta, x_0 - \delta)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (x_0 + \delta, x_0 - \delta)$. Así tenemos que x_0 es un punto de doblez repulsor de periodo 3. $\square$

Excluimos este tipo de funciones porque ninguna función suave se puede conjuagar esencialmente a g dado que un punto de doblez periódico de una función suave es necesariamente un atractor esencial. Se puede verificar que no es necesaria la condición 2 cuando se busca una conjugación entre f_μ y g [dMvS].

2.3. Funciones persistentemente suprayectivas

Necesitamos dar una condición que permita identificar las familias completas, para ello se da la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sean $W, Z \subset \mathbb{R}^n$, una función continua $G_t : W \rightarrow Z$ es una deformación interior de G , si G_t se extiende continuamente a una función de la $cl(W)$ a la $cl(Z)$, $G_0 = G$ y $G_t = G$ sobre $G^{-1}(\partial Z)$ y además G_t depende continuamente de t .

Definición 2.3.2. Diremos que $F : \Delta \rightarrow V$ es persistentemente suprayectiva, si cada deformación interior $F_t : \Delta \rightarrow V$, $t \in [0, 1]$ de F es suprayectiva para cada t .

Teorema 2.3.1. Supongamos que f_μ es una familia de funciones l -modales que satisfacen la Hipótesis en 1. Si f_μ es persistentemente suprayectiva, es decir, $F : \Delta \rightarrow V$ es persistentemente suprayectiva (esta condición se satisface si F es un homeomorfismo), entonces f_μ es una familia completa.

La demostración de este teorema es constructiva, el primer paso es probarlo bajo las hipótesis adicionales de que F es un homeomorfismo y que cada punto de doblez de g es eventualmente periódico. Lo segundo es demostrar el teorema con las hipótesis adicionales de que F es un homeomorfismo y que cada punto de doblez de g es eventualmente periódico o bien pertenece a la cuenca de atracción de un atractor periódico esencial. El tercer paso demostramos el

teorema sólo con la hipótesis adicional de que F es un homeomorfismo y por último demostramos el teorema omitiendo las hipótesis adicionales sobre F y los puntos de doblez de g . Por supuesto, podemos colapsar cada una de las componentes de las cuencas de los atractores periódicos no esenciales de g , los intervalos que consisten en órbitas periódicas de periodo constante y todos los intervalos errantes. En consecuencia, podemos suponer que g no tiene atractores periódicos no esenciales, no tiene intervalos de puntos periódicos y no tiene intervalos errantes. Además cada punto de doblez periódico de g es atractor. Debido al corolario 1.2.1 del teorema 1.2.1 es suficiente demostrar que para cada función g existe un parámetro μ tal que las siguientes dos propiedades se cumplen.

1. La función

$$h : \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f_{\mu}^n(c_i) / \sim \longrightarrow \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} g^n(\tilde{c}_i) \quad (2.2)$$

definida por $h[f_{\mu}^n(c_i)] = g^n[\tilde{c}_i]$ es una biyección que preserva orden.

2. Siempre que c_i, c_j están contenidos en la cuenca de un punto periódico p de periodo n atractor, entonces lo mismo ocurre para $\tilde{c}_j, \tilde{c}_i$ y viceversa. Además este atractor periódico p es unilateral si y sólo si el punto periódico atractor correspondiente $\tilde{p}$ también es unilateral.

Paso 1: $F : \Delta \longrightarrow V$ es un homeomorfismo y cada punto de doblez de g es eventualmente periódico.

En este caso los conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} f_{\mu}^n(c_i) / \sim \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{n \geq 0} g^n(\tilde{c}_i)$$

son finitos. Por simplicidad supongamos que los puntos de doblez de g no son enviados en la frontera de I . El parámetro μ para que f_{μ} sea combinatoriamente equivalente a g se encontrará mediante un límite de una sucesión de parámetros $\mu(n)$. Una manera de construir estos parámetros es como sigue, dado que F es un homeomorfismo, entonces existe un único parámetro $\mu(0)$ tal que los valores en los puntos de doblez de $f_{\mu(0)}$ coinciden con los valores correspondientes a los puntos de doblez de g . Por tanto existe un único homeomorfismo h_0 que preserva orientación tal que $f_{\mu(0)} = g_0 \circ h_0$ donde $g_0 = g$, escribiendo $g_1 = h_0^{-1} \circ g_0 \circ h_0$. De manera inductiva construimos homeomorfismos h_n y parámetros $\mu(n)$ tal que $f_{\mu(n)} = g_n \circ h_n$ y $g_{n+1} = h_n^{-1} \circ g_n \circ h_n$.

y por construcción son topológicamente conjugadas a g . El problema se presenta cuando f_μ es una familia polinomial ya que en este caso no se sabe si la sucesión $\mu(n)$ converge, véase [dMvS]. Debido a esto es necesario construir un camino diferente, donde se pueda garantizar la convergencia de la sucesión.

Por hipótesis, las órbitas hacia adelante de los puntos de doblez de g consisten de un número finito de puntos, digamos k puntos distintos

$$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_k < 1$$

y l de estos puntos corresponden a los puntos de doblez de g .

Sea $\pi : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $g(z_i) = z_{\pi(i)}$ y sea $0 < z_{t(1)} < z_{t(2)} < \cdots < z_{t(l)} < 1$ los puntos de doblez de g , note que π guarda la posición del punto z_i después de aplicarle g y t guarda la posición de los puntos de doblez de g , en otras palabras la gráfica de g pasa por los puntos $(z_i, g(z_i)) = (z_i, z_{\pi(i)}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ para $i = 1, 2, \dots, k$. La información está realmente contenida en los puntos $(z_i, z_{\pi(i)})$ que puede ser considerada como la gráfica de π . La única información que usaremos es que g es l -modal y que pasa por estos puntos, si conectamos estos puntos consecutivos por segmentos de línea obtenemos una función l -modal que contiene la misma información combinatoria de g . Por definición $(z_{\pi(t(1))}, z_{\pi(t(2))}, \dots, z_{\pi(t(l))}) \in V$, los puntos z_j corresponden a las iteradas de los puntos de doblez de g y suponemos que para esta función todos sus atractores periódicos son esenciales.

Afirmación 2.3.1. Para cada $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ existen s e $i = 1, 2, \dots, l$, de manera que

$$\pi^s(m+1) \leq t(i) \leq \pi^s(m) \text{ o } \pi^s(m) \leq t(i) \leq \pi^s(m+1)$$

y una de las desigualdades es estricta.

Demostración.

Como los puntos de doblez de g son eventualmente periódicos, el intervalo correspondiente $[z_m, z_{m+1}]$ es enviado eventualmente en un homeo-intervalo periódico. Debido a que todos los puntos atractores periódicos de g son esenciales, esto es imposible. ■

Mostremos que existe un parámetro μ para que f_μ es esencialmente combinatoriamente equivalente a g .

Para esto sea

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1\}$$

que es un simplejo pero desafortunadamente no es cerrado, definimos

$$\partial W = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq 1 \right. \\ \left. \text{y al menos una igualdad se cumple} \right\}.$$

Este conjunto es la frontera de W por lo que $W \cup \partial W$ es cerrado. Ahora tomemos $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in W$.

Como $(z_{\pi(t(1))}, z_{\pi(t(2))}, \dots, z_{\pi(t(l))}), (x_{\pi(t(1))}, x_{\pi(t(2))}, \dots, x_{\pi(t(l))}) \in V$ y ya que $F : \Delta \rightarrow V$ es un homeomorfismo, entonces existe un único parámetro $\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tal que

$$f_{\mu}(c_i(\mu)) = x_{\pi(t(i))} \text{ para } i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.3)$$

El punto $\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_k)$ existe porque la función

$$F : \Delta \rightarrow (f_{\mu}(c_1(\mu)), f_{\mu}(c_2(\mu)), \dots, f_{\mu}(c_l(\mu))) \in V$$

es suprayectiva y por lo tanto toma como valor a $(x_{\pi(t(1))}, x_{\pi(t(2))}, \dots, x_{\pi(t(l))})$ y es único ya que hemos supuesto que F es un homeomorfismo y por esta misma razón $\mu(x_1, x_2, \dots, x_k)$ depende continuamente de $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in W$. Además existe un único punto $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in W$ que depende continuamente de $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tal que

- a) la $t(j)$ -ésima coordenada de este vector, $y_{t(j)}$ es el j -ésimo punto de doblez de f_{μ} (y por lo tanto $f_{\mu(x_1, x_2, \dots, x_k)}(y_{t(j)}) = x_{\pi(t(j))}$),
- a) si $i \notin \{t(1), t(2), \dots, t(l)\}$, entonces existe j tal que $x_{t(j-1)} < x_i < x_{t(j)}$.

Entonces definimos y_i como el único punto tal que

$$f_{\mu(x_1, x_2, \dots, x_k)}(y_i) = x_{\pi(i)} \quad (2.4)$$

de modo que y_i está en el j -ésimo intervalo de monotonicidad de $f_{\mu(x_1, x_2, \dots, x_k)}$, es decir, $y_{t(j-1)} < y_i < y_{t(j)}$. Esta elección es posible ya que por definición del orden $x_{\pi(i)} \in (x_{\pi(t(j-1))}, x_{\pi(t(j))})$.

La función

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = \{(y_1, y_2, \dots, y_k) \in W : f_{\mu(x_1, x_2, \dots, x_k)}(y_i) = x_{\pi(i)}\}$$

es una función continua de un solo valor de W en sí mismo. Llamamos a T función de Thurston asociada a la familia f_{μ} .

Para terminar basta probar que T tiene un punto fijo $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in W$. Así existe un parámetro μ tal que $f_{\mu}(x_i) = x_{\pi(i)}$ y $f_{\mu}(c_i(\mu)) = x_{\pi(t(i))}$. De la elección del retorno (pullback) se deduce que $x_{t(i)} = c_i(\mu)$ y las iteradas

hacia adelante de $c_1(\mu), c_2(\mu), \dots, c_l(\mu)$ se ordenan de la misma manera en $[0, 1]$ como las iteradas hacia adelante de los puntos de doblez de g , por lo tanto f_μ y g son combinatoriamente equivalentes.

Aún cuando no estamos interesados en encontrar el mejor parámetro μ , la búsqueda radica en encontrar una buena “estructura espacial” realizable para la “estructura ordenada” de la órbita hacia adelante de los puntos de doblez. Desafortunadamente la existencia de tal punto fijo en W no se sigue directamente del teorema de punto fijo de Brouwer ya que W no es cerrado. Incluso si T se extiende continuamente al simplejo cerrado $W \cup \partial W$, para aplicar el teorema de punto fijo, aparece el problema de que estos puntos fijos de T pueden estar en la frontera de W y por lo tanto no sirven como solución. Por simplicidad denotamos por $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in W$,

$$d(x, \partial W) = \min_{i=2, \dots, k} |x_i - x_{i-1}|.$$

Afirmación 2.3.2. Si T no tiene un punto fijo en W entonces no existe una deformación interior $id: W \rightarrow W$ para un mapeo no suprayectivo.

Para demostrar esta afirmación usaremos los siguientes lemas.

Lema 2.3.1. Para cualquier sucesión $x(n) \in W$ converge a algún punto $x \in \partial W$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T(x(n)) - x(n)|}{d(x(n), \partial W)} = \infty.$$

Demostración.

Supongamos por contradicción que esto es falso, entonces existe una sucesión $x(n) \rightarrow \partial W$ y una constante $K < \infty$ tal que

$$\frac{|T(x(n)) - x(n)|}{d(x(n), \partial W)} \leq K, \text{ para toda } n. \quad (2.5)$$

Escribiendo $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$, $T(x(n)) = (y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))$ y usando (2.5) se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned} |x_{\pi(i)}(n) - x_{\pi(j)}(n)| &\geq |y_{\pi(i)}(n) - y_{\pi(j)}(n)| - |x_{\pi(j)}(n) - y_{\pi(j)}(n)| \\ &\quad - |x_{\pi(i)}(n) - y_{\pi(i)}(n)| \\ &\geq |y_{\pi(i)}(n) - y_{\pi(j)}(n)| - 2 \cdot |x(n) - T(x(n))| \\ &\geq |y_{\pi(i)}(n) - y_{\pi(j)}(n)| - 2K \cdot d(x(n), \partial W). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por definición, $f_{\mu(n)}(y_i(n)) = x_{\pi(i)}(n)$. Además como $x(n) \rightarrow x \in \partial W$, de (2.5) tenemos que $y(n) \rightarrow x$. Por el teorema de valor medio se tiene que

$$\frac{|y_i(n) - y_j(n)|}{|x_{\pi(i)}(n) - x_{\pi(j)}(n)|} = \frac{1}{|Df_{\mu(n)}(z(n))|} \quad (2.7)$$

para alguna $z(n)$ que está entre $y_i(n)$ y $y_j(n)$. Por lo tanto tomando

$$C = \max_{\mu, x} |Df_\mu(x)|,$$

obtenemos

$$C \cdot |y_i(n) - y_j(n)| \geq |x_{\pi(i)}(n) - x_{\pi(j)}(n)| \quad (2.8)$$

para toda n . De manera que combinando (2.6) y (2.8) se obtiene una constante $K_1 = 2K < \infty$ tal que

$$|y_{\pi(i)}(n) - y_{\pi(j)}(n)| \leq C \cdot |y_i(n) - y_j(n)| + k_1 \cdot d(x(n), \partial W).$$

Repitiendo este proceso se obtienen para cada $s \in \mathbb{N}$ constantes C_s y $K_s < \infty$ tal que

$$|y_{\pi^s(i)}(n) - y_{\pi^s(j)}(n)| \leq C_s \cdot |y_i(n) - y_j(n)| + K_s \cdot d(x(n), \partial W) \quad (2.9)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ tal que $|y_m(n) - y_{m+1}(n)| = d(y(n), \partial W)$ (m podría depender de n), como $x(n) \rightarrow x \in \partial W$, por (2.5) tenemos que $y(n) \rightarrow \partial W$. Así algunos puntos colapsan en el límite. Mostraremos que esto implica que uno de los puntos de doblez y una vecindad del doblez también colapsan en el límite. Tomemos al entero s correspondiente a m como en la afirmación 2.3.1. No debemos olvidar que estamos usando el hecho de que todos los puntos periódicos atractores de g son esenciales, ya que de lo contrario el entero s podría no existir. Por lo tanto $y_{\pi^s(m)}(n)$ y $y_{\pi^s(m+1)}(n)$ se encuentran en diferentes lados de un punto de doblez de $f_{\mu(n)}$ y así existe $r \in \{1, 2, \dots, l\}$ tal que

$$|y_{t(r)}(n) - y_{t(r)+1}(n)| \leq |y_{\pi^s(m)}(n) - y_{\pi^s(m+1)}(n)|$$

o bien

$$|y_{t(r)}(n) - y_{t(r)-1}(n)| \leq |y_{\pi^s(m)}(n) - y_{\pi^s(m+1)}(n)|.$$

Supongamos que estamos en el primer caso, así obtenemos de (2.9) que,

$$\begin{aligned} d(y(n)) &= |y_m(n) - y_{m+1}(n)| \\ &\geq C'_s \cdot |y_{\pi^s(m)}(n) - y_{\pi^s(m+1)}(n)| - K'_s \cdot d(x(n), \partial W) \\ &\geq C'_s \cdot |y_{t(r)}(n) - y_{t(r)+1}(n)| - K'_s \cdot d(x(n), \partial W) \end{aligned}$$

donde $C'_s = \frac{1}{C_s}$ y $K'_s = \frac{K_s}{C_s}$.

Como $x(n) \rightarrow x \in \partial W$ y por (2.5) tenemos que $y(n) \rightarrow \partial W$. Por lo tanto usando (2.7), se tiene que

$$\frac{|y_{t(r)}(n) - y_{t(r)+1}(n)|}{|y_{\pi(t(r))}(n) - y_{\pi(t(r)+1)}(n)|} \rightarrow \infty$$

ya que $y_{t(r)}(n)$ es un punto de doblez de $f_{\mu(n)}$. Entonces

$$\frac{d(y(n), \partial W)}{d(x(n), \partial W)} \geq C'_s \cdot \frac{|y_{t(r)}(n) - y_{t(r)+1}(n)|}{|x_{\pi(t(r))}(n) - x_{\pi(t(r)+1)}(n)|} - K'_s \cdot \frac{d(x(n), \partial W)}{d(x(n), \partial W)} \rightarrow \infty$$

que contradice (2.5). $\blacksquare$

Lema 2.3.2. Si $T : W \rightarrow W$ no tiene puntos fijos en el conjunto abierto W , entonces existe una deformación interior H_t de la $id : W \rightarrow W$ tal que H_1 no es suprayectiva (en otras palabras, la función identidad $id : W \rightarrow W$ no es persistentemente suprayectiva).

Demostración.

La idea de la demostración de este lema es mostrar que la dirección del vector $T(x) - x$ “apunta hacia adentro de W ” si $x \in W$ cerca de ∂W . Debemos recalcar que no usaremos el hecho de que T se extiende continuamente a ∂W . Para construir una deformación interior como lo requiere el lema, vamos a construir las curvas en W usando las “geodésicas correspondientes a la métrica hiperbólica” en W ; estas curvas son usadas para deformar la función T . Podemos construir estas curvas mapeando W difeomórficamente en una bola y las curvas en W corresponden a la imagen de segmentos de línea en la bola. Más explícito, sea ρ la proyección estereográfica que manda la cerradura de W homeomórficamente a la bola cerrada B centrada en 0 con radio l . Esta función se define como sigue, como $W \subset B$ entonces existe z_0 en el interior de $W \cap B$. Para $z \in \partial W$, sea $\rho(z) \in \partial B$ la intersección con B del rayo infinito que pasa por z_0 y por z y luego interpolar ρ linealmente en cada uno de dichos rayos.

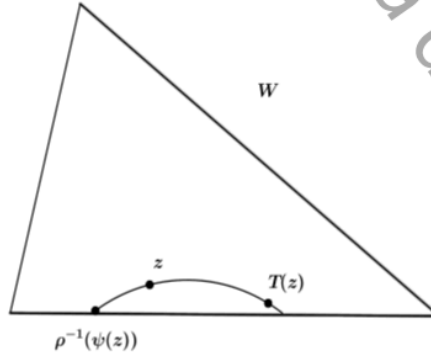


Figura 2.1: La función ψ de W a ∂W cuando T no tiene puntos fijos.

Del lema 2.3.1 tenemos que si $v \in \mathbb{R}^k$ es un límite de

$$\lim_{x(n) \rightarrow x} \frac{\rho(T(x(n))) - \rho(x(n))}{|\rho(T(x(n))) - \rho(x(n))|} \quad (2.10)$$

para alguna sucesión $x(n) \in W$ que converge a $x \in \partial W$, entonces v es tangente a ∂B o bien apunta hacia adentro. Como T no tiene puntos fijos en W , entonces $\rho(T(z)) \neq \rho(z) \forall z \in W$. Sea $\psi(z) \in \partial B$ de manera que $\rho(z)$ se encuentra en la línea recta entre $\rho(T(z))$ y $\psi(z)$.

Ahora definimos $\psi_t : W \rightarrow B$, $t \in [0, 1]$ por $\psi_t(z) = \rho(z) + t(\psi(z) - \rho(z))$. De (2.10) sabemos que el vector de $\rho(z)$ a $\rho(T(z))$ apunta hacia el interior de W , por lo tanto $|\rho(z) - \psi(z)| \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \partial W$. De manera que ψ_t se extiende continuamente a ∂W y $\psi_1(t) = \rho(z) + (\psi(z) - \rho(z)) = \psi(z) = \rho(z)$ en ∂W . En particular, $H_t = \rho^{-1} \circ \psi_t : W \rightarrow W$ es la deformación que necesitamos además se mueve en W sobre la geodésica que conecta x y $T(x)$ en dirección a la frontera de W . ■

Del lema 2.3.1 se deduce que si T no tiene puntos fijos entonces se puede encontrar una deformación interior de la función identidad en W a una función que no es suprayectiva. Como W es un simplejo de dimensión finita esto es imposible, ya que no existe una retracción de un simplejo a su frontera, véase [AD].

Paso 2: $F : \Delta \rightarrow V$ es un homeomorfismo y cada punto de doblez de g es eventualmente periódico o pertenece a la cuenca de atracción de un atractor periódico esencial.

Vamos a generalizar ahora la situación del paso 1 añadiendo la hipótesis que g tiene atractores periódicos esenciales. Primero explicaremos la dificultad, esto es, si uno de los puntos de doblez no es eventualmente periódico, entonces existe un número infinito de iteraciones diferentes del punto de doblez y por lo tanto el conjunto W del paso anterior tendría que ser de dimensión infinita. Además, el teorema de retracción es bastante más delicado en el caso de dimensión infinita. Por otra parte, el método que usamos para demostrar que la frontera de W es repulsora no funcionaría si W es de dimensión infinita. Por lo tanto, consideramos sólo un pedazo finito de la órbita de cada punto de doblez.

Sea $C(g) = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ y $C_k(g) = \bigcup_{i=0}^k g^i(C(g))$. Para cada órbita periódica esencial elegimos un punto p_j en esta órbita tal que la componente B_j de la cuenca inmediata de esta órbita que contiene a p_j también contiene un punto

de doblez $z_{a(j)}$. Elegimos p_j y $z_{a(j)}$ de manera que todas las iteradas de g son monótonas en el intervalo que conecta a p_j y $z_{a(j)}$. Más aún, elegimos un subconjunto D_j cerrado de B_j tal que

1. cada punto frontera de D_j es una iterada de un punto de doblez de g ;
2. la frontera de D_j contiene dos iteradas hacia adelante de $z_{a(j)}$; D_j consiste de una componente si p_j es un punto de doblez o invierte orientación. D_j puede consistir de uno o dos componentes si p_j preserva orientación (precisamente tiene dos componentes si p_j atrae diferentes puntos de doblez de cada lado);
3. la órbita hacia adelante de cada uno de los puntos de doblez que son atraídos por p_j intersecta al interior de D_j a lo más una vez y a la cerradura de D_j al menos una vez;
4. el intervalo más pequeño que contiene a D_j , $z_{a(j)}$ y a p_j es un homointervalo contenido en la cuenca de p_j .

El subconjunto D_j es llamado el dominio fundamental de p_j , por conveniencia, sea $k(j)$ el periodo de p_j y denote las iteradas de $z_{a(j)}$ en la frontera de D_j por

$$z_{\pi^{\sigma(j)k(j)}(a(j))} = z_{r(j)} \text{ y } z_{\pi^{(\sigma(j)+1)k(j)}(a(j))} = z_{\pi^{k(j)}(r(j))};$$

(En otras palabras $g^{\sigma(j)k(j)}(z_{a(j)}) = z_{r(j)}$ y $g^{(\sigma(j)+1)k(j)}(z_{a(j)}) = g^{k(j)}(z_{r(j)})$).

Ahora tomamos para cada punto de doblez c_i de g el entero positivo más pequeño $n(i)$ de modo que

$$g^{n(i)}(c_i) \in C_{n(i)-1}(g) \text{ o bien } g^{n(i)}(c_i) \in (D_j \cup \{p_j\}). \quad (2.11)$$

Entonces $c_i, \dots, g^{n(i)}(c_i), i = 1, \dots, l$ y $p_j, g(p_j), g^2(p_j), \dots$ consiste de un número finito, digamos k puntos distintos $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k < 1$ tal que l de estos puntos son iguales a $c_1 < c_2 < \dots < c_l$. De esta elección, no existen puntos en $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ entre D_j y el periódico atractor p_j y cada uno de los puntos de la órbita periódica $\mathcal{O}(p_j)$ corresponde a un punto z_i . Sea $p_j = z_{d(j)}$, esto define el espacio W como antes. Notemos que la función π definida en el paso anterior es tal que $z_{\pi(i)} = g(z_i)$ y está definida sobre un subconjunto de $\{1, 2, \dots, k\}$. Sea $z_{l(j)}$ tal que $[z_{l(j)}, z_{r(j)}]$ es el intervalo más pequeño que contiene a D_j y a $z_{d(j)}$. Si D_j tiene dos componentes entonces $z_{l(j)}$ y $z_{r(j)}$ son los “puntos externos” de D_j , si D_j tiene una componente entonces uno de estos puntos coinciden con $z_{d(j)}$ y el otro está en la frontera “externa” de D_j . Note que $\pi(r(j))$, $\pi(d(j))$ y $\pi(l(j))$ están bien definidos.

Definamos ahora la función de Thurston asociada a esta familia, sea $x \in W$,

escogemos como antes $\mu(x) \in \Delta$ tal que $f_{\mu(x)}$ tiene un valor extremo $x_{\pi(t(i))}$. Ahora definimos $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ como sigue. Si $z_i \notin \cup_j \text{int}(z_{l(j)}, z_{r(j)})$ entonces definimos y_i como antes, el único punto que satisface $f_{\mu(x)}(y_i) = x_i$ y que se encuentra en el m -ésimo intervalo de monotonicidad de $f_{\mu(x)}$. Donde m es tal que z_i se encuentra en el m -ésimo intervalo de monotonicidad de g . Esto define en particular los puntos $y_{l(j)}$ y $y_{r(j)}$.

Sea L_j una función afín que preserva orientación y que envía a $z_{l(j)}$ y a $z_{r(j)}$ en $y_{l(j)}$ y $y_{r(j)}$, respectivamente. Para $z_i \in (z_{l(j)}, z_{r(j)})$ definimos $y_i = L_j(z_i)$, de tal manera que $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ está bien definida. Probaremos el análogo al lema 2.3.1 para este caso.

Lema 2.3.3. Para cualquier sucesión $x(n) \in W$ que converge a algún punto $x \in \partial W$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T(x(n)) - x(n)|}{d(x(n), \partial W)} = \infty.$$

Demostración.

Supongamos por contradicción que existe $K < \infty$ y una sucesión $x(n)$ que converge a ∂W para el cual

$$\frac{|T(x(n)) - x(n)|}{d(x(n), \partial W)} \leq K. \quad (2.12)$$

Como en el caso anterior escribimos $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$ y $T(x(n)) = (y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n))$. Así como en el lema 2.3.1 para cada $s \in \mathbb{N}$ existen constantes $C_s > 0$ y $K_s < \infty$ tal que

$$|y_{\pi^s(i)}(n) - y_{\pi^s(i+1)}(n)| \leq C_s \cdot |y_i(n) - y_{i+1}(n)| + K_s \cdot d(x(n), \partial W) \quad (2.13)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, siempre que $z_{\pi^\sigma(i)}, z_{\pi^\sigma(i+1)} \notin \cup (z_{l(j)}, z_{r(j)})$ para $\sigma = 0, 1, \dots, s-1$. Tomemos $m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ tal que $|y_m(n) - y_{m+1}(n)| = d(y(n), \partial W)$ (esta m puede depender de n). Sino es el caso que tanto z_m y z_{m+1} están contenidos en alguna componente de la cuenca de un atractor periódico esencial, entonces (2.12) da una contradicción exactamente igual como en el lema 2.3.1. Por lo que podemos suponer que (z_m, z_{m+1}) está contenido en alguna componente de la cuenca de un atractor periódico esencial de g . Ahora tomamos s tal que $z_{\pi^s(m)}$ o $z_{\pi^s(m+1)}$ está en $(z_{l(j)}, z_{r(j)})$ con s minimal para alguna j . De la desigualdad (2.13) se tiene que

$$|y_{\pi^s(m)}(n) - y_{\pi^s(m+1)}(n)| \leq C_s \cdot |y_m(n) - y_{m+1}(n)| + K_s \cdot d(x(n), \partial W).$$

Por lo tanto se puede encontrar $m' \in \{1, 2, \dots, k\}$ de tal manera que $z_{m'}, z_{m'+1} \in [z_{l(j)}, z_{r(j)}]$ con

$$|y_{\pi^s(m')}(n) - y_{\pi^s(m'+1)}(n)| \leq C_s \cdot |y_m(n) - y_{m+1}(n)| + K_s \cdot d(x(n), \partial W).$$

Por definición $y_{l(j)}, y_{d(j)}, y_{m'}, y_{m'+1}, y_{r(j)}$ son imágenes bajo f_μ de los puntos correspondientes $z_{l(j)}, z_{d(j)}, z_{m'}, z_{m'+1}, z_{r(j)}$ bajo un mapeo afín. De ello se desprende que existe una constante universal $\tau < \infty$ tal que

$$\begin{aligned} |y_i(n) - y_{i'}(n)| &\leq \tau \cdot |y_{m'}(n) - y_{m'+1}(n)| \\ &\leq \tau \cdot C_s \cdot |y_m(n) - y_{m+1}(n)| + \tau \cdot K_s \cdot d(x(n), \partial W) \\ &\leq \tau \cdot C_s \cdot d(y(n), \partial W) + \tau \cdot C_s \cdot d(x(n), \partial W) \end{aligned} \quad (2.14)$$

para cada i, i' con $z_i, z_{i'} \in [z_{l(j)}, z_{r(j)}]$. Por lo tanto si (2.12) se cumple entonces $y(n) \rightarrow \partial W$ y (2.14) implica que

$$|y_{\pi^{\sigma(j)\kappa(j)}(a(j))}(n) - y_{\pi^{(\sigma(j)+1)\kappa(j)}(a(j))}(n)| = |y_{\pi^{\kappa(j)}(r(j))}(n) - y_{r(j)}(n)| \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Afirmación 2.3.3. Si la ecuación (2.12) se cumple entonces

- i) la distancia del intervalo $[y_{l(j)}, y_{r(j)}]$ hasta el punto de doblez $y_{a(j)}$ tiende a cero, o bien
- ii) $Df_{\mu(n)}$ tiende a cero en todo el intervalo de monotonicidad de $f_{\mu(n)}$ que contiene $[y_{l(j)}(n), y_{r(j)}(n)]$.

Prueba de la afirmación.

Supongamos que el inciso ii) no se cumple entonces por el inciso 4) de las hipótesis generales 1, dadas al principio de este capítulo se tiene que $Df_{\mu(n)}$ tampoco se va a cero en cualquier subintervalo del intervalo de monotonicidad.

Ahora tenemos que para $s = 1, \dots, \sigma(j) + 1$,

$$\begin{aligned} &|f_{\mu(n)}(y_{\pi^{(s-1)\kappa(j)}(a(j))}(n)) - f_{\mu(n)}(y_{\pi^{s\kappa(j)}(a(j))}(n))| \\ &= |x_{\pi^{s\kappa(j)}(a(j))}(n) - x_{\pi^{(s+1)\kappa(j)}(a(j))}(n)| \\ &\leq |y_{\pi^{s\kappa(j)}(a(j))}(n) - y_{\pi^{(s+1)\kappa(j)}(a(j))}(n)| + 2 \cdot d(x(n), y(n)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

y por la hipótesis todos los puntos $y_{\pi^{s\kappa(j)}(a(j))}(n)$, $s = 0, 1, \dots, \sigma(j) + 1$ están contenidos en el mismo intervalo de monotonicidad. De (2.12) y de (2.15) obtenemos que todos los términos en (2.16) convergen a cero cuando $n \rightarrow \infty$ y $s = \sigma(j) + 1$. Como $Df_{\mu(n)}$ no tiende a cero en cualquier subintervalo de este intervalo de monotonicidad se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{\pi^{s\kappa(j)}(a(j))}(n) - y_{\pi^{(s+1)\kappa(j)}(a(j))}(n)| = 0, \text{ para } s = \sigma(j).$$

Continuando de esta manera obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{\pi^{s-1}\kappa(j)}(a(j))(n) - y_{\pi^{s\kappa(j)}}(a(j))(n)| = 0, \text{ para toda } s = 1, 2, \dots, \sigma(j) + 1.$$

De manera que todos estos puntos están cerca del punto de doblez $y_{a(j)}(n)$ y ya que $|y_{l(j)}(n) - y_{r(j)}(n)| \rightarrow 0$, esto completa la prueba de la afirmación. ■ Continuando con la demostración del lema, ambos incisos i) e ii) implican que $Df_{\mu(n)}$ tiende a cero en el intervalo $[y_{l(j)}(n), y_{r(j)}(n)]$. En particular del teorema del valor medio se sigue que

$$\frac{|y_{l(j)}(n) - y_{r(j)}(n)|}{|x_{\pi(l(j))}(n) - x_{\pi(r(j))}(n)|} = \frac{|y_{l(j)}(n) - y_{r(j)}(n)|}{|f_{\mu(n)}(y_{l(j)}(n)) - f_{\mu(n)}(y_{r(j)}(n))|} \rightarrow \infty,$$

cuando $n \rightarrow 0$. Por lo tanto usando (2.14) se tiene

$$\frac{d(y(n), \partial W)}{d(x(n), \partial W)} \geq \frac{1}{\tau \cdot C_s} \cdot \frac{|y_{l(j)}(n) - y_{r(j)}(n)|}{|x_{\pi(l(j))}(n) - x_{\pi(r(j))}(n)|} - \frac{K_s}{C_s} \cdot \frac{d(x(n), \partial W)}{d(y(n), \partial W)} \rightarrow \infty,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, que contradice (2.12). ■

Corolario 2.3.1. Existe una función que preserva orientación que envía la órbita finita de g a la órbita finita de f_μ .

Demostración.

De los lemas 2.3.2 y 2.3.3 T tiene un punto fijo en W y por construcción se sigue que existe una función que preserva orientación y que envía $c_i, \dots, g^{n(i)}(c_i)$ en $c_i(\mu), \dots, f_\mu^{n(i)}(c_i(\mu))$ para cada $i = 1, \dots, l$. ■

Lema 2.3.4. Existe una función que preserva orientación y además relaciona la órbita infinita de los puntos de doblez de g con la órbita infinita de los puntos de doblez de f_μ . Por lo que f_μ y g son esencialmente conjugadas.

Demostración.

Para mostrar la construcción de la conjugación, tomaremos en cuenta dos casos:

caso 1: cuando D_j consta de una sola componente,

caso 2: cuando D_j consta de dos componentes.

En el primer caso se sigue de la construcción que hicimos en el lema 2.3.3 si $T(y) = y$ entonces $f_{\mu(y)}(y_i) = y_{\pi(i)}$ siempre que $z_i \neq z_{d(j)}$. Como D_j consiste

de una componente entonces se sigue nuevamente por la construcción que $y_{d(j)}$ es un punto periódico de $f_{\mu(y)}$ con el mismo periodo de $z_{d(j)}$, denotemos por m este periodo. Además tenemos por construcción que $f_{\mu(y)}^m$ es monótona en cada intervalo $[y_{d(j)}, y_i]$. De aquí se deduce que cada y_i es atraído por un punto periódico $y'_{d(j)}$ en este intervalo con el mismo periodo m o con periodo $\frac{m}{2}$ (esto último ocurre solamente si $f_{\mu(y)}^m$ invierte orientación en $y_{d(j)}$). En general $y'_{d(j)}$ no tiene que ser igual a $y_{d(j)}$ pero entonces $y'_{d(j)} \sim y_{d(j)}$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que definimos anteriormente, por lo que se sigue que $f_{\mu(y)}$ y g son esencialmente conjugadas.

Caso 2. En este caso se supone que D_j consiste de dos componentes por lo que $y_{d(j)}$ no necesariamente es un punto periódico de $f_{\mu(y)}$ ya que $T(y) = y$ no implica que $f_{\mu(y)}^n(y_i) = y_{\pi(i)}$ cuando $i = d(j)$, debido a que $y_{d(j)}$ se define como la imagen bajo algún mapeo afín y no como alguna preimagen bajo $f_{\mu(y)}$ como en el caso 1. Sea $n(j)$ el periodo de $z_{d(j)}$, entonces como D_j consta de dos componentes, se cumple que $g^{n(j)}$ preserva orientación cerca de $z_{d(j)}$ y $g^{n(j)}(z_i) > z_i$ para z_i en una componente y $g^{n(j)}(z_i) < z_i$ para z_i en la otra componente de D_j . Además $g^{n(j)}$ no tiene puntos de doblez en el intervalo de conexión de estas dos componentes. Por lo tanto, como $T(y) = y$ entonces se tiene lo mismo para $f_{\mu(y)}^{n(j)}$, es decir, $f_{\mu(y)}^{n(j)}(y_i) > y_i$ para z_i en una componente y $f_{\mu(y)}^{n(j)}(y_i) < y_i$ para z_i en la otra componente de D_j y $f_{\mu(y)}^{n(j)}$ es monótona en el intervalo que conecta estos puntos. De esto se sigue que existe un atractor periódico $\tilde{y}_{d(j)}$ que atrae a los puntos y_i para los z_i que están en una componente de D_j y un periódico atractor $\hat{y}_{d(j)}$ (tal vez diferente de $\tilde{y}_{d(j)}$) que atrae a todos los puntos y_i que corresponden a z_i en la otra componente de D_j , además $f_{\mu(y)}^{n(j)}$ es monótona en $[\tilde{y}_{d(j)}, \hat{y}_{d(j)}]$. Por lo que $f_{\mu(y)}$ y g son esencialmente conjugadas.

Por lo tanto en cualquiera de los dos casos se tiene que $f_{\mu(y)}$ y g son esencialmente conjugadas. ■

Paso 3: Prueba del teorema 2.3.1 bajo la hipótesis, $F : \Delta \rightarrow V$ es un homeomorfismo.

15

Primero construimos una sucesión g_n de funciones l -modales que convergen a g en la topología de funciones continuas tal que g_n satisface las siguientes dos propiedades:

1. las primeras n iteradas de los puntos de doblez de g y g_n coinciden;
2. cada punto de doblez de g_n es eventualmente periódico o bien está contenido en la cuenca de un atractor periódico esencial.

Si g ya satisface la propiedad 2, entonces podemos simplemente tomar $g_n = g$, en otro caso, sea $C(g) = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ y

$$C_k(g) = \bigcup_{i=0}^k g^i(C(g)).$$

Ya que estamos suponiendo que la propiedad 2 no se cumple entonces al menos un punto de doblez, digamos c_1 , no está contenido en la cuenca de un atractor periódico esencial y además tiene la propiedad de que $g^k(c_1) \notin C_{k-1}(g)$ para toda $k \geq 1$, ya que si $g^k(c_1) \in C_{k-1}(g)$ entonces cada punto de doblez que no está contenido en la cuenca de un atractor periódico que es esencial tiene una órbita finita y en consecuencia es eventualmente periódico. Elegimos $\delta > 0$ tan pequeña que puntos distintos de $C_n(g)$ estén separados al menos por δ , es decir, $|x - y| \geq \delta$ para toda $x \neq y \in C_n(g)$ y sea $\tilde{n}$ el entero más pequeño para el cual la δ -vecindad de $g^{\tilde{n}}(c_1)$ contiene un punto x de $C_{\tilde{n}-1}(g)$. Como la sucesión $c_1, g(c_1), g^2(c_1), \dots$ tiene puntos de acumulación, tal entero $\tilde{n}$ existe y por definición de δ se tiene que $\tilde{n} > n$. Elegimos una función $\tilde{g}$ que coincide con g excepto en la δ -vecindad de $g^{\tilde{n}-1}(c_1)$, así que $\tilde{g}^{\tilde{n}}(c_1) = \tilde{g}(g^{\tilde{n}} - 1)(c_1)$ es igual a algún punto $x \in C_{\tilde{n}-1}$. No olvidemos que las primeras $\tilde{n} - 1$ iteradas de los puntos de doblez de g y $\tilde{g}$ coinciden. Repetimos este argumento de manera sucesiva para cada punto de doblez que no está contenido en la cuenca de un atractor periódico esencial para los cuales $g^k(c_1) \notin C_{k-1}(g)$ para toda $k \geq 1$. En este proceso reemplazamos n cada vez por el entero $\tilde{n}$ y g por la función $\tilde{g}$. De esta manera, finalmente terminamos con una función $\hat{g}$ y un entero $\hat{n}$ tal que

$$\hat{g}^{\hat{n}}(c) \in C_{\hat{n}-1}(\hat{g})$$

para cada punto de doblez c que no está contenido en la cuenca de un atractor periódico, es decir, c es eventualmente periódico. De esto se deduce que $\hat{g}$ satisface las propiedades 1 y 2.

Al tomar n suficientemente grande y δ suficientemente pequeña, se puede construir una sucesión g_n de funciones l -modales que converge a g en la topología C^0 con las propiedades requeridas. Puede ser que g_n tenga o no intervalos errantes, pero esto no representa un problema y además no es necesario que g_n sea diferenciable.

En el paso 2 se probó que existen parámetros $\mu(n)$ tales que las órbitas hacia adelante de los puntos de doblez de $f_{\mu(n)}$ y g_n son esencial y combinatoriamente equivalentes. Sea μ' un punto límite de la sucesión $\mu(n)$, este límite existe por compacidad del espacio de parámetros y sea $f = f_{\mu'}$. Debido a que las primeras n iteradas de los puntos de doblez de g y g_n coinciden y

del hecho que $f_{\mu(n)}$ y g_n son esencial y combinatoriamente equivalentes implican que si $c_{i(1)}$ y $c_{i(2)}$ son puntos de doblez y $g_n^k(c_{i(1)}) < g_n^m(c_{i(2)})$ entonces $f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}(\mu(n))) < f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)}(\mu(n)))$. Por lo tanto tomando límites tenemos que

$$g^k(c_{i(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^k(c_{i(1)}) < g^m(c_{i(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^m(c_{i(2)})$$

esto implica que

$$f^k(c_{i(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^k(c_{i(1)}(\mu(n))) \leq f^m(c_{i(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^m(c_{i(2)}(\mu(n))).$$

Por lo tanto queda por demostrar que $f^k(c_{i(1)}) \neq f^m(c_{i(2)})$.

Primero probemos que $f^k(c_{i(1)}) \neq f^m(c_{i(2)})$ cuando $c_{i(1)}$ o $c_{i(2)}$ está en la cuenca de un atractor p_j con periodo $\kappa(j)$, en efecto, $g_n = g$ en la cuenca de los periódicos atractores. Si $f^k(c_{i(1)}) = f^m(c_{i(2)})$ entonces debe ocurrir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}(\mu(n))) - f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)}(\mu(n)))| \rightarrow 0$$

de esto se concluye que las iteradas de estos puntos de doblez se acercan uno al otro, pero esto es imposible debido a la elección de D_j .

Ahora supongamos que $c_{i(1)}$ o bien $c_{i(2)}$ no está contenido en la cuenca de un punto atractor periódico. Supongamos por contradicción que $f^k(c_{i(1)}) = f^m(c_{i(2)})$, ya que $g^k(c_{i(1)}) \neq g^m(c_{i(2)})$ tenemos que $g_n^k(c_{i(1)}) \neq g_n^m(c_{i(2)})$ para n suficientemente grande. Como $f_{\mu(n)}$ y g_n son esencial y combinatoriamente equivalentes se tiene también que $f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}) \neq f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)})$ mientras que por hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)}).$$

Sea J el intervalo abierto que conecta $g^k(c_{i(1)})$ con $g^m(c_{i(2)})$, como g no tiene intervalos errantes y $c_{i(1)}$ no está en la cuenca de un periódico atractor, entonces existe $k' \geq 0$ tal que $g^{k'}(J)$ contiene un punto de doblez. Así si J_n denota el intervalo abierto que conecta $g_n^k(c_{i(1)})$ con $g_n^m(c_{i(2)})$, entonces $g_n^{k'}(J_n)$ también contiene un punto de doblez para n suficientemente grande. Ya que $f_{\mu(n)}$ y g_n son esencial y combinatoriamente equivalentes, se tiene que el intervalo correspondiente $\tilde{J}_n$ que conecta $f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)})$ con $f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)})$ también cumple que $f_{\mu(n)}^{k'}(\tilde{J}_n)$ contiene un punto de doblez.

Como la longitud de este intervalo tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, esto implica que $f^{k'+k}(c_{i(1)}) = f^{k'+m}(c_{i(2)})$ es un punto de doblez $c_{i(3)}$ de f . Como $f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}) \neq f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)})$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^k(c_{i(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^m(c_{i(2)})$, para toda n grande ya sea que $f_{\mu(n)}^{k'+k}(c_{i(1)}) \neq c_{i(3)}$ o bien $f_{\mu(n)}^{k'+m}(c_{i(2)}) \neq c_{i(3)}$ y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^{k'+k}(c_{i(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu(n)}^{k'+m}(c_{i(2)}) = c_{i(3)}. \quad (2.17)$$

Por la primera parte de la construcción del paso 2, $g^{k'+k}(c_{i(1)}) = c_{i(3)}$ implica que para toda n , $g_n^{k'+k}(c_{i(1)}) = c_{i(3)}$, respectivamente $g^{k'+m}(c_{i(2)}) = c_{i(3)}$ implica que $g_n^{k'+m}(c_{i(2)}) = c_{i(3)}$. Como $f_{\mu(n)}^{k'+k}(c_{i(1)}) \neq c_{i(3)}$ o bien $f_{\mu(n)}^{k'+m}(c_{i(2)}) \neq c_{i(3)}$ esto implica que $g^{k'+k}(c_{i(1)}) \neq c_{i(3)}$ o bien $g^{k'+m}(c_{i(2)}) \neq c_{i(3)}$. Por lo tanto así como antes, el intervalo que conecta $f_{\mu(n)}^{k'+k}(c_{i(1)})$ con $c_{i(3)}$ o bien el intervalo que conecta $f_{\mu(n)}^{k'+m}(c_{i(2)})$ con $c_{i(3)}$, es enviado después de un número finito de iteraciones a un punto de doblez $c_{i(4)}$. Por (2.17) resulta que esta iterada de f envía $c_{i(3)}$ en un punto de doblez $c_{i(4)}$. Continuando este proceso se obtiene que uno de estos puntos de doblez de f es periódico, y como f tiene “derivada” cero en los puntos de doblez se tiene que es atractor. Además $c_{i(1)}$ y $c_{i(2)}$ están contenidos en la cuenca de este punto de doblez atractor, lo que es una contradicción. ■

Paso 4: Idea de la demostración del teorema 2.3.1.

En este caso ya no hacemos el supuesto de que F es un homeomorfismo. La principal diferencia con la prueba en los pasos anteriores es que pueden existir muchos parámetros que satisfacen (2.2), es decir la función $T : W \rightarrow W$ resulta ser una función multivaluada en W . A pesar de esto estamos buscando un “punto fijo” de T .

En el caso que todos los puntos de doblez de g son eventualmente periódicos entonces tomamos z_i como en el paso 1.

Para empezar sea V_0 el conjunto de puntos $(v_1, v_2, \dots, v_l) \in V$ que están ordenados de la misma manera que $z_{\pi(t(1))}, z_{\pi(t(2))}, \dots, z_{\pi(t(l))}$. Esto significa que valores de los puntos de doblez tienen el orden correcto.

Sean $\Delta_0 = F^{-1}(V_0)$ y F_0 la restricción de F en V_0 . Si todos los enteros $\pi(t(i))$ son distintos (o de manera equivalente, si todos los puntos $z_{\pi(t(i))}$ son distintos) entonces V_0 es un subconjunto abierto de V o sino es un subconjunto abierto de un subespacio lineal de V . En este último caso denotamos por ∂V_0 la frontera de V_0 como un subconjunto de este subespacio lineal de V .

Además definimos

$$\Sigma_{(v_1, v_2, \dots, v_l)} = \left\{ \begin{array}{l} X = (x_1, x_2, \dots, x_k) : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1 \\ \text{y } x_{\pi(t(i))} = v_i \text{ para } 1 \leq i \leq l \end{array} \right\}.$$

y

$$Z = \{(\mu, x) : \mu \in \Delta_0 \text{ y } x \in \Sigma_{F(\mu)}\}.$$

Note que para cada $\mu \in \Delta_0$ obtenemos $\Sigma_{F(\mu)} \subset W$ y para cada $\mu \notin \Delta_0$ la definición de $\Sigma_{F(\mu)}$ ni siquiera tiene sentido, es decir, $\Sigma_{F(\mu)}$ es vacío. La función multivaluada $T : W \rightarrow W$ puede ser considerada como una función

continua de un solo valor de Z a W . En efecto si $(\mu, x) \in Z$ entonces $x \in \Sigma_F(\mu)$ y por lo tanto

$$f_\mu(c_i(\mu)) = x_{\pi(i(i))}.$$

Esto implica que $T : Z \rightarrow W$ puede ser definida exactamente como antes por

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) = T(\mu, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

donde $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in W$ es tal que $f_\mu(y_i) = x_{\pi(i)}$ y y_i pertenece al j -ésimo intervalo de monotonicidad de f_μ , cuando z_i está en el j -ésimo intervalo de monotonicidad de g .

Si algún punto de doblez de g no es eventualmente periódico pero está en la cuenca de un atractor periódico esencial entonces z_i se define como en el paso 2, tomando Z como antes y definiendo $T : Z \rightarrow W$ de nuevo como en el paso 2. ■

Un resultado importante que surge inmediatamente de este teorema es el siguiente:

Corolario 2.3.2. Sea $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+2}$. Si $P_{\mathbf{a}}(x) = a_0 + \dots + a_{l+1}x^{l+1}$ y $\Delta = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{l+2} : P_{\mathbf{a}} \text{ es } l\text{-modal}\}$, entonces la familia $P_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \Delta$, es una familia completa.

Demostración.

Mostraremos que la función F es un homeomorfismo y en consecuencia por el teorema 2.3.1 es persistentemente suprayectiva.

Por hipótesis

$$P_{\mathbf{a}}(x) = a_0 + \dots + a_{l+1}x^{l+1}$$

y supongamos que

$$P_{\mathbf{a}}(0) = 0 \text{ y } P_{\mathbf{a}}(1) = 1. \text{ Esto implica que } a_0 = 0 \text{ y } a_{l+1} = 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_l.$$

Así

$$P_{\mathbf{a}}(x) = a_1 + \dots + a_l x^l + (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_l)x^{l+1}.$$

Como $P_{\mathbf{a}}$ es un polinomio l -modal de grado $l+1$ y todos sus puntos críticos son puntos de doblez y por lo tanto son raíces simples del polinomio $DP_{\mathbf{a}} = 0$.

Denotemos a los valores críticos de $P_{\mathbf{a}}$ por $\nu_i(\mathbf{a}) = P_{\mathbf{a}}(c_i(\mathbf{a}))$.

Por otro lado podemos ver a la familia de polinomios como,

$$P_{\mathbf{a}}(x) : \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } (a, x) \text{ es enviado en } P_{\mathbf{a}}(x).$$

La derivada está dada por,

$$DP_{\mathbf{a}} = (x - x^{l+1}, x^2 - x^{l+1}, \dots, x^l - x^{l+1}, P'_{\mathbf{a}}(x)).$$

Tomemos a

$$c_1 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}, \text{ a cada } \mathbf{a} \text{ la enviamos en } (\mathbf{a}, c_1(\mathbf{a}))$$

la derivada de esta función es

$$Dc_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial c_1}{\partial a_1} & \frac{\partial c_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial c_1}{\partial a_l} \end{pmatrix}.$$

Como $\nu_1(\mathbf{a}) = P_{\mathbf{a}}(c_1(\mathbf{a}))$

$$\begin{aligned} D\nu_1(\mathbf{a}) &= DP_{\mathbf{a}}(c_1(\mathbf{a})) \cdot D(c_1(\mathbf{a})) \\ &= (c_1 - c_1^{l+1}, c_1^2 - c_1^{l+1}, \dots, c_1^l - c_1^{l+1}, 0) \cdot Dc_1 \\ &= (c_1 - c_1^{l+1}, c_1^2 - c_1^{l+1}, \dots, c_1^l - c_1^{l+1}, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial c_1}{\partial a_1} & \frac{\partial c_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial c_1}{\partial a_l} \end{pmatrix} \\ &= (c_1 - c_1^{l+1}, c_1^2 - c_1^{l+1} \dots c_1^l - c_1^{l+1}). \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial a_1} = c_1 - c_1^{l+1}$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial a_2} = c_1^2 - c_1^{l+1}$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial a_3} = c_1^3 - c_1^{l+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial a_l} = c_1^l - c_1^{l+1}.$$

En general

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial a_j}(\mathbf{a}) = c_i^j - c_i^{l+1}.$$

Como $F(\mathbf{a}) = (\nu_1(a), \dots, \nu_l(a))$, la derivada está dada por

$$DF(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} c_1 - c_1^{l+1} & c_1^2 - c_1^{l+1} & \dots & c_1^l - c_1^{l+1} \\ c_2 - c_2^{l+1} & c_2^2 - c_2^{l+1} & \dots & c_2^l - c_2^{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l - c_l^{l+1} & c_l^2 - c_l^{l+1} & \dots & c_l^l - c_l^{l+1} \end{pmatrix}$$

restando a cada columna la primera se obtiene una matriz equivalente a $DF(\mathbf{a})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 - c_1^{l+1} & c_1^2 - c_1 & \dots & c_1^l - c_1 \\ c_2 - c_2^{l+1} & c_2^2 - c_2 & \dots & c_2^l - c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l - c_l^{l+1} & c_l^2 - c_l & \dots & c_l^l - c_l \end{pmatrix}$$

por lo que $Q = \text{Jac}(F(\mathbf{a})) = |A_1|$ es un polinomio en $(c_1, \dots, c_l)$ de grado $l + \frac{l(l+1)}{2}$.

Factorizando c_i en el i -ésimo renglón, con $i = 1, \dots, l$ obtenemos la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_1(1 - c_1^l) & c_1(c_1^l - 1) & \dots & c_1(c_1^{l-1} - 1) \\ c_2(1 - c_2^l) & c_2(c_2^l - 1) & \dots & c_2(c_2^{l-1} - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l(1 - c_l^l) & c_l(c_l^l - 1) & \dots & c_l(c_l^{l-1} - 1) \end{pmatrix}$$

si $c_i = 1$ o $c_i = 0$ entonces el renglón i -ésimo de la matriz A_2 es cero y por lo tanto $Q = 0$. De igual manera si $c_i = c_j$, $i \neq j$ entonces el i -ésimo renglón es igual al j -ésimo renglón por lo que $Q = 0$.

Factorizando se obtiene que

$$Q(c) = \left(\prod_{i=1}^n c_i \prod_{i=1}^n (c_j - 1) \prod_{i < j} (c_i - c_j) \right) q(c),$$

donde $q(c)$ es un polinomio.

Como el grado de la primera parte de la derecha es

$$2l + \frac{l(l-1)}{2} = \frac{l^2 + 3l}{2} = l + \frac{l(l+1)}{2} = \deg(Q),$$

tenemos que $q(c)$ es constante.

Como los puntos críticos de $P_{\mathbf{a}}$ son distintos y están en el intervalo $(0, 1)$ concluimos que $Q = \text{Jac}(F(\mathbf{a})) \neq 0$ y por lo tanto $F(\mathbf{a})$ es un difeomorfismo local. Probaremos que $F : \Delta \rightarrow V$ es una cubriente y mostraremos que V_0 es abierto y cerrado, y dado que V es conexo se obtiene que $V_0 = V$.

Como F es una deformación se extiende continuamente a la frontera y $F(\partial\Delta) \subset \partial V$. Además F es un difeomorfismo local así tenemos que para cada $y \in V$, $F^{-1}(y)$ es un conjunto finito, sea n la cardinalidad máxima de $F^{-1}(y)$. Definimos a $V_0 = \{y \in V : \# F^{-1}(y) = n\}$. Tomemos a $y \in V_0$ y sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in F^{-1}(y)$, como F es un difeomorfismo local existen vecindades abiertas $V_i \subset \Delta$ de $x_i, i = 1, \dots, n$ con $F(V_i) \subset V_0$ obtenemos un abierto que contiene a $y_0 \subset V_0$ por lo que V_0 es abierto, (véase la figura 2.2).

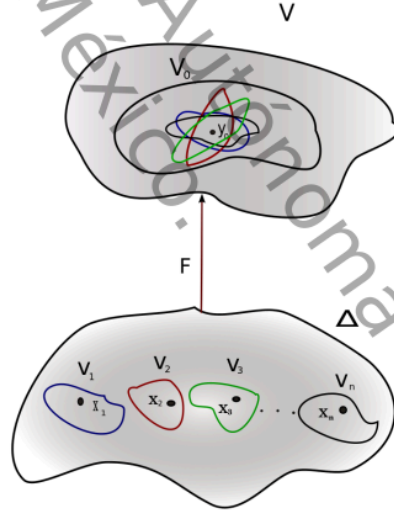


Figura 2.2: Vecindades de las preimágenes de y_0 .

Ahora, sea $y_0 \in V_0$ y $y_1 \in V \setminus V_0$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$, con $\gamma(0) = y_0$ y $\gamma(1) = y_1$. Sea $s = \min\{t : \gamma(t) \in \partial V_0\}$, como F es un difeomorfismo $\gamma : [0, s) \rightarrow V_0$.

tiene n preimágenes, es decir $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n : [0, s] \rightarrow \Delta$ (véase la figura 2.3). Sean $x_i \in F^{-1}(\gamma(s))$, como F es continua el $\lim_{t \rightarrow s} \gamma_i(t)$ pertenece a $F^{-1}(\gamma(s))$, y por ser F un difeomorfismo local consiste en exactamente n puntos por que x_i no puede ser igual a x_j , $i \neq j$. Esto implica que $F^{-1}(\gamma(s)) \in \Delta$, con esto tenemos que V_0 es cerrado ya que contiene a sus puntos frontera. Por lo tanto tenemos que $V_0 = V$.

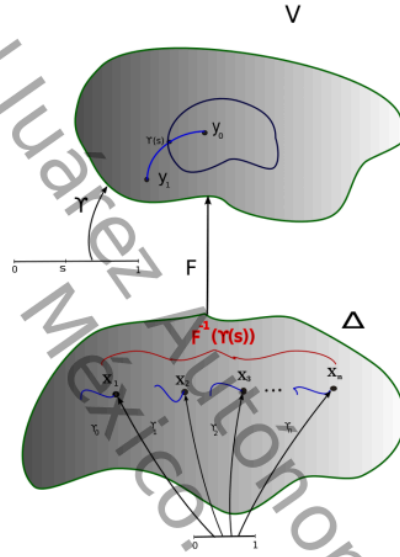


Figura 2.3: Preimágenes de γ .

Sean $y \in V$ y $x_1, x_2, \dots, x_n$ las preimágenes de y y tomemos a W_i una vecindad abierta de x_i tal que $W_i \cap W_j = \emptyset$ con $i \neq j$. Además cada W_i es enviada difeomórficamente a $F(W_i)$ y note que, como cada W_i es abierto entonces $F(W_i)$ es abierto, así tenemos que $U = \bigcap_{i=1}^n F(W_i)$ es abierto. Como U es el conjunto abierto más pequeño contenido en cada $F(W_i)$ entonces $F^{-1}(U) \subset W_i$. Definimos $W'_i = W_i \cap F^{-1}(U)$ y claramente $F(W'_i) = U \subset V$ es decir U tiene exactamente n preimágenes. Por lo tanto $F^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n W'_i$.

En consecuencia F es una función cubriente y como V es simplemente conexo concluimos que F restringida a cada componente conexa de Δ , es un homeo-

morfismo y por el teorema 2.3.1 obtenemos que P_a es una familia completa. ■

2.4. Renormalización en un intervalo

En esta sección introduciremos el concepto de renormalización. En particular, mostraremos que muchas funciones l -modales de una familia completa son renormalizables.

La idea de la renormalización es descomponer una función multimodal en funciones de menor l -modalidad. Para formalizar esta idea introduciremos la noción de intervalos restrictivos.

Definición 2.4.1. Sea $f : I \rightarrow I$ una función multimodal. Un intervalo cerrado $J \subsetneq I$ se le llama restrictivo con periodo $n \geq 1$ para f si

1. Los interiores de $J, \dots, f^{n-1}(J)$ son disjuntos;
2. $f^n(J) \subset J$ y $f^n(\partial J) \subset \partial J$;
3. al menos uno de los intervalos $J, \dots, f^{n-1}(J)$ contiene un punto de doblez;
4. J es maximal con respecto a la siguiente propiedad: si $J' \supset J$ es un intervalo cerrado estrictamente contenido en I y tal que las propiedades (1 – 3) también se cumplen para J' (para algún entero n) entonces $J' = J$.

Definición 2.4.2. Si J es un intervalo restrictivo, a la función $f^n : J \rightarrow J$ se le llama función retorno o renormalización de f en J . Si $\phi : J \rightarrow I$ es una función afín que envía a J sobre I entonces al operador que envía

$$f \rightarrow \mathfrak{R}(f, J) = \phi \circ f^n(f) \circ \phi^{-1} : I \rightarrow I,$$

se le llama operador de renormalización asociado a J .

Si existe un intervalo restrictivo de periodo ≥ 2 , entonces f es renormalizable. El siguiente ejemplo muestra que la función renormalización asociada a un intervalo restrictivo de una función l -modal no necesariamente es l -modal.

Ejemplo 2.4.1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función bimodal, como se muestra en la figura 2.4. Allí se puede observar que existe un intervalo restrictivo J de f de periodo 3, es decir, $f^3(J) \subset J$. Además $f^3 : J \rightarrow J$ es una función

3-modal (véase la figura 2.5). Como en este caso la renormalización resultó tener una modalidad mayor que la función inicial, se podría sospechar la existencia de una función que al renormalizarla, la función obtenida tuviera modalidades muy grandes con respecto a la modalidad de la función original, pero esto no puede pasar porque la modalidad de las funciones obtenidas por renormalización está limitada por $2^l - 1$, ver [dMS]. En este caso $l = 2$, por lo que la modalidad es a lo más tres. $\square$

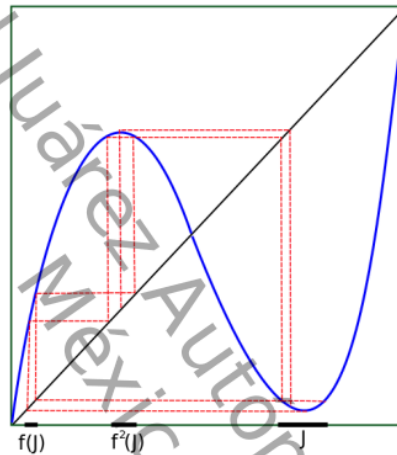


Figura 2.4: Gráfica de f e intervalo restrictivo J .

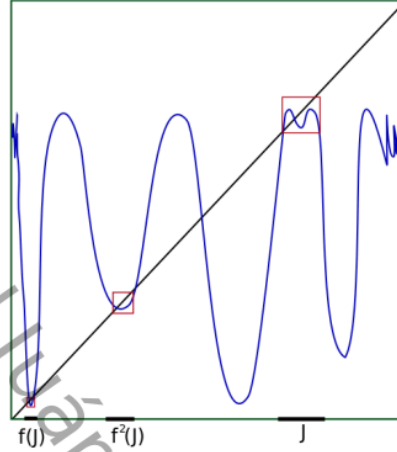


Figura 2.5: Gráfica de f^3 .

En la figura 2.5 se muestra que la renormalización en el intervalo J es una función 3-modal, mientras que en el intervalo $f^2(J)$ y $f(J)$ la función f^3 es unimodal.

2.5. Renormalización en la familia cuártica

$f_b(x) = bx^2 + x^4$

En esta sección daremos algunos ejemplos de parámetros reales en la familia cuártica $f_b(x) = bx^2 + x^4$ donde se presentan intervalos restrictivos y una renormalización. En primer lugar observemos que la familia cuártica es completa en el intervalo de parámetros $b \in [-3, 0]$ (véase la figura 2.6).

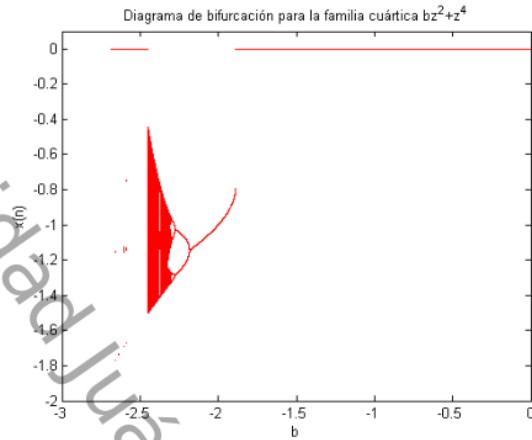


Figura 2.6: Bifurcación completa

Es importante mencionar que el conjunto de puntos que aparecen aproximadamente a partir del parámetro $b \approx -2.6$ en la figura 2.6 corresponden a diagramas de bifurcación de f pero de periodos más grandes de tal manera que si hacemos una ampliación alrededor de estos parámetros de nueva cuenta se pueden observar diagramas de bifurcación, por ejemplo alrededor de $b = 2.6014$ se tiene un diagrama de bifurcación de periodos dos para f (véase la figura 2.7).

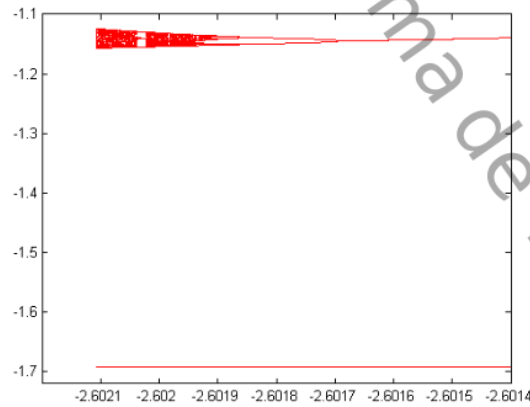


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro $b = 2.6014$.

Antes de continuar con algunos ejemplos de renormalización, debemos mencionar que la familia cuártica $f_b(x) = bx^2 + x^4$ es un caso especial de la familia cuártica $P_{ba}(x) = P_b(P_a(x)) = x^4 + 2ax^3 + (b + a^2)x^2 + bax$, $a, b, x \in \mathbb{R}$, que se obtiene de la composición de dos polinomios cuadráticos de la forma $P_a(x) = ax + x^2$.

Los puntos críticos de $P_{ba}(x)$ son:

1. $c_1 = -\frac{a}{2}$,
2. $c_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b}}{2}$,
3. $c_3 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b}}{2}$.

Note que cuando $a = 0$, $P_{ba}(x) = f_b(x)$ y es cuando el punto crítico c_1 de $P_{ba}(x)$ se queda fijo. Por lo tanto los puntos críticos de $f_b(x)$ son:

1. $c_1 = 0$,
2. $c_2 = \frac{\sqrt{-2b}}{2}$,
3. $c_3 = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$.

Observe que $f_b(c_2) = f_b(c_3)$ y como c_1 ya es fijo, entonces f_b solo presenta una dinámica. Precisamente el diagrama de bifurcación se genera al seguir la órbita de c_2 bajo f_b .

A continuación daremos algunos ejemplos de intervalos restrictivos de periodo 3, 5 y 7 para algunos parámetros b en donde se presenta una renormalización de f_b .

Para encontrar estos intervalos restrictivos resolvemos la siguiente ecuación

$$f_b^n \left(\frac{-\sqrt{-2b}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$$

donde n es el periodo del intervalo restrictivo, es decir, estamos interesados en los parámetros donde el punto crítico c_3 sea periódico.

Para el caso $n = 3$ resolvemos

$$f_b^3 \left(\frac{-\sqrt{-2b}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$$

que es equivalente a resolver una ecuación polinomial de grado $4^3 = 64$, numéricamente se puede resolver usando el método de Newton, para este caso analizamos solo tres de estas raíces que son:

1. $b = -2.36857358$,
2. $b = -2.60144304$,
3. $b = -2.65900055$.

Estos parámetros coinciden respectivamente con los verdaderos valores en al menos 9 cifras significativas.

Caso I: $b = -2.36857358$.

En este caso $f_b(x) = -2.36857358x^2 + x^4$ y $c_3 = -1.08824941$. El intervalo restrictivo de período tres correspondiente a f_b es $J_{3_1} = [-1.1152, -1.0606]$ (ver figura 2.8). La renormalización de f en J_{3_1} se muestra en la figura 2.9, allí podemos observar que f_b^3 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.10).

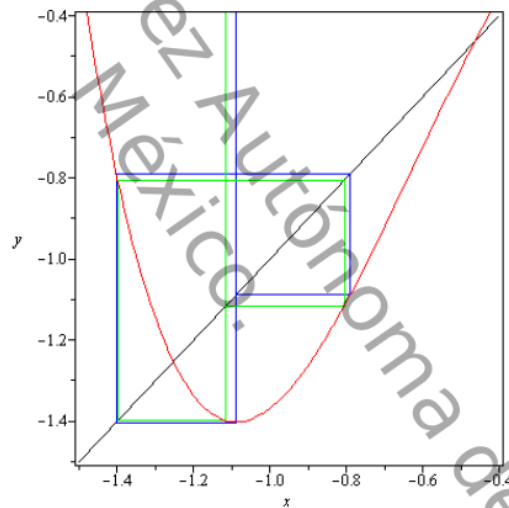


Figura 2.8: Gráfica de f_b e intervalo restrictivo J_{3_1} para $b = -2.36857358$.

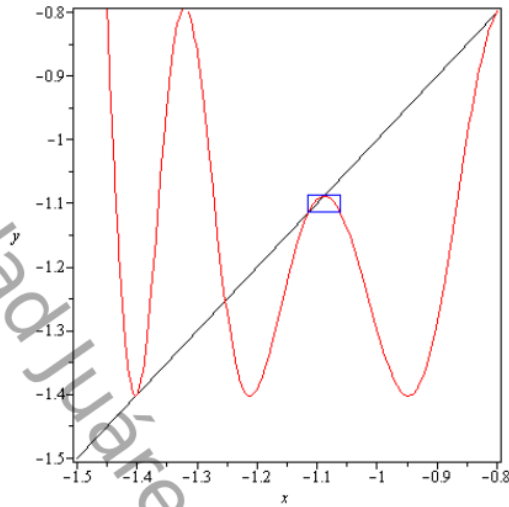


Figura 2.9: Gráfica de f_b^3 para $b = -2.36857358$.

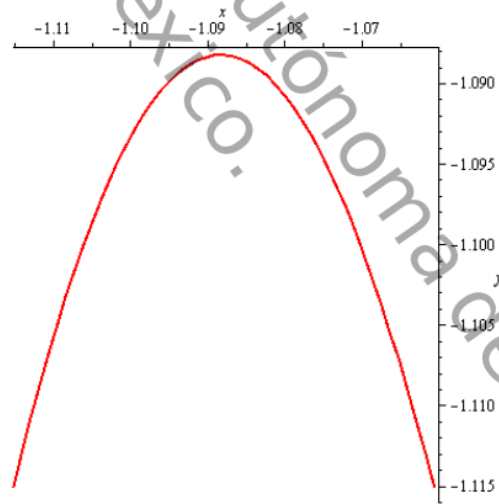


Figura 2.10: Gráfica de f_b^3 en el intervalo restrictivo J_{3_1} , $b = -2.36857358$.

Además, variando el parámetro b en valores cercanos a -2.36857358 se obtienen intervalos restrictivos, los cuales generan una familia completa de fun-

ciones renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene tres ramas (ver figura 2.11).

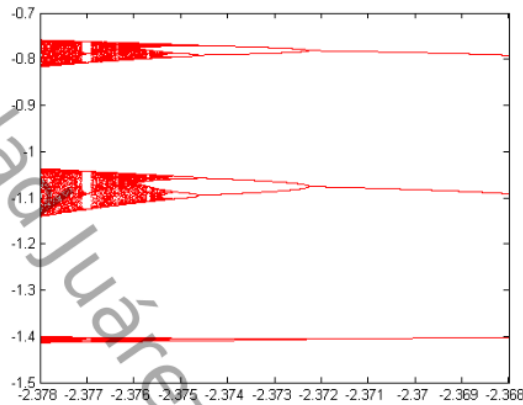


Figura 2.11: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.36857358 .

Haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.12), se ve que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático acorde con el teorema 2.3.1. Además, cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

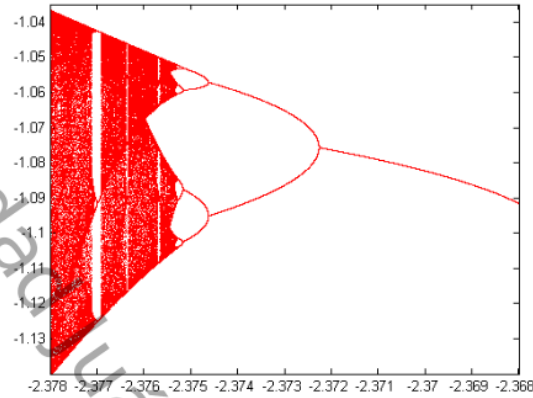


Figura 2.12: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.36857358 .

Caso II: $b = -2.60144304$.

Para este caso $c_3 = -1.14049178$ y $f_b(x) = -2.60144304x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo tres correspondiente a f_b es $J_{3_2} = [-1.1585, -1.1222]$. La renormalización de f en J_{3_2} se muestra en la figura 2.13 se observa que f_b^3 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.14).

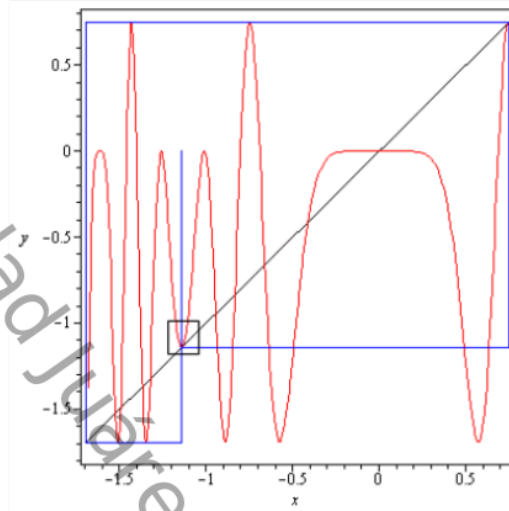


Figura 2.13: Gráfica de f_b^3 para $b = -2.60144304$.

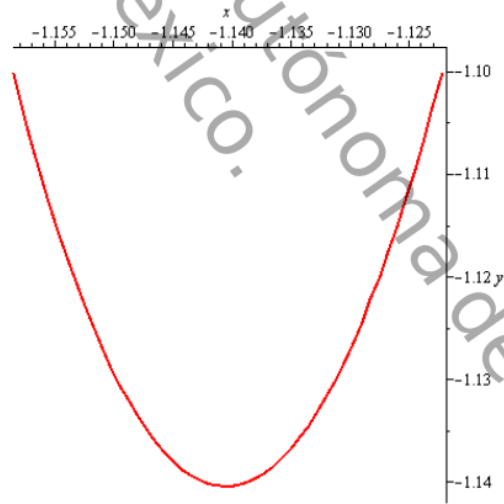


Figura 2.14: Gráfica de f_b^3 en el intervalo restrictivo J_{3_2} , $b = -2.60144304$.

Variando el parámetro b en valores cercanos a -2.60144304 se obtienen intervalos restrictivos, los cuales generan una familia completa de funciones

renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene tres ramas (ver figura 2.15).

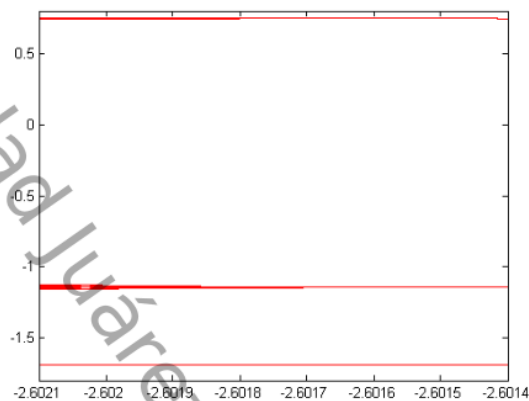


Figura 2.15: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.60144304 .

Haciendo una ampliación en una de las ramas (ver figura 2.16), así como en el caso anterior coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

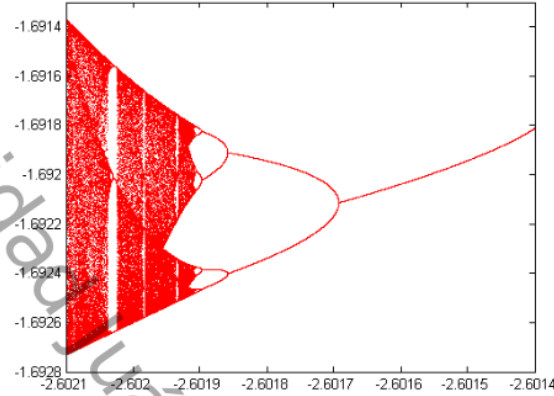


Figura 2.16: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.60144304 .

Caso III: $b = -2.65900055$.

En este último caso para $n = 3$ se tiene que $c_3 = -1.15303958$ y $f_b(x) = -2.65900055x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo tres correspondiente a f_b es $J_{3_3} = [-1.1566, -1.1495]$. Al igual que en los casos anteriores, la renormalización de f en J_{3_3} se muestra en la figura 2.17 allí podemos observar que f_b^3 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.18).

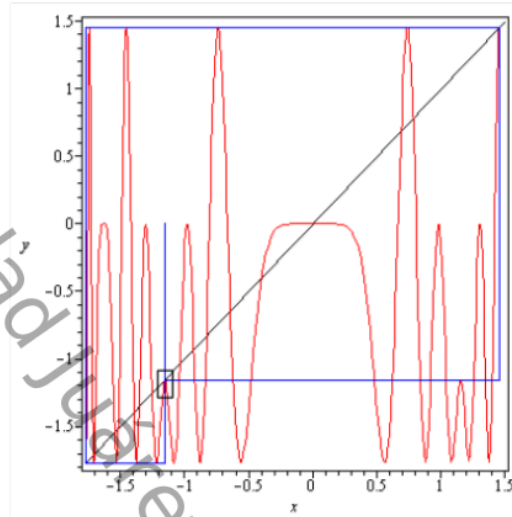


Figura 2.17: Gráfica de f_b^3 para $b = -2.65900055$.

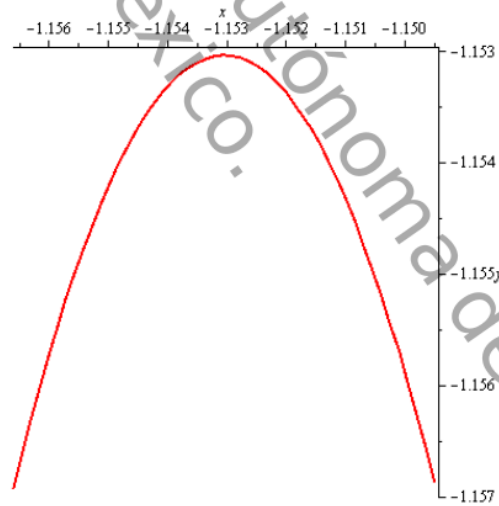


Figura 2.18: Gráfica de f_b^3 en el intervalo restrictivo J_{33} , $b = -2.65900055$.

Además, variando el parámetro b en valores cercanos a -2.65900055 se obtienen intervalos restrictivos, el cual genera una familia completa de funciones

renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene tres ramas (ver figura 2.19).

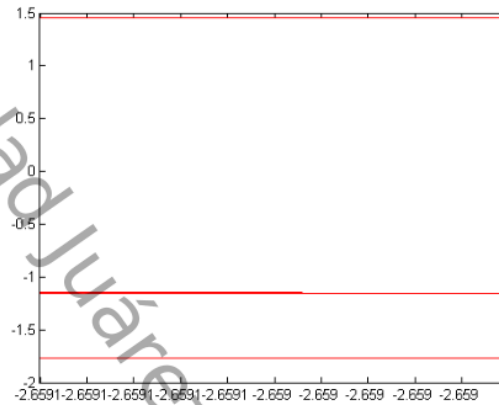


Figura 2.19: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.65900055 .

Haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.20), se observa que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

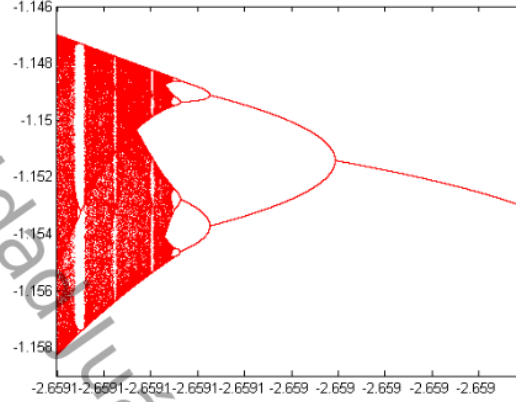


Figura 2.20: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.65900055 .

Para el caso $n = 5$ resolvemos

$$f_b^5\left(\frac{-\sqrt{-2b}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$$

que es equivalente a resolver una ecuación polinomial de grado $4^5 = 1024$. Numéricamente se puede resolver usando el método de Newton, para este caso analizamos solo tres de estas raíces que son:

1. $b = -2.34294788$,
2. $b = -2.39310235$,
3. $b = -2.57741082$.

Estos parámetros coinciden respectivamente con los verdaderos valores en al menos 9 cifras significativas.

Caso I: $b = -2.34294788$.

En este caso $c_3 = -1.08234649$ y $f_b(x) = -2.34294788x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo cinco correspondiente a f_b es $J_{5_1} = [-1.0948, -1.0698]$. La renormalización de f en J_{5_1} se muestra en la figura 2.21, allí podemos observar que f_b^5 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.22).

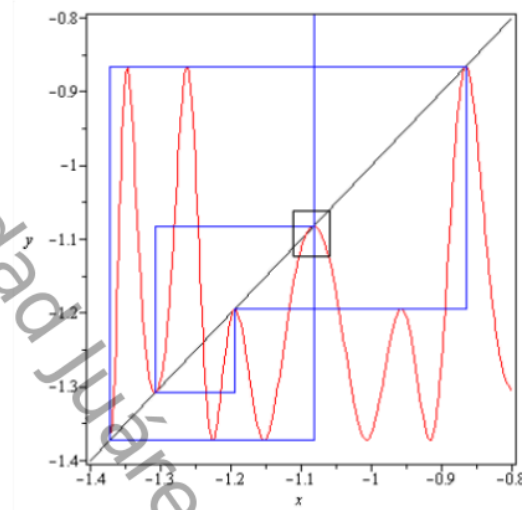


Figura 2.21: Gráfica de f_b^5 para $b = -2.34294788$.

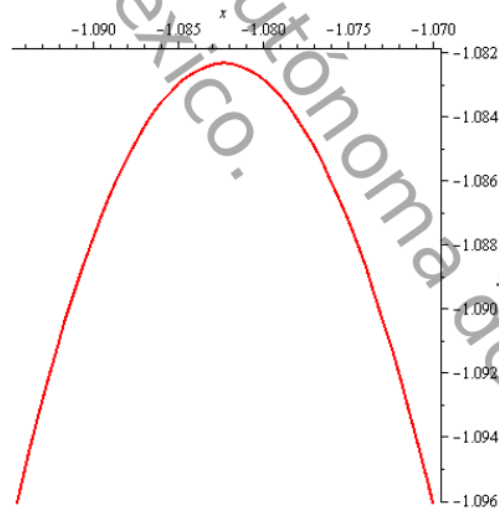


Figura 2.22: Gráfica de f_b^5 en el intervalo restrictivo $J_{5,1}$, $b = -2.34294788$.

Variando el parámetro b en valores cercanos a -2.34294788 se pueden obtener intervalos restrictivos, los cuales generan una familia completa de funciones

renormalizables, cuyo diagrama de bifurcación tiene cinco ramas (ver figura 2.23).

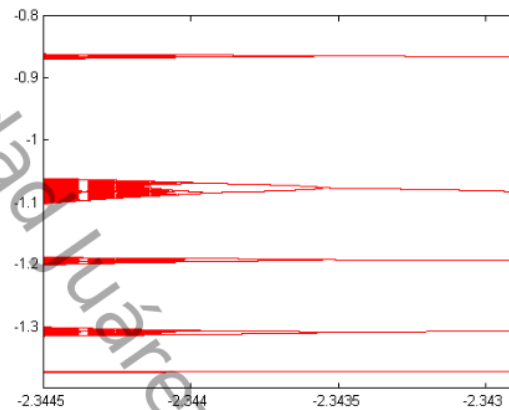


Figura 2.23: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.34294788 .

Haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.24), se ve que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

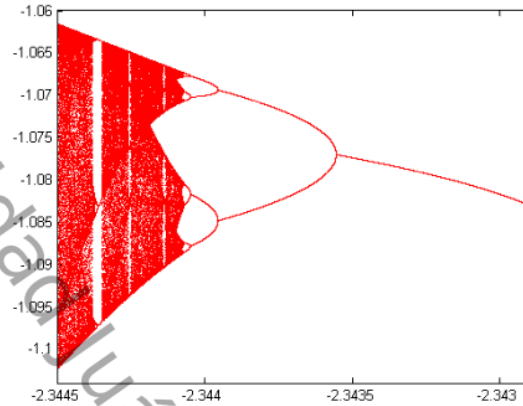


Figura 2.24: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.34294788 .

Caso II: $b = -2.39310235$.

En este caso $c_3 = -1.09386981$ y $f_b(x) = -2.39310235x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo cinco correspondiente a f_b es $J_{5_2} = [-1.1172, -1.0701]$. La renormalización de f en J_{5_2} se muestra en la figura 2.25, allí podemos observar que f_b^5 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.26).

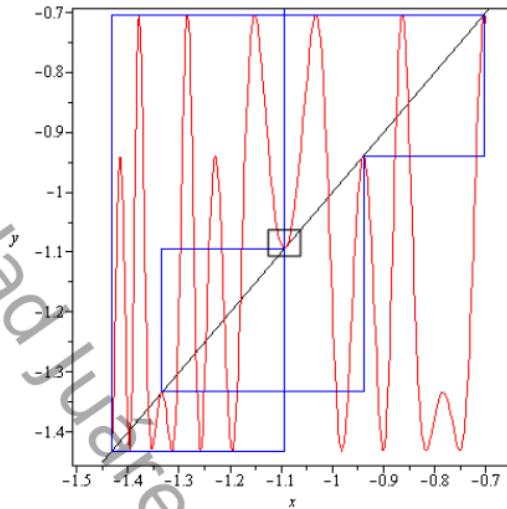


Figura 2.25: Gráfica de f_b^5 para $b = -2.39310235$.

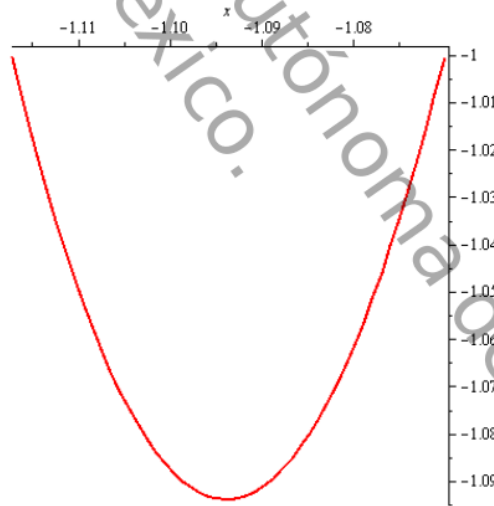


Figura 2.26: Gráfica de f_b^5 en el intervalo restrictivo J_{5_2} , $b = -2.39310235$.

Similarmente variando el parámetro b en valores cercanos a -2.39310235 se obtienen intervalos restrictivos que generan una familia completa de funciones

renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene cinco ramas (ver figura 2.27).

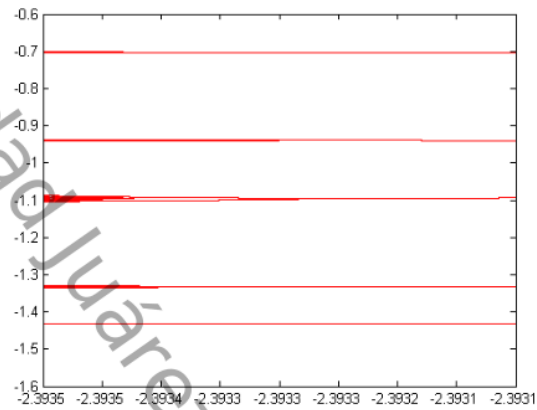


Figura 2.27: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.39310235 .

Análogamente haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.28), se ve que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

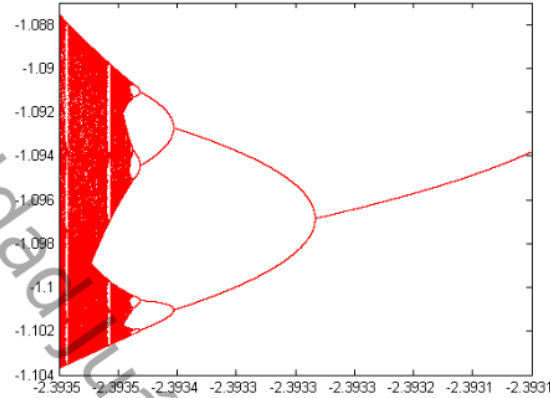


Figura 2.28: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.39310235 .

Caso III: $b = -2.57741082$.

En este caso $c_3 = -1.13521161$ y $f_b(x) = -2.57741082x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo cinco correspondiente a f_b es $J_{5_3} = [-1.1436, -1.1268]$. La renormalización de f en J_{5_3} se muestra en la figura 2.29 se observa que f_b^5 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.30).

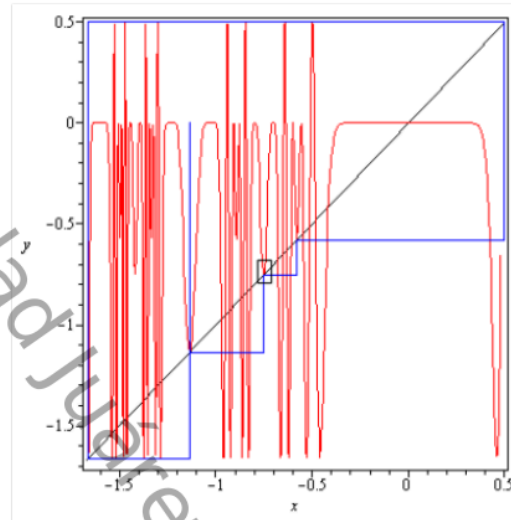


Figura 2.29: Gráfica de f_b^5 para $b = -2.57741082$.

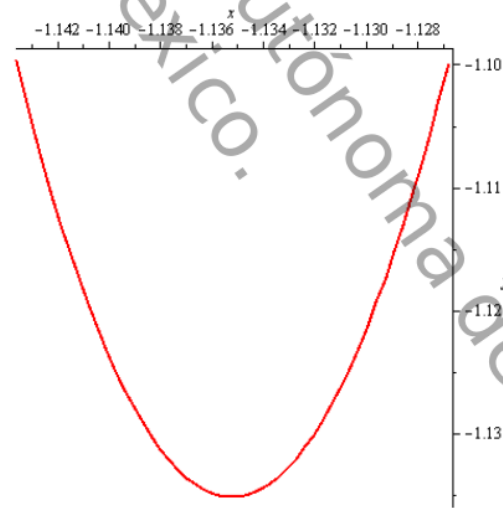


Figura 2.30: Gráfica de f_b^5 en el intervalo restrictivo J_{5_3} , $b = -2.57741082$.

De manera similar, variando el parámetro b en valores cercanos a -2.57741082 se pueden obtener intervalos restrictivos, los cuales generan una familia com-

pleta de funciones renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene cinco ramas (ver figura 2.31).

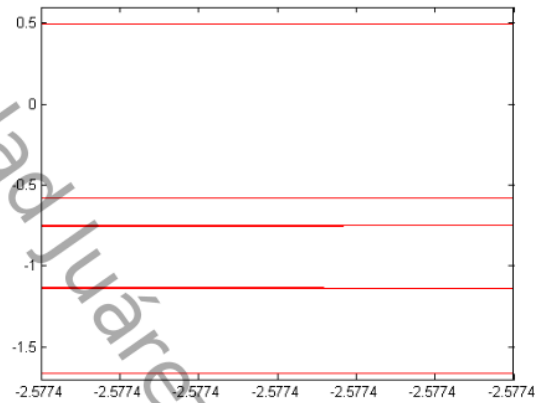


Figura 2.31: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.57741082 .

Haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.32), se ve que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

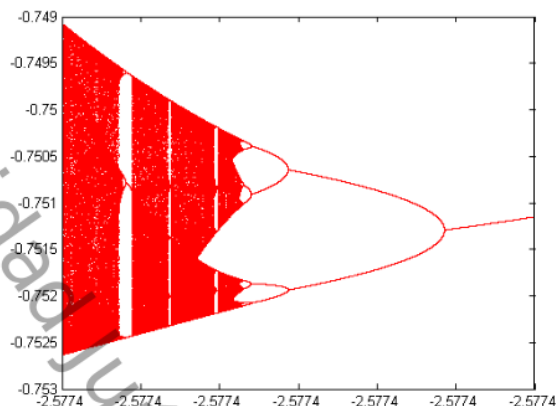


Figura 2.32: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.57741082 .

Por último el caso $n = 7$ resolvemos

$$f_b^7\left(\frac{-\sqrt{-2b}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{-2b}}{2}$$

que es equivalente a resolver una ecuación polinomial de grado 4^7 , como en los casos anteriores se resuelve numéricamente usando el método de Newton, para este caso analizamos únicamente la raíz $b = -2.39870892$.

Este parámetro coincide con el verdadero valor en al menos 9 cifras significativas.

En este caso $c_3 = -1.09515042$ y $f_b(x) = -2.39870892x^2 + x^4$, el intervalo restrictivo de periodo siete correspondiente a f_b es $J_7 = [-1.0995, -1.0908]$.

La renormalización de f en J_7 se muestra en la figura 2.33 se puede observar que f_b^7 en el intervalo restrictivo es una función unimodal (véase la figura 2.34).

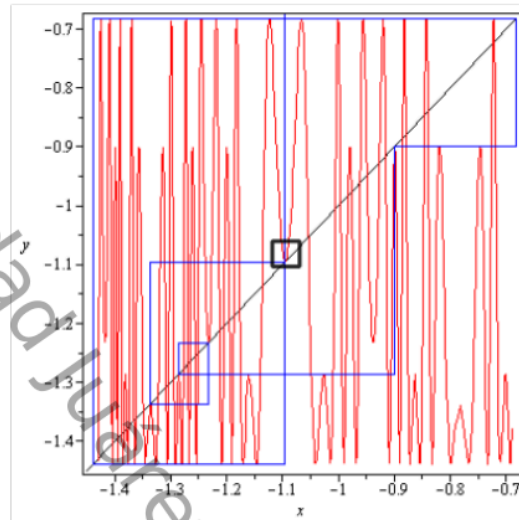


Figura 2.33: Gráfica de f_b^7 para $b = -2.39870892$.

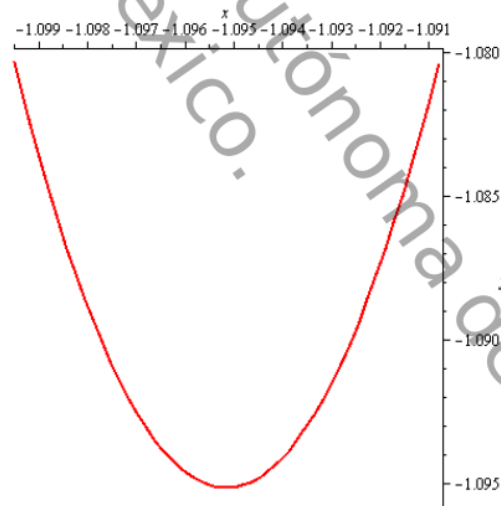


Figura 2.34: Gráfica de f_b^7 en el intervalo restrictivo J_7 , $b = -2.39870892$.

De nuevo variando el parámetro b en valores cercanos a -2.39870892 se obtienen intervalos restrictivos que generan una familia completa de funciones

renormalizables, el cual su diagrama de bifurcación tiene siete ramas (ver figura 2.35).

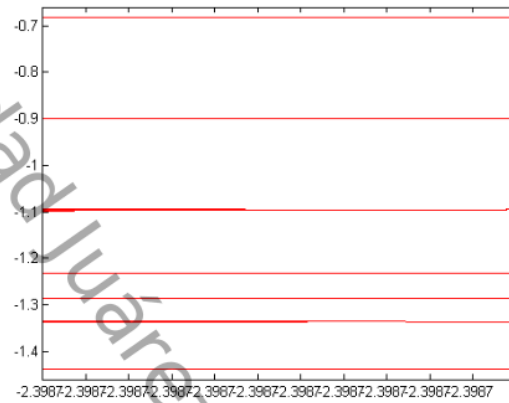


Figura 2.35: Diagrama de bifurcación alrededor del parámetro -2.39870892 .

Haciendo una ampliación en la rama central (ver figura 2.36), se ve que coincide con el diagrama de bifurcación de un polinomio cuadrático, más aún cada una de las ramas coincide con el diagrama de bifurcación de un cuadrático.

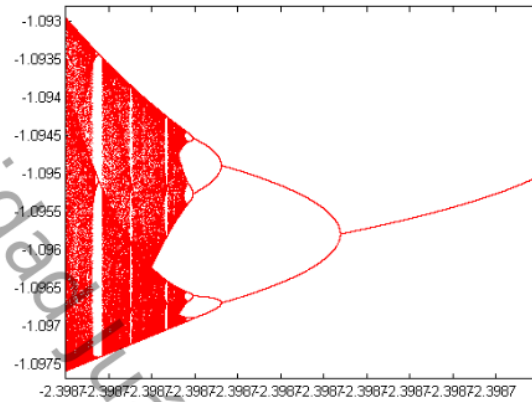


Figura 2.36: Una ampliación del diagrama de bifurcación alrededor de -2.39870892 .

Capítulo 3

Polinomios Cuárticos

3.1. Funciones cuasiconformes

32

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Toda función de variable compleja $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se puede escribir como $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones de variable real.

Notación:

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

donde f_x y f_y denotan las derivadas parciales en x y y , respectivamente.

Supongamos que $f \in C^1(A)$, es decir, f tiene sus derivadas parciales f_x y f_y continuas. Se define la derivada en la dirección $\alpha \in \mathbb{R}$ como

$$\partial_\alpha f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

la cual existe en todo punto $z_0 \in A$.

Además definimos el cociente de dilatación como

$$D_f(z) = \frac{\max_\alpha |\partial_\alpha f(z)|}{\min_\alpha |\partial_\alpha f(z)|}.$$

Definición 3.1.1. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada **conforme** en z_0 si existen $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r > 0$ tales que para cualquier curva $\gamma(t) \subset A$ con $\gamma(0) = z_0$, diferenciable en $t = 0$ y satisfaciendo $\gamma'(0) \neq 0$; la curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ es diferenciable en $t = 0$ y, haciendo $u = \sigma'(0)$ y $v = \gamma'(0)$ tenemos que $|u| = r|v|$ y $\arg(u) = \arg(v) + \theta \pmod{2\pi}$.

Observación 5. Si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 , con $\theta = \arg(f'(z_0))$ y $r = |f'(z_0)|$.

En efecto, usando la notación de la definición 3.1.1 y por la regla de la cadena se tiene que $u = \sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0) = f'(z_0) \cdot v$.

Por lo tanto $\arg(u) = \arg(f'(z_0)) + \arg(v) \pmod{2\pi}$ y $|u| = |f'(z_0)| \cdot |v|$.

Usando la definición de coeficiente de dilatación vamos a debilitar la definición de conforme y vamos a definir lo que se conoce como función cuasiconforme. Más adelante veremos la relación entre las dos definiciones.

Definición 3.1.2. Si $D_f(z)$ es acotado en el dominio A , se dice que f es una función cuasiconforme en A . Además si

$$\sup_{z \in A} D_f(z) = K,$$

se dice que f es una función K -cuasiconforme.

La definición de función cuasiconforme se puede dar más general, sin necesidad de tener diferenciabilidad, antes de hacerlo vamos a introducir algunas definiciones.

Definición 3.1.3. Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in C^1(A)$. Se define el coeficiente de dilatación μ_f de f , por $\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$.

El coeficiente de dilatación μ_f es también llamado **coeficiente de Beltrami** de f y a la ecuación $f_{\bar{z}} = \mu_f f_z$ se le conoce como la ecuación de Beltrami.

Definición 3.1.4. Dados dos subconjuntos U y V de $\mathbb{C}$, decimos que, U es relativamente compacto en V y se denota por $U \Subset V$ si:

1. $\bar{U}$ es compacto,
2. $\bar{U} \subset V$.

Definición 3.1.5. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. La función f es absolutamente continua en I si satisface lo siguiente: para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$$

para cualquier sucesión finita de intervalos disjuntos (α_i, β_i) en I cuya cerradura de cada (α_i, β_i) está contenida en I y la longitud total

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Definición 3.1.6. Una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es absolutamente continua en líneas si para cualquier familia de líneas paralelas en cualquier disco D relativamente compacto en U ($\bar{D} \subset U$), f es absolutamente continua en casi todas ellas.

Es importante mencionar que si f es una función absolutamente continua en líneas entonces tiene derivadas parciales en el sentido ordinario casi por todas partes en U , sin embargo esto no implica la diferenciabilidad de f .

Con las definiciones anteriores estamos listos para dar la definición general de una función cuasiconforme.

Definición 3.1.7. Una función $f : U \rightarrow V$ se dice cuasiconforme si satisface las siguientes condiciones:

1. f es un homeomorfismo,
2. f es absolutamente continua en líneas,
3. existe una constante k con $0 \leq k \leq 1$, tal que $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ c.t.p en U .

Si $k = \frac{K-1}{K+1}$ donde $K = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$ entonces se dice que f es K -cuasiconforme.

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $K < \infty$, una función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice K -cuasiregular si y solo si g puede ser expresada como $g = f \circ \phi$ donde $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es K -cuasiconforme y $f : \phi(U) \rightarrow g(U)$ es holomorfa.

Con esta última definición estamos listos para enunciar el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [BN].

Teorema 3.1.1 (Cirugía cuasiconforme). Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función cuasiregular. Suponga que existen conjuntos disjuntos medibles $E_j \subset \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$ que satisfacen

1. para casi todos los $z \in \mathbb{C}$, la órbita de z bajo g pasa a lo más una vez en E_j para cada j ,
2. g es K_j -cuasiregular en E_j ,
3. $K_\infty = \prod_{j=1}^{\infty} K_j < \infty$,
4. g es holomorfa c.t.p afuera de $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Entonces existe una función K_∞ -cuasiconforme $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es una función entera.

3.1.1. Funciones tipo polinomial

Definición 3.1.8. Sean U, V discos topológicos abiertos de $\mathbb{C}$, una aplicación holomorfa $f : U \rightarrow V$ es propia, si $f^{-1}(K)$ es compacto, para todo conjunto compacto $K \subset V$.

Definición 3.1.9 (Función tipo polinomial). Una función de tipo polinomial de grado d es una terna (f, U, V) , donde U y V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ isomorfos a discos, tales que ∂U y ∂V son curvas C^1 , U es relativamente compacto en V y $f : U \rightarrow V$ es una función $\mathbb{C}$ -analítica y propia de grado d .

El conjunto de Julia lleno K_f de una función tipo polinomial se define como

$$K_f = \{z \in U : f^n(z) \in U \text{ para toda } n \geq 0\}$$

y el conjunto de Julia $J_f = \partial K_f$. En el caso que $d = 2$, la tripleta (f, U, V) es llamada una función tipo cuadrático.

Si f es un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces satisface la definición 3.1.9 y su conjunto de Julia lleno y su conjunto de Julia se obtienen de la definición anterior, tomando $U = \mathbb{C}$.

El siguiente teorema de Douady-Hubbard relaciona una función tipo polinomial de grado d con un polinomio del mismo grado. La demostración puede ser consultada en [DH2].

Teorema 3.1.2 (Teorema de rectificación).

1. Toda función tipo polinomial $f : U \rightarrow V$ es híbridamente equivalente a un polinomio P del mismo grado.
2. Si K_f es conexo, P es único salvo una conjugación por una función afín.

Donde híbridamente equivalente significa que existen, una vecindad W de K_f en U y una función cuasiconforme $\varphi : W \rightarrow \varphi(W)$ tal que:

1. $\varphi(K_f) = K_P$.
2. el coeficiente de dilatación μ_φ de φ es cero en casi todas partes en K_f y
3. $\varphi \circ f = P \circ \varphi$ en $W \cap \varphi^{-1}(W)$.

3.2. Dinámica de los polinomios cuárticos

Antes de entrar con la familia de polinomios cuárticos, vamos a mencionar algunos resultados relacionados con la familia cuadrática.

En la familia de polinomios cuadráticos podemos considerar la familia $p_c(z) = z^2 + c$, denotamos por $K_c = K_{p_c}$ y $J_c = J_{p_c}$. Definimos también al conjunto de *Mandelbrot* como el conjunto de parámetros $c \in \mathbb{C}$ tal que el Julia lleno K_c es conexo (véase la figura 3.1).

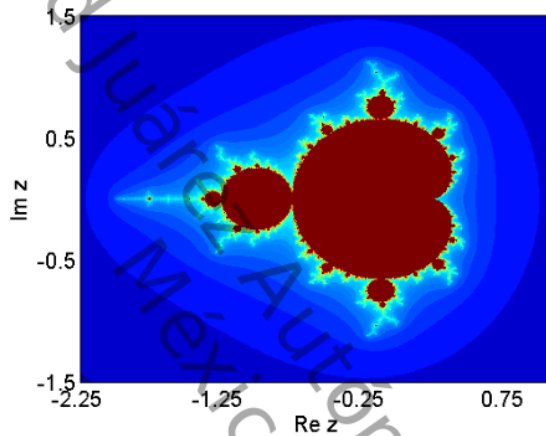


Figura 3.1: Conjunto de Mandelbrot para p_c .

Observación 6. Si f es un polinomio, los conjuntos J_f y K_f son compactos.

La cuenca de atracción del infinito denotada por $A_f(\infty)$ es el complemento de K_f . Los conjuntos J_f, K_f y $A_f(\infty)$ son completamente invariantes bajo f .

La conexidad del conjunto de Julia J_f es afectado por el comportamiento de los puntos críticos finitos.

Enunciamos el siguiente teorema de Fatou, que clasifica la conexidad del conjunto de Julia mediante el comportamiento de los puntos críticos.

Teorema 3.2.1. Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$.

1. Si todos los puntos críticos pertenecen a $A_f(\infty)$, entonces J_f es totalmente desconexo y $J_f = K_f$. Además $f|_{J_f}$ es topológicamente conjugada a la función desplazamiento $\sigma|_{\Sigma_d}$.

2. J_f y K_f son conexos si y solo si todos los puntos críticos de f pertenecen a K_f .

Si algunas órbitas críticas, pero no todas las órbitas divergen, entonces el conjunto de Julia es desconexo y por lo general no es totalmente desconexo.

3.2.1. Itinerarios de los Julias cuárticos

Para un polinomio p de grado d , la función de Green G_p se define como

$$G_p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |p^n(z)|$$

donde $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$.

La función de Green $G(z)$ es cero para $z \in K_f$ y es positiva para $z \in A_f(\infty)$. Esto último debido a que f es conjugada a z^d en una vecindad del infinito. Al conjunto $G^{-1}(x)$ con $x > 0$ se le llama curva equipotencial alrededor del Julia lleno K_f , [DH1].

Sea f un polinomio cuártico y $G = G_f$ la función de Green asociada al Julia lleno K_f . Sean c_1 , c_2 y c_3 los puntos críticos finitos de f , supongamos que $G(c_1) = G(c_2) = 0$ y $G(c_3) > 0$, es decir, $c_1, c_2 \in K_f$ y $c_3 \in A_f(\infty)$.

Sea U la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(G(f(c_3)))$. Supongamos que U_A y U_B son las diferentes componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(G(c_3))$ tal que $c_1 \in U_A$ y $c_2 \in U_B$. Entonces U_A y U_B son subconjuntos propios de U . Además, $(f|_{U_A}, U_A, U)$ y $(f|_{U_B}, U_A, U)$ son funciones tipo cuadrático (véase la figura 3.2). Definimos $f_1 = f|_{U_A}$ y $f_2 = f|_{U_B}$.

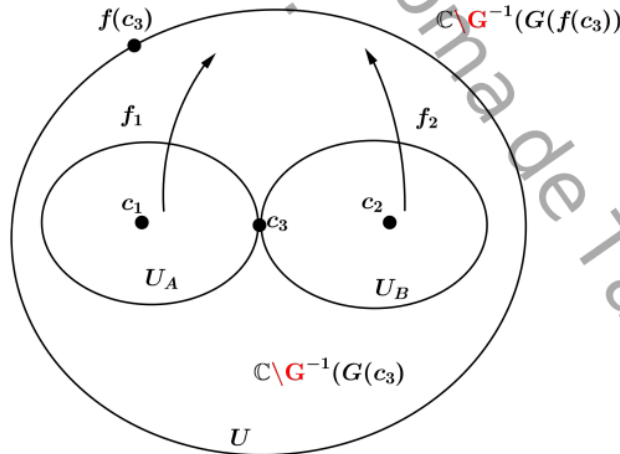


Figura 3.2: Funciones tipo polinomiales $(f|_{U_A}, U_A, U)$ y $(f|_{U_B}, U_B, U)$.

Bajo estas condiciones podemos definir el $A - B$ itinerario principal $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de c_i como sigue:

$$\alpha_n = \begin{cases} A & \text{si } f^n(c_i) \in U_A \\ B & \text{si } f^n(c_i) \in U_B. \end{cases}$$

Podemos suponer que el $A - B$ itinerario principal de c_1 es $(AAA \dots)$ y el itinerario principal de c_2 es $(BBB \dots)$. En particular, esto implica que los conjuntos de Julia llenos K_{f_1} y K_{f_2} son conexos.

Sea $Comp(K_f)$ el conjunto de todas las componentes de K_f . Como $G(c_3) > 0$ el conjunto de Julia J_f y el Julia lleno K_f son desconexos y tienen una cantidad no numerable de componentes. Por lo tanto $Comp(K_f)$ es un conjunto no numerable, el cual se convierte en un espacio métrico con la métrica de Hausdorff d_H . Definimos una función $F : Comp(K_f) \rightarrow Comp(K_f)$ como $F(K) = f(K)$ para $K \in Comp(K_f)$. Esta función F es continua con respecto a la métrica de Hausdorff.

Sea $\Sigma_6 = \{1, 2, 3, 4, A, B\}^{\mathbb{N}}$ el espacio de seis símbolos, definimos un subconjunto Σ de Σ_6 como sigue: $s = (s_n) \in \Sigma$ si y sólo si

1. $s_n = A$ implica $s_{n+1} = A$,
2. $s_n = B$ implica $s_{n+1} = B$,
3. $s_n = A$ y $s_{n-1} \neq A$ implica $s_{n-1} = 3$ o $s_{n-1} = 4$,
4. $s_n = B$ y $s_{n-1} \neq B$ implica $s_{n-1} = 1$ o $s_{n-1} = 2$,
5. si $s = (s_n) \in \Sigma_4 = \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$, entonces existen subsucesiones $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $t_n = 1$ o $t_n = 2$ y $u_n = 3$ o $u_n = 4$ para toda $n \geq 1$.

La propiedad (5) de Σ es importante, por ejemplo una sucesión

$$\{s^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-\text{veces}}, B, B, \dots)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$$

converge a $s = (1, 1, \dots) \in \Sigma_6$, sin embargo no converge en Σ ya que $s \notin \Sigma$. Cada $s^{(n)}$ corresponde a una componente de las imágenes inversas del conjunto de Julia lleno K_{f_2} , estas preimágenes de las componentes convergen a un punto fijo repulsor en ∂K_{f_1} . Por lo tanto podemos suponer que $s = (1, 1, \dots, 1)$ corresponde a un punto fijo repulsor. Similarmente una sucesión de la forma $(1, 2, 1, 2, \dots)$ corresponde a un punto periódico de periodo 2 en ∂K_{f_1} .

Nuestro objetivo ahora es demostrar el siguiente teorema de Katagata [K1].

Teorema 3.2.2. Sea f un polinomio de grado 4, suponga que:

1. los puntos críticos $c_1, c_2 \in K_f$, $c_3 \in A_f(\infty)$ y todos son diferentes,
2. el conjunto de Julia J_f es desconexo pero no totalmente desconexo,
3. los $A-B$ itinerarios principales de c_1 y c_2 son $(AAA \cdots)$ y $(BBB \cdots)$ respectivamente.

Entonces existe un homeomorfismo $\Lambda : \text{Comp}(K_f) \rightarrow \Sigma$ tal que $\Lambda \circ F = \sigma \circ \Lambda$.

Demostración.

Sea W la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(G(c_3))$, note que la frontera de W contiene a c_3 . Por el teorema de Bottcher existe una función conforme ψ_f con las siguientes propiedades (ver [M1, pág. 92]): existe $r > 1$ tal que $\psi_f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_r \rightarrow W$ es un isomorfismo conforme, donde $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Para $t \in [0, 1)$,

$$R_f(t) = \psi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r, \arg(z) = 2\pi t\})$$

es llamado *rayo externo* con ángulo t para K_f .

Sea R la intersección del rayo externo que pasa a través de $f(c_3)$ y $\mathbb{C} \setminus \bar{U}$. Dos de los cuatro rayos $f^{-1}(R)$ tienen como punto límite a c_3 como se muestra en la figura 3.3. Así el conjunto $\psi^{-1}(f^{-1}(R))$ consiste de cuatro semirectas extendidas de $\partial\mathbb{D}_r$ con ángulos adyacentes a $\frac{\pi}{2}$. Hay tres semirectas invariantes bajo la función z^4 que se extienden desde el disco unitario $\mathbb{D}$ y sus ángulos son $0, \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Además al menos dos de estas tres semirectas invariantes no se traslapan con $\psi_f^{-1}(f^{-1}(R))$, (véase la figura 3.4).

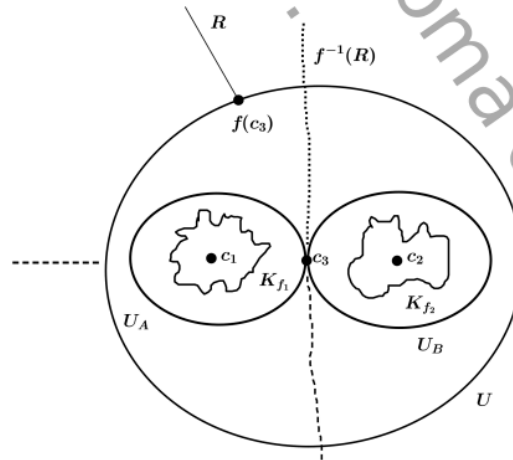


Figura 3.3: Las líneas discontinuas son $f^{-1}(R)$.

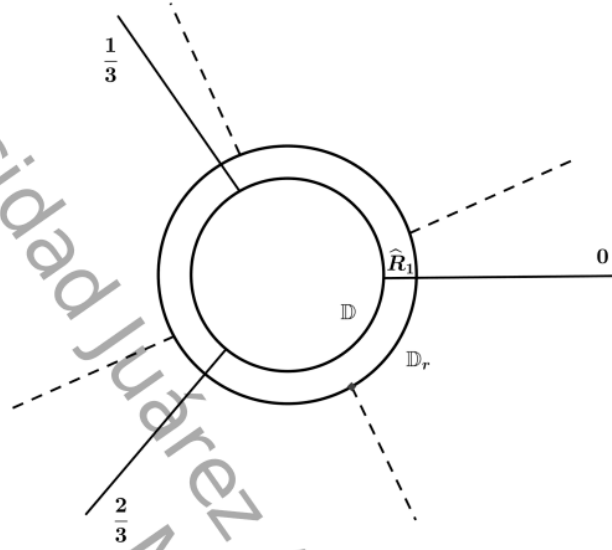


Figura 3.4: Las líneas continuas son invariantes bajo $z \rightarrow z^4$ y las líneas discontinuas son $\psi_f^{-1}(f^{-1}(R))$.

Sea $\hat{R}_1$ la intersección de una de estas semirectas invariantes con $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r}$ y sea R_1 la imagen de $\hat{R}_1$ bajo ψ_f . Extendemos R_1 de tal manera que se convierta en un rayo invariante bajo f . Tomamos a R_0 como una componente de $f^{-1}(R_1)$ satisfaciendo $R_1 \cap R_0 \neq \emptyset$. Entonces $R_1 \subset R_0$ y f envía $J_0 = R_0 \setminus R_1$ sobre $J_1 = R_1 \cap \overline{U}$ (véase la figura 3.5).

Inductivamente sea R_{-n} una componente de $f^{-1}(R_{-(n-1)})$ que satisface $R_{-(n-1)} \cap R_{-n} \neq \emptyset$. Entonces $R_{-(n-1)} \subset R_{-n}$ y además f envía J_{-n} sobre $J_{-(n-1)}$ donde

$$J_{-n} = \begin{cases} R_{-n} \setminus R_{-(n-1)} & \text{si } n \geq 0 \\ R_1 \cap \overline{U} & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

El límite de esta construcción es el rayo f -invariante

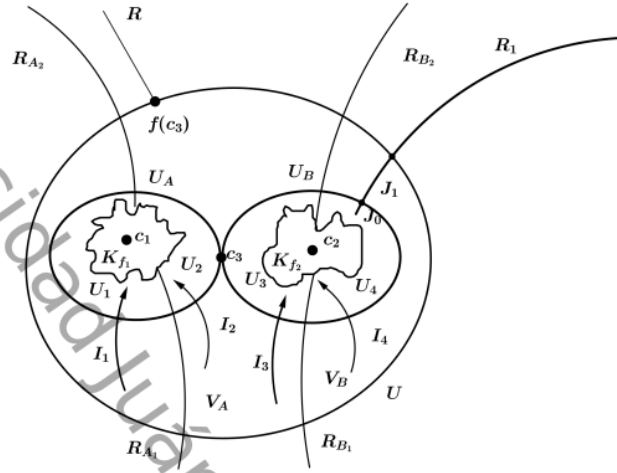
$$R_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_{-n} = R_1 \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} J_{-n} \right).$$



Lema 3.2.1. Sean F una función racional y X la cerradura de la unión del conjunto postcrítico y posibles dominios de rotación de F . Suponga que $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ es una curva tal que $F^{nk}(\gamma(-\infty, -k]) = \gamma(-\infty, 0]$ para todo entero $k > 0$. Entonces el $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$ existe y es un punto periódico repulsor o parabólico de F cuyo período divide a n .

Sean $V_A = U \setminus (K_{f_1} \cup R_{A_1})$ y $V_B = U \setminus (K_{f_2} \cup R_{B_1})$, además definimos las ramas I_1, I_2, I_3 e I_4 de f^{-1} tales que

donde U_1 y U_2 son componentes de $U_A \setminus (K_{f_1} \cup R_{A_1} \cup R_{A_2})$. Similarmente U_3 y U_4 son componentes de $U_B \setminus (K_{f_2} \cup R_{B_1} \cup R_{B_2})$ (ver figura 3.6).

Figura 3.6: Ramificaciones de f^{-1} .

Definimos una función $\Lambda: \text{Comp}(K_f) \rightarrow \Sigma$ como sigue, para $K \in \text{Comp}(K_f)$.

$$[\Lambda(K)]_n = \begin{cases} j & \text{si } f^n(K) \subset U_j \\ A & \text{si } f^n(K) = K_{f_1} \\ B & \text{si } f^n(K) = K_{f_2} \end{cases}$$

donde $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

A continuación demostramos algunos lemas y en consecuencia se tendrá la demostración del teorema.

Lema 3.2.2. *La función $\Lambda: \text{Comp}(K_f) \rightarrow \Sigma$ es continua.*

Demostración.

Para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Tomamos $K \in \text{Comp}(K_f)$ de manera arbitraria y $s = \Lambda(K) = (s_0, s_1, \dots, s_N, \dots)$, primero consideramos el caso en que $s \in \Sigma \cap \Sigma_4$. Por la continuidad de f existen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N > 0$ tal que $f^k(K[\delta_k]) \subset U_{s_k}$ para $k = 1, 2, \dots, N$, donde $K[\delta_k]$ es la δ_k -vecindad de K .

Sea $\delta = \min_{k=1,2,\dots,N} \delta_k$, así cualquier componente K' de K_f con $d_H(K, K') < \delta$ satisface que $K' \subset K[\delta]$ por la definición de la métrica de Hausdorff. Además cualquier componente $K' \subset K[\delta]$ de K_f por la proposición 1.3.3 del capítulo 1 satisface que $\Lambda(K') = (s_0, s_1, \dots, s_N, t_{N+1}, \dots)$. Por lo tanto si alguna

componente K' de K_f satisface que $d_H(K, K') < \delta$ entonces

$$d(\Lambda(K), \Lambda(K')) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{2^k} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Donde d es la métrica de la definición 1.3.2 del capítulo uno, de esta manera Λ es continua en K .

Cuando $s \in \Sigma \setminus \Sigma_4$ se tiene que $s_n = A$ y $s_{n-1} \neq A$ o bien $s_n = B$ y $s_{n-1} \neq B$, entonces s es un punto aislado en Σ , como el correspondiente K es también un punto aislado en $Comp(K_f)$, por lo tanto Λ es continua en K . ■

Definimos la función $\tilde{\Lambda} : \Sigma \rightarrow Comp(K_f)$ como sigue: para $s = (s_n) \in \Sigma$, si $s_n = A$ y $s_{n-1} \neq A$, entonces

$$\tilde{\Lambda}(s) = I_{s_0} \circ I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_{n-1}}(K_{f_1}).$$

Si $s_n = B$ y $s_{n-1} \neq B$, entonces

$$\tilde{\Lambda}(s) = I_{s_0} \circ I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_{n-1}}(K_{f_2}).$$

Si $s \in \Sigma_4$, entonces existe una subsucesión $(s_{n(l)})_{l=1}^{\infty}$ tal que $s_{n(l)} = 1$ ó $s_{n(l)} = 2$ y $s_{n(l)-1} = 3$ ó $s_{n(l)-1} = 4$. Sea $K_s^{(l)} = I_{s_0} \circ I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_{n(l)-1}}(\bar{U}_A)$ y entonces $K_s^{(l)} \supset K_s^{(l+1)}$. En este caso definimos $\tilde{\Lambda}(s)$ de la siguiente manera

$$\tilde{\Lambda}(s) = \bigcap_{l=1}^{\infty} K_s^{(l)}.$$

Como $K_s^{(l)}$ es una sucesión anidada de conjuntos compactos cuyo diámetro en la métrica de Poincaré tiende a cero, se tiene que $\bigcap_{l=1}^{\infty} K_s^{(l)}$ es un solo punto [K1].

Lema 3.2.3. $\tilde{\Lambda}$ es la inversa de Λ .

Demostración.

Primero vamos a probar que $\Lambda \circ \tilde{\Lambda}$ es la función identidad en Σ , para esto consideramos dos casos. Primero cuando $s = (s_0, s_1, \dots) \in \Sigma \setminus \Sigma_4$. Si $s_n = A$ y $s_{n-1} \neq A$, entonces por definición se tiene que

$$\tilde{\Lambda}(s) = I_{s_0} \circ I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_{n-1}}(K_{f_1}).$$

Así

$$f^k(\tilde{\Lambda}(s)) = I_{s_k} \circ \cdots \circ I_{s_{n-1}}(K_{f_1}) \subset U_{s_k}.$$

Por lo tanto $[\Lambda(\tilde{\Lambda}(s))]_k = s_k$ y se concluye que $\Lambda(\tilde{\Lambda}(s)) = s$. Similarmente se tiene que si $s_n = B$ y $s_{n-1} \neq B$, entonces $\Lambda \circ \tilde{\Lambda}(s) = s$.

El segundo caso es si $s \in \Sigma_4$, entonces también por definición se tiene que

$$f^k(\tilde{\Lambda}(s)) = f^k\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} K_s^{(l)}\right) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} f^k(K_s^{(l)}) \subset U_{s_k}.$$

Por lo tanto $[\Lambda(\tilde{\Lambda}(s))]_k = s_k$ y entonces $\Lambda(\tilde{\Lambda}(s)) = s$. En consecuencia $\Lambda \circ \tilde{\Lambda}$ es la identidad en Σ .

Para completar la demostración del lema, notemos que $\tilde{\Lambda} \circ \Lambda$ es la función identidad en $\text{Comp}(K_f)$, directamente de la definición de Λ y de $\tilde{\Lambda}$. ■

Lema 3.2.4. $\Lambda^{-1} : \Sigma \rightarrow \text{Comp}(K_f)$ es continua.

Demostración.

Para cualquier $s = (s_0, s_1, \dots) \in \Sigma$, sea $K = \Lambda^{-1}(s)$. Si $s_n = A$ y $s_{n-1} \neq A$, entonces $K = I_{s_0} \circ I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_{n-1}}(K_{f_1})$. Ya que K es un punto aislado en $\text{Comp}(K_f)$ se tiene que Λ^{-1} es continua en s .

De manera similar, si $s_n = B$ y $s_{n-1} \neq B$, entonces Λ^{-1} es continua en s .

La parte interesante es cuando $s \in \Sigma_4$, en este caso

$$\Lambda^{-1}(s) = \bigcap_{l=1}^{\infty} K_s^{(l)}.$$

Como $K_s^{(l)} \supset K_s^{(l+1)}$ y $\Lambda^{-1}(s)$ es un conjunto de un solo punto, entonces existe $l_0 \geq 1$ tal que

$$\Lambda^{-1}(s) \subset K_s^{(l_0)} \subset \Lambda^{-1}(s)[\epsilon].$$

Proponemos $\delta = \frac{1}{2^{n(l_0)-1}}$ y consideramos $t \in \Sigma$ con $d(s, t) < \delta$. Entonces por la proposición 1.3.3 del capítulo 1,

$$t = (s_0, s_1, \dots, s_{n(l_0)-1}, s_{n(l_0)}, t_{n(l_0)+1}, \dots).$$

Tenemos dos casos para t , el primero es cuando $t \in \Sigma \setminus \Sigma_4$, por definición de $\Lambda^{-1}(t)$ se tiene que

$$\Lambda^{-1}(t) \subset K_s^{(l_0)} \subset \Lambda^{-1}(s)[\epsilon].$$

el segundo caso es cuando $t \in \Sigma_4$, por definición

$$\Lambda^{-1}(t) = \bigcap_{l=1}^{\infty} K_s^{(l)}.$$

Además como s y t coinciden en las primeras l_0 entradas entonces $K_t^{(l)} = K_s^{(l)}$ para $l = 1, 2, \dots, l_0$.

Por lo tanto también se cumple que

$$\Lambda^{-1}(t) \subset K_s^{(l_0)} \subset \Lambda^{-1}(s)[\epsilon].$$

Como $\Lambda^{-1}(s)$ es un conjunto de un solo punto, para $t \in \Sigma$ con $d(s, t) < \delta$, se tiene lo siguiente

$$d_H(\Lambda^{-1}(s), \Lambda^{-1}(t)) = \inf\{\epsilon' : \Lambda^{-1}(t) \subset \Lambda^{-1}(s)[\epsilon']\} < \epsilon.$$

Por lo tanto Λ^{-1} es continua en s . ■

Lema 3.2.5. $\Lambda \circ F = \sigma \circ \Lambda$.

Demostración.

Para $K \in \text{Comp}(K_f)$, sea $\Lambda(K) = (s_0, s_1, \dots)$. Entonces $\sigma(\Lambda(K)) = (s_1, s_2, \dots)$. Por otro lado $\Lambda(F(K)) = \Lambda(f(K)) = (s_1, s_2, \dots)$. ■

Con este último lema se concluye la prueba del teorema 3.2.2

3.2.2. Renormalización compleja

Definición 3.2.1. Decimos que la aplicación f^n es renormalizable si existen discos topológicos abiertos U y V en $\mathbb{C}$ y $f^n : U \rightarrow V$ es una función de tipo polinomial con conjunto de Julia conexo.

Una pregunta interesante es encontrar aquellos parámetros donde el Julia de un polinomio cuártico presenta copias de dos Julias cuadráticos, es decir que el cuártico admite una renormalización en la que localmente la dinámica es como un polinomio cuadrático.

En particular demostramos el siguiente resultado usando las ideas de [K2].

Teorema 3.2.3. Para cualquier par de conjuntos de Julia de polinomios cuadráticos, existe un polinomio de grado cuatro cuyo conjunto de Julia incluye copias de los dos conjuntos de Julia cuadráticos.

Es decir, dados $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

1. existe un polinomio f de grado 4,
2. existen dominios simplemente conexos acotados U_1, U_2 y V tales que $U_1 \in V$ y $U_2 \in V$,

y las funciones (f, U_1, V) y (f, U_2, V) son de tipo cuadrático e híbridamente equivalentes a los polinomios cuadráticos p_{c_1} y p_{c_2} respectivamente.

Para la demostración del teorema 3.2.3 es necesario el siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en [K2].

Lema 3.2.6. Sea $k \in \mathbb{N}$, $0 < R_1 < R_2$ y $\varphi_j(z)$ analítica en una vecindad de $|z| = R_j$ tal que $\varphi_j|_{|z|=R_j}$ da la vuelta al origen k -veces para $j = 1, 2$.

Si

$$\left| \log \left(\frac{\varphi_2(R_2 e^{iy})}{R_2^k} \cdot \frac{R_1^k}{\varphi_1(R_1 e^{iy})} \right) \right| \leq \delta_0 \quad (3.1)$$

y

$$\left| z \frac{d}{dz} \log \frac{\varphi_j(z)}{z^k} \right| \leq \delta_1, \quad z = R_j e^{iy}, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

se cumplen para cada $y \in [0, 2\pi]$ y para algunas constantes $\delta_0, \delta_1 > 0$ que satisfacen

$$C = 1 - \frac{1}{k} \left(\frac{\delta_0}{\log \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} + \delta_1 \right) > 0, \quad (3.3)$$

entonces existe una función cuasiregular

$$H : \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leq |z| \leq R_2\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

sin puntos críticos tal que $H = \varphi_j$ en $|z| = R_j$ para $j = 1, 2$ y satisface que

$$K_H \leq \frac{1}{C}.$$

Notación.

Sea $R > r > 0$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{C}$.

- 9 $p_c(z) = z^2 + c$
- $q_c(z) = \frac{p_c(Az)}{A} = Az^2 + \frac{c}{A}$
- $h(z) = z^4 - 2R^4 z^2 + R^8$
- $h_1(z) = h(z - R^2) + R^2 = z^4 - 4R^2 z^3 + 4R^4 + R^2$

- $h_2(z) = h(z + R^2) - R^2 = z^4 + 4R^2z^3 + 4R^4 - R^2$
- $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$
- $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + R^2| = r\}$
- $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - R^2| = r\}$.

El polinomio cuadrático q_c es afínmente conjugado al polinomio p_c . Los polinomios cuárticos h_1 y h_2 son afínmente conjugados a h . Los puntos críticos de h son 0 y $\pm R^2$. En efecto: $h'(z) = 4z^3 - 4R^4z$, así $h'(z) = 0$ implica que $4z^3 - 4R^4z = 0$, factorizamos o tenemos que $z(4z^2 - 4R^4) = 0$ cuya solución es $z = 0$ y $z = \pm R^2$. Por lo tanto los puntos críticos de h_1 son 0, R^2 y $2R^2$. Similarmente los puntos críticos de h_2 son 0, $-R^2$ y $-2R^2$. Por cuestiones de conveniencia nos ocupamos de los polinomios cuárticos h_1 y h_2 simultaneamente como

$$h_*(z) = z^4 \mp 4R^2z^3 + 4R^4 \pm R^2.$$

Notemos que si R es suficientemente grande la órbita crítica $h^n(0) = h^{n+1}(\pm R^2)$ tiende a infinito. Por lo tanto, $G(0)$ y $G(\pm R^2)$ son positivos, donde G es la función de Green asociada al Julia lleno K_h . Dado que las preimágenes del valor crítico $R^8 = h(0)$ son 0 y $\pm\sqrt{2}R^2$, entonces la curva equipotencial $\Phi = G^{-1}(G(0))$ es una figura en forma de ocho a través de 0 y $\pm\sqrt{2}R^2$. Además es simétrica con respecto al origen ya que h es par. Ya que los puntos críticos $\pm R^2$ son las preimágenes del punto crítico 0, tenemos que la curva equipotencial $G^{-1}(G(R^2)) = G^{-1}(G(-R^2))$ tiene dos componentes Θ_1 y Θ_2 que son cuadrifolios congruentes (de cuatro hojas) con centro en R^2 y $-R^2$, respectivamente. Los cuadrifolios Θ_1 y Θ_2 son rodeados por la forma de ocho de Φ . Como la órbita crítica $h^n(0) = h^{n+1}(\pm R^2) \rightarrow \infty$ para R suficientemente grande, el conjunto de Julia es totalmente disconexo y está rodeado de $\Theta_1 \cup \Theta_2$, [K2].

Demostración del teorema 3.2.3.

Tomando $r = \frac{R}{2}$ y $A = 4R^4$, para R suficientemente grande se cumplen las hipótesis del lema 3.2.6 por lo que existen funciones quasiregulares

$$H_j : \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2} \leq |z| \leq R \right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2,$$

sin puntos críticos tales que

$$H_j = q_{c_j} \text{ en } |z| = \frac{R}{2} \text{ y } H_j = h_j \text{ en } |z| = R$$

y satisfacen

$$K_{H_j} \leq \frac{1}{C} = 2 \text{ para } j = 1, 2.$$

Tomamos R suficientemente grande tal que Γ rodea a los conjuntos de Julia llenos $K_{q_{c_1}}$ y $K_{q_{c_2}}$. Definimos una función cuasiregular como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} q_{c_1}(z + R^2) - R^2 & \text{en } |z + R^2| \leq \frac{R}{2}, \\ H_1(z + R^2) - R^2 & \text{en } \frac{R}{2} \leq |z + R^2| \leq R, \\ q_{c_2}(z - R^2) + R^2 & \text{en } |z - R^2| \leq \frac{R}{2}, \\ H_2(z - R^2) + R^2 & \text{en } \frac{R}{2} \leq |z - R^2| \leq R, \\ h(z) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hay que verificar que se cumplen las hipótesis del teorema de cirugía cuasi-conforme 3.1.1.

Sea

$$E_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2} \leq |z + R^2| \leq R \right\}$$

y

$$E_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2} \leq |z - R^2| \leq R \right\}.$$

Si R es suficientemente grande, entonces

$$E_1 \cup E_2 \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R^3\}.$$

Para $z = re^{iy} \mp R^2 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |q_{c_j}(z \pm R^2) \mp R^2| = |4R^4(z \pm R^2)^2 + \frac{c_j}{4R^4} \mp R^2| \\ &\geq \left| 4R^4 \left(\frac{R^2}{4} e^{2iy} \right) + \frac{c_j}{4R^4} \mp R^2 \right| \\ &\geq R^6 - \frac{|c_j|}{4R^4} - R^2 > R^3 > 1 + \sqrt{1 + R^4}. \end{aligned}$$

Esto indica que

$$g(E_1 \cup E_2) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > R^3\}$$

y la órbita de cualquier punto en $E_1 \cup E_2$ bajo g tiende a infinito, lo cual implica que la hipótesis (1) del teorema 3.1.1 se cumple. Además, las hipótesis (2), (3) y (4) del teorema 3.1.1 se cumplen de manera inmediata por la definición de g . Por lo tanto existe una función 4-cuasiconforme $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es una función entera de grado 4, por lo tanto f es un polinomio cuártico.

Normalizamos φ de tal manera que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Entonces los puntos críticos finitos de f son 0 y $\varphi(\pm R^2)$.

Sean U_1 y U_2 las componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus G^{-1}(G(0))$ tales que

$\varphi(-R^2) \in U_1$ y $\varphi(R^2) \in U_2$, donde $G = G_f$ es la función de Green asociada al conjunto de Julia lleno K_f .

Si llamamos V a la componente acotada de $G^{-1}(G(f(0)))$, entonces $(f|_{U_1}, U_1, V)$ y $(f|_{U_2}, U_2, V)$ son funciones tipo cuadráticos.

Por el teorema de rectificación 3.1.2 la función tipo cuadrática $(f|_{U_j}, U_j, V)$ es híbridamente equivalente al polinomio cuadrático q_{c_j} , que a su vez es afínmente conjugado al polinomio cuadrático p_{c_j} para $j = 1, 2$. ■

Un resultado inmediato es el siguiente:

Corolario 3.2.1. *Si c_1 y c_2 pertenecen al conjunto de Mandelbrot, entonces el polinomio cuártico obtenido en el teorema 3.2.3 satisface las hipótesis del teorema 3.2.2*

Demostración.

Sea $c_1 = \varphi(-R^2)$, $c_2 = \varphi(R^2)$ y $c_3 = 0$. Si c_1 y c_2 pertenecen al conjunto de Mandelbrot, los conjuntos de Julia lleno $K_{f|_{U_1}}$ y $K_{f|_{U_2}}$ son conexos. Además, $c_1 \in K_{f|_{U_1}} \subset K_f$ y $c_2 \in K_{f|_{U_2}} \subset K_f$, esto implica que el $A-B$ itinerario principal de c_1 es $(AAA \dots)$ y el $A-B$ itinerario principal de c_2 es $(BBB \dots)$. Como $c_1, c_2 \in K_f$ y $f^n(0) = f^n(c_3) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, el conjunto de Julia J_f es desconexo pero no totalmente desconexo.

Por lo tanto el polinomio cuártico obtenido en el teorema 3.2.3 satisface las hipótesis del teorema 3.2.2. ■

Para terminar este capítulo daremos algunos ejemplos en donde se cumplen los teoremas 3.2.2 y 3.2.3 para esto trabajaremos con la familia cuártica

$$P_a(z) = \frac{a(z+2)^2(3z^2 - 8z + 8)}{3} - 2, \quad a, z \in \mathbb{C}.$$

Note que $P'_a(z) = 4az^3 + 4az^2 - 8az$, resolviendo $P'_a(z) = 0$ se obtiene que los puntos críticos de $P_a(z)$ son -2 , 0 y 1 . Por lo que estos puntos críticos no dependen del parámetro a . Además se ve claramente que el punto crítico -2 es un punto fijo de P_a , por lo tanto P_a siempre tendrá la dinámica de un punto fijo super atractor.

Recordemos que el Julia lleno K_f de un polinomio f es conexo si y sólo si, cada una de las órbitas de los puntos críticos es acotada.

Debido a que -2 es un punto fijo su órbita siempre es acotada independientemente del valor de a , de esta manera para determinar el lugar de conexidad, hay que checar para qué valores de a , la órbita del 1 y la del 0 son acotadas simultáneamente.

En la figura 3.7 se muestra el espacio de parámetros para los cuales la órbita del punto crítico 0 es acotada y en la figura 3.8 se muestra el espacio de parámetros donde la órbita de 1 es acotada. En la figura 3.9 se muestra el lugar de conexidad de P_a , es decir, la órbita de cada uno de los puntos críticos de P_a es acotada.

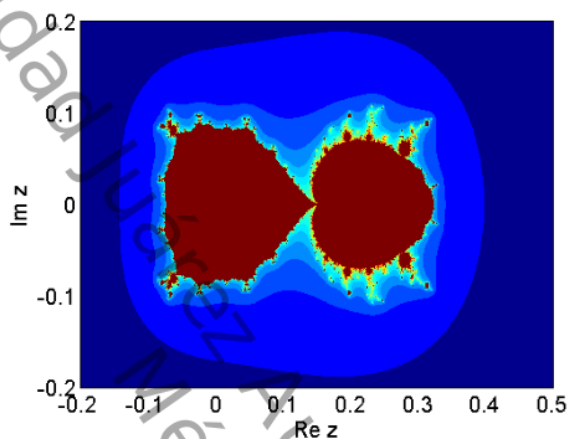


Figura 3.7: Espacio de parámetro cuando la órbita del cero es acotada.

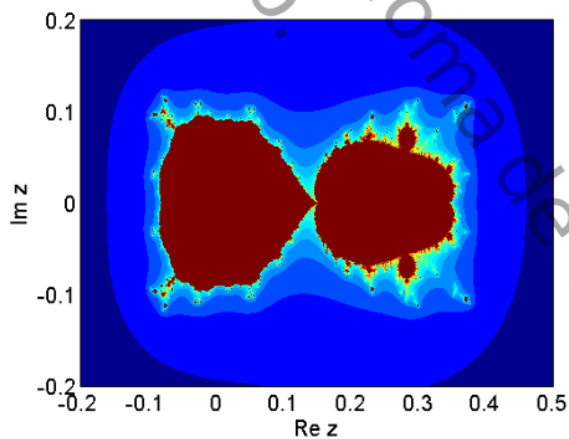
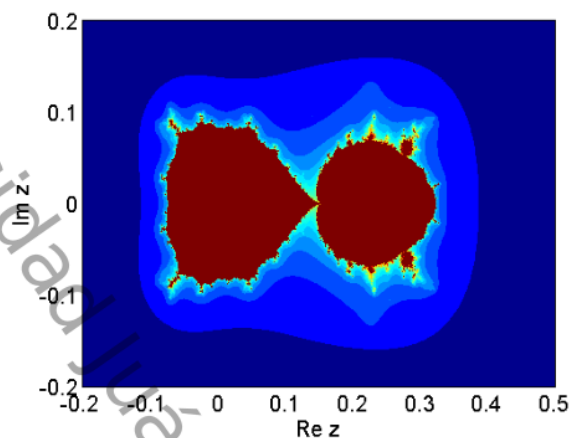


Figura 3.8: Espacio de parámetro cuando la órbita del uno es acotada.

Figura 3.9: Lugar de conexidad de P_a .

Como queremos que se cumplan las hipótesis del teorema 3.2.2 entonces dos de los puntos críticos de P_a deben tener órbita acotada y uno no acotada. Se observa en las figuras 3.7 y 3.8 que sí existen parámetros en los cuales la órbita del crítico 0 es acotada y la órbita del 1 no es acotada, cuando esto pasa, se tiene que el Julia de P_a es desconexo pero no totalmente desconexo. A continuación daremos algunos parámetros en donde se cumplen las hipótesis del teorema 3.2.2. Además se podrá observar que el Julia cuártico de P_a incluye copias de dos Julias cuadráticos como lo menciona el teorema 3.2.3.

Si el parámetro es $a = 0.32 + 0.03i$, entonces coexisten un punto fijo atractor y un super atractor (véase la figura 3.10).

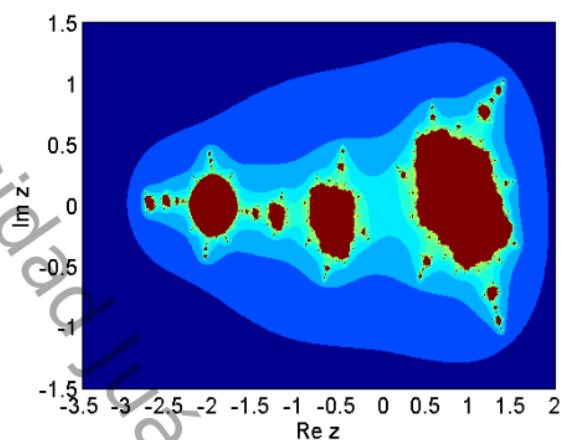


Figura 3.10: Julia de P_a con $a = 0.32 + 0.03i$.

Si el parámetro es $a = 0.2821014054 + 0.07080539396i$, entonces coexisten dos superatractores uno fijo y otro de periodo dos (véase la figura 3.11).

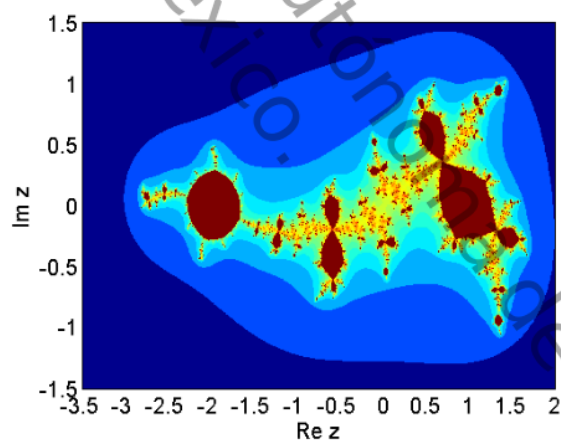


Figura 3.11: Julia de P_a con $a = 0.2821014054 + 0.07080539396i$.

Si el parámetro es $a = 0.3452797503 + 0.03640107983i$, entonces coexisten dos superatractores uno fijo y otro de periodo tres (ver figura 3.12).

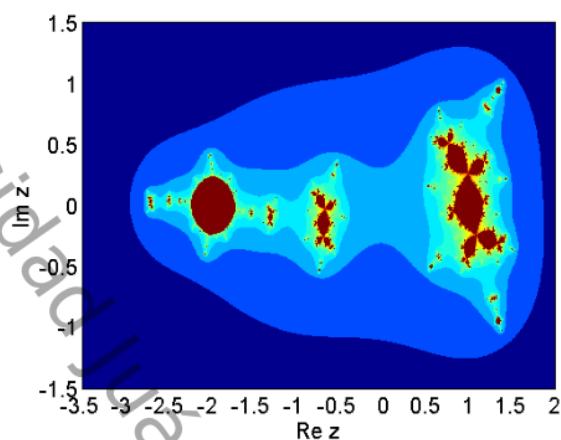


Figura 3.12: Julia de P_a con $a = 0.3452797503 + 0.03640107983i$.

Si el parámetro es $a = \frac{1}{3} + \frac{83}{2000}i$, entonces coexisten dos superatractores uno fijo y otro de periodo siete (véase la figura 3.13).

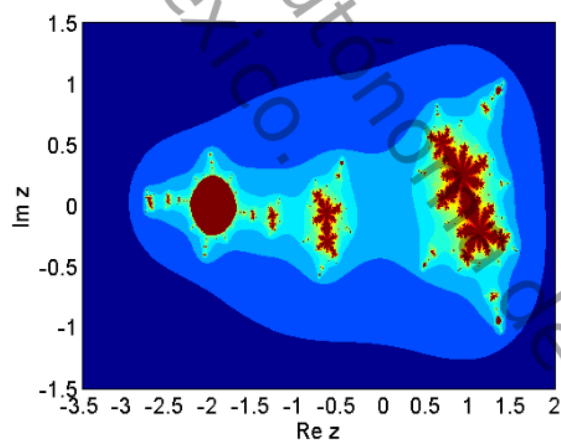


Figura 3.13: Julia de P_a con $a = \frac{1}{3} + \frac{83}{2000}i$.

Si el parámetro es $a = 0.34473$, entonces coexisten dos puntos fijos, un superatractor y un parabólico (ver figura 3.14).

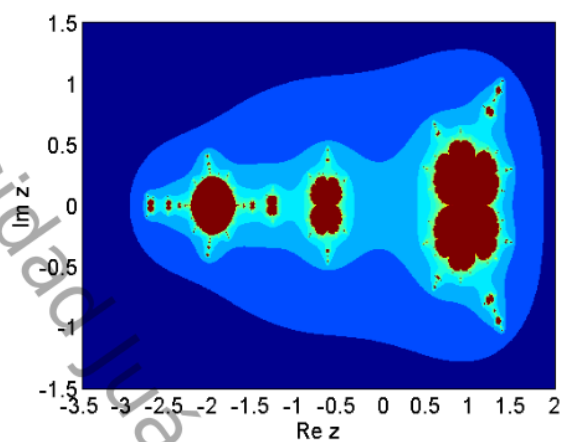


Figura 3.14: Julia de P_a con $a = 0.34473$.

Conclusión

En el caso real pudimos determinar intervalos restrictivos de periodo 3, 5 y 7 para la familia de polinomios cuárticos $f_b(x) = bx^2 + x^4$, $b, x \in \mathbb{R}$. En estos intervalos restrictivos, f_b^3 , f_b^5 y f_b^7 , son funciones renormalizables y se pueden ver en el intervalo como funciones unimodales. En consecuencia, tienen un comportamiento cuadrático. Más aún se genera toda una familia completa de funciones unimodales cuando se varía ligeramente el parámetro, alrededor de aquellos parámetros en donde se tienen los intervalos restrictivos. En el caso complejo utilizamos la familia de polinomios cuárticos, analizada por Katagata,

$$P_a(z) = \frac{a(z+2)^2(3z^2-8z+8)}{3} - 2, \quad a, z \in \mathbb{C}.$$

En este caso, se muestra que cualesquiera dos dinámicas cuadráticas se pueden obtener vía renormalización de un polinomio cuártico. Mostramos a través de ejemplos, algunos polinomios cuárticos con dinámicas cuadráticas especiales.

Bibliografía

- [Be] ¹⁹ A. Beardon, *Iteration of Rational Functions*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [Bl] ⁶ P. Blanchard, *Disconnected Julia sets*, chaotic dynamics and fractals, Notes Rep. Math. Sci. Engrg., Academic Press, Orlando, FL, 2 (1986), 181-201.
- [BN] B. Branner and N. Fagella, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*. (2014).
- [R] R. Clark Robinson, *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. American Mathematical Society, 2012.
- [CG] L. Carleson and T. Gamelin, *Complex Dynamics*. Springer Verlag, New York, 1993.
- [D] ¹⁷ R. Devaney, ¹² *first course in chaotic dynamical systems theory and experiment*. Springer Verlag, New York, 1992.
- [dMvS] W. de Melo, S. J. van Strien (1993), *One-dimensional dynamics*, Springer, Berlin.
- [AD] A. Dold (1972), *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag.
- [D1] ² A. Douady, *Systèmes Dynamiques Holomorphes*. Séminaire Bourbaki, 35^e année. **599**, Astérisque 105-106 (1982), 39-63.
- [DH1] ² A. Douady and J. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication Mathématiques d'Orsay. **84-02**, (1984); **85-04**, (1985).
- [DH2] A. Douady and J. Hubbard, *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **18**, (1985), 287-344.
- [G1] J. Guckenheimer, G. Oster, A. Ipaktchi, (1977), *The dynamics of density dependent population models*. *J. Math. Biol.* 4, no. 2, 101-147.

- [G2] J. Guckenheimer; S. Johnson, *Beyond hyperbolicity: expansion properties of one-dimensional mappings*. From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest (Berkeley, CA, 1990), 227–236, Springer, New York, 1993.
- [K1] K. Katagata, *On a certain kind of polynomials of degree 4 with disconnected Julia set*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20 (2008), 975–987.
- [K2] K. Katagata, *Quartic julia sets including any two copies of quadratic julia sets*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 36 (2016), 2103–2112.
- [KSh] M. Kisaka and M. Shishikura, *On multiply connected wandering domains of entire functions*, *Transcendental dynamics and complex analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 348 (2008), 217–250.
- [KS] M. Kot, W.M. Schaffer, *The effects of seasonality on discrete models of population growth*, *Theor. Pop. Biol.* 26, (1984), 340–360.
- [L] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials, I-II*, *Acta Mathematica*. **178**, (1997), 185–297.
- [M] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, *Nature* **261**, 459–467 (1976).
- [M1] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*. Third edition. Annals of Math. Studies. **160**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [MT] J. Milnor and W. Thurston (1977), *On iterated maps of the interval: I,II*. Preprint Princeton. Published in: *Dynamical Systems: Proc. Univ. of Maryland 1986-87*, (1988), *Lect. Notes in Math.*, vol. 1342. Springer, Berlin New York, pp. 465–563.
- [TY] Tan, Lei y Yin, Yongcheng, *Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps*. *Sci. China Ser. A* 39 (1996), no. 1, 39–47.
- [YZ] M. Yampolsky and S. Zakeri, *Mating Siegel quadratic polynomials*, *J. Amer. Math. Soc.*, 14 (2001), 25–78.

FAMILIAS COMPLETAS Y RENORMALIZACIÓN EN LOSPOLINOMIOS CUÁRTICOS

ORIGINALITY REPORT

6%

SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	epdf.tips Internet	560 words — 2%
2	ri.ujat.mx Internet	179 words — 1%
3	es.scribd.com Internet	96 words — < 1%
4	www.math.shimane-u.ac.jp Internet	92 words — < 1%
5	zr9558.files.wordpress.com Internet	69 words — < 1%
6	persianney.com Internet	31 words — < 1%
7	www.aimsclences.org Internet	29 words — < 1%
8	sociedadmatematicamexicana.org.mx Internet	26 words — < 1%
9	Koh Katagata. "Entire functions whose Julia sets include any finitely many copies of quadratic Julia sets", Nonlinearity, 2017	18 words — < 1%

-
- 10 ouci.dntb.gov.ua 17 words — < 1%
Internet
-
- 11 www.emis.ams.org 17 words — < 1%
Internet
-
- 12 Giulio Tiozzo. "Topological entropy of quadratic polynomials and dimension of sections of the Mandelbrot set", *Advances in Mathematics*, 2015
Crossref 16 words — < 1%
-
- 13 Kigami, J.. "Some predictability in one-dimensional chaotic dynamical systems arising in population models", *Advances in Applied Mathematics*, 198506
Crossref 16 words — < 1%
-
- 14 c.coek.info 16 words — < 1%
Internet
-
- 15 Chavez Bedoya Mercado, Luis Carlos. "Procesos de Levy: Propiedades e integracion estocastica.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020
ProQuest 14 words — < 1%
-
- 16 Baptista, Alexandra Cristina Ferros dos Santos Nascimento. "Sistemas Dinâmicos Discretos em álgebras.", *Universidade de Evora (Portugal)*, 2024
ProQuest 13 words — < 1%
-
- 17 Javier Rodríguez, Leonardo Juan Ramírez López, Gabriel Puerta. "Simulación de la dinámica cardiaca en estado agudo", *Acta Colombiana de Cuidado Intensivo*, 2021
Crossref 12 words — < 1%

18	Jeremy T. Tyson. Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society, 2001 Crossref	12 words — < 1%
19	mtaylor.web.unc.edu Internet	12 words — < 1%
20	v.vibdoc.com Internet	12 words — < 1%
21	Welington Melo, Sebastian Strien. "One-Dimensional Dynamics", Springer Science and Business Media LLC, 1993 Crossref	11 words — < 1%
22	silوtips Internet	11 words — < 1%
23	sitios.vtte.utem.cl Internet	11 words — < 1%
24	documentop.com Internet	10 words — < 1%
25	hdl.handle.net Internet	10 words — < 1%
26	vdocuments.site Internet	10 words — < 1%
27	cathi.uacj.mx Internet	9 words — < 1%
28	ddd.uab.cat Internet	9 words — < 1%

29	www.branchingnature.org Internet	9 words — < 1%
30	www.ma.imperial.ac.uk Internet	9 words — < 1%
31	www.sigma-mathematics.de Internet	9 words — < 1%
32	Ferrer Reyna, Marcos Enrique. "Existencia de soluciones periodicas de una ecuacion hamiltoneana asintoticamente lineal.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020 ProQuest	8 words — < 1%
33	Zapata Revoredo, Lily Fanny. "Representacion de preferencias por funciones de utilidad continuas.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020 ProQuest	8 words — < 1%
34	docplayer.es Internet	8 words — < 1%
35	fpsac-archive.github.io Internet	8 words — < 1%
36	qdoc.tips Internet	8 words — < 1%
37	Ján Herchl, Danica Jakubíková-Studenovská. "Globals of unary algebras", Soft Computing, 2007 Crossref	6 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES OFF
EXCLUDE BIBLIOGRAPHY OFF

EXCLUDE SOURCES OFF
EXCLUDE MATCHES OFF