



Universidad Juárez
Autónoma de Tabasco



División Académica de Ciencias Biológicas

Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de
Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tesis

MAESTRÍA EN CIENCIAS AMBIENTALES

Presenta:

Ing. Javier Sanlúcar Estrada

Director:

Dr. José Roberto Hernández Barajas

Villahermosa, Tabasco

Octubre de 2016



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BIOLÓGICAS
DIRECCIÓN



SEPTIEMBRE 29 DE 2016

C. JAVIER SANLÚCAR ESTRADA
PAS. DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS AMBIENTALES
PRESENTE

En virtud de haber cumplido con lo establecido en los Arts. 80 al 85 del Cap. III del Reglamento de titulación de esta Universidad, tengo a bien comunicarle que se le autoriza la impresión de su Trabajo Recepcional, en la Modalidad de Tesis de Maestría en Ciencias Ambientales titulado: **“MODELO MATEMÁTICO DEL COMPORTAMIENTO DEL ÁREA FOLIAR DE ESPECIES VEGETALES A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BETA”**, asesorado por el Dr. José Roberto Hernández Barajas sobre el cual sustentará su Examen de Grado, cuyo jurado está integrado por Dr. Richart Vázquez Román, Dra. Carolina Zequeira Larios, Dr. José Roberto Hernández Barajas, Dra. Erika Escalante Espinosa y MIPA. Sergio Ramos Herrera.

Por lo cual puede proceder a concluir con los trámites finales para fijar la fecha de examen.

Sin otro particular, me es grato enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE

M. EN C. ROSA MARTHA PADRON LOPEZ
DIRECTORA

UJAT
DIVISIÓN ACADÉMICA
DE CIENCIAS BIOLÓGICAS



DIRECCIÓN

C.c.p.- Expediente del Alumno.
C.c.p.- Archivo



**Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies
Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta**

CARTA AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente el Trabajo Recepcional en la modalidad de Tesis de Maestría denominado: **“MODELO MATEMÁTICO DEL COMPORTAMIENTO DEL ÁREA FOLIAR DE ESPECIES VEGETALES A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BETA”**, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco el Trabajo Recepcional antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en éste documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco el Día 29 de Septiembre de 2016.

AUTORIZO

JAVIER SANLÚCAR ESTRADA



I.

DEDICATORIA

A DIOS

Por escuchar mis oraciones y permitirme llegar a este momento, sé que sin tu ayuda no lo hubiera logrado, gracias Señor.

A MI ESPOSA

Alejandra, gracias por todo tu apoyo, paciencia, amor y ánimo que siempre me diste para obtener este logro. Te amo.

A MIS HIJAS

Dana y Valeria, quienes son mi motor para salir adelante, gracias por su amor y cariño. Las quiero mucho.

A MI ASESOR DE TESIS

Dr. José Roberto Hernández Barajas gracias por todo su apoyo, confianza, amistad y el gran esfuerzo brindado para terminar mi Tesis, le agradezco infinitamente y siempre estaré agradecido con usted.

A MI COMITÉ SINODAL

Al Dr. Richart Vázquez Román, Dra. Carolina Zequeira Larios, Dra. Erika Escalante Espinosa y MIPA Sergio Ramos Herrera, por todas sus observaciones y asesorías que permitieron mejorar sustancialmente este trabajo. Gracias a todos.

A MI ASESOR DE ESTANCIA

Al Dr. Christian Oliver Díaz Ovalle por su tiempo y dedicación durante mi estancia en el Instituto Tecnológico de Roque que permitió mejorar en gran medida éste trabajo.



II.

RESUMEN

El cálculo del área foliar de una especie vegetal incide en la capacidad de un techo verde para disminuir la temperatura hacia el interior de una habitación y con ello coadyuvar en la mitigación de los efectos del calentamiento global. Existen distintos métodos diseñados para estimar el área foliar, clasificándose en destructivos, no destructivos y de estimación. Hay métodos directos e indirectos para determinar el área foliar. Los métodos directos se basan en medidas realizadas directamente sobre los órganos de la planta; es decir, miden el área foliar propiamente sobre el material y pueden ser destructivos y no destructivos. El método de estimación consiste en la medición de la longitud (L) y la anchura de la hoja (W), utilizando correlaciones de tipo lineal o cuadrático de dichas dimensiones con el área foliar de la hoja, producto de un análisis de regresión, utilizando el coeficiente de correlación (R^2) como criterio de estimación. En este trabajo se diseñó un modelo matemático que permita predecir el área foliar total de especies vegetales utilizadas en techos verdes (*Tradescantia spathacea* y *Tradescantia pallida*) a partir de la distribución de probabilidad Beta utilizando las medidas lineales de longitud y anchura máxima de la hoja, obtenidas de una unidad experimental de techo verde tipo extensivo, localizada en Villahermosa, Tabasco, México. La base de datos consiste tanto de la longitud y la anchura de la hoja y del área de la hoja obtenida mediante análisis de imágenes por computadora. La estimación de parámetros numéricos se realizó utilizando Solver® de Excel minimizando la función objetivo sujeta a varias restricciones. Los principales resultados mostraron que el modelo matemático propuesto produce un alto grado de ajuste y precisión con respecto a los datos experimentales. Además, los resultados muestran que la distribución Beta modificada es el mejor modelo de estimación incluso con la generación de un comportamiento bimodal, como se encontró a partir de datos experimentales.

Palabras clave: area foliar, modelo matemático, distribución Beta, distribución Beta modificada, *Tradescantia spathacea*, *Tradescantia pallida*.

The leaf area estimation affects the capability of a green roof to decrease the building indoor temperature and thereby contribute in mitigating the global warming effects. The leaf area estimation can be performed by direct and indirect methods. Direct methods are based on measurements directly on the organs of the plant; i.e. properly measure the leaf area on the plants and can be destructive and nondestructive. The estimation method consists of measuring the leaf length (L) and width (W) and to correlating both dimensions with the single leaf area using linear or quadratic correlations obtained by regression analysis and choosing the coefficient of determination (R^2) as good-of-fit parameter. This research presents a mathematical model to predict the total leaf area of plant species used in green roofs (*Tradescantia spathacea* and *Tradescantia pallida*) based on the beta distribution for description of leaf length and width. Experimental database was obtained from an extensive green roof experimental unit, located in Villahermosa, Tabasco, Mexico. The database consists of both leaf length and width and of leaf area obtained by computer image analysis. The numerical parameter estimation was performed using the Solver® Excel Add-in by minimizing the objective function subject to several constraints. The main results showed that the mathematical model proposed here produces high degrees of fit and accuracy with respect to the experimental data. Besides, the results show that the modified distribution Beta is the best model of estimation even generating a bimodal behavior, as was found from experimental data.

Key words: Leaf area, mathematical model, beta distribution, modified beta distribution, *Tradescantia spathacea*, *Tradescantia pallida*.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

ÍNDICE GENERAL

1.	INTRODUCCIÓN	1
2.	MARCO TEÓRICO	3
2.1	El área foliar	3
2.1.1	Importancia del área foliar	3
2.1.2	Medición del área foliar	4
2.2	Distribuciones de probabilidad Beta	6
2.2.1	Descripción de la distribución de probabilidad Beta	6
2.2.2	Aplicaciones de la distribución de probabilidad Beta	7
2.2.3	Distribución Beta modificada (Nadarajah, 2014)	9
2.3	Modelos matemáticos	12
2.4	Métodos numéricos	12
2.4.1	Fórmulas de integración de Newton-Cotes	14
2.4.2	Regla de Simpson 1/3	14
2.4.3	Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple	15
2.4.4	Regla de Simpson 3/8	16
2.4.5	Cuadratura de Gauss	17
2.5	Nociones de programación de Visual Basic para Aplicaciones (VBA)	17
2.5.1	Diseño de algoritmos	18
2.5.2.	<i>Microsoft Excel</i> [®]	18
2.5.3.	Elementos de programación en VBA	18
2.5.4	Programación de integración con Cuadratura Gaussiana	19
2.6	Especies nativas empleadas	21
2.6.1	<i>Tradescantia pallida</i> Rose. D.R. Hunt.	21
2.6.2	<i>Tradescantia spathacea</i> Swartz	22



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

3.	ANTECEDENTES	23
4.	JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS E HIPÓTESIS	28
4.1	Justificación	29
4.2	Objetivos	30
4.2.1	Objetivo general	30
4.2.2	Objetivos particulares	31
4.3	Hipótesis	31
5.	MÉTODOS	32
5.1	Base de datos del área foliar	32
5.2	Formulación del modelo matemático	33
5.2.1	Selección de la distribución de probabilidad Beta para el modelo	33
5.2.2	Calibración del modelo	34
5.2.3	Validación del modelo	35
5.2.4	Selección del método numérico para la estimación de parámetros	35
5.2.5	Optimizador <i>Solver</i>	35
5.2.6	Pronóstico del área foliar total	36
5.3	Diseño de la interfaz gráfica	37
5.3.1	Componentes que integran la interfaz	38
5.3.2	Programación de la interfaz	38
5.4	Algoritmo general de programación	39
5.4.1	Algoritmo Tipo de Modelo	42
5.4.2	Algoritmo Intervalos	43
5.4.3	Algoritmo Método Numérico	44
5.4.4	Algoritmo Inicialización del Modelo	44
5.4.5	Algoritmo Función Objetivo	45



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

5.4.6	Algoritmo Solver	45
6.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	46
6.1	Modelo matemático	46
6.1.1	Tabla de distribución de frecuencias.	50
6.1.2	Distribución de probabilidad Beta clásica como modelo de estimación.	50
6.1.3	Distribución Beta modificada como modelo de estimación.	53
6.2	Calibración del modelo	57
6.2.1	Calibración de la distribución Beta clásica	58
6.2.2	Calibración de la Distribución Beta modificada (Beta-Normal)	59
6.2.3.	Calibración de la Distribución Beta modificada (Beta-Beta)	60
6.2.4.	Comparación de las tres distribuciones con respecto a la función objetivo	61
6.3	Pronóstico del área foliar	64
6.3.1	Estimación del área foliar empleando correlaciones empíricas clásicas	64
6.3.2	Estimación del área foliar empleando funciones de distribución de probabilidad	65
7.	CONCLUSIONES	70
8.	RECOMENDACIONES	73
9.	REFERENCIAS	74
ANEXO A		78
A.1. DISEÑO DE LA INTERFAZ GRÁFICA		78
A.2 BASE DE DATOS.		78
A.2.1	Cargar Hoja de cálculo	79
A.2.2	Estadísticas de datos experimentales	80
A.3 OPCIONES DE CALIBRACIÓN		81
A.3.1.	Tipo de modelo	81
A.3.2.	Selección de intervalos	82



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

A.3.3 Método numérico	83
A.3.4. Inicialización del modelo	84
A.3.5. Función Objetivo	84
A.3.6 Uso de Solver	85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Familia de funciones de la distribución de probabilidad Beta estándar.	7
Figura 2	Distribución Beta-Normal estándar modificada (PDF)	11
Figura 3	Ilustración gráfica de la regla de Simpson 1/3 y de la regla de Simpson 3/8	16
Figura 4	Ilustración gráfica de la Cuadratura de Gauss	17
Figura 5	Algoritmo general de programación para el modelo matemático de estimación del área foliar	41
Figura 6	Algoritmo Tipo de Modelo	42
Figura 7	Algoritmo Intervalos	43
Figura 8	Algoritmo Método Numérico	44
Figura 9	Algoritmo Inicialización del Modelo	44
Figura 10	Algoritmo Función Objetivo	45
Figura 11	Algoritmo de <i>Solver</i>	45
Figura 12	Histograma de frecuencias de la longitud de la hoja, al inicio del establecimiento de <i>Tradescantia pallida</i> en el techo verde, y en función del número de intervalos, a) $n = 6$, b) $n = 7$, c) $n = 8$, d) $n = 9$.	47
Figura 13	Histograma de frecuencias de la anchura de hoja, al inicio del establecimiento de <i>Tradescantia pallida</i> en el techo verde, y en función del número de intervalos, a) $n = 6$, b) $n = 7$, c) $n = 8$, d) $n = 9$.	48
Figura 14	Prueba de Normalidad para Longitud. <i>Tradescantia pallida</i> .	48
Figura 15	Prueba de Normalidad para Anchura. <i>Tradescantia pallida</i> .	49
Figura 16	Prueba de Normalidad para Longitud. <i>Tradescantia spathacea</i> .	49



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Figura 17	Prueba de Normalidad para Anchura. <i>Tradescantia spathacea</i> .	49
Figura 18	Tabla de distribución de frecuencia de los datos iniciales de <i>Tradescantia spathacea</i> . ($n=8$)	50
Figura 19	Estimación de la longitud de la hoja de <i>T. pallida</i> empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.	51
Figura 20	Estimación de la longitud de la hoja de <i>T. spathacea</i> empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.	52
Figura 21	Estimación de la anchura de la hoja de <i>T. pallida</i> empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.	53
Figura 22	Estimación de la anchura de la hoja de <i>T. spathacea</i> empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.	54
Figura 23	Estimación de la longitud y anchura de la hoja de <i>T. pallida</i> empleando las distribuciones Beta modificadas de Nadarajah con $n = 9$.	55
Figura 24	Estimación de la longitud y anchura de la hoja de <i>T. spathacea</i> empleando las distribuciones Beta modificadas de Nadarajah con $n = 9$.	56
Figura 25	Estimación de la longitud y anchura de la hoja de <i>T. pallida</i> y de <i>T. spathacea</i> empleando las tres distribuciones Beta utilizadas en modelo matemático con $n = 9$.	57
Figura 26	Variación del coeficiente de determinación r^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en <i>Tradescantia spathacea</i> y <i>Tradescantia pallida</i> al utilizar Beta clásica como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.	58
Figura 27	Variación del coeficiente de determinación r^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en <i>Tradescantia spathacea</i> y <i>Tradescantia pallida</i> al utilizar Beta modificada (Beta-Normal) como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.	59
Figura 28	Variación del coeficiente de determinación r^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en <i>Tradescantia spathacea</i> y <i>Tradescantia pallida</i> al utilizar Beta modificada (Beta-Beta) como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.	60
Figura 29	Variación del coeficiente de determinación (r^2) y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos en <i>Tradescantia spathacea</i> .	61



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

	y con respecto a los tres tipos de distribución usados en el modelo matemático. a) Longitud, b) Anchura máxima.	
Figura 30	Variación del coeficiente de determinación (r^2) y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos en <i>Tradescantia pallida</i> y con respecto a los tres tipos de distribución usados en el modelo matemático. a) Longitud, b) Anchura máxima.	62
Figura 31	Capacidad de predicción del área foliar a partir del modelo empírico $LA=aLW+b$ para <i>Tradescantia pallida</i> en función del tiempo después del establecimiento de las especies vegetales en el techo verde (septiembre, primer mes de establecimiento).	65
Figura 32	Capacidad de predicción del área foliar a partir del modelo empírico $LA=aLW+b$ para <i>Tradescantia spathacea</i> en función del tiempo después del establecimiento de las especies vegetales en el techo verde (septiembre, primer mes de establecimiento).	65
Figura A.1.	Menú principal de la interfaz gráfica para la estimación del Área Foliar.	79
Figura A.2.	Base de datos. Se selecciona el archivo, hoja donde están los datos y las unidades de medida.	80
Figura A.3	Estadísticas de la Longitud y Anchura de los datos cargados en la base de datos.	81
Figura A.4.	Tipos de modelos matemáticos (Distribución Beta).	82
Figura A.5.	Interfaz gráfica para la selección del número de intervalos para la distribución de frecuencias.	83
Figura A.6.	Interfaz gráfica para la selección del método numérico.	83
Figura A.7.	Interfaz para la inicialización del modelo.	84
Figura A.8.	Interfaz para la selección de la Función Objetivo.	85
Figura A.9.	Interfaz para la selección de los parámetros del optimizador Solver.	86

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Momentos de la función distribución Beta estándar	8
Tabla 2	Coeficientes de los Polinomios de Legendre de diferentes grados.	21



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tabla 3	Correlaciones empíricas clásicas para la estimación del área foliar en función de las dimensiones de la hoja.	23
Tabla 4	Opciones de cálculo disponibles en la interfaz gráfica de usuario.	39
Tabla 5	Sesgo y curtosis estandarizada de los datos iniciales.	47
Tabla 6	Comparativo de las tres funciones objetivo con respecto al tipo de distribución y al número de intervalos, con datos iniciales de ambas especies vegetales.	63
Tabla 7	Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.	66
Tabla 8	Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta-Normal ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.	68
Tabla 9	Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta-Beta ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.	69



1.

INTRODUCCIÓN

La hoja es la superficie de intercambio entre la planta y el medio aéreo, así como el lugar donde se realiza la fotosíntesis; la intensidad de estos intercambios y la actividad fotosintética tienen una relación directa con el área foliar. El conocimiento de la superficie foliar de un dosel es de suma importancia pues este índice nos muestra la capacidad que tiene la planta para transformar la energía luminosa en energía química; además, es un parámetro de caracterización vegetal importante porque con éste se pueden calcular tasas de transpiración vegetal, así como la capacidad de una especie vegetal para la captación de radiación solar y su empleo posterior en funciones vitales. Mientras mayor sea el área de cobertura vegetal, mayor son la captación de energía radiante y el área de transpiración vegetal y la consecuente evaporación de agua (Metselaar, 2012).

Existen distintos métodos diseñados para estimar la superficie foliar, clasificándose en destructivos, no destructivos y de estimación. Hay métodos directos e indirectos para determinar el área foliar. Los métodos directos se basan en medidas realizadas directamente sobre los órganos de la planta; es decir, miden el área foliar propiamente sobre el material y pueden ser destructivos y no destructivos. Dentro de los métodos destructivos se destaca la defoliación de la copa y posterior medida del área foliar con un planímetro o la defoliación de la copa para determinar las relaciones entre el peso fresco de las hojas y su área. Los métodos indirectos están basados en medidas de iluminación para estimar el área foliar, gracias a modelos matemáticos que describen la interceptación de la radiación por parte de la vegetación (Galindo y Clavijo, 2007).

Como su nombre lo indica, el área de una sola hoja es el área superficial que ocupa una sola hoja de una especie vegetal y es un parámetro de caracterización vegetal importante porque con éste se pueden calcular tasas de transpiración así como la capacidad de una especie vegetal para la captación de radiación solar y su empleo posterior en funciones vitales. Desde el punto de vista de un techo verde, el área foliar es importante para predecir el área de cobertura de una especie vegetal ya que estos fenómenos inciden en la capacidad de un techo verde para disminuir la



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

temperatura hacia el interior de un edificio y con ello coadyuvar en la mitigación de los efectos del calentamiento global (Bradley, 2011).

En este trabajo se propone un modelo matemático que permita predecir el área foliar de especies vegetales utilizadas en techos verdes a partir de la distribución de probabilidad beta. El modelo incluye tres distribuciones de probabilidad Beta; la Beta clásica, la Beta-Normal y la Beta-Beta, lo que permite al usuario realizar comparaciones de sus predicciones del área foliar. Este documento de tesis está organizado en 8 capítulos. En el Capítulo 1 se presenta la introducción del contenido de la tesis. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico con los conceptos y fundamentos relacionados con la medición del área foliar, la importancia de su medición, además de las definiciones matemáticas de las distribuciones de probabilidad, las nociones de programación en *Visual Basic* y las características de las especies vegetales utilizadas en el desarrollo del modelo. Después, en el Capítulo 3 se presenta la investigación documental relacionada al estado del arte en los modelos matemáticos para predecir el área foliar en especies vegetales. En el Capítulo 4 se presentan la justificación, los objetivos y la hipótesis. Por su parte, en el Capítulo 5 se presenta el conjunto de procedimientos utilizado para construir el modelo matemático para predecir el área foliar a través de la distribución de probabilidad Beta. Finalmente, en los capítulos 6 y 7 se presentan los resultados obtenidos así como las conclusiones y recomendaciones.



2.

MARCO TEÓRICO

2.1. EL ÁREA FOLIAR

2.1.1. Importancia del área foliar

El crecimiento y desarrollo foliar de especies vegetales a través del tiempo puede ser descrito adecuadamente mediante modelos matemáticos sencillos, los cuales pueden ser utilizados para efectuar pronósticos de dichos parámetros en zonas climáticas. La estimación del área foliar constituye un índice importante para establecer la capacidad para el crecimiento de las plantas, así como su capacidad de asimilación de la radiación solar ya que a medida que el área foliar se desarrolla, la radiación interceptada por las hojas se incrementa, así como de igual manera la producción de biomasa (Aristizábal, 2008). La función principal de la luz como factor meteorológico es proveer la energía para la fotosíntesis, la cual reduce el CO₂ atmosférico y lo incorpora en los compuestos que constituyen los componentes de la planta; alrededor del 90% del total de la biomasa producida se genera por este mecanismo. La luz también influye en el control del fotoperiodo en el desarrollo de la planta. El déficit hídrico y de disponibilidad de nutrientes provoca limitaciones en el uso de la luz, ya que al cerrarse los estomas se interrumpe la difusión del CO₂ en el interior de los tejidos foliares. La disminución de la radiación solar depende sobre todo de la densidad del follaje y de la distribución de las hojas; la densidad del follaje se puede medir a través del índice de área foliar (*LAI*, por su acrónimo en inglés de *leaf area index*), el cual expresará la superficie total de las hojas con respecto a una superficie determinada del suelo, según aumenta el *LAI* incrementa la eficiencia de la interceptación de la radiación hasta llegar a un valor máximo (Jaramillo, 2005). La tasa de absorción de energía está relacionada con la estructura anatómica de las especies la cual principalmente es función del tipo de follaje ya que tiende a ser mayor en especies de hoja ancha y relativamente horizontales y presenta menores valores de absorción en especies de hojas pequeñas y erectas (Arias, 1982; Jaramillo, 2005).

La planta extrae el calor de su ambiente por medio de la evaporación de agua, la fotosíntesis y la capacidad de almacenar calor de su propia agua. Este efecto de enfriamiento, que resulta



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

perceptible en días cálidos, puede demandarle el 90% de la energía solar consumida. Con la evaporación de un litro de agua son consumidos casi 2.2 MJ (530 kcal) de energía. La condensación del vapor de agua en la atmósfera permite la formación de nubes, donde la misma cantidad de energía calórica es liberada nuevamente. Lo mismo sucede cuando por la noche se condensa la humedad en las plantas. La formación del rocío matinal en fachadas y techos verdes trae consigo una recuperación del calor. Por lo tanto, las plantas por sí mismas pueden a través de la evaporación y la condensación de agua reducir las fluctuaciones de temperatura. Este fenómeno se intensifica aún más por la gran capacidad de almacenamiento de calor del agua existente en las plantas y en el sustrato, así como también a través de la fotosíntesis ya que por cada molécula de $C_6H_{12}O_6$ (glucosa) generada son consumidos 2.83 KJ de energía. En regiones con intensa radiación solar y zonas de climas cálidos, el efecto de enfriamiento de los techos verdes es aún más notorio que el efecto de aislación térmica en invierno. En Alemania se comprobó reiteradamente, que, para temperaturas al exterior de 30 °C, la temperatura en el sustrato del techo verde no incrementaba más allá de 25 °C. Esto está relacionado con dos factores, primero, la sombra producida por la vegetación por lo que la radiación solar no incrementa la temperatura del sustrato; y segundo, la energía solar es usada principalmente para la evaporación del agua, la reflexión de la luz y la fotosíntesis (Minke, 2004).

2.1.2. Medición del área foliar

La determinación del área foliar se puede realizar por métodos directos e indirectos. Dentro del primer grupo, se destacan las mediciones de hojas a partir de siluetas formadas por los bordes, las cuales son estampadas en papel y luego se miden sus atributos, ya sea por la relación peso: área de figuras circulares o cuadradas, o por fotocopiado sobre papel milimetrado; este método ha sido usado históricamente con altos niveles de precisión y con facilidades de realizarlo sin muestreo destructivo (Ross, 1981; Jonckheere *et al.*, 2004). Sin embargo, la mayor desventaja consiste en que la medición es casi imposible de realizar en hojas divididas y con figuras irregulares; tampoco es aplicable para acículas de coníferas, aunque sirve como referencia para probar otras metodologías (Roberts *et al.*, 2005).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Existen métodos estándares donde las hojas se aproximan a figuras geométricas regulares, cuyas áreas son fáciles de calcular (Kucharik *et al.*, 1998; Levy y Jarvis, 1999). La alta velocidad para realizar mediciones es la principal ventaja, pero tienen la dificultad de ser muy poco precisos y la subjetividad a la hora de escoger la forma geométrica adecuada en hojas que, por lo general, son irregulares. Esto conlleva a que las mediciones no representen la realidad del tamaño del área foliar de la planta.

Los planímetros y las cámaras digitales son usados en la actualidad como métodos indirectos de medición del área foliar (Jonckheere *et al.*, 2004; Eriksson *et al.*, 2005). Los primeros presentan ciertas ventajas, como la rapidez para obtener datos y alta eficiencia en el procesamiento de muestras, pero no son precisos debido, principalmente, a las propiedades ópticas de la hoja y la dependencia de fuentes de energía. Cuando los instrumentos son estáticos se requiere de muestreo destructivo y en algunos casos, cuando son portátiles, no pueden ser usados con hojas de gran tamaño en la lámina foliar (Beerling y Fray, 1990). El mayor problema de las imágenes tomadas con cámara digital es el ángulo foliar, el cual, en la mayoría de ocasiones, no es totalmente plano, hecho que produce altos niveles de error procedimental (Macfarlane *et al.*, 2007).

Los métodos de cálculo consisten en aproximar, en alto grado, el área de la hoja, mediante regresiones de tipo lineal. También pueden ser relaciones logarítmicas, exponenciales o de otro tipo, donde la medición de una característica, ya sea la longitud de la lámina foliar, la anchura de la hoja o ambos, representen un factor altamente dependiente que, al ser multiplicado por un coeficiente, permita estimar un valor muy cercano al real (Peksen, 2007; Cittadini y Peri, 2006; Nautival *et al.*, 1990). Normalmente, se realizan pruebas estadísticas de alta sensibilidad para validar el modelo (Demirsoy *et al.*, 2005). Este método tiene enormes ventajas puesto que reduce el muestreo destructivo, permite valorar un mayor número de muestras y no depende de equipos ni condiciones, como energía eléctrica y fuerza de trabajo.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

En general, los procedimientos de estimación del área de la hoja involucran medidas de longitud de la lámina foliar, longitud del limbo, anchura de la hoja y la mezcla de estas dimensiones, mediante la correlación de dichas dimensiones con el área de la hoja, producto de un análisis de regresión (Gutezeit, 2000; Beerling y Fray, 1990). En la medida en que el método sea cuidadosamente probado y validado, se permite su empleo en diversas situaciones, proporcionando facilidad para la obtención de datos confiables y repetibles en el tiempo.

2.2. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD BETA

En este apartado se define matemáticamente a la familia de distribuciones de probabilidad Beta (clásica y modificada), sus características y aplicaciones.

2.2.1. Descripción de la distribución de probabilidad Beta

La función de distribución de probabilidad Beta estándar es (Krishnamoorthy, 2006):

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (1)$$

en donde $0 < x < 1$ es la variable distribuida (longitud o anchura, por ejemplo), α y β son los parámetros de la distribución Beta y Γ denota a la función gamma definida como (Krishnamoorthy, 2006):

$$\Gamma(\chi) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\chi-1} dt \quad (2)$$

donde χ es un número real y t es una variable de integración de la función gamma.

Una simple transformación permite que la función probabilidad pueda escribirse en términos de dos límites, superior e inferior, para la variable de distribución (Devore, 2008):



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

$$f(x; \alpha, \beta, x_{\min}, x_{\max}) = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^{\beta-1} \quad (3)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(x - x_{\min})^{\alpha-1} (x_{\max} - x)^{\beta-1}}{(x_{\max} - x_{\min})^{\alpha+\beta-1}}$$

La función de probabilidad Beta permite obtener una distribución muy flexible, generando tanto sesgos positivos como negativos. En la Figura 1 se presentan algunas funciones de distribución Beta estándar ($x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 1$). Por su parte, los momentos de la función distribución Beta se muestran en la Tabla 1.

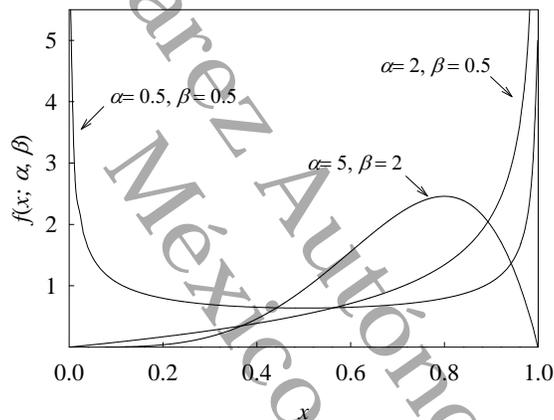


Figura 1. Familia de funciones de la distribución de probabilidad Beta estándar.

2.2.2. Aplicaciones de la distribución de probabilidad Beta

Algunas aplicaciones de las distribuciones Beta son: investigación en educación económica, evaluación del índice de fiabilidad integral de sistemas para las fallas de *software* y la recuperación de datos insuficientes, inferencia para los modelos de estrés-resistencia, medidas de índices de disponibilidad con pequeñas muestras de componentes y fiabilidad de la red, las finanzas, la valoración de opciones binomial con parámetros estocásticos, experimentos de lotería, modelado de sequía, la distribución de la proporción de personas susceptibles, modelos de tiempo de residencia para redes celulares móviles por satélite, y el gradiente de disparidad (Nadarajah et al., 2014).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tabla 1. Momentos de la función distribución Beta estándar (Krishnamoorthy, 2006)

Momento	Expresión matemática
Media	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ (4)
Varianza	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$ (5)
Moda	$\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}, \alpha > 1, \beta > 1$ (6)
Desviación media	$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{2\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{(\alpha+\beta+1)}}$ (7)
Coefficiente de asimetría	$\frac{2(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 1)^{1/2}}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha\beta)^{1/2}}$ (8)
Coefficiente de variación	$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta + 1)}}$ (9)
Coefficiente de kurtosis	$\frac{3(\alpha + \beta + 1)[2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta - 6)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$ (10)

En las últimas décadas, un importante esfuerzo de investigación se ha dedicado al estudio de las distribuciones asimétricas (Nadarajah *et al.*, 2014). Tales distribuciones han sido construidas mediante la adición de un nuevo parámetro a la función de densidad de probabilidad (PDF) o la función de distribución acumulada (CDF) de una distribución simétrica, resultando en familias de distribuciones asimétricas que son analíticamente más flexibles. De acuerdo a Nadarajah *et al.* (2014), la idea de la distribución asimétrica tiene su origen en Azzalini (1985). Este autor introdujo la familia de asimetría normal de distribuciones. Además de ser útil en el modelado, esta familia de distribuciones es útil en el estudio de robustez y en el análisis bayesiano como antecedentes. La PDF de la distribución asimétrica de Azzalini (1985) puede escribirse en la forma general como:

$$f(x) = 2g(x)G(\lambda x) \quad (11)$$



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Para $-\infty < x < \infty$, donde g y G denotan, respectivamente, la PDF y la CDF de una variable aleatoria simétrica alrededor de cero. Varias modificaciones de la Ecuación (11) han sido propuestas por otros autores. Fernandez y Steel (1998) presentaron un procedimiento alternativo basado en la introducción de un parámetro asimétrico positivo. Ellos definen una familia de distribuciones por la PDF:

$$f(x) = \frac{2}{k + 1/k} [g(kx)I\{x < 0\} + g(x/k)I\{x > 0\}] \quad (12)$$

para $k > 0$. Fernandez y Steel (1998) usaron como función g a una distribución t sesgada con aplicación para inferencia Bayesiana. Una variación de la Ecuación (12) es emplear dos funciones asimétricas positivas, por ejemplo, $a(\alpha)$ y $b(\alpha)$, y definir la PDF como:

$$f(x) = \frac{2}{a(\alpha) + b(\alpha)} [g(k/a(\alpha))I\{x < 0\} + g(x/b(\alpha))I\{x \geq 0\}] \quad (13)$$

Algunas familias de distribuciones generales recientemente en términos de G y g han sido revisadas y compendiadas en (Nadarajah *et al.*, 2014).

2.2.3. Distribución Beta modificada (Nadarajah, 2014)

La distribución Beta modificada propuesta por Nadarajah *et al.* (2014) se basa en la de Marshall y Olkin (1997) y la de Eugene, Lee y Famoye (2002). De acuerdo a Nadarajah *et al.* (2014), la distribución Beta modificada tiene la función de densidad PDF siguiente:

$$f_X(x) = \frac{c^\alpha}{B(\alpha, \beta)} \frac{g(x)[G(x)]^{\alpha-1}[1-G(x)]^{\beta-1}}{[1-(1-c)G(x)]^{\alpha+\beta}} \quad (14)$$

donde $B(\alpha, \beta)$ es el inverso de los términos la función gamma mostrados en la Ecuación (1), esto es:



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (15)$$

La CDF correspondiente de la Ecuación (14) es:

$$F_X(x) = I_{cG(x)/\{1+(c-1)G(x)\}}(\alpha, \beta) \quad (16)$$

Esta distribución Beta modificada posee tres parámetros (α , β y c) lo que permite una flexibilidad adicional en comparación a la distribución beta clásica. La modificación de la distribución Beta presentada por Nadarajah *et al.* (2014) se realiza mediante la adopción de una CDF de base G que corresponden a una distribución de probabilidad. Nadarajah *et al.* (2014) en su artículo presenta la distribución Beta modificada con la distribución Normal con media μ y desviación estándar σ . La justificación de esta elección es la popularidad de la distribución normal. Entonces las Ecuaciones (15) y (16) se convierten en:

$$f_X(x) = \frac{c^\alpha}{B(\alpha, \beta)} \frac{\phi((x-\mu)/\sigma)\Phi^{\alpha-1}((x-\mu)/\sigma)\Phi^{\beta-1}(\mu-x)/\sigma}{\sigma[1-(1-c)\Phi((x-\mu)/\sigma)]^{\alpha+\beta}} \quad (17)$$

y

$$F_X(x) = I_{c\Phi((x-\mu)/\sigma)/\{1+(c-1)\Phi((x-\mu)/\sigma)\}}(\alpha, \beta) \quad (18)$$

respectivamente, para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $c > 0$ donde Φ es la CDF de distribución normal estándar. En la Figura 2 se presentan las gráficas de la distribución Beta-Normal modificada con diferentes valores de los tres parámetros (α , β y c).

De acuerdo a Nadarajah *et al.* (2014), al revisar las figuras se obtienen las siguientes conclusiones:

- Puede ser bimodal si $\alpha < 1$ o $\beta < 1$;
- También puede ser unimodal si $\alpha < 1$ o $\beta < 1$;
- Aparece siempre unimodal si $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$;
- Puede ser bimodal, incluso cuando la correspondiente PDF Beta-Normal estándar no lo es.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

El parámetro adicional c permite una variedad de formas bimodales (con grados más bajos y más altos de bimodalidad) incluso cuando la PDF Beta-normal estándar ($\beta=1$) no permite la bimodalidad. El parámetro adicional c también permite una variedad de formas unimodales con valores modales más grandes y más pequeños en comparación con la PDF Beta-Normal estándar ($\beta=1$).

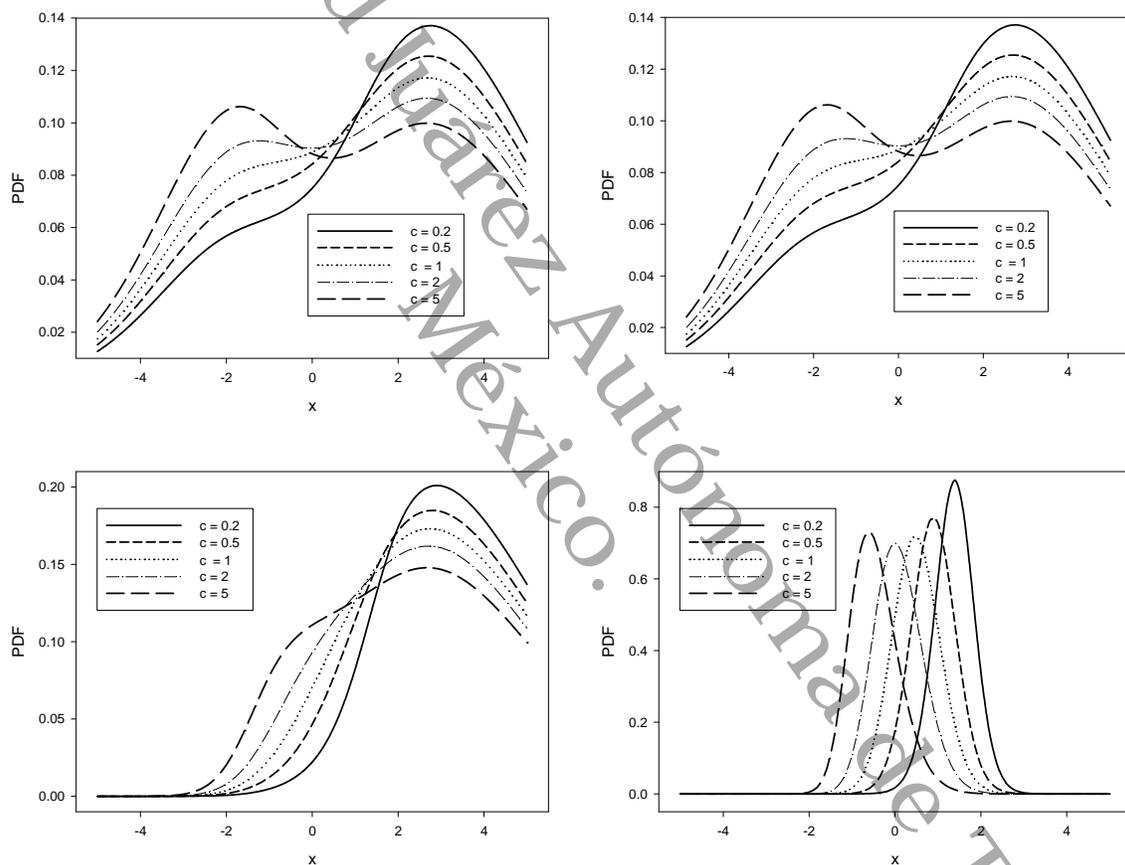


Figura 2. Distribución Beta-Normal estándar modificada (PDF) para $\alpha = 0.2, \beta = 0.1$ (superior izquierda), $\alpha = 0.4, \beta = 0.1$ (superior derecha), $\alpha = 1.1, \beta = 0.1$ (inferior izquierda), $\alpha = 4, \beta = 2$ (inferior derecha).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

2.3. MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático puede definirse, de una manera general, como una formulación que expresa las características fundamentales de un sistema o proceso físico en términos matemáticos. Los modelos se clasifican desde simples relaciones algebraicas hasta grandes y complicados sistemas de ecuaciones diferenciales. A una ecuación se le llama una solución analítica o exacta porque satisface exactamente la ecuación diferencial original. Desafortunadamente, hay muchos modelos matemáticos que no pueden resolverse exactamente. En muchos de estos casos, la única alternativa es la de desarrollar una solución numérica que se aproxime a la solución exacta. Como se mencionó con anterioridad, los métodos numéricos son aquellos en los que se reformula el problema matemático para que se pueda resolver mediante operaciones aritméticas (Chapra, 1988).

Los métodos numéricos combinan dos de las herramientas más importantes en el área de la ingeniería: matemáticas y computadoras. Los métodos numéricos se pueden definir como las matemáticas por computadora. Las buenas técnicas de programación aumentan la habilidad para aplicar los conocimientos de los métodos numéricos. En particular, las potencialidades y limitaciones de las técnicas numéricas se aprecian mejor cuando se usan estos métodos para resolver los problemas de ingeniería utilizando como herramienta una computadora (Chapra, 1988).

2.4. MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Los métodos numéricos permiten la resolución de problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas e implementarlos en una computadora y usar correctamente el *software* existente para dichos métodos. Lo anterior no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras, sino que también amplía la destreza matemática y la comprensión de los principios científicos elementales. El análisis numérico trata de diseñar métodos para predecir de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente. El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

“aproximadas” a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático. Los métodos numéricos pueden ser aplicados para resolver procedimientos matemáticos en: cálculo de derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, operaciones con matrices, Interpolaciones, ajuste de curvas y polinomios (Chapra, 1988).

Los métodos numéricos son adecuados para la solución de problemas comunes de ingeniería, ciencias y administración, utilizando computadoras electrónicas. En el proceso de solución de problemas por medio de computadoras se requieren las etapas siguientes (Chapra, 1988).

- *Especificación del problema.* Con esto se indica que se debe identificar perfectamente el problema y sus limitaciones, las variables que intervienen y los resultados deseados.
- *Análisis.* Es la formulación de la solución del problema denominada también algoritmo, de manera que se tenga una serie de pasos que resuelvan el problema y que sean susceptibles de ejecutarse en una computadora.
- *Programación.* Este paso consiste en traducir el método de análisis o algoritmo de solución expresándole como una serie detallada de operaciones numéricas, alfanuméricas y lógicas.
- *Verificación.* Es la prueba exhaustiva del programa para eliminar todos los errores que tenga de manera que efectúe las operaciones necesarias. En esta etapa los resultados de prueba se comparan con soluciones conocidas de problemas ya resueltos.
- *Producción.* Es la última etapa en la que solo se proporcionan datos de entrada del programa obteniéndose las soluciones correspondientes.

De lo antes expuesto se puede deducir que es necesario un conocimiento completo del problema, y de los campos de las matemáticas relacionados con el que es precisamente el objeto de los métodos numéricos para computadora. En esta investigación se emplearon algunos métodos de integración numérica para estimar la probabilidad de una función de distribución por lo que a continuación se presentan los métodos numéricos utilizados.



2.4.1. Fórmulas de integración de Newton-Cotes

Las fórmulas de integración de Newton-Cotes son los esquemas más comunes dentro de la integración numérica. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulares con alguna función aproximada que sea más fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \quad (19)$$

en donde $f_n(x)$ es un polinomio de forma:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (20)$$

y en donde n es el orden del polinomio.

Una manera de obtener una estimación más exacta de una integral es usar polinomios de orden superior para conectar los puntos. Por ejemplo, si hay un punto medio extra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces se pueden conectar los tres puntos con una parábola. Si hay dos puntos igualmente espaciados entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces los cuatro puntos se pueden conectar con un polinomio de tercer orden. A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se las llama reglas de Simpson. En los apartados siguientes se presentan las ecuaciones de los métodos de Simpson de acuerdo a (Chapra, 1988).

2.4.2. Regla de Simpson 1/3

La ecuación de la regla de Simpson 1/3:

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (21)$$

donde $h = (b - a)/2$. La especificación "1/3" surge del hecho de que h está dividida entre 3 en la Ec. (21). La regla de Simpson 1/3 tiene una precisión de tercer orden aun cuando se base en sólo tres



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

puntos. En otras palabras, produce resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se derive de una parábola. La regla de Simpson de 1/3 se puede expresar usando el formato de la ecuación:

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad (22)$$

en donde $a = x_0$, $b = x_2$, y x_1 es el punto medio entre a y b , dado por $(b + a)/2$. Nótese que de acuerdo a la ecuación el punto medio se pondera con dos tercios y los dos puntos extremos con un sexto.

2.4.3. Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple

La regla de Simpson se puede mejorar al dividir el intervalo de integración en un número de segmentos de igual anchura:

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (23)$$

La integral total se puede representar como:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \quad (24)$$

Al sustituir la regla de Simpson 1/3 para la integral individual se obtiene:

$$I \cong 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \cdots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6} \quad (25)$$

Con la regla 1/3 de aplicación múltiple se debe utilizar un número par de segmentos para implementar el método. Además, los coeficientes "4" y "2" en la ecuación podrían parecer peculiares a primera vista. Sin embargo, siguen en forma natural la regla de Simpson 1/3. Los puntos pares representan el término medio para cada aplicación y, por tanto, el peso de 4 en la ecuación. Los puntos pares son comunes en las aplicaciones adyacentes y, por tanto, se cuentan dos veces. La regla de Simpson 1/3 está limitada a los casos en que se cuenta con un número par de segmentos y



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

un número impar de puntos. Por consiguiente, se usa la regla de segmentos impares-puntos pares, conocida como regla de Simpson de 3/8, en conjunción con la regla de 1/3 para permitir la evaluación de cualquier número de segmentos, pares o impares.

2.4.4. Regla de Simpson 3/8

Es una manera similar a la derivación de la regla trapezoidal y de Simpson 1/3, un polinomio de Lagrange de tercer orden se puede ajustar a cuatro puntos e integrarse:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx \quad (26)$$

para obtener:

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (27)$$

donde $h=(b-a)/3$. Esta ecuación se llama regla de Simpson 3/8 debido a que h se multiplica por 3/8. La regla de Simpson 1/3 es a menudo el método de preferencia ya que alcanza exactitud de tercer orden con tres puntos más que los cuatro puntos requeridos para la versión de 3/8. Sin embargo, la regla de 3/8 tiene utilidad cuando el número de segmentos es impar (ver Figura 3).

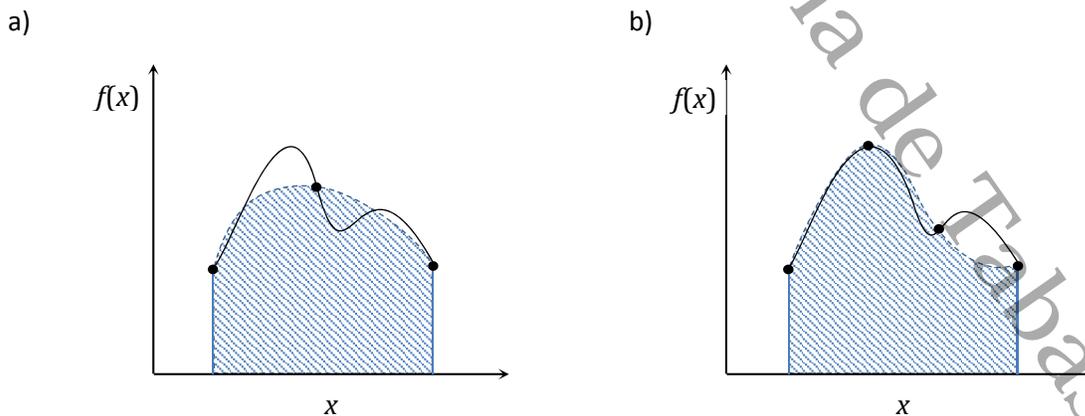


Figura 3. a) Ilustración gráfica de la regla de Simpson 1/3, b) Ilustración gráfica de la regla de Simpson 3/8.



2.4.5. Cuadratura de Gauss

Una característica de las ecuaciones de Newton-Cotes es que la estimación de la integral se basa sobre valores de la función uniformemente espaciados. En consecuencia, la localización de los puntos base que se usa en esas ecuaciones es predeterminado o fijo. Ahora, suponga que la restricción de los puntos base fijos fue eliminada y se tiene la libertad de evaluar el área bajo una línea recta que conecta dos puntos cualesquiera sobre la curva. Al ubicar esos puntos en forma estratégica, se podría definir una línea recta que equilibraría los errores negativo y positivo, y con esto poder llegar a una evaluación mejorada de la integral (ver Figura 4). El método de Cuadratura de Gauss es el nombre para una clase de técnicas para implementar tal estrategia. Una de las fórmulas particulares de cuadratura gaussiana son las fórmulas de Gauss-Legendre. La ecuación de aproximación a una integral para el método de cuadratura gaussiana es:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_{n-1} f(x_{n-1}) \quad (28)$$

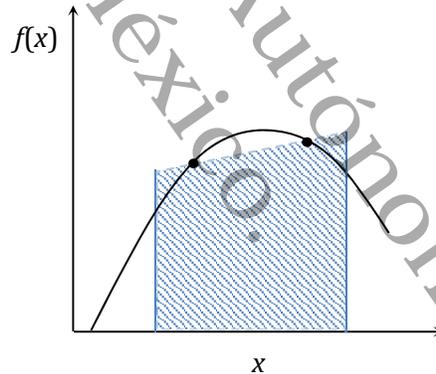


Figura 4. Ilustración gráfica de la Cuadratura de Gauss.

2.5. NOCIONES DE PROGRAMACIÓN DE VISUAL BASIC PARA APLICACIONES (VBA)

En este apartado se describen los procesos inherentes al diseño, desarrollo y ejecución de la herramienta informática necesaria para utilizar los modelos de predicción del área foliar que se propone en este estudio.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

2.5.1. Diseño de algoritmos

El proceso de resolución de un problema con una computadora conduce a la escritura de un programa y su ejecución. El proceso debe considerar una serie de fases, las cuales son: Análisis del problema, Diseño del algoritmo, Codificación, Compilación y ejecución, Verificación, Depuración, Mantenimiento y Documentación. Un algoritmo es un método para resolver un problema mediante una serie de pasos precisos, definidos y finitos. Los algoritmos se pueden expresar por fórmulas, diagramas de flujo y pseudocódigos (Joyanes, 2010).

Cada programa bien diseñado consta de un programa principal que llama a subprogramas que a su vez pueden llamar a otros subprogramas. Los programas estructurados de esta forma se dice que tienen un diseño modular. El proceso que convierte los resultados del análisis del problema en un diseño modular con refinamientos sucesivos que permiten una posterior traducción a un lenguaje se denomina diseño del algoritmo. El diseño del algoritmo es independiente del lenguaje de programación en el que se vaya a codificar posteriormente (Joyanes, 2010).

2.5.2. Microsoft Excel®

Además de la extensa lista de Excel® de las funciones de hoja de cálculo y selección de herramientas de cálculo para cálculos científicos y de ingeniería, Excel contiene un lenguaje de programación que permite a los usuarios crear procedimientos, a veces llamados macros, que pueden realizar cálculos más avanzados o que puede automatizar cálculos repetitivos. El lenguaje de programación actual de Excel es *Visual Basic para Aplicaciones*, o VBA, el cual es una serie de códigos, que es un lenguaje de programación visual básico de Microsoft, éstos códigos tienen palabras clave para permitir al programador trabajar con libros de hojas de cálculo de Excel, celdas, gráficos, entre otros (Billo, 2007).

2.5.3. Elementos de programación en VBA

Para crear el código VBA, o para examinar el código existente, se utiliza el Editor de Visual Basic. Para acceder al Editor de Visual Basic. La pantalla del Editor de Visual Basic por lo general contiene



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

tres ventanas importantes: la ventana Explorador de proyectos, la ventana Propiedades y la ventana de código. Los códigos de programación de VBA consisten en declaraciones. Las declaraciones se construyen utilizando comandos de VBA, operadores, variables, funciones, objetos, propiedades, métodos u otras palabras clave de VBA. Gran parte del código que se crea consiste en la asignación del resultado de una expresión a una variable u objeto (Billo, 2007).

2.5.4. Programación de integración con Cuadratura Gaussiana

La cuadratura gaussiana selecciona x_1, x_2, \dots, x_n en $[a, b]$ y unos coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n de tal manera que se reduzca “en lo posible” el error esperado en la aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (29)$$

La reducción “en lo posible” del error esperado en la aproximación se entiende en el sentido de que, por lo menos $\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$, con $P(x)$ un polinomio de grado $<2n$. En este caso, los valores adecuados para x_1, \dots, x_n son las raíces del polinomio de Legendre de grado n y los números c_i están definidos por:

$$\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (30)$$

Los polinomios de Legendre se definen de manera recursiva:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\vdots$$



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad \text{para } n=2, 3, \dots$$

Estos valores x_i y c_i reducen “en lo posible”, el error esperado en la aproximación:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_{ni}f(x_{ni}) \quad (31)$$

Ahora en vez de x_i y c_i ponemos x_{ni} y c_{ni} para indicar que son los valores que corresponden al polinomio de Legendre de grado n . Para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ se requiere de un cambio de variable $x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]$ con el cual

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]\right) \frac{b-a}{2} dt \quad (32)$$

Ahora, si $g(t) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]\right)$ entonces

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx \sum_{i=1}^n c_{ni}g(x_{ni}) \quad (33)$$

Así, para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ debemos aplicar la fórmula de aproximación a $\int_{-1}^1 0.5e^{-0.25(1+t)^2} dt$

Las raíces x_i de los polinomios de Legendre de grado menor o igual a $n=5$ y los c_i se pueden encontrar en la Tabla 2 (Chapra, 1988).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tabla 2. Coeficientes de los Polinomios de Legendre de diferentes grados (Chapra, 1988).

Grado de $P(x)$	c_i	x_i
2	$c_{21} = 1$	$x_{21} = 0.5773502692$
	$c_{22} = 1$	$x_{22} = -0.5773502692$
3	$c_{31} = 0.5555555556$	$x_{31} = -0.7745966692$
	$c_{32} = 0.8888888889$	$x_{32} = 0.0000000000$
	$c_{33} = 0.5555555556$	$x_{33} = 0.7745966692$
4	$c_{41} = 0.3478548451$	$x_{41} = -0.8611363116$
	$c_{42} = 0.6521451549$	$x_{42} = 0.3399810436$
	$c_{43} = 0.6521451549$	$x_{43} = 0.3399810436$
	$c_{44} = 0.3478548451$	$x_{44} = 0.8611363116$
5	$c_{51} = 0.2369268850$	$x_{51} = 0.9061798459$
	$c_{52} = 0.4786286705$	$x_{52} = 0.5384693101$
	$c_{53} = 0.5688888889$	$x_{53} = 0.0000000000$
	$c_{54} = 0.4786286705$	$x_{54} = -0.5384693101$
	$c_{55} = 0.2369268850$	$x_{55} = -0.9061798459$

2.6 ESPECIES NATIVAS EMPLEADAS

Las dos especies utilizadas en el estudio fueron descritas por Canul (2014) y son las que se describen en los apartados siguientes.

2.6.1. *Tradescantia pallida* Rose. D.R. Hunt.

Sinonimia. *Setcreasea pallida* Rose.; *Setcreasea purpurea* Boom.

Nombre común. Señorita en su barquito, Purpurina.

Distribución. Nativa de México, distribuida desde Tamaulipas a Yucatán.

Morfología. Planta herbácea perenne, semi-suculenta, de tallos ascendentes poco ramificados, glabros, de color violeta púrpura. Hojas dispuestas en espiral, de oblongo-elípticas a elíptico-lanceoladas, de aproximadamente 5-15 cm × 2-4.2 cm, base simétrica, de redondeada a anchamente cuneada, ápice agudo y el margen diminutamente ciliado; son glabras, de color rojizas a color violeta púrpuro debido a los pigmentos presentes en los cloroplastos denominados antocianinas, aunque en estado juvenil y por bajas incidencias de radiación solar torna una coloración verde pálido.



2.6.2. *Tradescantia spathacea* Swartz

Sinonimia. *Rhoeo discolor* (L'Hér.) Hance; *Rhoeo spathacea* (Sw.) Stearn.

Nombre común. Zopilotea, hierba del cáncer, maguey morado.

Distribución. América Central.

Morfología. Herbácea tipo perenne, con tallo corto y grueso casi oculto por la intercalación de la base de las hojas, sin ramificar con crecimiento bromeliforme. Hojas erectas, se superponen estrechamente en forma de espiral, lineales, cerosas, rígidas y semi-carnosas, de 15-30 cm de largo y 2.5-8 cm de ancho, el haz de color verde oscuro y el envés de color púrpura (presencia del pigmento de antocianina, el cual sólo se encuentra en la cara abaxial de las hojas).



3.

ANTECEDENTES

Los modelos matemáticos que han sido propuestos para la determinación del área foliar, están basados en correlaciones empíricas obtenidas por análisis de regresión. El análisis de regresión es un método que permite investigar y modelar la relación existente entre una o más variables con una única variable dependiente o respuesta. Asimismo, uno de los criterios más utilizados para evaluar la adecuación general de un modelo (prueba de bondad de ajuste) es el coeficiente de determinación (R^2).

En la literatura especializada se encuentran publicados diversos métodos de estimación del área foliar. Estos modelos empíricos suelen ser correlaciones de tipo lineal o cuadrático como se muestran en la Tabla 3 (ver por ejemplo Antunes *et al.*, 2008; Olfati *et al.*, 2010; Roupheal *et al.*, 2010).

Tabla 3. Correlaciones empíricas clásicas para la estimación del área foliar en función de las dimensiones de la hoja.

Tipo de correlación		Expresión Matemática
Regresión univariable	Lineal	$LA = aL + b$ $LA = aW + b$
	Polinomial cuadrática	$LA = aL^2 + bL + c$ $LA = aW^2 + bW + c$
	Potencial	$LA = aL^b$ $LA = aW^b$
Regresión multivariable	Polinomial cuadrática	$LA = aLW + b$
	Polinomial cúbica	$LA = aLW^2 + b$
	Potencial	$LA = a(LW)^b$

LA es el área foliar de una sola hoja, L es la longitud de la hoja, W es la anchura de la hoja, a , b y c son parámetros de obtenidos por análisis de regresión.

Megías *et al.* (1995) determinaron el área foliar por medio de tres procedimientos diferentes. En primer lugar, mediante la aplicación de la ecuación $LA = aLW$; en segundo lugar, mediante el estudio de una correlación simple con una sola variable independiente y, finalmente, por el estudio de una correlación múltiple. Cabe aclarar que en este estudio los autores concluyen que la utilización de



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

ecuaciones de regresión no resulta adecuada para la determinación del área foliar a pesar de la mejora producida en el ajuste de la ecuación. Meza y Bautista (1999) determinaron el área foliar de plantas jóvenes de níspero (*Manilkara achras*), los datos obtenidos se sometieron a análisis de regresión para estimar las ecuaciones que más se ajustaban al modelo que permitía estimar el área foliar en función de sus parámetros lineales. Las ecuaciones propuestas fueron de la forma utilizando los parámetros longitud (L) y anchura (W) fueron: $LA = bL + cL^2$ y $LA = bW + cW^2$. Astegiano *et al.* (2001) obtuvieron una ecuación alométrica entre las dimensiones lineales y de superficie que permite estimar rápidamente el área foliar de un cultivo. En las hojas muestreadas se estudiaron las relaciones alométricas entre la longitud y anchura máxima y el área foliar individual. Se observó que las ecuaciones que mejor estiman el área foliar de un cultivo son aquellas que consideran la variedad de cultivo y el tamaño de hoja. Se presenta además una ecuación general para todas las variedades estudiadas, comparándose el grado de predicción con relación al área foliar medida. Las hojas fueron fotocopiadas, obteniéndose el área foliar mediante la utilización de un medidor de área foliar LICOR (LI-3000) y a continuación, mediante ajustes lineales se obtuvieron rectas de regresión entre el producto de la longitud por la anchura máxima de cada hoja y el área foliar $LA = a + bLW$. En este estudio se concluye que se requiere de dos ecuaciones lineales diferentes, una para hojas chicas y otra para hojas grandes. Williams III y Martinson (2003) obtuvieron mediante una regresión exponencial un modelo matemático para estimar el área foliar de plantas de uvas.

Por su parte, Blanco y Folegatti (2003) desarrollaron una metodología para estimar el índice de área foliar de plantas de pepino y tomate a través de la evaluación del patrón de distribución de área foliar de las plantas y la altura relativa de las hojas en las plantas. En este trabajo el área foliar es calculada a partir de correlaciones ya existentes para tomate y pepino. Igathinathane *et al.* (2005) desarrollaron un *software* interactivo para medir el área foliar utilizando *Visual Basic*. Después, Lopes y Pinto (2005) determinaron un método fácil y preciso para calcular el área foliar de una vid mediante modelos matemáticos que incluye cuatro variables: longitud del tallo, número de hojas primarias y el área de las hojas más grandes y más pequeñas, para obtener una forma sencilla y precisa del área foliar independientemente de la etapa de crecimiento de la vid y además validar los



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

datos obtenidos independientemente de las variedades, años y localidades. El análisis estadístico lo realizaron mediante una regresión múltiple mediante el software estadístico SAS®.

En otro estudio, Blanco y Folegatti (2005) estudiaron hojas de pepino de invernadero para determinar mediante una ecuación el área foliar con la medición de parámetros lineales y los efectos de la salinidad mediante la adición de agua con diferente concentración de sal. Para determinar la ecuación del área foliar utilizaron las medidas de longitud y anchura máxima produciendo la ecuación de la forma: $LA = aLW + b$ y que resultó válida para cualquier tipo de injerto y condiciones de salinidad. De manera similar, Jayeoba *et al.* (2007) determinaron un modelo matemático para predecir el área foliar de la albahaca usando mediciones lineales, utilizando 300 hojas con diversos tamaños seleccionadas en un periodo de tres meses. De las hojas se obtuvieron la longitud y anchura máximas. El modelo de regresión obtenido fue del tipo $LA = aLW + b$. Cristofori *et al.* (2007) obtuvieron un modelo simple para estimar el área foliar de avellanas utilizando medidas lineales. Más tarde, Brito *et al.* (2007) utilizaron métodos no destructivos para estimar el área foliar por tallo de caña de azúcar en la variedad LCP 85-384. Para seleccionar los mejores modelos de estimación del área foliar por tallo se sometieron a análisis de regresión lineal y no lineal respecto del área foliar observada por tallo, distintas combinaciones de los datos de altura, número de hojas verdes/tallo y área foliar de las hojas según su posición en el tallo.

Galindo y Clavijo (2007) determinaron un modelo para calcular el área foliar de la arveja (*Pisum sativum* L.), con este estudio establecieron que el área foliar del chícharo se puede calcular eficientemente mediante variables alométricas convencionales (longitud y anchura) durante las etapas vegetativa y reproductiva del cultivo. En este estudio se emplea una distribución de probabilidad tipo Weibull para ajustar el modelo a formas asimétricas de la hoja. Posteriormente, Antunes *et al.* (2008) determinaron un modelo alométrico no destructivo para estimar el área foliar en hojas de café (*Coffea arabica* y *Coffea canephora*). Para la construcción del modelo seleccionaron al azar un total de 1536 hojas de los diferentes niveles de las copas de los árboles y que abarca todo el espectro de tamaño de hojas posible; además, para validar el modelo se usaron 388 hojas independientes. El modelo que desarrollaron es de tipo potencial, esto es, $LA = a(LW)^b$, cuyo modelo



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

resultó ser altamente preciso y exacto, independientemente del tamaño de la hoja y del cultivo. Fallovo *et al.* (2008) hicieron estudios para determinar el área foliar de frutas pequeñas como la frambuesa (*Rubus idaeus* L.), grosella (*Ribes rubrum* L.) zarzamora (*Rubus fruticosus* L.) entre otras, a partir de la longitud y la anchura, o algunas combinaciones de estos parámetros, pero la forma de los modelos utilizados es lineal o cuadrática y diferente para cada tipo de fruta. De igual forma, Sezer *et al.* (2008) desarrollaron un modelo de predicción del área foliar del maíz (*Zea mays* L.). Para desarrollar los modelos, la anchura, la longitud y el área foliar fueron medidas sin destruir la hoja. Las superficies de las hojas reales de las plantas se midieron con el planímetro digital PLACOMP y el análisis de regresión múltiple con el programa de paquete informático Excel 2003. Los modelos obtenidos de predicción del área foliar en el estudio fueron formulados con expresiones del tipo $LA = a + bW^2 + cLW$. Cristofori *et al.* (2008) desarrollaron un modelo matemático para determinar el área foliar de Caqui (*Diospyros kaki* L.f.) en términos de la anchura y la longitud de la hoja. Los análisis de regresión se aplicaron a varios modelos matemáticos concluyendo que el mejor es del tipo $LA = a + bLW$. Kumar, R. (2009) obtuvo un modelo exponencial matemático para estimar el área foliar de azafrán (*Crocus sativus* L.), en este estudio se presenta la metodología para la calibración y validación del modelo.

Rouphael *et al.* (2010) realizaron un estudio para determinar el área foliar mediante mediciones alométricas no destructivas en sandía (*Citrullus lanatus* Thunb.). El análisis de regresión de LA contra L y W reveló varios modelos que podrían ser utilizados para estimar la superficie de las hojas individuales de sandía. Un modelo lineal que contiene a LW como variable independiente proporciona la estimación más precisa. La validación del modelo mostró que la correlación entre áreas de la hoja de sandía, calculados y medidos, era muy alta. Por lo tanto, este modelo puede estimar con precisión y en grandes cantidades el área de la hoja de las plantas de sandía en muchas comparaciones experimentales sin el uso de instrumentos sofisticados. Es importante mencionar que nuevamente los modelos propuestos fueron de tipo lineal o cuadrático. El modelo que permite una mejor estimación del área foliar en este estudio es $LA = a + bLW$. Kumar *et al.* (2010) desarrollaron un modelo matemático para estimar el área foliar de salvia (*Salvia sclarea* L.) mediante regresiones lineal, cuadrática, logarítmica y exponencial. Olfati *et al.* (2010) determinaron un



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

modelo matemático para estimar el área foliar individual en col y brócoli mediante métodos no destructivos, utilizando la longitud de la hoja, el ancho de la hoja o una combinación de ambas. En este estudio se utilizaron varias correlaciones lineales y cuadráticas encontrando que una ecuación lineal que tiene a W como la variable independiente proporciona la estimación más precisa para el caso de la col ($LA = a + bW^2$) y la ecuación del tipo $LA = a + bLW$ para el brócoli. Después, Burgos *et al.* (2010) realizaron un estudio para obtener modelos para la estimación no destructiva del área foliar de dos cultivos de mandioca (*Manihot esculenta* Crantz) en Argentina. Para realizar esto ajustaron ecuaciones de regresión lineal múltiple para estimar el área foliar mediante el método de selección de variables. El modelo seleccionado por su buen ajuste y precisión para estimar el área foliar está basado en dimensiones no destructivas y de fácil medición. En particular, se estableció que el área foliar puede ser estimada usando simples mediciones lineales como la longitud del pecíolo, la sumatoria de la longitud de los lóbulos y la superficie del lóbulo central para ambos cultivos.

Por su parte, Ilkae *et al.* (2011) determinaron un modelo para predecir el área foliar en soja (*Glycine max* L.) utilizando la longitud y la anchura de la hoja, empleando un diseño de experimentos de bloques completamente al azar con cuatro repeticiones. Juneau *et al.* (2012) realizaron un estudio para ver el efecto del tipo de almacenamiento de las hojas después de cortarse de la planta, este estudio se basó en estimar el área foliar antes y después del almacenamiento. Recientemente, Uzokwe *et al.* (2012) estudiaron hojas de mango africano (*Irvingia gabonensis*) mediante un método no destructivo para determinar el área foliar. La longitud y la anchura fueron medidos con una regla, mientras que el área foliar se midió utilizando el software *WinRHizo PRO2005*. Se seleccionó el mejor modelo de ajuste sobre la base de prueba F y el coeficiente de determinación r^2 . Cabe mencionar que los modelos utilizados en dicho estudio también fueron de tipo lineal o cuadrático. Además, Ghoreishi *et al.* (2012) realizaron un estudio para estimar el área foliar del mango de la India (*Mangifera indica* L) en Irán. En dicho estudio se utilizaron las variables como la longitud, el ancho, el peso fresco y el peso seco. El área foliar se midió mediante métodos como el planímetro, la regla, entre otros.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Recientemente, Souza y Amaral (2015) estimaron el área foliar de *Vernonia ferruginea* Less utilizando un modelo lineal no destructivo usando las dimensiones de longitud (L) y anchura (W) de la hoja; ellos obtuvieron, usando regresión lineal, que el producto de LW es más eficiente para estimar el área foliar (LA) que los modelos basados en una sola dimensión (L, L², W o W²), el modelo lineal fue $LA = 0.463 + 0.676WL$. En otro estudio Buttaro *et al.* (2015) obtuvieron un modelo para estimar el área foliar (LA) de *Vitis vinifera* L usando mediciones lineales (Longitud y ancho de la hoja). El modelo lineal propuesto fue $LA = -0.465 + 0.914 (L \times W)$ el cual tiene una alta precisión con un alto coeficiente de determinación ($R^2 > 0.98$), con un error cuadrático medio más pequeño. Keramatlou *et al.* (2015) obtuvieron un modelo lineal simple para estimar el área foliar (LA) en *Juglans regia* L., las mediciones de la longitud de la hoja, el ancho y el área se obtuvieron utilizando fotografía digital, ellos obtuvieron el modelo lineal con LW ($LA = 1,11 + 0.69LW$) con una estimación precisa (máximo $R^2 = 0,99$ y menor MSE = 10,09). Tartaglia *et al.* (2016) obtuvieron un modelo para la determinar el área foliar en canola utilizando la longitud (L) y la anchura (W), de un total de 27 modelos seleccionaron el modelo polinomial $LA = 0.88735 W^2 + 0.93503 W$ y el modelo potencial $LA = 1.1282 W^{1.9396}$.



4. JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS E HIPÓTESIS

4.1. JUSTIFICACIÓN

El conocimiento de la superficie foliar del dosel o un cultivo es de suma importancia, pues este índice muestra la capacidad que tiene la planta para transformar la energía luminosa en energía química; además, es un parámetro de caracterización vegetal importante porque con éste se pueden calcular tasas de transpiración, así como la capacidad de una especie vegetal para la captación de radiación solar y su empleo posterior en funciones vitales. Desde el punto de vista de un techo verde como ecotecnología, el área foliar es importante para predecir el área de cobertura de una especie vegetal.

Para la estimación del área foliar se han empleado convencionalmente métodos destructivos que implica la de defoliación de la vegetación y posterior medida con un planímetro o a partir de su digitalización y análisis de imágenes. Por otra parte, las mediciones electrónicas, más precisas y modernas, requieren grandes recursos de adquisición, personal e instrumentos especializados. Por lo anterior es de poca accesibilidad y el procedimiento demanda tiempo considerable, lo que constituye una limitación importante para su realización. Por lo tanto, resulta necesario disponer de métodos prácticos no destructivos para estimar el área foliar con un mínimo de tiempo y esfuerzo de mediciones en campo. Para evitar la destrucción de individuos, se ha planteado el empleo de mediciones de radiación solar e intercepción luminosa utilizando equipos electrónicos. Desafortunadamente, estos equipos son caros y su uso requiere de capacitación, así como de una mayor inversión de tiempo en esta labor, lo que constituye una limitación importante para su realización. Por lo anterior, es deseable disponer de métodos prácticos no destructivos para estimar el área foliar directamente en campo utilizando mediciones y relaciones alométricas sencillas.

El área foliar estimada a través de los modelos predictivos es uno de los parámetros más importantes en la evaluación del crecimiento de las plantas, y su determinación adecuada resulta de importancia fundamental para una interpretación apropiada de los procesos fisiológicos del crecimiento y del desarrollo del cultivo. Además, permite especificar directamente el índice de área



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

foliar a través de las distintas fases fenológicas y calcular numerosos índices de eficiencia del cultivo. Es por ello que resulta sumamente útil y práctico poder contar con ecuaciones que permitan estimar indirectamente el área de forma rápida, sencilla y precisa a partir de variables de medición directa e instantánea. Los modelos así ajustados no son generalizables, por lo que se hace necesario el desarrollo de estudios específicos teniendo en cuenta la variabilidad de las plantas y las condiciones ambientales, para lograr la máxima precisión y reducir las posibilidades de errores de estimación significativos.

Actualmente no se ha propuesto un modelo matemático que permita estimar el área foliar que permita su uso universal y que esté fundamentado en la distribución natural de los parámetros fenológicos tales como la longitud y anchura de la hoja. Además, ningún modelo publicado a la fecha incluye el efecto de la climatología y la meteorología de la región. Por último, existen pocos estudios en donde se aborde el efecto del tiempo (una medida indirecta del crecimiento y desarrollo de los individuos). Por ello, se propone aquí un modelo generalizado basado en distribuciones de probabilidad, que pueda aplicarse a cualquier especie vegetal, incluyéndose el efecto de su etapa de crecimiento y de la época del año. Con este modelo, el usuario podría disminuir su esfuerzo y tiempo en trabajo de campo y monitoreo, así como los recursos financieros requeridos para esta actividad.

4.2. OBJETIVOS

4.2.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un modelo matemático basado en la distribución de probabilidad Beta que permita pronosticar el área foliar de especies vegetales en función de un mínimo de parámetros de caracterización fenológica con el propósito de simplificar el monitoreo y trabajo de campo.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

4.2.2. OBJETIVOS PARTICULARES

- Formular el modelo matemático basado en la distribución de probabilidad Beta.
- Calibrar y validar del modelo del área foliar con base en información recopilada para dos especies vegetales en la unidad experimental establecida en una zona urbana con clima trópico-húmedo.
- Pronosticar el área foliar de cada especie empleando el modelo matemático propuesto.
- Diseñar una interfaz gráfica amigable con el usuario utilizando *Visual Basic para Aplicaciones* en *Excel*[®].

4.3. HIPÓTESIS

- La distribución Beta es capaz de representar parámetros de caracterización fenológica, tales como la longitud y anchura máxima de una hoja, que permitiría estimar el área foliar total.



5.

MÉTODOS

5.1. BASE DE DATOS DEL ÁREA FOLIAR

En este estudio se utilizó un modelo generalizado para la determinación del área foliar a partir de parámetros fenológicos básicos tales como la longitud y la anchura máxima de la hoja. Debido a que esta investigación estuvo orientada a predecir el área foliar de especies potencialmente utilizables como cobertura vegetal en techos verdes, se utilizó una base de datos de las dimensiones de la hoja (longitud y anchura máxima) para dos especies vegetales (*Tradescantia pallida* y *Tradescantia spathacea*) que han sido estudiadas previamente (Córdova-Méndez y Cruz-Salaya, 2013). Además, la base de datos reúne las condiciones meteorológicas medidas en campo bajo las cuales se establecieron y crecieron los individuos de las dos especies referidas. El establecimiento y crecimiento de los individuos de estas especies se realizaron en una unidad experimental de techo verde. Esta unidad está situada en las instalaciones de la División Académica de Ciencias Biológicas de la Universidad Autónoma de Tabasco, localizada en las coordenadas 17°59'27" N, 92°58'22" W a una altitud de 11 msnm, en el municipio de Centro, en las inmediaciones de la ciudad de Villahermosa. En Cruz-Salaya y Córdova-Méndez (2013) se pueden encontrar detalles adicionales sobre el diseño y construcción de la unidad experimental, el monitoreo de las variables meteorológicas, así como del establecimiento y crecimiento de especies vegetales.

Como se mencionó anteriormente, la base de datos está constituida por dos tipos de información misma que fue registrada mensualmente durante el periodo agosto 2012 a julio 2013: *i*) El número de hojas y las dimensiones de cada hoja de todos los individuos de cada especie vegetal, y *ii*) las condiciones meteorológicas bajo las cuales están sometidos los individuos. El número inicial de individuos para cada especie fue de 27 individuos. Además, la base de datos incluye la determinación del área foliar a partir de la digitalización y el análisis de imágenes por computadora empleando el software GSA Image Analyser 3.8 (Gesellschaft für Softwareentwicklung und Analytik mBH, Germany). Debido a que este método de determinación es de tipo destructivo, la base de datos cuenta únicamente con determinaciones mensuales del área foliar para unos cuantos individuos para cada especie vegetal durante los meses de octubre a diciembre de 2012.



5.2. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

5.2.1. Selección de la distribución de probabilidad Beta para el modelo

El modelo matemático generalizado para la representación de la distribución de las longitudes y anchuras de hoja de especies vegetales se basa en la función de probabilidad Beta. A partir de estas distribuciones Beta, se desea estimar el área foliar como una función de los parámetros de la distribución de probabilidad mismos que podrían ser una función del tiempo a medida que los individuos de las especies vegetales cumplen con su ciclo de vida. El modelo matemático que aquí se propone está basado en la suposición de que los parámetros de caracterización (longitud y anchura máxima) de las hojas de un mismo individuo de una especie vegetal determinada pueden representarse como una distribución de probabilidad continua de tipo Beta, cuyos parámetros de escala y forma (α y β) deben estimarse numéricamente. La función de distribución de probabilidad Beta estándar fue dada en la Ecuación (1) mientras que la distribución de probabilidad Beta acotada es la Ecuación (3).

Como se ha mencionado, la función de probabilidad Beta puede ser empleada para representar la distribución tanto de la longitud como de la anchura máxima de las hojas que pertenecen a un individuo. En el caso de una distribución de longitudes de hoja, los límites máximo (x_{max}) y mínimo (x_{min}) de la Ecuación (3) se refieren a la longitud de la hoja más larga y a la longitud de la hoja más corta, respectivamente. Por su parte, cuando la distribución se emplea para representar a la anchura máxima de la hoja, los límites máximo y mínimo se refieren a la anchura máxima de la hoja más larga y a la anchura máxima de la hoja más corta. Nótese que lo anterior es conveniente a nivel práctico, dado que en el trabajo de campo suele resultar más simple localizar las hojas más cortas y largas en lugar de las hojas más angostas y más anchas de un mismo individuo.

La función distribución beta $f(x)$ definida en la Ecuación (3) debe ser integrada numéricamente para estimar la probabilidad de que un individuo posea una longitud o anchura mayor que un límite inferior (x_{min}) y menor que un límite superior (x_{max}). La integral que debe ser evaluada produce la probabilidad en el intervalo definido por los límites:



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

$$P(x; x_{min}, x_{max}) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x; \alpha, \beta) dx \quad (34)$$

Después de revisar el tipo de distribución que presentan los datos experimentales y de determinar que la distribución Beta es la que mejor los representa, se decidió implementar el uso de una distribución Beta modificada para mejorar el ajuste y disminuir el error de la estimación de área foliar. Al respecto, una distribución beta modificada propuesta por Nadarajah *et al.* (2014) dada en la Ecuación (15) fue empleada en este estudio. Esta distribución introduce un nuevo parámetro llamado c , adicional a los dos parámetros α y β propios de la distribución Beta clásica. Este nuevo parámetro permite obtener una familia de distribuciones asimétricas que son analíticamente más flexibles. La ventaja de utilizar esta distribución en este estudio es que permite obtener distribuciones bimodales, un comportamiento común al combinar individuos de diferentes etapas de crecimiento. Por lo anterior, para la integración de las distribuciones Beta-Normal y Beta-Beta, las probabilidades son:

$$P(x; x_{min}, x_{max}, \mu_{exp}, \sigma_{exp}) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x; \alpha, \beta, c, x_{min}, x_{max}, \mu_{exp}, \sigma_{exp}) dx \quad (35)$$

donde μ_{exp} y σ_{exp} son la media y desviación estándar de los datos experimentales.

y

$$P(x; x_{min}, x_{max}) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x; \alpha, \beta, c, \alpha_g, \beta_g, x_{min}, x_{max}) dx \quad (36)$$

donde α_g y β_g son los parámetros de la función de base g de la función distribución beta modificada.

5.2.2. Calibración del modelo

El proceso de estimación numérica de parámetros de las distribuciones Beta se realizó mediante la optimización de la función objetivo. Los dos criterios que se utilizaron para este estudio son el coeficiente de determinación (R^2) y la sumatoria del error al cuadrado (SSE). En la etapa de



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

calibración del modelo se empleó los datos de longitud y anchura máxima de las dos especies vegetales en el mes de septiembre al colocarse inicialmente en el techo verde. Este proceso se realizó construyendo una tabla de distribución de frecuencias con diferentes números de intervalos y utilizando el optimizador *Solver* de Excel® y como método numérico de integración la Cuadratura de Gauss.

5.2.3. Validación del modelo

Para la etapa de validación del modelo se emplearon las mediciones recopilada en la base de datos durante los meses octubre, noviembre y diciembre. Este proceso se realizó con la interfaz gráfica construida con la plataforma de Visual Basic.

5.2.4. Selección del método numérico para la estimación de parámetros

Para poder integrar la distribución de probabilidad Beta se buscó un método numérico. Para este modelo se utilizaron el método de Simpson 1/3, Simpson 3/8 y el método de Cuadratura Gaussiana. Al implementar los métodos de Simpson en la presente investigación, se encontró que el error aumentaba en los extremos por lo que se empleó un método numérico que corrigiera esta limitación. Por ello, se decidió utilizar el método de Cuadratura Gaussiana mismo que permitió corregir los errores en los extremos de la integral y permitió así una estimación más exacta. Sin embargo, en la interfaz gráfica, el usuario puede elegir el método de integración (Simpson 1/3, Simpson 3/8 y Cuadratura Gaussiana) para realizar su propia comparación de resultados.

5.2.5. Optimizador *Solver*

La estimación de parámetros para las distribuciones de probabilidad Beta se realizó a través del optimizador *Solver*, un complemento que forma parte de una serie de comandos denominados herramientas de análisis de *Microsoft Excel*. Con *Solver* se puede encontrar un valor óptimo (mínimo o máximo) para una fórmula en una celda, denominada la celda objetivo, sujeta a restricciones o limitaciones en los valores de otras celdas de fórmula en una hoja de cálculo. El optimizador con un grupo de celdas llamadas celdas de variables de decisión, o simplemente celdas de variables, que participan en el cómputo de fórmulas en las celdas objetivo y de restricción. *Solver* ajusta los valores en las celdas de variables de decisión para cumplir con los límites en las celdas de restricción y



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

producir el resultado deseado para la celda objetivo. Para la estimación de parámetros, este optimizador permite seleccionar alguno de los tres algoritmos o métodos de resolución siguientes: *Generalized Reduced Gradient (GRG) Nonlinear*, que se usa para problemas que son no lineales y no rígidos, *LP Simplex* útil particularmente para problemas lineales, y *Evolutionary* que está inspirado en técnicas de algoritmo genético y que ha resultado útil para la solución de problemas rígidos.

5.2.6. Pronóstico del área foliar total

La estimación del área foliar total (la sumatoria del área foliar individual de las hojas) fue calculada por:

$$TLA_{calc} = a_T \mu_{L,calc} \mu_{W,calc} \quad (37)$$

donde a_T es el parámetro del área foliar, $\mu_{L,calc}$ y $\mu_{W,calc}$ son las medias de la longitud y anchura de las hojas calculadas a través del modelo basado en funciones de distribución de probabilidad, respectivamente.

La función objetivo para la estimación del área foliar fue definida como la suma de las sumatorias del error en la estimación de las distribuciones de la longitud y la anchura:

$$F_{obj} = SSE_L + SSE_W \quad (38)$$

Para la estimación del área foliar total se establecieron tres tipos de restricciones:

- Los coeficientes de determinación que correlacionan las funciones de distribución experimental y calculada, tanto para la longitud como para la anchura, son iguales o mayores de 0.95:

$$\begin{aligned} R_L^2 &\geq 0.95 \\ R_W^2 &\geq 0.95 \end{aligned} \quad (39.1)$$

- El área foliar total calculada TLA_{calc} , es igual al área foliar experimental TLA_{exp} , resultante de la sumatoria de las áreas foliares individuales de las hojas muestreadas:



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

$$TLA_{exp} = TLA_{calc} \quad (39.2)$$

- Los errores relativos entre las medias experimentales y calculadas para la longitud y la anchura (RE_L y RE_W), son menores de 5%:

$$\left| \frac{\mu_{L,exp} - \mu_{L,calc}}{\mu_{L,exp}} \right| \leq 0.05 \quad (39.3)$$
$$\left| \frac{\mu_{W,exp} - \mu_{W,calc}}{\mu_{W,exp}} \right| \leq 0.05$$

En resumen, la estimación de parámetros empleando el modelo basado en la distribución Beta requirió de 5 parámetros ($\alpha_T, \alpha_L, \beta_L, \alpha_W, \beta_W$), el modelo basado en la distribución Beta-Normal requirió de 7 parámetros ($\alpha_T, \alpha_L, \beta_L, c_L, \alpha_W, \beta_W, c_W$) más el conocimiento *a priori* de la media y desviación estándar de los datos, y el modelo basado en la distribución Beta-Beta requirió de 11 parámetros ($\alpha_T, \alpha_L, \beta_L, c_L, \alpha_{g,L}, \beta_{g,L}, \alpha_W, \beta_W, c_W, \alpha_{g,W}, \beta_{g,W}$).

5.3. DISEÑO DE LA INTERFAZ GRÁFICA

Para el uso del modelo propuesto, se diseñó una interfaz gráfica amigable con el usuario y que permita el manejo de datos y presentación eficiente de resultados. Esta interfaz gráfica se diseñó con *Visual Basic for Applications en Excel*, una herramienta que permite combinar elementos de programación por computadora (en lenguaje *Visual Basic*) con el empleo de controles *ActiveX* para el diseño de interfaces. Este programa permite desarrollar interfaces gráficas y es un lenguaje de programación orientado a objetos. La interfaz gráfica no es más que el conjunto de imágenes y objetos que representan la información y permiten realizar acciones (eventos) que a su vez ejecutan métodos y realizan cambios en las propiedades de los mismos objetos (Billo, 2007).

Para el desarrollo de la herramienta de cómputo, se empleó el lenguaje de Visual Basic para Aplicaciones en Microsoft Excel. Este lenguaje combina la sencillez de programación del lenguaje BASIC y editor visual para la creación de interfaces gráficas de usuario, eficientes y versátiles, puede



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

emplearse para la inclusión de datos y presentación de resultados en forma tabular y gráfica. Otra de las ventajas del empleo de Visual Basic para Aplicaciones (VBA) de Microsoft Excel es que cuenta con una variedad de funciones especiales, trigonométricas, de estadística, de base de datos y de texto las cuales pueden utilizarse directamente desde una subrutina de VBA. Así mismo las subrutinas de VBA pueden escribirse como una subrutina de hoja de cálculo, como un módulo, como una macro o la combinación de estas y a su vez suelen vincularse con controles ActiveX para la automatización de tareas (Rivera, 2013).

5.3.1. Componentes que integran la interfaz

Los controles más empleados son los botones, los cuadros de texto, los cuadros de lista y los tabuladores. Las acciones de cada control se especifican como código de programación dentro de las subrutinas de los eventos. Los eventos típicos son **click** (presionando un botón u otro tipo de control) y **change** (cuando cambia alguna propiedad del control, por ejemplo, el valor numérico de un cuadro de texto). Los eventos permiten ejecutar código de programación con dos propósitos: i) cambiar la apariencia de uno o más controles; por ejemplo, cambiar el color de una celda en una hoja de cálculo **SpreadSheet** o ii) realizar procedimientos de cálculo para el empleo del modelo propuesto (Ver Anexo A).

5.3.2. Programación de la interfaz

El siguiente paso fue la programación de la interfaz. Esto último implica interconectar los componentes de la interfaz y asignar las subrutinas correspondientes. Dentro de un programa de esta naturaleza, existen dos tipos de código, i) el código que modifica la apariencia, valor, posición o comportamiento de los diversos controles, y ii) el código que establece los procedimientos propios para el cálculo del área foliar.

La programación de los componentes de la interfaz se realizó a través de la programación de los controles botones (**CommandButton**), que son los que ejecutan la mayor parte de los procedimientos del programa. Otros controles ejecutores de acciones fueron **OptionButton** y **TabControl** a través de sus eventos respectivos **Change**, y la caja de lista (**ListBox**) a partir de su evento **SelectedIndex**. Para establecer un panorama general del programa, es necesario poseer un algoritmo general de



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

programación. Este algoritmo se basa en el conjunto de opciones de cálculo disponibles y que se enlistan en la Tabla 4.

Tabla 4. Opciones de cálculo disponibles en la interfaz gráfica de usuario.

Tipos de distribución	Intervalo	Método numérico	Función objetivo	<i>Solver</i>
1. Beta Clásica Parámetros iniciales: Beta clásica: a y b	1. Definido por el usuario. 2. Regla de la raíz cuadrada. 3. Regla de Sturges. 4. Regla de Doane. 5. Regla de Rice. 6. Regla de Scott. 7. Regla de Freedman y Diaconis	1. Simpson 1/3 2. Simpson 3/8 3. Cuadratura Gaussiana	1. Coeficiente de determinación, R^2 2. Sumatoria del error al cuadrado, SSE 3. Sumatoria del error relativo	Las opciones disponibles son:
2. Beta modificada con $g(x)$ = normal gaussiana Parámetros iniciales: Normal gaussiana: σ y μ Beta modificada: a , b y c .				1. Precisión de restricciones. 2. Convergencia. 3. Tiempo máximo (segundos). 4. Iteraciones.
3. Beta modificada con $g(x)$ = beta clásica Parámetros iniciales: Beta clásica: a y b Beta modificada: a , b y c				5. Derivadas (diferencias finitas) <ul style="list-style-type: none"> • Progresivas • Centradas 6. Tipos de estimaciones <ul style="list-style-type: none"> • Tangenciales • Cuadráticas

5.4. ALGORITMO GENERAL DE PROGRAMACIÓN

A continuación, se presenta el algoritmo general de programación (Figura 5) donde se indican los pasos de la programación de la interfaz gráfica del usuario. El orden de ingreso de los datos es: 1. Elegir el tipo de modelo, 2. Elegir el cálculo para el número de intervalos, 3. Elegir el método numérico, 4. Inicializar el modelo, 5. Elegir la función objetivo y finalmente 6. Realizar la estimación de parámetros mediante *Solver*. Cada una de las opciones que el usuario debe elegir, presenta un resumen y ayuda visual que permiten tomar una mejor decisión o aclarar alguna duda sobre el concepto que se presenta.

La Figura 6 es el algoritmo de programación para elegir el modelo matemático (Tipo de distribución) que describirá a las dimensiones de la hoja, anchura y longitud. El usuario sólo puede elegir un tipo de modelo. La Figura 7 es el algoritmo de programación para elegir el método para calcular los intervalos necesarios para realizar la estimación. El usuario puede definir el número de intervalos o elegir alguna de las fórmulas siguientes: a) regla de la raíz cuadrada, b) regla de Sturges, c) regla de



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Doane, d) regla de Rice, e) regla de Scott, o f) regla de Freedman y Diaconis. Por su parte, la Figura 8 es el algoritmo de programación que le permite al usuario elegir el método de integración numérica: Simpson 1/3, Simpson 3/8 o cuadratura gaussiana. La Figura 9 es el algoritmo de programación que permite inicializar el modelo, eligiendo qué desea que se estime, los parámetros para la distribución de la longitud, los parámetros para la distribución de la anchura o ambos conjuntos de parámetros al mismo tiempo; una vez elegido esto el usuario debe ingresar los valores iniciales de los parámetros de la distribución elegida. La Figura 10 es el algoritmo que permite elegir la función objetivo que desea utilizar, estas son: el coeficiente de determinación R^2 , la sumatoria del error al cuadrado SSE , y la sumatoria del error relativo SER . Por último, la Figura 11 es el algoritmo que permite ajustar según su conveniencia los parámetros de *Solver* como son: Precisión de restricciones, Convergencia, Tiempo máximo, Iteraciones, Derivadas, Tipo de estimaciones y finalmente realizar la estimación de los parámetros del modelo elegido para obtener así la mejor estimación.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

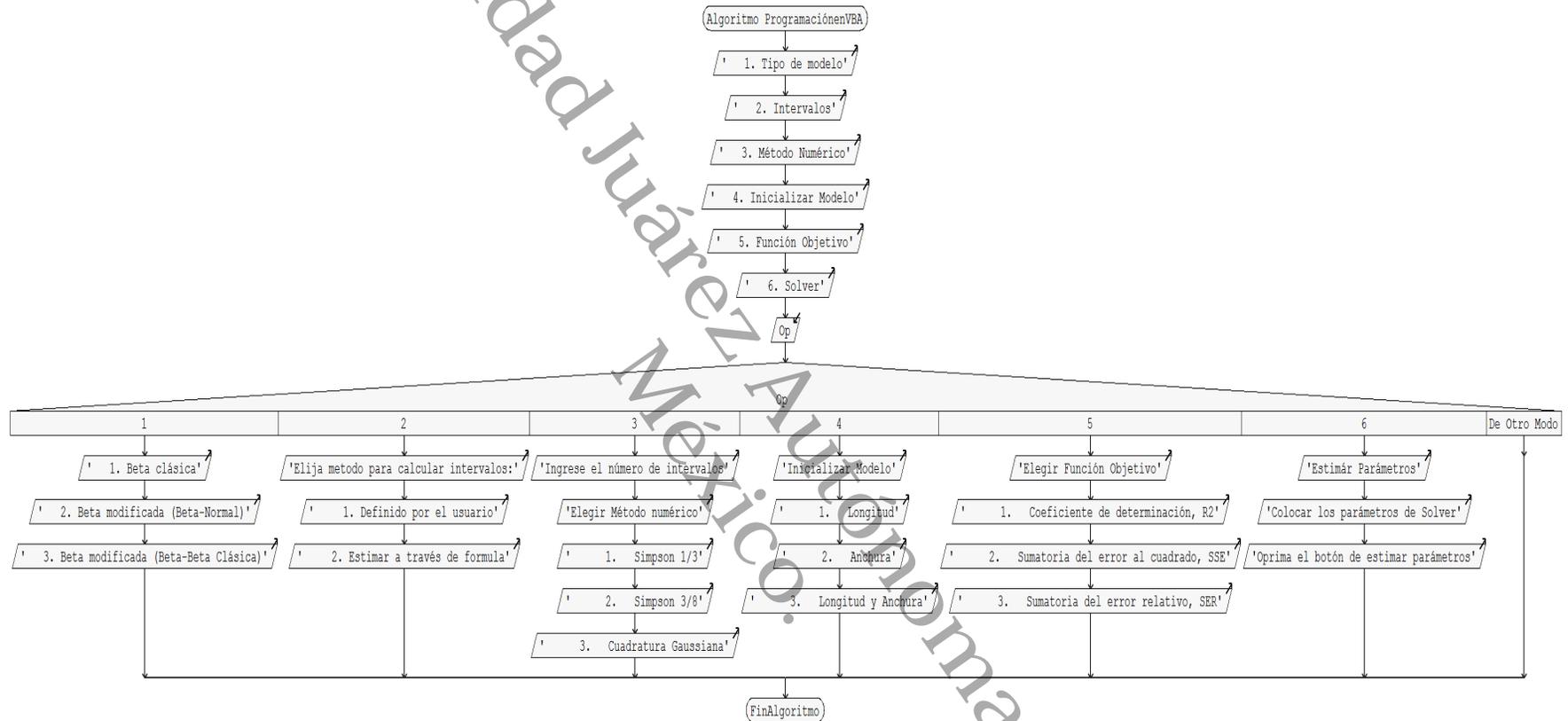


Figura 5. Algoritmo general de programación para el modelo matemático de estimación del área foliar.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

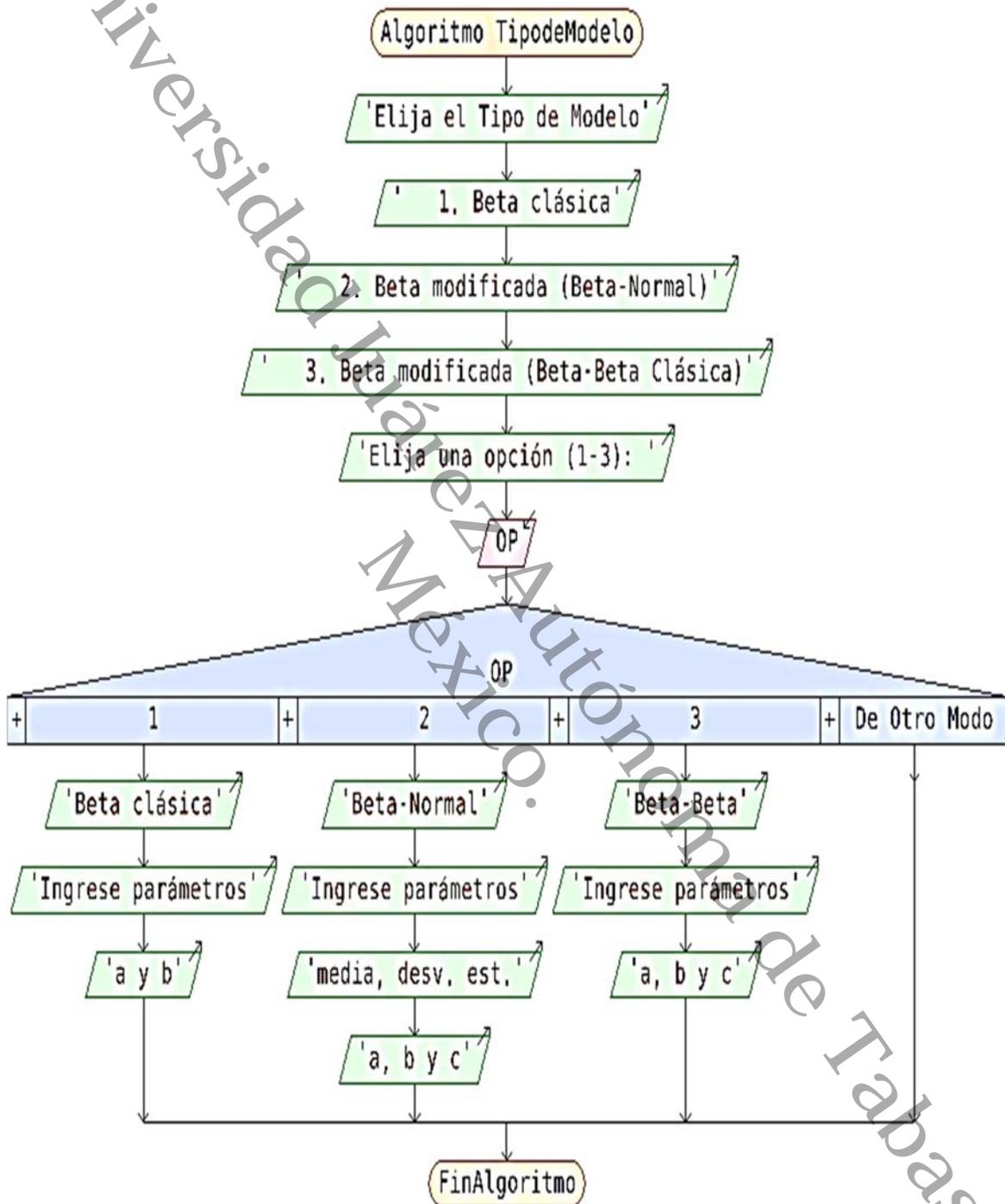


Figura 6. Algoritmo Tipo de Modelo



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

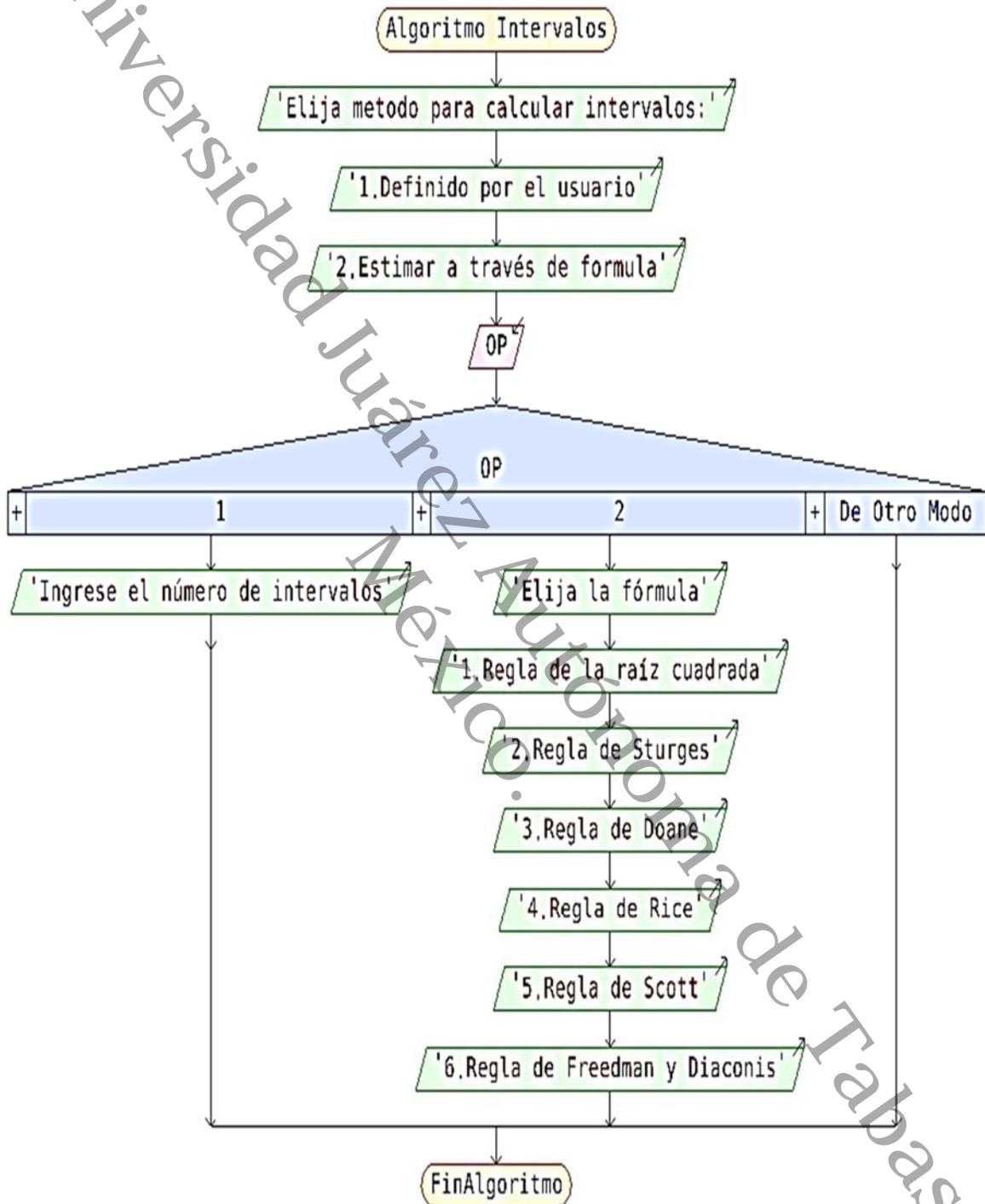


Figura 7. Algoritmo Intervalos



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

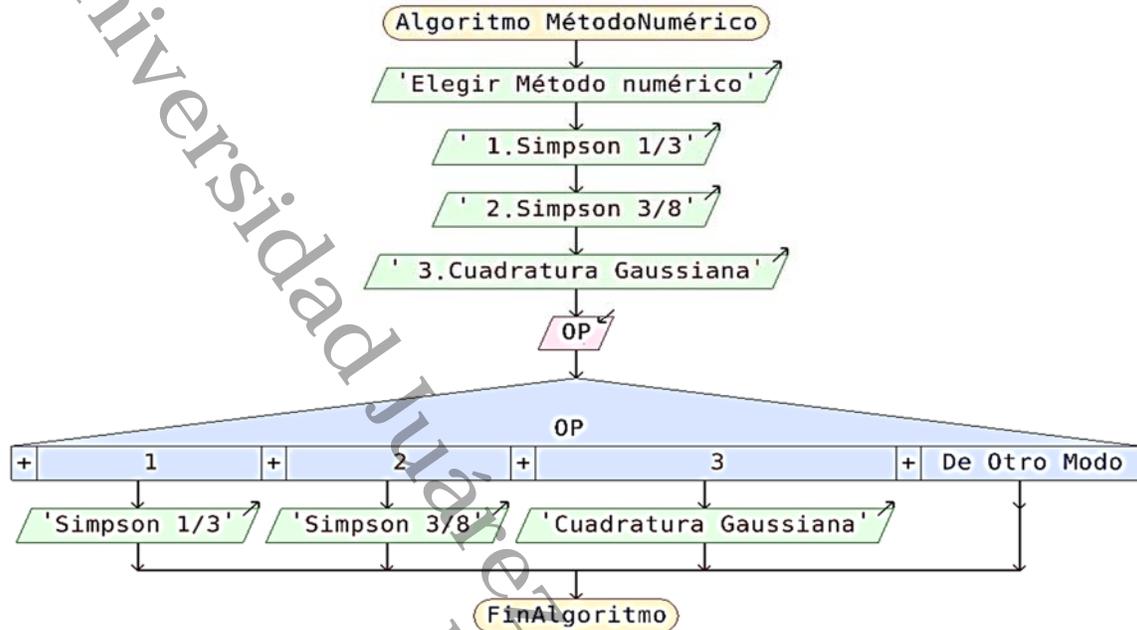


Figura 8. Algoritmo Método Numérico

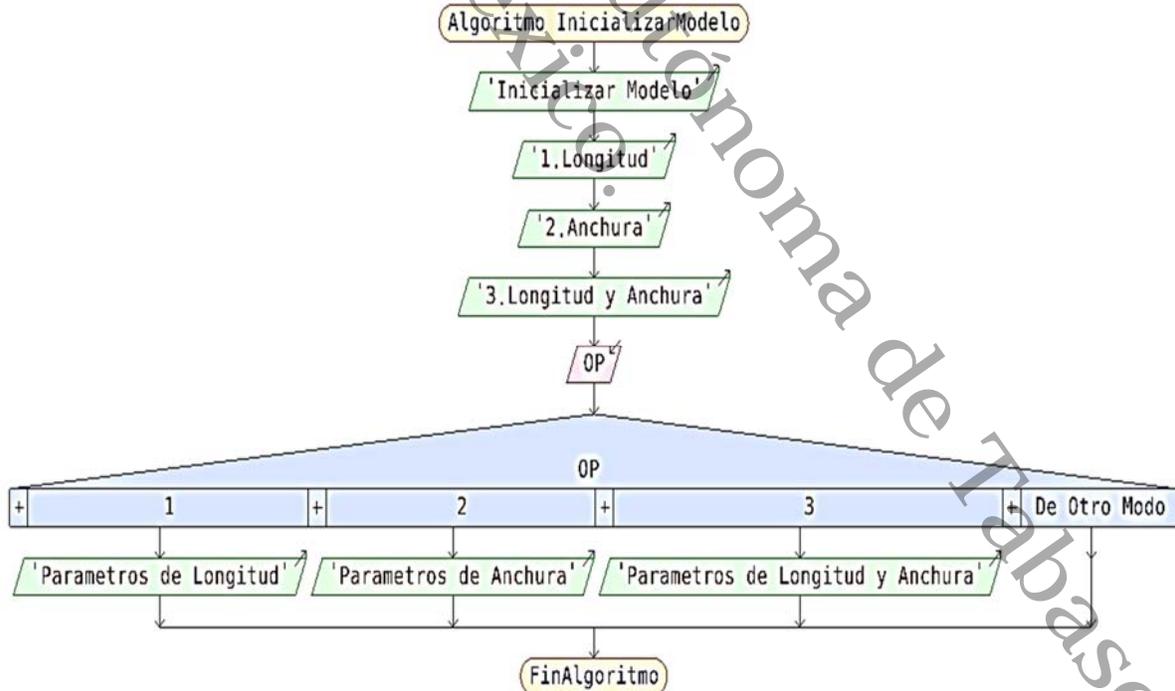


Figura 9. Algoritmo Inicialización del Modelo



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

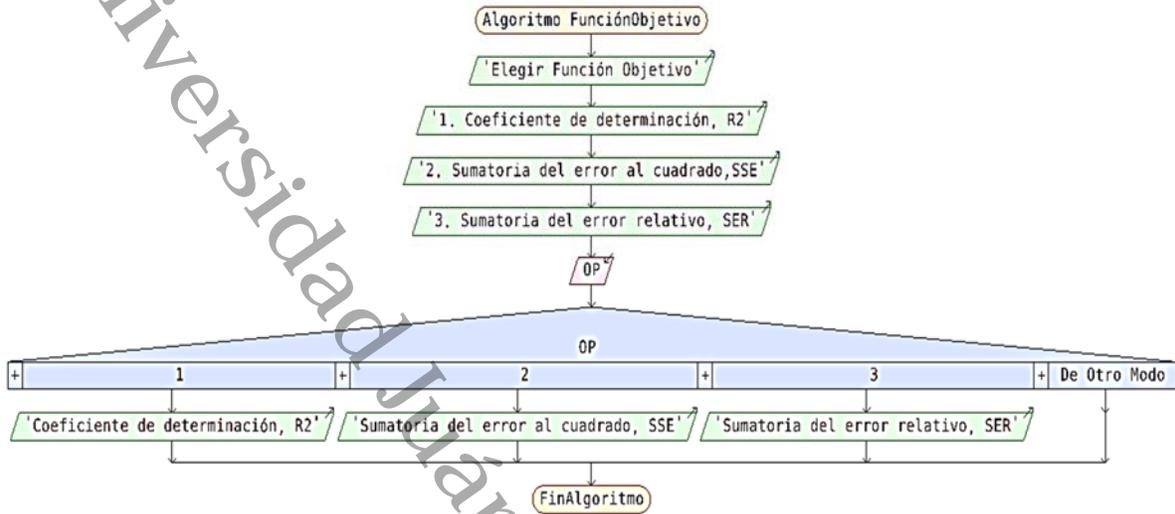


Figura 10. Algoritmo Función Objetivo

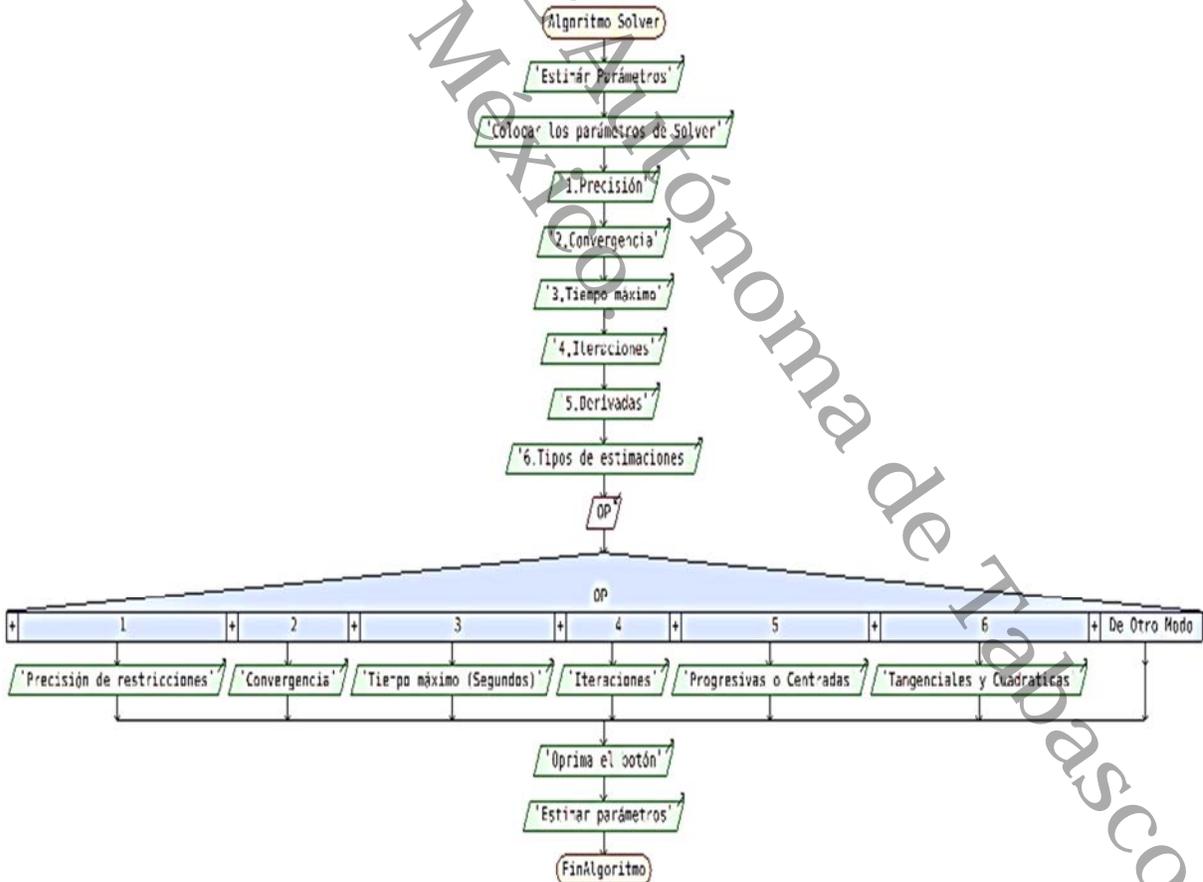


Figura 11. Algoritmo de Solver®



6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático que se planteó al inicio fue estimar el área foliar a partir de la distribución de probabilidad Beta, pero en la revisión bibliográfica se encontró que existen distribuciones Beta modificadas que permiten obtener estimaciones más óptimas. Por lo anterior, se decidió implementar la distribución Beta modificada de Nadarajah *et al.* (2014). La distribución de Nadarajah *et al.* (2014) emplea tres parámetros (α , β y c) lo cual le permite ser más flexible, además de que obtener una variedad de formas bimodales, lo cual fue muy importante ya que, al realizar el tratamiento preliminar de los datos de longitud y anchura, ambas variables alométricas presentaron una tendencia a la bimodalidad así como sesgos marcados hacia la izquierda.

En este apartado se mostrarán los resultados de emplear las distribuciones de probabilidad para estimar las distribuciones de las dimensiones alométricas experimentales de las dos especies vegetales analizadas (*T. pallida* y *T. spathacea*), medidas a inicio del establecimiento de las plantas en el techo verde (septiembre de 2012).

Los datos iniciales fueron la longitud y anchura máxima de 264 hojas de *T. pallida* y 318 hojas de *T. spathacea*. Con estos datos se construyeron los histogramas (Figura 12 y 13) para cada especie con diferentes números de intervalos ($k=6$, $k=7$, $k=8$ y $k=9$). Como se puede observar en la figura 12, los datos experimentales de la longitud de hoja de *T. pallida* generan una distribución con sesgo hacia la izquierda, por lo que se decidió utilizar una distribución Beta que pudiera modelar de manera más precisa tanto la longitud como la anchura de las especies vegetales utilizadas en este estudio. De la misma manera, en la Figura 13 se muestran los histogramas de frecuencia para la anchura de *T. pallida*. Como en el caso de la longitud de hoja, las formas de la distribución de probabilidad no son normales gaussianas.

a)

b)



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

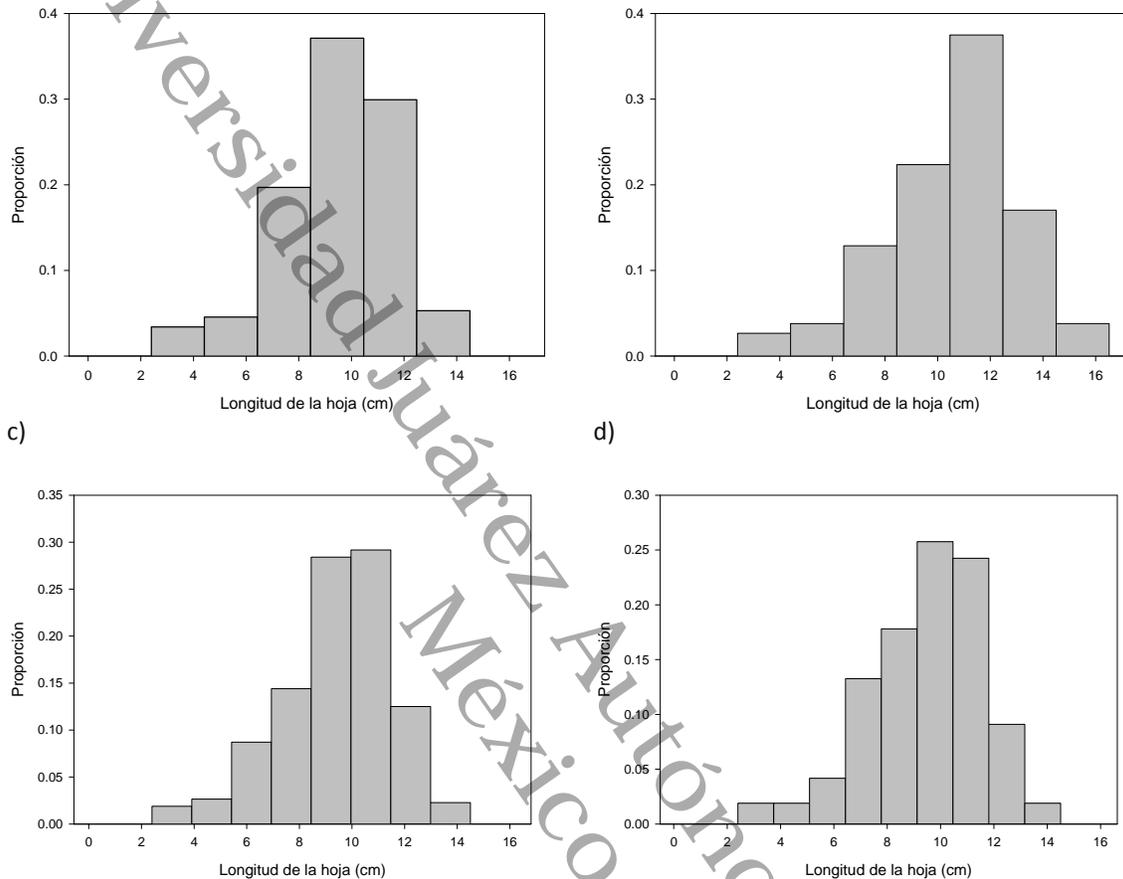


Figura 12. Histograma de frecuencias de la longitud de la hoja, medidas al inicio del establecimiento de *Tradescantia pallida* en el techo verde (septiembre de 2012) y en función del número de intervalos, a) $k = 6$, b) $k = 7$, c) $k = 8$, d) $k = 9$.

Para comprobar que los datos no presentan una distribución normal se utilizó el software Statgraphics® Centurion XVI, obteniéndose el sesgo y la curtosis estandarizada para cada una de las dimensiones (Longitud y Anchura) de las dos especies (*T. pallida* y *T. spathacea*) (Tabla 5). Valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican desviaciones significativas de la normalidad

Tabla 5. Sesgo y curtosis estandarizada de los datos iniciales.

	Longitud <i>T. pallida</i>	Anchura <i>T. pallida</i>	Longitud <i>T. spathacea</i>	Anchura <i>T. spathacea</i>
Total de hojas	264	264	318	318
Sesgo estandarizado	-4.40547	-4.17681	-7.33517	-5.13182
Curtosis estandarizada	1.79267	1.88586	1.45052	2.33393



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

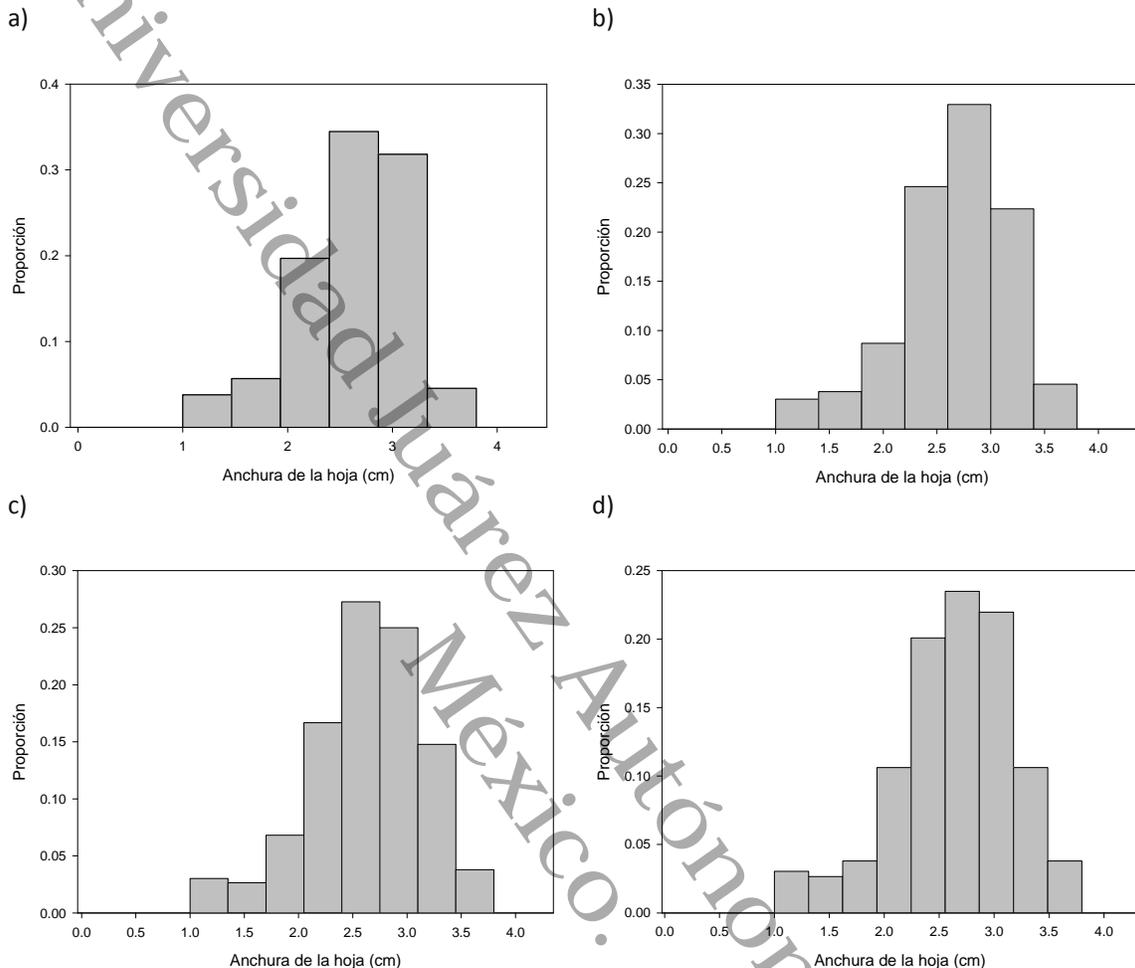


Figura 13. Histograma de frecuencias de la anchura de hoja, al inicio del establecimiento de *Tradescantia pallida* en el techo verde (septiembre de 2012) y en función del número de intervalos, a) $k = 6$, b) $k = 7$, c) $k = 8$, d) $k = 9$.

Se realizó una segunda prueba estadística llamada prueba de Normalidad de Kolmogorov-Smirnov con 95% de confianza ($\alpha = 0.05$) con el software estadístico *Minitab 15*. Los resultados de estas pruebas se presentan en las Figuras 14 y 15 para *T. pallida*, y en las Figuras 16 y 17 para *T. spathacea*. Como se puede observar todas las pruebas de las dos especies vegetales tienen valores de p menores a 0.05 por lo que se rechaza la hipótesis nula de que los datos tienen una distribución normal. Como se observa en las pruebas de normalidad, la especie *T. spathacea* es la que presenta mayor desviación de normalidad ya que presenta valores mayores de la distancia Kolmogorov-Smirnov (DMax) (0.134 y 0.136, respectivamente) en comparación a *T. pallida* (0.089 y 0.091).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

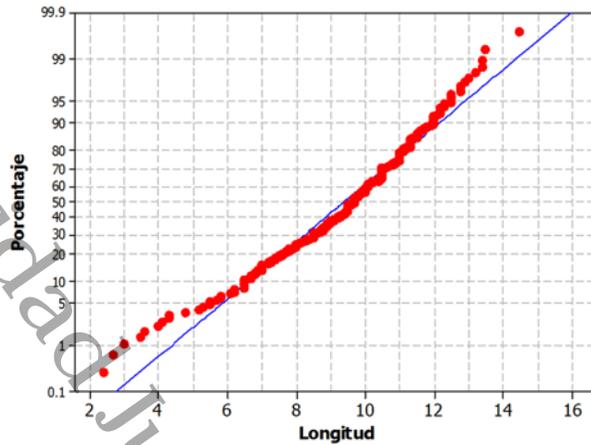


Figura 14. Prueba de Normalidad para longitud de hoja de *Tradescantia pallida*. Valor $p = 0.031$ indica que los datos no tienen una distribución normal.

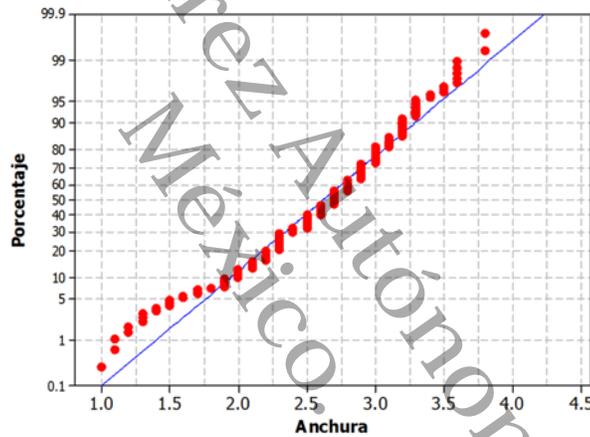


Figura 15. Prueba de Normalidad para anchura de hoja de *Tradescantia pallida*. Valor $p = 0.024$ indica que los datos no tienen una distribución normal.

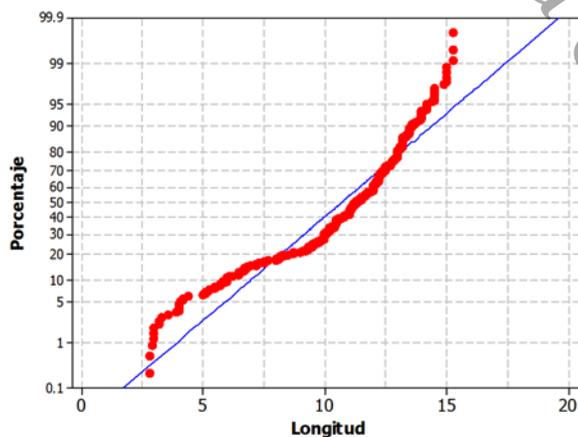


Figura 16. Prueba de Normalidad para Longitud de hoja de *Tradescantia spathacea*. Valor $p = 0.0000158$ indica que los datos no tienen una distribución normal.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

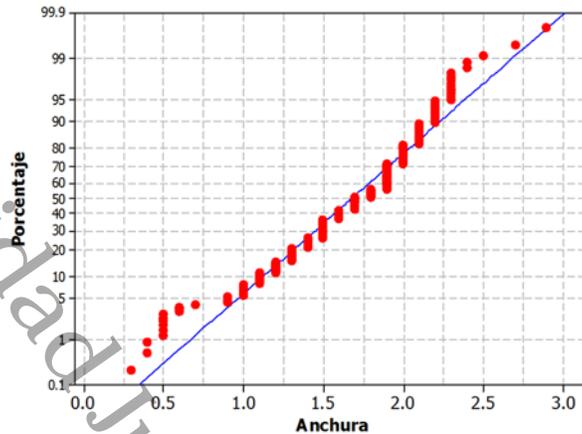


Figura 17. Prueba de Normalidad para anchura de hoja de *Tradescantia spathacea*. Valor $p = 0.0000224$ indica que los datos no tienen una distribución normal.

6.1.1. Tabla de distribución de frecuencias

El modelo matemático se basó en la suposición de que los parámetros de caracterización (longitud y anchura máxima) de las hojas de un mismo individuo de una especie vegetal determinada pueden representarse como una distribución de probabilidad continua de tipo Beta, cuyos parámetros de escala y forma (α y β) deben estimarse numéricamente. Una vez que se determinó que los datos no tienen una distribución normal se procedió a construir el modelo matemático basado en la distribución Beta clásica mediante la construcción de una tabla de distribución de frecuencias con diferentes tamaños de intervalos y calculando el mejor ajuste de la distribución Beta utilizando el optimizador *Solver* de Excel. Para cada una de las especies se construyó esta tabla con diferentes números de intervalos tanto para longitud como anchura. La Figura 18 muestra un ejemplo de una tabla de distribución de frecuencias para *T. spathacea* con 8 intervalos de los datos iniciales de longitud.

Número de intervalos		8			
Δ longitud		2.1875			
Intervalos		Promedio	Frecuencia	Proporciones	
inferior	superior			Experimental	Calculada (distribución B)
0.000	0.500	0.250	0	0.0000	0.0000
0.500	2.688	1.594	23	0.06667	0.01879
2.688	4.875	3.781	25	0.07246	0.07246
4.875	7.063	5.969	41	0.11884	0.12789
7.063	9.250	8.156	49	0.14203	0.17177
9.250	11.438	10.344	52	0.15072	0.19557
11.438	13.625	12.531	93	0.26957	0.19201
13.625	15.813	14.719	30	0.08696	0.15347
15.813	18.000	16.906	5	0.01449	0.06803
18.000	20.188	19.094	0	0.0000	0.0000

Figura 18. Tabla de distribución de frecuencia de los datos iniciales de *Tradescantia spathacea*, ($k = 8$).



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

6.1.2. Distribución de probabilidad Beta clásica como modelo de estimación

Una vez construida la tabla de distribución de frecuencias se utilizó la distribución de probabilidad Beta clásica para estimar la longitud y la anchura. Con la finalidad de buscar los mejores parámetros de la distribución se utilizó el optimizador *Solver* de Excel.

En las Figuras 19 y 20 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de la longitud de la hoja de *T. pallida* y *T. spathacea* respectivamente, utilizando la distribución Beta clásica para cuatro tamaños de intervalos. En general, nótese que el modelo de distribución Beta clásica es más preciso para representar los datos de la longitud de hoja de *T. pallida* que los de *T. spathacea* y que la mejor correlación se obtiene con $k = 6$ para ambas especies vegetales.

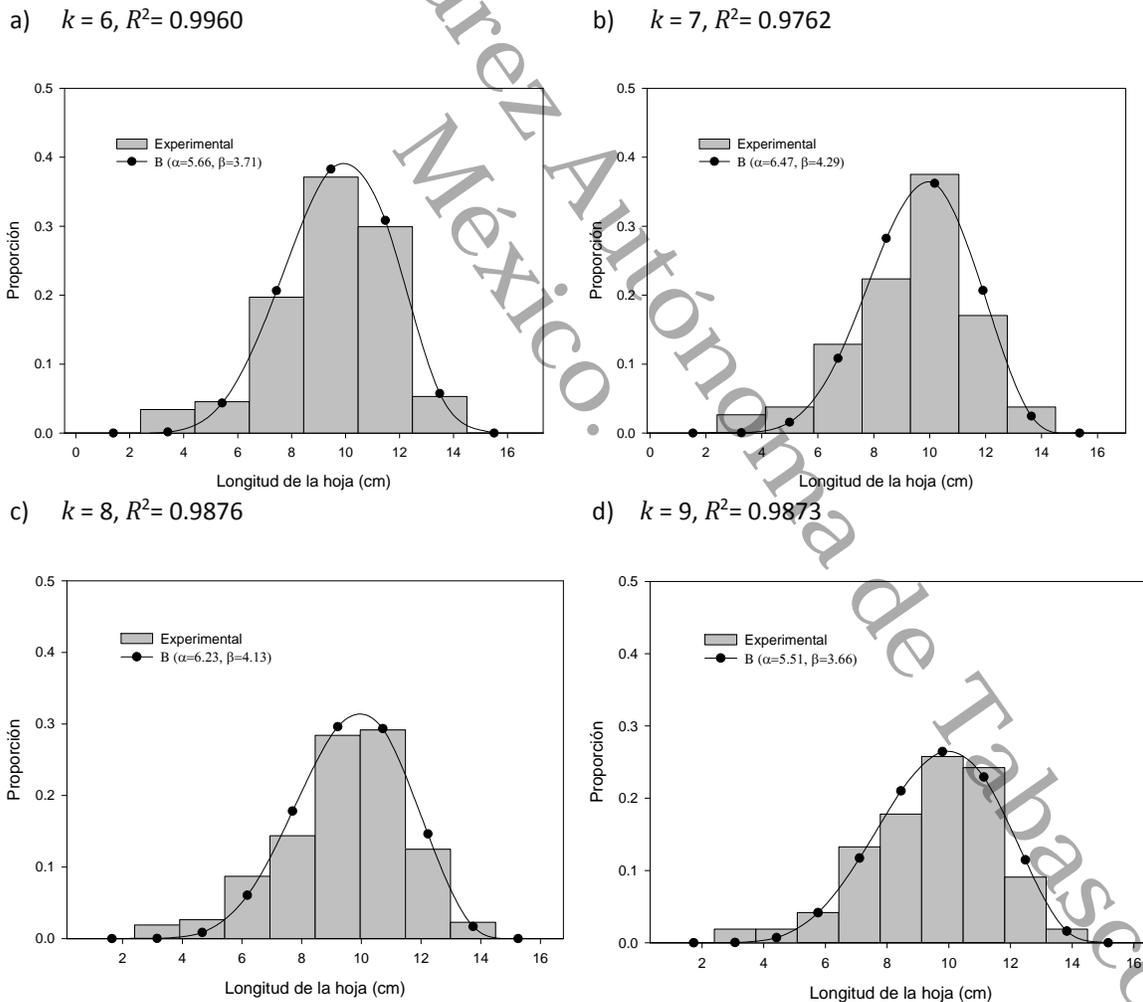


Figura 19. Estimación de la longitud de la hoja de *T. pallida* empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

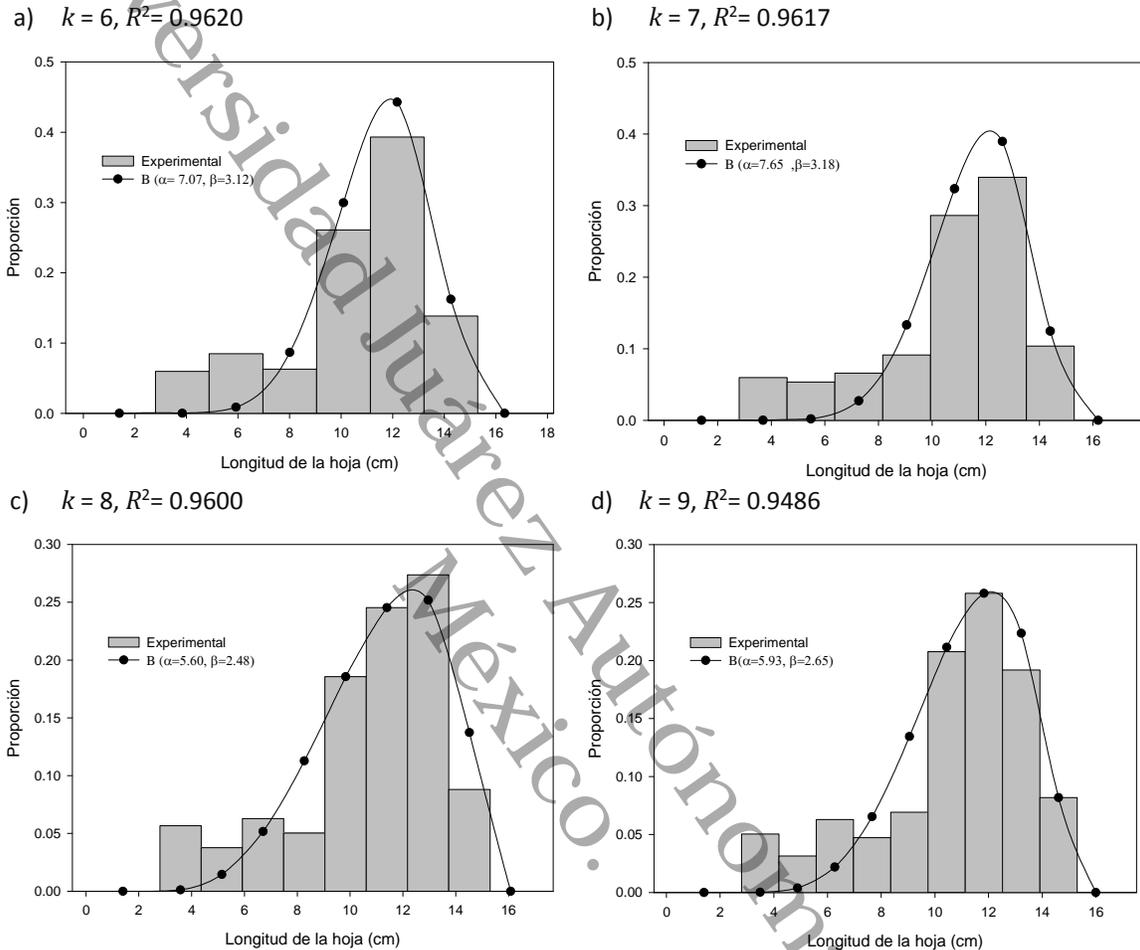


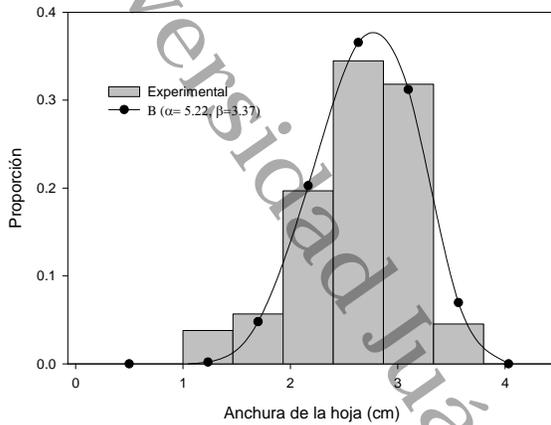
Figura 20. Estimación de la longitud de la hoja de *T. spathacea* empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.

Por su parte, en las Figuras 21 y 22 se presentan los resultados de la estimación de la anchura de la hoja de *T. pallida* y *T. spathacea* respectivamente, utilizando la distribución Beta clásica para cuatro tamaños de intervalos. En general, nótese que el modelo de distribución Beta clásica es más preciso para representar los datos de la anchura de la hoja de *T. pallida* que los de *T. spathacea*. En el caso de *T. pallida*, la mejor correlación se obtuvo con $k = 7$ y para *T. spathacea* con $k = 6$.

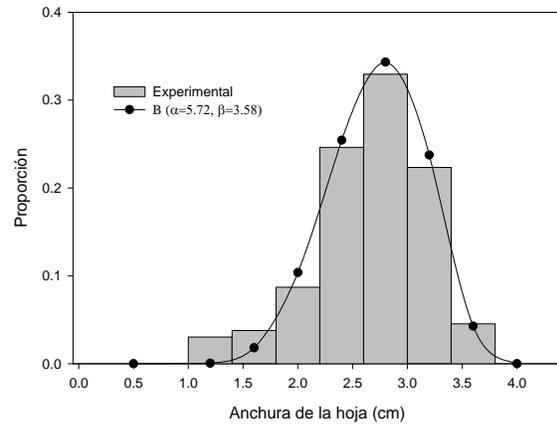


Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

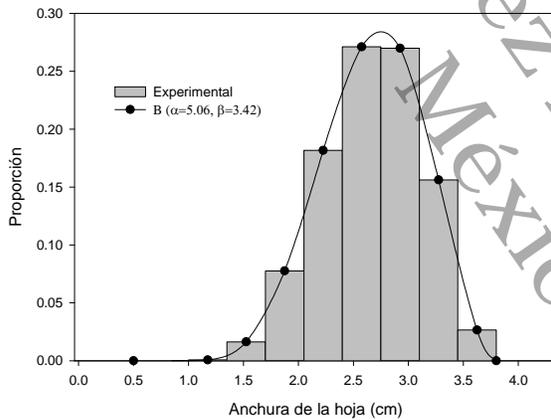
a) $k = 6, R^2 = 0.9916$



b) $k = 7, R^2 = 0.9935$



c) $k = 8, R^2 = 0.9923$



d) $k = 9, R^2 = 0.9891$

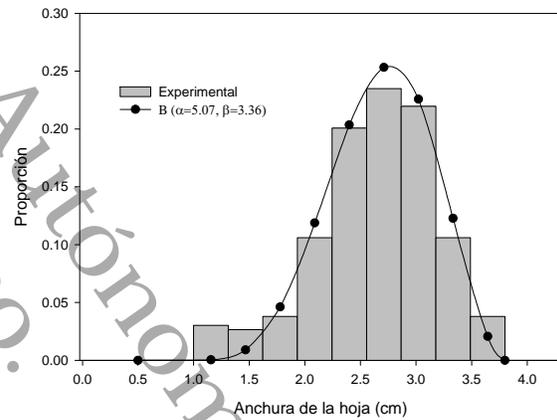


Figura 21. Estimación de la anchura de la hoja de *T. pallida* empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos (k).

6.1.3. Distribución Beta modificada como modelo de estimación

Aunque la distribución Beta clásica proporciona un buen ajuste al estimar la longitud y anchura se decidió probar otra distribución que permitiera estimaciones con bimodalidad ya que los datos experimentales presentan esta característica. Por ello, se implementó la distribución Beta modificada de Nadarajah (2014) y colaboradores empleando dos funciones $g(x)$, la función distribución normal gaussiana y la distribución beta clásica.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

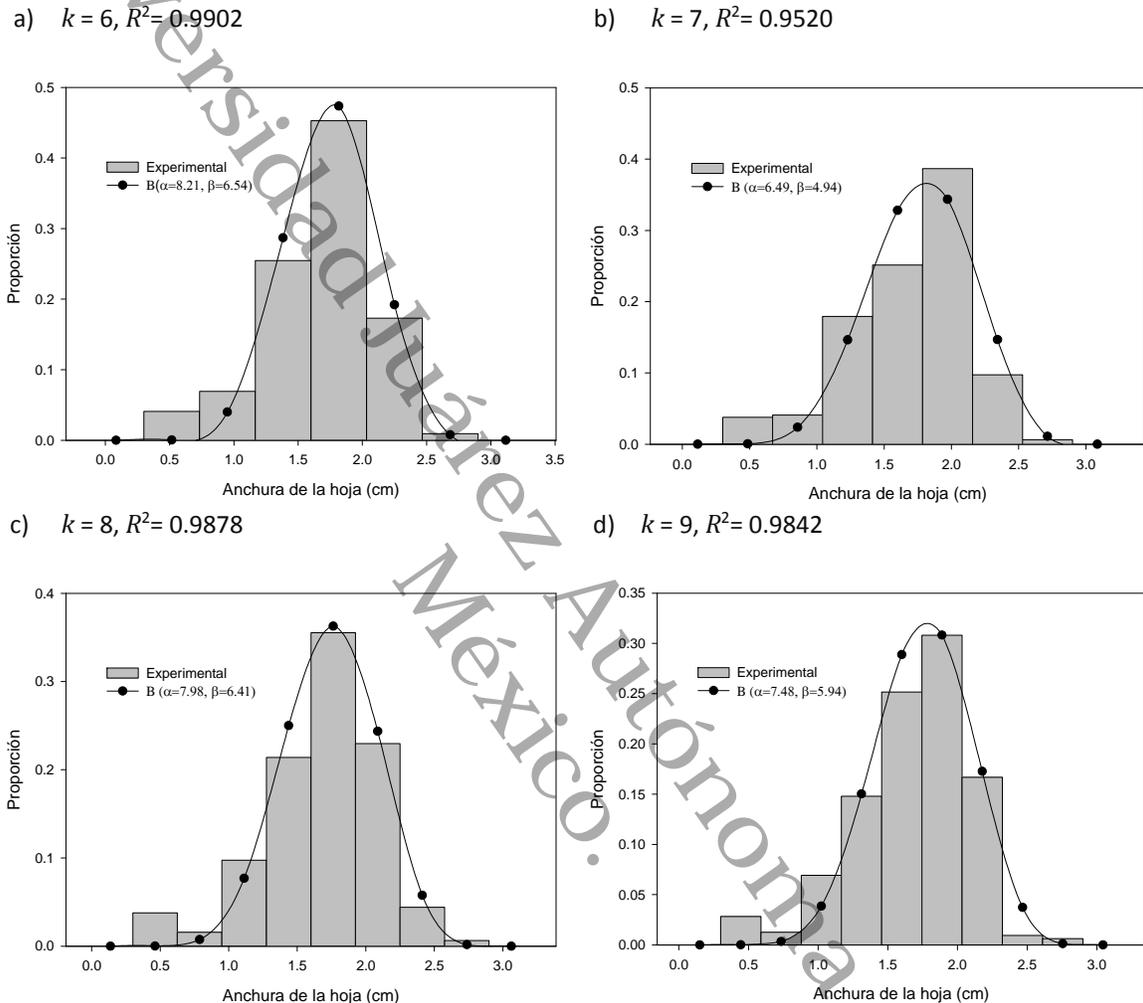


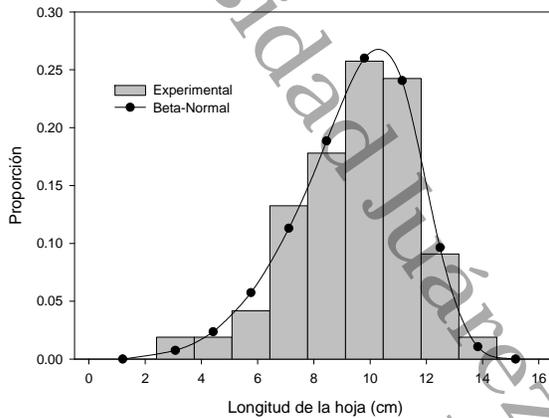
Figura 22. Estimación de la anchura de la hoja de *T. spathacea* empleando la distribución Beta clásica y en función del número de intervalos.

En la Figura 23 se muestran los resultados de la implementación del modelo de distribución beta modificada de Nadarajah para la estimación de la longitud y la anchura de la hoja de *T. pallida* con número de intervalos $k = 9$. Debe observarse que la distribución beta-normal produjo una mejor correlación que la distribución beta-beta para ambas variables alométricas. Es importante mencionar que se utilizó $k = 9$ ya que con este número de intervalos se presenta claramente una tendencia bimodal de los datos, especialmente para *T. spathacea*.

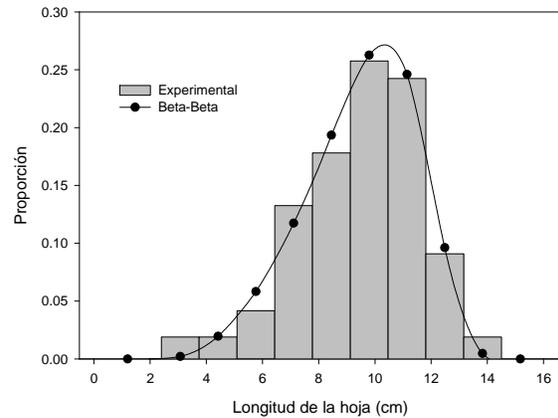


Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

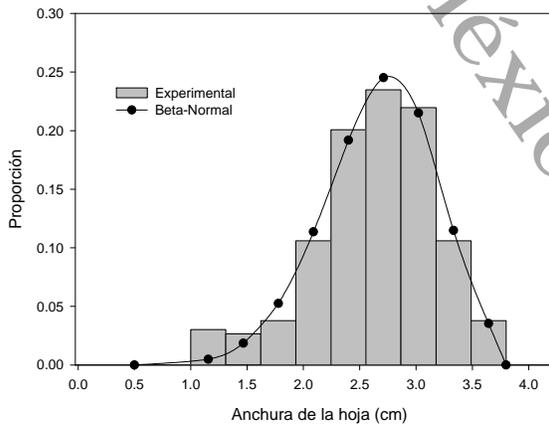
a) Distribución beta-normal, $R^2= 0.9947$



b) Distribución beta-beta, $R^2= 0.9936$



c) Distribución beta-normal, $R^2= 0.9928$



d) Distribución beta-beta, $R^2= 0.9893$

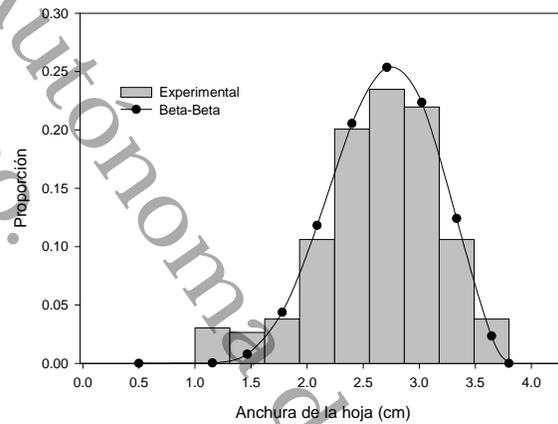


Figura 23. Estimación de la longitud y anchura de la hoja de *T. pallida* empleando las distribuciones Beta modificadas de Nadarajah con $k = 9$.

Por su parte, en la Figura 24 se indican los resultados de la implementación del modelo de distribución beta modificada de Nadarajah para la estimación de la longitud y la anchura de la hoja de *T. spathacea* con número de intervalos $k = 9$. En este caso, nuevamente la distribución beta-normal produjo una mejor correlación que la distribución beta-beta para ambas variables alométricas. Sin embargo, en la estimación de la longitud de la hoja con la distribución beta-beta, puede notarse una distribución bimodal que no presenta la distribución beta-normal.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

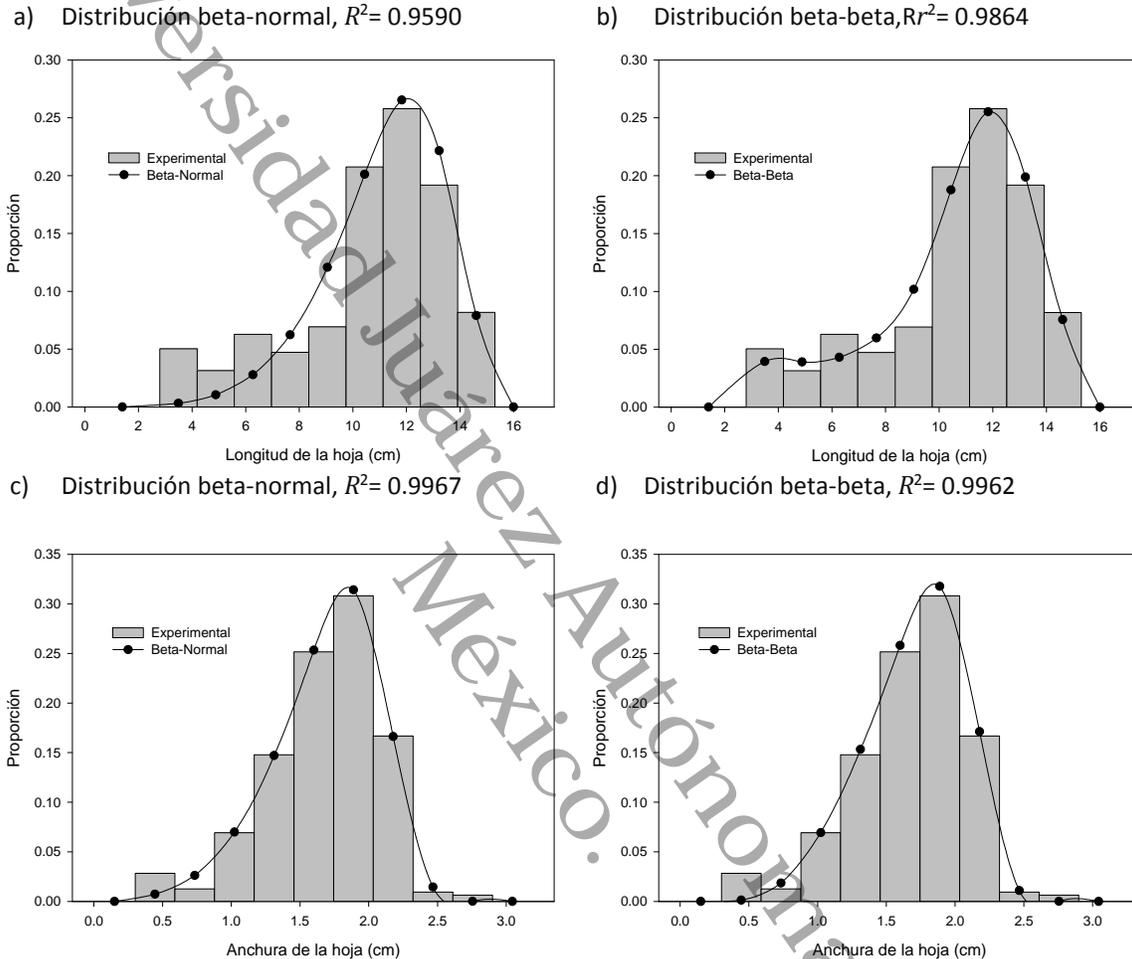


Figura 24. Estimación de la longitud y anchura de la hoja de *T. spathacea* empleando las distribuciones Beta modificadas de Nadarajah con $k = 9$.

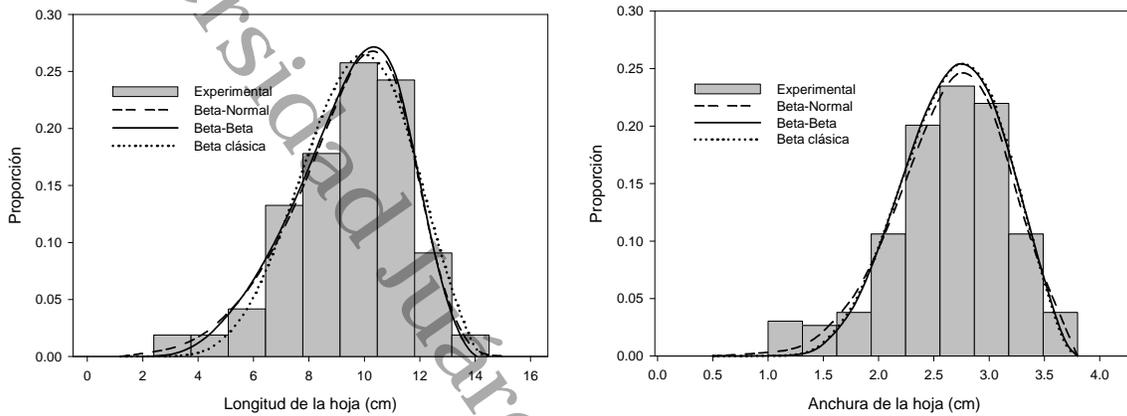
Como se puede observar en las Figuras 23 y 24, la distribución modificada de Nadarajah nos permite una mejor estimación que la distribución Beta clásica (ver Figuras 19d, 20d, 21d y 22d para $n = 9$).

Adicionalmente, en la Figura 25 se muestra la comparación de las tres distribuciones con respecto a los datos experimentales de longitud y anchura de *T. pallida* y de *T. spathacea*. Como se puede observar las dos distribuciones modificadas (Beta-Normal y Beta-Beta) dan mejores estimaciones que la distribución Beta clásica. Se puede observar que con la distribución Beta-Beta se obtiene una estimación bimodal en el caso de la longitud de la *T. spathacea*.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

a) *Tradescantia pallida*



b) *Tradescantia spathacea*

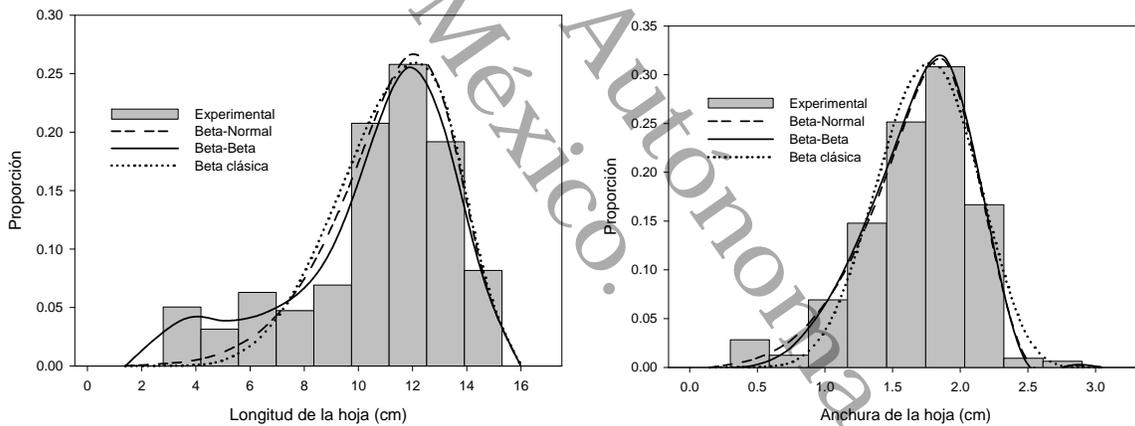


Figura 25. Estimación de la longitud y anchura de la hoja de *T. pallida* y de *T. spathacea* empleando las tres distribuciones Beta utilizadas en modelo matemático con $k = 9$.

6.2. CALIBRACIÓN DEL MODELO

El proceso de estimación numérica de parámetros de un modelo suele conocerse como calibración. La calibración es la búsqueda de los valores de los parámetros del modelo para obtener el mejor ajuste entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Por lo anterior, la calibración de un modelo es por sí misma un proceso de optimización de una función. Esta función, conocida en optimización como función objetivo, es el criterio que se selecciona para medir el ajuste



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

entre valores observados y predichos. Los tres criterios que se utilizaron en Este estudio fueron: el coeficiente de determinación (R^2), la sumatoria del error al cuadrado (SSE) y la sumatoria del error relativo (SER).

6.2.1. Calibración de la distribución Beta clásica

En la Figura 26 se puede observar que el coeficiente de determinación R^2 disminuye al aumentar el número de intervalos tanto en la longitud como en la anchura, al utilizar esta función objetivo para ajustar los parámetros de la distribución Beta clásica. Con respecto a la sumatoria del error al cuadrado (SSE) su tendencia es a disminuir conforme aumenta el número de intervalos.

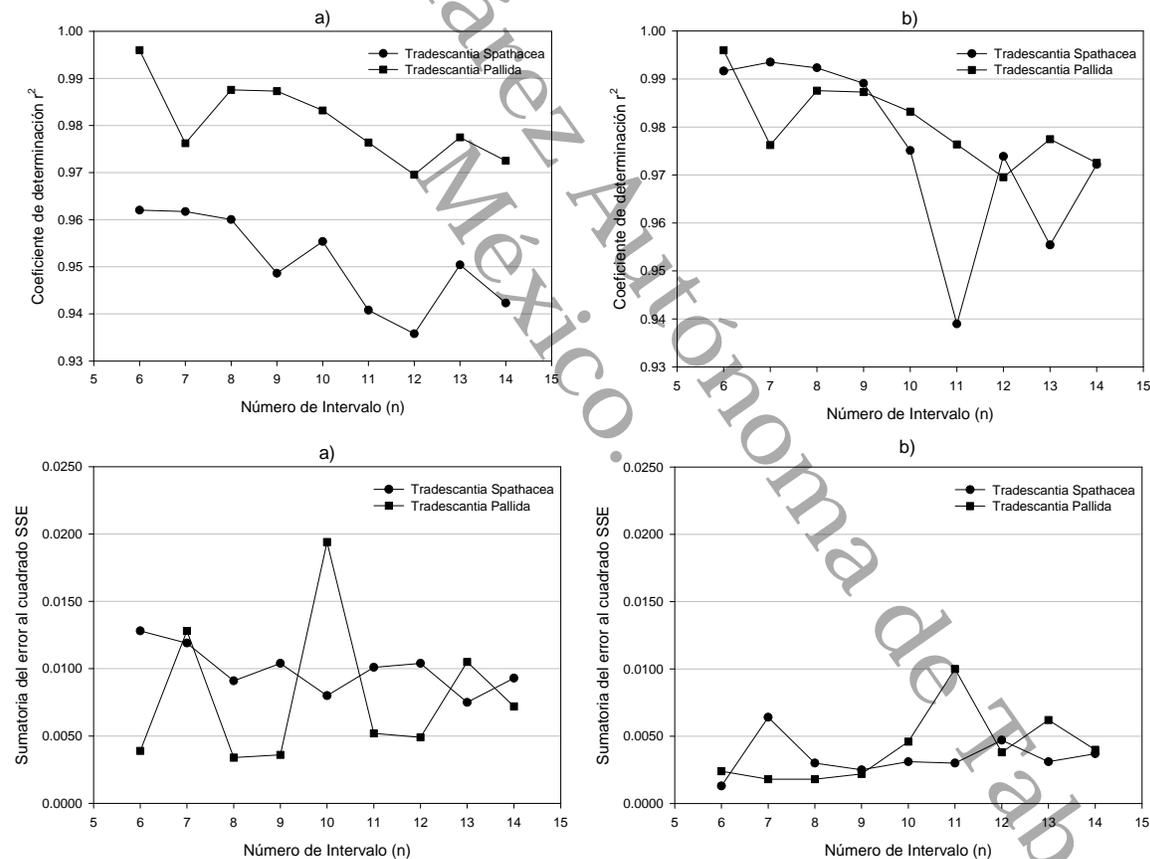


Figura 26. Variación del coeficiente de determinación R^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en *Tradescantia spathacea* y *Tradescantia pallida* al utilizar Beta clásica como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

6.2.2. Calibración de la Distribución Beta modificada (Beta-Normal)

En la Figura 27 se puede observar que el coeficiente de determinación R^2 disminuye al aumentar el número de intervalos tanto en la longitud como en la anchura, al utilizar esta función objetivo para ajustar los parámetros de la distribución Beta modificada Beta-Normal. Con respecto a la sumatoria del error al cuadrado SSE se puede observar que aumenta un poco al ir aumentando el número de intervalos, pero esta variación es menor que R^2 .

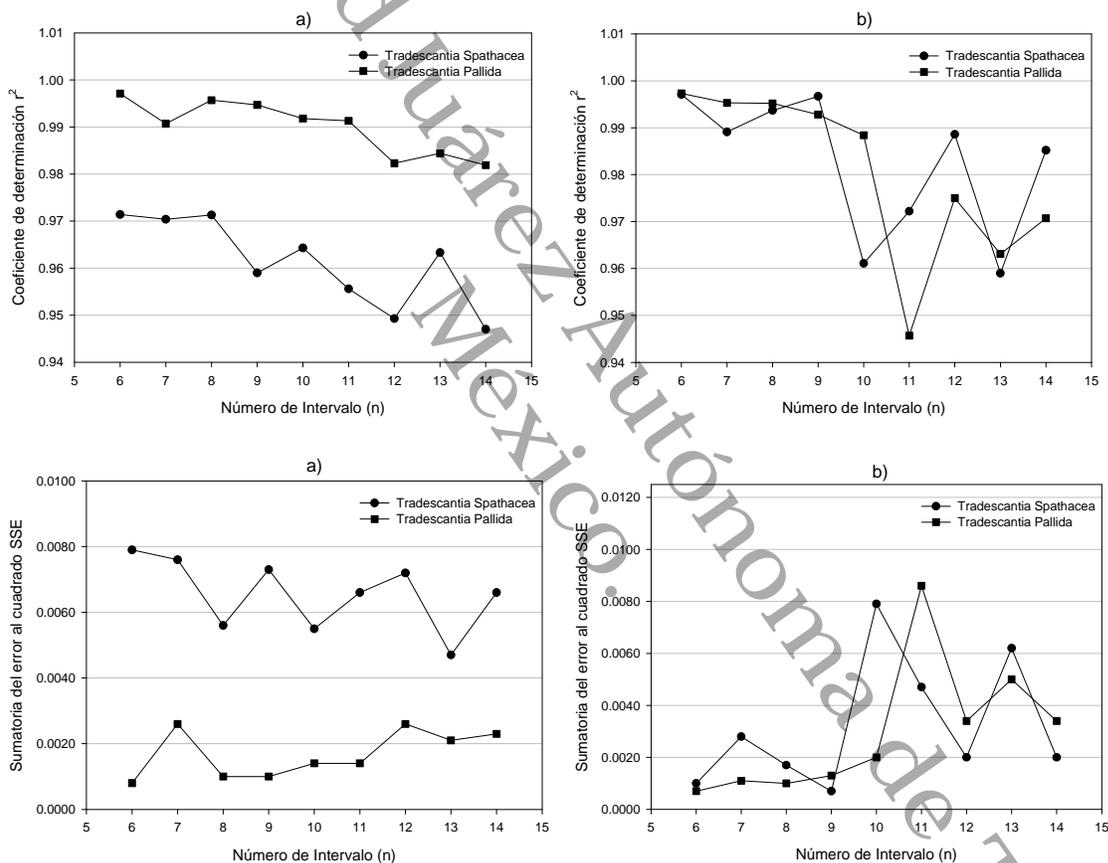


Figura 27. Variación del coeficiente de determinación R^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en *Tradescantia spathacea* y *Tradescantia pallida* al utilizar Beta modificada (Beta-Normal) como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

6.2.3. Calibración de la Distribución Beta modificada (Beta-Beta).

En la Figura 28 se puede observar que el coeficiente de determinación r^2 disminuye al aumentar el número de intervalos tanto en la longitud como en la anchura, al utilizar esta función objetivo para ajustar los parámetros de la distribución Beta modificada Beta-Beta. Con respecto a la sumatoria del error al cuadrado SSE se puede observar que aumenta un poco conforme aumenta el número de intervalos, pero esta variación es menor que R^2 .

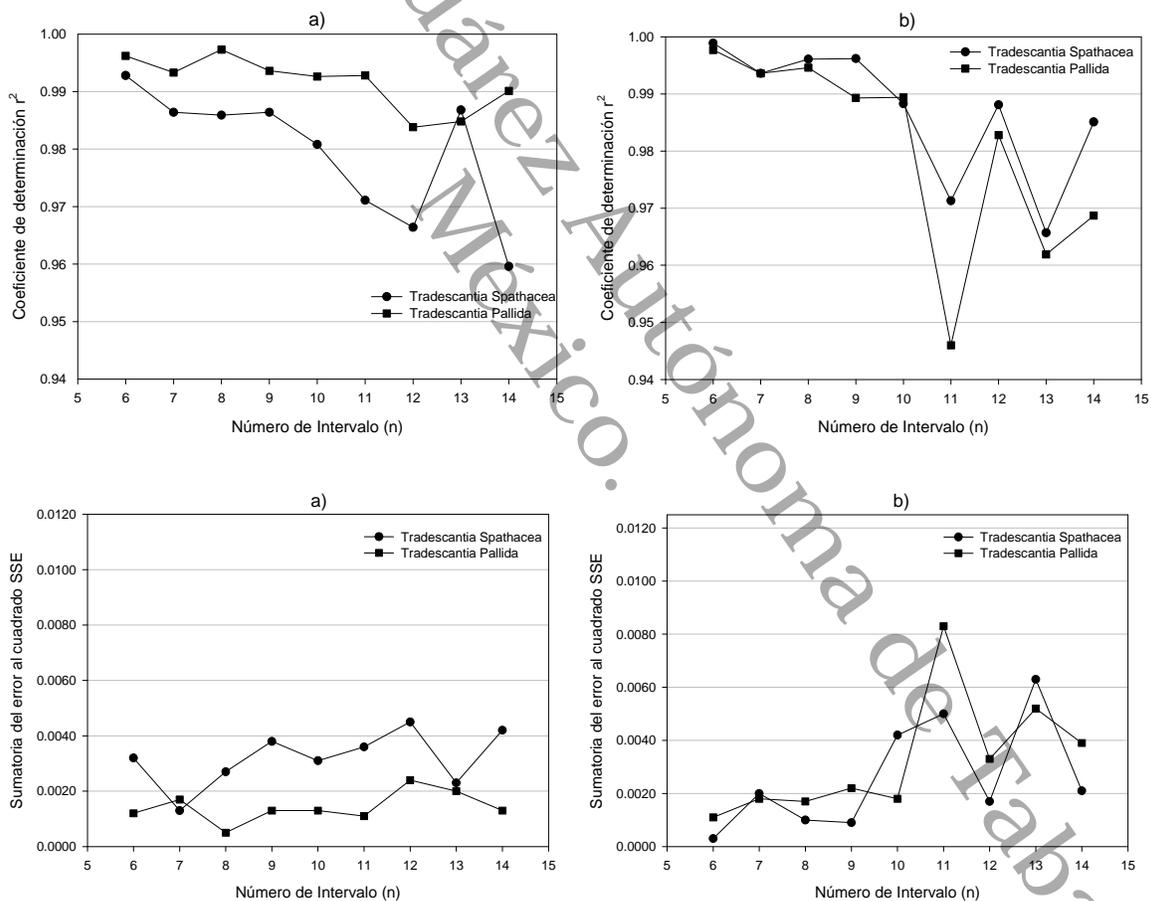


Figura 28. Variación del coeficiente de determinación R^2 y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos para la predicción de variables alométricas en *Tradescantia spathacea* y *Tradescantia pallida* al utilizar Beta modificada (Beta-Beta) como modelo matemático a) Longitud, b) Anchura máxima.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

6.2.4. Comparación de las tres distribuciones con respecto a la función objetivo.

Como se puede observar en la Figura 29, la distribución Beta modificada (Beta-Beta) para la longitud obtuvo los valores máximos del coeficiente de determinación R^2 y los valores mínimos de la sumatoria del error al cuadrado (SSE), seguida de la distribución modificada (Beta-Normal) y, finalmente, la menor capacidad de ajuste fue obtenida por la distribución Beta clásica. Con respecto a la anchura se puede observar que tanto la distribución Beta-Beta y la Beta-Normal dan mejores resultados que la distribución Beta clásica. Estos datos se obtuvieron del muestreo inicial (septiembre de 2012) de *T. spathacea* que constó de 33 individuos con un total de 318 hojas.

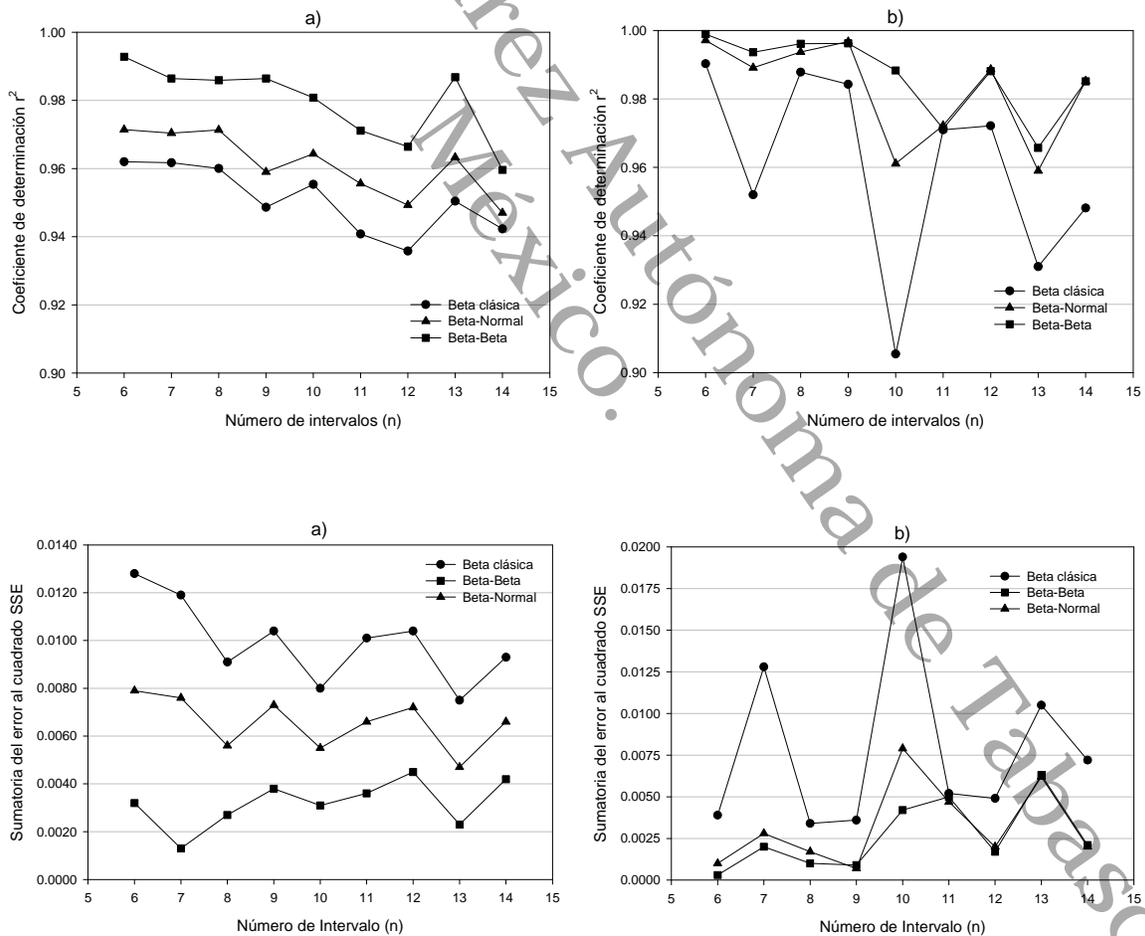


Figura 29. Variación del coeficiente de determinación (R^2) y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos en *Tradescantia spathacea* y con respecto a los tres tipos de distribución usados en el modelo matemático. a) Longitud, b) Anchura máxima.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Como se puede observar en la Figura 30, la distribución Beta modificada (Beta-Beta) para la longitud obtuvo los valores máximos del coeficiente de determinación R^2 y los valores mínimos de la sumatoria del error al cuadrado (SSE), seguida de la distribución modificada (Beta-Normal) y, finalmente, la menor capacidad de ajuste fue obtenida por la distribución Beta clásica. Con respecto a la anchura se puede observar que no existe una diferencia significativa entre los tres tipos de distribuciones. Estos datos se obtuvieron del muestreo inicial de *T. pallida* que constó de 33 individuos con un total de 264 hojas.

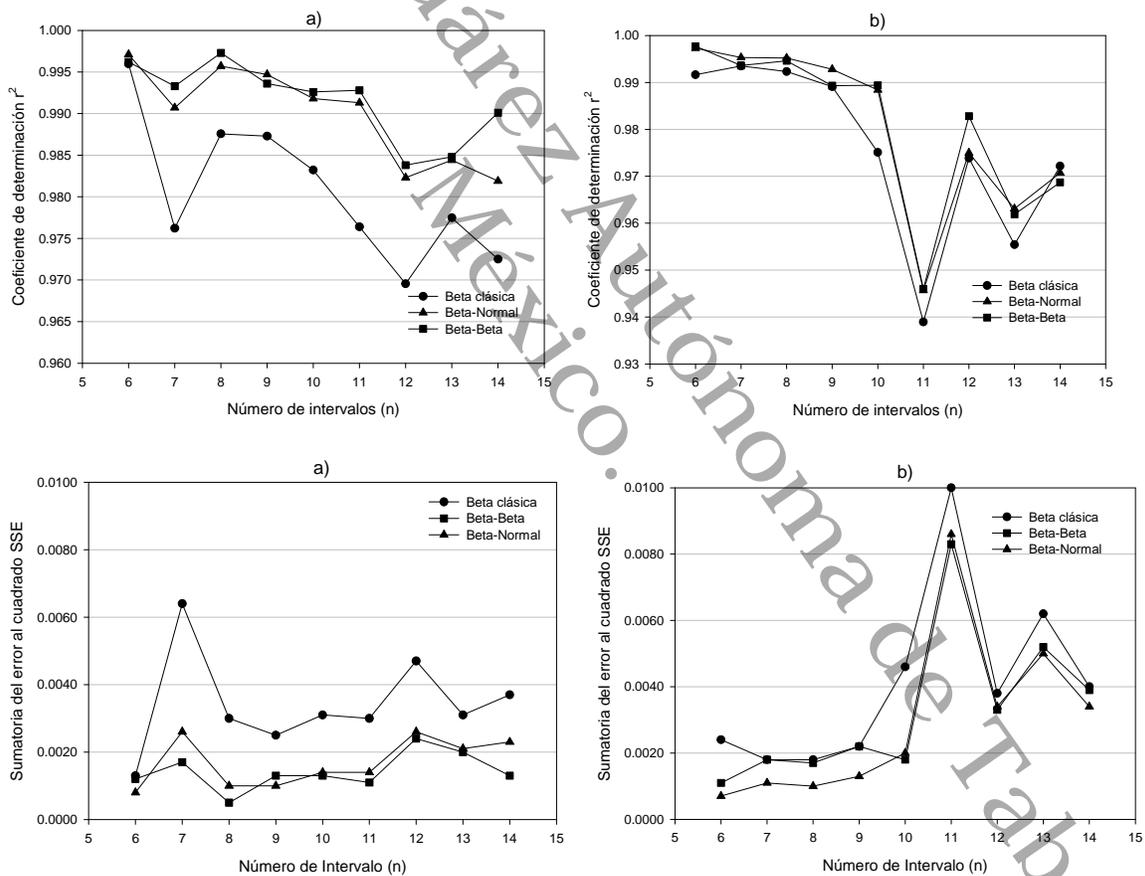


Figura 30. Variación del coeficiente de determinación (R^2) y la sumatoria del error al cuadrado (SSE) con diferentes números de intervalos en *Tradescantia pallida* y con respecto a los tres tipos de distribución usados en el modelo matemático. a) Longitud, b) Anchura máxima.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Finalmente se presenta la Tabla 5 que resume los resultados de las funciones objetivos utilizados en el modelo matemático, obtenidas con diferentes números de intervalos y con tres tipos de distribuciones Beta, con los datos iniciales de las dos especies vegetales. Aquí se incluyen los datos de la *SER*. Como se puede observar la distribución modificada Beta-Beta es la que provee mejores resultados utilizando la *SSE* como función objetivo, seguida de la Beta-Normal y al final la Beta clásica. Con respecto al número de intervalos se observa que nuevamente la distribución Beta-Beta da mejores resultados utilizando la sumatoria del error al cuadrado ya que disminuye al ir aumentando éstos, contrario a lo que sucede con el R^2 que disminuye. Finalmente, la función objetivo que no presentó una tendencia clara es la *SER*. Por lo tanto, la distribución Beta-Beta con función objetivo *SSE* es la que presenta los mejores resultados y las mejores estimaciones.

Tabla 6. Comparativo de las tres funciones objetivo con respecto al tipo de distribución y al número de intervalos, con datos iniciales de ambas especies vegetales.

<i>Tradescantia spathacea</i>								
Tipo de distribución	Longitud				Anchura			
	n=6	n=7	n=8	n=9	n=6	n=7	n=8	n=9
Coefficiente de determinación (R^2)								
Beta Clásica	0.9620	0.9617	0.9600	0.9486	0.9902	0.9520	0.9878	0.9842
Beta-Normal	0.9714	0.9971	0.9937	0.9590	0.9971	0.9891	0.9937	0.9967
Beta-Beta	0.9898	0.9985	0.9850	0.9837	0.9985	0.9919	0.9959	0.9961
Sumatoria de error al cuadrado (<i>SSE</i>)								
Beta Clásica	0.0128	0.0119	0.0091	0.0104	0.0039	0.0128	0.0034	0.0036
Beta-Normal	0.0079	0.0076	0.0056	0.0073	0.0010	0.0028	0.0017	0.0007
Beta-Beta	0.0035	0.0013	0.0027	0.0022	0.0003	0.0020	0.0011	0.0008
Sumatoria de error relativo (<i>SER</i>)								
Beta Clásica	0.2464	0.2368	0.2250	0.2399	0.1156	0.2284	0.1154	0.1463
Beta-Normal	0.1822	0.2416	0.2194	0.2146	0.0630	0.1659	0.0840	0.0581
Beta-Beta	0.1678	0.1740	0.1220	0.2080	0.0989	0.1980	0.0856	0.0601
<i>Tradescantia pallida</i>								
Coefficiente de determinación (R^2)								
Beta Clásica	0.9960	0.9762	0.9876	0.9873	0.9916	0.9935	0.9923	0.9891
Beta-Normal	0.9971	0.9910	0.9957	0.9947	0.9973	0.9953	0.9952	0.9928
Beta-Beta	0.9975	0.9929	0.9976	0.9934	0.9975	0.9978	0.9928	0.9893
Sumatoria de error al cuadrado (<i>SSE</i>)								
Beta Clásica	0.0013	0.0064	0.0030	0.0025	0.0024	0.0018	0.0018	0.0022
Beta-Normal	0.0008	0.0025	0.0010	0.0010	0.0007	0.0011	0.0010	0.0013
Beta-Beta	0.0006	0.0016	0.0006	0.0012	0.0006	0.0005	0.0012	0.0022
Sumatoria de error relativo (<i>SER</i>)								
Beta Clásica	0.0645	0.1700	0.1246	0.1184	0.0835	0.0870	0.1025	0.1189
Beta-Normal	0.0656	0.1167	0.0618	0.0756	0.0853	0.0830	0.0653	0.0814
Beta-Beta	0.0607	0.1537	0.1110	0.0936	0.0647	0.0785	0.1032	0.1055



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

6.3. PRONÓSTICO DEL ÁREA FOLIAR

En este apartado se muestran los resultados de la estimación del área foliar utilizando un modelo empírico clásico para su comparación con los resultados del modelo aquí propuesto, mismo que está basado en describir las dimensiones de la hoja a partir de funciones de distribución de probabilidad. Para cumplir con este propósito, se analizó el efecto del tiempo de establecimiento de las especies vegetales en el techo verde sobre el área foliar experimental.

6.3.1. Estimación del área foliar empleando correlaciones empíricas clásicas

En la mayoría de los estudios para determinar el área foliar mediante correlaciones empíricas se ha empleado principalmente la correlación matemática $LA=aLW+b$ como lo mencionan en sus estudios Megías *et al.* (1995), Blanco y Folegatti (2005), Jayeoba *et al.* (2007), Cristofori *et al.* (2008), Kumar *et al.* (2010), Olfati *et al.* (2010), Souza y Amaral (2015), Buttaro *et al.* (2015), Tartaglia *et al.* (2016), entre otros. Debido a esto se decidió realizar la estimación del área foliar utilizando la correlación matemática antes mencionada y poder comparar estos resultados con el modelo que utiliza las distribuciones de probabilidad Beta.

A continuación se presentan los resultados de realizar la estimación del área foliar (LA) empleando la correlación $LA=aLW+b$. Esto se realizó con datos del muestreo en octubre, noviembre y diciembre de 2012 con las especies establecidas en el techo verde experimental. Como se puede observar en la Figuras 31 y 32, este modelo proporcionó resultados satisfactorios en el mes de octubre ($R^2 = 0.9673$ para *T. pallida* y $R^2 = 0.9853$ para *T. spathacea*), pero disminuye su capacidad de predicción en los meses de noviembre ($R^2 = 0.8699$, *T. pallida* y $R^2 = 0.9165$, *T. spathacea*) y diciembre ($R^2 = 0.4273$ *T. pallida* y $R^2 = 0.8908$, *T. spathacea*). Esto se puede explicar ya que, en el techo verde, las plantas están sujetas a las condiciones climatológicas y meteorológicas cambiantes del trópico, a diferencia de las condiciones en las que crecieron dentro del invernadero, donde existen condiciones controladas y sus variaciones fueron menos drásticas. Al respecto, Canul Gómez (2014) concluyó que *T. pallida* y *T. spathacea* se ven afectadas por las condiciones meteorológicas en su crecimiento y desarrollo en el techo verde.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

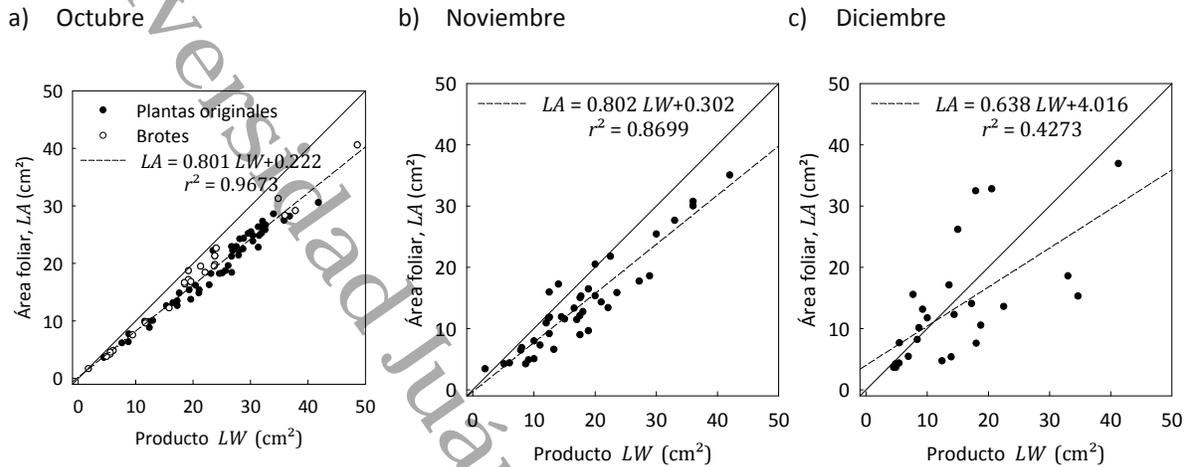


Figura 31. Capacidad de predicción del área foliar a partir del modelo empírico $LA = aLW + b$ para *Tradescantia pallida* en función del tiempo después del establecimiento de las especies vegetales en el techo verde (septiembre, primer mes de establecimiento).

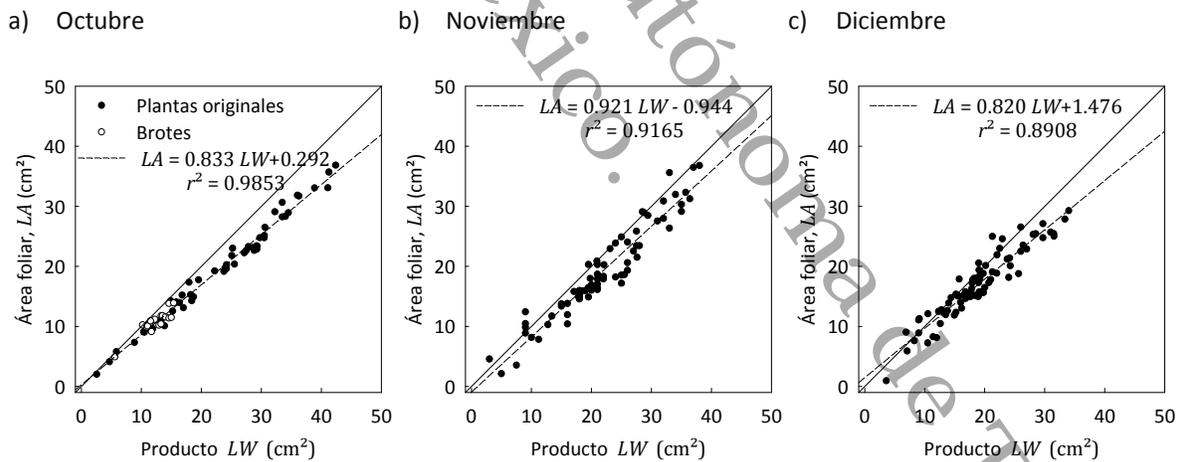


Figura 32. Capacidad de predicción del área foliar a partir del modelo empírico $LA = aLW + b$ para *Tradescantia spathacea* en función del tiempo después del establecimiento de las especies vegetales en el techo verde (septiembre, primer mes de establecimiento).

6.3.2. Estimación del área foliar empleando funciones de distribución de probabilidad

En este apartado se presentan los resultados de la determinación del área foliar de dos especies vegetales (*T. pallida* y *T. spathacea*) con el modelo matemático basado en las PDF descritas en apartados previos. En la Tabla 6 se presenta la capacidad de los tres modelos basados en PDF para



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

el ajuste de la información experimental disponible por cada mes muestreado durante el 2012. Además de los criterios de bondad de ajuste (*i.e.* R^2 y SSE) en dicha tabla se muestran también la evaluación de las restricciones y los parámetros estimados con *Solver* usando el método GRG no lineal.

Tabla 7. Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.

PDF Beta clásica	<i>T. pallida</i>						<i>T. spathacea</i>					
	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
	calc	exp	Calc	exp	calc	exp	calc	exp	Calc	exp	calc	exp
μ_L	8.161	7.772	6.626	6.754	6.916	5.704	9.557	9.678	10.48	10.91	9.465	9.963
μ_W	2.830	2.783	2.439	2.471	2.486	2.412	2.056	2.026	2.076	1.977	1.920	1.869
Optimización	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
N_{OBS}^*	76		41		25		72		73		81	
R_L^2	0.9449		0.8910		0.9652		0.9311		0.8695		0.9533	
R_W^2	0.9702		0.9803		0.9658		0.9136		0.8401		0.8210	
SSE_L	0.0187		0.0238		0.0080		0.0145		0.0317		0.0118	
SSE_W	0.0078		0.0048		0.0060		0.0227		0.1004		0.0507	
RE_L	5.0%		1.9%		5.0%		1.3%		4.0%		5.0%	
RE_W	1.7%		1.3%		1.0%		1.4%		5.0%		2.7%	
$TLA_{calc} - TLA_{exp}$	0.0		0.0		0.0		0.0		0.0		0.0	
F_{Obj}	0.0265		0.0286		0.0139		0.0372		0.1322		0.0625	
Parámetros	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
a_T	0.795		0.851		0.920		0.894		0.882		0.928	
α_L	6.752		2.098		0.693		1.766		1.832		3.358	
β_L	5.494		2.438		1.343		1.930		2.090		3.389	
α_W	4.297		3.613		1.193		3.485		51.028		3.191	
β_W	2.161		2.666		1.096		2.345		45.226		2.011	

* N_{OBS} es el número de hojas cuya longitud, anchura y área foliar fue medida experimentalmente por cada mes siguiente al establecimiento de las especies vegetales en el techo verde. Los valores resaltados con relleno rojo no cumplieron con la restricción de $R^2 \geq 0.95$. Los valores resaltados con relleno amarillo indican que alcanzaron el límite máximo de 5% de error relativo.

De acuerdo a los resultados de la Tabla 6, la distribución Beta clásica predice satisfactoriamente el área foliar de ambas especies vegetales obteniéndose predicciones precisas de la media de la longitud y de la anchura para los tres meses de muestreo (por ejemplo, μ_L calculada de 6.63 cm *versus* μ_L experimental de 6.75 cm, y μ_W calculada de 2.44 cm *versus* μ_L experimental de 2.47 cm para los datos de *T. pallida* de noviembre). Sin



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

embargo, durante la optimización numérica se incumplieron algunas restricciones, en particular, el valor mínimo del coeficiente de determinación y el valor máximo del error relativo de la media. En comparación a los resultados obtenidos con una correlación empírica clásica (Figura 31) los coeficientes de determinación obtenidos con el modelo basado en la distribución Beta clásica aplicados a *T. pallida* son, en lo general, superiores a los de la correlación empírica y esto especialmente claro en la estimación del área foliar para el mes de diciembre, datos que el modelo de correlación lineal no permitió ajustar satisfactoriamente (Figura 31c). Por su parte, los datos de *T. spathacea* fueron correlacionados con mayor precisión por el modelo lineal (Figura 32) particularmente para los datos de los meses de octubre y noviembre.

De la misma manera, la Tabla 7 compendia los resultados de la capacidad de ajuste del modelo basado en la distribución Beta-Normal. En comparación a los resultados obtenidos con el modelo basado en la distribución Beta clásica, este modelo permite obtener, en lo general, sumatorias de residuales menores con coeficientes de determinación mayores, a excepción de los datos del mes de diciembre para *T. pallida*, los cuales no presentaron un ajuste satisfactorio.

Con respecto a la capacidad de predicción del modelo basado en la distribución Beta-Beta, los resultados de ajuste (Tabla 8) indican que este modelo es claramente superior a los dos modelos basados en PDF aquí estudiados ya que permite obtener residuales (*SSE*) menores con coeficientes de determinación mayores para ambas especies vegetales y para los tres meses muestreados. Además, con este modelo se incumplen menos restricciones que con los dos modelos analizados previamente. Por último, es notorio también que el modelo basado en la distribución Beta-Beta es superior en la estimación del área foliar al modelo de correlación lineal.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tabla 8. Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta-normal ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.

PDF Beta-Normal	<i>T. pallida</i>						<i>T. spathacea</i>					
	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
Variable alométrica	calc	exp	Calc	exp	calc	exp	calc	exp	Calc	exp	calc	exp
μ_L	7.872	7.772	6.416	6.754	5.900	5.704	9.646	9.678	10.59	10.91	9.465	9.963
μ_W	2.827	2.783	2.508	2.471	2.473	2.412	2.024	2.026	2.077	1.977	1.900	1.869
Optimización	octubre		noviembre		Diciembre		octubre		noviembre		Diciembre	
N_{OBS}	76		41		25		72		73		81	
R_L^2	0.9774		0.9350		0.8864		0.9042		0.9585		0.9716	
R_W^2	0.9770		0.9714		0.8819		0.9040		0.8580		0.8240	
SSE_L	0.0068		0.0144		0.1026		0.0223		0.0106		0.0071	
SSE_W	0.0058		0.0071		0.0209		0.0256		0.0580		0.0503	
RE_L	1.3%		5.0%		3.4%		0.3%		2.9%		5.0%	
RE_W	2.4%		1.1%		5.0%		1.7%		5.0%		1.6%	
$TLA_{calc} - TLA_{exp}$	0.0		0.0		0.0		0.0		0.0		0.0	
F_{obj}	0.0126		0.0215		0.1235		0.0479		0.0686		0.0574	
Parámetros	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
a_T	0.825		0.855		0.920		0.825		0.872		0.938	
α_L	0.888		0.707		0.131		0.590		1.400		1.023	
β_L	17.381		20.510		3.440		0.685		1.313		1.059	
c_L	0.027		0.025		0.051		0.863		1.291		1.276	
α_W	0.880		0.987		1.231		0.602		1.259		0.500	
β_W	1.579		1.203		1.107		2.946		19.772		73.458	
c_W	0.318		0.601		0.875		0.101		0.027		0.002	

* N_{OBS} es el número de hojas cuya longitud, anchura y área foliar fue medida experimentalmente por cada mes siguiente al establecimiento de las especies vegetales en el techo verde. Los valores resaltados con relleno rojo no cumplieron con la restricción de $R^2 \geq 0.95$. Los valores resaltados con relleno amarillo indican que alcanzaron el límite máximo de 5% de error relativo.

Finalmente, una de las ventajas adicionales del modelo basado en la PDF Beta-Beta es que no requiere del conocimiento *a priori* de la media y desviación estándar de los datos, a diferencia del modelo basado en la PDF Beta-Normal. Sin embargo, el modelo PDF Beta-Beta tiene el inconveniente de poseer mayor número de parámetros de ajuste, lo que reduce los grados de libertad del modelo.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Tabla 9. Resultados de la estimación de parámetros para la función distribución de probabilidad Beta-beta ($k = 6$) para las dos especies vegetales y en función del mes de muestreo.

PDF Beta-Beta	<i>T. pallida</i>						<i>T. spathacea</i>					
	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
	calc	exp	Calc	exp	calc	exp	calc	exp	Calc	exp	calc	exp
μ_L	7.762	7.772	6.416	6.754	5.632	5.704	9.374	9.678	10.50	10.91	9.465	9.963
μ_W	2.816	2.783	2.369	2.471	2.457	2.412	2.048	2.026	2.065	1.977	1.905	1.869
Optimización	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
N_{OBS}	76		41		25		72		73		81	
R_L^2	0.9848		0.9497		0.9878		0.9431		0.9470		0.9663	
R_W^2	0.9838		0.9678		0.9558		0.9439		0.9575		0.898	
SSE_L	0.0046		0.0130		0.0033		0.0120		0.0229		0.0093	
SSE_W	0.0040		0.0078		0.0077		0.0163		0.0191		0.0291	
RE_L	0.1%		5.0%		1.3%		3.1%		3.8%		5.0%	
RE_W	1.2%		4.1%		1.9%		1.1%		4.5%		1.9%	
$TLA_{calc} - TLA_{exp}$	0.0		0.0		0.0		0.0		0.0		0.0	
F_{Obj}	0.0086		0.0208		0.0110		0.0283		0.0420		0.0384	
Parámetros	octubre		noviembre		diciembre		octubre		noviembre		diciembre	
a_T	0.840		0.904		0.970		0.914		0.885		0.935	
α_L	0.514		0.245		0.123		0.092		3.388		2.44	
β_L	7.296		0.359		0.863		1.798		0.348		1.216	
c_L	0.016		0.035		0.041		0.072		0.366		0.780	
$\alpha_{g,L}$	5.330		8.653		65.556		17.904		2.646		1.714	
$\beta_{g,L}$	5.753		16.612		9.071		6.734		11.605		3.076	
α_W	0.661		0.631		0.389		3.059		0.264		0.086	
β_W	0.255		0.278		0.158		0.083		0.817		0.401	
c_W	0.026		0.029		0.044		0.146		0.0003		0.014	
$\alpha_{g,W}$	1.778		1.434		0.743		2.553		10.616		45.604	
$\beta_{g,W}$	6.073		7.420		6.596		15.985		20.622		20.031	

* N_{OBS} es el número de hojas cuya longitud, anchura y área foliar fue medida experimentalmente por cada mes siguiendo al establecimiento de las especies vegetales en el techo verde. Los valores resaltados con relleno rojo no cumplieron con la restricción de $R^2 \geq 0.95$. Los valores resaltados con relleno amarillo indican que alcanzaron el límite máximo de 5% de error relativo.



7.

CONCLUSIONES

La distribución Beta es capaz de representar los parámetros de longitud y anchura máxima, que permiten estimar el área foliar de especies vegetales susceptibles de utilizar en la cobertura de techos verdes.

- Tipo de distribución de los datos experimentales.

Se realizó la distribución de los datos de longitud y anchura máxima de las dos especies vegetales, construyendo una tabla de distribución de frecuencias y un histograma, encontrándose que los datos no presentan una distribución normal, con un sesgo negativo y algunos datos presentan bimodalidad. Con esta información se procedió a realizar la prueba de Normalidad de Kolmogorov-Smirnov encontrándose que tanto la longitud y la anchura máxima de ambas especies vegetales no presentan una distribución normal. Con esta información se concluye que la distribución Beta es mejor para representar los datos ya que la distribución Beta es muy flexible y se puede ajustar al tipo de distribución que presentan los datos experimentales.

- Búsqueda de una distribución Beta más flexible.

En los cálculos preliminares de estimación de longitud y anchura máxima se encontró que los datos experimentales presentaban bimodalidad y aunque la distribución Beta clásica permita ajustes razonablemente satisfactorios, no es capaz de generar un comportamiento bimodal. Por ello, se decidió entonces implementar el modelo basado en la distribución Beta modificada de Nadarajah, la cual resultó flexible y capaz de generar bimodalidad.

- Comparación de las tres distribuciones Beta utilizadas.

Con las mediciones de la longitud y anchura máxima de las dos especies vegetales se construyó el modelo matemático basado en la distribución de probabilidad Beta clásica, y la distribución modificada de Nadarajah; Beta-Normal y Beta-Beta, lo que significa que el usuario tiene tres tipos de modelo para realizar sus estimaciones, los tres basados en la distribución Beta.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

El modelo propuesto permite estimar los parámetros de la distribución Beta elegida por el usuario y con ellos obtener la estimación del área foliar. Con base en los resultados de las funciones objetivo r^2 (coeficiente de determinación), SEE (Sumatoria del error al cuadrado) y SER (Sumatoria del error relativo) se concluyó que la distribución Beta-Beta es la que proporciona una mejor estimación de las distribuciones de las variables alométricas, seguida de la distribución Beta-normal y finalmente de la distribución Beta clásica. Es importante resaltar que la distribución Beta-Beta es la única de las tres que produce funciones bimodales, lo cual es muy importante ya que algunos datos presentan bimodalidad, por lo que esta característica la convierte en idónea con respecto a las otras PDF analizadas. Es importante mencionar que, aunque la distribución Beta-Beta proporciona resultados superiores, las otras dos distribuciones generan estimaciones satisfactorias también por lo que no deben ser descartadas en estudios posteriores.

- Comparación de las tres funciones objetivo utilizadas con respecto a un tipo de distribución.

En la interfaz desarrollada, el usuario puede elegir una de las tres funciones objetivo: el coeficiente de determinación r^2 , la sumatoria del error al cuadrado SSE y la sumatoria del error relativo SER . Con los resultados obtenidos se puede concluir que la mejor función objetivo es la sumatoria del error al cuadrado (SEE), seguida del coeficiente de determinación R^2 y finalmente de la sumatoria del error relativo (SER).

- Estimación del área foliar con la distribución Beta.

Con los resultados obtenidos se puede concluir que la distribución Beta-Beta es la que predice con mejores resultados ya que es la que permite obtener residuales (SSE) menores con coeficientes de determinación mayores para ambas especies vegetales y para los tres meses muestreados. El único inconveniente es que tiene un mayor número de parámetros de ajuste, lo que aumenta los grados de libertad.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Finalmente, de acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo para estimar el área foliar utilizando la interfaz gráfica creada en VBA en Excel® se concluye que se obtiene una excelente estimación del área foliar, logrando con esto disminuir el trabajo de campo y la destrucción de los individuos al medir el área foliar. Aunque es importante mencionar que el modelo puede mejorarse en varios aspectos, los cuales se mencionan en las recomendaciones.



8.

RECOMENDACIONES

Con el propósito de mejorar las predicciones del área foliar utilizando el modelo matemático construido en base a la distribución de probabilidad Beta y mejorar la interfaz gráfica se hacen las siguientes recomendaciones:

Con respecto al modelo matemático:

- Incrementar la base de datos de determinaciones experimentales del área foliar para validar el modelo matemático.
- Fortalecer el modelo para que los parámetros de la distribución Beta sean ajustados en función del tiempo y de las variables meteorológicas típicas (precipitación pluvial, radiación solar, temperatura ambiente y humedad relativa para predecir el comportamiento dinámico del área foliar.
- Agregar otras distribuciones de probabilidad (Weibull, Gamma, entre otras) para robustecer el programa y que todos los tipos de hojas sean estimadas de manera precisa, ya que el modelo actual solo fue probado con dos especies vegetales de interés en techos verdes.
- Proponer el uso de una función distribución Beta bivariante para calcular directamente el área foliar directamente de la longitud y anchura en lugar de estimarla como la multiplicación de dos funciones distribución univariante.

Con respecto a la interfaz:

- Mejorar el código de programación de la interfaz para evitar errores cuando se ingresan datos erróneos o inadecuados a las celdas de la interfaz, logrando que el programa genere avisos al usuario cuando se ingresen caracteres incorrectos y con esto evitar errores en la ejecución del programa.
- Mejorar la interfaz gráfica para hacerla un poco más amena y que se vuelva una aplicación ejecutable, y que se pueda instalar en cualquier dispositivo que tenga Excel®.
- Realizar un video tutorial y un manual con ejemplos para que el usuario pueda aclarar sus dudas y cometer menos errores.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

9.

REFERENCIAS

- Antunes, W.C.; Pompelli, M.F.; Carretero, D.M.; DaMatta, F.M. (2008). Allometric models for non-destructive leaf area estimation in coffee (*Coffea arabica* and *Coffea canephora*). *Annals of Applied Biology* 153(1): 33-40.
- Arias, M.O. (1982). Efecto de los factores meteorológicos sobre la fisiología de las plantas. En: *Agroambiente*. Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza, CATIE. Inter-American Institute for Cooperation on Agriculture. Costa Rica. 213-229pp.
- Aristizábal, M.L. (2008). Evaluación del crecimiento y desarrollo foliar del plátano hondureño enano (*Musa AAB*) en una región cafetera colombiana. *Agronomía* 16(2): 23-30.
- Astegiano, E.D.; Favaro, J.C.; Bouzo, C.A. (2001). Estimación del área foliar en distintos cultivares de tomate (*Lycopersicon esculentum* Mill.) utilizando medidas foliares lineales. *Investigación Agraria: Producción y Protección Vegetal* 16 (2): 249-256.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, 171-178.
- Beerling, D.J. y J.C. Fray. (1990). A comparison of the accuracy, variability and speed of five different methods for estimating leaf area. *Annals of Botany* (London) 65:483-488.
- Billo, E.J. (2007). *Excel for Scientists and Engineers: Numerical Methods*. Wiley and Sons, 1st ed., United States of America.
- Blanco, F.F.; Folegatti, M.V. (2003). A new method for estimating the leaf area index of cucumber and tomato plants. *Horticultura Brasileira* 21(4): 666-669.
- Blanco, F.F.; Folegatti, M.V. (2005). Estimation of leaf area for greenhouse cucumber by linear measurements under salinity and grafting. *Scientia Agrícola* 62(4): 305-309.
- Bradley R D. (2011). Green roofs as a means of pollution abatement. *Environmental Pollution* 159. 2100-2110.
- Brito, E.; Romero, E.R.; Casen, S.D.; Alonso, L.G.; Digonzelli, P.A. (2007). Métodos no destructivos de estimación del área foliar por tallo en la variedad LCP 85-384 de caña de azúcar. *Revista Industrial y Agrícola de Tucumán* 84 (2): 29- 32.
- Burgos, A.M.; Avanza, M. M.; Balbi, C. N.; Prause, J.; Argüello, J.A. (2010). Modelos para la estimación no destructiva del área foliar de dos cultivares de mandioca (*Manihot esculenta* Crantz) en la Argentina. *Agriscientia* 27(1): 55-61.
- Buttaro, D., Roupheal, Y., Rivera, C., Colla, G., & Gonnella, M. (2015). Simple and accurate allometric model for leaf area estimation in *Vitis vinifera* L. genotypes. *Photosynthetica*, 53(3), 342-348.
- Canul Gómez, W.A. (2014). *Efecto de las Condiciones Ambientales Sobre el Establecimiento y Crecimiento de Especies Nativas en un Techo Verde*. Tesis de Maestría en Ciencias Ambientales, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Villahermosa, México.
- Cittadini, E. D.; Peri, P.L. (2006). Estimation of leaf area in sweet cherry using a non-destructive method. *Revista de Investigaciones Agropecuarias*, 35(1), 143-150.
- Cruz-Salaya, N. A.; Córdova-Méndez, E. A. (2013). *Efecto del sustrato sobre el crecimiento de especies tropicales para su uso potencial en techos verdes*. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

- Cristofori, V.; Fallovo, C.; Mendoza-de Gyves, E.; Rivera, C. M.; Bignami, C.; Roupael, Y. (2008). Non-Destructive, Analogue Model for Leaf Area Estimation in Persimmon (*Diospyros kaki* L.f.) Based on Leaf Length and Width Measurement. *European Journal of Horticultural Science* 73(5): 216-221.
- Cristofori, V.; Roupael, Y.; Mendoza-de Gyves, E.; Bignami, C. (2007). A simple model for estimating leaf area of hazelnut from linear measurements. *Scientia Horticulturae* 113: 221-225.
- Demirsoy, H.; Demirsoy, L.; Ozturk, A. (2005). Improved model for the non-destructive estimation of strawberry leaf area. *Fruits* 60:69-73.
- Devore, J. L. (2008). Probabilidad y estadística para ingenierías y ciencias. Cengage Learning Editores.
- Eriksson, H.; Eklundh, L.; Hall, K.; Lindroth, A. (2005). Estimating LAI in deciduous forest stands. *Agricultural and Forest Meteorology*, 129(1), 27-37.
- Eugene, N.; Lee, C.; Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Comm. Statist. Theory Methods* 31, 497-512.
- Fallovo, C.; Cristofori, V.; Mendoza de-Gyves, E.; Rivera, C. M.; Rea, R.; Fanasca, S. (2008). Leaf Area Estimation Model for Small Fruits from Linear Measurements. *HortScience* 43(7): 2263-2267.
- Fernandez, C.; Steel, M.F.J. (1998). On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 93, 359-371.
- Florida Exotic Pest Plant Council (FLEPPC). (2009). List of Invasive Plant Species. *Tradescantia pallida* 'Purple Heart'. *Wildland Weeds* 12(4): 24-25.
- Galindo, J.R.; Clavijo, J. (2007). Modelos alométricos para estimar el área de los folíolos de arveja (*Pisum sativum* L.). *Revista Corpoica – Ciencia y Tecnología Agropecuaria* 8(1): 37-43.
- Ghoreishi, M.; Hossini, Y.; Maftoon, M. (2012). Simple models for predicting leaf area of mango (*Mangifera indica* L.). *Journal of Biology and Earth Sciences* 2(2): B45-B53.
- Gilman, E.F. (1999). *Rhoeo spathacea*. Environmental Horticulture Department. Florida. Institute of Food and Agricultural Sciences. Fact Sheet FPS-510. 3pp.
- Gutezeit, B. (2000). Non-destructive measurement of fresh plant mass by the gamma-scanning technique applied to broccoli. *Journal of Agricultural Engineering Research* 75:251-255.
- Igathinathane, C.; Prakash, V.S.S.; Padma, U.; Ravi B.G.; Womac, A.R. (2005). Interactive computer software development for leaf area measurement. *Computers and Electronics in Agriculture* 51: 1-16.
- Ilkkae, M.N.; Paknejad, F.; Zavareh, M.; Ardakani, M.R.; Kashani, A. (2011). Prediction Model of Leaf Area in Soybean (*Glycine max* L.). *American Journal of Agricultural and Biological Sciences*, 6 (1): 110-113.
- Jaramillo, R.A. (2005). La redistribución de la radiación solar y la lluvia dentro de plantaciones de café (*Coffea arabica* L.). *Revista Académica Colombiana de Ciencia* 29 (112): 371-382.
- Jayeoba, O.J.; Omolaiye, J.A.; Ogunbanjo, O.R.; Abiola, I.O. (2007). Mathematical model for predicting leaf area of *Ocimum gratissimum* (Hafendahl Fw) using linear measurements. *ASSET Series A* (2007) 7 (1): 56-64.
- Jonckheere, I.; Fleck, S.; Nackaerts, K.; Muys, B.; Coppin, P.; Weiss, M.; Baret, F. (2004). Review of methods for in situ leaf area index determination: Part I. Theories, sensors and hemispherical photography. *Agricultural and Forest Meteorology*, 121(1), 19-35.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

- Joyanes Aguilar, L.; Zahonero Martínez, I. (2010). Programación en C, C++, JAVA y UML. McGraw Hill/Interamericana Editores, México.
- Juneau, K.J.; Tarasoff C.S. (2012). Leaf Area and Water Content Changes after Permanent and Temporary Storage. *PLoS ONE* 7(8): e42604. doi:10.1371/journal.pone.0042604.
- Keramatlou, I., Sharifani, M., Sabouri, H., Alizadeh, M., & Kamkar, B. (2015). A simple linear model for leaf area estimation in Persian walnut (*Juglans regia* L.). *Scientia Horticulturae*, 18436-39.
- Krishnamoorthy, K. (2006). *Handbook of statistical distributions with applications*. CRC Press, United States of America.
- Kucharik, C.J.; Norman J.M.; Gower S.T. (1998). Measurements of branch and adjusting indirect leaf area index measurements. *Agricultural and Forest Meteorology* 91: 69-88.
- Kumar, R. (2009). Calibration and validation of regression model for non-destructive leaf area estimation of saffron (*Crocus sativus* L.). *Scientia Horticulturae* 122: 142-145.
- Kumar, R; Sharma, S. (2010) Allometric model for nondestructive leaf area estimation in clary sage (*Salvia sclarea* L.). *Photosynthetica* 48 (2): 313-316.
- Levy, P.E.; Jarvis, P.G. (1999). Direct and indirect measurements of LAI in millet and fallow vegetation in HAPEX-Sahel. *Agricultural and Forest Meteorology* 97: 199-212.
- Lopes, C.; Pinto, P.A. (2005). Easy and accurate estimation of grapevine leaf area with simple mathematical models. *Vitis* 44 (2): 55-61.
- Macfarlane, C.; Arndt, S.K. ; Livesley, S.J. ; Edgar, A.C. ; White, D.A. ; Adams, M.A.; Eamus, D. (2007). Estimation of leaf area index in eucalypt forest with vertical foliage, using cover and fullframe fisheye photography. *Forest Ecology and Management*, 242(2): 756-763.
- Marshall, A.W.; Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84: 641-652.
- Megías, M.D.; Gallego, J.A.; Martínez, Teruel, A.; Gómez Castro, A. G. (1996). Estudio para la determinación del área foliar en especies arbustivas. *Anales de Veterinaria de Murcia* 11-12: 3-10.
- Metselaar, K. (2012). Water retention and evapotranspiration of green roofs and possible natural vegetation types. *Resources, Conservation and Recycling* 64: 49- 55.
- Meza, N.; Bautista, D. (1999). Estimación del área foliar en plantas jóvenes de Níspero (*Manilkara achras* [Miller] Fosberg) sometidas a dos ambientes de luz. *Bioagro* 11(1): 24-28.
- Minke, G. (2004). *Techos verdes: Planificación, ejecución, consejos prácticos*. Editorial Fin de siglo. Montevideo, Uruguay.
- Nadarajah, S., Teimouri, M., & Shih, S. H. (2014). Modified beta distributions. *Sankhya B*, 76(1), 19-48.
- Nautival, B.M.; Singh, P.K.; Sukla, R.N.; Prakash, S.; Kumar, A. (1990). Correcting leaf area measurement by conventional methods: a new approach for apple (*Malus domestica* Borkh). *J. Hort. Sc.* 65(1) :15-18.
- Olfati, J.A.; Peyvast, G.; Shabani, H.; Nosratie-Rad, Z. (2010). An Estimation of Individual Leaf Area in Cabbage and Broccoli Using Non-destructive Methods, *Journal of Agricultural Science and Technology*, 12: 627-632.
- Peksen, E. (2007). Non-destructive leaf area estimation model for faba bean (*Vicia faba* L.), *Scientia Horticulturae*, 113(4): 322-328.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Rivera, A. (2013). *Tasa de corrosión atmosférica representada por distribuciones de probabilidad y su aplicación en un modelo para estimar la pérdida de masa en estructuras de acero al carbón*. Tesis de Maestría, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Villahermosa, Tabasco.

Roberts, S.D.; Dean, T.J.; Evans, D.L.; McCombs, J.W.; Harrington, R.L.; Glass, P.A. (2005). Estimating individual tree leaf area in loblolly pine plantations using LiDAR-derived measurements of height and crown dimensions. *Forest Ecology and Management*, 213(1), 54-70.

Ross, J. (1981). *The radiation regime and architecture of plant stands*. Dr W. Junk Publishers, The Hague, The Netherlands.

Rouphael, Y.; Mouneimne, A.H.; Rivera, C.M.; Cardarelli, M.; Marucci, A.; Colla, G. (2010). Allometric models for non-destructive leaf area estimation in grafted and ungrafted watermelon (*Citrullus lanatus* Thunb.), *Journal of Food, Agriculture and Environment*, 8 (1): 161-165.

Sezer, I.; Oner, F.; Mut, Z. (2008). Non-destructive leaf area measurement in maize (*Zea mays* L.). *Journal of Environmental Biology* 30(5): 785-790.

Souza, M. C. D., & Amaral, C. L. D. (2015). Non-destructive linear model for leaf area estimation in *Vernonia ferruginea* Less. *Brazilian Journal of Biology*, 75(1), 152-156.

Tartaglia, F. D. L., Righi, E. Z., Rocha, L. D., Loose, L. H., Maldaner, I. C., & Heldwein, A. B. (2016). Non-destructive models for leaf area determination in canola. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 20(6), 551-556.

Uzokwe, E.; Borokini, T.; Lawal, I.; Audu, I.; Adams, A. (2012). Estimating the Leaf Area of *Irvingia gabonensis* (Aubry-Lecomte Ex O' Rorke) Baill from Linear Measurement. *Journal of Plant Studies* 1(2): 68-74.

Williams III, L.; Martinson, T.E. (2003). Nondestructive leaf area estimation of 'Niagara' and 'DeChaunac' grapevines. *Scientia Horticulturae* 98. 493-498.



A.1. DISEÑO DE LA INTERFAZ GRÁFICA

Dentro de los objetivos marcados dentro de éste estudio fue desarrollar una interfaz gráfica amigable con el usuario que le permita utilizar todas las opciones posibles de ajuste de las tres distribuciones de probabilidad y las demás funciones complementarias como son el método numérico, parámetros de *Solver* entre otros. A continuación, se describe la interfaz gráfica que se desarrolló para la estimación del área foliar.

La interfaz gráfica fue diseñada empleando *Visual Basic for Applications en Excel*. La interfaz consta de un formulario de Visual Basic (**UserForm1**). Para acceder al Menú Principal se abre el archivo de Excel "Modelo Área Foliar" y se oprime **click** al botón menú principal. Este menú se muestra en la Figura A.1, en donde se puede apreciar que está constituido por dos páginas: Base de datos y Opciones de calibración.

A.2. BASE DE DATOS

Como se observa en la Figura A.1 la pantalla principal tiene dos opciones que son **base de datos** y **opciones de calibración**. El usuario tiene que cargar los datos tomados en campo de la especie vegetal a la cual se le va estimar el área foliar mediante el siguiente procedimiento.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

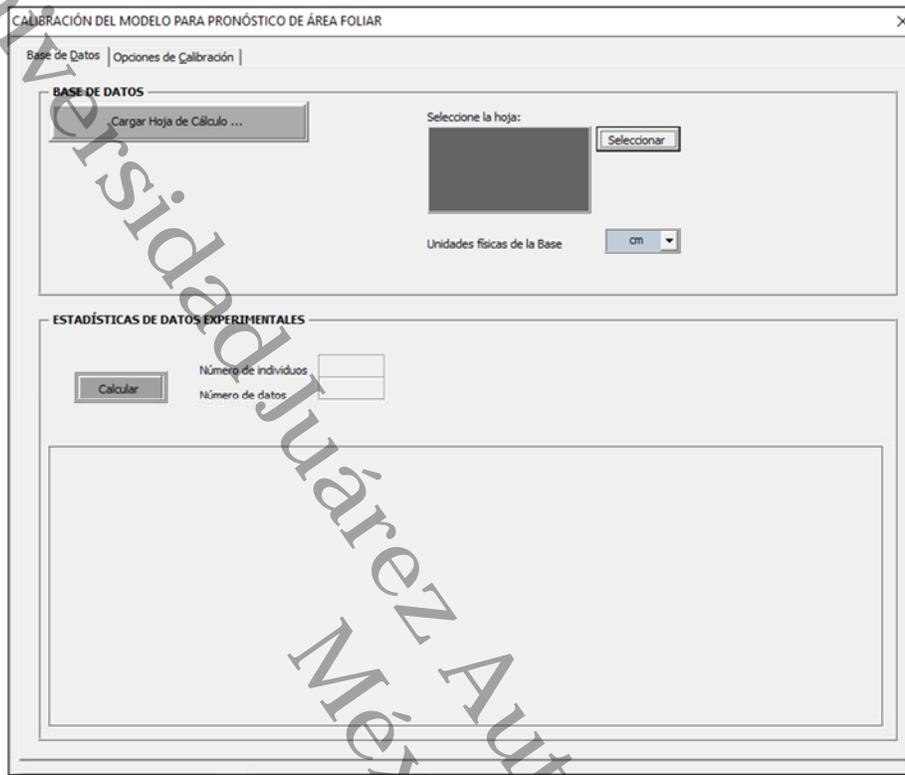


Figura A.1. Menú principal de la interfaz gráfica para la estimación del Área Foliar.

A.2.1. Cargar Hoja de cálculo

Para cargar la hoja de cálculo se oprime el botón **Cargar Hoja de cálculo**. Al oprimir éste botón se abre una venta para examinar archivos, después el usuario debe buscar el archivo donde se encuentra la base de datos. El formato de archivo que acepta la aplicación como base de datos, es de tipo Excel (extensión .xls). Los datos deben venir ordenados en tres columnas. La primera columna es el número de individuos, la segunda columna los datos de longitud y la tercera columna los datos de anchura. Finalmente seleccionar del archivo la hoja donde está la base de datos y las unidades en que esta base de datos. Las unidades que maneja la interfaz solo pueden ser milímetros (mm), centímetros (cm) y metros (m), ver Figura A.2.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

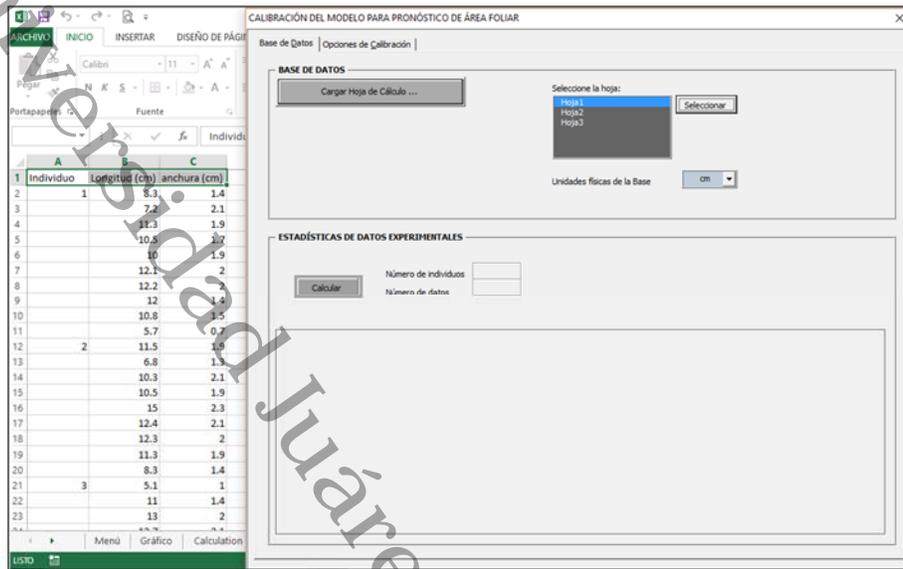


Figura A.2. Base de datos. Se selecciona el archivo, hoja donde están los datos y las unidades de medida.

A.2.2. Estadísticas de datos experimentales

Una vez cargada la base de datos se oprime el botón **Calcular** y automáticamente se obtienen las estadísticas principales que se necesitan para el cálculo del área foliar. Estos estadísticos son: Valor máximo, Valor mínimo, Media, Desviación estándar, Curtosis y Sesgo. Además, se contabilizan el número de individuos y el número total de datos. Los resultados se presentan por separado para Longitud y para Anchura, ver Figura A.3.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

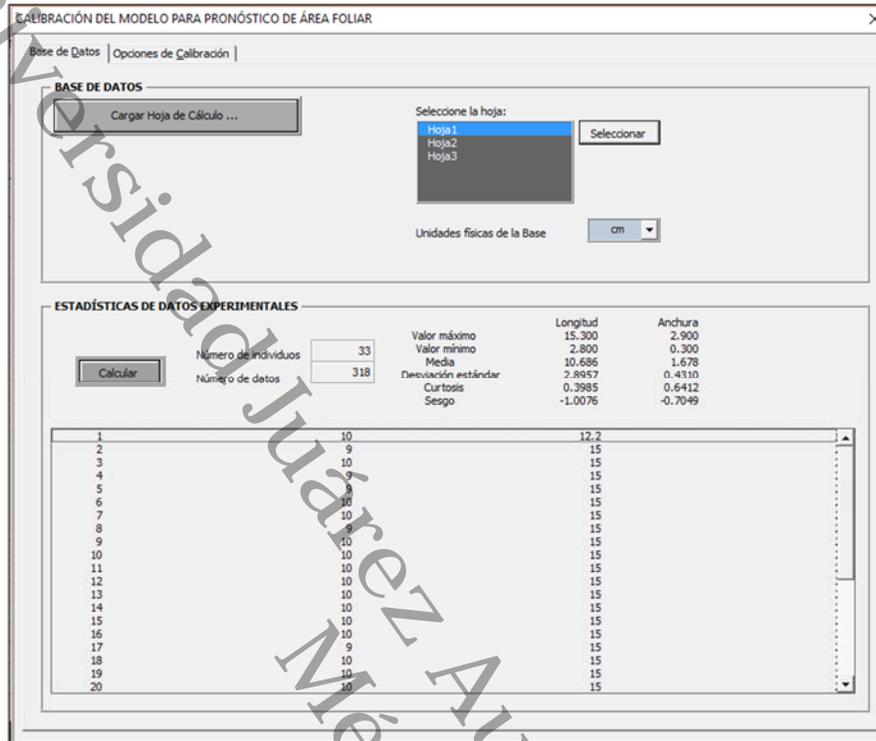


Figura A.3. Estadísticas de la Longitud y Anchura de los datos cargados en la base de datos.

A.3. OPCIONES DE CALIBRACIÓN

Una vez cargados los datos y calculadas sus estadísticas, el usuario puede ingresar a la segunda pestaña llamada "Opciones de Calibración". Una vez ahí se despliegan seis opciones diferentes para poder realizar el cálculo del área foliar (Tipo de modelo, Intervalos, Método Numérico, Inicializar Modelo, Función Objetivo, Solver). Estas opciones están en orden descendente de prioridad y deben irse seleccionando uno por uno para poder realizar una estimación correcta. Ver Figura A.4.

A.3.1. Tipo de modelo

En esta primera opción el usuario debe elegir el modelo matemático a utilizar para pronosticar el área foliar. Los modelos matemáticos son tres: 1. Distribución Beta Clásica 2. Distribución Beta-Normal Modificada. 3. Distribución Beta-Beta Modificada. La distribución 1 es la distribución Beta Clásica que maneja los parámetros alfa y beta (a y b). Las distribuciones 2 y 3 son las distribuciones



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

modificadas por Nadarajah (2014), las cuales manejan tres parámetros (a , b y c). De las tres distribuciones se presentan las fórmulas y además el usuario puede ir cambiando los parámetros y ver gráficamente cuál es su efecto.

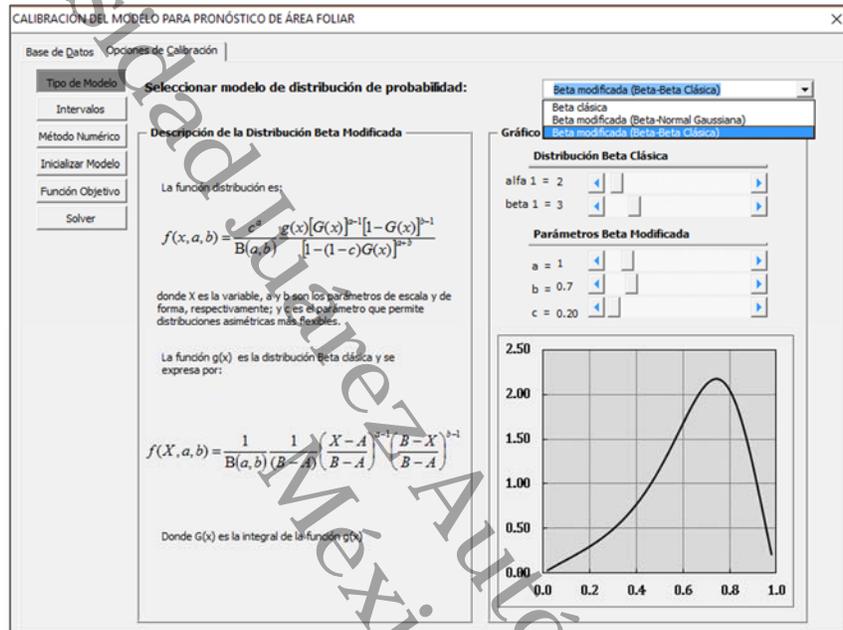


Figura A.4. Tipos de modelos matemáticos (Distribución Beta).

A.3.2. Selección de intervalos

En esta segunda opción el usuario debe elegir el número de intervalos que desea para la tabla de distribución de frecuencias. Las opciones son: que el usuario elija el número de intervalos o que elija una de las fórmulas que se utilizan comúnmente para determinar el número de intervalos. Las fórmulas que se dan como opción son: Regla de la raíz cuadrada, Regla de Sturges, Regla de Doane, Regla de Rice, Regla de Scott, Regla de Freedman and Diaconis. De todas estas reglas se presenta la formula y algunas recomendaciones para su uso. Ver Figura A.5.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

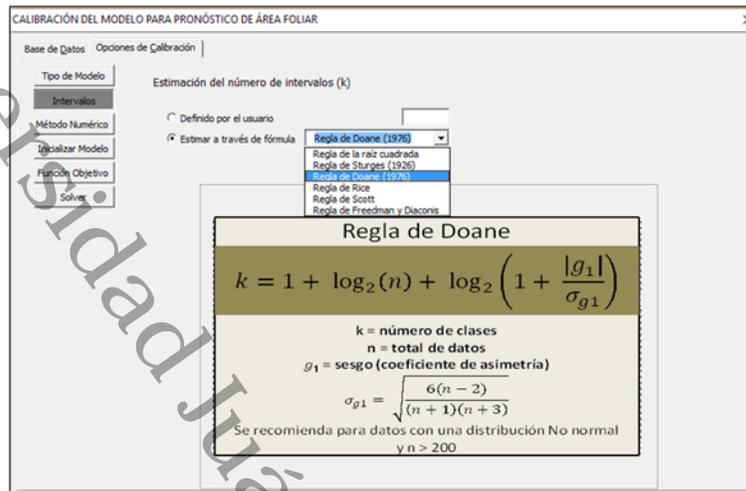


Figura A.5. Interfaz gráfica para la selección del número de Intervalos para la distribución de frecuencias.

A.3.3. Método numérico

En esta segunda opción el usuario puede elegir el método numérico a utilizar para la integración del modelo de distribución Beta que eligió en el primer paso. Las tres opciones son: Simpson 1/3, Simpson 3/8 y finalmente Cuadratura de Gauss (Cuadratura gaussiana). De las tres opciones se presenta su fórmula y una breve descripción, con la finalidad de ayudar al usuario a tomar su decisión. Ver Figura A.6.

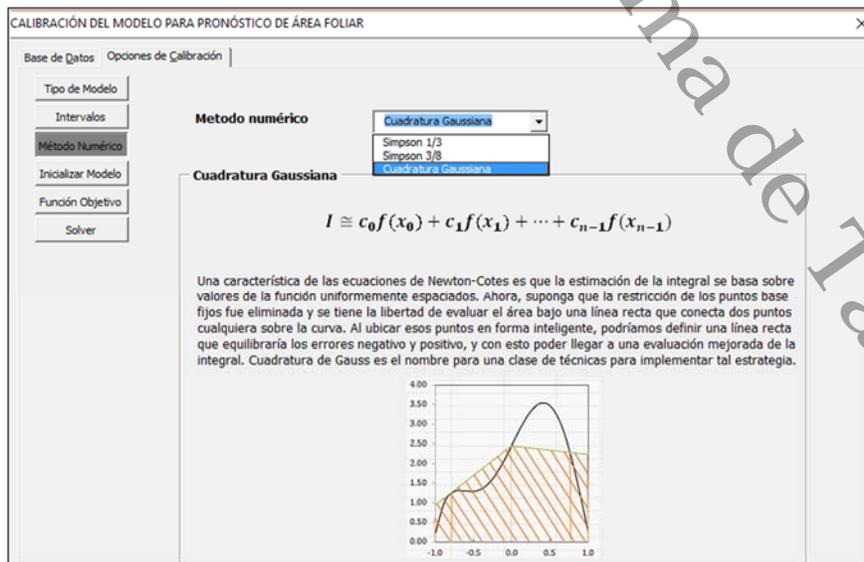


Figura A.6. Interfaz gráfica para la selección del método numérico.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

A.3.4. Inicialización del modelo

En esta tercera opción el usuario tiene que colocar los valores iniciales de la distribución Beta que eligió en el paso uno (Tipo de modelo). Los valores tienen que ser mayores a 0. Puede elegir también si desea estimar solo longitud o solo anchura o ambos. Ver Figura A.7.

	Longitud	Anchura
Límites	A = 2.800 B = 15.300	0.300 2.900
Alfa 1	a = 1	1
Beta 1	b = 2	2
Alfa 2	α = 1	1
Beta 2	β = 2	2
Gamma	c = 3	3

Restricciones
a, b y c deben ser mayores que 0.

Figura A.7. Interfaz para la inicialización del modelo.

A.3.5. Función Objetivo

En esta cuarta opción el usuario tiene que elegir la función objetivo que le permita obtener el mejor ajuste entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Los tres criterios que se presentan para el usuario son el coeficiente de determinación (R^2), la sumatoria del error al cuadrado (SSE) y la sumatoria del error relativo (SER). De las tres funciones objetivo se presenta su fórmula y su descripción. Ver Figura A.8.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

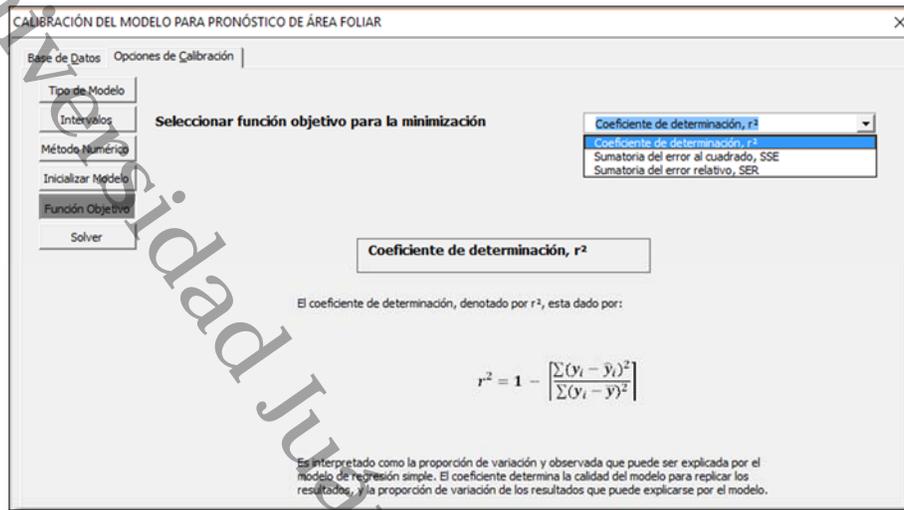


Figura A.8. Interfaz para la selección de la Función Objetivo.

A.3.6. Uso de Solver

En esta última opción el usuario tiene la opción de colocar los parámetros de Solver, como son: Precisión de restricciones, Convergencia, Tiempo máximo, Iteraciones, Derivadas, Tipo de estimaciones. Esto con la finalidad de poder optimizar el uso de Solver y obtener un mejor resultado de la estimación de los parámetros de la distribución Beta. Una vez colocados los parámetros de Solver, el usuario solo debe oprimir el botón **Estimar Parámetros** para que el programa realice la estimación y genere la mejor estimación numérica de los parámetros de la distribución Beta elegida como modelo matemático. Ver Figura A.9.



Modelo Matemático del Comportamiento del Área Foliar de Especies Vegetales a partir de la Distribución de Probabilidad Beta

Base de Datos | Opciones de Calibración

Tipo de Modelo
Intervalos
Método Numérico
Inicializar Modelo
Función Objetivo
Solver

Introducir los Parámetros de Solver para iniciar la optimización

Parámetros de Solver

Precisión de restricciones: 0.0001
Convergencia: 0.0001

Resolviendo límites

Tiempo máximo (segundos): 500
Iteraciones: 200

Derivadas

Progresivas
 Centradas

Tipos de estimaciones

Tangenciales
 Cuadráticas

Estimar Parámetros

Figura A.9. Interfaz para la selección de los parámetros del optimizador Solver