



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



GRUPOS KLEINIANOS Y  
EL DICCIONARIO DE SULLIVAN

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

FIDADELFO MONDRAGÓN SÁNCHEZ

DIRECTORES

DR. MIGUEL ANGEL DE LA ROSA CASTILLO,

DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

CUNDUACÁN, TAB.

SEPTIEMBRE 2018



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División  
Académica  
de Ciencias  
Básicas



DIRECCIÓN

31 de agosto de 2018

**Lic. Fidadelfo Mondragón Sánchez**

Pasante de la Maestría en Ciencias Matemáticas  
Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**Grupos Kleinianos y el diccionario de Sullivan**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.



DIVISIÓN ACADÉMICA DE  
CIENCIAS BÁSICAS

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón  
Director

C.c.p.- Archivo  
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

Miembro CUMEX desde 2008  
Consortio de  
Universidades  
Mexicanas  
UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.  
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

## CARTA DE AUTORIZACIÓN

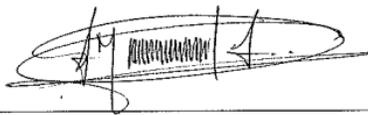
El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría denominada "*Grupos Kleinianos y el Diccionario de Sullivan*", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 15 días del mes de septiembre del año 2018.

AUTORIZÓ



---

LIC. FIDAFELFO MONDRAGÓN SÁNCHEZ.  
162A21002.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos	1
1.1.1. Grupos Topológicos Discretos en $SL(2, \mathbb{C})$	2
1.1.2. Grupos Discretos	2
1.2. Esfera de Riemann	4
1.3. Espacio de Transformaciones de Möbius	5
1.3.1. Clasificación de Transformaciones de Möbius	6
1.4. Geometría Hiperbólica	11
1.4.1. Métrica hiperbólica	12
1.4.2. Geodésicas	14
<b>2. Grupos Kleinianos</b>	<b>17</b>
2.1. Acción Discontinua	17
2.1.1. G-paquetes	21
2.1.2. Superficies de Riemann como Cocientes	23
2.2. Grupos Fuchsianos	27
2.2.1. Dominios Fundamentales	28
2.2.2. Región de Dirichlet	30
2.3. Grupos Kleinianos en $\mathbb{H}^3$	34
<b>3. Dinámica de Funciones Racionales</b>	<b>37</b>
3.1. Dinámica de las Transformaciones de Möbius	39
3.2. Conjuntos de Julia y Fatou	41
3.2.1. Propiedades de los Conjuntos de Julia y Fatou	45
3.2.2. Teorema de Clasificación de Fatou	53
<b>4. Diccionario de Sullivan</b>	<b>55</b>
4.1. Teorema de Sullivan	55
4.1.1. Aplicaciones del Teorema de Sullivan	55
4.2. Teorema de Ahlfors	58
4.2.1. Aplicaciones del Teorema de Ahlfors	59

ÍNDICE GENERAL

---

i

4.3. Propiedades del Dicionario . . . . .	60
4.4. Conclusiones . . . . .	63
<b>A. Aplicaciones Cuasiconformes</b>	<b>64</b>
<b>B. Demostración del Teorema de Sullivan</b>	<b>66</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# Agradecimientos

---

A Dios, por haberme dado la vida, haber permitido concluir una etapa más de mi vida profesional.

A mis padres<sup>45</sup> que sabiendo orientar y conducir mis pasos, me han inculcado el deseo de servicio y superación en todos los aspectos de la vida. Gracias por su apoyo incondicional, económico y moral.

A mis hermanos, por su apoyo, comprensión y por estar conmigo en situaciones difíciles. A mi novia por su amor y comprensión. A mis amigos con quienes he compartido momentos inolvidables.

Al Dr. Miguel Angel De la Rosa Castillo, profesor investigador del CONACyT-UJAT, por la dirección de este proyecto de tesis, por haberme regalado muchas horas de su valioso tiempo para la comprensión de los temas que forman parte de este proyecto de tesis y dado sugerencias en la redacción de la misma.

Al Dr. Gamaliel Blé González, profesor investigador de la División Académica de Ciencias Básicas de la UJAT, por formar parte en la dirección de esta tesis, haberme regalado su valioso tiempo en la comprensión y revisión de los temas que forman parte de este proyecto de tesis.

A los profesores investigadores: Dr. Francisco Eduardo Castillo Santos, Dr. Miguel Angel De la Rosa Castillo, Dr. Gamaliel Blé González, Dr. Jair Remigio Juárez, quienes me han formado con los cursos del plan de estudios de la maestría, y me han proporcionado los conocimientos necesarios para la comprensión del tema de tesis.

A la División Académica de Ciencias Básicas (DACB), de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), por haberme acogido como estudiante para cursar la Maestría en Ciencias Matemáticas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca de manutención que me otorgó para cursar la Maestría en Ciencias Matemáticas, durante el período agosto 2016 - julio 2018.

¡A todos ellos, mil gracias!

# Introducción

La geometría hiperbólica ha retomado importancia en las últimas décadas, gracias a su relación en otras áreas de la matemática. A principio de los años ochenta, William Thurston revolucionó la topología al mostrar que la geometría hiperbólica es una poderosa herramienta en el estudio de las variedades de dimensión tres y los nudos, [T]. Posteriormente Dennis Sullivan y Curtis McMullen, encontraron un importante paralelismo entre la geometría hiperbólica y los sistemas dinámicos, lo cual se hace patente al observar la asombrosa similitud que existe entre el conjunto límite de un grupo kleiniano y el conjunto de Julia de una función racional, [B, M, McM]. Recientemente se han probado importantes resultados sobre grupos aritméticos kleinianos, que vinculan la teoría de números, la topología y la geometría hiperbólica, [MR].

En este trabajo estudiaremos las propiedades de los conjuntos límites de los grupos kleinianos y las compararemos con las que tiene el conjunto de Julia de una función racional. Para alcanzar este objetivo, en el *capítulo 1*, mencionamos algunos resultados de la teoría de grupos discretos en el grupo especial lineal, la geometría de las transformaciones de Möbius y la geometría hiperbólica bidimensional. En el *capítulo 2*, mencionamos la noción de grupos kleinianos, el concepto de acción discontinua, de la cual se obtienen el conjunto límite y el dominio de discontinuidad, los cuales tienen propiedades topológicas interesantes, que se pueden apreciar en los teoremas 2.12 y 2.15. Además en el teorema 2.26, se menciona que a través de la acción discontinua de un subgrupo de transformaciones de Möbius, en un subdominio de la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$  que sea invariante bajo la acción del grupo, módulo el subgrupo, siempre se obtiene una superficie de Riemann. Más adelante se estudian algunas propiedades de las regiones fundamentales para un grupo fuchsiano, específicamente se considera el grupo modular y en el teorema 2.39 se muestra un dominio fundamental para este grupo. En el *capítulo 3*, se hace un estudio de la dinámica de funciones racionales, y con el objetivo de obtener propiedades interesantes, se consideran aquellas aplicaciones racionales de grado al menos dos. En este sentido se define el conjunto de Fatou de una función racional, como el conjunto de puntos donde la familia de funciones racionales obtenidas por composición consigo mismo localmente es normal, al complemento del conjunto de Fatou, se le llama conjunto de Julia. Los teoremas 3.29, 3.32, 3.36, presentan algunas propiedades del conjunto de Julia. Por otra parte, los teoremas 3.41, 3.48, 3.45, describen algunas propiedades del conjunto de Fatou. Una componente de Fatou, se puede clasificar a través del teorema 3.47. En el *capítulo 4*, mencionamos, primero el teorema (dominios no errantes de Sullivan) 4.1, el cual establece que no existen componentes errantes de Fatou para una aplicación racional de grado al menos dos. Como consecuencia de este resultado, las propiedades del punto crítico y el teorema (clasificación de Fatou) 3.47, se obtiene el teorema 3.38,

el cuál permite construir ejemplos de funciones racionales cuyo conjunto de Julia es toda la esfera. Enseguida mencionamos el teorema de finitud de Ahlfors 4.4, el cual establece que el cociente entre el dominio de discontinuidades y el grupo, es una superficie de Riemann analíticamente finita. Como consecuencia de éste se tiene el corolario 4.6, el cual menciona que el dominio de discontinuidades no tiene componentes errantes. Así existe un importante paralelismo entre el teorema de Sullivan y el teorema de Ahlfors. Por último, mencionamos algunas propiedades del conjunto límite de un grupo kleiniano, y del conjunto de Julia de una función racional, y de sus complementos en la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$ . En este sentido hacemos una comparación de sus propiedades las cuales se aprecian en los teoremas 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 y son parte del diccionario de Sullivan.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

---

# Capítulo 1

## Preliminares

---

A lo largo de este capítulo, estableceremos resultados y propiedades básicas de: grupos, espacios topológicos, geometría hiperbólica bidimensional, entre otros, que se utilizarán en los capítulos posteriores.

### 1.1. Grupos

En esta sección damos algunos resultados básicos sobre acciones de grupos y matrices de tamaño dos por dos con entradas en el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , los resultados aquí presentados están basados en [B].

**Definición 1.1.** Sea  $G$  un grupo,  $X$  un conjunto no vacío. Diremos que  $G$  actúa en  $X$ , si existe una función  $\phi: G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  que cumple las siguientes condiciones:

- 1)  $e \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$ , donde  $e$  es el neutro en  $G$ .
- 2)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ , para todo  $g, h \in G, x \in X$ .

En estas condiciones, definimos los siguientes conceptos: para cada elemento  $x \in X$ , el estabilizador de  $x$  es  $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ , que es un subgrupo de  $G$ . La órbita de  $x$  es  $G(x) := \{g \cdot x : g \in G\}$ .

**Definición 1.2.** Sea  $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$  una familia de subgrupos de un grupo, ajenos dos a dos, es decir, si  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $G_\alpha \cap G_\beta = \{e\}$ . El producto libre de los grupos  $G_\alpha$  es el grupo  $G$  generado por la unión  $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , de tal manera que todo  $g \in G$  distinto de  $e$ , puede expresarse de manera única como el producto de un número finito de elementos de los grupos  $G_\alpha$ ,

$$g = g_1 \cdots g_n, \quad g_k \in G_{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

tal que  $g_k \neq e$ , para toda  $k$  y  $G_{\alpha_k} \neq G_{\alpha_{k+1}}$ . A la expresión  $g \in G$  se le llama forma irreducible de  $g$ .

### 1.1.1. Grupos Topológicos Discretos en $SL(2, \mathbb{C})$

Si  $A$  es una matriz de tamaño dos por dos con entradas en los complejos,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces:

- 1) La traza de  $A$  es  $\text{tr}(A) = a + d$ .
- 2) El determinante de  $A$  es  $\det(A) = ad - bc$ .
- 3) La transpuesta conjugada de  $A$  es la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

El conjunto de todas las matrices  $A$  de tamaño dos por dos tales que  $\det(A) \neq 0$ , es el grupo general lineal de tamaño dos por dos, el cual es denotado por  $GL(2, \mathbb{C})$ .

**Proposición 1.3.** Si  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ , entonces

1.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,
2.  $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}(A)$ ,
3.  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
4.  $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$ , donde  $A^t$  es la transpuesta de  $A$ .
5.  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*) = a_1\bar{a}_2 + b_1\bar{b}_2 + c_1\bar{c}_2 + d_1\bar{d}_2$ , define un producto escalar.
6.  $\sqrt{\langle A, A \rangle}$ , define una norma en  $GL(2, \mathbb{C})$ , que la denotamos por  $\|A\|$ .
7.  $\|A - B\|$ , define una métrica en  $GL(2, \mathbb{C})$ .

El conjunto de todas las matrices  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  tales que  $\det(A) = 1$ , es el grupo especial lineal, denotado por  $SL(2, \mathbb{C})$ . Como  $GL(2, \mathbb{C})$  es un grupo, es evidente que  $SL(2, \mathbb{C})$  es un subgrupo.

### 1.1.2. Grupos Discretos

**Definición 1.4.** Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto, si para cualquier sucesión de matrices  $\{A_n\}$  en  $G$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $A_n = A$ , para toda  $n \geq N$ .

**Proposición 1.5.** Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y sólo si para toda  $k \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $F = \{A \in G : \|A\| \leq k\}$  es finito.

*Demostración.* Supongamos que el conjunto  $F = \{A \in G : \|A\| \leq k\}$  es finito, como la función norma es continua, se sigue que  $G$  no puede tener ningún punto límite y así  $G$  es discreto.

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Supongamos que el conjunto  $F$  es infinito, es decir existen elementos distintos  $A_n \in F$  tales que  $\|A_n\| \leq k$ . Si  $A_n$  tiene entradas  $a_n, b_n, c_n, d_n$ , se sigue que  $|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n| \leq k$ , así las sucesiones  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$  tienen una subsucesión convergente. Usando el proceso de la diagonal, se tiene que existe una subsucesión que converge a cada entrada y así la sucesión  $A_n$  converge a  $A$ , donde las entradas de  $A$  son los límites de las subsucesiones. Ahora como la función determinante es continua se sigue que  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , luego  $G$  no es discreto. ◀

Como consecuencia inmediata de la proposición 1.5, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.6.** Si  $G$  es un subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$  discreto, entonces  $G$  es a lo más numerable.

**Definición 1.7.** Un grupo topológico es un grupo  $G$ , dotado con una topología tal que:

1. Si consideramos el grupo  $G \times G$  con la topología producto, entonces la función  $g : G \times G \rightarrow G$ , dada por  $g(x, y) = xy$ , es continua.
2. La función  $h : G \rightarrow G$ , dado por  $h(x) = x^{-1}$ , es continua.

El siguiente resultado caracteriza el concepto de grupo topológico.

**Teorema 1.8.** Sea  $G$  un grupo y  $\tau$  una topología en  $G$ . Entonces  $G$  es un grupo topológico si y sólo si la función  $f : G \times G \rightarrow G$ , dada por  $f(x, y) = xy^{-1}$ , es continua.

**Definición 1.9.** Un isomorfismo de grupos topológicos, es una función que cumple ser un isomorfismo de grupos y homeomorfismo entre espacios topológicos.

Se puede verificar que  $SL(2, \mathbb{C})$  es un grupo topológico, pues la función  $(A, B) \mapsto AB^{-1}$  es continua. Como dos grupos conjugados son isomorfos (de hecho, homeomorfos como grupos topológicos), se tiene el siguiente un resultado, como consecuencia de la proposición 1.5.

**Proposición 1.10.** Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $SL(2, \mathbb{C})$ , entonces cualquier subgrupo conjugado a  $G$  en  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto.

**Proposición 1.11.** Sea  $G$  un grupo topológico. Si  $\phi, \psi : G \rightarrow G$  están definidas como  $\phi(x) = xax^{-1}$  y  $\psi(x) = xax^{-1}a^{-1}$ , donde  $a \in G$ . Entonces  $\phi^n(x) = \psi^n(x)a$ .

*Demostración.* Para  $n = 1$ , la afirmación es clara. Supongamos la validez de la afirmación para  $n$  y veamos que se cumple para  $n + 1$ . En efecto,

$$\phi^{n+1}(x) = \phi(\psi^n(x)a) = (\psi^n(x)a)a(\psi^n(x)a)^{-1} = \psi^{n+1}(x)a.$$

◀

**Definición 1.12.** Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Diremos que  $H$  es un subgrupo topológico, si es un grupo topológico con la topología que hereda de  $G$ .

**Teorema 1.13.** Sea  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Entonces, el grupo cociente  $G/H$  con la estructura usual, es un grupo topológico.

**Proposición 1.14.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una función suprayectiva,  $\mathcal{T}$  la topología en  $Y$  y  $\mathcal{T}_f$  la topología cociente en  $Y$  inducida por  $f$ .

- 1) Si  $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es continua, entonces  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$ .
- 2) Si  $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es continua y abierta, entonces  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es continua. Si  $V$  es un abierto en  $\mathcal{T}$ , entonces  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$  y así  $V$  es abierto en  $\mathcal{T}_f$ . Si además  $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es una función abierta, como  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , con  $V \in \mathcal{T}_f$ . Luego  $f(f^{-1}(V))$  es abierto en  $\mathcal{T}$ . Como  $f$  es suprayectiva,  $f(f^{-1}(V)) = V$ , por lo que  $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}$ . ◀

## 1.2. Esfera de Riemann

Sea  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la esfera de Riemann. Consideremos la esfera unitaria de dimensión dos  $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$  con la topología del subespacio inducida por  $\mathbb{R}^3$ . Identificando  $\hat{\mathbb{C}}$  con  $\hat{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . La función *proyección estereográfica*  $\pi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  definida por

$$\pi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right), \quad \pi(\infty) = (0, 0, 1),$$

es un difeomorfismo que preserva tanto ángulos como orientación y permite considerar  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{S}^2$ .

La proyección estereográfica  $\pi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  nos permite transferir la métrica eucldeana de  $\mathbb{S}^2$  a  $\hat{\mathbb{C}}$  como

$$d(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)| = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{\sqrt{|x|^2+1}\sqrt{|y|^2+1}}, & x, y \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{|x|^2+1}}, & x \in \mathbb{C}, y = \infty. \end{cases}$$

La métrica así obtenida en  $\hat{\mathbb{C}}$  es llamada la *métrica cordal*. Como la topología en  $\mathbb{S}^2$  está inducida por la norma eucldeana en  $\mathbb{R}^3$  y  $\pi$  es homeomorfismo, tenemos que la métrica cordal define la misma topología en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

### 1.3. Espacio de Transformaciones de Möbius

Los resultados aquí presentados están basados en [B, C, JS].

**Definición 1.15.** Una transformación de Möbius es una función

$$T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad T(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $T(\infty) = a/c$ ,  $T(-d/c) = \infty$ .

La condición  $ad - bc \neq 0$ , es necesaria para que  $T$  sea biyectiva.

**Proposición 1.16.** El conjunto de todas las transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  es un grupo bajo la composición de funciones.

**Ejemplo 1.17.** Transformaciones de Möbius canónicas.

1. Inversión:  $I(z) = \frac{1}{z}$ .
2. Traslación:  $T(z) = z + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .
3. Rotación:  $R(z) = e^{i\theta}z$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .
4. Homotecia:  $H(z) = kz$ ,  $k > 0$ .

**Proposición 1.18.** Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, inversiones, rotaciones, y homotecias.

**Demostración.** Sea  $T$  una transformación de Möbius, si  $c = 0$ , entonces  $T(z) = \frac{az+b}{d}$ , es decir,  $T$  es una composición de una rotación, una homotecia, y una traslación. Si  $c \neq 0$ , entonces

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \left( z + \frac{d}{c} \right) + \frac{a}{c}.$$

En consecuencia,  $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ , donde  $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ,  $T_2(z) = \frac{1}{z}$ ,  $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z$  y  $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$ .

**Proposición 1.19.** Las inversiones transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias. Las traslaciones, rotaciones, y homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

**Proposición 1.20.** Sean  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Entonces existe una única transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(z_k) = w_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Una función definida de un subconjunto abierto de  $\hat{\mathbb{C}}$  sobre  $\hat{\mathbb{C}}$ , es llamada conforme si, preserva ángulos.

Para una demostración del siguiente resultado consultar [C].

**Teorema 1.21.** Sea  $A$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$ . Si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ .

**Observación 1.22.**

Una transformación de Möbius  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , tiene derivada  $f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$ ,  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$  excepto en  $-\frac{d}{c}$ , del teorema 1.21. Las transformaciones de Möbius son conformes.

Hasta aquí hemos hecho una descripción de las transformaciones de Möbius clásicas definidas en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Ahora vamos a extender el espacio de definición de tales funciones a  $\hat{\mathbb{R}}^3$ . Identificamos  $\hat{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  con  $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$  y definimos la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius clásica,

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{cuya matriz asociada } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

por:

$$g(z + tj) = \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2 + |ad - bc|tj}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \quad g(\infty) = a/c. \quad (1.1)$$

### 1.3.1. Clasificación de Transformaciones de Möbius

Los resultados que se mencionan enseguida fueron tomados de [B].

Las transformaciones de Möbius se corresponden con una matriz en  $SL(2, \mathbb{C})$ . En efecto, la función  $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$  dada por  $\Phi(A) = g$ , es:

- 1) Un morfismo de grupos.
- 2) El kernel de  $\Phi$  es el conjunto  $\ker \Phi = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) : A = \pm I\}$ .
- 3) El grupo  $\mathcal{M}$  es isomorfo al grupo  $SL(2, \mathbb{C})/\ker \Phi$ .

Denotamos el grupo  $SL(2, \mathbb{C})/\ker \Phi$  por  $PSL(2, \mathbb{C})$ , así es natural decir que  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  o  $g \in \mathcal{M}$ . Vía este isomorfismo existe una acción de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ :

$$PSL(2, \mathbb{C}) \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad (A, z) \mapsto g(z),$$

**Definición 1.23.** Un subgrupo  $G$  en  $\mathcal{M}$  es discreto si y sólo si  $\Phi^{-1}(G)$  es un subgrupo discreto de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

**Teorema 1.24.** La topología  $\mathcal{T}$  inducida en  $\mathcal{M}$  por  $\Phi$ , coincide con la topología  $\mathcal{T}^*$  de la convergencia uniforme en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 1.25.** Para cada  $A \in GL(2, \mathbb{C})$ , definimos las siguientes funciones:

$$A \mapsto \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad A \mapsto \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|}.$$

Éstas inducen para cada  $g \in \mathcal{M}$ , las funciones:

$$g \mapsto \|g\| := \frac{\|A\|}{\sqrt{|\det(A)|}}, \quad g \mapsto \text{tr}^2(g) := \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)},$$

norma y traza cuadrada, respectivamente.

**Observación 1.26.** La función  $\text{tr}^2(g)$  es invariante bajo la función conjugación  $i_h(g) = hgh^{-1}$ .

Sea  $H^3 = \{z + tj : t > 0\}$  el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$  con métrica hiperbólica  $\rho$ , inducida por la métrica riemanniana  $(dz + dtj)/t$ . Si  $x = tj, y = sj$ ,  $\rho(x, y) = |\log(\frac{x}{y})|$ . Además si  $x = z_1 + tj, y = z_2 + sj$ , entonces

$$\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|x - y|}{2st}. \quad (1.2)$$

**Teorema 1.27.** Si  $g \in \mathcal{M}$ , entonces  $\|g\|^2 = 2 \cosh \rho(j, g(j))$ .

*Demostración.* Sea

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Entonces por la extensión de Poincaré, ecuación (1.1), si  $z = 0, t = 1$ , se tiene que

$$g(j) = \frac{b\bar{d} + a\bar{c} + j}{|c|^2 + |d|^2}.$$

Por la ecuación (1.2), si  $\alpha_1 = z_1 + t_1j$  y  $\alpha_2 = z_2 + t_2j$ , entonces

$$\begin{aligned} \cosh \rho(\alpha_1, \alpha_2) &= 1 + \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|^2}{2t_1t_2} = 1 + \frac{|z_1 - z_2 + t_1 - t_2|^2}{2t_1t_2}, \\ &= 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2 + (t_1 - t_2)^2}{2t_1t_2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si hacemos  $\alpha_1 = j$  y  $\alpha_2 = g(j)$  entonces  $z_1 = 0, t_1 = 1, z_2 = \frac{d\bar{d} + a\bar{c}}{|c|^2 + |d|^2}$  y  $t_2 = \frac{1}{|c|^2 + |d|^2}$ . Por lo tanto, de la ecuación (1.3), se tiene que

$$1 + \frac{\left| \frac{d\bar{d} + a\bar{c}}{|c|^2 + |d|^2} \right|^2 + \left( 1 - \frac{1}{|c|^2 + |d|^2} \right)^2}{2 \frac{1}{|c|^2 + |d|^2}} = 1 + \frac{|b\bar{d} + a\bar{c}|^2 + (|c|^2 + |d|^2 - 1)^2}{2(|c|^2 + |d|^2)}.$$

Esta expresión es igual a,

$$1 + \frac{|b\bar{d} + a\bar{c}|^2 + (|c|^2 + |d|^2)^2 - 2(|c|^2 + |d|^2) + 1}{2(|c|^2 + |d|^2)}. \quad (1.4)$$

Usando la identidad

$$|b\bar{d} + a\bar{c}|^2 + 1 = |b\bar{d} + a\bar{c}|^2 + |ad - bc|^2 = (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2),$$

y sustituyendo en la ecuación (1.4), se tiene

$$1 + \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2}{2} = \cosh \rho(j, g(j)).$$

Por otro lado,  $\|g\|^2 = \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|} = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$ , donde  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Por lo tanto,  $\cosh \rho(j, g(j)) = \frac{\|g\|^2}{2}$ . ◀

Si combinamos el teorema 1.5, la definición 1.23 y el teorema 1.27, obtenemos el siguiente criterio para subgrupos discretos en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

**Proposición 1.28.** *Un subgrupo  $G$  en  $PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si y sólo si para toda  $k > 0$ , el conjunto  $\{g \in G : \|g\|^2 \leq k\}$  es finito.*

**Definición 1.29.** *Para  $k \in \mathbb{C}, k \neq 0$ , definimos las formas canónicas de una transformación de Möbius*

$$m_k(z) = \begin{cases} kz, & \text{si } k \neq 1 \\ z + 1, & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Observe que en las formas canónicas, el cuadrado de la traza está dado por:

$$\text{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2. \quad (1.5)$$

**Proposición 1.30.** *Si  $g \in \mathcal{M}, g \neq Id$ , entonces  $g$  es conjugada a alguna de las formas canónicas  $m_k$ .*

*Demostración.* Si  $g \in \mathcal{M}$ , entonces  $g$  tiene a lo más dos puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Supongamos que  $g$  tiene un único punto fijo  $\alpha$ , y consideremos  $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ . Entonces

$$hgh^{-1}(\infty) = hg(\alpha) = h(\alpha) = \infty, hgh^{-1}(0) = hg(\infty) = \frac{1}{g(\infty) - \alpha} = t. \quad (1.6)$$

Como  $hgh^{-1} = f$  fija a  $\infty$  pero no a 0, entonces necesariamente es una traslación, así  $f(z) = z+t$ . Ahora, cualquier traslación es conjugada a  $m_1$ . Para ver esto, sólo hay que conjugar con  $h(z) = tz$ ,  $t \neq 0$ .

Supongamos ahora que  $g$  tiene dos puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y sea  $h(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ . Se tiene que

$$hgh^{-1}(\infty) = hg(\beta) = h(\beta) = \infty,$$

$$hgh^{-1}(0) = hg(\alpha) = h(\alpha) = 0.$$

Por tanto,  $g$  es conjugada a  $m_k$  para alguna  $k \neq 1$ . En consecuencia,  $g$  es conjugada a alguna de las formas canónicas  $m_k$ . ◀

**Teorema 1.31.** Sean  $f, g \in \mathcal{M}$  distintas de la identidad. Entonces  $f$  es conjugada a  $g$  si y sólo si  $tr^2(f) = tr^2(g)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es conjugada a  $g$ , entonces existen matrices  $A, B, C \in SL(2, \mathbb{C})$  tales que  $A = C^{-1}BC$ , así de la proposición 1.3, se tiene que  $tr^2(f) = \frac{tr^2(A)}{\det(A)} = \frac{tr^2(B)}{\det(B)} = tr^2(g)$ .

Supongamos ahora que  $tr^2(f) = tr^2(g)$ , queremos demostrar que  $f$  y  $g$  son conjugadas. Notemos que  $f$  y  $g$  son conjugadas a una forma canónica  $m_p, m_q$ , respectivamente. Así

$$tr^2(m_p) = tr^2(f) = tr^2(g) = tr^2(m_q),$$

por la ecuación (1.5), se tiene que  $p + \frac{1}{p} + 2 = q + \frac{1}{q} + 2$ . Entonces  $p = q$  o bien  $p = \frac{1}{q}$ . Notemos que  $m_p$  es conjugada a  $m_{\frac{1}{p}}$ , cuando  $p = 1$ . Ahora, si  $p \neq 1$ , entonces existe  $h$  tal que  $hm_p h^{-1} = m_{\frac{1}{p}}$ , con  $h(z) = -\frac{1}{z}$ . Como  $f$  es conjugada a  $m_p$  y  $g$  a  $m_q$ , se sigue que  $m_p$  es conjugada a  $m_q$ . Finalmente, como la conjugación entre transformaciones de Möbius es una relación de equivalencia, se tiene que  $f$  es conjugada a  $g$ . ◀

Las transformaciones de Möbius se pueden clasificar de acuerdo al número de puntos fijos que sus extensiones de Poincaré tienen en  $\hat{\mathbb{R}}^3$ , lo cual permite particionar a  $\mathcal{M}$  en clases de equivalencia. Las extensiones de Poincaré de las formas canónicas son:

$$m_k(z + tj) = kz + |k|tj, \quad \text{si } k \neq 1, \quad \text{y} \quad m_1(z + tj) = z + 1 + tj.$$

Dicha clasificación está dada por la siguiente caracterización. Sea  $Fix(T)$  el conjunto de puntos fijos en  $\hat{\mathbb{R}}^3$  de una transformación de Möbius  $T$ .

- a) Si  $k = 1$ , entonces  $Fix(m_1) = \{\infty\}$ .
- b) Si  $|k| \neq 1$ , entonces  $Fix(m_k) = \{0, \infty\}$ .
- c) Si  $|k| = 1$ , con  $k \neq 1$ , entonces  $Fix(m_k) = \{tj : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ .

**Definición 1.32.** Sea  $T$  una transformación de Möbius distinta de la identidad. Diremos que  $T$  es:

1. Parabólica si y sólo si tiene un único punto fijo en  $\hat{\mathbb{C}}$ .
2. Loxodrómica si y sólo si tiene dos puntos fijos en  $\hat{\mathbb{R}}^3$ .
3. Elíptica si y sólo si  $T$  tiene más de tres puntos fijos en  $\hat{\mathbb{R}}^3$ .

**Observación 1.33.** Usando equivalencias con formas canónicas, la definición anterior es equivalente a la siguiente. Se tiene que  $T \in \mathcal{M}$  es:

1. Parabólica si y sólo si es conjugada a  $m_1$ ,
2. Loxodrómica si y sólo si es conjugada a  $m_k$ , con  $|k| \neq 1$ ,
3. Elíptica si y sólo si es conjugada a  $m_k$ , con  $|k| = 1, k \neq 1$ .

**Definición 1.34.** Una transformación de Möbius loxodrómica  $g$ , es hiperbólica si  $g(D) = D$  para  $D$  un disco abierto o semiplano en  $\hat{\mathbb{C}}$ , de lo contrario decimos que  $g$  es estrictamente loxodrómica.

El siguiente resultado caracteriza las transformaciones de Möbius respecto a su traza.

**Teorema 1.35.** Sea  $g$  una transformación de Möbius, entonces  $g$  es:

- 1) Parabólica si y sólo si  $tr^2(g) = 4$ ,
- 2) Elíptica si y sólo si  $tr^2(g) \in [0, 4)$ ,
- 3) Hiperbólica si y sólo si  $tr^2(g) \in (4, \infty)$ ,
- 4) Estrictamente loxodrómica si y sólo si  $tr^2(g) \notin [0, \infty)$ .

*Demostración.* Recordamos que para la forma canónica  $m_p$ ,

$$tr^2(g) = p + \frac{1}{p} + 2.$$

Entonces:

- 1) Si  $g$  es parabólica, es conjugada a  $m_1$ , luego  $tr^2(g) = tr^2(m_1) = 4$ . Si  $tr^2(g) = 4$ , entonces  $p = 1$  y así  $g$  es parabólica.

- 2) Si  $g$  es elíptica, es conjugada a  $m_p$ ,  $|p| = 1$  y  $p \neq 1$ , así  $p = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Luego  $tr^2(g) = 2 + 2 \cos \theta$  y como  $\cos \theta \neq 1$ , se concluye que  $tr^2(g) \in [0, 4)$ . Supongamos que  $tr^2(g) \in [0, 4)$ . Entonces  $tr^2(g)$  se puede escribir como  $tr^2(g) = 2 + 2 \cos \theta$ ,  $\cos \theta \neq 1$ . Por lo tanto,  $tr^2(g) = p + \frac{1}{p} + 2$ , tiene como solución a  $p = e^{i\theta}$  o  $e^{-i\theta}$ . Así  $|p| = 1$ ,  $p \neq 1$ , en consecuencia  $g$  es elíptica.
- 3) Si  $tr^2(g) \in (4, \infty)$ , entonces  $tr^2(g) = p + \frac{1}{p} + 2$  tiene como solución  $p = k$  o  $\frac{1}{k}$ , con  $k > 0$ . Como  $p > 0$ , entonces el conjugado de  $g$  y  $m_p$  preservan el semiplano superior y así  $g$  es hiperbólica. Supongamos ahora que  $g$  es hiperbólica, entonces el conjugado  $m_p$  también lo es, sea  $D$  un disco invariante bajo  $m_p$ . Sea  $z \in D$ , entonces las imágenes de  $z$  bajo las iteradas de  $m_p$  están en  $D$  y así  $\{p^n z : n \in \mathbb{Z}\} \subset D$ . Ya que  $|p| \neq 1$ , esto prueba que  $0, \infty \in \bar{D}$ . Usando un argumento similar se muestra que tomando  $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus D$ , se concluye que  $0, \infty \in \partial D$ . Así  $D$  es un semiplano y como  $D$  es invariante es necesario que  $m_p$  deje invariante a la semilínea de la frontera de  $D$  que conecta  $0$  con  $\infty$ . Por lo tanto,  $p > 0$  y  $tr^2(g) > 4$ .

**Teorema 1.36.** Sean  $f$  y  $g$  transformaciones de Möbius, con  $g$  loxodrómica. Supongamos que  $f$  y  $g$  tienen un punto fijo en común. Entonces, el grupo generado por  $f$  y  $g$ ,  $\langle f, g \rangle$ , no es discreto.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto fijo en común es  $\infty$ , y que  $f, g$  son de la forma  $g(z) = \alpha z$  y  $f(z) = az + b$ , con  $|\alpha| > 1$  y  $b \neq 0$  (si  $|\alpha| < 1$ , se puede tomar  $g^{-1}$ ). Consideremos  $g^{-n} f g^n(z) = g^{-n} f(\alpha^n z) = g^{-n}(a\alpha^n z + b) = az + \alpha^{-n}b$ . Puesto que  $|\alpha| > 1$ , se tiene que

$$\|g^{-n} f g^n\|^2 = \frac{|a|^2 + |\alpha^{-n}b|^2 + 1}{|a|^2} < \frac{|a|^2 + |b|^2 + 1}{|a|^2},$$

es una sucesión acotada de términos distintos. Se sigue de la proposición 1.28 que  $\langle f, g \rangle$  no puede ser discreto.

## 1.4. Geometría Hiperbólica

En esta sección expondremos algunos resultados clásicos sobre geometría hiperbólica bidimensional, considerando los modelos geométricos: el disco Poincaré y el semiplano superior, como subconjuntos de  $\mathbb{C}$ . Estos modelos se dotarán de una métrica Riemanniana. Los resultados aquí mostrados están basados en [B, LO, R].

Usando notación compleja se tiene que el semiplano de Poincaré es el conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}.$$

Por otra parte el disco de Poincaré es el conjunto:

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

### 1.4.1. Métrica hiperbólica

Una curva en  $\mathbb{C}$  es una función continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $[a, b]$  es un intervalo real. Diremos que una curva es diferenciable o suave si  $\operatorname{Re}\gamma(t)$  y  $\operatorname{Im}\gamma(t)$  son funciones continuas y diferenciables.

**Definición 1.37.** Sean  $X, Y$  espacios métricos con métrica  $d, \rho$  respectivamente. Una función  $T : X \rightarrow Y$  continua y biyectiva tal que  $d(x, y) = \rho(T(x), T(y))$  para todo  $x, y \in X$ , es llamada una isometría.

Si  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$  es una curva diferenciable en  $\mathbb{C}$ , donde  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$  son la parte real e imaginaria de  $\gamma(t)$ , respectivamente, definimos el vector tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  como el número complejo  $\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$ . Si la imagen de la curva está en  $\mathbb{H}^2$  decimos que es una curva en  $\mathbb{H}^2$ .

**Definición 1.38.** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  una curva suave, definimos la longitud hiperbólica de  $\gamma$  como:

$$l(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt. \quad (1.7)$$

Con la fórmula (1.7) es posible definir una métrica en el plano hiperbólico. En efecto diremos que una curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  une los puntos  $z, w$  si  $\gamma(a) = z$  y  $\gamma(b) = w$ . Notemos que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  dado por  $\gamma(t) = tw + (1-t)z$  es una curva suave que une los puntos  $z, w$ , si  $z \neq w$  entonces su longitud es positiva. Por lo tanto tiene sentido definir la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen ambos puntos.

**Definición 1.39.** Sean  $z, w \in \mathbb{H}^2$ . Definimos la distancia hiperbólica entre  $z, w$  como:

$$\rho(z, w) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ es una curva que conecta } z \text{ con } w \text{ en } \mathbb{H}^2\}.$$

Es claro que  $\rho(z, w)$  es no negativa y es igual a 0 si y sólo si  $z = w$ . Además si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  une  $z$  con  $w$ , entonces  $\sigma(t) = \gamma(a + b - t)$  une  $w$  con  $z$ , y de aquí se sigue que  $\rho$  es simétrica. Por la propiedad del ínfimo se sigue la desigualdad triangular.

Una manera equivalente de definir la métrica hiperbólica para  $\mathbb{H}^2$ , es mediante la forma diferencial

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}. \quad (1.8)$$

Donde  $z = x(t) + iy(t)$ ,  $x, y$  son funciones suaves de  $t$  y  $dz = x'(t)dt + iy'(t)dt$ . Además  $x'(t)dt, y'(t)dt$  son vectores tangentes a  $x, y$  en  $t$ .

Existe un desarrollo paralelo en términos del disco de Poincaré  $\Delta$ , donde la métrica  $\rho$  en  $\mathbb{H}^2$  se transfiere a una métrica en  $\Delta$  que deriva de la forma diferencial

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (1.9)$$

Consideremos el modelo  $\Delta$ , y  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$  la función,

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}. \tag{1.10}$$

Se puede ver que  $f$  así definida es biyectiva, además es una isometría y

$$\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)), \quad \text{para todo } z, w \in \Delta.$$

De esta manera,  $\rho^*$  es una métrica en  $\Delta$ , ver figura 1.1.

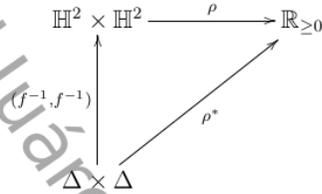


Figura 1.1: Métrica hiperbólica  $\rho^*$  inducida en  $\Delta$ .

Como consecuencia de lo anterior se tiene:

**Observación 1.40.**

$$\frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{Im(z)}.$$

Notemos que  $f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$  y  $1 - |f(z)|^2 = \frac{|z+i| - |z-i|^2}{|z+i|^2}$ ,

entonces

$$\frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{\frac{2|2i|}{|(z+i)^2|}}{\frac{|z+i| - |z-i|^2}{|z+i|^2}} = \frac{1}{Im(z)}.$$

La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [B].

**Teorema 1.41.** Si  $z, w \in \mathbb{H}^2$  y  $\rho$  es la métrica hiperbólica, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\rho(z, w) = \log \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|},$
2.  $\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2Im(z)Im(w)},$
3.  $\sinh(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{Im(z)Im(w)}},$

$$4. \cosh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z-\bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}},$$

$$5. \tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|.$$

**Definición 1.42.** Sea  $E \subset \Delta$ , una región. Entonces el área hiperbólica de  $E$  está dada por:

$$A_h(E) = \iint_E \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2 dx dy, \quad (1.11)$$

y si  $C \subset \Delta$  es una curva, la longitud hiperbólica está dada por:

$$L_h(C) = \int_C \frac{2|dz|}{1-|z|^2}. \quad (1.12)$$

Ahora si  $E, C \subset \mathbb{H}^2$  es una región y curva respectivamente, entonces las fórmulas (1.11), (1.12) quedan respectivamente como sigue:

$$1. A_h(E) = \iint_E \frac{dx dy}{y^2},$$

$$2. L_h(C) = \int_C \frac{|dz|}{y}.$$

La definición anterior muestra la diferencia en el cálculo del área de una región usando la métrica hiperbólica y métrica euclídeana. Así como la diferencia en el cálculo de la longitud de una curva.

### 1.4.2. Geodésicas

**Definición 1.43.** Una recta hiperbólica (*h-recta*) en  $\mathbb{H}^2$  es la intersección del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  con una circunferencia euclídeana con centro en el eje real, o bien una recta perpendicular al eje real.

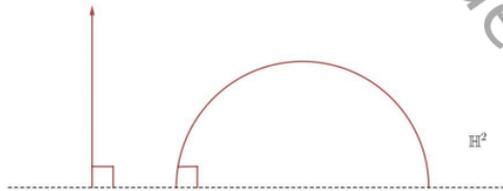


Figura 1.2: Rectas en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

De acuerdo a la definición anterior tenemos la siguiente.

**Observación 1.44.** <sup>3</sup> 1) Existe una única recta hiperbólica que pasa por dos puntos de  $\mathbb{H}^2$ .

2) Dos rectas hiperbólicas distintas se intersectan en a lo más un punto.

3) Para dos rectas hiperbólicas  $l_1, l_2$  existe una  $\rho$ -isometría  $g$  tal que  $g(l_1) = l_2$ .

4) La reflexión en una recta hiperbólica es una  $\rho$ -isometría.

5) Dada una recta hiperbólica  $l$  y un punto  $w \in l$ , existe una única recta hiperbólica que pasa por  $w$  y es ortogonal a  $l$ .

**Proposición 1.45.** <sup>3</sup> Sea  $l$  una  $h$ -recta en  $\mathbb{H}^2$  y  $w \in \mathbb{H}^2$ . Existe una única  $h$ -recta que pasa por  $w$  y es perpendicular a  $l$ .

*Demostración.* Sea  $l_w = \{z \in \mathbb{H}^2 : |z| = |w|\}$ , es la única recta que pasa por  $w$  y es ortogonal al eje imaginario positivo  $I^+$ . Por lo tanto, si  $l$  es una recta en  $\mathbb{H}^2$ , consideremos una transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(l) = I^+$ . Luego  $T(l)$  es ortogonal a  $l_{T(w)}$  y por lo consiguiente  $l$  es ortogonal a la recta  $T^{-1}(l_{T(w)})$ . ◀

Sea  $L$  una  $h$ -recta en  $\mathbb{H}^2$  y  $z, w \in L$ . Entonces  $L \setminus \{z, w\}$  tiene tres componentes, dos de ellas tienen longitud infinita y la otra finita, a esta última lo denotamos por  $(z, w)$  y lo llamaremos segmento abierto con extremos  $z, w$ , el segmento cerrado  $[z, w]$  será incluyendo  $z, w$ .

Decimos que  $y$  está entre  $z, w$  si  $y \in (z, w)$ . De manera análoga definimos los segmentos  $(z, w], [z, w)$ . Así para  $z, w, y \in L$  se tiene

$$\rho(z, w) = \rho(z, y) + \rho(y, w)$$

si y sólo si  $y \in [z, w]$ .

**Observación 1.46.** La discusión precedente muestra que una curva  $\gamma$  uniendo  $ip$  con  $iq$  satisface que

$$l(\gamma) = \rho(ip, iq)$$

si y sólo si  $\gamma$  es una parametrización de  $[ip, iq]$  como una curva simple.

La prueba de los siguientes resultados puede consultarse en [B, cap. 7, sec. 3].

**Teorema 1.47.** Sean  $z, w \in \mathbb{H}^2$ . Una curva  $\gamma$  que une  $z$  con  $w$  satisface

$$l(\gamma) = \rho(z, w)$$

si y sólo si  $\gamma$  es una parametrización de  $[z, w]$  mediante una curva simple.

**Definición 1.48.** Una geodésica  $\gamma$  que une dos puntos  $z, w \in \mathbb{H}^2$ , es una curva simple que parametriza el segmento  $[z, w]$ .

**Teorema 1.49.** Sean  $x, y, z \in \mathbb{H}^2$ ,  $x \neq z$ . Entonces  $\rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ , si y sólo si  $y \in [x, z]$

**Definición 1.50.** Sean  $L_1, L_2$  geodésicas distintas. Decimos que  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas si y sólo si tienen un único extremo en común. Si  $L_1, L_2$  no tienen un extremo en común entonces se intersectan si  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  y son ajenas (o no secantes) si  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .

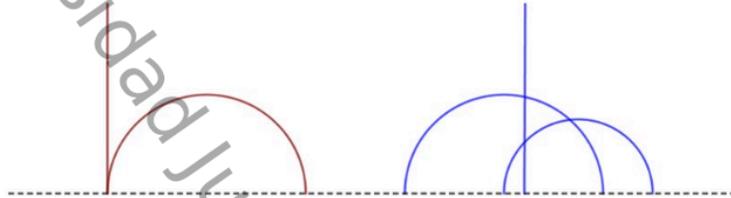


Figura 1.3: Rectas paralelas y secantes.

Del teorema 1.49, dado un segmento  $[x, z]$ ,  $y \in [x, z]$  y  $\phi$  una isometría, se tiene que  $\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]$ , pues  $\phi$  mapea rectas en rectas.

Dada una isometría  $\phi$  en  $\mathbb{H}^2$ , existe una isometría

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0$$

tal que  $g \circ \phi$  deja invariante al eje positivo  $I^+$ . En efecto, consideremos una recta  $L$  en  $\mathbb{H}^2$  tal que  $L = \phi(I^+)$ ,  $g(L) = I^+$  entonces  $g \circ \phi(I^+) = g(L) = I^+$ .

**Teorema 1.51.** Si  $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  es una isometría, entonces es una de las siguientes formas:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc > 0$ , más aún, toda isometría en  $\mathbb{H}^2$  es composición de reflexión con respecto a rectas hiperbólicas.

Con un desarrollo similar se tiene el siguiente resultado para el modelo  $\Delta$ .

**Proposición 1.52.** Si  $\phi : \Delta \rightarrow \Delta$  es una isometría, entonces es una de las siguientes formas:

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}$$

donde  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ .

---

## Capítulo 2

# Grupos Kleinianos

---

### 2.1. Acción Discontinua

Los resultados aquí presentados están basados en [B].

**Definición 2.1.** Un subgrupo  $G$  de  $\mathcal{M}$  es elemental si y sólo si existe una órbita  $G(x)$  finita en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.2.** Un grupo kleiniano, es un subgrupo discreto del grupo de transformaciones de Möbius.

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  en si mismo. Decimos que  $G$  actúa discontinuamente en  $X$  si y sólo si para todo subconjunto compacto  $K$  de  $X$ ,  $g(K) \cap K = \emptyset$ , excepto para un número finito de elementos en  $G$ .

Para el siguiente resultado  $X$  es un subconjunto de  $\hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

**Teorema 2.4.** Si  $G$  actúa discontinuamente en  $X$ , entonces las siguientes propiedades se cumplen:

- 1) Todo subgrupo de  $G$  actúa discontinuamente en  $X$ .
- 2) Si  $\phi$  es homeomorfismo de  $X$  sobre  $Y$ , entonces  $\phi G \phi^{-1}$  actúa discontinuamente en  $Y$ .
- 3) Si  $Y$  es subconjunto no vacío y  $G$ -invariante de  $X$ , entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $Y$ .
- 4) Si  $x \in X$ ,  $g_n \in G$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con  $g_n \neq g_k$  si  $n \neq k$ , entonces la sucesión  $\{g_n(x)\}$  no converge a ningún elemento en  $X$ .
- 5) El estabilizador  $G_x$  es finito, para cada  $x \in X$ .
- 6) Si  $X$  es subconjunto de  $\hat{\mathbb{R}}^3$ , entonces  $G$  es numerable.

*Demostración.* 1) Es claro.

- 2) Sea  $L$  un subconjunto compacto de  $Y$ , como  $\phi$  es homeomorfismo,  $\phi^{-1}(L)$  es compacto en  $X$  y como  $G$  actúa discontinuamente en  $X$  se sigue que  $\phi^{-1}(L) \cap g(\phi^{-1}(L)) = \emptyset$ , excepto para un número finito de elementos en  $G$ , así,  $\phi(g(\phi^{-1}(L)) \cap \phi^{-1}(L)) = \phi(g(\phi^{-1}(L))) \cap L = \emptyset$ , excepto para un número finito de elementos en  $G$ . Por lo tanto,  $\phi G \phi^{-1}$  actúa discontinuamente en  $Y$ .

- 3) Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $Y$ , así  $K$  es compacto en  $X$  (ver [P, cap. 4, sec. 1]), por la acción discontinua en  $X$ , se sigue que  $g(K) \cap K = \emptyset$ , excepto para una cantidad finita de elementos de  $G$ , por lo que  $G$  actúa discontinuamente en  $Y$ .
- 4) Sean  $x, y \in X$ . Supongamos que la sucesión  $g_n(x) \rightarrow y$ , así el conjunto  $K = \{y, g_1(x), g_2(x), \dots\}$ , es compacto. Por hipótesis los  $g_n$  son distintos, pero  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , pero esto es una contradicción por la acción discontinua de  $G$  en  $X$ .
- 5) Se sigue de la definición de acción discontinua en  $X$ .
- 6) Para cada  $x \in X$ , existe una correspondencia biyectiva entre  $G/G_x$  y la órbita  $G(x)$ , vía  $gG_x \mapsto g(x)$ . Dado que  $G_x$  es finito,  $G$  es a lo más numerable si y sólo si  $G(x)$  lo es. Supongamos que  $G(x)$  no es numerable. Así  $G(x)$  tiene un punto de acumulación  $y \in X$ , luego podemos extraer una sucesión  $g_1(x), g_2(x), \dots$ , el cual converge a  $y$ , pero esto es una contradicción por la acción discontinua en  $X$  y el inciso 4). ◀

**Teorema 2.5.** *Un subgrupo  $G$  de  $\mathcal{M}$  es discreto si y sólo si actúa discontinuamente en  $H^3$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es discreto, entonces  $G$  es homeomorfo a un subgrupo discreto de  $SL(2, \mathbb{C})$ , así  $G$  es numerable, luego  $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Como  $G$  es discreto,  $\|g_n\| \rightarrow \infty$  y por el teorema 1.27, se sigue si  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\rho(j, g_n(j)) \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Ahora como  $K \subset H^3$  es compacto, está contenido en alguna bola hiperbólica

$$B = \{x \in H^3 : \rho(x, j) < r\}.$$

Si  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  entonces  $g(B) \cap B \neq \emptyset$  y así

$$\rho(j, g(j)) < 2r.$$

Por la ecuación (2.1), solo puede ocurrir para un número finito de  $g \in G$  y así  $G$  actúa discontinuamente en  $H^3$ .

Supongamos ahora que  $G$  actúa discontinuamente en  $H^3$  (o en algún subconjunto de  $\hat{\mathbb{C}}$ ), si  $G$  es no discreto podemos encontrar matrices  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset SL(2, \mathbb{C})$  que se mapean a  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subset G$  con  $A_n \rightarrow I$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , usando la extensión de Poincaré 1.1, se sigue que  $g_n(x) \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para cada  $x \in H^3$ , pero esto contradice el teorema 2.4, 4). Por lo tanto,  $G$  es discreto. ◀

**Lema 2.6.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $\mathcal{M}$ ,  $D$  un subconjunto abierto de  $\hat{\mathbb{C}}$  que contiene un punto fijo  $v$  de algún elemento loxodrómico o parabólico en  $G$ , entonces  $G$  no actúa discontinuamente en  $D$ .*

*Demostración.* El estabilizador  $G_v = \{g \in G : g(v) = v\}$  contiene distintas iteraciones de  $g$ . Si  $g$  es parabólico o loxodrómico, entonces  $G_v$  es infinito y por 5) del teorema 2.4, se sigue que  $G$  no actúa discontinuamente en  $D$ . ◀

**Proposición 2.7.** Sea  $G$  el grupo de Picard, es decir el grupo de transformaciones de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d$  son enteros Gaussianos y  $ad - bc = 1$ . Entonces el grupo de Picard, no actúa discontinuamente en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Notemos que  $G$  es discreto, por el lema 2.6. es suficiente mostrar que los puntos fijos parabólicos de  $G$  son densos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Sea  $w = \frac{p+iq}{r}$ ,  $p, q, r \in \mathbb{Z}$ , es claro que el conjunto formado por los  $w$ 's es denso en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Notemos ahora que

$$h(z) = \frac{(1 - wr^2)z + r^2w^2}{1 + r^2w - r^2z}$$

tiene un punto fijo  $w$ , por lo que es parabólico. ◀

**Lema 2.8.** Sean  $D$  un disco abierto en  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $g \in \mathcal{M}$  y  $g(\bar{D}) \subset D$ . Entonces  $g$  es loxodrómico y tiene un punto fijo en  $g(\bar{D})$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $g(\infty) = \infty$ . Con esta hipótesis  $\partial D$  es una circunferencia y claramente los puntos fijos de  $g$  no están en  $\partial D$ .

Si  $g$  es elíptico o parabólico, como  $g$  fija  $\infty$  entonces  $g$  es isometría y esto no es compatible con  $g(\bar{D}) \subset D$ , por lo que  $g$  es loxodrómico.

Para algún  $w$  no fijo para  $g$  las imágenes  $g^n(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  se acumulan a un punto fijo  $v$  de  $g$ , si  $w \in D$  entonces  $g^n(w) \in g(\bar{D})$  y así  $v \in g(\bar{D})$ . ◀

**Definición 2.9.** Sea  $G$  un grupo no elemental de  $\mathcal{M}$  y  $\Lambda_0$  el conjunto de puntos fijos, de los elementos loxodrómicos en  $G$ . El conjunto límite  $\Lambda(G)$  es la cerradura en  $\hat{\mathbb{C}}$  de  $\Lambda_0$ , por otra parte el dominio de discontinuidad de  $G$  es  $\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$ .

Si no es necesario hacer mención de  $G$ , escribiremos simplemente  $\Lambda, \Omega$  para el conjunto límite y el dominio de discontinuidad de  $G$ , respectivamente.

**Observación 2.10.** Si  $H$  es subgrupo de  $G$ , entonces  $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$  y  $\Omega(G) \subset \Omega(H)$ .

Para una prueba del siguiente resultado consultar [B, cap. 5, sec. 1].

**Teorema 2.11.** Cada subgrupo no elemental de  $\mathcal{M}$  contiene infinitos elementos loxodrómicos. Además, no tienen puntos fijos en común.

**Teorema 2.12.** Sea  $G$  un grupo no elemental, el conjunto límite  $\Lambda(G)$  es un subconjunto cerrado no vacío más pequeño,  $G$ -invariante en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Además,  $\Lambda(G)$  es un conjunto perfecto y, por lo tanto, no numerable.

**Demostración.** Si  $\Lambda_0$  es  $G$ -invariante, entonces  $\Lambda(G)$  también lo es. Por definición  $\Lambda(G)$  es cerrado y por el teorema 2.11,  $\Lambda(G) \neq \emptyset$ . Sea  $E \subset \hat{\mathbb{C}}$  cerrado y diferente del vacío,  $G$ -invariante. Como  $G$  es no elemental, cada órbita es infinita, así  $E$  es infinito. Sea  $v$  un punto fijo de algún  $g$  loxodrómico en  $G$ , si  $w \in E$  no es punto fijo de  $g$ , el conjunto  $\{g^n(w) : n \in \mathbb{Z}\}$  se acumula en  $v$ . Como  $E$  es cerrado,  $v \in E$ , esto prueba que  $\Lambda_0 \subset E$  y por lo consiguiente,  $\Lambda(G) \subset E$ . Este argumento también muestra que  $\Lambda_0$  no tiene puntos aislados y así  $\Lambda(G)$  no tiene puntos aislados. Por lo tanto,  $\Lambda(G)$  es perfecto y no numerable. ◀

**Definición 2.13.** Sea  $G$  un subgrupo de  $\mathcal{M}$ , para  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , definimos  $\Lambda(z)$  como el conjunto de puntos  $w \in \hat{\mathbb{C}}$  con la propiedad de que existe una sucesión de transformaciones distintas  $g_n \in G$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = w$ .

**Teorema 2.14.** Sea  $G$  un subgrupo discreto no elemental de  $\mathcal{M}$ , entonces para todo  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , se tiene que  $\Lambda(G) = \Lambda(z)$ .

**Demostración.** Como cada  $\Lambda(G)$  es cerrado, no vacío,  $G$ -invariante y minimal, por el teorema 2.12, se tiene que  $\Lambda(G) \subset \Lambda(z)$ . Ahora si  $z \in \Lambda(G)$ , entonces la órbita de  $z$  bajo  $G$ ,  $G(z) \subset \Lambda(G)$  y como  $\Lambda(z) \subset \overline{G(z)} \subset \Lambda(G)$ . Se concluye que  $\Lambda(G) = \Lambda(z)$ . ◀

**Teorema 2.15.** Sea  $G$  un subgrupo no elemental de  $\mathcal{M}$  y  $\Omega(G)$  el dominio de discontinuidad. Entonces:

1.  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega(G)$ ,
2. si  $G$  actúa discontinuamente en un subconjunto abierto  $D$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $D \subset \Omega(G)$ .

**Demostración.** 1. Supongamos que  $G$  no actúa discontinuamente en  $\Omega(G)$  entonces existe  $K \subset \Omega(G)$  compacto y elementos distintos  $g_1, g_2, \dots, \in G$  tales que  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ . Por consiguiente existen elementos  $z_1, z_2, \dots, \in K$  con  $g_n(z_n) \in K$ . Como  $K$  compacto, dada una sucesión en  $K$ , tiene una subsucesión convergente  $g_{n_k}(z_{n_k})$  convergiendo a  $w \in K$  y así  $w \in \Omega$ . Sin embargo, como en la prueba del teorema 2.14, se tiene que  $g_n$  converge a  $w$  uniformemente en  $K$  y así  $w \in \Lambda(G)$ , pero esto es una contradicción.

2. Usando el lema 2.6,  $D \cap \Lambda_0 = \emptyset$ , como  $D$  es abierto, se sigue que  $D \cap \Lambda(G) = \emptyset$  y así  $D \subset \Omega(G)$ . ◀

**Corolario 2.16.** Si  $G$  es un subgrupo discreto no elemental de  $\mathcal{M}$ , entonces  $\Omega(G) \neq \emptyset$  si y sólo si, para algún  $z$  la órbita de  $z$  bajo  $G$ ,  $G(z)$  no es densa en  $\hat{\mathbb{C}}$

**Demostración.** Hacemos dos observaciones. Primero, de las definiciones de  $\Omega(G)$  y  $\Lambda(G)$ , se tiene que  $\Omega(G) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\Lambda(G) \neq \hat{\mathbb{C}}$ . Segundo, si  $z_0 \in \Lambda(G)$ , entonces del teorema 2.12,  $\Lambda(G)$  es cerrado, invariante y minimal.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\overline{G(z)} \neq \hat{\mathbb{C}}$  para algún  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  y  $\Omega(G) = \emptyset$ . En consecuencia, las primeras dos propiedades implican que la órbita de  $z_0$ , satisface  $\overline{G(z_0)} \subset \Lambda(G)$ . Ahora bien, como  $\Lambda(G)$  es minimal, se tiene que  $\overline{G(z_0)} = \Lambda(G)$ . De esta manera, obtenemos que  $\hat{\mathbb{C}} \neq \overline{G(z_0)} = \Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ , lo cual es una contradicción.

( $\Rightarrow$ ) Ahora supongamos que para todo  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , la órbita es densa, es decir  $\overline{G(z)} = \hat{\mathbb{C}}$ . Nótese que  $\overline{G(z)} \subset \Lambda(G)$  para cada  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , ya que  $\Lambda(G)$  es cerrado e invariante. En particular, dado  $w \in \Lambda(G)$ , se tiene que  $\hat{\mathbb{C}} = \overline{G(w)} \subset \Lambda(G)$ . Por tanto, de la primera observación se sigue que  $\Omega(G) = \emptyset$ , lo cual es una contradicción.  $\blacktriangleleft$

Para una demostración de los siguientes resultados, consultar [Mas, cap. V, sec. E].

**Teorema 2.17.** Para un subgrupo discreto no elemental  $G$  de  $\mathcal{M}$ , el dominio de discontinuidades  $\Omega(G)$  tiene a lo más dos componentes invariantes.

**Teorema 2.18.** Sea  $G$  un subgrupo discreto y no elemental de  $\mathcal{M}$ . Si  $\Omega(G)$  tiene una cantidad finita de componentes, entonces son a lo más dos.

Para una demostración del siguiente resultado consultar [B, cap. 8, sec. 4].

**Teorema 2.19.** Sea  $G$  un subgrupo no elemental de isometrías en  $\Delta$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. El grupo  $G$  es discreto.
2. El grupo  $G$  actúa discontinuamente en  $\Delta$ .
3. Los puntos fijos de elementos elípticos de  $G$  no se acumulan en  $\Delta$ ,
4. Los elementos elípticos de  $G$  no se acumulan en  $Id$ .
5. Cada elemento elíptico de  $G$  tiene orden finito.
6. Todo subgrupo cíclico de  $G$  es discreto.

### 2.1.1. G-paquetes

**Definición 2.20.** Sea  $D$  abierto conexo no vacío en  $\hat{\mathbb{C}}$ , y  $G$  un subgrupo de  $\mathcal{M}$  discreto. Diremos que  $G$  es un  $G$ -paquete si  $g(D) \cap D = \emptyset$ , para toda  $g \in G$  distinta de la identidad.

**Teorema 2.21.** Sea  $G$  un subgrupo discreto no elemental de  $\mathcal{M}$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si  $D$  es un subconjunto abierto no vacío y distinto de  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $G$ -invariante, entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $D$ .

2) Si  $D$  es un  $G$ -paquete, entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $D' = \bigcup_{g \in G} g(D)$ .

*Demostración.* 1) Si  $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus D$ , entonces es cerrado,  $G$ -invariante y diferente del vacío. Por el teorema 2.12,  $\Lambda(G) \subset E$ , en consecuencia  $G$  actúa discontinuamente en  $D$ .

2) Por definición  $D'$  es disconexo y por lo tanto es un subconjunto propio de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Además,  $D'$  es abierto,  $G$ -invariante y diferente del vacío. Del 1) se concluye que  $G$  actúa discontinuamente en  $D'$ . ◀

**Teorema 2.22.** Sean  $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$  subgrupos de  $\mathcal{M}$  y  $G$  el grupo generado por la unión de las  $G_n$ . Sea  $D_j$  un  $G_j$ -paquete, para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $D_i \cup D_j = \hat{\mathbb{C}}$ , cuando  $i \neq j$  y que  $D^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$ . Entonces  $G$  es el producto libre de las  $G_n$ ,  $D^*$  es un  $G$ -paquete y  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$ .

*Demostración.* Sea  $g \in G$  tal que  $g = g_m \cdots g_1$ , con  $g_k \in G_{i_k}$ ,  $g_k \neq I$  y  $i_k \neq i_{k+1}$  para toda  $k$ . Lo que sigue es mostrar que  $g_m \cdots g_1(D^*) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m}$ . Hagamos la prueba por inducción sobre la longitud de  $g$ .

Para  $k = 1$ ,  $D_{i_1}$  es un  $G$ -paquete, por lo que

$$g_1(D^*) \subset g_1(D_{i_1}) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_1}$$

Supongamos ahora para  $k = n$

$$g_n \cdots g_1(D^*) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_n}$$

Se sigue entonces que

$$g_{n+1}(g_n \cdots g_1(D^*)) \subset g_{n+1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_n}) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_n} \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D^*$$

Por lo que

$$g(D^*) = g_n \cdots g_1(D^*) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D^*,$$

y  $D^*$  es un  $G$ -paquete. Como  $D^* \neq \emptyset$ , se sigue que  $g \neq I$ . Por la definición 1.2,  $G$  es producto libre de las  $G_n$ . Finalmente, por el teorema 2.21 2),  $G$  actúa discontinuamente en  $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$ . ◀

### 2.1.2. Superficies de Riemann como Cocientes

Si  $X$  es un espacio topológico conexo, Hausdorff, segundo numerable y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , diremos que  $X$  es una superficie topológica real conexa.

**Definición 2.23.** 1. Una carta coordenada compleja en  $X$ , es una pareja  $(U, \phi)$ , donde  $U$  es abierto en  $X$  y  $\phi : U \rightarrow C \subset \mathbb{C}$  es un homeomorfismo. Dos cartas  $(U, \phi), (V, \psi)$  son analíticamente compatibles si la función

$$\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

es un biholomorfismo.

2. Un atlas complejo en  $X$  consiste de una colección de cartas coordenadas

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ , donde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Dos atlas complejas son analíticamente equivalentes, si toda carta de  $\mathcal{A}$  es analíticamente compatible con toda carta de  $\mathcal{B}$ .

3. Una estructura compleja en  $X$  es una clase de equivalencia de atlas analíticamente equivalentes en  $X$ , de acuerdo con la relación de equivalencia en 2.

4. Una superficie de Riemann  $X$  es una pareja  $(X, \mathcal{A})$ , donde  $X$  es una superficie topológica real conexa y  $\mathcal{A}$  es una estructura compleja en  $X$ .

**Ejemplo 2.24.** El plano complejo  $\mathbb{C}$  es una superficie de Riemann con el atlas  $(\mathbb{C}, id)$ . Cualquier dominio (región abierta y conexa) en  $\mathbb{C}$  es una superficie de Riemann.

**Ejemplo 2.25.**  $\hat{\mathbb{C}}$  es una superficie de Riemann. Para ello, definimos una topología en  $\hat{\mathbb{C}}$  de la siguiente manera:  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  es abierto si

1.  $U \subset \mathbb{C}$  ó

2.  $U$  es de la forma  $(V \setminus K) \cap \{\infty\}$ , donde  $V$  es abierto y  $K \subset \mathbb{C}$  es compacto. Con esta topología,  $\hat{\mathbb{C}}$  es un espacio topológico Hausdorff, homeomorfo a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Definimos una estructura compleja de la siguiente manera: Sean  $U_1 = \mathbb{C}$  y  $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ , definamos  $\varphi_1 = id : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \\ 0, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

La prueba del siguiente resultado está basada en [B, cap. 6, sec. 2].

**Teorema 2.26.** Sea  $D$  un dominio en  $\hat{\mathbb{C}}$  y  $G$  un subgrupo de transformaciones de Möbius que deja invariante y actúa discontinuamente en  $D$ . Entonces  $D/G$  es una superficie de Riemann.

*Demostración.* Sabemos que  $D/G$  es un espacio topológico con la topología cociente y la función cociente  $\pi : D \rightarrow D/G$  es continua. Como  $D$  es conexo (de hecho arcoconexo) se sigue que  $D/G$  también lo es. Es claro que  $\pi$  es una función abierta, si  $A \subset D$  entonces  $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$ , por tanto si  $A$  es abierto entonces  $\pi(A)$  también es abierto.

Para demostrar que  $D/G$  es Hausdorff, sean  $z_1, z_2 \in D$  y  $r > 0$ . Consideremos los discos

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq r\},$$

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_2| \leq r\},$$

contenidos en  $D$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , definamos

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq \frac{r}{n}\},$$

$$B_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_2| \leq \frac{r}{n}\}.$$

Si para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi(A_n) \cap \pi(B_n) \neq \emptyset$ , entonces existe algún  $w_n \in A_n$  y algún  $g_n \in G$  tal que  $g_n(w_n) \in B_n$ . Esto implica que  $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ , donde  $K = K_1 \cup K_2$ . Como  $K$  es compacto y  $G$  actúa discontinuamente en  $D$ , se sigue que el conjunto  $\{g_1, g_2, \dots\}$  es finito. Luego existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $g_n = g$  para todo  $n \geq N$  y así

$$g(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(w_n) = z_2.$$

Consideremos dos puntos distintos  $\pi(z_1)$  y  $\pi(z_2) \in D/G$ . Así  $z_1, z_2 \in D$ , pero no son equivalentes bajo  $G$ . Por lo que existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que los conjuntos disjuntos  $\pi(A_n)$  y  $\pi(B_n)$ , separan  $\pi(z_1)$  y  $\pi(z_2)$ . Además estos conjuntos son abiertos por ser  $\pi$  una función abierta.

Ahora construiremos un atlas para  $D/G$ . Para cada  $z \in D$ , seleccionamos un disco abierto  $N_z$  cuya cerradura esté contenida en  $D$ , con las siguientes propiedades:

$$g(N_z) = N_z, \quad \text{si } g(z) = z,$$

$$g(N_z) \cap N_z = \emptyset \quad \text{si } g(z) \neq z.$$

Note que  $N_z \setminus \{z\}$  no contiene puntos fijos de  $G$ . Ya que si  $h \neq I$ , tiene un punto fijo en  $N_z$ , entonces  $h$  fija a  $z$ . El punto inverso de  $z$  con respecto a  $N_z$  también se fija por  $h$ , por lo que no hay puntos fijos de  $h$  en  $N_z \setminus \{z\}$ . Por otro lado, si  $h$  fija  $z$  entonces  $h$  es elíptico.

Para cada  $w \in D$ , sea  $\sigma$  una transformación de Möbius que envía  $w$  en cero y  $N_z$  al disco unitario  $\Delta$ . El estabilizador de  $w$  en  $G$  es de orden  $n$ , y es generado por algún elemento  $g$  elíptico, donde

$$\sigma g \sigma^{-1}(z) = z e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad z \in \Delta.$$

Sea  $p(z) = z^n$ , la función que envía  $\Delta$  sobre si mismo, con la propiedad de que para toda  $k$  y para toda  $z \in N_w$ , se tiene que

$$p \sigma g^k(z) = (\sigma g^k \sigma^{-1}(p(z)))^n = (\sigma(z) e^{\frac{2\pi i k}{n}})^n = \sigma(z)^n \quad (2.2)$$

La cual es independiente del entero  $k$ .

Tomemos como carta coordenada para  $D/G$  la pareja

$$(\pi_w(N_w), p\sigma\pi_w^{-1}),$$

donde  $\pi_w$  es la restricción de  $\pi$  sobre  $N_w$ , véase la figura 2.1. Cada punto de  $\pi_w(N_w)$  es enviado por  $\pi_w^{-1}$  a  $n$  puntos  $g^k(z)$ , en  $N_w$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ . De acuerdo a (2.2), estos puntos son enviados al mismo punto en el disco  $\Delta$  bajo  $p\sigma$ . Así,

$$\phi_w = p\sigma\pi_w^{-1}$$

es una biyección de  $\pi_w(N_w)$  sobre  $\Delta$ . Como las funciones  $p, \sigma$  y  $\pi_w$  son abiertas y continuas, concluimos que  $\phi_w$  es un homeomorfismo.

Para mostrar que los cambios de coordenadas son analíticos, estudiaremos primero la función,

$$\pi_v^{-1}\pi_u, \quad u \neq v. \quad (2.3)$$

Supongamos que  $\alpha_u \in N_u, \alpha_v \in N_v$  y  $\pi(\alpha_u) = \pi(\alpha_v) = \alpha$ , es decir, para alguna  $g \in G$  tenemos  $\alpha_v = g(\alpha_u)$ .

Supongamos que  $\alpha_u$  y por lo consiguiente  $\alpha_v$  no son puntos fijos elípticos. Entonces  $\pi_v$  es inyectiva en alguna vecindad de  $\alpha_v$ , y por consiguiente tiene una inversa local  $\pi_v^{-1}$  que envía  $\alpha$  en  $\alpha_v$ . Ambas funciones  $\pi_v g$  y  $\pi_u$  coinciden con  $\pi$ , por lo tanto son iguales en alguna vecindad de  $\alpha_u$  y toman valores en  $\pi_v(N_v)$ . Aplicando  $\pi_v^{-1}$  se tiene que  $g = \pi_v^{-1}\pi_u$  en una vecindad de  $\alpha_u$ .

Por lo tanto, la función (2.3) es analítica cerca de los puntos fijos no elípticos de  $G$ .

Mostremos ahora que los cambios de coordenada  $\phi_v\phi_u^{-1}$ , con  $u \neq v$  son analíticos en su dominio de definición, véase figura 2.2. Escribimos  $\phi_v = p_v\sigma_v\pi_v^{-1}$ , y de manera análoga para  $\phi_u$ . En los puntos correspondientes no fijos de  $G$ , se puede calcular que  $\phi_v\phi_u^{-1}$ , eligiendo una sola rama de  $p_u^{-1}$  y la función  $\phi_v\phi_u^{-1}$  resulta ser una composición de funciones analíticas. En los puntos correspondientes a los puntos fijos elípticos, el homeomorfismo  $\phi_v\phi_u^{-1}$  es analítico en una vecindad agujerada del punto en cuestión, y por lo tanto, se tiene una singularidad removible en ese punto. ◀

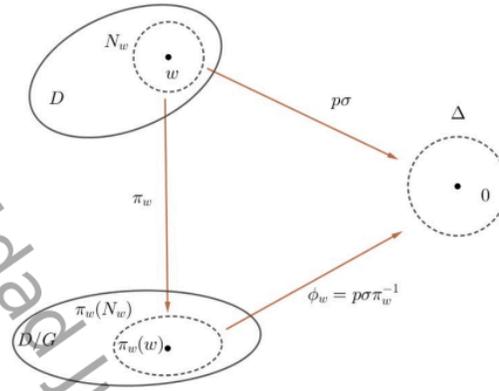


Figura 2.1: Carta coordenada.

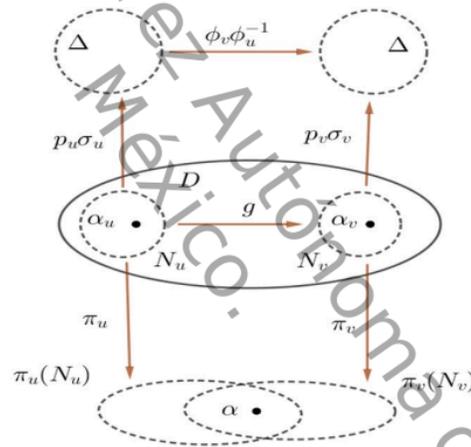


Figura 2.2: Cambio de coordenada.

**Definición 2.27.** *Dos superficies de Riemann  $S$  y  $T$  son conformemente equivalentes si y sólo si existe un biholomorfismo  $f : S \rightarrow T$ .*

**Observación 2.28.** *Las superficies de Riemann  $\mathbb{H}^2$  y  $\Delta$  son conformemente equivalentes, vía el biholomorfismo*

$$f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta, \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

Una prueba de los siguientes dos resultados puede consultarse en [JS, cap. 4, sec. 17].

**Teorema 2.29** (uniformización de Riemann). *Una superficie de Riemann  $S$  simplemente conexa es conformemente equivalente a uno de las siguientes superficies:*

- a) La esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ .
- b) El plano complejo  $\mathbb{C}$ .
- c) El disco unitario  $\Delta$ .

**Teorema 2.30.** *Sea  $S \subset \mathbb{C}$  abierto y simplemente conexo, entonces  $S = \mathbb{C}$  o bien  $S$  es conformemente equivalente al disco unitario  $\Delta$ .*

**Definición 2.31.** *Sean  $M$  y  $N$  dos superficies de Riemann conexas. Una función  $p : M \rightarrow N$  es un mapeo cubriente, si cada punto de  $N$  posee una vecindad conexa  $U$  en  $N$  que es cubierta uniformemente. Esto es, cada componente de  $p^{-1}(U)$  es enviada homeomórficamente a  $U$ .*

Para una superficie conexa  $N$ , existe un mapeo cubriente  $p : \tilde{N} \rightarrow N$  tal que  $\tilde{N}$  es simplemente conexa. La superficie  $\tilde{N}$  es llamado el cubriente universal de  $N$  y es única salvo homeomorfismo.

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [JS, cap. 4, sec. 19].

**Teorema 2.32.** *Cada superficie de Riemann  $S$  es conformemente equivalente a un espacio cociente de la forma  $\tilde{S}/\Gamma$ , donde  $\tilde{S}$  es el cubriente universal de  $S$ , el cual es conformemente equivalente a  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  ó  $\Delta$  y  $\Gamma$  es un grupo de automorfismos conformes que actúan libre y discontinuamente en  $\tilde{S}$ .*

## 2.2. Grupos Fuchsianos

Los resultados aquí presentados están basados en [B, JS, LO].

**Definición 2.33.** *Un subgrupo  $G$  de  $\mathcal{M}$  es un grupo Fuchsiano si y sólo si existe un disco  $G$ -invariante en el cual  $G$  actúa discontinuamente.*

Del teorema de uniformización de Riemann 2.29, basta considerar al disco unitario  $\Delta$ , en la definición 2.33. Por otra parte, de la observación 2.28,  $\Delta$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{H}^2$ , por lo cual un subgrupo  $G$  de  $\mathcal{M}$  será fuchsiano si y sólo si,  $G$  es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

### 2.2.1. Dominios Fundamentales

Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando en el plano hiperbólico  $\Delta$  (o  $\mathbb{H}^2$ ). Un conjunto fundamental para  $G$  es un subconjunto  $F \subset \Delta$  el cual contiene exactamente un punto de cada órbita en  $\Delta$ . Así dos puntos distintos en  $F$  no son  $G$ -equivalentes y

$$\bigcup_{f \in G} f(F) = \Delta.$$

**Definición 2.34.** Un subconjunto  $D$  del plano hiperbólico es un dominio fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  si y sólo si:

- (a)  $D$  es un dominio.
- (b) Existe algún conjunto fundamental  $F$  con  $D \subset F \subset \bar{D}$ , donde  $\bar{D}$  denota la cerradura de  $D$  relativa al plano hiperbólico.
- (c) El área hiperbólica  $A_h(\partial D) = 0$ .

**Observación 2.35.** Si  $D$  es un dominio fundamental, entonces para todo  $g \in G$  distinto de la identidad

$$g(D) \cap D = \emptyset, \quad \bigcup_{g \in G} g(\bar{D}) = \Delta$$

**Teorema 2.36.** Sea  $G$  un subgrupo de  $\mathcal{M}$  discreto y  $w_0$  un punto no fijo por ningún elemento distinto de la identidad de  $G$ , entonces existe una vecindad abierta  $D$  de  $w_0$  que no contiene puntos  $G$ -equivalentes, es decir, cada punto de  $D$  representa una órbita distinta.

*Demostración.* La órbita de  $w_0$  no se acumula en  $w_0$  pues éste es un punto del dominio de discontinuidad, por lo que existe un disco hiperbólico

$$D_h(w_0, \delta) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \rho(w_0, z) < \delta\},$$

tal que no contiene puntos  $G$ -equivalentes a  $w_0$ . Afirmamos que el disco hiperbólico  $D = D_h(w_0, \delta/2)$  tiene la propiedad que deseamos. De lo contrario, si existe  $g \in G$ , distinta de la identidad, tal que  $w, g(w) \in D_h(w_0, \delta/2)$ , entonces se sigue de la invariabilidad de la métrica hiperbólica que  $\rho(g(w_0), g(w)) \leq \delta/2$ . Lo cual implica

$$\rho(w_0, g(w_0)) \leq \rho(w_0, g(w)) + \rho(g(w), g(w_0)) < \delta/2 + \delta/2,$$

lo cual contradice la elección de  $\delta$ . ◀

Consideremos un grupo fuchsiano  $\Gamma$  actuando en  $\Delta$  y  $D$  un dominio fundamental para  $\Gamma$  en  $\Delta$ . El grupo  $\Gamma$  induce una proyección natural abierta y continua  $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma$ . También podemos usar  $\Gamma$  para inducir una relación de equivalencia en  $\overline{D}$  al identificar los puntos equivalentes y así  $\overline{D}/\Gamma$  hereda la topología cociente. Podemos considerar además otra proyección continua  $\tilde{\pi} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}/\Gamma$ . De esta manera los elementos de  $\Delta/\Gamma$  son las órbitas  $\Gamma(z)$ , mientras que los de  $\overline{D}/\Gamma$  son los conjuntos  $\overline{D} \cap \Gamma(z)$ , para  $z \in \Delta$ . Por lo que,

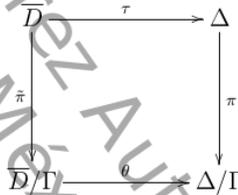
$$\pi(z) = \Gamma(z), \quad \tilde{\pi}(z) = \overline{D} \cap \Gamma(z).$$

Sea  $\tau : \overline{D} \rightarrow \Delta$  la función inclusión y definamos  $\theta : \overline{D}/\Gamma \rightarrow \Delta/\Gamma$  como  $\theta(\overline{D} \cap \Gamma(z)) = \Gamma(z)$ . Esta función está bien definida ya que para cada  $z$ ,  $\overline{D} \cap \Gamma(z) \neq \emptyset$  y

$$\theta\tilde{\pi} = \pi\tau. \tag{2.4}$$

48

El siguiente diagrama muestra la relación que existe entre las funciones y sus dominios.



Queremos estudiar la relación que existe entre  $\overline{D}/\Gamma$  y  $\Delta/\Gamma$ .

**Proposición 2.37.** Consideremos las funciones  $\pi, \tilde{\pi}, \tau$  y  $\theta$ , del diagrama anterior.

1. Las funciones  $\theta$  y  $\tau$  son inyectivas.
2. Las funciones  $\pi, \tilde{\pi}$  y  $\theta$  son suprayectivas.
3. Las funciones  $\pi, \tilde{\pi}, \theta$  y  $\tau$  son continuas.
4. La función  $\pi$  es abierta.

*Demostración.* La única afirmación que no es evidente es la continuidad de  $\theta$ . Si  $A \subset \Delta/\Gamma$  es abierto, aplicando la ecuación 2.4, se tiene

$$\tilde{\pi}^{-1}(\theta^{-1}(A)) = \overline{D} \cap \pi^{-1}(A),$$

y esto es abierto en  $\overline{D}$ , ya que  $\pi$  es continua. Para cualquier  $B$ ,  $\tilde{\pi}^{-1}(B)$  es abierto en  $\overline{D}$  si y sólo si  $B$  es abierto en  $\overline{D}/\Gamma$ . Por lo tanto,  $\theta^{-1}(A)$  es abierto en  $\overline{D}/\Gamma$  y  $\theta$  es continua. ◀

Si se cumple que  $\theta$  es un homeomorfismo, se sigue que  $\overline{D}/\Gamma$  y  $\Delta/\Gamma$  son homeomorfos.

### 2.2.2. Región de Dirichlet

En este apartado se construye la región de Dirichlet y se prueba que para el grupo modular es un dominio fundamental, una buena parte de estos resultados se establecen en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , se puede verificar que esto se aplica también al disco de Poincaré  $\Delta$ .

**Definición 2.38.** Sea  $\Gamma$  un grupo fuchsiano y  $p \in \mathbb{H}^2$  un punto que no es fijo por ningún elemento de  $\Gamma$  distinto de la identidad. La región de Dirichlet está dada por

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \rho(z, p) < \rho(z, T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}. \quad (2.5)$$

Por la invarianza de la métrica hiperbólica  $\rho$  bajo los elementos del grupo fuchsiano, la ecuación 2.5, puede definirse como:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \rho(z, p) < \rho(p, T(z)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}. \quad (2.6)$$

La región de Dirichlet puede ser descrita usando el teorema 1.41, es decir, la métrica euclidea y considerando que la función  $\sinh^2 \alpha$  es creciente, cuando  $\alpha > 0$ , así de la ecuación (2.5) y (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &= \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : \frac{|T(z) - p|^2}{\text{Im}T(z)} > \frac{|z - p|^2}{\text{Im}(z)}, \text{ para todo } T \in \Gamma \right\}, \\ &= \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : \frac{|T(z) - p|}{|z - p|} > \frac{1}{|cz + d|}, \text{ para todo } T \in \Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La última igualdad se sigue del hecho de que  $T \in \mathcal{M}$  y

$$\text{Im}T(z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}, \quad \text{donde } T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ahora consideremos el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Este subgrupo de  $\mathcal{M}$  es discreto, actúa discontinuamente en  $\mathbb{H}^2$ , y es fuchsiano. Además es generado por los elementos  $T(z) = z+1$  y  $S(z) = -1/z$ . Ahora construiremos un dominio fundamental para este grupo usando la región de Dirichlet.

**Teorema 2.39.** Un dominio fundamental para el grupo modular es

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |z| > 1, |\text{Re}(z)| < \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.8)$$

*Demostración.* Sea  $k > 1$  y  $p = ik$ , este elemento no es fijo por ningún elemento del grupo modular distinto de la identidad. Tomando  $T(z) = z + 1$  o  $T(z) = z - 1$  en la ecuación 2.6, se tiene que  $c = 0$  y  $d = 1$ . En consecuencia

$$|z \pm 1 - ik| > |z - ik|,$$

lo cual implica que  $z$  está más cerca de  $ik$  que de  $ik \pm 1$  (en la métrica euclídeana). Por consiguiente

$$D_{ik}(\Gamma) \subset \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |Re(z)| < \frac{1}{2} \right\},$$

donde  $\Gamma$  es el grupo modular. Ahora sustituyamos  $T(z) = -1/z$  en la ecuación (2.6), así  $c = 1, d = 0$ . Entonces para todo  $z \in D_{ik}(\Gamma)$  se tiene

$$\frac{|-\frac{1}{z} - ik|}{|z - ik|} > \frac{1}{|z|},$$

luego

$$|1 + ikz|^2 > |z - ik|^2.$$

Ahora escribiendo  $|1 + ikz|^2 = (1 + ikz)(1 - ik\bar{z})$ ,  $|z - ik|^2 = (z - ik)(\bar{z} + ik)$  y desarrollando se tiene que  $|z| > 1$ . En consecuencia,  $D_{ik}(\Gamma) \subset D$ . Para mostrar la otra contención usaremos las siguientes afirmaciones.

*Afirmación (1):* El conjunto  $D_{ik}(\Gamma)$  es simétrico con respecto al eje imaginario, es decir, si  $z \in D_{ik}(\Gamma)$  y  $A(z) = -\bar{z}$  es la reflexión en el eje imaginario, entonces  $A(z) \in D_{ik}(\Gamma)$ .

*Demostración:* Notemos que  $A$  es una  $h$ -reflexión que fija todos los puntos del eje imaginario. Como  $A^{-1}(z) = -\bar{z}$  y  $A^{-1}TA \in \Gamma$  para todo  $T \in \Gamma$ , se tiene que

$$\rho(A(z), ik) = \rho(z, ik) \leq \rho(z, A^{-1}TA(ik)) = \rho(A(z), TA(ik)) = \rho(A(z), T(ik)),$$

ya que  $A$  es una isometría. En consecuencia  $A(z) \in D_{ik}(\Gamma)$ .

*Afirmación (2):* Sean  $z \in D$ ,  $S \in \Gamma \setminus \{I\}$  y  $w = S(z) \in D$ . Entonces  $z, w \in \partial D$ , y  $z = w$  ó  $z$  y  $w$  son simétricos con respecto al eje imaginario.

*Demostración:* Sea  $S \in \Gamma$ , es decir

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Entonces

$$|cz + d|^2 = (cz + d)(c\bar{z} + d) = c^2|z|^2 + 2cdRe(z) + d^2 \geq c^2 - cd + d^2 \geq 1.$$

La última desigualdad es clara si  $cd \leq 0$ .

Si  $cd > 0$ , escribimos  $c^2 - cd + d^2 = (c - d)^2 + cd \geq 1$ . En consecuencia

$$Im(w) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} \leq Im(z).$$

Si intercambiamos los papeles de  $z$  y  $w$ , usando  $S^{-1}$  en lugar de  $S$ , se obtiene  $Im(z) \leq Im(w)$ . Por lo tanto,  $Im(z) = Im(w)$  y  $|cz + d|^2 = 1$ . En consecuencia cada una de las desigualdades anteriores son una igualdad. Así

$$(c - d)^2 + cd = 1, \text{ y} \tag{2.9}$$

$$c^2(|z|^2 - 1) + cd(2Re(z) + 1) = 0. \tag{2.10}$$

Tenemos tres posibilidades:

- a) Si  $c = 0, d = \pm 1, S(z) = z \pm 1$ , entonces  $z$  y  $w$  están en la recta vertical que es parte de la frontera de  $D$ , como  $z_1$  y  $w_1$  en la figura 2.3.
- b) Si  $c = \pm 1, d = 0$ , de la ecuación (2.10) se tiene que  $|z| = 1$ . En este caso  $S(z) = \frac{az \pm 1}{\pm z} = \pm a - \frac{1}{z} = \pm a - \bar{z}$ . Como  $S(z) \in D, a = 0, -1$  o  $1$ . Si  $a = 0$  entonces  $S(z) = -\frac{1}{z}$ . En este caso,  $z$  y  $S(z)$  son como  $z_2$  y  $w_2$  en la figura 2.3, (posiblemente  $z_2 = w_2 = i$ ). Si  $a = \pm 1$  entonces  $z = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ . En este caso  $z = z_3$  o  $w_3$ , en la figura 2.3 y  $S(z) = z$ .
- c) Si  $c = d = \pm 1$ , la ecuación (2.10) implica que  $|z| = 1, Re(z) = -\frac{1}{2}$ , así que  $z = z_3$ . Como  $S(z_3) \in D$  y  $S(z_3)$  tiene la misma parte imaginaria que  $z_3$ , se tiene  $S(z_3) = z_3$  o  $S(z_3) = w_3$ .

En todo caso,  $S(z) = z$  ó  $S(z)$  y  $z$  son simétricos con respecto al eje imaginario.

Ahora supongamos que  $z_0 \in D$ . Entonces como  $D_{ik}$  es una región fundamental, existe  $T \in \Gamma$  tal que  $T(z_0) \in D_{ik}(\Gamma) \subset D$ . Por la afirmación (2),  $z_0 = T(z_0)$  ó  $z_0$  y  $T(z_0)$  son simétricos con respecto al eje imaginario y por la afirmación (1),  $z_0 \in D_{ik}(\Gamma)$ . Por lo tanto  $D = D_{ik}(\Gamma)$ . ◀

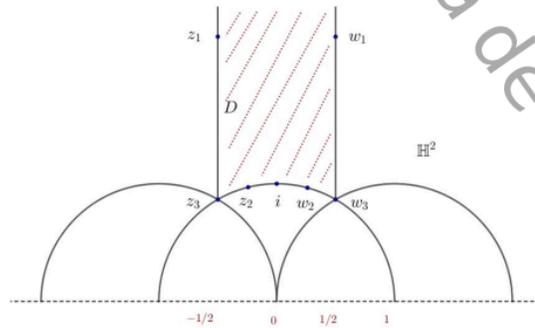


Figura 2.3: Dominio fundamental para el grupo modular.

**Observación 2.40.** a) Si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{H}^2$ , y  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$  es la isometría dada en la ecuación (1.10), entonces para cada  $g \in \Gamma$  se tiene que  $fgf^{-1}$  es una isometría en  $\Delta$ . Además  $\bar{\Gamma} := f\Gamma f^{-1}$  es un grupo fuchsiano en  $\Delta$  isomorfo a  $\Gamma$ , vía el isomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi_f : \Gamma &\xrightarrow[\sim]{} \bar{\Gamma}, \\ g &\longmapsto \Psi_f(g) := fgf^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

b) Si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{H}^2$  con un número finito de generadores, entonces  $\bar{\Gamma}$  es un grupo fuchsiano actuando en  $\Delta$  con un número finito de generadores. Para cada generador  $g \in \Gamma$ ,  $fgf^{-1}$  es un generador en  $\bar{\Gamma}$ .

c) Debido a que el grupo modular está generado por  $T(z) = z + 1$  y  $S(z) = -\frac{1}{z}$ , es isomorfo al grupo fuchsiano en  $\Delta$  dado por

$$\bar{\Gamma} := \langle fTf^{-1}, fSf^{-1} \rangle,$$

donde

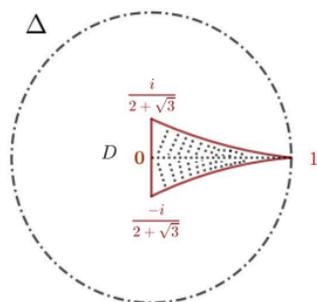
$$fTf^{-1}(w) = \frac{(1 + \frac{i}{2})w - \frac{i}{2}}{\frac{iw}{2} + (1 - \frac{i}{2})}, \quad \text{y } fSf^{-1}(w) = -w. \quad (2.12)$$

Ahora usaremos la región fundamental descrita por la ecuación (2.8) y la enviaremos en  $\Delta$ , mediante la función  $f$ .

Calculamos las imágenes de puntos estratégicos de  $\mathbb{H}^2$ , bajo  $f$  y recordando que bajo transformaciones de Möbius rectas o circunferencias son enviadas en rectas o circunferencias.

Así, veamos las imágenes de rectas específicas:

1.  $f(-\frac{1}{2} + ti)$ ,  $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
2.  $f(\frac{1}{2} + ti)$ ,  $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
3.  $f(-1) = i$ ,  $f(1) = -i$ .
4.  $f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{-i}{2\sqrt{3}}$ ,  $f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{i}{2\sqrt{3}}$ , si  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $f(ti) = 1$ .

Figura 2.4: Dominio fundamental inducido por el grupo modular en  $\Delta$ .

### 2.3. Grupos Kleinianos en $\mathbb{H}^3$

Los resultados aquí presentados están basados en [MT].

En este apartado mencionaremos grupos kleinianos en el espacio hiperbólico de dimensión tres. Para esto daremos algunos resultados que nos ayudarán a discutir el concepto de grupo kleiniano y algunas propiedades que éste posee.

Consideremos la bola unitaria de dimensión tres, en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$ ;

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}.$$

Podemos definir una métrica dada por la métrica riemanniana:

$$ds_x^2 = \frac{4|dx|^2}{(1 - |x|^2)^2}.$$

Al espacio riemanniano  $\mathbb{H}^3 := (\mathbb{B}^3, ds^2)$ , le llamaremos espacio hiperbólico de dimensión tres.

Dada una curva suave  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3$ , la longitud hiperbólica se define como

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}.$$

Para dos puntos  $x, y \in \mathbb{H}^3$  la distancia hiperbólica entre  $x, y$  está dada por

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

donde  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .

En  $\hat{\mathbb{R}}^3$  definimos la función *similitud*,  $S : \hat{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^3$ , donde

$$S(x) = \lambda Ax + b, \quad S(\infty) = \infty, \quad \text{para } \lambda > 0, b \in \mathbb{R}^3, A \in O(3),$$

donde  $O(3)$  es el grupo de transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos también la función *reflexión fundamental*,  $J: \hat{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^3$ , por

$$J(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad J(0) = \infty, \quad J(\infty) = 0.$$

**Observación 2.41.** Las funciones similitud y reflexión fundamental, son automorfismos en  $\hat{\mathbb{R}}^3$ .

**Definición 2.42.** Una transformación de Möbius en  $\hat{\mathbb{R}}^3$ , es un automorfismo en  $\hat{\mathbb{R}}^3$  que preserva orientación y es obtenida como una composición finita de similitudes y reflexiones fundamentales.

Sea  $E$  un subconjunto de  $\hat{\mathbb{R}}^3$ , denotamos por  $\text{Möb}(E)$  al grupo de transformaciones de Möbius que deja invariante a  $E$ , en particular tenemos  $\text{Möb}(\mathbb{H}^3)$ .

**Proposición 2.43.** Una transformación de Möbius en  $\mathbb{H}^3$ , es una isometría con respecto a la métrica hiperbólica de  $\mathbb{B}^3$ , es decir, satisface

$$\frac{|T'(x)|}{1 - |T(x)|^2} = \frac{1}{1 - |x|^2}, \quad x \in \mathbb{H}^3.$$

**Definición 2.44.** Un espacio topológico  $M$  conexo y Hausdorff, es llamado variedad hiperbólica de dimensión tres, si tiene una familia  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  llamada atlas, la cual satisface las siguientes condiciones:

1. Cada  $U_\alpha$  es un subconjunto abierto de  $M$  y  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta de  $M$ .
2. Cada  $\phi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $U_\alpha$  en un subconjunto abierto de  $\mathbb{H}^3$ .
3. Si  $U_\alpha \cap U_\beta$  es no vacío, entonces

$$\phi_\alpha \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es un difeomorfismo que preserva orientación y la métrica hiperbólica.

**Definición 2.45.** Un subgrupo  $\Gamma$  de las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  que preservan orientación, es un grupo kleiniano, si  $\Gamma$  actúa discontinuamente en  $\mathbb{H}^3$ .

**Observación 2.46.** Existe una identificación de las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  que preservan orientación con  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Diremos que un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es libre de torsión, si no tiene elementos de orden finito fuera de la identidad.

**Definición 2.47.** Para un grupo kleiniano  $\Gamma$ , definimos el poliedro de Dirichlet con centro en  $a \in \mathbb{H}^3$  como:

$$P_a = \{p \in \mathbb{H}^3 : d(a, p) \leq d(p, \gamma(a)), \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\},$$

donde  $a$  no es fijo por ningún  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ .

Para un grupo kleiniano  $\Gamma$ , consideremos la órbita de un punto  $p \in \mathbb{H}^3$ , bajo la acción de  $\Gamma$ , el cual es el conjunto:

$$\Gamma(p) = \{\gamma(p) : \gamma \in \Gamma\}.$$

Dado que  $\Gamma$  actúa discontinuamente en  $\mathbb{H}^3$ ,  $\Gamma(p)$  tiene puntos de acumulación sólo en la frontera, esto es en  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Los puntos de acumulación son llamados puntos límites de  $\Gamma$  y el conjunto de todos éstos, es el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$ , el cual es cerrado.

5 Para un grupo kleiniano  $\Gamma$ , el complemento del conjunto límite  $\Omega(\Gamma) = \mathbb{S}^2 \setminus \Lambda(\Gamma)$ , es el dominio de discontinuidad de  $\Gamma$ .

Si  $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ , diremos que  $\Gamma$  es un grupo kleiniano de primera clase, en caso contrario diremos que es de segunda clase.

**Definición 2.48.** Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano libre de torsión, una variedad  $(\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$  posiblemente con frontera, denotada por  $M_\Gamma$  es llamada variedad kleiniana. El interior es  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , el cual admite una estructura hiperbólica denotada por  $N_\Gamma$ .

**Observación 2.49.** Si  $\Gamma$  es de primera clase, entonces  $M_\Gamma = N_\Gamma$ .

## Dinámica de Funciones Racionales

En este capítulo estudiaremos algunos resultados de la dinámica de las funciones racionales definidas de la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$  en si mismo. Los resultados aquí presentados están basados en [Be, CG].

Una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  está definida como el cociente de dos polinomios  $P, Q$ , es decir,

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad R(\infty) := R(1/z)|_{z=0},$$

donde  $P, Q$  son primos relativos. Los polos de  $R$  son los ceros de  $Q$ , y la función definida en  $\hat{\mathbb{C}}$  es analítica cuyo grado es el máximo de los grados de  $P$  y  $Q$ . Denotaremos por  $\mathcal{R}$  al espacio de funciones racionales en  $\hat{\mathbb{C}}$  dotado de la topología con respecto a la convergencia uniforme, véase [Be].

Para analizar la dinámica de una familia de funciones racionales, es importante considerar que muchas propiedades dinámicas se preservan bajo conjugación. En particular, decimos que dos funciones racionales  $R$  y  $S$  son conjugadas analíticamente, si existe  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $S = gRg^{-1}$ , esto es:

$$R \sim S \text{ si y sólo si existe } g \in \mathcal{M} \text{ tal que } S = gRg^{-1}. \quad (3.1)$$

Nótese que la conjugación es una relación de equivalencia. Además, si  $R$  y  $S$  son conjugadas, entonces  $\deg(R) = \deg(S)$ . Además, si  $S = gRg^{-1}$ , entonces  $S^n = gR^n g^{-1}$ .

Uno de los problemas principales en el estudio de la iteración de una función racional  $R$ , es mostrar la convergencia de la sucesión  $\{R^n\}$  generada a partir de una condición inicial  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , donde  $R^n$  es la  $n$ -ésima composición de  $R$  consigo misma.

Dado  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , definimos los siguientes conjuntos:

1. La órbita de  $z$  bajo  $R$ ,

$$\mathcal{O}_R(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : w = R^n(z), n \geq 0\}.$$

2. La órbita de  $z$  hacia atrás bajo  $R$ ,

$$\mathcal{O}_R^-(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(w) = z, n \geq 0\}.$$

3. La órbita completa de  $z$  bajo  $R$ ,

$$\mathcal{GO}_R(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : w = R^n(z), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea  $R$  una función racional, decimos que  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  es un punto:

- (1) Periódico de  $R$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $R^n(z) = z$ . Al menor  $n \in \mathbb{N}$  que satisface esta propiedad se le llama el período de  $z$  bajo  $R$ . Si  $n = 1$  decimos que  $z$  es un punto fijo de  $R$ .
- (2) Eventualmente periódico de período  $n$ , si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $R^m(z)$  es un punto periódico de período  $n$ .

**Definición 3.1.** Sea  $f$  una función analítica y  $z$  un punto fijo de  $f$  con multiplicador  $\lambda = Df(z)$ , donde  $Df(z)$  denota la derivada compleja de  $f$  en  $z$ . Decimos que  $z$  es:

1. Atractor si  $|\lambda| < 1$ ; si  $\lambda = 0$  decimos que  $z$  es super atractor.
2. Repulsor si  $|\lambda| > 1$ .
3. Indiferente si  $|\lambda| = 1$ .

Si una función analítica  $f$  tiene un punto fijo indiferente,  $z$ , el multiplicador  $\lambda$  es de módulo uno,  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  y  $\theta$  puede ser racional o irracional y la dinámica en una vecindad de  $z$  está determinada por la aritmética de  $\theta$ .

**Definición 3.2.** Sea  $f$  una función analítica y  $z$  un punto fijo de  $f$  con multiplicador  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ . Decimos que  $z$  es un punto:

1. Parabólico, si  $\theta$  es racional.
2. Siegel, si  $\theta$  es irracional y  $f$  es analíticamente conjugada a  $\lambda z$  en una vecindad de  $z$ .
3. Cremer, si  $\theta$  es irracional y no es de Siegel.

Si ocurre el caso 2, decimos que  $f$  es linealizable y al dominio máximo de linealización se le llama Disco de Siegel.

5 Sea  $f$  una función analítica no constante en  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Entonces  $f$  tiene una expansión en serie de Taylor en una vecindad de  $z_0$ ,

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

donde  $a_k \neq 0$ , y  $k \in \mathbb{N}$  es determinado por la condición de que el límite,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k},$$

exista y sea diferente de cero. Al entero  $k$  se le llama valencia de  $f$  en  $z_0$  y es denotado por  $v_f(z_0)$ .

### 3.1. Dinámica de las Transformaciones de Möbius

En este apartado analizaremos la dinámica de las transformaciones de Möbius,  $\mathcal{M}$ , que hemos definido en 1.15, que son justamente las funciones racionales definidas en  $\hat{\mathbb{C}}$  que tienen grado uno.

Las transformaciones de Möbius, son funciones que pueden ser determinadas sus iteradas de manera explícita, como mostraremos enseguida. Evidentemente una transformación de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Proposición 3.3.** Sea  $T \in \mathcal{M}$  con un único punto fijo  $\alpha$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = \alpha.$$

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{M}$ . Consideremos el caso cuando  $T$  solo tiene un punto fijo. Supongamos que  $T$  fija  $\infty$ , entonces  $T(z) = z + a$ ,  $a \neq 0$ , y por lo tanto  $T^n(z) = z + na$ . Luego  $T^n(z) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Ahora supongamos que  $T$  tiene solo un punto fijo  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Consideremos  $g(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ , que envía  $\alpha$  en  $\infty$ . Definamos  $S(z) = gTg^{-1}(z)$ , notemos que

$$S(\infty) = gTg^{-1}(\infty) = gT(\alpha) = g(\alpha) = \infty.$$

Luego  $S$  es una traslación y en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(z) = \infty$ . Además  $S^n(z) = gT^n g^{-1}(z)$ . Reemplazando  $z$  por  $g(z)$  y aplicando  $g^{-1}$  por la derecha se tiene  $g^{-1}S^n(g(z)) = T^n(z)$ . Por lo tanto,  $T^n(z) \rightarrow g^{-1}(\infty) = \alpha$ .

La demostración anterior proporciona un método para calcular explícitamente la forma de  $T^n$ , donde  $T^n = g^{-1}S^n g$ , con  $g$  y  $S$  conocidos.

Sea  $T \in \mathcal{M}$  con exactamente dos puntos fijos distintos en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Primero analizaremos el caso cuando  $T$  fija  $0, \infty$ . Entonces  $T(z) = kz$  y  $T^n(z) = k^n z$ ,  $k \in \mathbb{C}$ . Claramente  $T^n$  fija  $0$  e  $\infty$ . Además para todo  $z \in \mathbb{C}$  se cumple:

**Lema 3.4.** Si  $T \in \mathcal{M}$  y fija  $0$  e  $\infty$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se cumple:

- (a)  $T^n(z) \rightarrow 0$ , si  $|k| < 1$ ,
- (b)  $|T^n(z)| = |z|$ , si  $|k| = 1$ ,
- (c)  $T^n(z) \rightarrow \infty$ , si  $|k| > 1$ .

Si  $|k| = 1$ , se tiene lo siguiente:

- (1)  $k$  es una  $n$ -ésima raíz de la unidad, y  $T^n$  es la identidad.
- (2)  $k$  no es raíz de la unidad y los puntos  $T^n(z)$  son densos en la circunferencia de  $|z|$ .

Si  $\text{Fix}(T) = \{\alpha, \beta\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ , construimos  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $g$  envía  $\alpha$  en  $0$  y  $\beta$  en  $\infty$ . Por ejemplo si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tenemos

$$g(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

Sea  $S = gTg^{-1}$ , así se sigue que  $S$  fija  $0$  e  $\infty$ . Como  $g$  y  $T$  envían circunferencias en circunferencias por el lema 3.4, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.** Sea  $T \in \mathcal{M}$  con dos puntos fijos distintos. Entonces  $T^n(z)$  converge a un punto fijo de  $T$ , o se mueve cíclicamente a través de un conjunto finito de puntos, o bien forman un subconjunto denso en la circunferencia con centro en  $0$  y radio  $|z|$ .

Como antes se puede dar un método para encontrar  $T^n$  de manera explícita.

Consideremos el siguiente:

**Ejemplo 3.6.** Sea

$$R(z) = \frac{3z - 2}{2z - 1}. \quad (3.2)$$

Afirmamos que

$$R^n(z) = \frac{(2n+1)z - 2n}{2nz - (2n-1)}. \quad (3.3)$$

Hagamos la prueba por inducción. Es claro que se cumple para  $n = 1$ . Supongamos que se cumple para  $n - 1$ , es decir

$$R^{n-1}(z) = \frac{(2n-1)z - 2(n-1)}{2(n-1)z - (2n-3)}.$$

Usando notación matricial, se tiene

$$R^n = R \circ R^{n-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-1 & -2(n-1) \\ 2(n-1) & -(2n-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -(2n-1) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se cumple la afirmación para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Reduciendo la ecuación (3.3), se tiene que es igual a:

$$1 + \frac{z-1}{2nz - (2n-1)}.$$

Notemos que el único punto fijo en  $\mathbb{C}$  de  $R$  es 1, por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(z) = 1$ .

La proposición 3.3, el lema 3.4 y la proposición 3.5, muestran las iteradas de una función racional de grado uno y, en particular, se puede observar que la dinámica de los elementos de  $\mathcal{M}$  es relativamente simple. Por lo que a partir de la siguiente sección analizaremos el caso de funciones racionales de grado mayor a uno.

### 3.2. Conjuntos de Julia y Fatou

A continuación, estudiaremos algunas propiedades para funciones racionales de grado mayor o igual a dos.

Para analizar el tipo de punto fijo que presenta una aplicación racional  $R$  en  $\infty$ , usualmente, primero se considera el cambio de coordenada mediante la aplicación  $\frac{1}{z}$ , y posteriormente, la función

$$g(z) = \frac{1}{R(1/z)}.$$

En el caso cuando  $R = P$ , donde  $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces  $P(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$ . En este caso tenemos que

$$g(z) = \frac{1}{P(1/z)} = \frac{z^n}{a_n + \dots + a_0 z^n}.$$

Por lo que  $0$  es un punto fijo super atractor para  $g$ , luego  $\infty$  es un punto fijo super atractor para  $P$ .

**Definición 3.7.** Un punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  es un punto crítico de una aplicación racional  $R$  si no es inyectiva en cualquier vecindad de  $z$ ; equivalentemente, si la derivada de  $R$  se anula en  $z$  ó es un polo múltiple de  $R$ . A la imagen bajo  $R$  de un punto crítico se le llama valor crítico.

Si  $R$  es una función de grado  $d$  y  $w$  no es un valor crítico, entonces  $R^{-1}\{w\}$  tiene exactamente  $d$  preimágenes distintas  $z_1, \dots, z_d$ . Como ninguno de los  $z_j$  son puntos críticos, existen vecindades  $N$  de  $w$  y  $N_1, \dots, N_d$  de  $z_1, \dots, z_d$ , respectivamente, de tal manera que  $R$  es biyectiva de cada  $N_j$  sobre  $N$ . En consecuencia existe

$$R_j^{-1} : N \rightarrow N_j,$$

a la cual llamamos una rama de  $R^{-1}$  en  $w$ .

Como  $R$  es inyectiva en alguna vecindad de  $\mathbb{C}$  y  $R'$  es distinta de cero o polo, se tiene que  $v_f(z) = 1$ , para todo  $z$ , a excepción de un conjunto finito de  $z$ . Así

$$\sum_z (v_R(z) - 1) < \infty,$$

donde  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.8** (Fórmula de Riemann- Hurwitz). *Para una función racional  $R$ ,*

$$\sum (v_R(z) - 1) = 2deg(R) - 2. \quad (3.4)$$

*Demostración.* Primero, notamos que ambos lados de la igualdad (3.4), son invariantes bajo conjugación, así es suficiente probar (3.4), para algún conjugado de  $R$ . Sea  $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $R(\xi) \neq \xi$ ,  $v_R(\xi) = 1$  y que  $R(z) = \xi$  tenga  $d$  soluciones distintas. Consideremos  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $g$  envía  $\xi$  a  $\infty$  y  $R(\xi)$  a 1. Si escribimos  $S = gRg^{-1}$ , entonces  $S$  tiene la mismas propiedades que  $R$ , y etiquetando a  $S$  como  $R$ , podemos suponer:

1.  $R(\infty) = 1$ .
2.  $R$  tiene polos simples distintos en  $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ .
3.  $v_R(\infty) = 1$ .

Las condiciones anteriores implican que la valencia de  $R$  en  $\infty$  y en cada  $z_j$  es uno, en consecuencia la suma (3.4), es la misma que

$$\sum (v_R(z) - 1), \quad (3.5)$$

sumado sobre todo  $z \in \mathbb{C}$  excepto en los puntos  $z_j$ . Para todo  $z$ ,  $R(z) \in \mathbb{C}$  y así el valor de (3.5) es el número de ceros de  $R'(z)$ .

Si  $R = P/Q$ , con  $P$  y  $Q$  coprimos, entonces

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

Notemos que la aplicación racional anterior está en su forma reducida, pues los polinomios del numerador y denominador no tienen ceros en común, entonces

$$0 = P'(z_j)Q(z_j) - P(z_j)Q'(z_j),$$

pero así  $P(z_j) = 0$  (que es falso, pues  $P/Q$  está en su forma reducida) o  $Q'(z_j) = 0$  (que es falso, ya que los  $z_j$  son ceros simples de  $Q$ ). Se sigue entonces que (3.5) es el número de ceros de  $R'(z)$ , también y es el grado de  $P'Q - PQ'$  o equivalentemente el grado del polinomio  $R'Q^2$ .

**4** Calculemos el grado de este polinomio encontrando su orden de crecimiento en  $\infty$ . Observemos que  $Q(z)^2/z^{2d}$  tiende a un número finito distinto de cero cuando  $z \rightarrow \infty$ . El hecho de que  $v_R(\infty) = 1$ , significa que  $R$  es inyectiva en alguna vecindad de  $\infty$  y así

$$R(1/z) = 1 + az + \dots,$$

cerca del origen, con  $a \neq 0$ . Derivando ambos lados y reemplazando  $z$  por  $1/z$ , se tiene que  $z^2 R'(z)$  tiene un límite finito distinto de cero en  $\infty$  y así se tiene que (3.5) es  $2d - 2$ . ◀

**Teorema 3.9.** **1** Sea  $R$  una aplicación racional de grado  $d$ , entonces el número de puntos críticos (contando multiplicidades) es  $2(d - 1)$ .

*Demost. 5* ción. Sin pérdida de generalidad (salvo conjugación en el conjunto de funciones racionales), podemos suponer que  $\infty$  no es un punto fijo ni valor crítico de  $R$ , y además  $R(\infty) = 0$ . Entonces,  $R$  tiene la siguiente forma

$$R(z) = \frac{a_0 + \dots + a_{d-1}z^{d-1}}{b_0 + \dots + z^d}.$$

Los puntos críticos de  $R$ , son las soluciones de  $R'(z) = 0$ , las cuales a su vez, son los ceros del polinomio de grado  $2(d - 1)$ :

$$(b_0 + \dots + z^d)(a_1 + \dots + (d - 1)a_{d-1}z^{d-2}) - (a_0 + \dots + a_{d-1}z^{d-1})(b_1 + \dots + dz^{d-1}).$$

Finalmente, la demostración se sigue del teorema fundamental de álgebra. ◀

**Teorema 3.10.** **1** Sea  $R$  una función racional de grado  $d$ , entonces  $R$  tiene a lo más  $d + 1$  puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

*Demost. 1* ración. Sea  $R = P/Q$ , donde  $P, Q$  son polinomios coprimos. Entonces  $R(z) = z$  es equivalente a  $P(z) - zQ(z) = 0$ . La cual tiene al menos una solución  $\alpha$ . Sea  $M$  la transformación de Möbius que envía  $\alpha$  en  $\infty$ ; se tiene que  $h = MRM^{-1}$  fija  $\infty$ . Luego, existen  $r$  y  $s$  polinomios coprimos tales que  $h = r/s$  con  $\deg(r) > d > \deg(s)$ , así  $h(z) = z$  tiene a lo más  $d$  soluciones. En consecuencia  $R$  tiene a lo más  $d + 1$  puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . ◀

**Definición 3.11.** **29** Sean  $X$  un espacio topológico,  $f : X \rightarrow X$  una función y  $E \subset X$ . Entonces  $E$  es:

- a) **1** Invariante hacia adelante, si  $f(E) = E$ .
- b) Invariante hacia atrás, si  $f^{-1}(E) = E$ .
- c) Completamente invariante, si  $f(E) = E = f^{-1}(E)$ .

**Observación 3.12.** Si  $f$  es una función suprayectiva, entonces los conceptos de invarianza hacia atrás y completamente invariante coinciden.

**Teorema 3.13.** Sean  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos,  $E \subset \hat{\mathbb{C}}$  finito y completamente invariante bajo  $R$ . Entonces,  $E$  tiene a lo más dos elementos.

*Demostración.* Supongamos que  $E$  es completamente invariante bajo  $R$  y además tiene  $k$  elementos. Dado que  $E$  es finito,  $R$  debe actuar como una permutación para  $E$  y de esta manera existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $R^n$  es la función identidad en  $E$ . Supongamos que  $R^n$  es de grado  $d$ . Entonces para todo  $w \in E$ , la ecuación  $R^n(z) = w$  tiene  $d$  soluciones contando multiplicidades y por la fórmula de Riemann-Hurwitz 3.8, aplicado a  $R^n$ , tenemos que  $k(d-1) \leq 2(d-1)$ , y como  $d \geq 2$ , se tiene que  $k \leq 2$ . ◀

**Observación 3.14.** Las aplicaciones racionales son abiertas, por ser analíticas y no constantes.

**Teorema 3.15.** Sea  $f$  una función continua y abierta de un espacio topológico en sí mismo y  $E \subset X$  completamente invariante bajo  $f$ . Entonces los conjuntos  $X \setminus E$ ,  $E^\circ$ ,  $\partial E$ ,  $\bar{E}$  son completamente invariantes.

*Demostración.* Es claro que  $X \setminus E$  es completamente invariante, ya que si no lo fuera, tampoco lo sería  $E$ . Como  $f$  es continua en  $X$ ,  $f^{-1}(E^\circ)$  es un subconjunto abierto de  $f^{-1}(E)$ , y por la invarianza se tiene que es abierto en  $E$ , de esta manera  $f^{-1}(E) \subset E^\circ$ . Similarmente, como  $f$  es una función abierta,  $f(E^\circ)$  es un subconjunto abierto de  $E$ . Entonces  $f(E^\circ) \subset E^\circ$  y  $E^\circ \subset f^{-1}(f(E^\circ)) \subset f(E^\circ)$ , luego  $E^\circ$  es completamente invariante.

Ahora como  $E, X \setminus E$  y  $E^\circ$  son completamente invariantes, se sigue que  $\bar{E}$  y  $\partial E$ , también lo son. ◀

**Definición 3.16.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $D$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . La familia  $\mathcal{F}$  es normal, si toda sucesión  $\{f_n\}$  en  $\mathcal{F}$  tiene una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  en  $\mathcal{F}$  que converge uniformemente en discos compactos contenidos en  $U$ .

**Definición 3.17.** Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas en un dominio  $D$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  es equicontinua en  $z_0 \in D$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $z \in D$  y para todo  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$d(z_0, z) < \delta \text{ implica que } d(f(z_0), f(z)) < \varepsilon.$$

La familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $D$ , si es equicontinua en cada punto de  $D$ .

Los siguientes resultados caracterizan la normalidad de una familia de funciones analíticas en un dominio de la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , para una demostración consultar [Be, cap. 3, sec. 3].

**Teorema 3.18** (Montel). Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $D$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Si la familia  $\mathcal{F}$  omite al menos tres puntos en  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $\mathcal{F}$  es normal.

**Teorema 3.19.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $D$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Supongamos que existe una constante  $m > 0$  tal que para cada  $f \in \mathcal{F}$  existen  $a_f, b_f, c_f \in \hat{\mathbb{C}}$  de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) La función  $f$  no toma los valores  $a_f, b_f, c_f$  en  $D$ ,
- 2)  $\min\{d(a_f, b_f), d(b_f, c_f), d(a_f, c_f)\} \geq m$ .

Entonces,  $\mathcal{F}$  es normal en  $D$ .

**Teorema 3.20.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $D$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . La familia  $\mathcal{F}$  es equicontinua en  $D$  si y sólo si es normal en  $D$ .

**Definición 3.21.** Sea  $R$  una aplicación racional. Definimos el conjunto de Fatou  $F(R)$  como:

$$F(R) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \{R^n\} \text{ es normal en } D_\varepsilon(z), \text{ para algún } \varepsilon > 0\},$$

y el conjunto de Julia como:

$$J(R) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(R).$$

### 3.2.1. Propiedades de los Conjuntos de Julia y Fatou

En esta subsección enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia de una función racional  $R$ . Los resultados expuestos aquí, están basados en [Be, CG].

**Teorema 3.22.** Dada una aplicación racional  $R$  que no es constante, se tiene que  $F(R^p) = F(R)$  y  $J(R^p) = J(R)$ , para cada  $p \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $S = R^p$ . Como  $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$  es una subfamilia de  $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ , entonces esta familia es equicontinua, ya que  $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$  es equicontinua, por lo que  $F(R) \subset F(S)$ . Ahora como cada  $R^k$  satisface la condición de Lipschitz, la familia  $\mathcal{F}_k = \{R^k(S^n) : n \geq 0\}$  es equicontinua, ya que la familia  $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$  lo es. En particular cada  $\mathcal{F}_k$  es equicontinua en  $F(S)$  y en consecuencia lo es en la unión finita  $\bigcup_{n=0}^k \mathcal{F}_n$ . Como esta unión es  $\{R^n : n \geq 0\}$ , la familia  $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$  es equicontinua en  $F(S)$ , y así  $F(S) = F(R)$ . Finalmente como  $J(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(R)$ , se tiene que  $J(R^p) = J(R)$ . ◀

**Teorema 3.23.** Sea  $R$  una aplicación racional. Entonces los conjuntos de Fatou  $F(R)$  y Julia  $J(R)$  son completamente invariantes.

*Demostración.* Del teorema 3.15 es suficiente mostrar que  $F(R)$  es completamente invariante, y como  $R$  es suprayectiva, solo necesitamos mostrar que  $R$  es invariante hacia atrás.

Si  $z_0 \in R^{-1}(F(R))$  y  $w_0 = R(z_0)$ , entonces  $w_0 \in F(R)$ . Así para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(w, w_0) < \delta$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$d(R^n(w), R^n(w_0)) < \varepsilon.$$

Como  $R$  es continua, existe  $r > 0$  tal que si  $d(z, z_0) < r$ , entonces  $d(R(z), R(z_0)) < \delta$ , y en consecuencia  $d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$ . Luego la familia  $\{R^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$  es equicontinua en  $z_0$ , por lo tanto, lo es en  $R^{-1}(F(R))$ , como  $R^{-1}(F(R))$  es abierto entonces,  $R^{-1}(F(R)) \subset F(R)$ .

Para la otra contención. Sea  $z_0 \in F(R)$  y  $w_0 = R(z_0)$ . Como  $z_0 \in F(R)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $d(z, z_0) < \delta$ , entonces  $d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$ . Notemos ahora que  $B = \{z : d(z, z_0) < \delta\}$  es una vecindad abierta de  $z_0$ , con la propiedad de que  $R(B)$  es una vecindad abierta de  $w_0$ , por ser  $R$  una función abierta. Si  $w \in R(B)$ , entonces  $w = R(z)$  para algún  $z \in B$ , así

$$d(R^n(w), R^n(w_0)) = d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $w_0 \in F(R)$  y  $F(R) \subset R^{-1}(F(R))$ . En consecuencia,  $F(R)$  es completamente invariante, como también  $J(R)$ . ◀

**Definición 3.24.** Diremos que  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  es un punto excepcional de  $R$ , si la órbita completa  $\mathcal{GO}_R(z)$  es finita, al conjunto de tales puntos lo denotamos con  $E(R)$ .

**Teorema 3.25.** Una aplicación racional  $R$  de grado mayor o igual a dos, tiene a lo más dos puntos excepcionales. Si  $E(R) = \{\alpha\}$ , entonces  $R$  es conjugada a un polinomio de tal manera que  $\alpha$  se corresponde con  $\infty$ . Si  $E(R) = \{\alpha, \beta : \alpha \neq \beta\}$ , entonces  $R$  es conjugada a alguna función de la forma  $z \mapsto az^d$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden con  $0$  e  $\infty$ , respectivamente.

*Demostración.* De la definición  $E(R)$ , es completamente invariante bajo  $R$  y como consecuencia del teorema 3.13, tiene a lo más dos puntos. Después de una conjugación conveniente. Existen cuatro posibilidades (salvo conjugación):

1.  $E(R) = \emptyset$ ,
2.  $E(R) = \{\infty\} = \mathcal{GO}_R(\infty)$ ,
3.  $E(R) = \{0, \infty\}$ ,  $\mathcal{GO}_R(0) = \{0\}$ ,  $\mathcal{GO}_R(\infty) = \{\infty\}$ ,
4.  $E(R) = \{0, \infty\} = \mathcal{GO}_R(0) = \mathcal{GO}_R(\infty)$ .

**1** En el primer caso, no hay nada que aclarar. En el segundo caso, tenemos que  $R$  debe cumplir que  $R^{-1}(\infty) = \infty$  y esta condición implica que  $R$  debe tener un polo en  $\infty$ , y no hay otros polos fuera de éste; así  $R$  debe ser conjugada a un polinomio. En el tercer caso, notemos que de nuevo se puede conjugar a un polinomio, pues se tienen las mismas condiciones sobre los polos,  $R^{-1}(0) = 0$ , luego es claro que el único cero de la aplicación es 0; por lo tanto, la función racional es conjugada a la función  $az^d$ , para  $d \geq 0$ . Por último, se tiene que  $R(0) = \infty$  y  $R(\infty) = 0$ , lo que implica que  $R$  tiene todos sus ceros y polos en  $\{0, \infty\}$ . Así  $\infty$  es su cero y 0 es su polo. Por lo que  $R$  debe ser conjugada a  $az^d$ ,  $d \geq 0$ . ◀

Para una demostración de los siguientes resultados, ver [Be, cap. 4, sec. 1].

**4** **Corolario 3.26.** Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos, entonces los puntos excepcionales de  $R$ ,  $E(R)$  están en  $F(R)$ .

**Teorema 3.27.** La órbita hacia atrás de  $z$  bajo  $R$ ,  $\mathcal{O}_R^-(z)$  es finita si y sólo si  $z$  es un punto excepcional.

**Teorema 3.28.** Si  $R$  es una aplicación racional de grado mayor o igual a dos, entonces el conjunto de Julia  $J(R)$  es infinito.

*Demostración.* Mostraremos primero que  $J(R)$  es no vacío. Si  $J(R)$  es vacío, entonces se sigue que la familia  $\{R^n\}$  es normal en todo  $\hat{\mathbb{C}}$ , en consecuencia existe una subsucesión  $\{R^{n_k}\}$  de  $\{R^n\}$  que converge uniformemente en toda la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , a una función holomorfa  $S : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eventualmente, es decir para una  $k$  suficientemente grande el grado de  $R^{n_k}$  es igual al grado de  $S$ , ahora como el grado de  $R^n$  es igual a  $d^n$  y este diverge a  $\infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue entonces que el grado de  $S$  es  $\infty$ . Pero es una contradicción. Por lo tanto  $J(R)$  no es vacío. Ahora  $J(R)$  tiene al menos un punto  $\alpha$ , como  $J(R)$  es completamente invariante, si  $J(R)$  es finito, entonces  $\alpha$  debe ser un punto excepcional, del corolario 3.26, es imposible, pues los puntos excepcionales están en  $F(R)$ . Por lo tanto,  $J(R)$  es infinito. ▶

Una pregunta natural es si habrá un resultado análogo al teorema 3.28, para el conjunto de Fatou, que garantice su no vacuidad, la respuesta es no y se puede ver en el ejemplo de Lattès (ver [Be, cap.4, sec. 3]), para el cual el conjunto de Fatou es vacío. Este ejemplo está dado por la función racional de grado cuatro:

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}.$$

**1** **Teorema 3.29.** Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos. Supongamos que  $A$  es subconjunto cerrado, completamente invariante en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . Entonces:

- a)  $A$  tiene a lo más dos elementos y  $A \subset E(R) \subset F(R)$ , o bien,
- b)  $A$  es infinito y además  $J(R) \subset A$ .

**Demostración.** Del teorema 3.13, sabemos que  $A$  tiene a lo más dos elementos ó es infinito. Si  $A$  es finito entonces sólo tiene puntos excepcionales y en consecuencia se sigue a). Por otra parte, si  $A$  es infinito, por ser completamente invariante también lo es su complemento  $B$ , y en consecuencia cada  $R^n$  transforma el conjunto abierto  $B$  en si mismo. Por lo tanto, la familia  $\{R^n\}$  restringida a  $B$ , omite tres puntos dados en  $A$  y por el teorema de Montel 3.18, se sigue que la familia  $\{R^n\}$  es normal en  $B$ , en consecuencia  $B \subset F(R)$  y  $J(R) \subset A$ . ◀

**Observación 3.30.** Del teorema anterior se tiene que  $J(R)$  es el conjunto más pequeño, cerrado y completamente invariante bajo  $R$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , que contiene al menos tres puntos, aunque en realidad contiene una infinidad.

**Teorema 3.31.** Si  $R$  es una aplicación racional, entonces  $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$  o bien  $J(R)$  tiene interior vacío.

**Demostración.** Notamos que la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  es la unión ajena del interior, frontera de  $J(R)$  y  $F(R)$ . Además cada uno de estos conjuntos son completamente invariante. Si  $F(R)$  es no vacío, entonces  $F(R) \cup \partial J(R)$  es un conjunto completamente invariante, cerrado e infinito, y por la minimalidad de  $J(R)$ , se sigue que  $J(R) \subset \partial J(R)$ . ◀

**Teorema 3.32.** Si  $R$  es una aplicación racional de grado mayor o igual a dos, entonces  $J(R)$  es perfecto y por tanto no numerable.

**Demostración.** Sabemos que  $J(R)$  es infinito, se sigue entonces que el conjunto de puntos de acumulación  $J'$  es no vacío y además es cerrado. Puesto que  $R$  tiene grado finito y es continua, se tiene que  $R(J') \subset J'$ . Por lo que  $J' \subset R^{-1}(J')$ , y por ser  $R$  una aplicación abierta se sigue que  $R^{-1}(J') \subset J'$ . Así  $J'$  es completamente invariante e infinito. De la minimalidad de  $J(R)$ , se sigue que  $J(R) \subset J'$ , luego  $J(R) = J'$ . Por lo tanto,  $J(R)$  no tiene puntos aislados, es decir,  $J(R)$  es un conjunto perfecto y no numerable. ◀

La prueba de los siguientes resultados, puede consultarse en [Be, cap. 4, sec. 2].

**Teorema 3.33.** Sea  $R$  una aplicación racional de grado mayor o igual a dos, y  $V$  una vecindad de  $z$  tal que  $z \in J(R)$ . Entonces:

- $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(V) \supset \hat{\mathbb{C}} \setminus E(R)$ ,
- para todo  $n$  suficientemente grande,  $J(R) \subset R^n(V)$ .

**Proposición 3.34.** Sea  $R$  una aplicación racional de grado al menos dos. Entonces:

- Si  $z$  no es un punto excepcional, entonces  $J(R)$  está contenido en la cerradura de  $\mathcal{O}_R^-(z)$ .
- Si  $z \in J(R)$ , entonces  $J(R)$  es la cerradura de  $\mathcal{O}_R^-(z)$ .

**Proposición 3.35.** Sean  $R$  y  $S$  funciones racionales de al menos grado dos. Si  $R$  y  $S$  conmutan, entonces  $J(R) = J(S)$ .

**Teorema 3.36.** Para una función racional  $R$ , el conjunto de Julia  $J(R)$  es la cerradura del conjunto de puntos periódicos repulsivos.

**Teorema 3.37.** Si  $R$  es una función racional de grado al menos dos, entonces  $J(R)$  está contenido en la cerradura del conjunto de puntos periódicos de  $R$ .

*Demostración.* Consideremos un conjunto abierto  $V$ , tal que  $V \cap J(R) \neq \emptyset$ , deseamos demostrar que  $V$  contiene algún punto periódico de  $R$ . Tomemos  $w \in V \cap J(R)$  y supongamos que éste no es un valor crítico de  $R^2$ , si lo fuera elegimos otro cercano a éste que no lo sea. Como el grado de  $R$  es al menos dos y  $w$  no es un punto crítico, existen al menos cuatro puntos distintos en  $R^{-2}\{w\}$ . Consideremos tres de ellos distintos a  $w$ , y construyamos vecindades  $V_0, V_1, V_2, V_3$  alrededor de las preimágenes de  $w$ , cada una de estas vecindades disjuntas dos a dos, con  $V_0 \subset V$ , así  $R^2$  es un homeomorfismo de cada  $V_i$  sobre  $V_0$ . Consideremos  $S_i : V_0 \rightarrow V_i$  la inversa local de  $R^2$ . Si para cada  $z \in V_0$ , para toda  $i = 1, 2, 3$  y  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $R^n(z) \neq S_i(z)$  entonces  $\{R^n\}$  sería normal en  $V_0$  lo que es imposible. Así, existen  $z \in V_0$ , algún  $i \in \{1, 2, 3\}$  y algún  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $R^n(z) = S_i(z)$ , en consecuencia  $R^{2+n}(z) = R^2(S_i(z)) = z$ , por lo tanto  $z$  es un punto periódico de  $R$  en  $V$ .  $\blacktriangleleft$

Los siguientes resultados muestran condiciones para el cual el conjunto de Julia de una función racional es toda la esfera de Riemann. La demostración del siguiente resultado lo presentaremos en la sección 4.1.1, ya que se requieren técnicas aún no mencionadas.

**Teorema 3.38.** Si todos los puntos críticos de una función racional  $R$ , de grado mayor o igual a dos, son eventualmente periódicos. Entonces  $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.39.** Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos. Entonces  $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$  si y sólo si existe un punto  $z$  cuya órbita hacia adelante  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base numerable de la topología de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Sea  $D$  el conjunto de las  $z$  tal que la órbita hacia adelante  $\mathcal{O}_R(z)$  es denso en  $\hat{\mathbb{C}}$ , esto es  $z \in D$  si y sólo para toda  $k \in \mathbb{N}$ , existe algún  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $R^n(z) \in B_k$ , lo cual implica que

$$D = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} R^{-n}(B_k).$$

Supongamos que  $D = \emptyset$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , hagamos  $A_k = \hat{\mathbb{C}} \setminus B_k$  y  $E_k = \bigcap_{n \geq 1} R^{-n}(A_k)$ . Como  $D = \emptyset$ , se sigue que

$$\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{k \geq 1} E_k.$$

Por el teorema de Baire,  $\hat{C}$  no es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Así para alguna  $k$  la cerradura de  $E_k$  tiene interior no vacío, digamos  $W$ . Sin embargo, como  $E_k$  es cerrado, existe algún subconjunto abierto no vacío  $W$  de  $E_k$ . Esto implica que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R^n(W) \subset A_k$ . Así en  $W$  la función  $R^n$  no toma valores en  $B_k$ , por lo que  $W \subset F(R)$ . Esto demuestra que si  $J(R) = \hat{C}$ , entonces  $D \neq \emptyset$ , es decir, existe algún  $z \in \hat{C}$  tal que la órbita hacia adelante  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en  $\hat{C}$ .

Supongamos ahora que  $J(R) \neq \hat{C}$ , es decir,  $F(R) \neq \emptyset$ , y que existe algún  $z \in \hat{C}$  cuya órbita hacia adelante  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en la esfera  $\hat{C}$ . Notemos primero que  $z \notin J(R)$ , si así fuera se tendría que  $\mathcal{O}_R(z) \subset J(R)$  en consecuencia  $\mathcal{O}_R(z)$  no es densa en  $\hat{C}$ . Luego  $z \in C$ , donde  $C$  es alguna componente del conjunto de Fatou  $F(R)$ . Consideremos las componentes

$$C, R(C), R^2(C), \dots$$

de  $F(R)$ . Como la órbita  $\mathcal{O}_R(z)$  es densa en  $\hat{C}$ , existe algún  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $R^N(C) \cap C \neq \emptyset$ . En consecuencia  $R^N(C) = C$ . Podemos suponer que  $N$  es la mínima con esta propiedad. Además, si  $C_1$  es cualquier componente de  $F(R)$ , entonces para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R^n(z) \in C_1$ , y así  $R^n(C) = C_1$ . En consecuencia,

$$F(R) = C \cup R(C) \cup \dots \cup R^{N-1}(C),$$

donde los conjuntos de la derecha son mutuamente disjuntos. De esto se sigue que  $C$  es una componente completamente invariante bajo  $R^N$  y que el conjunto  $\{R^{kN}(z) : k \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $C$ . Lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $J(R) = \hat{C}$ . ◀

Haremos notar algunas características topológicas del conjunto de Julia y Fatou, en particular nos enfocaremos al concepto de conexidad. El siguiente resultado es consecuencia de los teoremas dados en este capítulo. El siguiente resultado muestra la relación entre el conjunto de Julia y las componentes del conjunto de Fatou.

**Teorema 3.40.** *Sea  $R$  una función racional. Entonces  $J(R)$  es conexo si y sólo si cada componente de  $F(R)$  es simplemente conexa*

Al considerar componentes del conjunto de Fatou completamente invariantes, obtenemos el siguiente resultado cuya demostración está basada en [Be, cap. 5, sec. 2].

**Teorema 3.41.** *Supongamos que  $R$  es una función racional de grado mayor o igual a dos, y  $F_0$  una componente completamente invariante de  $F(R)$ . Entonces:*

- 1)  $\partial F_0 = J(R)$ ,
- 2)  $F_0$  es simplemente conexa o bien infinitamente conexa,
- 3) Las otras componentes de  $F(R)$  son simplemente conexas,

4)  $F_0$  es simplemente conexa si y sólo si  $J(R)$  es conexa.

*Demostración.* Como  $F_0$  es completamente invariante, también su cerradura  $\overline{F_0}$ , ahora por la minimalidad de  $J(R)$ , teorema 3.29,  $J(R) \subset \overline{F_0}$ . Como  $J(R)$  es ajeno a  $F_0$ , se sigue que  $J(R) = \partial F_0$ , y esto demuestra 1).

Para demostrar 2), supongamos que  $F_0$  es una componente completamente invariante con una cantidad finita de conexidades  $k$ , denotamos por  $E_1, \dots, E_k$  las componentes del complemento de  $F_0$ . Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que cada  $E_j$  es completamente invariante bajo  $R^m$  y como  $J(R)$  es infinito, también algún  $E_j$ , digamos  $E_1$ . La minimalidad de  $J(R^m)$ , implica que  $J(R) \subset E_1$  y así

$$J(R) \subset J(R^m) \subset E_1.$$

Por tanto, de 1) cada  $E_j$  contiene  $J(R)$ , así  $k = 1$  y se sigue 2).

Para demostrar 3), notemos que de 1),  $J(R) \cup F_0 = \overline{F_0}$  y éste es conexo, lo cual se sigue del hecho de que la cerradura de un conjunto conexo es conexo. Ahora del hecho de que un conjunto abierto  $D$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , el complemento es conexo si y sólo si, cada componente de  $D$  es simplemente conexa, se sigue que todas las componentes del complemento de  $F_0$  son simplemente conexas, pues son justamente las otras componentes de  $\overline{F_0}$ .

La prueba de 4) se sigue directamente de 1) y del hecho de que un dominio es simplemente conexo si y sólo si su frontera es conexa. ◀

Como una consecuencia de este teorema se tienen los siguientes resultados:

**Corolario 3.42.** Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos. Si  $F(R)$  es conexo, entonces:

1.  $F(R)$  es simplemente conexo y  $J(R)$  es conexo, o bien
2.  $F(R)$  es infinitamente conexa y  $J(R)$  tiene una cantidad infinita de componentes.

Cuando  $R$  es un polinomio, se tiene que  $\{\infty\}$  es completamente invariante, por lo que también la componente no acotada de  $F(R)$  que la contiene, así se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.43.** Sea  $F(R)$  el conjunto de Fatou de un polinomio no lineal. Entonces:

1. La componente no acotada de  $F(R)$  es simplemente conexa o bien infinitamente conexa,
2. Cada componente acotada de  $F(R)$  es simplemente conexa.

Para una función racional  $R$ , definimos la deficiencia en un punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  como:

$$\delta_R(z) = v_R(z) - 1,$$

donde  $\delta_R(z)$  es la valencia de  $R$  en  $z$ . Para un subconjunto  $A$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ , definimos la deficiencia de  $R$  sobre  $A$  como:

$$\delta_R(A) = \sum_{z \in A} \delta_R(z),$$

y es aditiva, es decir para dos subconjuntos ajenos  $A$  y  $B$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  se tiene:

$$\delta_R(A \cup B) = \delta_R(A) + \delta_R(B).$$

De la fórmula de Riemann-Hurwitz 3.8, se tiene que:

$$\delta_R(\hat{\mathbb{C}}) = 2deg(R) - 2,$$

y para el caso de un polinomio  $P$ ,  $\delta_P(\mathbb{C}) = deg(P) - 1$ .

Nos preguntamos si podemos tener muchas componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou, la respuesta es el siguiente resultado.

**Teorema 3.44.** *El conjunto de Fatou  $F(R)$  de una aplicación racional de grado al menos dos, contiene a lo más dos componentes completamente invariantes, y si tiene dos, entonces cada una es simplemente conexa.*

*Demostración.* Sea  $k$  el número de componentes completamente invariantes de  $F(R)$ ,  $F_1, \dots, F_k$ , entonces del teorema 3.41, cada  $F_j$  es simplemente conexa y por lo tanto, la característica de Euler de  $F_j$ ,  $\chi(F_j) = 1$ . Por la fórmula de Riemann-Hurwitz 3.8, se tiene

$$\delta_R(F_j) = (d-1)\chi(F_j) = d-1$$

donde  $\delta_R(F_j)$  representa la deficiencia de  $F_j$  y por consiguiente

$$k(d-1) = \sum_{j=1}^k \delta_R(F_j) \leq \delta_R(\hat{\mathbb{C}}) = 2d-2.$$

Por lo tanto,  $k \leq 2$ . ◀

Como consecuencia casi inmediata se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.45.** *El conjunto de Fatou  $F(R)$  de una función racional  $R$ , contiene 0, 1, 2 ó bien  $\infty$  componentes.*

*Demostración.* Si el grado de  $R$  es 1, es trivial. Si el grado es mayor o igual a dos, supongamos que  $F(R)$  tiene un número finito de componentes  $F_1, \dots, F_k$ , cada  $F_j$  es completamente invariante bajo alguna iterada de  $R^n$ , aplicando el teorema anterior a esta iterada, se tiene que  $k \leq 2$ . ◀

## 3.2.2. Teorema de Clasificación de Fatou

Consideremos la sucesión

$$W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$$

las imágenes de las iteradas de  $W$  bajo una aplicación racional  $R$  de grado al menos dos, donde  $W$  es una componente de Fatou.

**Definición 3.46.** Una componente  $W$  del conjunto de Fatou  $F(R)$  es:

- 1) Periódica, si para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R^n(W) = W$ ,
- 2) Eventualmente periódica, si para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $R^m(W)$  es periódica,
- 3) Errante, si para cada  $m, n \in \mathbb{N}^*$  con  $m \neq n$ ,  $R^m(W) \cap R^n(W) = \emptyset$ .

Una componente errante del conjunto de Fatou es llamada dominio errante de  $R$ .

**Definición 3.47.** Sea  $W$  una componente de Fatou, periódica de periodo  $n$ , de una función racional  $R$ , decimos que  $W$ :

- 1) Es una componente atractora, si contiene un punto fijo atractor de  $R^n$ .
- 2) Es una componente super atractora, si contiene un punto fijo super atractor de  $R^n$ .
- 3) Es una componente parabólica, si existe un punto fijo racional indiferente de  $R^n$  en la frontera de  $W$ , y  $W$  está contenido en el dominio de atracción de este punto fijo.
- 4) Es un disco de Siegel, si  $R^n : W \rightarrow W$  es conjugada analíticamente a una rotación del disco unitario en si mismo.
- 5) Es un anillo de Herman, si  $R^n : W \rightarrow W$  es conjugada analíticamente a una rotación de algún anillo centrado en cero.

Para una prueba del siguiente resultado consultar [Be, cap. 7, sec 1], ver también [CG, cap. IV, sec. 2]. Este resultado es conocido como teorema de clasificación de las componentes de Fatou. El cual fue estudiado por Julia y Fatou, la existencia de dominios del tipo 4) y 5) fue demostrada posteriormente por Siegel y Herman, respectivamente.

**Teorema 3.48.** Si  $W$  es una componente periódica de Fatou de una aplicación racional  $R$ , de período  $n$ , entonces la componente  $W$  es una de las siguientes: atractora, super atractora, parabólica, disco de Siegel, ó anillo de Herman.

Para la demostración del siguiente resultado consultar [Be, cap. 9, sec. 3].

**Teorema 3.49.** Si  $R$  es una aplicación racional de grado mayor o igual a dos, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- 1) La cuenca inmediata de cada ciclo (super) atractor de  $R$  contiene un punto crítico de  $R$ .
- 2) Cada cuenca inmediata de un ciclo racionalmente indiferente de  $R$  contiene un punto crítico de  $R$ .
- 3) Sea  $\{W_1, \dots, W_n\}$  un ciclo de discos de Siegel o anillos de Herman de  $R$ , entonces la cerradura del conjunto de puntos poscríticos,

$$\bigcup_{n \geq 0} R^n(C_R) \supset \bigcup_{j=0}^n \partial W_j,$$

donde  $C_R$  es el conjunto de puntos críticos de  $R$ .

En este capítulo presentamos parte de la relación que existe entre la teoría de grupos kleinianos y la dinámica de las funciones racionales. Existen similitudes que se presentan entre los conjuntos límite, y dominio de discontinuidades de un grupo kleiniano, y su contraparte los conjuntos de Julia y de Fatou de una función racional. Las propiedades de los primeros, es desde el punto de vista de una acción discontinua de un subgrupo de transformaciones de Möebius, y los últimos desde el punto de vista de la composición iterada de una función racional. Tanto la acción discontinua como la iteración de funciones racionales, son consideradas en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  y subdominios de ésta. Dichas similitudes es lo que se conoce como diccionario de Sullivan.

### 4.1. Teorema de Sullivan

En este apartado expondremos un importante teorema debido a Sullivan, el cual establece que las aplicaciones racionales no tienen componentes de Fatou errantes. Para una prueba de este resultado ver apéndice B.6.

**Teorema 4.1** (Dominios no errantes de Sullivan). *Cada componente de Fatou  $F(R)$  de una función racional  $R$  es eventualmente periódica.*

#### 4.1.1. Aplicaciones del Teorema de Sullivan

Después de haber enunciado los teoremas 3.48 y 4.1, podemos dar la siguiente demostración.

*Demostración del teorema 3.38.* Supongamos que cada punto crítico de  $R$  es eventualmente periódico y que el conjunto de Fatou  $F(R)$  es no vacío, deseamos llegar a una contradicción. Por ser  $F(R)$  distinto del vacío el teorema de Sullivan 4.1, implica que existe alguna componente de de Fatou  $F(R)$ , la cual es periódica bajo alguna iterada de  $R$ . Por el teorema de clasificación de Fatou 3.48, este ciclo de componentes es un ciclo super atractor, atractor, racionalmente indiferente, disco de Siegel, o anillo de Herman. En el primer caso existe algún punto crítico periódico, mientras que en los otros casos, existe un punto crítico con órbita infinita, por el teorema 3.49. Por hipótesis ninguno de estos casos puede ocurrir, así  $F(R)$  debe ser vacío. Por tanto  $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$ . ◀

En virtud de que es muy complicado encontrar ejemplos no triviales e interesantes de funciones racionales de grado mayor que dos, cuyo conjunto de Julia sea toda la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$ , en lo que resta de este apartado, construiremos algunos ejemplos de funciones racionales de grado dos, tales que cumplan las condiciones del teorema 3.38. En [Be, cap.4, sec. 3], se puede apreciar la complejidad de esta tarea, ya que haciendo uso de la función elíptica de Weierstrass, y por ende, de técnicas de análisis complejo avanzado, es posible construir una familia de funciones racionales de grado cuatro que satisfice dicha propiedad. Esta familia, en particular contiene a la función racional de Lattès. El detalle técnico, nada trivial, consiste en garantizar que todos los puntos críticos de la función en cuestión, sean eventualmente periódicos.

Consideremos la familia de funciones racionales de grado dos:

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2}{b_0 + b_1z + b_2z^2}, \quad \text{donde } a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C} \text{ y } a_2, b_2 \text{ no son ambos ceros.} \quad (4.1)$$

Vía una conjugación analítica en  $\mathbb{C}$ , la familia (4.1), se puede llevar a otra que depende solo de cuatro parámetros. Si además, pedimos que la familia fije los puntos  $0, 1, -1$ , se obtiene la familia a dos parámetros:

$$R(z) = \frac{(1+b)z + az^2}{1 + az + bz^2}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (4.2)$$

Notemos que los puntos críticos de (4.2) son:

$$1) \ c_1 = \frac{-\sqrt{-a^2b + b^3 + 2b^2 + b} - a}{a^2 - b^2 - b},$$

$$2) \ c_2 = \frac{\sqrt{-a^2b + b^3 + 2b^2 + b} - a}{a^2 - b^2 - b}.$$

Para calcular los puntos de periodo dos de  $R$  calculamos,

$$R^2(z) = \frac{z(az + b + 1)(z^2(a^2 + b^2 + b) + 2a(b + 1)z + b + 1)}{z(a^3z^2 + a^2z(2bz^2 + b + 3) + a(b(3b + 5)z^2 + b + 3) + bz(b(z^2 + 2) + 3)) + 1}. \quad (4.3)$$

Como  $R$  es una función racional de grado dos, la segunda iterada  $R^2$  es de grado cuatro, así  $R^2$  tiene a lo más cinco puntos fijos incluyendo los puntos fijos de  $R$ . Por tanto, los puntos de periodo dos de  $R$  son:

$$1) \ q_1 = -\frac{\sqrt{b(a^2 - 1)(b + 2)} + a(b + 2)}{2a^2 + b},$$

$$2) \ q_2 = \frac{\sqrt{b(a^2 - 1)(b + 2)} - a(b + 2)}{2a^2 + b}.$$

**Proposición 4.2.** <sup>5</sup> Sea  $R$  una aplicación racional de grado dos que fija  $-1, 0$  y  $1$ . Si  $R(c_j) \in \{-1, 0, 1\}$ , para  $j = 1, 2$ , entonces  $c_j \in \{-1, 0, 1\}$ , para  $j = 1, 2$  y  $J(R) \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$R(c_1) = p_k, R(c_2) = p_l, \text{ para } p_k, p_l \in \{0, 1, -1\}, k, l \in \{1, 2, 3\},$$

se obtiene que los parámetros  $a, b$  son tales que  $c_1, c_2 = 0, 1, -1$ , es decir, los puntos críticos son los puntos fijos, en consecuencia las funciones obtenidas tienen una componente de Fatou super atractora. Por tanto el conjunto de Julia es un subconjunto propio de  $\hat{\mathbb{C}}$ . ◀

Este resultado nos dice que si le pedimos a la función  $R$  que sus puntos críticos caigan en la primera iterada en un punto fijo, la función resultante fija los puntos críticos. En consecuencia el conjunto  $F(R)$  es diferente del vacío.

**Teorema 4.3.** <sup>5</sup> Sea  $R$  una aplicación racional de grado dos que fija  $-1, 0, 1$ . Si  $R(c_1) \in \{-1, 0, 1\}$  y  $R^2(c_2) \in \{-1, 0, 1\}$ , entonces  $c_1 \in \{-1, 0, 1\}$  y  $F(R)$  es diferente del vacío.

*Demostración.* Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$R(c_1) = p_k, R^2(c_2) = p_l, \text{ para } p_k, p_l \in \{0, 1, -1\}, k, l \in \{1, 2, 3\},$$

se obtienen valores para los parámetros  $a, b$ , tales que el punto crítico  $c_1 = 0, 1, -1$ , se queda fijo, aunque el otro punto crítico  $c_2$  no sea necesariamente un punto fijo  $p_k$ , para  $k = 1, 2, 3$ . En consecuencia las aplicaciones racionales obtenidas tienen una componente de Fatou atractora. Por lo tanto el conjunto de Julia es un subconjunto propio de  $\hat{\mathbb{C}}$ . ◀

Para encontrar ejemplos de aplicaciones racionales con conjunto de Julia igual a  $\hat{\mathbb{C}}$ , resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$R(c_1) = c_2, R^2(c_2) = p_k, \text{ para } p_k \in \{0, 1, -1\}.$$

Resolviendo encontramos las siguientes aplicaciones racionales:

$$1. R_1(z) = \frac{4z + 2iz^2}{-1 + 2iz + 5z^2},$$

sus puntos críticos son  $c_1 = \frac{i}{3}$ ,  $c_2 = \frac{-i}{2}$ . La órbita que contiene ambos puntos críticos es:  $c_1 \mapsto c_2 \mapsto 2i \mapsto 0$ . Por lo que  $c_1$  y  $c_2$  son eventualmente fijos. Por el teorema 3.38, se concluye que el conjunto de Julia de  $R_1$  es todo  $\hat{\mathbb{C}}$ .

$$2. R_2(z) = \frac{(3+i)z + (1+i)z^2}{-2+i + (1+i)z + 5z^2},$$

sus puntos críticos son  $c_1 = -\frac{1}{3}(1+2i)$ ,  $c_2 = \frac{1}{13}(-1+8i)$ . La órbita que contiene ambos puntos críticos es:  $c_1 \mapsto c_2 \mapsto \frac{1}{37}(11-8i) \mapsto -1$ . Así  $c_1$  y  $c_2$  son eventualmente fijos. Por el teorema 3.38, el conjunto de Julia de  $R_2$  es todo  $\hat{\mathbb{C}}$ .

$$3. R_3(z) = \frac{(3-i)z + (1-i)z^2}{-2-i + (1-i)z + 5z^2},$$

los puntos críticos son  $c_1 = \frac{1}{3}(-1+2i)$ ,  $c_2 = -\frac{1}{13}(1+8i)$ . La órbita de los puntos críticos es:  $c_1 \mapsto c_2 \mapsto \frac{1}{37}(11+8i) \mapsto -1$ . Así  $c_1, c_2$  son eventualmente fijos, en consecuencia  $R_3$  no tiene componentes de Fatou. Del teorema 3.38, el conjunto de Julia de  $R_3$  es todo  $\hat{\mathbb{C}}$ .

$$4. R_4(z) = \frac{(-3+i)z + (1-i)z^2}{2+i + (1-i)z - 5z^2},$$

los puntos críticos son  $c_1 = \frac{1}{3}(-1+2i)$  y  $c_2 = \frac{1}{13}(1+8i)$ . La órbita que incluye  $c_1$  y  $c_2$  es la siguiente:  $c_1 \mapsto c_2 \mapsto \frac{1}{37}(11+8i) \mapsto 1$ . Notemos que  $c_1$  y  $c_2$  son eventualmente fijos. Por el teorema 3.38, el conjunto de Julia de  $R_4$  es todo  $\hat{\mathbb{C}}$ .

En general, siguiendo esta misma idea se pueden construir otros ejemplos resolviendo  $R(c_1) = c_2$  y  $R^k(c_2) \in \{-1, 0, 1\}$ , para  $k > 2$ . Solo que al incrementar el valor de  $k$ , se incrementa el grado de la ecuación y en consecuencia la complejidad.

## 4.2. Teorema de Ahlfors

En este apartado, mencionaremos un importante resultado en cuanto al dominio de discontinuidades de un grupo kleiniano finitamente generado. Los resultados aquí mencionados están basados en [MT].

Una superficie de Riemann es analíticamente finita, si es una superficie de Riemann cerrada con un número finito de puntos removidos.

Para un grupo kleiniano de segunda clase, queremos investigar algunas propiedades de  $\partial M_\Gamma = \Omega(\Gamma)/\Gamma$ . Esto es escribir a  $\partial M_\Gamma$ , como la unión finita de superficies de Riemann, cerradas con una cantidad de puntos removidos, el cual es conocido como el teorema de finitud de Ahlfors, para una demostración consultar [MT, cap.4].

**Teorema 4.4** (Finitud de Ahlfors, dimensión tres). *Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano finitamente generado. Entonces  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  es la unión finita de superficies de Riemann analíticamente finitas.*

**Observación 4.5.** *Las condiciones del teorema de finitud de Ahlfors, 4.4, están establecidas para dimensión tres, donde se considera el cociente  $\Omega(\Gamma)/\Gamma \simeq \bigcup_{k=1}^n S_k$ , donde  $S_k$  son superficies de Riemann analíticamente finitas,  $\Omega(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2$  y  $\Gamma$  es un subgrupo de las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  finitamente generado que actúa discontinuamente en  $\mathbb{H}^3$ .*

*En este trabajo en el capítulo 2, comenzamos nuestro estudio sobre los grupos kleinianos en dimensión dos. Ahora bien, tenemos que el teorema de Ahlfors, también se cumple en dimensión dos,*

ver [MNTU, cap. 5] y [BF, cap. 3, sec. 8]. Así  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  es la unión de superficies de Riemann analíticamente finitas, donde  $\Omega(\Gamma) \subset \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\Gamma$  es un grupo kleiniano finitamente generado y no elemental, actuando en  $\hat{\mathbb{C}}$  o en un subconjunto de éste. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.6.** Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano finitamente generado, no elemental y  $U$  es una componente de  $\Omega(\Gamma)$ , entonces existe un elemento  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$  tal que  $\gamma(U) = U$ . En otras palabras,  $\Omega(\Gamma)$  no tiene componentes errantes.

### 4.2.1. Aplicaciones del Teorema de Ahlfors

En esta sección ejemplificaremos el teorema de Ahlfors 4.4, en su versión dos dimensional. Para esto consideremos una vez más el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . La demostración del siguiente resultado está basado en [LO], (ver también [JS]).

**Proposición 4.7.** El conjunto límite del grupo modular es  $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$ .

*Demostración.* Para probar este resultado usaremos el teorema 2.14, por lo que necesitamos encontrar una sucesión de transformaciones de Möbius distintas, tales que converjan a algún punto de  $\mathbb{R}$ . Sea  $x \in \mathbb{R}$ , consideremos una sucesión  $\frac{b_n}{d_n}$ , con  $b_n, d_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $d_n \neq 0$  tales que  $\frac{b_n}{d_n} \rightarrow x$ . Supongamos que el máximo común divisor de  $b_n, d_n$  sea 1, es decir,  $(b_n, d_n) = 1$ , así existe  $a_n, c_n \in \mathbb{Z}$  tales que  $a_n d_n - b_n c_n = 1$ .

Notemos que las transformaciones de Möbius:

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

son todas distintas, además  $T_n(0) = \frac{b_n}{d_n} \rightarrow x$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n, d_n \neq 0$ . En consecuencia  $x \in \Lambda(\Gamma)$ , es decir  $x$  es un punto límite de  $\Gamma$ . Notemos que  $z+1 \in \Gamma$ , por lo que  $T^n(z) = z+n$ . En consecuencia  $T^n(1) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , luego  $\infty \in \Lambda(\Gamma)$ . Por lo tanto el conjunto límite del grupo modular es  $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$ .

Hemos mostrado que todo punto de  $\hat{\mathbb{R}}$  es un punto de acumulación del grupo modular. Por la proposición 4.7, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.8.** El dominio de discontinuidad del grupo modular es,  $\Omega(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus \hat{\mathbb{R}}$ .

Notemos que  $\Omega(\Gamma)$  tiene dos componentes en  $\hat{\mathbb{C}}$ , esto es  $\mathbb{H}^2$  y  $-\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$ , las cuales son simplemente conexas. Además  $\mathbb{H}^2$  y  $-\mathbb{H}^2$  no son  $\Gamma$ -equivalentes, es decir, no existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que si  $z \in \mathbb{H}^2$  ( $-\mathbb{H}^2$ ) entonces  $\gamma(z) \in -\mathbb{H}^2$  ( $\mathbb{H}^2$ ). En consecuencia ningún elemento de  $\mathbb{H}^2$  se relaciona con algún elemento de  $-\mathbb{H}^2$ .

Así  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  tiene dos componentes y por el teorema de uniformización de Riemann 2.29, se sigue que cada componente de  $\Omega(\Gamma)$  es conformemente equivalente al disco unitario  $\Delta$ . Luego  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  es la unión de dos superficies de Riemann cada una con un punto removido.

### 4.3. Propiedades del Diccionario

En esta sección detallamos las propiedades que relacionan el conjunto límite de un grupo kleiniano con el conjunto de Julia de una función racional.

De la definición del conjunto límite de un grupo kleiniano, de los teoremas 2.12, 2.14, se resume en el siguiente resultado.

**Teorema 4.9.** Sea  $G$  un grupo kleiniano no elemental, entonces el conjunto límite  $\Lambda(G)$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es cerrado, no vacío y  $G$ -invariante; con respecto a estas propiedades es minimal.
2. Es un conjunto perfecto.
3. Es un conjunto no numerable.
4. El conjunto de puntos fijos loxodrómicos es denso en  $\Lambda(G)$ .
5. Tiene interior vacío ó  $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ .
6. Es igual al conjunto

$$\{w \in \hat{\mathbb{C}} : w = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z), g_n \in G\}.$$

Ahora enlistemos las propiedades que tiene el conjunto de Julia de una función racional, los teoremas 3.23, 3.22, y 3.36 se resumen en el siguiente resultado.

**Teorema 4.10.** Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos, entonces el conjunto de Julia  $J(R)$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es cerrado, no vacío y  $R$ -invariante; con respecto a estas propiedades es minimal.
2. Es un conjunto perfecto.
3. Es un conjunto no numerable.
4. El conjunto de puntos periódicos repulsivos es denso en  $J(R)$ .
5. Tiene interior vacío ó  $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$ .

Ahora bien, los complementos en la esfera de Riemann, del conjunto límite y del conjunto de Julia, respectivamente, se relacionan como sigue.

Para el dominio de discontinuidad de un grupo kleiniano, los teoremas 2.17, 2.18 y 2.15, se resumen en el siguiente resultado.

**Teorema 4.11.** *Sea  $G$  un grupo kleiniano no elemental, entonces el dominio de discontinuidad  $\Omega(G)$  tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es abierto y  $G$ -invariante; con respecto a estas propiedades es maximal.*
2. *El grupo  $G$  actúa discontinuamente en  $\Omega(G)$ .*
3. *Tiene a lo más dos componentes completamente invariantes.*
4. *El número de componentes conexas es 0, 1, 2 ó  $\infty$ .*

Por otra parte, para el conjunto de Fatou de una función racional, los teoremas 3.22, 3.23 y 3.44 se resumen en el siguiente resultado.

**Teorema 4.12.** *Sea  $R$  una función racional de grado mayor o igual a dos, entonces el conjunto de Fatou  $F(R)$  tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es abierto y  $R$ -invariante; con respecto a estas propiedades es maximal.*
2. *La familia  $\{R^n\}$  es normal en  $F(R)$ .*
3. *Tiene a lo más dos componentes completamente invariantes.*
4. *El número de componentes conexas es 0, 1, 2 ó  $\infty$ .*

Las propiedades anteriores se resumen en las siguientes tablas.

Grupos Kleinianos	Funciones Racionales
Conjunto Límite $\Lambda(G)$	Conjunto de Julia $J(R)$
Cerrado y no vacío	Cerrado y no vacío
Invariante	Invariante
Minimal	Minimal
Perfecto	Perfecto
El conjunto de puntos fijos de elementos loxodrómicos es denso en $\Lambda(G)$	El conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en $J(R)$
$Int(\Lambda(G)) = \emptyset$ ó $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$	$Int(J(R)) = \emptyset$ ó $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$

Cuadro 4.1: Propiedades del conjunto Límite y del conjunto Julia.

Grupos Kleinianos	Funciones Racionales
Dominio de Discontinuidad $\Omega(G)$	Conjunto de Fatou $F(R)$
Abierto	Abierto
Invariante	Invariante
Maximal	Maximal
El grupo $G$ actúa discontinuamente en $\Omega(G)$	La familia $\{R^n\}$ es normal en $F(R)$
El número de componentes de $\Omega(G)$ es 0, 1, 2 ó $\infty$	El número de componentes de $F(R)$ es 0, 1, 2 ó $\infty$

Cuadro 4.2: Propiedades del conjunto de discontinuidad y del conjunto de Fatou.

#### 4.4. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado propiedades que describen cualitativamente los elementos, tanto de las transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  como de las funciones racionales  $\mathcal{R}$  (siendo  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{R}$  conjuntos dotados de una topología heredada de la convergencia uniforme). Un ingrediente necesario en  $\mathcal{M}$  para dicho estudio fue la noción de acción discontinua, mientras que en  $\mathcal{R}$  se consideró la normalidad de una familia.

Se analizó el paralelismo que existe entre algunas propiedades de los grupos kleinianos y las correspondientes a las funciones racionales, mostrando una gran similitud en cuanto a las propiedades del conjunto límite de un grupo kleiniano y el conjunto de Julia de una función racional. Así como las propiedades de sus complementos, las cuales se resumen en las tablas 4.1 y 4.2. Finalmente, es importante mencionar que dentro de este paralelismo están el teorema de finitud de Ahlfors y el teorema de no errancia de Sullivan.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Aplicaciones Cuasiconformes

Los resultados mencionados en este apartado están basados en [Be, BF, CG]. Consideremos un abierto y conexo  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ ,  $f$  una función con derivadas parciales continuas de  $D$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Definimos los operadores diferenciales:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (\text{A.1})$$

**Observación A.1.** Si  $f$  es una función analítica, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z).$$

**Definición A.2.** Sea  $D$  un dominio en  $\hat{\mathbb{C}}$  y definamos la función dilatación compleja  $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\mu(z) = \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{\partial f / \partial z}. \quad (\text{A.2})$$

**7** La dilatación  $\mu$  es llamada coeficiente de Beltrami de  $f$ , y la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z},$$

es llamada ecuación de Beltrami.

**Observación A.3.** Si  $f$  preserva orientación, entonces  $|\mu| < 1$ . Además,  $\mu = 0$  si y sólo si  $f$  es conforme.

Si  $\mu = 0$  en  $D$ , entonces cualquier solución  $f$  suficientemente suave de la ecuación (A.2) es analítica en  $D$ . En general  $\mu$  es una medida de que tan lejos está  $f$  de ser conforme.

Para una función arbitraria  $\mu : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , requerimos que sea Lebesgue medible y satisfaga

$$\|\mu\|_{\infty} < 1, \quad (\text{A.3})$$

en  $D$ . Así  $|\mu| \leq \|\mu\| < 1$ , casi dondequiera (excepto en un conjunto de medida cero).

**Definición A.4.** Dado un dominio  $D$  y un coeficiente de Beltrami  $\mu$  en  $D$ , decimos que un homeomorfismo  $f$  en  $D$  es cuasiconforme con dilatación compleja  $\mu$ , si  $f$  es una solución  $L^2$  de la ecuación (A.2), esto es,  $f$  es tal que  $\int_D |f|^2 < \infty$ .

Una aplicación cuasiconforme  $f$  es diferenciable en el sentido de que la derivada es una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo, casi dondequiera en  $D$  y solo requerimos que se satisfaga A.2, en  $D$ .

La implicación intuitiva de la ecuación (A.2), es para casi todo  $z \in D$ , la función  $f$  envía circunferencias infinitesimales  $C$  centradas en  $z$  en elipses infinitesimales centradas en  $f(z)$ , donde la excentricidad y orientación de  $E$  están determinadas por  $\mu(z)$ . El significado de (A.3) es que controla la distorsión inducida por  $f$ , lo cual implica que la excentricidad de  $E$  es acotada en  $D$ .

Dado un campo de elipses en un dominio  $D$ , el siguiente resultado establece cuando es posible encontrar una aplicación que infinitesimalmente envíe el campo de elipses en un campo de circunferencias.

**Teorema A.5** (Ahlfors-Bers, Bojarski, Morrey). Si  $\mu$  es un coeficiente de Beltrami en un dominio  $D \subset \mathbb{C}$ , entonces

- (1) Existe una aplicación cuasiconforme con dilatación compleja  $\mu$  en  $D$ .
- (2) Si  $\phi$  y  $\psi$  son dos aplicaciones cuasiconformes en  $D$  con dilatación  $\mu$ , entonces  $\phi\psi^{-1}$  es una función analítica.

Si tomamos  $\mu \equiv 0$  y  $\psi \equiv Id_D$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario A.6.** Si  $\phi$  es una aplicación cuasiconforme con dilatación compleja 0 en  $D$ , entonces  $\phi$  es una función conforme en  $D$ .

---

Apéndice B

## Demostración del Teorema de Sullivan

---

Para el siguiente resultado,  $diam(E)$  denota el diámetro del conjunto  $E \subset \hat{\mathbb{C}}$  con respecto a la métrica esférica.

**Lema B.1.** *Supongamos que  $W$  es un dominio errante. Entonces para cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $W$ ,  $diam(R^n(K)) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Supongamos que la afirmación es falsa, entonces existe algún  $K \subset W$  compacto,  $\varepsilon > 0$  y una sucesión creciente  $\{n_k\}$  de  $\mathbb{N}$  tal que para  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$diam(R^{n_k}(K)) \geq \varepsilon. \tag{B.1}$$

Como  $\{R^n\}$  es normal en  $W$ , existe una subsucesión de  $R^{n_k}$  que converge localmente uniformemente en  $W$  a una función analítica  $g$ , por conveniencia diremos que es la misma subsucesión  $R^{n_k}$  con tal propiedad.

Si  $g$  es una función constante con valor  $\alpha$  en  $W$ , entonces  $R^{n_k}$  converge uniformemente a  $\alpha$  en  $K$  y así para  $k$  suficientemente grande  $R^{n_k}(K)$  está contenido en una bola centrada en  $\alpha$  de radio  $\varepsilon/3$ . Pero esto es una contradicción a la ecuación B.1. En consecuencia  $R^{n_k}$  converge localmente uniformemente a una función analítica no constante  $g$  en  $W$ .

Tomemos un punto  $\beta$  en  $W$ , tal que  $g'(\beta) \neq 0$  y consideremos una circunferencia  $C$  con centro en  $\beta$ , con interior  $D \subset W$  y  $g(z) \neq g(\beta)$  para todo  $z$  en la circunferencia  $C$ . Entonces para  $k \geq k_0$ , se tiene

$$|R^{n_k}(z) - g(z)| < \inf_{w \in C} |g(w) - g(\beta)| < |g(z) - g(\beta)|$$

en  $C$ . Por el *teorema de Rouche*,  $R^{n_k}(D)$  contiene el punto  $g(\beta)$ . Esto contradice el hecho de que  $W$  es un dominio errante y se obtiene el resultado.  $\blacktriangleleft$

Para una demostración de los siguientes resultados, véase [Be, cap. 3, sec. 3].

**Teorema B.2.** *Si  $R$  es una función racional, entonces existe  $\delta > 0$ , tal que si  $\gamma$  es una curva cerrada de diámetro menor que  $\delta$ , entonces la imagen  $R(D)$  de la componente interior  $D$  acotada por  $\gamma$  no interseca al exterior,  $E(R(\gamma))$  de la curva  $R(\gamma)$ .*

**Proposición B.3.** <sup>1</sup> Un dominio  $D \subset \hat{C}$  es simplemente conexo si y sólo si su complemento  $\hat{C} \setminus D$ , es conexo.

**Teorema B.4.** Sean  $F_0, F_1$  componentes del conjunto de Fatou  $F(R)$ , de una aplicación racional  $R$ . Supongamos que  $R$  envía  $F_0$  en  $F_1$ , entonces para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R$  es un cubriente de  $n$ -hojas de  $F_0$  en  $F_1$  y

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = n\chi(F_1).$$

**Lema B.5.** Supongamos que  $R$  tiene dominios errantes. Entonces para alguna componente  $W$  de  $F(R)$ , las componentes

$$W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$$

de  $F(R)$  son ajenas por parejas, simplemente conexas, y no contienen puntos críticos de  $R$ . En particular, cada uno es enviado por  $R$  homeomórficamente en el siguiente.

*Demostración.* Sea  $C$  una componente errante del conjunto de Fatou. Consideremos las componentes  $R^n(C)$ . Ya que  $R$  tiene  $2d - 2$  puntos críticos, solo sólo una cantidad finita de las componentes  $R^n(C)$  contienen puntos críticos de  $R$ . Sea  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de tal manera que  $W = R^N(C)$ , no tenga puntos críticos, hagamos  $W_n = R^n(C)$ , luego  $W$  y  $W_n$  son dominios errantes que no contienen puntos críticos de  $R$ . Por el teorema B.4, se tiene

$$\chi(W_n) = m_n \chi(W_{n+1}), \quad (\text{B.2})$$

donde  $R$  es una función  $m_n$  a 1 de  $W_n$  en  $W_{n+1}$ . Por (B.2), basta probar que  $W = W_0$  es simplemente conexa, para tener que  $W_n$  es simplemente conexa, ya que  $m_0 \chi(W_1) = 1$ , por lo tanto  $W_1$  es simplemente conexa,  $m_0 = 1$  y procediendo por inducción se tiene que  $W_n$  es simplemente conexa para toda la subsucesión  $n$ . Para demostrarlo procedemos por contradicción. Supongamos que  $W$  no es simplemente conexa, entonces existe una curva cerrada simple  $\gamma$  en  $W$  que no es homotópicamente trivial en  $W$ . Definamos la curva  $\Gamma_n = R^n(\gamma)$ . Ya que

$$R^n : W \rightarrow R^n(W)$$

es un mapeo cubriente suave no ramificado, por construcción no tiene puntos críticos cualesquiera de los factores en la composición de  $R^n$ , es decir la derivada de  $R^n$  no se anula en  $W$  y esto asegura que  $\gamma_n$  no es homotópicamente trivial en  $R^n(W)$ , ya que si esto no fuera así, por el teorema de monodromía, tendría una deformación de  $\gamma_n$  a un punto en  $R^n(W)$  la cual se levanta en una deformación de  $\gamma$  a un punto de  $W$ .

Del teorema B.2,  $\delta$  definida en ese resultado y usando el lema B.1, tomando  $K$  igual a la imagen de la curva  $\gamma_n$ , existe algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq m$

$$\text{diam}(\gamma_n) \leq \delta.$$

Por el teorema B.2, si  $n \geq m$  entonces  $R$  envía la unión de  $\gamma_n$  y sus componentes interiores a la unión de  $\gamma_{n+1}$  y sus componentes interiores.

Del teorema 3.19, obtenemos que  $\{R^n : n \geq 1\}$  es normal en cada componente interior de  $\gamma_m$  y entonces cada una de estas componentes se encuentra en  $F(R)$ . En consecuencia, la unión de  $\gamma_m$  y todas sus componentes interiores es un subconjunto compacto y conexo de  $F(R)$  cuyo complemento es simplemente conexo, esto se sigue de la proposición B.3. Así,  $\gamma_m$  es homotópica a un punto en  $F(R)$  y por lo tanto también en  $W_n$ , contrario a la observación anterior. De aquí, concluimos que  $W$  es simplemente conexa y la demostración.  $\blacktriangleleft$

4

El siguiente resultado es conocido como el teorema de dominios no errantes de Sullivan. La prueba está basada en [CG, cap. IV, sec. 1], ver también [Be, cap. 8, sec. 6].

**Teorema B.6** (dominios no errantes de Sullivan). *Cada componente de Fatou  $F(R)$  de una función racional  $R$  es eventualmente periódica.*

*Demostración.* El resultado es equivalente a que  $R$  no tiene dominios errantes. Por lo que demostraremos este último y la prueba se hará por contradicción.

Sea  $U_0 \subset F(R)$  un dominio errante y  $U_n = R^n(U_0)$ ,  $n \geq 1$ . Supongamos que  $\infty \in V \subset F(R)$  tal que  $V \neq U_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esto implica que  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(U_n) < \infty$ , pues  $\mathbb{C}$  es compacto. Lo cual implica que la función límite de  $\{R^n\}$  es constante en  $U_0$ . Así  $(R^n)' \rightarrow 0$  en subconjuntos compactos, de lo contrario cada  $U_n$  contendría un disco con un diámetro uniformemente acotado mayor que 0. Reemplazando  $U_n$  por  $U_{n+m}$  tenemos que  $U_n$  no contiene puntos críticos de  $R$ .

Del lema B.5, se tiene que  $R$  envía cada  $U_n$  en  $U_{n+1}$  biyectivamente y éstas son simplemente conexas. Para  $\varepsilon > 0$ , elijamos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(U_n) < \varepsilon$  para todo  $n \geq N$ . Ahora construiremos una familia de aplicaciones cuasiconformes  $\{f_t\}$ ,  $t \in \mathbb{C}^N$  tales que  $\{f_t^{-1}Rf_t\}$  es una familia analítica de funciones racionales distintas con parámetro  $t$ . Dado que esta familia tiene el mismo grado que  $R$ , esto da una contradicción, si tomamos  $N > 2d - 1$ , donde  $d$  es el grado de  $R$ . Ahora demostraremos ésto último.

Fijamos  $N > 2d - 1$ , y supongamos que  $D_0 = D(0, \varepsilon)$ ,  $D = D(0, 2\varepsilon) \subset U_0$ . Para  $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^N$ ,  $|t| < \delta$ , definimos un coeficiente de Beltrami (campo de elipses)  $\mu$  en  $D_0$  por

$$\mu(z) = \sum_{k=1}^N t_k e^{-ik\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Para  $n \geq 1$ , hagamos  $D_n = R^n(D_0)$ . Ya que  $D_n \cap D_m = \emptyset$ , si  $n \neq m$  y  $R$  envía cada  $D_n$  conformemente sobre  $D_{n+1}$ , se puede extender el campo de elipses a  $\cup D_n$  de tal manera que sea invariante bajo  $R$ . Cada componente de  $R^{-1}(\cup D_n)$  es enviada finitamente y biyectivamente sobre los  $D_n$ . Así, podemos extender el campo de elipses a  $R^{-1}(\cup D_n)$  y procediendo hacia atrás a todas las imágenes inversas de  $\cup D_n$  para que sea invariante bajo  $R$ . Como  $R$  es una aplicación conforme, la extensión no incrementa  $\|\mu\|_{\infty}$ . Para los  $z$  que no están en la unión o sus imágenes inversas hacemos  $\mu = 0$ . Así, el campo de elipses es invariante en casi todas partes. Notemos además que  $\mu = 0$  en  $U_0 \setminus D_0$ .

Sea  $f_t(z) = f(z, t)$  la solución de la ecuación de Beltrami, normalizado por  $f(z, t) = z + o(1)$  en  $\infty$ . Suprimiendo el parámetro  $t$ , sea  $g = \frac{\partial f}{\partial z} - Id$ ,

$$g = (Id - U_m u)^{-1} S(\mu) = S(\mu) + U_\mu(S(\mu)) + U_\mu(S(\mu)) + \dots$$

Dado que  $\|\mu\|_\infty = \mathcal{O}(|t|)$ , también  $\|S(\mu)\|_2 = \mathcal{O}(|t|)$ , en consecuencia  $g = S(\mu) + \mathcal{O}(|t|)$  esta en  $L^2$ . Sea  $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\phi}$ , para  $z \in D \setminus D_0$  se tiene:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t_k} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial S(\mu)}{\partial t_k} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\pi} \int \int_{D_0} \frac{e^{-ik\phi}}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta + \varphi_k(z) = \frac{c_k}{z^{k+2}} + \varphi_k(z),$$

donde  $\varphi_k$  es una función analítica en  $D$ , y  $c_k = \frac{-2\varepsilon^{k+2}(k+1)}{k+2} \neq 0$ .

Ahora si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ ,  $\lambda \neq 0$ , entonces para algún  $z \in D \setminus D_0$ ,

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{\partial g}{\partial t_k}(z, 0) \neq 0, \quad (\text{B.3})$$

de lo contrario se tiene,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k c_k}{z^{k+2}} = -\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k, \quad \varepsilon < |z| < 2\varepsilon,$$

lo cual resulta una contradicción, por la unicidad de la serie de Laurent.

De la invarianza del campo de elipses, se sigue que  $R_t = f_t R f_t^{-1}$ , es función racional del mismo grado que  $R$ , luego  $f_t$  depende analíticamente del parámetro  $t$ , y además  $f_0$  es la función identidad. En consecuencia  $R_t$  depende analíticamente del parámetro  $t$  y  $R_0 = R$ . Por lo tanto los coeficientes de  $R_t$  son funciones holomorfas de  $t$  y coinciden con  $R$  en  $t = 0$ .

Supongamos que  $R(\infty) = 1$ , y escribimos la expresión para  $R$ ,

$$R_t(z) = \frac{a_d(t)z^d + a_{d-1}(t)z^{d-1} + \dots + a_0(t)}{z^d + b_{d-1}(t)z^{d-1} + \dots + b_0(t)},$$

donde  $a_d(0) = 1$  y  $a_j(t), b_j(t), j = 0, \dots, d$  son funciones analíticas en  $B(0, \delta)$  en  $\mathbb{C}^N$ . Sea  $V$  la componente conexa que contiene al 0 de la subvariedad de  $B(0, \delta)$  determinada por la ecuación  $a_j(t) = a_j(0), b_j(t) = b_j(0)$ . Ya que solo hay  $2d - 1$  ecuaciones, en consecuencia  $V$  tiene dimensión positiva.

Sea  $\tau \in V$ , entonces  $f_\tau R f_\tau^{-1} = R$ . Si  $z_0$  es un punto fijo de  $R^n$ , entonces también  $f_\tau(z_0)$  y viceversa, dado que  $f_\tau(z_0) = f_\tau(R^n(z_0)) = R^n(f_\tau(z_0))$ . Si  $z_0$  es un punto fijo repulsor de  $R^n$ , entonces también lo es  $f_\tau(z_0)$ , por lo que el conjunto de los puntos fijos  $A_n$ , satisface  $f_\tau(A_n) = A_n$ . que  $f_0$  es la función identidad y  $A_n$  es un espacio discreto,  $f_\tau$  debe fijar cada punto de  $A_n$ . Como el conjunto de los puntos repulsores es denso en el conjunto de Julia  $J(R)$ , así  $\cup A_n$  es un conjunto

denso en  $J(R)$  y así  $f_\tau(z) = z$  en  $J(R)$ . Ahora como  $f_\tau$  es analítica en  $U_0 \setminus D_0$  y  $f_\tau(z) = z$  en  $\partial U_0 \subset J(R)$ . En consecuencia  $f_\tau(z) = z$  en  $U_0 \setminus D_0$ .

Cambiando la notación, tenemos  $f(z, \tau) - z = 0$  para todo  $z \in U_0 \setminus D_0$ ,  $\tau \in V$ . Dado que  $g = f_z - Id$ , se tiene

$$g(z, \tau) = 0, \quad z \in U_0 \setminus D_0, \quad \tau \in V. \quad (\text{B.4})$$

Si  $\tau_0$  es un punto regular de  $V$ , existe una función  $\alpha \mapsto \tau(\alpha)$  de un disco  $D(0, \delta)$  sobre  $V$ , con  $\tau(0) = \tau_0$  y  $\tau'(0) = \lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ . De la ecuación (B.4) y la regla de la cadena, se obtiene

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{\partial g}{\partial t_k}(z, \tau_0) = 0, \quad z \in U_0 \setminus D_0.$$

En lo anterior, el vector unitario  $\lambda$  depende de  $\tau_0$ , tomando límite cuando  $\tau_0 \rightarrow 0$ , se obtiene una contradicción a la ecuación (B.3). Por lo tanto  $R$  no tiene dominios errantes. ◀

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

## Bibliografía

- [B]<sup>22</sup> A. F. Beardon, The Geometry of Discrete Groups, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [Be]<sup>34</sup> A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BF]<sup>19</sup> B. Branner, N. Fagella, Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics, Cambridge University Press, New York, 2014.
- [CG] L. Carleson y T. Gamelin, Complex Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [C] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable I, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1978.
- [JS] G. A. Jones y D. Singermann, Complex Functions, Cambridge University Press, 1987.
- [LO] A. Lascrain Orive, Una Introducción a la Geometría Hiperbólica bidimensional, Segunda edición, México, D.F, 2015.
- [MR]<sup>20</sup> C. Maclachlan y A.W. Reed, The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds, Graduate Texts in Mathematics 219, Springer Verlag, 2003.
- [M]<sup>15</sup> G. J. Martin, The geometry and arithmetic of Kleinian groups, Handbook of group actions. Vol. I, 411-494, Adv. Lect. Math. (ALM), 31, Int. Press, Somerville, MA, 2015.
- [Mas]<sup>49</sup> B. Maskit, Kleinian Groups, Springer Verlag, 1987.
- [McM]<sup>25</sup> C. McMullen, Rational maps and Kleinian groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan, 1990.
- [MNTU]<sup>24</sup> S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, Holomorphic Dynamics, Cambridge University Press, 2000.
- [MT]<sup>30</sup> K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups, Clarendon Press, 1998.
- [P] A. Pérez Pérez, Introducción Básica al Estudio del Análisis Matemático, UJAT, 2011.

- [R] J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.
- [T] W. P. Thurston, Three Dimensional Geometry and Topology, vol. 1, edited by Silvio Levy, Princeton Mathematical Series, 35, Princeton University Press, 1997.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.  
México.

# GRUPOS KLEINIANOS Y EL DICCIONARIO DESULLIVAN

ORIGINALITY REPORT

# 13%

SIMILARITY INDEX

## PRIMARY SOURCES

1	<a href="http://www.fcfm.buap.mx">www.fcfm.buap.mx</a> Internet	726 words — 4%
2	<a href="http://doczz.es">doczz.es</a> Internet	291 words — 1%
3	<a href="http://docplayer.es">docplayer.es</a> Internet	259 words — 1%
4	<a href="http://hdl.handle.net">hdl.handle.net</a> Internet	251 words — 1%
5	<a href="http://www.matcuer.unam.mx">www.matcuer.unam.mx</a> Internet	164 words — 1%
6	<a href="http://1library.co">1library.co</a> Internet	132 words — 1%
7	<a href="http://smm.org.mx">smm.org.mx</a> Internet	121 words — 1%
8	Sueros Zarate, Jonathan Abrahan. "Dinamica de las funciones racionales de una variable compleja.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2021 ProQuest	67 words — < 1%
9	<a href="http://dme2.ufro.cl">dme2.ufro.cl</a> Internet	64 words — < 1%
10	<a href="http://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a>	

Internet

39 words — < 1%

11 [mat.izt.uam.mx](http://mat.izt.uam.mx)  
Internet

35 words — < 1%

12 [www.passeidireto.com](http://www.passeidireto.com)  
Internet

34 words — < 1%

13 [pdfs.semanticscholar.org](http://pdfs.semanticscholar.org)  
Internet

33 words — < 1%

14 [riunet.upv.es](http://riunet.upv.es)  
Internet

30 words — < 1%

15 [www.math.kobe-u.ac.jp](http://www.math.kobe-u.ac.jp)  
Internet

28 words — < 1%

16 [galadriel.mat.utfsm.cl](http://galadriel.mat.utfsm.cl)  
Internet

26 words — < 1%

17 Şahin, Recep. "Fuchsian Gruplar", Balikesir University (Turkey), 2024  
ProQuest

26 words — < 1%

18 [riaa.uaem.mx:8080](http://riaa.uaem.mx:8080)  
Internet

24 words — < 1%

19 [export.arxiv.org](http://export.arxiv.org)  
Internet

23 words — < 1%

20 [www.famaf.unc.edu.ar](http://www.famaf.unc.edu.ar)  
Internet

19 words — < 1%

21 [mriuc.bc.uc.edu.ve](http://mriuc.bc.uc.edu.ve)  
Internet

17 words — < 1%

22 [123dok.net](http://123dok.net)  
Internet

16 words — < 1%

23	<a href="http://colsan.repositorioinstitucional.mx">colsan.repositorioinstitucional.mx</a> Internet	16 words — < 1%
24	<a href="http://oro.open.ac.uk">oro.open.ac.uk</a> Internet	16 words — < 1%
25	<a href="http://projecteuclid.org">projecteuclid.org</a> Internet	16 words — < 1%
26	<a href="http://koreascience.kr">koreascience.kr</a> Internet	15 words — < 1%
27	<a href="http://web.ujat.mx">web.ujat.mx</a> Internet	15 words — < 1%
28	<a href="http://kipdf.com">kipdf.com</a> Internet	13 words — < 1%
29	<a href="http://semana.mat.uson.mx">semana.mat.uson.mx</a> Internet	13 words — < 1%
30	<a href="http://www.i-repository.net">www.i-repository.net</a> Internet	13 words — < 1%
31	<a href="http://renessans-edu.uz">renessans-edu.uz</a> Internet	12 words — < 1%
32	<a href="http://tailieuthamkhao.org">tailieuthamkhao.org</a> Internet	12 words — < 1%
33	<a href="http://www.arxiv-vanity.com">www.arxiv-vanity.com</a> Internet	12 words — < 1%
34	<a href="http://www.f.waseda.jp">www.f.waseda.jp</a> Internet	12 words — < 1%
35	"The General Möbius Group", Springer Undergraduate Mathematics Series, 2005 Crossref	11 words — < 1%

36	<a href="http://frrq.cvg.utn.edu.ar">frrq.cvg.utn.edu.ar</a> Internet	11 words — < 1%
37	A. Chenaghlu. "Barut-Girardello Coherent States for the Parabolic Cylinder Functions", International Journal of Theoretical Physics, 10/2008 Crossref	10 words — < 1%
38	BaoQin Chen, Sheng Li. "Some unity results on entire functions and their difference operators related to 4 CM theorem", Journal of Inequalities and Applications, 2020 Crossref	10 words — < 1%
39	<a href="http://arxiv.org">arxiv.org</a> Internet	10 words — < 1%
40	<a href="http://fsac.weebly.com">fsac.weebly.com</a> Internet	10 words — < 1%
41	<a href="http://www.cea.uba.ar">www.cea.uba.ar</a> Internet	10 words — < 1%
42	<a href="http://www.scribd.com">www.scribd.com</a> Internet	10 words — < 1%
43	<a href="http://www.ugr.es">www.ugr.es</a> Internet	10 words — < 1%
44	<a href="http://de.slideshare.net">de.slideshare.net</a> Internet	9 words — < 1%
45	<a href="http://digital.csic.es">digital.csic.es</a> Internet	9 words — < 1%
46	<a href="http://dokumen.tips">dokumen.tips</a> Internet	9 words — < 1%
47	<a href="http://fetcm.ugt.org">fetcm.ugt.org</a> Internet	9 words — < 1%

48	vdocuments.mx Internet	9 words — < 1%
49	Gabriela Hinojosa*, Alberto Verjovsky**. "Actions of discrete groups on spheres and real projective spaces", Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 2008 Crossref	8 words — < 1%
50	brieger.esalq.usp.br Internet	8 words — < 1%
51	epdf.tips Internet	8 words — < 1%
52	pccm.umich.unam.mx Internet	8 words — < 1%
53	"Advancements in Complex Analysis", Springer Science and Business Media LLC, 2020 Crossref	6 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES OFF  
EXCLUDE BIBLIOGRAPHY OFF

EXCLUDE SOURCES OFF  
EXCLUDE MATCHES OFF