



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas



ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA DEPREDACIÓN
SOBRE ESPECIES MUTUALISTAS

Tesis

Para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta

NASHIELY JUANITA LÓPEZ LÓPEZ

Directores de tesis:

Dr. Gamaliel Blé González

Dr. Manuel Falconi Magaña

Cunduacán, Tabasco.

Noviembre 2022.



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de
Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

07 de noviembre de 2022

**M.C. NASHIELY JUANITA LÓPEZ LÓPEZ
PASANTE DEL DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
PRESENTE**

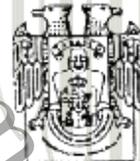
Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacerle su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA DEPREDACIÓN SOBRE ESPECIES MUTUALISTAS"** en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL

DIRECTORA



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo.

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de doctorado denominada “**ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA DEPREDACIÓN SOBRE ESPECIES MUTUALISTAS**”, de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 09 días del mes de Noviembre del año 2022.

Autorizó



Nashiely Juanita López López
182A22002

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | III |
| Introducción | v |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Teoría local de ecuaciones diferenciales no lineales | 1 |
| 1.2. Puntos de equilibrio no hiperbólicos | 3 |
| 1.2.1. Teorema de Sotomayor | 3 |
| 1.2.2. Variedad Central | 6 |
| 1.2.3. Bifurcación | 8 |
| 1.3. Estabilidad global | 19 |
| 1.3.1. Teorema de Poincaré-Bendixson | 19 |
| 2. Modelo Depredador-Presa con respuesta funcional tipo Crowley-Martin | 21 |
| 2.1. Estructura de los puntos de equilibrio | 22 |
| 2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio: caso tres CEP's | 30 |
| 2.3. Estabilidad de los puntos de equilibrio: caso dos CEP's | 32 |
| 2.3.1. Dinámica local del CEP hiperbólico | 33 |
| 2.3.2. Ciclo límite alrededor del CEP hiperbólico | 36 |
| 2.3.3. Dinámica local del CEP no hiperbólico | 38 |
| 2.3.4. Bifurcación Bogdanov-Takens | 44 |
| 3. Análisis de un modelo con interferencia en una relación mutualista | 54 |
| 3.1. Determinación de puntos de equilibrio | 54 |
| 3.2. Estabilidad local | 57 |
| 3.3. Análisis de bifurcación | 59 |
| 3.3.1. Bifurcación Bogdanov-Takens de un CEP en Ω visto en \mathbb{R}^3 | 59 |
| 3.3.2. Bifurcación de Hopf | 63 |
| 3.3.3. Bifurcación Bogdanov-Takens en un CEP en Ω_1 | 68 |
| 3.4. Simulación numérica | 73 |
| 3.5. Contraste entre los planos xz, yz y Ω_1 | 78 |
| 3.6. Exploración numérica | 80 |

| | |
|--|-----|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | II |
| Conclusión | 83 |
| Bibliografía | 85 |
| Apéndice | 86 |
| A. Estabilidad del punto de equilibrio no hiperbólico en el plano | 87 |
| B. Bifurcación Bogdanov-Takens en el plano | 90 |
| C. Estabilidad Local de un punto de equilibrio de coexistencia en \mathbb{R}^3 | 100 |
| D. Bifurcación Bogdanov-Takens del plano visto en \mathbb{R}^3 | 103 |
| E. Bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3 | 110 |
| F. Bifurcación Bogdanov-Takens de un CEP en Ω_1 | 115 |

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Agradecimientos

Dedicado a:

DIOS, MIS PADRES Y HERMANAS.

Agradecimientos

Agradezco a:

Dios, por la vida de mis padres, por acompañarme y guiarme a lo largo de mi vida, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Mis padres, Juan y Amanda, quienes siempre me enseñaron a poner todo el esfuerzo en algo que dará buenos frutos. Gracias por confiar y creer en mí, por todo ese inmenso amor, el gran esfuerzo de toda una vida de arduo trabajo, sacrificios, preocupaciones para ayudarme a forjar mi camino, cumplir con mis metas y ser una mejor persona. Muchas gracias a ambos, los amo con todo mi corazón mamá y papá.

Mis hermanas, Citlali y Brisa que a pesar de la distancia, el amor nos mantiene unidas. Gracias por su paciencia, por preocuparse por mí, cuidarme como a una hija, espero se sientan muy orgullosas de mí, así como yo de ustedes, este logro no es tan solo mío sino de cada una de nosotras. Las amo con todo mi corazón.

Mis directores de tesis el Dr. Gamaliel Blé González y Dr. Manuel Falconi Magaña, por la orientación y ayuda que me brindaron para la realización de este proyecto. Gracias.

CONACYT, por la beca 611703 otorgada para poder realizar mis estudios de doctorado y así haber realizado este proyecto de tesis. Al apoyo de PAPIIT IN116018 y PAPIIT IA203922.

Mis amigos que me han apoyado, en especial a Fer, Ross y Cinthia por ser parte significativa de mi vida, por confiar y creer en mí, por hacer de esta etapa y las que faltan un trayecto de vivencias que nunca olvidaré. Gracias por su apoyo, comprensión y sobre todo amistad.

Mis profesores por enseñarme todo lo que se, sin ellos no me hubiera sido posible llegar hasta donde ahora estoy. Muchos de ustedes no sólo aportaron conocimientos científicos

sino también me enseñaron acerca del mundo y la vida real.

Todas las personas que de una u otra manera están a mi lado brindándome su apoyo, cariño, y dándome ánimos para seguir adelante, muchas gracias.

GRACIAS A TODOS.

Nashiely Juanita

México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Introducción

En el mundo real, muchos factores limitantes dependientes e independientes de la densidad poblacional interactúan para producir los patrones de cambio que vemos en una población. Los seres vivos nacen, crecen, se reproducen y mueren, no obstante, sus interacciones con otras especies determinan cada una de las etapas de su vida. En este sentido, las interacciones ecológicas pueden clasificarse en positivas (mutualismos) y negativas (depredación). Las interacciones positivas son aquellas en donde dos individuos de distintas especies se benefician mutuamente, mientras que en las negativas un individuo obtiene beneficios al afectar o matar a otro individuo de otra especie. Una gran tarea de la Ecología es el desarrollo de una teoría de la organización de las comunidades [CF]. Esto significa entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacción. En este contexto, aparecen los modelos matemáticos y la simulación computacional las cuales son herramientas que ayudan a entender la evolución de cada una de las interacciones.

En la interacción de especies se han observado fenómenos como la depredación, la competencia y el mutualismo. Un elemento importante en la relación depredador-presa es la tasa con la que el depredador consume a la presa y que se puede representar en función de la cantidad de presa y se le llama respuesta funcional (tasa de captura de presas por depredador por unidad de tiempo). Entre las respuestas funcionales más conocidas están las de tipo Holling, Beddington-DeAngelis, Hassell-Varley, Crowley-Martin, etc. [SG]. En particular, Crowley-Martin en [SG, C] proponen una respuesta funcional que considera la interferencia entre depredadores independientemente de si un individuo en particular gasta tiempo en el manejo o búsqueda de su presa [SG]. Explícitamente la respuesta funcional es

$$\begin{aligned} f(N, P) &= \frac{aN}{1 + bN + c(P - 1) + bcN(P - 1)} \\ &= \frac{aN}{(1 + bN)(1 + c(P - 1))}, \end{aligned}$$

los parámetros a , b y c son positivos, y representan la velocidad de captura, tiempo de captura e interferencia entre los depredadores, respectivamente. Hay varios trabajos en la literatura sobre depredador-presa con respuesta funcional tipo CrowleyMartin [AJ, KK, JT, MPS]. Ali y Jazar estudiaron un modelo depredador-presa de Leslie-Gower modificado

con respuesta funcional Crowley-Martin [AJ]. Explícitamente, el sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bxy}{(1+cx)(1+dy)} \\ \dot{y} &= y \left(a_2 - \frac{ey}{x+f}\right).\end{aligned}$$

Ellos determinan condiciones para la existencia y estabilidad global de un punto de equilibrio en el cuadrante positivo así como la existencia de órbitas periódicas generadas de una bifurcación de Hopf. Por otro lado, en [L] se analiza la dinámica en el plano de un sistema depredador-presa de la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \left(\frac{b_1x}{1+c_1x^m+c_2xz}\right)z, \\ \dot{z} &= \left(\frac{\mu_1b_1x}{1+c_1x^m+c_2xz} - d\right)z,\end{aligned}\tag{1}$$

donde la presa tiene un crecimiento logístico y la respuesta funcional es tipo Crowley-Martin. Además, se muestra que cuando en el sistema (1) se considera la defensa de la presa ($m > 1$), pueden existir hasta cuatro puntos de equilibrio dentro del primer cuadrante. Así mismo, se determinan condiciones para las cuales existe un punto de equilibrio estable y para las cuales éste presenta bifurcación de Hopf. En el caso particular $m = 1$, se garantiza la existencia de tres puntos de equilibrio en el cuadrante positivo y se determina su estabilidad local y global. Además, se determinan condiciones para las cuales el sistema presenta biestabilidad generada por dos puntos de equilibrio estables o un punto de equilibrio estable y una órbita estable.

Por otra parte, también se han estudiado modelos para tres poblaciones en los cuales se considera una respuesta funcional tipo Crowley-Martin. Kharbanda y Kumar analizaron un modelo considerando un recurso que es consumido por dos depredadores que compiten entre ellos, uno con respuesta funcional de Beddington-DeAngelis y el otro con Crowley-Martin [KK]. Ellos estudiaron el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} - \frac{\alpha_1xz}{1+dx+ez+dexz}, \\ \dot{y} &= \frac{\alpha\alpha_2xy}{a+bx+cy} - c_1yz - d_1y, \\ \dot{z} &= \frac{\alpha_3\alpha_1xz}{1+dx+ez+dexz} - c_2yz - d_2z.\end{aligned}$$

Determinaron las condiciones de los parámetros para los que hay un punto de equilibrio de coexistencia y utilizando una función de Lyapunov muestran la estabilidad global. Jana

y Tripathi estudiaron un modelo tritrófico dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha_1 xy}{x + D}, \\ \dot{y} &= \frac{\alpha_2 xy}{x + D_1} - \frac{\alpha_3 yz}{1 + dy + bz + bdyz} - d_1 y, \\ \dot{z} &= d_2 z^2 - \frac{\alpha_4 z^2}{D_2 + y}.\end{aligned}$$

donde el recurso es consumido por un depredador con respuesta funcional Holling II y el depredador es consumido por un superdepredador con respuesta funcional tipo Crowley-Martin [JT]. Ellos muestran condiciones para tener un punto de equilibrio de coexistencia, estabilidad local y global y persistencia uniforme del sistema.

Por otro lado, se han estudiado diversas variantes del siguiente modelo tritrófico general,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho(x) - F_1(x, y)y \\ \dot{y} &= \alpha_1 F_1(x, y)y - F_2(y, z)z - d_1 y \\ \dot{z} &= \alpha_2 F_2(y, z)z - d_2 z.\end{aligned}\tag{2}$$

Mondal, Pal y Samanta estudiaron el modelo (2) considerando una respuesta funcional Holling II y una tipo Crowley-Martin [MPS]. Ellos consideran $\rho(x) = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $F_1(x, y) = \frac{xy}{1 + dx + by + bdy}$ y $F_2(y, z) = \frac{yz}{y + D}$. Usando estas respuestas funcionales, determinan condiciones para las que hay un punto de equilibrio de coexistencia, la estabilidad local y global del sistema, así como una bifurcación de Hopf. Upadhyay y Naji estudian el modelo (2) considerando una respuesta funcional Holling II y una tipo Crowley-Martin [U]. Explicítamente, toman $\rho(x) = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $F_1(x, y) = \frac{xy}{x + D}$ y $F_2(y, z) = \frac{yz}{1 + dy + bz + bdyz}$. A partir de esto, determinan condiciones para los cuales existe un punto de equilibrio de coexistencia y usando una función de Lyapunov demuestran estabilidad global. Zhao y Lv analizan el modelo (2) con respuesta funcional Beddington-DeAngelis [Z]. Ellos consideran $\rho(x) = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ y $F_i(u, v) = \frac{A_i u}{B_i v + u + C_i}$, para $i = 1, 2$, y determinan la existencia de cuatro puntos de equilibrio de coordenadas no negativas y analizan su estabilidad local.

El mutualismo es una interacción interespecífica en la que las especies involucradas reciben un beneficio neto. Es un tipo extremadamente frecuente de interacción en la naturaleza [BJ]. Esta interacción ha sido estudiada a través de modelos matemáticos desde la década de 1980 [VT, EI, MGL] y sus referencias. En 1981, Addicot propuso un modelo de mutualismo donde ambas especies crecen logísticamente [A]. Más tarde, la estabilidad global del punto de equilibrio de coexistencia de este modelo fue probada por Vargas, utilizando una función de Lyapunov [V]. Legovic *et al* generalizaron el modelo Addicot y encontraron condiciones para la existencia de un punto de equilibrio positivo y para la estabilidad local [LG].

En este trabajo, analizamos un modelo que considera la interacción de dos poblaciones de presa en mutualismo x y y donde la capacidad de carga de cada uno crece con la densidad de población del otro. Estas poblaciones tienen un depredador común z con respuesta funcional tipo Crowley-Martin. Explícitamente, consideramos un modelo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K_1 + y}\right) - \frac{b_1 x z}{1 + c_1 x^m + c_2 x z}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{K_2 + x}\right) - \frac{b_2 y z}{1 + c_3 y^n + c_4 y z}, \\ \dot{z} &= \left(\frac{\mu_1 b_1 x}{1 + c_1 x^m + c_2 x z} + \frac{\mu_2 b_2 y}{1 + c_3 y^n + c_4 y z} - d\right) z.\end{aligned}\tag{3}$$

Además, todos los parámetros son no negativos y los exponentes m y n son mayores o iguales a 1. En este sistema

- Las funciones $rx \left(1 - \frac{x}{K_1 + y}\right)$ y $sy \left(1 - \frac{y}{K_2 + x}\right)$ son las funciones de reproducción de x y y , respectivamente.
- K_1 y K_2 son las capacidades de carga de las poblaciones de presas.
- $\frac{b_1 x}{1 + c_1 x^m + c_2 x z}$ y $\frac{b_2 y}{1 + c_3 y^n + c_4 y z}$ son las respuestas funcionales Crowley-Martin generalizadas para las presas x y y , respectivamente.
- b_1 y b_2 son las tasas de depredación.
- c_1 y c_3 son constantes positivas que describen el tiempo de manipulación.
- c_2 y c_4 describen la magnitud de la interferencia entre los depredadores.
- d es la tasa de mortalidad del depredador.
- μ_1 y μ_2 son las tasas de conversión de presas capturadas en biomasa depredadora.
- m y n son constantes positivas que describen el mecanismo de defensa de la población presa.

Note que si no consideramos la interacción depredador en el modelo (3), esto se convierte en el modelo de mutualismo de Addicot. Por razones biológicas, el modelo sólo tiene sentido si x, y y z son funciones no negativas del tiempo. Denotamos el octante positivo por Ω y Ω_1 denota el cuadrante positivo del plano xz . A los puntos de equilibrio con coordenadas positivas les llamaremos puntos de equilibrio de coexistencia (CEP)¹. Para el estudio del modelo (3), este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el

¹Del inglés Coexistence Equilibrium Point

Capítulo 1, presentamos definiciones y resultados importantes sobre ecuaciones diferenciales no lineales que serán de utilidad en el desarrollo de los capítulos siguientes. En el Capítulo 2, analizamos la dinámica del modelo cuando está restringido a una población de presas y un depredador, caracterizamos su dinámica a partir del número de puntos de equilibrio del sistema. En el caso de tres puntos de equilibrio de coexistencia mostramos la estabilidad local y global del sistema. En el caso de dos puntos de equilibrio de coexistencia, determinamos la existencia de una órbita periódica generada por una bifurcación de Hopf y una órbita homoclínica a través de una bifurcación de Bogdanov-Takens. En el Capítulo 3, analizamos la dinámica del modelo que considera dos poblaciones de presas en mutualismo y un depredador común y mostramos que la coexistencia de las tres especies se puede dar a través de un punto de equilibrio, una órbita periódica o una órbita homoclínica estable. En particular, estos conjuntos límites están determinados a partir de la bifurcación de Bogdanov-Takens y la bifurcación de Hopf. En la última sección, se presentan simulaciones numéricas para ejemplificar los resultados analíticos. Por último, se muestran las conclusiones generales obtenidas en este trabajo.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Preliminares

En este capítulo abordaremos algunos resultados para sistemas lineales y no lineales, los cuales serán utilizados en el desarrollo de este trabajo.

1.1. Teoría local de ecuaciones diferenciales no lineales

En esta sección daremos algunas herramientas que permiten analizar localmente las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Las definiciones y resultados que aquí se presentan pueden ser consultados en [P].

Definición 1.1.1. $\mathbf{x}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.1) en un intervalo I , si $\mathbf{x}(t)$ es diferenciable en I y si para todo $t \in I$, $\mathbf{x}(t) \in E$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Dado $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{x}(t)$ es una solución del problema (1.1) con valor inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ en un intervalo I , si además de ser solución, $t_0 \in I$ y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Teorema 1.1.2. (Existencia y Unicidad). Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\mathbf{x}_0 \in E$ y $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$, entonces existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2)$$

tiene una única solución $\mathbf{x}(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama **punto de equilibrio** o **punto crítico** de (1.1), si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 se llama **punto de equilibrio hiperbólico** de (1.1) si ninguno de los valores propios de la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real cero.

Un teorema muy importante que nos permite entender el comportamiento de las soluciones del sistema (1.1) alrededor de los puntos de equilibrio es el teorema de Hartman-Grobman. Este teorema establece las condiciones que permiten comprender la dinámica en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico \mathbf{x}_0 del sistema no lineal (1.1), a partir de la dinámica del sistema lineal

$$\dot{\mathbf{y}} = A \mathbf{y}, \quad (1.3)$$

donde $A = Df(\mathbf{x}_0)$.

Supongamos que \mathbf{f} y \mathbf{g} son dos campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^1(E)$ en un abierto E subconjunto de \mathbb{R}^n que contiene al origen. Los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

y

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (1.5)$$

son *topológicamente* equivalentes en una vecindad al origen, si existen vecindades del origen U y V , y un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ preservando la orientación tal que

$$H(\phi_t(\mathbf{x})) = \psi_T(H(\mathbf{x})).$$

Donde ϕ_t es el flujo del sistema (1.4) y ψ_T el flujo asociado al sistema (1.5). Si $t = T$, entonces se dice que el sistema (1.4) y el sistema (1.5) son *topológicamente conjugados* en una vecindad del origen.

Teorema 1.1.3. (Hartman-Grobman). *Si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (1.1) y $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ entonces, existe una vecindad de \mathbf{x}_0 en el que el campo no lineal (1.1) es topológicamente conjugado al sistema lineal (1.3) en el origen.*

La demostración de este teorema puede ser consultada en [P].

A partir de este teorema podemos establecer una clasificación de los puntos de equilibrio hiperbólicos de un sistema no lineal (1.1), de acuerdo a los valores propios de la matriz A . Un punto de equilibrio hiperbólico \mathbf{x}_0 del sistema no lineal (1.1) es

- 1) Un sumidero (pozo) si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.
- 2) Una fuente si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real positiva.
- 3) Una silla si A tiene valores propios con parte real positiva y por lo menos uno con parte real negativa.

En dimensión dos, esta clasificación se puede hacer más específica, por lo que podemos hablar de sillas, nodos o focos los cuales pueden ser estables o inestables.

1.2. Puntos de equilibrio no hiperbólicos

1.2.1. Teorema de Sotomayor

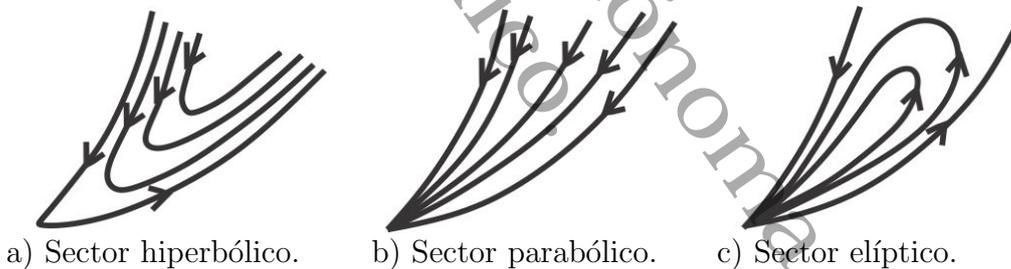
En esta sección presentaremos algunos resultados sobre puntos de equilibrio no hiperbólicos en un sistema analítico plano. Supongamos que el origen es un punto crítico aislado del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde P y Q son funciones analíticas en una vecindad del origen.

En esta sección mostraremos algunos resultados establecidos en [ALGM, P] para el caso en que la matriz $A = Df(0)$ tiene uno o dos valores propios iguales a cero, pero $A \neq 0$. Estos resultados pueden ser extendidos a dimensión superior, al analizar un sistema en su variedad central.

Definición 1.2.1. *Un sector que es topológicamente equivalente a la figura 1.1 a) se le llama sector hiperbólico; si es topológicamente equivalente a la figura 1.1 b) se le llama sector parabólico y si es topológicamente equivalente a la figura 1.1 c) se le llama sector elíptico.*



a) Sector hiperbólico. b) Sector parabólico. c) Sector elíptico.
Figura 1.1: Tipos de sectores en un punto de equilibrio.

Por ejemplo, un punto **silla** está conformado por una vecindad que contiene cuatro sectores hiperbólicos y cuatro separatrices. Un punto **silla-nodo** contiene dos sectores hiperbólicos y un sector parabólico como se observa en la figura 1.2. Un punto **cúspide** está conformado por dos sectores hiperbólicos y dos separatrices, véase la figura 1.3.

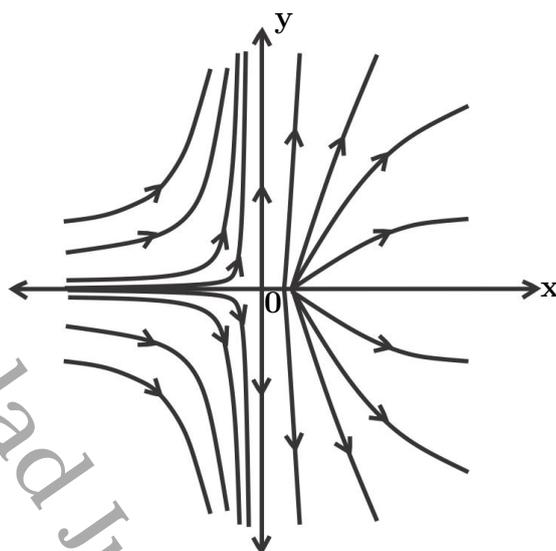


Figura 1.2: Silla-nodo en el origen.

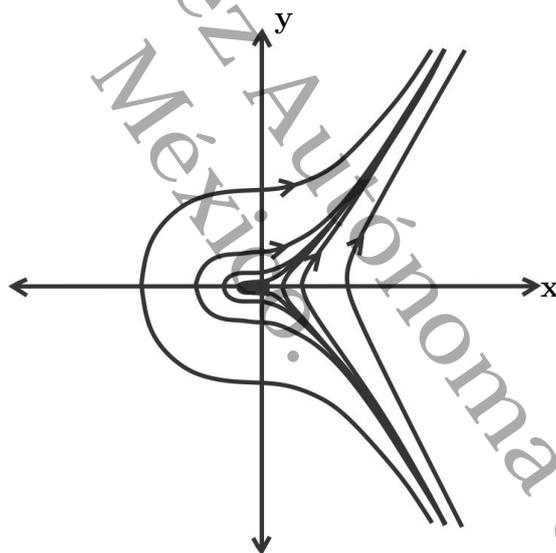


Figura 1.3: Cúspide en el origen.

Consideremos el caso donde la matriz A tiene un valor propio cero, es decir, $\det(A) = 0$ pero $\text{tr}(A) \neq 0$. En el capítulo 1 de [ALGM, p 338] se muestra que la forma normal del sistema (1.6) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_2(x, y) \\ \dot{y} &= y + q_2(x, y), \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde p_2 y q_2 son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones que comienzan

con términos de segundo grado en x y y . Además, se tiene el siguiente teorema el cual puede ser consultado en [ALGM, P].

Teorema 1.2.2. *Supongamos que el origen es un punto de equilibrio aislado del sistema analítico (1.7). Sea $y = \phi(x)$ una solución de la ecuación $y + q_2(x, y) = 0$, y $\psi(x) = a_m x^m + \dots$, la expansión en una vecindad de $x = 0$ de la función $\psi(x) = p_2(x, \phi(x))$, donde $m \geq 2$ y $a_m \neq 0$.*

1. Si m es impar y $a_m > 0$, entonces el origen es un nodo inestable.
2. Si m es impar y $a_m < 0$, entonces el origen es una silla.
3. Si m es par, entonces el origen es una silla-nodo.

Teorema 1.2.3. (Sotomayor.) *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{\eta} = \mathbf{F}(\eta, \nu), \quad (1.8)$$

con $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $\nu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (η_0, ν_0) tal que

- $\mathbf{F}(\eta_0, \nu_0) = 0$,
- $A = (D\mathbf{F}(\eta_0, \nu_0))_{n \times n}$ tiene un valor propio $\lambda_1 = 0$, y $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$, $j = 2, 3, \dots, n$.

Sean \mathbf{v}_0 y \mathbf{w}_0 los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 0$.

a) Si

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0^T \mathbf{F}_\nu(\eta_0, \nu_0) &\neq 0, \\ (\mathbf{w}_0^T D^2 \mathbf{F}(\eta_0, \nu_0))(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema (1.8) experimenta una **bifurcación silla-nodo** en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

b) Si

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0^T \mathbf{F}_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\mathbf{w}_0^T D^2 \mathbf{F}(\eta_0, \nu_0))(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) &\neq 0, \\ \mathbf{v}_0^T (\mathbf{w}_0^T \mathbf{F}_{\nu\eta})^T &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema (1.8) experimenta una **bifurcación transcritical** en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

c) Si

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0^T \mathbf{F}_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\mathbf{w}_0^T D^2 \mathbf{F}(\eta_0, \nu_0))(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) &= 0, \\ \mathbf{v}_0^T (\mathbf{w}_0^T \mathbf{F}_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0, \\ (\mathbf{w}_0^T D^3 \mathbf{F}(\eta_0, \nu_0))(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema (1.8) experimenta una **bifurcación trinche** en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Ahora consideremos el caso donde A tiene dos valores propios iguales a cero, es decir, $\det(A) = 0$, $\text{tr}(A) = 0$, pero $A \neq 0$. En [ALGM, P] se muestra que la forma normal del sistema (1.6) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y), \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $h(x)$, $g(x)$ y $R(x, y)$ son funciones analíticas en una vecindad del origen, $h(0) = g(0) = 0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ y $n \geq 1$. La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [ALGM].

Teorema 1.2.4.

a) Supongamos que en (1.9) tenemos $k = 2m + 1$ y $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$ con $m \geq 1$.

1. Si $a_k > 0$ entonces el origen es una silla.
2. El origen es un foco ó un centro, si $a_k < 0$ y se satisface alguna de las siguientes condiciones: **i)** $b_n = 0$; **ii)** $b_n \neq 0$ y $n > m$; **iii)** $b_n \neq 0$, $n = m$ y $\lambda < 0$.
3. Para $a_k < 0$, $b_n \neq 0$ y n par (impar), el origen es un nodo (tiene un dominio elíptico) cuando $n < m$ ó $n = m$ y $\lambda \geq 0$.

b) Supongamos que $k = 2m$ con $m \geq 1$ en (1.9). Entonces el origen es

1. Una cúspide si $b_n = 0$ ó $b_n \neq 0$ y $n \geq m$.
2. Una silla-nodo si $b_n \neq 0$ y $n < m$.

1.2.2. Variedad Central

En esta subsección analizaremos el caso cuando se presenta un punto de equilibrio no hiperbólico. Los resultados que aquí se presentan pueden ser consultados en [P, J]. Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= C\mathbf{x} + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= P\mathbf{y} + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ y C, P son matrices constantes tal que los valores propios de C tienen parte real cero y los valores propios de P tienen parte real negativa.

Si f y g son idénticamente cero, entonces el sistema (1.10) tiene dos subespacios invariantes $x = 0$ y $y = 0$. El subespacio invariante $x = 0$ es llamado subespacio estable, es decir, si se restringen las condiciones iniciales a $x = 0$, todas las soluciones tienden a cero. El subespacio invariante $y = 0$ es llamado subespacio central.

Si f y g son idénticamente cero, entonces todas las soluciones de (1.10) convergen exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$ a las soluciones del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Esto es, las soluciones sobre el subespacio central determinan el comportamiento asintótico de todas las soluciones del sistema (1.11).

En general, si $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ es una variedad invariante para el sistema no lineal (1.10) y h es suave, entonces es llamada una *variedad central* si $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$.

Teorema 1.2.5. *Supongamos que en el sistema (1.10) las funciones f y g son $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ y además, $f(0,0) = 0, Df(0,0) = 0, g(0,0) = 0, Dg(0,0) = 0$, entonces existe una variedad central para (1.10), $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$, para $|\mathbf{x}| < \delta$, y $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$*

El flujo sobre la variedad central está dado por el sistema n-dimensional

$$\dot{\mathbf{u}} = C\mathbf{u} + f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})). \quad (1.12)$$

Teorema 1.2.6. a) *Supongamos que el origen es estable (asintóticamente estable) (inestable) para el sistema (1.12), entonces el origen es estable (asintóticamente estable) (inestable) para el sistema (1.10).*

b) *Supongamos que el origen es estable para el sistema (1.12). Sea $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ una solución de (1.10) con condición inicial $(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0))$ suficientemente pequeña. Entonces existe una solución $u(t)$ de (1.12) tal que cuando $t \rightarrow \infty$,*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{u}(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{u}(t)) + O(e^{-\gamma t}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

Al sustituir $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}(t))$ en la segunda ecuación en (1.10) se obtiene

$$Dh(\mathbf{x})[C\mathbf{x} + f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))] = Ph(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) junto con las condiciones $h(0) = 0, Dh(0) = 0$ es el sistema a resolver para el subespacio central.

Esto es imposible en general, ya que es equivalente a resolver (1.10). El siguiente resultado nos muestra que la variedad central puede ser aproximada para cualquier grado de exactitud.

Para funciones $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de \mathcal{C}^1 en una vecindad del origen se define

$$(M\phi)(\mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x})[C\mathbf{x} + f(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))] - P\phi(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})). \quad (1.15)$$

Note que por (1.14), $(Mh)(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema 1.2.7. *Sea $\phi \in \mathcal{C}^1$ que mapea una vecindad del origen de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m con $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 0$. Supongamos que cuando $\mathbf{x} \rightarrow 0$, $(M\phi)(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^q)$ donde $q > 1$, entonces cuando $\mathbf{x} \rightarrow 0$, $|h(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})| = O(|\mathbf{x}|^q)$.*

1.2.3. Bifurcación

Un fenómeno que aparece frecuentemente en una familia de ecuaciones diferenciales es el de una bifurcación. En esta sección presentaremos dos casos particulares, la bifurcación de Hopf y la bifurcación de Bogdanov-Takens. Las definiciones y resultados que aquí se presentan pueden ser consultados y ampliados en [P, K].

1.2.3.1. Bifurcación de Hopf

Dado \mathbf{x}_0 un punto de equilibrio no hiperbólico del sistema (1.1), si la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene valores propios imaginarios puros y otros con parte real distinta de cero, \mathbf{x}_0 es candidato a tener una bifurcación de Hopf. Una bifurcación de Hopf o Poincaré-Andronov-Hopf es una bifurcación local en la cual un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales pierde estabilidad al cambiar de signo la parte real de un par de valores propios complejos conjugados de la linealización.

Bajo hipótesis genéricas convenientes al sistema de ecuaciones diferenciales, es posible observar la aparición de un ciclo límite de pequeña amplitud bifurcando desde el punto de equilibrio.

Ejemplo 1.2.8. Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Para este sistema se tiene que el único punto crítico es el origen. La matriz jacobiana evaluada en el origen es

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Por lo que el origen es un foco estable si $\mu < 0$ e inestable si $\mu > 0$. Para $\mu = 0$, la $D\mathbf{f}(0, 0)$ tiene valores propios imaginarios puros y el origen para el sistema lineal es un centro. Reescribiendo el sistema anterior en coordenadas polares se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu + sr^2) \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Donde $s = -1$. Además, en estas coordenadas puede observarse que en $\mu = 0$ el origen es un foco débilmente estable y para $\mu > 0$ existe un ciclo límite estable

$$\Gamma_\mu : \gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos(t), \sin(t))^T.$$

La curva Γ_μ representa una familia de parámetros de ciclos límite de este sistema, el retrato fase del mismo se muestra en la figura 1.4 y el diagrama de bifurcación en la figura 1.5.

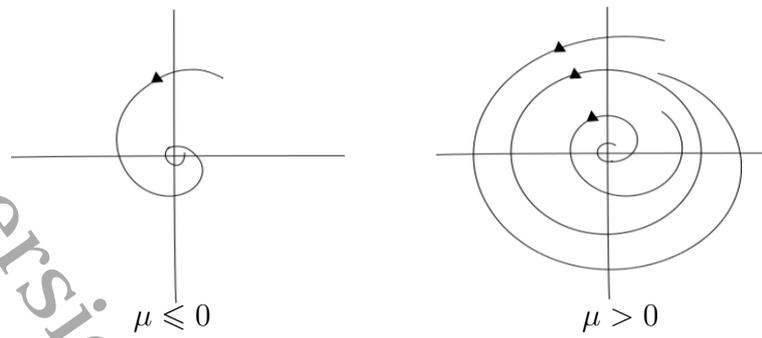
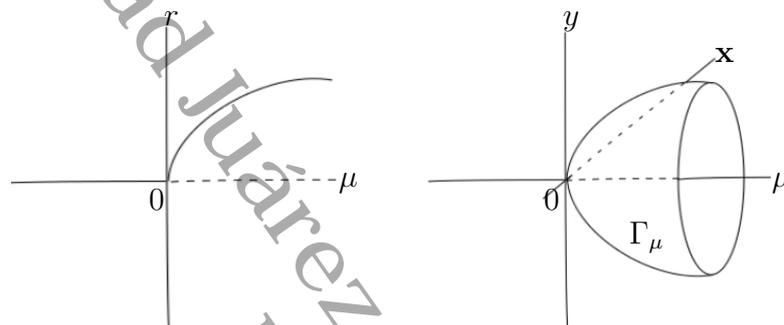


Figura 1.4: Retrato fase.

Figura 1.5: Diagrama de bifurcación y familia de parámetros de ciclos límite Γ_μ resultantes de la bifurcación de Hopf.

La curva superior en el diagrama de bifurcación representa la familia a un parámetro de los ciclos límite Γ_μ , la cual define una superficie en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. La bifurcación del ciclo límite desde el origen que ocurre en el valor de bifurcación $\mu = 0$ conforme el origen cambia su estabilidad, se conoce como **bifurcación de Hopf**.

Diremos que un sistema a un parámetro presenta bifurcación de Hopf **supercrítica**, si es topológicamente equivalente al sistema (1.16) con $s = -1$, y cuando $s = 1$ diremos que la bifurcación de Hopf es **subcrítica**.

Teorema 1.2.9. (Bifurcación de Hopf). Sea

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

un sistema bi-dimensional, con \mathbf{f} diferenciable en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Suponga que el sistema (1.17) en el punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ tiene valores propios

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(\alpha_0) = 0$, $\omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0$.

Si se satisface

- $\ell_1(\alpha_0) \neq 0$, donde ℓ_1 es el primer coeficiente de Lyapunov,
- $\mu'(\alpha_0) \neq 0$.

Entonces el sistema (1.17), en una vecindad del origen es topológicamente equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + s (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

donde s es el signo del coeficiente de Lyapunov.

De este teorema, tenemos que para buscar bifurcación de Hopf en un sistema a un parámetro, es necesario encontrar un valor del parámetro donde el punto de equilibrio tenga valores propios complejos imaginarios puros. Además es necesario calcular el primer coeficiente de Lyapunov y la condición de transversalidad en la derivada de la parte real de los valores propios. Para calcular estos últimos tenemos los siguientes dos resultados que pueden ser consultados en [K].

Teorema 1.2.10. (Kuznetsov). En el sistema (1.1) con punto de equilibrio \mathbf{x}_0 , consideremos la aproximación de Taylor de tercer orden de \mathbf{f} alrededor de \mathbf{x}_0 dado por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \frac{1}{2!}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{3!}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^4). \quad (1.18)$$

Supongamos que A tiene un par de valores propios puramente imaginarios $\pm i\omega$. Sea \mathbf{q} el vector propio de A correspondiente al valor propio $i\omega$, normalizado tal que $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = 1$, donde $\bar{\mathbf{q}}$ es el vector conjugado de \mathbf{q} . Sea \mathbf{p} el vector propio adjunto tal que $A^T\mathbf{p} = -i\omega\mathbf{p}$ y $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q} = 1$. Si I denota la matriz identidad, entonces el primer coeficiente de Lyapunov $\ell_1(\mathbf{x}_0)$ del sistema (1.1) en el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es

$$\frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\bar{\mathbf{p}}C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) - 2\bar{\mathbf{p}}B(\mathbf{q}, A^{-1}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})) + \bar{\mathbf{p}}B(\bar{\mathbf{q}}, (2\omega iI - A)^{-1}B(\mathbf{q}, \mathbf{q})) \right). \quad (1.19)$$

Teorema 1.2.11. Sea $M(\tau)$ una matriz real de $n \times n$ dependiente de un parámetro, la cual tiene un par de valores propios complejos $\xi(\tau) \pm i\omega(\tau)$, tal que $\xi(\tau_0) = 0$ y $\omega(\tau_0) = \omega_0 > 0$. Entonces, la derivada de la parte real de los valores propios complejos en τ_0 está dada por

$$\frac{d\xi}{d\tau}(\tau_0) = \operatorname{Re} \left(\bar{\mathbf{p}}^T \cdot \left(\frac{dM}{d\tau}(\tau_0) \cdot \mathbf{q} \right) \right),$$

donde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$ son vectores propios que satisfacen las siguientes condiciones de normalización

$$M(\tau_0)\mathbf{q} = i\omega_0\mathbf{q}, \quad M^T(\tau_0)\mathbf{p} = -i\omega_0\mathbf{p} \quad y \quad \bar{\mathbf{p}}^T \cdot \mathbf{q} = 1. \quad (1.20)$$

1.2.3.2. Bifurcación Bogdanov-Takens

Construcción de la forma normal

Consideremos un sistema en el plano

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

donde f es suave. Supongamos que (1.21) en $\alpha = 0$, tiene como punto de equilibrio a $\mathbf{x} = 0$, para el cual la matriz jacobiana asociada tiene un par de valores propios idénticamente cero, es decir, $\lambda_{1,2} = 0$.

El sistema (1.21) con $\alpha = 0$, se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = C_0 \mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

donde $C_0 = f_{\mathbf{x}}(0, 0)$ y $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, 0) - C_0 \mathbf{x}$, es una función suave, $F(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^2)$. La condición de bifurcación implica que

$$\delta(0) = \text{Det}(C_0) = 0, \quad \tau(0) = \text{Tr}(C_0) = 0.$$

Asumamos que $C_0 \neq 0$, es decir, C_0 tiene al menos un elemento distinto de cero. Entonces existen dos vectores $\mathbf{v}_{0,1} \in \mathbb{R}^2$ con entradas reales, que son linealmente independientes, tales que

$$C_0 \mathbf{v}_0 = 0, \quad C_0 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0. \quad (1.23)$$

El vector \mathbf{v}_0 es el vector propio de C_0 correspondiente al valor propio cero, mientras que \mathbf{v}_1 es el vector propio generalizado de C_0 correspondiente a este valor propio. De igual forma, existen los vectores propios adjuntos $\mathbf{w}_{0,1} \in \mathbb{R}^2$ de la matriz transpuesta C_0^T , que satisfacen

$$C_0^T \mathbf{w}_0 = 0, \quad C_0^T \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0. \quad (1.24)$$

Los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{w}_0 no están definidos de forma única incluso si están fijos.

Sin embargo, siempre pueden seleccionarse cuatro vectores que satisfagan (1.23) y (1.24) tal que

$$\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1, \quad (1.25)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto punto escalar en \mathbb{R}^2 : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. El teorema alternativo de Fredholm implica que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_0 \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_1 \rangle = 0. \quad (1.26)$$

Si \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}_1 son elegidos como base, entonces cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ puede ser únicamente representado como

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1,$$

donde $y_{1,2} \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta (1.25) y (1.26), las nuevas coordenadas para (y_1, y_2) están dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_0 \rangle, \\ y_2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En las coordenadas (y_1, y_2) , el sistema (1.21) se escribe como

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle F(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1), \mathbf{w}_0 \rangle \\ \langle F(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1), \mathbf{w}_1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Nótese la forma particular de la matriz jacobiana, la cual es un bloque de Jordan de orden 2.

Usando las coordenadas (y_1, y_2) para todo α con $\|\alpha\|$ pequeño, el sistema (1.21) se escribe como

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1), \mathbf{w}_0 \rangle \\ \langle f(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1), \mathbf{w}_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

y para $\alpha = 0$ se reduce a (1.28). Tomando la expansión de Taylor del lado derecho de (1.28) con respecto a \mathbf{y} en $\mathbf{y} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + a_{00} + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(\mathbf{y}, \alpha), \\ \dot{y}_2 &= b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)y_2^2 + P_2(\mathbf{y}, \alpha), \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde $a_{kl}(\alpha)$, $b_{kl}(\alpha)$ y $P_{1,2}(\mathbf{y}, \alpha) = O(\|\mathbf{y}\|^3)$ son funciones suaves. Tenemos que

$$a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0.$$

Las funciones $a_{kl}(\alpha)$ y $b_{kl}(\alpha)$ pueden ser expresadas en terminos del lado derecho de $f(\mathbf{x}, \alpha)$ de (1.21) y los vectores $\mathbf{v}_{0,1}$, $\mathbf{w}_{0,1}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} a_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1, \alpha), \mathbf{w}_0 \rangle, \\ b_{20}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle f(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1, \alpha), \mathbf{w}_0 \rangle, \\ b_{11}(\alpha) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle f(y_1 \mathbf{v}_0 + y_2 \mathbf{v}_1, \alpha), \mathbf{w}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ahora comenzaremos a transformar (1.30) en una forma más simple mediante una transformación invertible y suave (suave dependiente de los parámetros) y tiempo de reparametrización. En un cierto punto, introduciremos nuevos parámetros.

Reducción a un oscilador no lineal. Introduciendo nuevas variables (u_1, u_2) , donde u_2 denota la parte derecha de la primera ecuación en (1.30) y renombrando y_1 como u_1 .

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1, \\ u_2 &= y_2 + a_{00} + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + P_1(\mathbf{y}, \cdot). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Esta transformación es invertible en alguna vecindad de $y = 0$ para un $\|\alpha\|$ pequeño y dependiente suavemente de los parámetros. Si $\alpha = 0$, el origen $\mathbf{y} = 0$ es un punto fijo de este mapeo. La transformación convierte (1.30) en

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2, \\
\dot{u}_2 &= g_{00}(\alpha) + g_{10}(\alpha)u_1 + g_{01}(\alpha)u_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}g_{20}(\alpha)u_1^2 + g_{11}(\alpha)u_1u_2 + \frac{1}{2}g_{02}(\alpha)u_2^2 + Q_1(\mathbf{u}, \alpha),
\end{aligned} \tag{1.33}$$

para algunas funciones suaves $g_{lk}(\alpha)$, $g_{00}(0) = g_{10}(0) = g_{01}(0) = 0$, y una función suave $Q(\mathbf{u}, \alpha) = O(\|\mathbf{u}\|^3)$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned}
g_{20} &= b_{20}(0), \\
g_{11} &= a_{20}(0) + b_{11}(0), \\
g_{02} &= b_{02}(0) + 2a_{11}(0).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
g_{00} &= b_{00}(\alpha) + \dots, \\
g_{10} &= b_{10}(\alpha) + a_{11}(\alpha)b_{00}(\alpha) - b_{11}(\alpha)a_{00}(\alpha) + \dots, \\
g_{01} &= b_{01}(\alpha) + a_{10}(\alpha) + a_{02}(\alpha)b_{00}(\alpha) - (a_{11}(\alpha) + b_{02}(\alpha))a_{00}(\alpha) + \dots,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

donde los puntos suspensivos representan todos los términos que contienen al menos un producto de algún a_{kl} , b_{ij} con $k + l \leq 1$ ($i + j \leq 1$). Como $a_{kl}(\alpha)$ y $b_{ij}(\alpha)$ se anulan en $\alpha = 0$, para algún $k + l \leq 1$, los términos mostrados son suficientes para calcular la primer derivada parcial de $g_{00}(\alpha)$, $g_{10}(\alpha)$, y $g_{01}(\alpha)$ con respecto a (α_1, α_2) en $\alpha = 0$.

Note que el sistema (1.33) puede ser escrito como una sola ecuación diferencial no lineal de segundo orden con $w = u_1$

$$\ddot{w} = \mathbf{G}(w, \alpha) + \dot{w}\mathbf{H}(w, \alpha) + \dot{w}^2\mathbf{Z}(w, \dot{w}, \alpha), \tag{1.36}$$

la cual proporciona la forma general de la ecuación de movimiento de un oscilador no lineal.

Parámetro shift dependiente. Un parámetro shift dependiente de coordenadas en la dirección de u_1

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 + \delta(\alpha), \\
u_2 &= v_2,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

transforma (1.33) en

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= v_2, \\
\dot{v}_2 &= g_{00} + g_{10}\delta + O(\delta^2) + (g_{10} + g_{20}\delta + O(\delta^2))v_1 + (g_{01} + g_{11}\delta + O(\delta^2))v_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(g_{20} + O(\delta^2))v_1^2 + (g_{11} + O(\delta))v_1v_2 + \frac{1}{2}(g_{02} + O(\delta))v_2^2 + O(\|v\|^3).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Asumiendo que

$$g_{11}(0) = a_{20} + b_{11}(0) \neq 0. \quad (1.39)$$

Entonces, usando argumentos basados en el teorema de la función implícita se prueba la existencia local de una función suave

$$\delta = \delta(\alpha) \approx -\frac{g_{01}(\alpha)}{g_{11}(\alpha)},$$

anulando el término proporcional a v_2 en la ecuación para v_2 , la cual lleva al siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= h_{00}(\alpha) + h_{10}(\alpha)v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}h_{20}(\alpha)v_1^2 + h_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}h_{02}(\alpha)v_2^2 + R(\mathbf{v}, \alpha), \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde h_{kl} y $R(\mathbf{v}, \alpha) = O(\|\mathbf{v}\|^3)$ son suaves. Encontrando que

$$h_{20} = g_{00}(\alpha) + \dots, h_{10}(\alpha) = g_{10}(\alpha) - \frac{g_{20}(0)}{g_{11}(0)}g_{01}(\alpha) + \dots, \quad (1.41)$$

donde de nuevo solo los términos para calcular las primeras derivadas parciales con respecto a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ en $\alpha = 0$ se mantienen (Ver (1.35)). Claramente, $h_{00}(0) = h_{10}(0) = 0$. El único valor relevante de $h_{kl}(\alpha)$, $k+l=2$, los cuales están dados por

$$h_{20}(0) = g_{20}(0), h_{11}(0) = g_{11}(0), h_{02}(0) = g_{02}(0), \quad (1.42)$$

donde $g_{kl}(0)$, $k+l=2$, están determinados por (1.34).

Tiempo de reparametrización y segunda reducción a un oscilador no lineal.

Introducimos el nuevo tiempo τ vía la ecuación

$$dt = (1 + \theta v_1)d\tau, \quad (1.43)$$

donde $\theta = \theta(\alpha)$ es una función suave, la cual será definida más adelante. La dirección del tiempo se preserva cerca del origen para $\|\alpha\|$ pequeña. Suponiendo que un punto sobre una variable ahora significa diferenciación con respecto a la variable τ , se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 + \theta v_1 v_2, \\ \dot{v}_2 &= h_{00} + (h_{10} + h_{00}\theta)v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_{20} + 2h_{10}\theta)v_1^2 + h_{11}(\alpha)v_1v_2 + \frac{1}{2}h_{02}v_2^2 + O(\|\mathbf{v}\|^3). \end{aligned} \quad (1.44)$$

El sistema de arriba tiene forma similar a (1.30), lo cual es un poco desalentador. Sin embargo, podemos reducirlo una vez más a un oscilador no lineal mediante una transformación de coordenadas similar a la del primer paso:

$$\xi_1 = v_1, \xi_2 = v_2 + \theta v_1 v_2,$$

mapeando el origen en si mismo para todo θ . El sistema en las coordenadas ξ_1, ξ_2 toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= f_{00}(\alpha) + f_{10}(\alpha)\xi_1 + \frac{1}{2}f_{20}\xi_1^2 + f_{11}(\alpha)\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}f_{02}\xi_2^2 + O(\|\xi\|^3), \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde

$$f_{00}(\alpha) = h_{00}(\alpha), \quad f_{10}(\alpha) = h_{10}(\alpha) + h_{00}(\alpha)\theta(\alpha),$$

y

$$\begin{aligned} f_{20} &= h_{20}(\alpha) + 2h_{10}(\alpha)\theta(\alpha), \\ f_{11} &= h_{11}(\alpha), \\ f_{02} &= h_{02}(\alpha) + 2\theta(\alpha). \end{aligned}$$

Ahora tomando

$$\theta(\alpha) = -\frac{h_{02}(\alpha)}{2}$$

con el fin de eliminar el término ξ_2^2 , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \mu_1(\alpha) + \mu_2(\alpha)\xi_1 + A(\alpha)\xi_1^2 + B(\alpha)\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3), \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde

$$\mu_1(\alpha) = h_{00}(\alpha), \quad \mu_2(\alpha) = h_{10}(\alpha) - \frac{1}{2}h_{00}(\alpha)h_{02}(\alpha), \quad (1.47)$$

y

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}(h_{20}(\alpha) - h_{10}(\alpha)h_{02}(\alpha)), \quad B(\alpha) = h_{11}(\alpha). \quad (1.48)$$

Escala final y ajuste de nuevos parámetros. Introduciendo un nuevo tiempo denotado por t , donde

$$t = \left| \frac{B(\alpha)}{A(\alpha)} \right| \tau.$$

Como $B(0) = h_{11}(0) = g_{11}(0) = a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$ debido a (1.39), el tiempo de escala de arriba puede estar bien definido si asumimos que

$$2A(0) = h_{20}(0) = g_{20}(0) = b_{20}(0) \neq 0. \quad (1.49)$$

Realizando un reescalamiento en el cual se introducen nuevas variables η_1 y η_2 , como

$$\eta_1 = \frac{A(\alpha)}{B^2(\alpha)}\xi_1, \quad \eta_2 = \text{sign} \left(\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)} \right) \frac{A^2(\alpha)}{B^3(\alpha)}\xi_2.$$

Nótese que el denominador es distinto de cero en $\alpha = 0$, ya que $A(0) \neq 0$ y $B(0) \neq 0$. En las coordenadas (η_1, η_2) el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + O(\|\eta\|^3),\end{aligned}\tag{1.50}$$

con

$$s = \text{sign} \left(\frac{B(0)}{A(0)} \right) = \text{sign} \left(\frac{a_{20}(0) + b_{11}(0)}{b_{20}(0)} \right) = \pm 1,$$

y

$$\begin{aligned}\beta_1(\alpha) &= \frac{B^4(\alpha)}{A^3(\alpha)} \mu_1(\alpha), \\ \beta_2(\alpha) &= \frac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)} \mu_2(\alpha).\end{aligned}$$

Es claro que, $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$. Para definir un cambio suave invertible de parámetros cerca del origen, tenemos que asumir la regularidad el mapeo $\alpha \mapsto \beta$ en $\alpha = 0$

$$\text{Det} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right).$$

Esta condición es equivalente a la regularidad del mapeo $\alpha \mapsto \mu$ en $\alpha = 0$ y puede ser expresado más explícitamente si tenemos en cuenta las fórmulas (1.44), (1.34), (1.30).

Teorema 1.2.12. Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

donde f es suave, en $\alpha = 0$ tiene como punto de equilibrio al origen, cuya matriz jacobiana asociada tiene un par de valores propios idénticamente cero,

$$\lambda_{1,2} = 0.$$

Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones

1. La matriz jacobiana $A(0) = f_{\mathbf{x}}(0, 0) \neq 0$,
2. $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$,
3. $b_{20}(0) \neq 0$,
4. La transformación

$$(\mathbf{x}, \alpha) \mapsto \left(f(\mathbf{x}, \alpha), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right) \right)$$

es regular en el punto $(\mathbf{x}, \alpha) = (0, 0)$.

Entonces existe una transformación invertible dependiente de parámetros, que preserva la dirección y reduce el sistema a uno de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1 \eta_2 + O(\|\eta\|^3), \end{aligned} \tag{1.51}$$

donde $s = \text{sign}[b_{20}(a_{20}(0) + b_{11}(0))] = \pm 1$.

Diagrama de bifurcación de la forma normal.

Tomando $s = -1$ y considerando el sistema (1.50) sin los términos de $O(\|\eta\|^3)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 - \eta_1 \eta_2. \end{aligned} \tag{1.52}$$

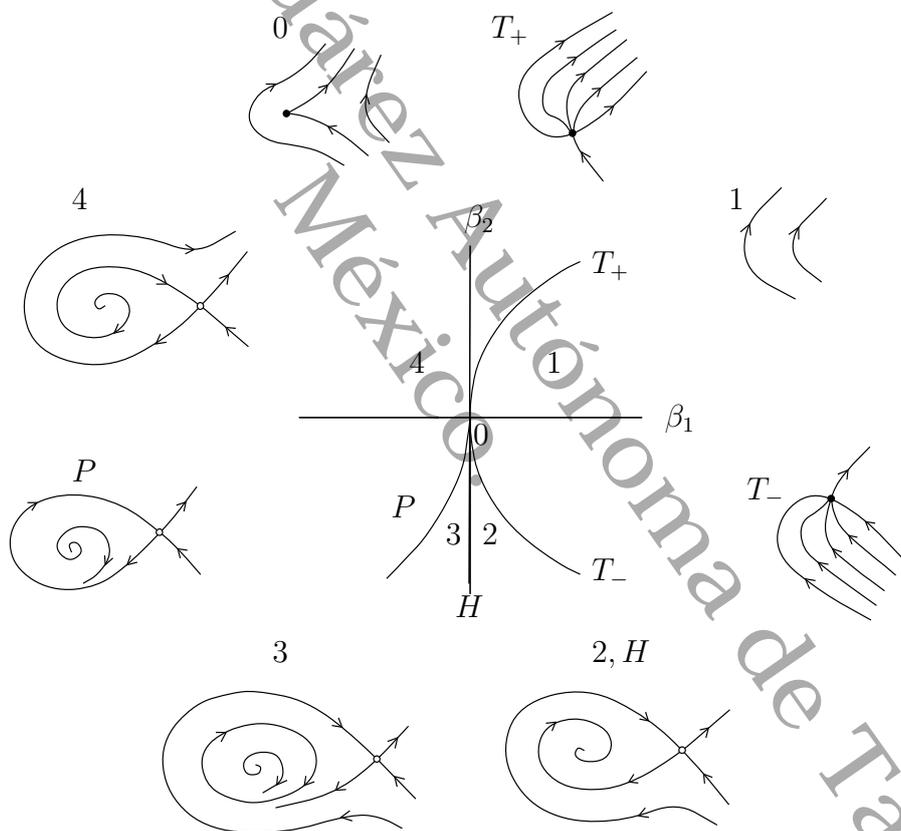


Figura 1.6: Bifurcación Bogdanov-Takens.

Este es el primer caso donde el análisis de un sistema truncado no es trivial. Más específico, los puntos de equilibrio son fáciles de analizar, mientras que el estudio de la existencia de ciclos límites requiere mayor trabajo.

El diagrama de bifurcación del sistema (1.52) es presentado en la figura (1.6). Cualquier punto de equilibrio del sistema está localizado sobre el eje horizontal, $\eta_2 = 0$, y satisface la ecuación

$$\beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 = 0. \quad (1.53)$$

La ecuación (1.53) puede tener dos raíces reales o ninguna. El discriminante es una parábola, cuya ecuación está dada por

$$T = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\}, \quad (1.54)$$

lo cual corresponde a una doble bifurcación, ya que a lo largo de esta curva el sistema (1.52) tiene un punto de equilibrio cuya matriz jacobiana asociada tiene un valor propio cero. Si $\beta \neq 0$, entonces la doble bifurcación es no degenerada y cruza a T de derecha a izquierda, lo cual implica la aparición de dos puntos de equilibrio. Denotando como E_1 el lado izquierdo y E_2 el lado derecho, tenemos

$$E_{1,2} = (\eta_{1,2}, 0) = \left(\frac{-\beta_2^2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right). \quad (1.55)$$

El punto $\beta = 0$ separa la curva T en T_- y T_+ , correspondiente a $\beta_2 < 0$ y $\beta_2 > 0$, respectivamente. Puede verificarse que sobre la curva T_- se colapsa un nodo estable E_1 y una silla E_2 , mientras que sobre T_+ se genera un nodo inestable E_1 y una silla E_2 .

Existe una curva donde no hay bifurcación localizada en $\beta_1 > 0$ que pasa por el origen en el cual el equilibrio E_1 pasa de ser nodo a foco.

El eje vertical $\beta_1 = 0$ es una recta sobre la cual el punto de equilibrio E_1 tiene un par de valores propios donde su suma da cero, es decir, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. La parte superior,

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}, \quad (1.56)$$

corresponde a una bifurcación no degenerada de Andronov-Hopf ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), mientras que la mitad superior del eje hay una recta donde éste corresponde a una silla. La bifurcación de Hopf da lugar a un ciclo límite estable cuando el primer coeficiente de Lyapunov cumple $l_1 < 0$. El ciclo existe cerca de H para $\beta_1 < 0$. El punto de equilibrio E_2 corresponde a una silla para todos los valores de los parámetros en la parte izquierda de la curva T y no se bifurca.

Haciendo un recorrido cerca de la bifurcación Bogdanov-Takens, es decir cuando $\beta = 0$, sobre la región 1 no existe punto de equilibrio y entonces no es posible la existencia de ciclos límites.

Empezando desde la región 1 hacia la región 2 a través de la componente T_- , aparecen dos puntos de equilibrio, una silla y un nodo estable. Entonces el nodo se convierte en un foco y pierde la estabilidad cuando pasa por la bifurcación de Hopf H . Se presenta un ciclo límite para valores cerrados de los parámetros a la izquierda de H . Si continuamos analizando sobre la región 1, no permanecen ciclos límites. Por lo tanto, hay bifurcaciones que rompen los ciclos en algún lugar entre H y T_+ .

Sabemos que solo dos de estas bifurcaciones del sistema son de codimensión 1 en el plano: una bifurcación homoclínica silla y una bifurcación homoclínica silla-nodo. Dado que el

punto de equilibrio que corresponde a un silla-nodo en la doble bifurcación no puede tener una órbita homoclínica, el único posible candidato para una bifurcación global es la aparición de una órbita homoclínica para el punto de equilibrio del tipo silla E_2 . Entonces debería existir al menos una curva de bifurcación originada en $\beta = 0$, donde el sistema (1.52) tenga una bifurcación homoclínica generada por una silla. Cuando trazamos la órbita homoclínica a lo largo de la curva P hacia el punto de Bogdanov-Takens, el lazo se reduce y desaparece.

Proposición 1.2.13. Existe una única curva suave P correspondiente a la bifurcación homoclínica generada por una silla en el sistema (1.52) que se origina en $\beta = 0$ y tiene la siguiente representación

$$P = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + O(\beta_2^2), \beta_2 < 0\}. \quad (1.57)$$

Por lo tanto, para $\|\beta\|$, el sistema (1.52) tiene un único ciclo límite hiperbólico estable para valores de los parámetros dentro de la región acotada por la curva de la bifurcación de Hopf H y la curva de la bifurcación homoclínica P , y no presenta ciclos fuera de esta región.

Debido a la proposición anterior, el ciclo límite surge de la bifurcación de Hopf, el cual no desaparece en la región 3. Cuando nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj el ciclo crece y se acerca a la silla convirtiéndose en una órbita homoclínica. Nótese que la hiperbolicidad del ciclo cerca de la bifurcación homoclínica se sigue del hecho que la cantidad $\sigma_0 < 0$ a lo largo de P . Para completar el recorrido sobre el plano, note que no existen ciclos en la región 4, localizados entre las curvas P y T_+ , para valores de los parámetros sobre esta región existen un nodo y una silla, colisionan y desaparecen sobre T_+ .

También debemos señalar que en $\beta = 0$ el punto de equilibrio con dos valores propios cero tiene exactamente dos órbitas asintóticas, una que tiende al punto de equilibrio para $t \rightarrow +\infty$ y una aproximándose a este cuando $t \rightarrow -\infty$. Esta forma particular es conocida como cúspide.

El caso $s = 1$ es análogo, ya que puede ser reducido a estudiar mediante la sustitución $t \mapsto -t$, $\eta_2 \mapsto -\eta_2$. El retrato del sistema se conserva, pero el ciclo que parece ahora es inestable.

1.3. Estabilidad global

Una de las herramientas que se tiene para demostrar estabilidad global en el plano es el siguiente resultado de Poincaré-Bendixson, el cual puede ser consultado en [P].

1.3.1. Teorema de Poincaré-Bendixson

Un *ciclo separatriz* S de (1.1), es una curva homeomorfa a una circunferencia y consiste en la unión de un número finito de puntos de equilibrio \mathbf{p}_j y separatrices compatiblemente

orientadas Γ_j , tal que $\alpha(\Gamma_j) = \mathbf{p}_j$ y $\omega(\Gamma_j) = \mathbf{p}_{j+1}$ donde $j = 1, \dots, m$, y $\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{p}_1$, véase figura 1.7. Una **gráfica** S de (1.1) es la unión de un número finito de ciclos separatrices compatiblemente orientados, véase figura 1.8.

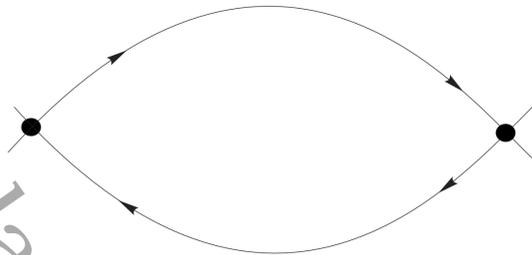


Figura 1.7: Ciclo separatriz.

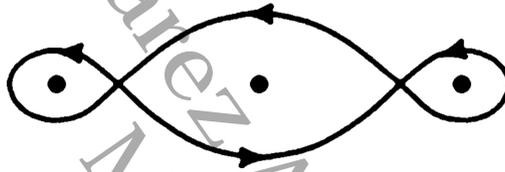


Figura 1.8: Gráfica en un campo vectorial.

Teorema 1.3.1. (Poincaré-Bendixson para sistemas analíticos).

Supóngase que \mathbf{f} es una función analítica en un conjunto abierto E de \mathbb{R}^2 y que Γ es una trayectoria de (1.1), con Γ^+ contenida en un subconjunto compacto F de E . Entonces $\omega(\Gamma)$ es, o un punto de equilibrio, una órbita periódica, o una gráfica de (1.1).

Con la teoría de ecuaciones diferenciales presentada en este capítulo realizaremos el estudio local y global del sistema de ecuaciones (3), el cual es el objetivo de este trabajo. Así mismo mostraremos la existencia de bifurcación en los subsistemas del modelo.

Modelo Depredador-Presa con respuesta funcional tipo Crowley-Martin

En la interacción depredador-presa, el beneficiado es el depredador y el perjudicado es la presa. Sin embargo, los efectos en las poblaciones son más complejos, ya que no siempre mayor depredación será mejor para la población de depredadores ni peor para la población de presas. Así, la depredación afecta el crecimiento tanto del depredador como la presa y establece un vínculo entre ambas.

Los modelos matemáticos han sido una herramienta muy importante para comprender la interacción depredador-presa y en general se distinguen por la función de crecimiento de la presa y la respuesta funcional (la forma en la que el depredador convierte la biomasa capturada). Entre las respuestas funcionales más utilizadas se encuentran las tipo Holling, Beddington-DeAngelis, Crowley-Martin, Hassell-Varley, entre otras, [SG].

En este capítulo presentamos el análisis de la dinámica del modelo (3), restringido al caso de una población presa x , un depredador z y $m = 1$, el cual fue iniciado en [L]. Explícitamente, analizaremos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \left(\frac{b_1 x}{1 + c_1 x + c_2 x z}\right) z = f(x, z), \\ \dot{z} &= \left(\frac{\mu_1 b_1 x}{1 + c_1 x + c_2 x z} - d\right) z = g(x, z), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde x , z denotan la población de presa y depredador, respectivamente. Se supone que las constantes r , K_1 , b_1 , c_1 , c_2 , μ_1 , d son positivas. En este sistema

- r es la tasa intrínseca de crecimiento de la población x .
- K_1 es la capacidad de carga del medio, es decir, es el límite hasta donde puede crecer la población x .

- $\frac{b_1}{c_1}$ es el número máximo de presas que se puede comer un depredador por unidad de tiempo.
- c_2 mide la interferencia de encuentros entre los depredadores.
- μ_1 es el factor de aprovechamiento.
- d es la tasa de mortalidad del depredador.
- $\frac{\mu_1 b_1 x}{1 + c_1 x + c_2 x z}$ denota la respuesta funcional del depredador, más conocida como respuesta funcional tipo Crowley-Martin.

2.1. Estructura de los puntos de equilibrio

En esta sección estudiaremos el número de puntos de equilibrio que presenta el sistema (2.1) cuando se varía el parámetro μ_1 . Para ello, en el capítulo 3 de [L] se mostró que es posible tener uno, dos, tres o ningún punto de equilibrio no trivial del sistema (2.1) en

$$\Omega = \{(x, z) : x > 0, z > 0\}.$$

Para calcular los puntos de equilibrio se despeja z en la segunda ecuación de (2.1) y se sustituye en la primera. Así, la coordenada x de los puntos de equilibrio está dada por las raíces positivas del polinomio,

$$Q(x) = x^3 - K_1 x^2 + K_1 \left(\frac{b\mu_1 - c_1 d}{c_2 r \mu_1} \right) x - \frac{d K_1}{c_2 r \mu_1}. \quad (2.2)$$

Si x_0 es una raíz positiva de $Q(x)$ y $(b\mu_1 - c_1 d)x_0 - d > 0$, entonces los puntos de equilibrio se escriben de la forma

$$\left(x_0, \frac{(b - c_1 d)x_0 - d}{c_2 d x_0} \right).$$

Por el teorema del valor intermedio, $Q(x)$ tiene una raíz positiva a la cual denotaremos, en esta sección, por x_0 . Para analizar el cambio en el número de raíces de Q al variar el parámetro μ_1 fijamos los siguientes parámetros: $c_2 = 2$, $K_1 = 5$, $c_1 = 1$, $r = 2$, $b_1 = \frac{29}{5}$, y $d = 1$. En la figura 2.1 se muestran las raíces positivas del polinomio Q , para diferentes valores de x_0 y variando el parámetro μ_1 . En particular, en la figura 2.1 a) se muestra que para valores pequeños de x_0 se pueden tener una, dos o tres raíces. Mientras que existen valores de x_0 para los cuales el número de raíces se bifurca de uno a tres o simplemente se mantiene, como en la figura 2.1 b).

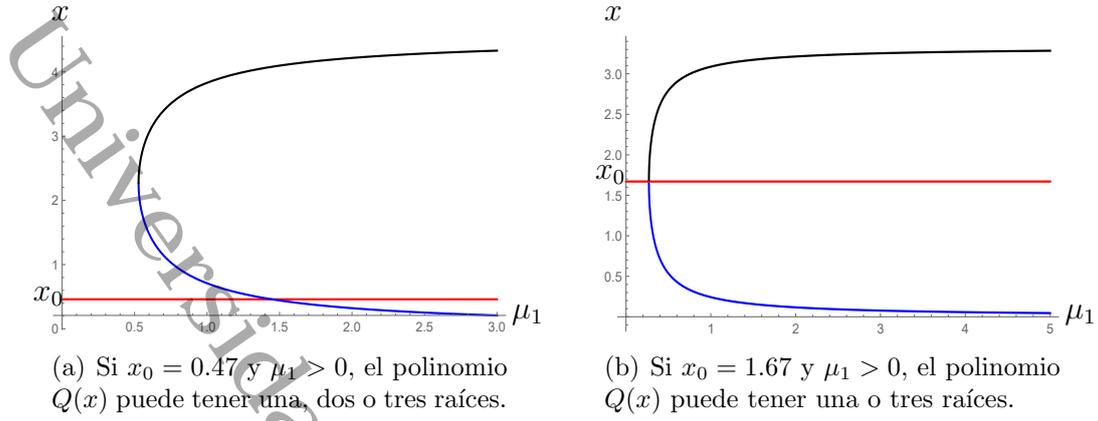


Figura 2.1: Raíces del polinomio $Q(x)$ para diferentes valores de la raíz x_0 .

Para analizar los diferentes dinámicas que presenta el sistema (2.1), primero determinaremos los puntos de equilibrio.

Asignando

$$b_1 = \frac{c_2 r (K_1 - x_0) x_0}{K_1} + \frac{d + c_1 d x_0}{x_0 \mu_1}, \quad (2.3)$$

tenemos que,

$$Q(x) = \frac{1}{x_0} (x - x_0) (-c_2 r x_0 \mu_1 x^2 + x (c_2 K_1 r x_0 \mu_1 - c_2 r x_0^2 \mu_1) - d K_1).$$

Con el fin de simplificar las expresiones de las otras raíces de Q definimos

$$\beta = -4dK_1 + c_2 r (K_1 - x_0)^2 x_0 \mu_1.$$

Observación 2.1.1. Como la coordenada z del punto de equilibrio se escribe como

$$z_0 = \frac{r x_0 (K_1 - x_0) \mu_1}{d K_1},$$

los puntos de equilibrio no triviales de (2.1) se escriben como:

- $P_2 = \left(x_0, \frac{r(K_1 - x_0)x_0\mu_1}{dK_1} \right),$
- $P_3 = \left(\frac{1}{2} \left(K_1 - x_0 - \frac{\sqrt{c_2 r x_0 \mu_1 \beta}}{c_2 r x_0 \mu_1} \right), \frac{2dK_1 - c_2 r x_0^2 (x_0 - K_1) \mu_1 + x_0 \sqrt{c_2 r x_0 \mu_1 \beta}}{2c_2 d K_1 x_0} \right),$
- $P_4 = \left(\frac{1}{2} \left(K_1 - x_0 + \frac{\sqrt{c_2 r x_0 \mu_1 \beta}}{c_2 r x_0 \mu_1} \right), \frac{2dK_1 - c_2 r x_0^2 (x_0 - K_1) \mu_1 - x_0 \sqrt{c_2 r x_0 \mu_1 \beta}}{2c_2 d K_1 x_0} \right).$

Observación 2.1.2. Si $K_1 > x_0$, entonces b_1 es positivo y $P_2 \in \Omega$.

De esta observación tenemos que si $K_1 > x_0$ el sistema (2.1) tiene al menos un punto de equilibrio P_2 en Ω , independientemente del valor de los otros parámetros. Ahora determinaremos las condiciones bajo las cuales los otros puntos P_3 y P_4 están en Ω .

Proposición 2.1.3. *Si $x_0 < K_1$ y $0 < \mu_1 < \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, entonces el sistema (2.1) tiene un único punto de equilibrio en Ω .*

Demostración. Como $x_0 < K_1$, se tiene que $P_2 \in \Omega$. Por otro lado, si

$$0 < \mu_1 < \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0},$$

entonces $\beta < 0$, en consecuencia $P_3, P_4 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, el sistema (2.1) tiene un único punto de equilibrio en Ω . ■

Proposición 2.1.4. *Si $x_0 < K_1$ y $\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, entonces el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en Ω , de los cuales uno tiene multiplicidad dos.*

Demostración. Ya que

$$\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0},$$

se tiene que $\beta = 0$. Así, los puntos de equilibrio se reescriben como

$$P_2 = \left(x_0, \frac{4}{c_2(K_1 - x_0)} \right), \quad P_3 = P_4 = \left(\frac{K_1 - x_0}{2}, \frac{K_1 + x_0}{c_2x_0(K_1 - x_0)} \right).$$

Por otro lado, como $x_0 < K_1$ se tiene que $P_2, P_3 \in \Omega$. Por lo tanto, el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en Ω . ■

Proposición 2.1.5. *Si $x_0 = \frac{K_1}{3}$ y $\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, entonces el sistema (2.1) tiene un punto de equilibrio de multiplicidad tres en Ω .*

Demostración. Bajo la hipótesis de que

$$\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0},$$

se tiene que $\beta = 0$. Por otro lado, como $x_0 = \frac{K_1}{3}$, se tiene que

$$P_2 = P_3 = P_4 = \left(\frac{K_1}{3}, \frac{6}{c_2K_1} \right).$$

Por lo tanto, el sistema (2.1) tiene un punto de equilibrio de multiplicidad tres en Ω . ■

Proposición 2.1.6. Si $2x_0 < K_1$ y $\mu_1 = \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2}$, entonces el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en Ω , de los cuales uno tiene multiplicidad dos.

Demostración. Como

$$\mu_1 = \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2},$$

los puntos de equilibrio se reescriben como

$$P_2 = \left(x_0, \frac{K_1 - x_0}{c_2x_0(K_1 - 2x_0)} \right), \quad P_3 = P_4 = \left(K_1 - 2x_0, \frac{2}{c_2x_0} \right).$$

Por otro lado, como $2x_0 < K_1$ se tiene que $P_2, P_3 \in \Omega$. Por lo tanto, el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en Ω . ■

De igual manera, de la observación 2.1.1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.7. Si alguna de las siguientes condiciones se satisface

- 1) $\frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0} < \mu_1 < \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2}$ y, $2x_0 < K_1 \leq 3x_0$ o $K_1 > 3x_0$,
- 2) $\frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0} < \mu_1 < \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2}$ y $x_0 < K_1 < 2x_0$,
- 3) $\mu_1 > \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2}$ y, $K_1 > 3x_0$ o $K_1 > 2x_0$,

entonces el sistema tiene tres puntos de equilibrio distintos en Ω .

Para determinar la estabilidad local de los puntos de equilibrio obtenidos en las proposiciones 2.1.3-2.1.7, analizaremos la matriz jacobiana asociada al sistema (2.1), la cual asignando el parámetro b_1 como en (2.3), se escribe como

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{11} &= r(K_1 - 2x + 2c_1K_1x - 3c_1x^2 + c_2(2K_1x - 3x^2 - K_1x_0 + x_0^2)z) - \frac{dK_1(1 + c_1x_0)z}{x_0\mu_1}, \\ J_{12} &= -\frac{x(d(K_1 + c_1K_1x_0) + c_2r(x - x_0)x_0(-K_1 + x + x_0)\mu_1)}{x_0\mu_1}, \\ J_{21} &= -\frac{z(dK_1(-1 + c_2x_0z) + c_2rx_0^2(-K_1 + x_0)\mu_1)}{x_0}, \\ J_{22} &= -\frac{dK_1(x_0 + x(-1 + 2c_2x_0z)) + c_2rx_0^2(-K_1 + x_0)\mu_1}{x_0}. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.8. Si $x_0 < K_1 \leq 2x_0$ y $0 < \mu_1 < \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, entonces P_2 es localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $2x_0 < K_1 < \frac{7x_0}{3}$, $\mu_1 < \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, $r > \frac{4dK_1}{c_1K_1^2 + 3K_1(1 - c_1x_0) + x_0(-7 + 2c_1x_0)}$ y $c_1 \geq \frac{1}{k_1 - 2x_0}$, entonces P_2 es inestable.

CASO I) Dado $\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, el sistema (2.1) tiene únicamente dos puntos de equilibrio de coexistencia en el plano (cf. proposición 2.1.4),

- $P_1^* = \left(x_0, \frac{4}{c_2(K_1 - x_0)} \right)$,
- $P_2^* = \left(\frac{K_1 - x_0}{2}, \frac{K_1 + x_0}{c_2x_0(K_1 - x_0)} \right)$.

Proposición 2.1.9. El punto de equilibrio P_2^* del sistema (2.1) es no hiperbólico.

Demostración. Al evaluar P_2^* en la matriz jacobiana se obtiene

$$J(P_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{r(2 + c_1(K_1 - x_0))x_0}{2} & \frac{c_2rx_0(2 + c_1(K_1 - x_0))(K_1 - x_0)^2}{8} \\ \frac{2dK_1(K_1 + x_0)}{c_2(K_1 - x_0)^2x_0} & -\frac{dK_1(K_1 + x_0)}{2x_0} \end{pmatrix},$$

la cual tiene un valor propio 0 y $-\frac{dK_1(K_1 + x_0) + rx_0^2(-2 + c_1(-K_1 + x_0))}{2x_0}$. Por lo tanto, P_2^* es un punto de equilibrio no hiperbólico. ■

Para determinar el tipo de dinámica local que presenta el punto P_1^* evaluamos la matriz jacobiana (2.4) en P_1^* y obtenemos

$$J(P_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{rx_0(c_1K_1^2 + 3K_1(1 - c_1x_0) + x_0(-7 + 2c_1x_0))}{K_1 - x_0} & -\frac{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0(1 + c_1x_0)}{4} \\ \frac{4dK_1}{c_2x_0(K_1 - x_0)} & \frac{4dK_1}{K_1 - x_0} \end{pmatrix}.$$

El determinante δ y la traza τ de esta matriz se pueden escribir como,

$$\delta = \frac{dK_1(K_1 - 3x_0)^2(K_1(1 + c_1x_0) + x_0(3 - c_1x_0))}{(K_1 - x_0)^2},$$

$$\tau = \frac{x_0(-4dK_1 + r(c_1K_1^2 + 3K_1(1 - c_1x_0) + x_0(-7 + 2c_1x_0)))}{K_1 - x_0}.$$

Usando el software Mathematica se puede determinar el signo del determinante y la traza de $J(P_1^*)$ y obtenemos los siguientes resultados. Con la finalidad de establecer las condiciones para la estabilidad de P_1^* , definimos

$$\bar{A} = \frac{4dK_1}{c_1K_1^2 + 3K_1(1 - c_1x_0) + x_0(-7 + 2c_1x_0)}.$$

Proposición 2.1.10. P_1^* es localmente asintóticamente estable, si alguna de las siguientes condiciones se satisface

- 1) $x_0 < K_1 \leq 2x_0$,
- 2) $2x_0 < K_1 < \frac{7x_0}{3}$ y $0 < c_1 \leq \frac{7x_0 - 3K_1}{(K_1 - 2x_0)(K_1 - x_0)}$,
- 3) $2x_0 < K_1 < \frac{7x_0}{3}$, $c_1 > \frac{7x_0 - 3K_1}{(K_1 - 2x_0)(K_1 - x_0)}$ y $0 < r < \bar{A}$,
- 4) $\frac{7x_0}{3} \leq K_1 < 3x_0$ y $0 < r < \bar{A}$,
- 5) $K_1 > 3x_0$ y $0 < r < \bar{A}$.

Proposición 2.1.11. P_1^* es inestable, si alguna de las siguientes condiciones se satisface

- 1) $2x_0 < K_1 < \frac{7x_0}{3}$, $c_1 > \frac{7x_0 - 3K_1}{(K_1 - 2x_0)(K_1 - x_0)}$ y $r > \bar{A}$,
- 2) $\frac{7x_0}{3} \leq K_1 < 3x_0$ y $r > \bar{A}$,
- 3) $K_1 > 3x_0$ y $r > \bar{A}$.

CASO II) Dado $x_0 = \frac{K_1}{3}$, $\mu_1 = \frac{4dK_1}{c_2r(K_1 - x_0)^2x_0}$, el sistema (2.1) tiene un único punto de equilibrio de coexistencia en el plano (cf. proposición 2.1.5),

$$\blacksquare P_1^* = \left(\frac{K_1}{3}, \frac{6}{c_2K_1} \right).$$

Proposición 2.1.12. El punto de equilibrio P_1^* del sistema (2.1) es no hiperbólico.

Demostración. Al evaluar P_1^* en la matriz jacobiana se obtiene

$$J(P_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{K_1r(3 + c_1K_1)}{9} & -\frac{c_2rK_1^3(3 + c_1K_1)}{81} \\ \frac{18d}{c_2K_1} & -2dK_1 \end{pmatrix},$$

la cual tiene un valor propio 0 y $-\frac{dK_1(K_1 + x_0) + rx_0^2(-2 + c_1(-K_1 + x_0))}{2x_0}$. Por lo tanto, P_1^* es un punto de equilibrio no hiperbólico. ■

CASO III) Dado $\mu_1 = \frac{dK_1}{c_2r(K_1 - 2x_0)x_0^2}$, el sistema (2.1) tiene únicamente dos puntos de equilibrio de coexistencia en el plano (cf. proposición 2.1.6),

$$\begin{aligned} \blacksquare P_1^* &= \left(x_0, \frac{K_1 - x_0}{c_2 x_0 (K_1 - 2x_0)} \right), \\ \blacksquare P_2^* &= \left(K_1 - 2x_0, \frac{2}{c_2 x_0} \right). \end{aligned}$$

Proposición 2.1.13. *El punto de equilibrio P_1^* , es un equilibrio no hiperbólico para el sistema (2.1).*

Demostración. Al evaluar P_1^* en la matriz jacobiana se obtiene

$$J(P_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{r(K_1 - 2x_0)^2(1 + c_1 x_0)}{K_1(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0))} & \frac{c_2 r(K_1 - 2x_0)^2 x_0^2 (1 + c_1 x_0)}{K_1(x_0(3 + 2c_1 x_0) - K_1(2 + c_1 x_0))} \\ \frac{d(x_0 - K_1)}{c_2 x_0^2(x_0(3 + 2c_1 x_0) - K_1(2 + c_1 x_0))} & \frac{d(x_0 - K_1)}{K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0)} \end{pmatrix},$$

la cual tiene un valor propio 0 y $\frac{dK_1(x_0 - K_1) + r(K_1 - 2x_0)^2(1 + c_1 x_0)}{K_1(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0))}$. Por lo tanto, P_1^* es un punto de equilibrio no hiperbólico. ■

Para determinar el tipo de dinámica local que presenta el punto P_2^* evaluamos la matriz jacobiana (2.4) en P_2^* y obtenemos

$$J(P_2^*) = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{r(2x_0 - K_1)(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(7 + 4c_1 x_0))}{K_1 K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0)}, \\ B_0 &= \frac{c_2 r(1 + c_1(K_1 - 2x_0))(K_1 + 2x_0)x_0^3}{K_1 K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0)}, \\ C_0 &= \frac{2d}{c_2(K_1 - 2x_0)(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0))}, \\ D_0 &= \frac{2d(2x_0 - K_1)}{K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0)}. \end{aligned}$$

El determinante δ y la traza τ de esta matriz se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2dr(K_1 - 3x_0)^3}{K_1(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0))}, \\ \tau &= \frac{(2x_0 - K_1)(2dK_1 + K_1 r(2 + c_1 x_0) - r x_0(7 + 4c_1 x_0))}{K_1(K_1(2 + c_1 x_0) - x_0(3 + 2c_1 x_0))}. \end{aligned}$$

Usando el software Mathematica se puede determinar el signo del determinante y la traza de $J(P_2^*)$ y obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.1.14. P_2^* es localmente asintóticamente estable, si alguna de las siguientes condiciones se satisface

- 1) $2x_0 < K_1 < 3x_0, r < \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2},$
- 2) $3x_0 < K_1 \leq \frac{7x_0}{2}, r < \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2},$
- 3) $\frac{7x_0}{2} < K_1 < 4x_0, c_1 > \frac{7x_0 - 2K_1}{x_0(K_1 - 4x_0)}, r < \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2},$
- 4) $\frac{7x_0}{2} < K_1 < 4x_0, c_1 \leq \frac{7x_0 - 2K_1}{x_0(K_1 - 4x_0)},$
- 5) $K_1 \geq 4x_0.$

Proposición 2.1.15. P_2^* es inestable, si alguna de las siguientes condiciones se satisface,

- 1) $2x_0 < K_1 < 3x_0, r > \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2},$
- 2) $3x_0 < K_1 \leq \frac{7x_0}{2}, r > \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2},$
- 3) $\frac{7x_0}{2} < K_1 < 4x_0, c_1 > \frac{7x_0 - 2K_1}{x_0(K_1 - 4x_0)}, r > \frac{2dK_1}{7x_0 - 2K_1 - c_1K_1x_0 - 4c_1x_0^2}.$

De la proposición 2.1.7, se tiene que el sistema (2.1) puede tener tres puntos de equilibrio en Ω . En particular, si fijamos los siguientes parámetros

$$b_1 = \frac{c_2r(K_1 - x_0)x_0}{K_1} + \frac{d(1 + c_1x_0)}{x_0\mu_1},$$

$$d = \frac{c_2\mu_1rx_1x_0(K_1 - x_1 - x_0)}{K_1},$$

$$K_1 = x_2 + x_0 + x_1,$$

los puntos de equilibrio se escriben de la forma

- $P_1^* = \left(x_0, \frac{x_1 + x_3}{c_2x_1x_3} \right),$
- $P_2^* = \left(x_1, \frac{x_0 + x_3}{c_2x_0x_3} \right),$
- $P_3^* = \left(x_2, \frac{x_0 + x_1}{c_2x_1x_0} \right).$

El análisis de estabilidad de estos puntos lo presentamos en la siguiente sección.

2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio: caso tres CEP's

En esta sección analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.1) cuando éste presenta tres puntos de equilibrio de coexistencia. En particular, en el capítulo 3 de [L] se muestran los siguientes resultados.

Proposición 2.2.1. (cf. Prop. 2.1.5 en [L]). *Todas las soluciones del sistema (2.1) que se encuentran en Ω están uniformemente acotadas.*

Proposición 2.2.2. (cf. Prop. 3.1.1 en [L]).

Supongamos que $b_1\mu_1 > c_1d$.

1) *El sistema (2.1) no tiene puntos de equilibrio en Ω si y solo si $d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d) \geq 0$.*

2) *El sistema (2.1) tiene hasta 3 puntos de equilibrio en Ω si y solo si $d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d) < 0$.*

Demostración. Sea $x_0^* = \frac{d}{b_1\mu_1 - c_1d}$. De (2.1) tenemos que si x_0 es una raíz positiva de $Q(x)$, es necesario que $x_0 > x_0^*$ para que la coordenada z sea positiva y tener un punto de equilibrio del sistema (2.1). Además, obsérvese que el coeficiente de x^3 es positivo,

$$Q(0) < 0 \text{ y } Q(x_0^*) = \frac{d^2(d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d))}{(b_1\mu_1 - c_1d)^3}.$$

Por lo que si $d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d) > 0$, entonces $Q(x_0^*) > 0$ y en consecuencia el sistema (2.1) puede tener hasta dos puntos de equilibrio en Ω . Sin embargo, para que hayan dos puntos de equilibrio en Ω , es necesario que la máxima raíz de la derivada de $Q(x)$ sea mayor que x_0^* y que $Q(x)$ evaluado en esta raíz sea menor o igual a cero, lo cual es incompatible con $d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d) \geq 0$. Por lo tanto, bajo esta desigualdad no hay puntos de equilibrio. Por otro lado, si $d - K_1(b_1\mu_1 - c_1d) < 0$, entonces $Q(x_0^*) < 0$ y en consecuencia al menos una raíz de $Q(x)$ es mayor que x_0^* y el sistema (2.1) tiene uno, dos o tres puntos de equilibrio en Ω . ■

Con el fin de simplificar las expresiones de los puntos de equilibrio de (2.1) se asignó

$$R^2 = 4(9c_2r + 3c_1c_2K_1r)(2c_2K_1^2r - 9b_1K_1) - 6c_2K_1r - 2c_1c_2K_1^2r,$$

$$b_1 = \frac{4c_2^2K_1^2r^2(c_1^2K_1^2 + 12c_1K_1 + 27) - R^2}{108c_2K_1r(3 + c_1K_1)} \text{ y } d = \frac{(4c_2^2K_1^2(3 + c_1K_1)^2r^2 - R^2)\mu_1}{108c_2r(3 + c_1K_1)^2}.$$

Note que si $0 \leq R < 2c_2K_1(3 + c_1K_1)r$, entonces b_1 y d son positivos, y el sistema (2.1) tiene los siguientes tres puntos de equilibrio.

$$\begin{aligned} \blacksquare P_2 &= \left(\frac{K_1}{3}, \frac{24c_2K_1(3+c_1K_1)^2r^2}{4c_2^2K_1^2r^2(3+c_1K_1)^2 - R^2} \right), \\ \blacksquare P_3 &= \left(\frac{R+2c_2K_1r(3+c_1K_1)}{6c_2(3+c_1K_1)r}, \frac{3(4c_2K_1r(3+c_1K_1)-R)}{c_2K_1(2c_2K_1r(3+c_1K_1)-R)} \right), \\ \blacksquare P_4 &= \left(\frac{2c_2K_1r(3+c_1K_1)-R}{6c_2(3+c_1K_1)r}, \frac{3(4c_2K_1r(3+c_1K_1)+R)}{c_2K_1(2c_2K_1r(3+c_1K_1)+R)} \right). \end{aligned}$$

El punto de equilibrio P_2 siempre es silla (cf. proposición 2.3.1 en [L]). Para la dinámica local de los puntos de equilibrio P_3 y P_4 , definimos

$$\hat{\mu}_1 = \frac{12(3+c_1K_1)^2r(R^2-3c_2K_1(4+c_1K_1)Rr+2c_2^2K_1^2(3+c_1K_1)^2r^2)}{K_1(R-4c_2K_1(3+c_1K_1)r)(R^2-(2c_2K_1(3+c_1K_1)r)^2)}$$

y

$$\hat{\mu}_2 = \frac{12(3+c_1K_1)^2r(R^2+3c_2K_1(4+c_1K_1)Rr+2c_2^2K_1^2(3+c_1K_1)^2r^2)}{K_1(R+4c_2K_1(3+c_1K_1)r)((2c_2K_1(3+c_1K_1)r)^2-R^2)}.$$

Observación 2.2.3. (Obs. 3.2.3 en [L]).

Si $0 \leq R < 2c_2K_1(3+c_1K_1)r$, entonces $\hat{\mu}_2 > \hat{\mu}_1$.

Con la finalidad de establecer las condiciones para la estabilidad de P_3 , definimos

$$\hat{A}_1 = \frac{\left(12+3c_1K_1+\sqrt{72+c_1K_1(24+c_1K_1)}\right)R}{4K_1(3+c_1K_1)^2r}.$$

Proposición 2.2.4. (Prop. 3.2.4 en [L]).

Si $c_2 \leq \hat{A}_1$, ó $c_2 > \hat{A}_1$ y $\mu_1 > \hat{\mu}_1$, entonces P_3 es localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $c_2 > \hat{A}_1$ y $\mu_1 < \hat{\mu}_1$, entonces P_3 es inestable.

Proposición 2.2.5. (Prop. 3.2.6 en [L]).

Si $\mu_1 > \hat{\mu}_2$, entonces P_4 es localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $\mu_1 < \hat{\mu}_2$, entonces P_4 es inestable.

Ya que los puntos de equilibrio P_3 y P_4 presentan un cambio en su estabilidad, fue posible determinar condiciones que garantizan la existencia de órbitas periódicas generadas mediante una bifurcación de Hopf con respecto al parámetro μ_1 como se muestra en los siguientes teoremas

Teorema 2.2.6. (Teo. 3.4.4 en [L]). Si $c_2 > \hat{A}_1$, entonces el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf subcrítica en el punto de equilibrio P_3 , con respecto al parámetro μ_1 , en $\mu_1 = \hat{\mu}_1$.

Teorema 2.2.7. (Teo. 3.4.10 en [L]). El sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf supercrítica en el punto de equilibrio P_4 con respecto al parámetro μ_1 , en $\mu_1 = \hat{\mu}_2$.

Como consecuencia de los resultados que se presentan en [L] se obtiene lo siguiente:

Lema 2.2.8. *Si $c_2 > \hat{A}_1$ y $\mu_1 < \hat{\mu}_1$, entonces el omega límite de casi cualquier órbita del sistema (2.1), en el primer cuadrante, es un ciclo límite estable.*

Demostración. Como $\mu_1 < \hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2$, de las proposiciones 2.2.4 y 2.2.5 se tiene que P_3 y P_4 son inestables. Además, P_0, P_1 y P_2 son puntos silla. Por la proposición 2.2.1, las soluciones del sistema (2.1) son acotadas y por el teorema de Poincaré-Bendixson, concluimos que cualquier órbita del sistema (2.1) en el primer cuadrante que no sea punto de equilibrio, tiene como omega límite a una órbita periódica. ■

Teorema 2.2.9. *Si $c_2 > \hat{A}_1$, entonces existe $\sigma \in (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ tal que para toda $\mu_1 < \sigma$ el sistema (2.1) tiene un ciclo límite estable.*

Demostración. Por el lema 2.2.8 el sistema (2.1) tiene un ciclo límite estable cuando $\mu_1 < \hat{\mu}_1$. Por otro lado, si $\mu_1 > \hat{\mu}_1$ entonces por la proposición 2.2.6 el sistema (2.1) tiene un ciclo límite (de amplitud pequeña) inestable alrededor de P_3 , el cual desaparece en $\mu_1 = \sigma$. Además, si $\mu_1 < \hat{\mu}_2$, P_4 es inestable y por el teorema de Poincaré-Bendixson concluimos que el sistema (2.1) tiene un ciclo límite estable. ■

En la figura 2.2 se muestra un resumen de la estabilidad local (línea continua) de los puntos de equilibrio P_3 y P_4 , así como de las órbitas periódicas estables (curva continua) que aparecen alrededor de P_3 o P_4 en el sistema (2.1), con respecto al parámetro μ_1 .

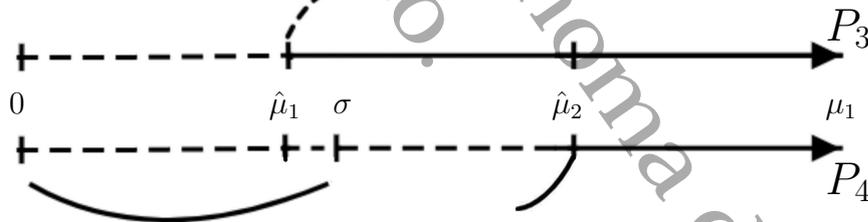


Figura 2.2: Región de estabilidad (línea continua) y existencia de órbitas periódicas estables (curva continua) de los puntos de equilibrio P_3 y P_4 , respectivamente.

2.3. Estabilidad de los puntos de equilibrio: caso dos CEP's

De la sección 2.2 tenemos que el sistema (2.1) puede presentar tres puntos de equilibrio. Sin embargo, para el caso $m = 1$ será posible determinar otros puntos de equilibrio. En particular, con la ayuda de la fórmula general para las raíces de una ecuación cúbica de

Cardano-Ferrari en términos del discriminante, determinamos el caso en el que el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en el primer cuadrante.

Se tiene que el discriminante de $Q(x)$ dado en (2.2), es cero cuando se satisface que

$$K_1 = 3d \left(\frac{1}{b_1\mu_1 - c_1d - 2R_1} + \frac{2}{b_1\mu_1 - c_1d + R_1} \right) = \tilde{K}_1, \quad (2.5)$$

y por tanto, bajo esta condición $Q(x)$ tienen tres raíces positivas, donde una de ellas es de multiplicidad dos. Con el fin de eliminar las raíces cuadradas que aparecen al calcular los ceros de $Q(x)$ y obtener expresiones simplificadas de los puntos de equilibrio de (2.1), definimos

$$R_1^2 = c_1^2d^2 - 2b_1c_1d\mu_1 - 3c_2dr\mu_1 + b_1^2\mu_1^2, \quad (2.6)$$

donde se obtiene que

$$r = \frac{c_1^2d^2 - R_1^2 - 2b_1c_1d\mu_1 + b_1^2\mu_1^2}{3c_2d\mu_1}. \quad (2.7)$$

Dado que para el análisis del sistema se consideran parámetros positivos y soluciones dentro del primer cuadrante, se tiene la siguiente observación.

Observación 2.3.1. *Si $b_1\mu_1 > c_1d$ y además, $R_1 < 0$ y $c_1d - b_1\mu_1 < R_1$, ó $R_1 > 0$ y $2R_1 < b_1\mu_1 - c_1d$, entonces r y K_1 son positivos, los puntos de equilibrio no triviales de (2.1) están dentro del primer cuadrante y se escriben como:*

- $P_2 = \left(\frac{3d}{b_1\mu_1 - 2R_1 - c_1d}, \frac{2(b_1\mu_1 + R_1 - c_1d)}{3c_2d} \right)$,
- $P_3 = \left(\frac{3d}{R_1 + b_1\mu_1 - c_1d}, \frac{2(b_1\mu_1 - c_1d) - R_1}{3c_2d} \right)$.

Con la finalidad de analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio y las bifurcaciones que presenta el sistema al mover el parámetro c_2 definimos los siguientes valores de éste.

$$\begin{aligned} \hat{c}_2 &= \frac{b_1\mu_1(c_1d - 7R_1) + b_1^2\mu_1^2 - 2(c_1d + 2R_1)^2}{18d^2\mu_1}, \\ \tilde{c}_2 &= -\frac{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3.1. Dinámica local del CEP hiperbólico

Reescribiendo la matriz jacobiana correspondiente al sistema (2.1) con las asignaciones de r y K_1 , tenemos que

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned}
J_{11} &= 4c_1^5 d^3 x^3 - 27b_1 c_2 d^2 z (1 + c_2 x z) \mu_1 - 9d(1 + c_2 x z)(1 + 3c_2 x z)(R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1) \\
&\quad + 2x(1 + c_2 x z)(1 + 2c_2 x z)(2R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^2 + c_1^4 d^2 x^2 (d(33 + 8c_2 x z) \\
&\quad - 12b_1 x \mu_1) + 2c_1^3 d x (d^2(19 + 2c_2 x z(15 + c_2 x z)) - 12b_1 d x (3 + c_2 x) \mu_1 - 6x^2(R_1 \\
&\quad - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)) + c_1^2 (9d^3(1 + c_2 x z)(1 + 3c_2 x z) - 6b_1 d^2 x (13 + c_2 x z(21 \\
&\quad + 2c_2 x z)) \mu_1) + c_1^2 (4x^3(2R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^2 - 3dx^2(15 + 8c_2 x z)(R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 \\
&\quad + b_1 \mu_1)) + 2c_1(-9b_1 d^2(1 + c_2 x z(7 + 3c_2 x z)) \mu_1 - 3dx(7 + 2c_2 x z(6 + c_2 x z))(R_1 \\
&\quad - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)) + 2c_1 x^2(3 + 4c_2 x z)(2R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^2, \\
J_{12} &= c_2 z(2x(c_1 d - R_1)(9d(c_1 d + R_1) + x(c_1 d - R_1)(c_1 d + 2R_1))(1 + c_1 x + c_2 x z)) \\
&\quad - 3b_1 c_2 x(-2R_1^2 x^2(1 + c_1 x + c_2 x z) + d^2(9 + c_1 x(21 + 2c_1 x(7 + c_1 x)) + 2c_2 x(3 \\
&\quad + c_1 x)^2 z)) \mu_1 + 6c_2 x^2 d(3 + c_1 x)(1 + c_1 x + c_2 x z) \mu_1^2 - 2c_2 b_1^3 x^3(1 + c_1 x + c_2 x z) \mu_1^3, \\
J_{21} &= 27c_2 d^2 z \mu_1 (b_1 \mu_1 - 2(c_1 + c_2 z)(d + c_1 d x + c_2 d x z - b_1 x \mu_1)), \\
J_{22} &= 27c_2 d^2 \mu_1 (-d(1 + c_1 x + c_2 x z)(1 + c_1 x + 3c_2 x z) + b_1 x(1 + c_1 x + 2c_2 x z) \mu_1).
\end{aligned}$$

Por la observación 2.3.1 tenemos que la condición $b_1 \mu_1 > c_1 d$, junto con

$$R_1 < 0 \text{ y } c_1 d - b_1 \mu_1 < R_1 \quad (2.10)$$

o

$$R_1 > 0 \text{ y } 2R_1 < b_1 \mu_1 - c_1 d \quad (2.11)$$

implican la existencia de los puntos de equilibrio P_2 y P_3 . Por lo que en las siguientes proposiciones, con respecto a estos puntos de equilibrio, supondremos que (2.10) ó (2.11) son válidas.

Para determinar el tipo de dinámica local que presenta el punto P_2 , evaluamos la matriz jacobiana (2.9) en P_2 y obtenemos

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

donde,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{9b_1 d \mu_1 (2c_1^3 d^3 + 3c_1^2 d^2 (2R_1 - b_1 \mu_1) - (8R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^2)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^2} \\
B_1 &= \frac{81b_1 c_2 d^3 \mu_1 (2R_1 - b_1 \mu_1 - 2c_1 d)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^2}, \\
C_1 &= 18b_1 d \mu_1^2 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d), \\
D_1 &= \frac{162b_1 c_2 d^3 \mu_1^2 (c_1 d - R_1 - b_1 \mu_1)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^2}.
\end{aligned}$$

El determinante δ y la traza τ de esta matriz se pueden escribir como

$$\delta = \frac{39 \ 366 \ b_1^3 c_2 d^4 R_1^2 \mu_1^4 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^4},$$

$$\tau = \frac{9b_1 d \mu_1 (b_1 \mu_1 - c_1 d + R_1) (-2(c_1 d + 2R_1)^2 + (b_1 c_1 d - 18c_2 d^2 - 7b_1 R_1) \mu_1 + b_1^2 \mu_1^2)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^2}.$$

Proposición 2.3.2. Si $P_2 \in \Omega$, entonces $\delta > 0$.

Demostración. Como $R_1 \neq 0$, se tiene que si $R_1 > 0$, entonces $\delta > 0$. Por otro lado, de la observación (2.10), se tiene que

$$R_1 > c_1 d - b_1 \mu_1.$$

Por lo tanto,

$$\delta = \frac{39 \ 366 \ b_1^3 c_2 d^4 R_1^2 \mu_1^4 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^4} > 0$$

■

De la proposición 2.3.2, tenemos que cuando $P_2 \in \Omega$, δ es positivo y en consecuencia P_2 no puede ser silla. Usando el software Mathematica se puede determinar el signo de la traza τ de $J(P_2)$ y conocer la estabilidad local de P_2 .

Proposición 2.3.3. Si se satisface

1. $3\sqrt{b_1 \mu_1 (16c_1 d + 9b_1 \mu_1)} \leq 8c_1 d + 16R_1 + 7b_1 \mu_1$ y $b_1 \mu_1 > c_1 d + 2R_1$, ó
2. $3\sqrt{b_1 \mu_1 (16c_1 d + 9b_1 \mu_1)} > 8c_1 d + 16R_1 + 7b_1 \mu_1$, $c_2 > \hat{c}_2$ y $R_1 > 0$, ó
3. $c_2 > \hat{c}_2$ y $c_1 d - b_1 \mu_1 < R_1 < 0$.

entonces P_2 es localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si se satisface

1. $3\sqrt{b_1 \mu_1 (16c_1 d + 9b_1 \mu_1)} > 8c_1 d + 16R_1 + 7b_1 \mu_1$, $c_2 < \hat{c}_2$ y $R_1 > 0$, ó
2. $c_2 < \hat{c}_2$ y $c_1 d - b_1 \mu_1 < R_1 < 0$.

entonces P_2 es inestable.

2.3.2. Ciclo límite alrededor del CEP hiperbólico

Para mostrar que el sistema (2.1) presenta órbitas periódicas en Ω , se determinarán condiciones sobre el espacio de parámetros para los cuales el sistema presenta una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio P_2 , utilizando el teorema de Kuznetsov 1.2.10.

Observación 2.3.4. *Suponer que $b_1\mu_1 > c_1d$ y además,*

- a) *Si $R_1 > 0$ y $3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1$, entonces $0 < \hat{c}_2 < \tilde{c}_2$.*
 b) *Si $R_1 < 0$ y $c_1d - b_1\mu_1 < R_1$, entonces $0 < \tilde{c}_2 < \hat{c}_2$.*

Por la observación 2.3.1 y 2.3.4 tenemos que la condición $b_1\mu_1 > c_1d$, junto con a) o b) implican la existencia de los puntos equilibrio P_2 y P_3 , así como la positividad de los parámetros del sistema. Por lo que, en los siguientes resultados de esta sección, supondremos que las hipótesis de la observación 2.3.4 son válidas.

Lema 2.3.5. *Si $c_2 = \hat{c}_2$, entonces la parte lineal del sistema (2.1) evaluada en P_2 es un centro.*

Demostración. La traza τ de $J(P_2)$ es cero si c_2 es igual a \hat{c}_2 . Por lo que el polinomio característico de $J(P_2)$ es

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2187 b_1^3 d^2 R_1^2 \mu_1^3 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d) (-2(c_1 d + 2R_1)^2 + b_1(c_1 d - 7R_1)\mu_1 + b_1^2 \mu_1^2)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^4}.$$

Supongamos que se satisface la condición dada en a), así

$$3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1,$$

$$9b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1) > 64c_1^2d^2 + 256c_1dR_1 + 256R_1^2 + 112b_1c_1d\mu_1 + 224b_1R_1\mu_1 + 49b_1^2\mu_1, \\ -2(c_1d + 2R_1)^2 + b_1(c_1d - 7R_1)\mu_1 + b_1^2\mu_1^2 > 0,$$

entonces

$$\frac{2187 b_1^3 d^2 R_1^2 \mu_1^3 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d) (-2(c_1 d + 2R_1)^2 + b_1(c_1 d - 7R_1)\mu_1 + b_1^2 \mu_1^2)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^4} > 0.$$

Por lo tanto el sistema (2.1) tiene valores propios de la forma

$$\pm i \sqrt{\frac{2187 b_1^3 d^2 R_1^2 \mu_1^3 (R_1 + b_1 \mu_1 - c_1 d) (-2(c_1 d + 2R_1)^2 + b_1(c_1 d - 7R_1)\mu_1 + b_1^2 \mu_1^2)}{(c_1 d + 2R_1 - b_1 \mu_1)^4}}.$$

Lema 2.3.6. Si $R_1 > 0$ y $3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1$ ó $R_1 < 0$ y $c_1d - b_1\mu_1 < R_1$, entonces la derivada con respecto a c_2 de la parte real de los valores propios de $J(P_2)$ evaluada en \hat{c}_2 , es distinta de cero.

Demostración. Notemos que la parte real de los valores propios de $J(P_3)$ es $\frac{\tau}{2}$, donde

$$\frac{\tau}{2} = \frac{9b_1d\mu_1(b_1\mu_1 - c_1d + R_1)(-2(c_1d + 2R_1)^2 + (b_1c_1d - 18c_2d^2 - 7b_1R_1)\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)}{2(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}.$$

Derivando con respecto a c_2 y evaluando en \hat{c}_2 , se obtiene

$$-\frac{81b_1d^3\mu_1^2(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)}{(b_1\mu_1 - c_1d - 2R_1)^2},$$

la cual bajo las hipótesis resulta ser negativa. ■

Teorema 2.3.7. Si $R_1 > 0$ y $3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1$, entonces el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf subcrítica en el punto de equilibrio P_2 . Por otro lado, si $R_1 < 0$ y $c_1d - b_1\mu_1 < R_1$, entonces se presenta una bifurcación de Hopf supercrítica con respecto al parámetro c_2 , en $c_2 = \hat{c}_2$.

Demostración. Ya que c_2 satisface la condición del lema 2.3.5, $J(P_2)$ tiene valores propios complejos con parte real cero. Para determinar el tipo de bifurcación que se presenta calcularemos el primer coeficiente de Lyapunov utilizando el teorema de Kuznetsov [K]. Para ello trasladamos el punto de equilibrio al origen y calculamos la expansión de Taylor de orden 3 del campo vectorial. Usando el software Mathematica, calculamos los términos de la expansión y los vectores propios requeridos en la fórmula del teorema de Kuznetsov obteniendo el primer coeficiente de Lyapunov

$$\ell_1 = \frac{AB}{CD},$$

donde

$$\begin{aligned} A &= (c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^4, \\ B &= 2(2c_1d + R_1)^2(4c_1^2d^2 + 7c_1dR_1 + 7R_1^2) + b_1(-20c_1^3d^3 - 75c_1^2d^2R_1 + 30c_1dR_1^2 \\ &\quad + 11R_1^3)\mu_1 - 6b_1^2(7c_1^2d^2 + 4c_1dR_1 + R_1^2)\mu_1^2 + b_1^3(16c_1d + 11R_1)\mu_1^3 + 14b_1^4\mu_1^4, \\ C &= \sqrt{\frac{b_1^3d^2R_1^2\mu_1^3(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)(-2(c_1d + 2R_1)^2 + b_1(c_1d - 7R_1)\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)}{(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^4}}, \\ D &= 324\sqrt{3}b_1^2d^3R_1^3\mu_1^2(b_1^3(1 + 4\mu_1^2) - 4(c_1d - R_1)(c_1d + 2R_1)^2(1 + \mu_1^2)) \\ &\quad + 324\sqrt{3}b_1^2d^3R_1^3\mu_1^2(6b_1\mu_1(R_1(-4c_1d + R_1) + 2c_1d(c_1d + 2R_1)\mu_1^2)) \\ &\quad + 324\sqrt{3}b_1^2d^3R_1^3\mu_1^2(-3b_1^2\mu_1^2(-c_1d + 3R_1 + 4(c_1d + R_1)\mu_1^2)). \end{aligned}$$

Dado que se cumplen a) y b), empleando Mathematica se determina que si $R_1 > 0$ y $3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1$, entonces $A > 0, B > 0, C > 0$ y $D > 0$. En consecuencia, $\ell_1 > 0$. Ya que se satisfacen las hipótesis del lema 2.3.6, se concluye que el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf subcrítica.

Por otro lado, si se satisface que $R_1 < 0$ y $c_1d - b_1\mu_1 < R_1$, se tiene que $A > 0, B > 0, C > 0$ y $D < 0$, es decir, $\ell_1 < 0$. Por lo tanto, el sistema (2.1) presenta una bifurcación de Hopf supercrítica. ■

2.3.3. Dinámica local del CEP no hiperbólico

En esta sección se muestra la dinámica local del punto de equilibrio P_3 del sistema (2.1). En particular, mostraremos que $J(P_3)$ tiene un valor propio cero y analizaremos las bifurcaciones que presenta.

De igual manera que en P_2 , para determinar el tipo de dinámica local que presenta el punto P_3 , calculamos el determinante δ y la traza τ para $J(P_3)$.

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

donde,

$$\begin{aligned} A_2 &= 9b_1d\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1), \\ B_2 &= -\frac{81b_1c_2d^3\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{(b_1\mu_1 - c_1d + R_1)^2}, \\ C_2 &= -9b_1d\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1), \\ D_2 &= \frac{81b_1c_2d^3\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{(b_1\mu_1 + R_1 - c_1d)^2}. \end{aligned}$$

El determinante δ y la traza τ de esta matriz se pueden escribir como,

$$\delta = 0,$$

$$\tau = 9b_1d\mu_1 \left(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1 + \frac{9c_2d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{(b_1\mu_1 + R_1 - c_1d)^2} \right).$$

Proposición 2.3.8. *Si $P_3 \in \Omega$ y además $c_2 > \tilde{c}_2$, entonces $J(P_3)$ tiene un valor propio cero y otro negativo.*

Demostración. El polinomio característico asociado a $J(P_3)$ dada en (2.12), es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \left(\frac{9b_1d\mu_1((R_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1) + 9c_2d^2(2c_1d + R_1)\mu_1)}{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2} \right) - \lambda \left(\frac{9b_1d\mu_1(3b_1(R_1^2 - c_1^2d^2)\mu_1 + 3b_1(b_1R_1 - 6c_2d^2)\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3)}{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2} \right),$$

el cual tiene como raíces a $\lambda_1 = 0$ y

$$\lambda_2 = \frac{9b_1d\mu_1((R_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1) + 9c_2d^2(2c_1d + R_1)\mu_1)}{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2} + \frac{9b_1d\mu_1(3b_1(R_1^2 - c_1^2d^2)\mu_1 + 3b_1(b_1R_1 - 6c_2d^2)\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3)}{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2}.$$

Si se satisfacen las hipótesis dadas, empleando Mathematica se determina que $\lambda_2 < 0$. ■

Teorema 2.3.9. a) Si $0 < R_1 < b_1\mu_1 - c_1d$ y $c_2 > \tilde{c}_2$ entonces P_3 es localmente asintóticamente estable.

b) Si P_3 existe y $c_2 < \tilde{c}_2$ entonces P_3 es inestable.

Demostración. a) Trasladando el punto de equilibrio P_3 al origen, la forma polinomial del sistema está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(d(c_1x - 3) - x(R_1 + b_1\mu_1)) \\ & (c_1^2d^2x + R_1^2x - 9c_2d^2z - R_1x(3c_2dz + b_1\mu_1) + c_1dx(3c_2dz - 2R_1 + b_1\mu_1) \\ & - b_1\mu_1(3d(3 + c_2xz) + 2b_1\mu_1x))(c_1^4d^4x^2 + c_1^3d^3x(3d(2 + c_2xz) - x(R_1 + b_1\mu_1)) \\ & - (R_1 + b_1\mu_1)(27c_2d^3z - 9c_2d^2xz(R_1 + b_1\mu_1 + x^2(R_1 - 2b_1\mu_1))(2R_1 - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1) \\ & - 3dx(R_1 + b_1\mu_1)(R_1 + 2c_2R_1xz + b_1\mu_1 - b_1c_2\mu_1xz) \\ & - 3c_1^2d^2x(-3c_2d^2z + 3d(R_1 + b_1\mu_1 + b_1c_2\mu_1xz) + x(R_1^2 - b_1R_1\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)) \\ & + c_1d(-54c_2d^3z + x(R_1 + b_1\mu_1)(-18c_2d^2z + x(5R_1^2 + b_1\mu_1(9c_2dz + 5b_1\mu_1) \\ & - R_1(9c_2dz + 8b_1\mu_1))))), \\ \dot{z} = & 9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 3c_2dz - 2b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2 \\ & (c_1^2d^2x - 9c_2d^2z + c_1dx(3c_2dz - 2R_1 - 2b_1\mu_1) + x(R_1 + b_1\mu_1)(R_1 - 3c_2dz + b_1\mu_1)) \\ & (c_1^2d^2x + R_1^2x - 9c_2d^2z - R_1x(3c_2dz + b_1\mu_1) + c_1dx(3c_2dz - 2R_1 + b_1\mu_1) \\ & - b_1\mu_1(3d(3 + c_2xz) + 2b_1\mu_1x)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

El sistema (2.13) se puede llevar a su forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, z), \\ \dot{z} &= -z + Q(x, z), \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde P y Q están descritas en el apéndice A.

Por el teorema 1.2.5, el sistema (2.14) tiene una variedad central definida por $z = h(x)$. Usando la fórmula dada en (1.15) obtenemos la función ϕ , la cual es una aproximación de h de cierto orden. En particular, si $\phi(x) = \mathcal{O}(x^2)$, sustituyendo (2.14) en (1.15) tenemos

$$M\phi(x) = \phi(x) + \frac{27c_2^2d^3((-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) - 3b_1(c_1d - 2R_1)(c_1d - R_1)\mu_1)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2 - \frac{27c_2^2d^3(9c_2d^2(2c_1d + R_1)\mu_1 - 6b_1(3c_2d^2 + b_1R_1)\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Tomando

$$\phi(x) = -\frac{27c_2^2d^3((-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) - 3b_1(c_1d - 2R_1)(c_1d - R_1)\mu_1)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2 + \frac{27c_2^2d^3(9c_2d^2(2c_1d + R_1)\mu_1 - 6b_1(3c_2d^2 + b_1R_1)\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2,$$

tenemos que

$$M\phi(x) = \mathcal{O}(x^3).$$

Por el teorema 1.2.7 se tiene que

$$h(x) = -\frac{27c_2^2d^3((-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) - 3b_1(c_1d - 2R_1)(c_1d - R_1)\mu_1)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2 + \frac{27c_2^2d^3(9c_2d^2(2c_1d + R_1)\mu_1 - 6b_1(3c_2d^2 + b_1R_1)\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3)}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^5(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Por el teorema 1.2.6, la ecuación que determina la dinámica en el origen del sistema (2.14) es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= P(u, h(u)), \\ &= \frac{243 b_1 c_2^2 d^3 R_1}{(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4}u^2 + \mathcal{O}(u^3). \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de que $R_1 < b_1\mu_1 - c_1d$, se tiene que

$$\frac{243 b_1 c_2^2 d^3 R_1}{(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4} < 0.$$

Por otro lado, usando Mathematica se tiene que bajo la condición

$$c_2 > -\frac{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)} = \tilde{c}_2,$$

el valor propio ω de $J(0, 0)$, es negativo. Como se muestra en el apéndice A. Por lo tanto, el punto de equilibrio P_3 es asintóticamente estable.

b) Por otro lado, si

$$c_2 < -\frac{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)} = \tilde{c}_2,$$

el valor propio ω de $J(0, 0)$, es positivo. ■

Observación 2.3.10. Si $P_3 \in \Omega$ y además $c_2 = \tilde{c}_2$, entonces $\tau(J(P_3)) = 0$.

Teorema 2.3.11. Si $b_1\mu_1 > c_1d$, $R_1 > 0$ y $3\sqrt{b_1\mu_1(16c_1d + 9b_1\mu_1)} > 8c_1d + 16R_1 + 7b_1\mu_1$, entonces el sistema (2.1) tiene una órbita periódica estable.

Demostración. Por la observación 2.3.4, $\hat{c}_2 < \tilde{c}_2$ y los puntos de equilibrio P_2 y P_3 están en el primer cuadrante. Además, por el teorema 2.3.9 el punto P_3 es inestable y por el teorema 2.3.7 cuando $c_2 < \hat{c}_2$, P_2 es inestable y cuando $c_2 > \hat{c}_2$ alrededor de P_2 aparece una órbita periódica inestable de período pequeño. Como las soluciones del sistema son acotadas [L], por el teorema de Poincaré-Bendixson se concluye que existe una órbita periódica estable.

En las figuras 2.3 y 2.4 se muestra un resumen de la estabilidad local (línea continua) de los puntos de equilibrio P_2 y P_3 , así como de las órbitas periódicas estables (curva continua) que aparecen alrededor de P_2 o P_3 en el sistema (2.1), con respecto al parámetro c_2 .

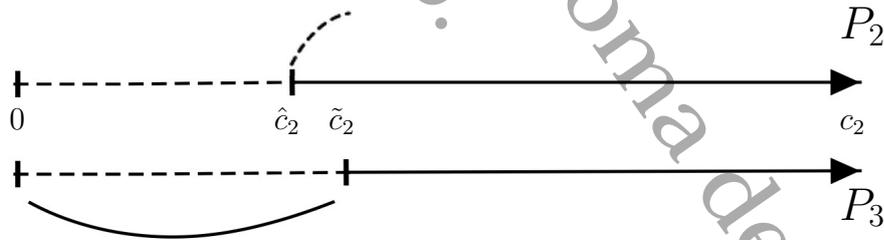


Figura 2.3: Región de estabilidad (línea continua) y existencia de órbitas periódicas estables (curva continua) de los puntos de equilibrio P_2 y P_3 , respectivamente, cuando $\hat{c}_2 < \tilde{c}_2$.

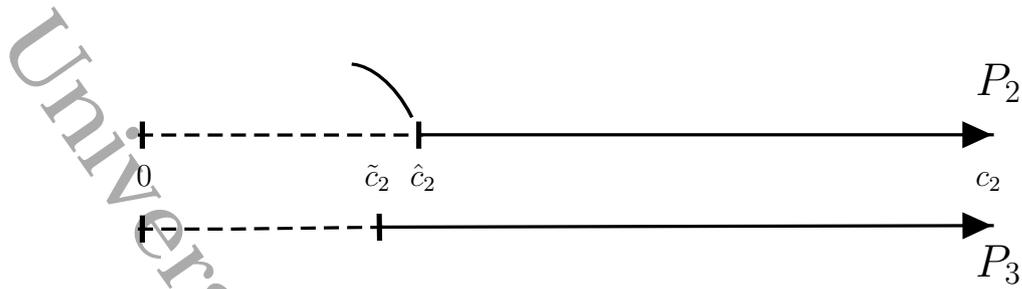


Figura 2.4: Región de estabilidad (línea continua) y existencia de órbitas periódicas estables (curva continua) de los puntos de equilibrio P_2 y P_3 , respectivamente, cuando $\tilde{c}_2 < \hat{c}_2$.

Ejemplo 2.3.12. Dados $c_2 = 0.071$, $R_1 = 0.015$, $K_1 = 10.475$, $c_1 = 0.059$, $r = 2.534$, $\mu_1 = 0.294$, $b_1 = 0.668$, y $d = 0.211$ que satisfacen las hipótesis de los teoremas 2.3.7, 2.3.9, existen

$$P_0 = (0, 0) \quad , \quad P_1 = (10.475, 0) \quad , \quad P_2 = (4.111, 8.82) \quad \text{y} \quad P_3 = (3.181, 7.822),$$

los cuales son puntos de equilibrio del sistema (2.1). En este caso P_0, P_1 son puntos silla, P_3 es un nodo-silla y en P_2 se presenta una bifurcación de Hopf subcrítica con $\hat{c}_2 \cong 0.071$.

La matriz jacobiana evaluada en P_3 es

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.029 & -0.021 \\ -0.013 & -0.009 \end{pmatrix},$$

la cual tiene determinante $\delta = 0$. Como P_3 satisface el inciso b) del teorema 2.3.9, corresponde a un nodo-silla.

Al evaluar P_2 en J tenemos

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0.013 & -0.022 \\ 0.011 & -0.013 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene traza cero y discriminante negativo. Los valores propios asociados son $\lambda_1 = 0.008 i$ y $\lambda_2 = -0.008 i$ y el primer coeficiente de Lyapunov es $\ell_1 = 2.623$. Por lo tanto, por el teorema 2.3.7, el sistema presenta una bifurcación de Hopf subcrítica en P_2 con respecto al parámetro c_2 (ver la curva verde en la figura 2.5).

En conclusión, se obtiene que bajo ciertas condiciones en los parámetros, el sistema presenta biestabilidad, la cual es generada por un punto de equilibrio estable P_2 y una órbita periódica estable (ver la curva roja en la figura 2.5). Bajo estas condiciones se garantiza la coexistencia de las especies, el retrato fase del sistema (2.1) se muestra en la figura 2.5.

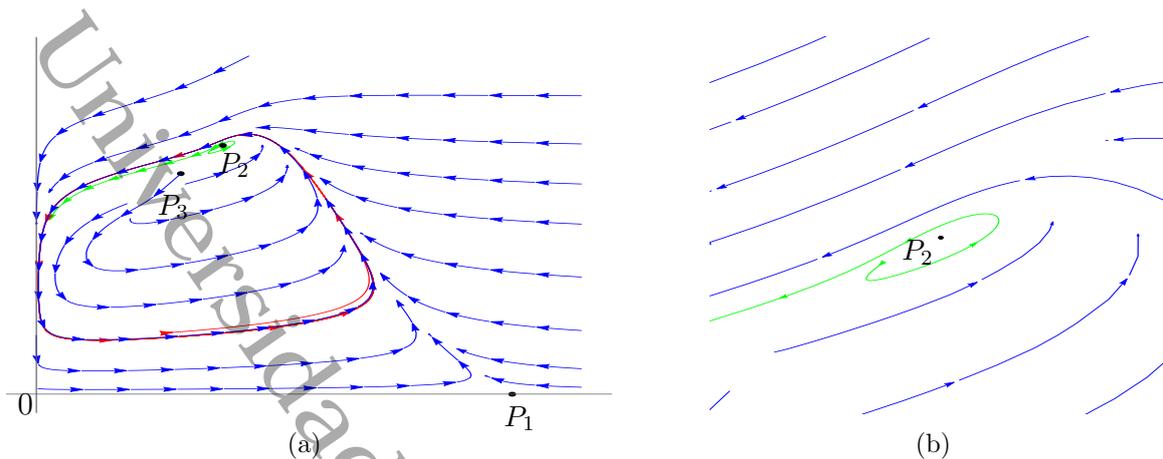


Figura 2.5: a) Retrato fase del sistema (2.1) alrededor de $P_2 = (4.111, 8.82)$ y $P_3 = (3.181, 7.822)$, cuando $\hat{c}_2 = 0.071$. El punto de equilibrio P_2 presenta una bifurcación de Hopf subcrítica (curva verde), P_3 es un nodo-silla y existe una órbita globalmente estable generada vía Poncaré-Bendixson (curva roja). b) Zoom alrededor de P_2 .

Ejemplo 2.3.13. Dados $c_2 = 0.347$, $R_1 = -0.15$, $K_1 = 38.605$, $c_1 = 0.059$, $r = 0.175$, $\mu_1 = 0.294$, $b_1 = 0.668$, y $d = 0.211$ que satisfacen las hipótesis de los teoremas 2.3.7, 2.3.9, existen

$$P_0 = (0, 0) \quad , \quad P_1 = (38.605, 0) \quad , \quad P_2 = (1.308, 0.308) \quad \text{y} \quad P_3 = (18.648, 2.354),$$

los cuales son puntos de equilibrio del sistema (2.1). En este caso P_0 y P_1 son puntos silla, P_3 es un nodo-silla y en P_2 se presenta una bifurcación de Hopf supercrítica con $\hat{c}_2 \cong 0.347$.

La matriz jacobiana evaluada en P_3 es

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.001 & -0.185 \\ 0.003 & -0.395 \end{pmatrix},$$

la cual tiene determinante $\delta = 0$. Como P_3 satisface el inciso b) del teorema 2.3.9, corresponde a un nodo-silla.

Al evaluar P_2 en J tenemos

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0.003 & -0.094 \\ 0.006 & -0.003 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene traza cero y discriminante negativo. Los valores propios asociados son $\lambda_1 = 0.023 i$ y $\lambda_2 = -0.023 i$ y el primer coeficiente de Lyapunov es $\ell_1 = -0.005$. Por lo tanto, por el teorema 2.3.7, el sistema presenta una bifurcación de Hopf supercrítica en P_2 con respecto al parámetro c_2 .

En conclusión, se obtiene que bajo ciertas condiciones en los parámetros, se garantiza la coexistencia de las especies a partir de una órbita periódica estable (curva verde) como se muestra en la figura 2.6.

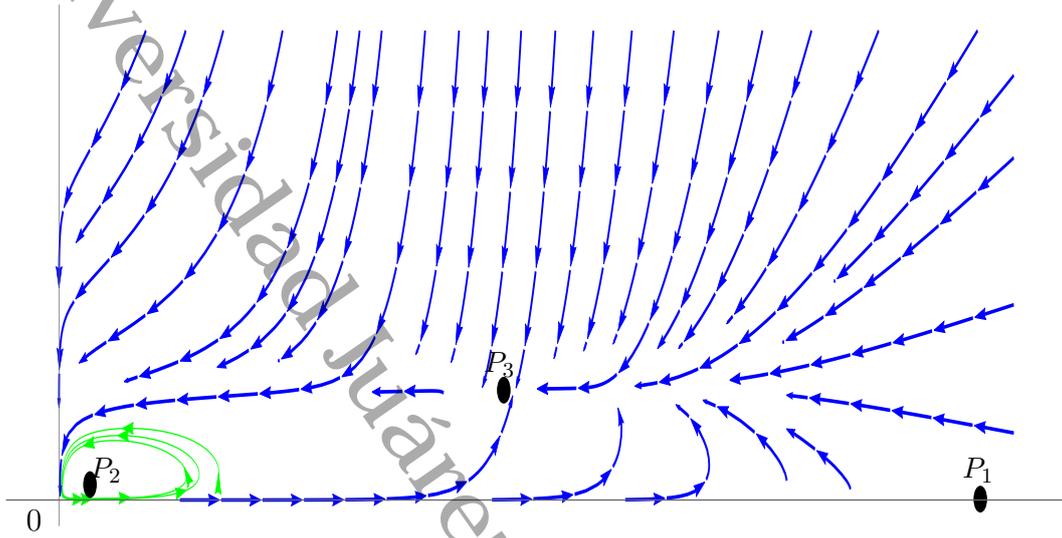


Figura 2.6: Retrato fase del sistema (2.1) alrededor de $P_2 = (1.308, 0.308)$ y $P_3 = (18.648, 2.354)$, cuando $\hat{c}_2 = 0.347$. El punto de equilibrio P_2 presenta una bifurcación de Hopf supercrítica (curva verde) y P_3 es un nodo-silla.

2.3.4. Bifurcación Bogdanov-Takens

En esta sección mostramos que cuando el sistema (2.1) tiene únicamente dos puntos de equilibrio de coexistencia, es posible obtener condiciones en los parámetros para los cuales se presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio P_3 . Fijaremos los parámetros r, K_1 como en (2.5) y (2.7) de la sección 2.3 para la existencia de dos puntos de equilibrio. Además, fijamos $c_2 = \tilde{c}_2$, y suponemos las hipótesis de la observación 2.3.1 para que c_2 sea positivo. Entonces,

$$P_3 = \left(\frac{3d}{R_1 + b_1\mu_1 - c_1d}, \frac{3d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2}{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \right).$$

Ya que la matriz jacobiana del sistema (2.1) asociada a P_3 es

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1} & -\frac{d(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1^2} \\ \frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2}{3b_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} & \frac{d(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1^2} \end{pmatrix},$$

sus valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Para mostrar que el sistema (2.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el parámetro $(\tilde{c}_2, \tilde{K}_1)$, analizaremos el sistema en los parámetros $(\tilde{c}_2 + \beta, \tilde{K}_1 + \gamma)$, donde

(β, γ) están en una vecindad de cero.

A partir de ahora consideraremos la siguiente hipótesis.

H1) $b_1\mu_1 > c_1d, R_1 > 0$ y $2R_1 + 3\sqrt{b_1\mu_1(4c_1d + 5b_1\mu_1)} < 2c_1d + 7b_1\mu_1$.

Proposición 2.3.14. *Si los parámetros del sistema satisfacen la condición H1, entonces la transformación*

$$(x, z, \beta, \gamma) \mapsto \left(f(x, z, \beta, \gamma), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right) \right)$$

es regular en el punto $(P_3, 0, 0)$.

Demostración.

Sea $F(x, z, \beta, \gamma) = \left(f(x, z, \beta, \gamma), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right) \right)$. Las expresiones para $\text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right)$ y $\text{Det} \left(\frac{\partial f(x, z, \beta, \gamma)}{\partial(x, z)} \right)$ son demasiado extensas por lo que solo mostramos sus derivadas en el apéndice B, las cuales necesitamos para mostrar la regularidad de F . La derivada de F evaluada en $(P_3, 0, 0)$ es

$$(DF)(P_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

donde las entradas a_{ij} de la matriz se muestran en el apéndice B .

De donde se obtiene

$$\text{Det}((DF)(P_3, 0, 0)) = \frac{2d^6 R_1 (2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^6 (c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{9b_1^3 \mu_1^2 (c_1d + R_1 - b_1\mu_1) (-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3 (2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3}.$$

Usando Mathematica se muestra que si se satisface la condición H1 entonces

$$\frac{2d^6 R_1 (2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^6 (c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{9b_1^3 \mu_1^2 (c_1d + R_1 - b_1\mu_1) (-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3 (2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3} \neq 0.$$

En consecuencia, la transformación F es regular en $(P_3, 0, 0)$. ■

De la fórmula de Kuznetsov se obtiene,

$$a_0 = \left(\frac{1}{729b_1^5\mu_1^6} \right) 2d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^3(c_1d - R_1 - b_1\mu_1)(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1) \\ (c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1) + \left(\frac{1}{729b_1^5\mu_1^7} \right) 2d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(-2c_1d\mu_1 - R_1\mu_1 \\ + 2b_1\mu_1^2)(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)((-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) + 3b_1(c_1d - R_1)R_1\mu_1 \\ + 3b_1^2(c_1d + 6R_1)\mu_1^2 - 5b_1^3\mu_1^3)$$

y

$$b_0 = \left(\frac{1}{81b_1^3\mu_1^4} \right) 2d(4c_1^4d^4 + R_1^4 - 5b_1R_1^3\mu_1 + 24b_1^2R_1^2\mu_1^2 - 41b_1^3R_1\mu_1^3 + 10b_1^4\mu_1^4 \\ - 4c_1^3d^3(R_1 + b_1\mu_1) - 3c_1^2d^2(R_1^2 - 4b_1R_1\mu_1 - 2b_1^2\mu_1^2) + c_1d(2R_1^3 - 3b_1R_1^2\mu_1 \\ + 33b_1^2R_1\mu_1^2 - 16b_1^3\mu_1^3)),$$

los coeficientes de los términos cuadráticos de la aproximación de Taylor del sistema (2.1). Usando Mathematica se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3.15. *Si los parámetros satisfacen la condición H1 entonces, $a_0b_0 \neq 0$.*

Del teorema 1.2.12 y las proposiciones 2.3.14, 2.3.15 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.16. *Si se satisface la condición H1 entonces el sistema (2.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio P_3 con respecto a los parámetros (c_2, K_1) , en el valor de bifurcación (\hat{c}_2, \hat{K}_1) .*

Con la finalidad de mostrar las diferentes curvas de bifurcación que puede presentar el sistema (2.1) en el espacio de parámetros (c_2, K_1) , fijaremos $\hat{c}_2 = 0.55$, $\hat{K}_1 = 6.61$, $c_1 = 0.059$,

$$c_2 = \hat{c}_2 + \beta, d = 0.4, \mu_1 = 0.294, b_1 = 1.965, K_1 = \hat{K}_1 + \gamma, r = \frac{0.863}{0.55 + \beta}, R_1 = 0.05.$$

Bajo estas asignaciones, el sistema (2.1) se escribe en su forma polinomial como

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{(0.55 + \beta)(6.61 + \gamma)} \right) (5.71172 x - 0.526 x^2 - 0.05 x^3 - 7.149 x z \\ + 3.141 x^2 z - 0.474 x^3 z - 12.998 x z \beta + 5.711 x^2 z \beta - 0.863 x^3 z \beta \\ + 0.863 x \gamma + 0.05 x^2 \gamma - 1.081 x z \gamma + 0.474 x^2 z \gamma - 1.965 x z \beta \gamma \\ + 0.863 x^2 z \beta \gamma) \\ \dot{z} = -0.4 z + 0.554 x z - 0.22 x z^2 - 0.4 x z^2 \beta, \quad (2.15)$$

donde β y γ son parámetros pequeños.

Para determinar las curvas de bifurcación se llevará el sistema (2.15) a su forma normal de Bogdanov-Takens mediante cambios de variable, verificando que se satisfacen las condiciones del teorema (1.2.12), para ello nos guiaremos de [GY].

De (3.6) verificamos que cuando $\beta = \gamma = 0$, $J(0) \neq 0$, por lo tanto la primera condición

de la bifurcación se satisface de acuerdo al teorema (1.2.12).

Bajo las asignaciones de los parámetros, la coordenada del punto equilibrio P_3 está dada por

$$\left(1.985, \frac{0.882}{0.55 + \beta} \right).$$

Trasladando P_3 al origen, se tiene que el sistema (2.15) se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{00} + P_{10} x + P_{01} z + P_{20} x^2 + P_{11} x z + P_{02} z^2 + O(\|(x, z)\|^3), \\ \dot{z} &= Q_{00} + Q_{10} x + Q_{01} z + Q_{20} x^2 + Q_{11} x z + Q_{02} z^2 + O(\|(x, z)\|^3), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{00} &= \frac{0.812 \gamma + 1.474 \beta \gamma}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ P_{10} &= \frac{1.401 + 2.548 \beta + 1.296 \gamma + 2.358 \beta \gamma}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ P_{20} &= \frac{0.181 - 0.33 \beta + 0.447 \gamma + 0.812 \beta \gamma}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ P_{11} &= \frac{0.16 + 0.583 \beta - 0.53 \beta^2 + 0.443 \gamma + 1.611 \beta \gamma + 1.464 \beta^2 \gamma}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ P_{02} &= Q_{00} = Q_{20} = 0, \\ Q_{10} &= \frac{0.097 + 0.177 \beta}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ Q_{01} &= \frac{-0.211 - 0.77 \beta - 0.7 \beta^2}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ Q_{11} &= \frac{-0.458 - 0.166 \beta - 0.151 \beta^2}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}, \\ Q_{02} &= \frac{-0.132 - 0.72 \beta - 1.31 \beta^2 - 0.794 \beta^3}{(0.55 + \beta)(6.661 + \gamma)}. \end{aligned}$$

Considerando el primer cambio de coordenadas cerca del origen

$$\begin{aligned} y_1 &= x, \\ y_2 &= P_{10} x + P_{01} z, \end{aligned}$$

el sistema (2.16), se transforma en

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 + P_{00} + \left(\frac{P_{02}P_{10}^2 - P_{10}P_{11}P_{01} + P_{20}P_{01}^2}{P_{01}^2} \right) y_1^2 + \left(\frac{P_{11}P_{01} - 2P_{02}P_{10}}{P_{01}^2} \right) y_1y_2 \\
&\quad + \frac{P_{02}}{P_{01}^2} y_2^2 + O(\|y\|^3), \\
\dot{y}_2 &= (P_{00}P_{10} + P_{01}Q_{00}) + (P_{01}Q_{10} - P_{10}Q_{01}) y_1 + (P_{10} + Q_{01}) y_2 \\
&\quad + \left(\frac{P_{02}P_{10}^3 - P_{10}^2P_{11}P_{01} + P_{10}P_{20}P_{01}^2 + P_{10}^2Q_{02}P_{01} - P_{10}Q_{11}P_{01}^2 + P_{01}Q_{20}P_{01}^2}{P_{01}^2} \right) y_1^2 \\
&\quad + \left(\frac{Q_{11}P_{01}^2 - 2P_{10}Q_{02}P_{01} + P_{10}P_{11}P_{01} - 2P_{02}P_{10}^2P_{01}}{P_{01}^2} \right) y_1y_2 \\
&\quad + \left(\frac{P_{02}P_{10} - Q_{02}P_{01}}{P_{01}^2} \right) y_2^2 + O(\|y\|^3).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ahora, si consideramos un cambio de coordenadas alrededor del origen que permita eliminar el término y_1^2 en \dot{y}_1 , se tiene que

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_1 + R_{20} y_1^2 + R_{11} y_1y_2, \\
z_2 &= y_2 - S_{20} y_1^2 + S_{11} y_1y_2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{P_{02}}{P_{01}^2}, \\
S_{20} &= \frac{(P_{01}(-P_{10}P_{11} + P_{01}P_{20}) + P_{02}P_{10}(P_{10} + Q_{02}) - P_{01}P_{02}Q_{10})}{P_{01}^2}, \\
S_{11} &= \frac{-P_{02}P_{10} - P_{01}Q_{02}}{P_{01}^2}, \\
R_{20} &= \frac{2P_{02}P_{10} - P_{01}P_{11} + P_{02}Q_{01} - P_{01}Q_{02}}{2P_{01}^2},
\end{aligned}$$

entonces, el sistema (2.17) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= P_{z00} + P_{z10} z_1 + P_{z01} z_2 + P_{z20} z_1^2 + P_{z11} z_1 z_2, \\
\dot{z}_2 &= Q_{z00} + Q_{z10} z_1 + Q_{z01} z_2 + Q_{z20} z_1^2 + Q_{z11} z_1 z_2 + Q_{z02} z_2^2,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde a partir de ahora los coeficientes $P_{z_{ij}}$ ($Q_{z_{ij}}$) de los términos $z_1^i z_2^j$ con $0 \leq i + j \leq 2$, asociados a los cambios de coordenadas pueden ser consultados en el apéndice B. Realizando un nuevo cambio de coordenadas sobre el sistema (2.18) de la forma

$$\begin{aligned}
w_1 &= z_1, \\
w_2 &= P_{z00} + P_{z10} z_1 + P_{z01} z_2 + P_{z20} z_1^2 + P_{z11} z_1 z_2,
\end{aligned}$$

tenemos que el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= Q_{w00} + Q_{w10} w_1 + Q_{w01} w_2 + Q_{w20} w_1^2 + Q_{w11} w_1 w_2 + Q_{w02} w_2^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dado que en el desarrollo de Taylor del sistema (2.15) los coeficientes P_{00}, Q_{00} en $\beta = \gamma = 0$ son cero, es suficiente calcular la forma normal usando los términos lineales para éstos, es decir, descartaremos los términos que contengan el factor $P_{00}^i Q_{00}^j$, con $i + j \geq 2$. Así, reescribiendo el sistema (2.19) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= (Q_{w'00} + Q_{w'10} w_1 + Q_{w'20} w_1^2) + (Q_{w'01} + Q_{w'11} w_1) w_2 + Q_{w'02} w_2^2, \\ &= \phi(w_1, \beta, \gamma) + \varphi(w_1, \beta, \gamma) w_2 + \Omega(\mathbf{w}, \beta, \gamma). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora consideremos una transformación que elimine el término w_2 de \dot{w}_2 dada en (2.20), de la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 - \delta(\beta, \gamma), \\ u_2 &= w_2, \end{aligned}$$

donde $\delta = -\frac{\delta_1}{\delta_2}$, con

$$\begin{aligned} \delta_1 &= P_{01}^2 (P_{00} P_{02} Q_{01} + P_{01}^2 (P_{10} + Q_{01}) - P_{01} (P_{02} Q_{00} + P_{00} (P_{11} + 2Q_{02}))), \\ \delta_2 &= P_{00} P_{02}^2 (P_{10} - Q_{01} - P_{01}^2 (P_{02} (P_{11} Q_{00} - P_{10} Q_{01} + 2Q_{00} Q_{02}) + P_{00} (P_{11}^2 - 4P_{02} P_{20} \\ &\quad + 2P_{11} Q_{02} + 2Q_{02}^2))) - P_{01}^3 (P_{10} P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02} Q_{10} + P_{01} P_{02} (P_{02} Q_{00} (P_{10} + Q_{01}) \\ &\quad + P_{00} (-P_{10} P_{11} + 2P_{11} Q_{01} + 2Q_{01} Q_{02} - 4P_{02} Q_{10})) + P_{01}^4 (2P_{20} + Q_{11}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

El cual nos lleva a un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= Q_{u00} + Q_{u10} u_1 + Q_{u20} u_1^2 + Q_{u11} u_1 u_2 + Q_{u02} u_2^2 \\ &= \hat{\phi}(u_1, \beta, \gamma) + \hat{\varphi}(u_1, \beta, \gamma) u_1 u_2 + \hat{\Omega}(\mathbf{u}, \beta, \gamma) u_2^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De acuerdo a la preparación del teorema de Malgrange [M] aplicado a $\hat{\phi}(u_1, \beta, \gamma)$, ésta puede ser expresada como

$$\hat{\phi}(u_1, \beta, \gamma) = (\Phi_1(\beta, \gamma) + \Phi_2(\beta, \gamma) u_1 + u_1^2) h(u_1, \beta, \gamma).$$

A continuación, usaremos la función $h(u_1, \beta, \gamma)$ para realizar un cambio de variable que transforme el sistema a uno donde el coeficiente del término u_1^2 sea 1. Denotemos s el signo de la expresión

$$c_{20}(\beta, \gamma) = \frac{P_{10}^3 P_{02}}{P_{01}} - \frac{P_{10}^2}{P_{01}} (P_{11} - Q_{02}) + P_{10} (P_{20} - Q_{11}) + P_{01} Q_{20}.$$

El cambio de variable alrededor de $\mathbf{u} = 0$, es

$$\begin{aligned} v_1 &= s u_1, \\ v_2 &= \frac{s u_2}{\sqrt{s h(u_1, \beta, \gamma)}}, \end{aligned}$$

donde se considera la ecuación $d\tau = \sqrt{s h(u_1, \beta, \gamma)} dt$. Por lo que el sistema (2.22) se ve de la forma

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{c_{20}}(Q_{u00} + Q_{u10} u_1) + v_1^2 + \frac{Q_{u11}}{\sqrt{c_{20}}} v_1 v_2 + \hat{\Omega}(\mathbf{v}, \beta, \gamma) v_2^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Finalmente, tomamos un cambio de coordenadas que permita eliminar el término v_1 , simultáneamente reduciendo los términos de v_2 , es decir,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= v_1 + \frac{s \Phi_2(\beta, \gamma)}{2}, \\ \xi_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la nueva forma del sistema (2.23) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \Phi_1(\beta, \gamma) + \Phi_2(\beta, \gamma) \xi_2 + \xi_1^2 - \frac{c_{11}}{\sqrt{c_{20}}} \xi_1 \xi_2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11}(\beta, \gamma) &= 2P_{20} + Q_{11} - \left(\frac{P_{10}}{P_{01}}\right) (P_{11} + 2Q_{02}), \\ \Phi_1(\beta, \gamma) &= \frac{Q_{u00}}{c_{20}} - \frac{Q_{u10}^2}{4c_{20}^2}, \\ \Phi_2(\beta, \gamma) &= \frac{Q_{u11}Q_{u10}}{2c_{20}\sqrt{|c_{20}|}}. \end{aligned}$$

Así usando Mathematica verificamos que se satisfacen las hipótesis del teorema 1.2.12, es decir de (2.17) y (2.23) se tiene que

$$\begin{aligned} c_{20} &\approx 0.157, \\ c_{11} &\approx 0.773, \\ \frac{P_{02}P_{10}^2 - P_{10}P_{11}P_{01} + P_{20}P_{01}^2}{P_{01}^2} + \frac{Q_{11}P_{01}^2 - 2P_{10}Q_{02}P_{01} + P_{10}P_{11}P_{01} - 2P_{02}P_{10}^2P_{01}}{P_{01}^2} &\approx -0.645, \\ \frac{P_{02}P_{10}^3 - P_{10}^2P_{11}P_{01} + P_{10}P_{20}P_{01}^2 + P_{10}^2Q_{02}P_{01} - P_{10}Q_{11}P_{01}^2 + P_{01}Q_{20}P_{01}^2}{P_{01}^2} &\approx 0.157, \\ \left| \frac{\partial(\Phi_1\Phi_2)}{\partial(\beta, \gamma)} \right|_{\beta=\gamma=0} &\approx -5.795. \end{aligned}$$

Entonces el sistema (2.24) se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \Phi_1(\beta, \gamma) + \Phi_2(\beta, \gamma) \xi_2 + \xi_1^2 - 1.947 \xi_1 \xi_2, \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_1(\beta, \gamma) &= 1.805 \gamma - 3.409 \gamma^2 - 3.283 \gamma \beta, \\ \Phi_2(\beta, \gamma) &= 4.172 \gamma + 1.552 \gamma^2 - 3.209 \beta - 1.385 \gamma \beta + 11.669 \beta^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir Φ_1, Φ_2 como parámetros de bifurcación en el sistema (2.25) bajo la bifurcación de Bogdanov-Takens, es decir, en el sistema (2.15) la bifurcación Bogdanov-Takens tiene como parámetros de bifurcación a (β, γ) que varían en una pequeña vecindad del origen, y la representación de las curvas que muestran la dinámica del sistema están dadas por

$$\begin{aligned} SN &= \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma - 3.409 \gamma^2 - 3.283 \gamma \beta = 0, \gamma > 0\}, \\ H &= \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma + 1.181 \gamma^2 - 10.345 \gamma \beta + 2.716 \beta^2 = 0, \gamma < 0, \beta > 0\}, \\ HL &= \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma + 5.589 \gamma^2 - 17.125 \gamma \beta + 5.323 \beta^2 = 0, \gamma < 0\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde SN corresponde a los parámetros donde se presenta una bifurcación silla nodo, H donde existe bifurcación de Hopf y HL donde se tiene bifurcación homoclínica, véase la figura 2.7.

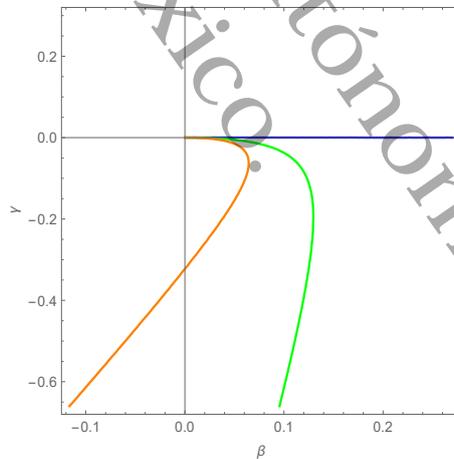


Figura 2.7: Curvas de la bifurcación Bogdanov-Takens.

Ejemplo 2.3.17. Si $c_1 = 0.059, c_2 = 0.55, d = 0.4, \mu_1 = 0.294, b_1 = 1.965, K_1 = 6.61, r = 1.57, R_1 = 0.05$, entonces el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio en el primer cuadrante, $P_2 = (2.641, 1.831)$ es un nodo estable, y $P_3 = (1.985, 1.603)$ corresponde a una cúspide. En la figura 2.8 se muestra la dinámica local del sistema (2.1).

Solución. Cuando los parámetros toman los valores correspondientes dados en las hipótesis, la forma polinomial del sistema (2.1) se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1.57x - 0.144x^2 - 0.014x^3 - 1.965xz + 0.863x^2z - 0.13x^3z, \\ \dot{z} &= -0.4z + 0.554xz - 0.2xz^2.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Usando Mathematica calculamos los puntos de equilibrio no triviales del sistema (2.27), cuyas expresiones están dadas por

$$P_2 = (2.641, 1.831) \text{ y } P_3 = (1.985, 1.603).$$

Al evaluar P_2 en J tenemos que

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0.262 & -1.572 \\ 0.277 & -1.064 \end{pmatrix},$$

la cual tiene como valores propios $\lambda_1 = -0.462$ y $\lambda_2 = -0.339$. Por lo tanto, P_2 es un nodo estable.

Ahora probaremos que la dinámica de P_3 corresponde a una cúspide de codimensión dos, llevando el sistema en el punto de equilibrio a su forma normal.

La matriz jacobiana asociada al punto de equilibrio P_3 , está dada por

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.7 & -1.519 \\ 0.323 & -0.7 \end{pmatrix},\tag{2.28}$$

para la cual se tiene que $Det(J(P_3)) = 0$ y $Tr(J(P_3)) = 0$.

Trasladando el punto de equilibrio P_3 al origen, el sistema (2.27) se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0.7x - 0.090x^2 - 0.223x^3 - 1.519z - 0.08xz + 0.085x^2z - 0.13x^3z, \\ \dot{z} &= 0.323x - 0.7z - 0.151xz - 0.436z^2 - 0.22xz^2.\end{aligned}\tag{2.29}$$

El sistema (2.29) se puede llevar a su forma normal como la dada en (1.9), es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z, \\ \dot{z} &= 0.515x^2[1 + 0.161x - 0.18x^2] + 1.52xz[1 + 0.519x - 0.586x^2] \\ &\quad + z^2[-2.898 - 1.57x + 0.015x^2 - 0.448z + 0.366xz - 0.261z^2],\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}k &= 2, \\ a_2 &= 0.515, \\ n = m &= 1.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema (1.2.4) concluimos que la dinámica del punto de equilibrio P_3 corresponde a una cúspide.

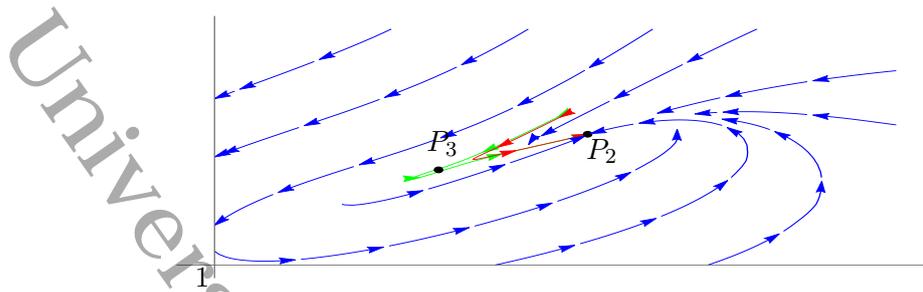


Figura 2.8: Retrato fase del sistema (2.1) alrededor de $P_2 = (2.641, 1.831)$ y $P_3 = (1.985, 1.603)$, cuando $c_2 = 0.55$. El punto de equilibrio P_2 es un nodo estable y P_3 corresponde a una cúspide.

■

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Análisis de un modelo con interferencia en una relación mutualista

En este capítulo estudiaremos el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto en el proyecto, el cual considera dos especies x, y en una interacción mutualista, la que se manifiesta en la capacidad de carga del medio de ambas; al mismo tiempo éstas interactúan con una especie depredadora z . Explícitamente, consideraremos un modelo de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K_1 + y} \right) - \frac{b_1 x z}{1 + c_1 x^m + c_2 x z}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{K_2 + x} \right) - \frac{b_2 y z}{1 + c_3 y^n + c_4 y z}, \\ \dot{z} &= \left(\frac{\mu_1 b_1 x}{1 + c_1 x^m + c_2 x z} + \frac{\mu_2 b_2 y}{1 + c_3 y^n + c_4 y z} - d \right) z. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como estamos interesados en resultados con sentido ecológico, consideraremos que todos los parámetros del sistema (3.1) son no negativos y los exponentes m y n son mayores o iguales a 1. En el capítulo anterior analizamos este sistema considerando $y = 0$ y obtuvimos condiciones para la coexistencia de las dos especies. En este capítulo, consideraremos las tres especies x, y, z y mostraremos que algunas propiedades del sistema (2.1) se preservan aún cuando se consideran dos poblaciones presa.

3.1. Determinación de puntos de equilibrio

Como estamos interesados en soluciones con sentido ecológico, a partir de esta sección denotaremos

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Reescribiendo \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} en su forma polinomial como f , g y h , respectivamente, los puntos de equilibrio del sistema (3.1) están dados por los ceros simultáneos de estas funciones.

- $f(x, y, z) = x(b_1yz + r(x - y)(1 + c_1x^m + c_2xz) - K_1(r + c_1rx^m - b_1z + c_2rxz))$,
implica que

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad b_1yz + r(x - y)(1 + c_1x^m + c_2xz) - K_1(r + c_1rx^m - b_1z + c_2rxz) = 0.$$

- $g(x, y, z) = y(-b_2xz + s(x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz) + K_2(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz))$,
implica que

$$y = 0 \quad \text{ó} \quad -b_2xz + s(x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz) + K_2(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz) = 0.$$

▪

$$h(x, y, z) = z(d(1 + c_1x^m + c_2xz)(1 + c_3y^n + c_4yz) - b_1x(1 + c_3y^n + c_4yz)\mu_1 - b_2y(1 + c_1x^m + c_2xz)\mu_2),$$

implica que

$$z = 0 \quad \text{ó}$$

$$d(1 + c_1x^m + c_2xz)(1 + c_3y^n + c_4yz) - b_1x(1 + c_3y^n + c_4yz)\mu_1 - b_2y(1 + c_1x^m + c_2xz)\mu_2 = 0.$$

Los puntos de equilibrio triviales para el sistema (3.1) son $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (K_1, 0, 0)$, $P_2 = (0, K_2, 0)$, $P_3 = (x_0, 0, z_0)$ y $P_4 = (0, y_0, z_0)$. Donde las coordenadas de P_3 y P_4 están dadas por

$$P_3 = \left(x_0, 0, \frac{r(K_1 - x_0)x_0\mu_1}{dK_1} \right),$$

$$P_4 = \left(0, y_0, \frac{s(K_2 - y_0)y_0\mu_2}{dK_2} \right).$$

Para encontrar las soluciones no triviales debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} b_1yz + r(x - y)(1 + c_1x^m + c_2xz) - K_1(r + c_1rx^m - b_1z + c_2rxz) &= 0, & (3.2) \\ -b_2xz + s(x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz) + K_2(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz) &= 0, \\ d(1 + c_1x^m + c_2xz)(1 + c_3y^n + c_4yz) - b_1x(1 + c_3y^n + c_4yz)\mu_1 - b_2y(1 + c_1x^m + c_2xz)\mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Despejando z de la primera ecuación en (3.2) se tiene que

$$z = \frac{r(1 + c_1x^m)(K_1 - x + y)}{c_2rx(-K_1 + x - y) + b_1(K_1 + y)}. \quad (3.3)$$

Notemos que bajo la asignación de la variable z dada en (3.3), el denominador correspondiente puede ser cero. Esto pasa cuando

$$b_1 = \frac{c_2rx(K_1 - x + y)}{K_1 + y}. \quad (3.4)$$

En primer lugar, analizaremos cuando b_1 es como en (3.4). El nuevo sistema a resolver es

$$\begin{aligned} rx(K_2 + x)(1 + c_1^m)(-K_1 + x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz) &= 0, \\ y(K_1 + y)(1 + c - 1x^m + c_2xz)(s(x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz) - b_2xz + \\ &K_2(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz)) = 0, \\ z(K_2 + x)(d(K_1 + y)(1 + c_1x^m + c_2xz)(1 + c_3y^n + c_4yz) - b_2(1 + c_1x^m)y(K_1 + y)\mu_2 - \\ c_2x(K_1rx(1 + c_3y^n + c_4yz)\mu_1 - rx(x - y)(1 + c_3y^n + c_4yz)\mu_1 + b_2K_1yz\mu_2 + b_2y^2z\mu_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Despejando x de la primera ecuación en (3.5) se tiene que la solución positiva es

$$x = K_1 + y.$$

Sustituyendo x en la segunda y tercera ecuación de (3.5), las soluciones no triviales del sistema están dados por,

$$\begin{aligned} -b_2yz + K_1(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz) + K_2(s + c_3sy^n - b_2z + c_4syz) &= 0, \\ d + c_3dy^n + c_4dyz - b_2y\mu_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Despejando z de la segunda ecuación en (3.6) se tiene que

$$z = \frac{b_2y\mu_2 - d - c_3dy^n}{c_4dy}.$$

Sustituyendo z en la primera ecuación de (3.6) se obtiene un polinomio en y , por lo que los puntos de equilibrio no triviales del sistema (3.1) están dados por las raíces del siguiente polinomio

$$Q(y) = q_1(y)q_2(y), \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} q_1(y) &= c_3d y^{n+1} + c_3d(K_1 + K_2) y^n + \mu_2(-b_2 + c_4s(K_1 + K_2)) y^2 \\ &+ (d - b_2\mu_2(K_1 + K_2)) y + d(K_1 + K_2), \\ q_2(y) &= -c_2c_3d y^{n+1} - c_2c_3dK_1 y^n + b_2c_2\mu_2 y^2 + (d(c_4 - c_2) + b_2c_2K_1\mu_2) y \\ &+ c_1c_4d y(K_1 + y)^m - c_2dK_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observemos que la suma de las raíces positivas de los polinomios $q_1(y)$ y $q_2(y)$ determinan la cantidad de puntos de equilibrio que tiene el sistema dentro del primer octante. A partir de los signos de los coeficientes podemos determinar hasta cuantas raíces reales positivas puede tener cada uno de ellos. Notemos que el polinomio $q_1(y)$ no depende de m y es un polinomio de grado $n + 1$, por lo que se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. *Supongamos que $n = 1$ entonces $q_1(y)$ es un polinomio de grado dos que tiene:*

- Una raíz positiva si $\frac{-d + b_2K_1\mu_2 + b_2K_2\mu_2}{dK_1 + dK_2} < c_3 < \frac{b_2\mu_2}{d}$ y $0 < c_4 < \frac{-c_3d + b_2\mu_2}{K_1s\mu_2 + K_2s\mu_2}$.
- Dos raíces positivas si $c_3 + \frac{1}{(K_1 + K_2)} < \frac{b_2\mu_2}{d}$.

Proposición 3.1.2. *Supongamos que $n = 2$ entonces $q_1(y)$ es un polinomio de grado tres que tiene:*

- Dos raíces positivas o ninguna, si $b_2 < \frac{d}{(K_1\mu_2 + K_2\mu_2)}$, $c_3 < \frac{b_2}{\mu_2/(dK_1 + dK_2)}$ y $c_4 \neq \frac{-c_3dK_1 - c_3dK_2 + b_2\mu_2}{K_1s\mu_2 + K_2s\mu_2}$.

Proposición 3.1.3. *Si $n \geq 3$, $b_2 < \frac{d}{\mu_2(K_1 + K_2)}$ y $c_4 < \frac{b_2}{s(K_1 + K_2)}$, entonces el polinomio $q_1(y)$ tiene dos o ninguna raíz positiva.*

Demostración. Ya que $n \geq 3$, los coeficientes del polinomio $q_1(y)$ no se agrupan. Por otro lado, como $b_2 < \frac{d}{\mu_2(K_1 + K_2)}$ se tiene que el coeficiente de y es positivo.

Bajo la hipótesis $c_4 < \frac{b_2}{s(K_1 + K_2)}$, el coeficiente del término cuadrático es negativo. En consecuencia, se tiene que el polinomio $q_1(y)$ presenta dos cambios de signo, así, por la regla de Descartes tiene dos o ninguna raíz positiva. ■

Numéricamente se observó que si $n > 2$ entonces el polinomio $q_2(y)$ puede tener 2 o 3 cambios de signo.

3.2. Estabilidad local

En esta sección se analiza la estabilidad local de un punto de equilibrio de coexistencia suponiendo que el polinomio $Q(y)$ tiene una raíz positiva, por lo que es suficiente que $q_1(y)$ tenga una raíz positiva, véase proposición 3.1.1.

Supongamos que $\hat{P} = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de equilibrio del sistema (3.1). Resolviendo las ecuaciones $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ y $\dot{z} = 0$ en términos z , s y d , respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{r(1 + c_1x_0)(K_1 - x_0 + y_0)}{c_2rx_0(-K_1 + x_0 - y_0) + b_1(K_1 + y_0)}, \\ s &= \frac{b_2r(K_2 + x_0)(1 + c_1x_0)(K_1 - x_0 + y_0)}{\alpha_1}, \\ d &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (K_2 + x_0 - y_0)(b_1(K_1 + y_0)(1 + c_3y_0) + r(K_1 - x_0 + y_0)(c_4 \\
&\quad (1 + c_1x_0)y_0 - c_2(x_0 + c_3x_0y_0))), \\
\alpha_2 &= c_2rx_0(x_0 - K_1 - y_0) + b_1(K_1 + y_0)(b_1x_0(K_1 + y_0)(1 + c_3y_0)\mu_1 \\
&\quad - rx_0(K_1 - x_0 + y_0)(-c_4(1 + c_1x_0)y_0 + c_2(x_0 + c_3x_0y_0))\mu_1 \\
&\quad + b_2(1 + c_1x_0)y_0(K_1 + y_0)\mu_2), \\
\alpha_3 &= (1 + c_1x_0)(K_1 + y_0)(b_1(K_1 + y_0)(1 + c_3y_0) + r(K_1 - x_0 + y_0)(c_4 \\
&\quad (1 + c_1x_0)y_0 - c_2(x_0 + c_3x_0y_0))).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En la siguiente observación se presentan las condiciones suficientes para las cuales $z_0 > 0$, $s > 0$ y $d > 0$.

Observación 3.2.1. *Los parámetros s, d y la coordenada z_0 son positivos si $c_2 < \frac{(b_1(K_1 + y_0))}{(rx_0(K_1 - x_0 + y_0))}$ y se satisface alguna de las siguientes condiciones.*

1. $x_0 = y_0$, ó
2. $K_2 + x_0 > y_0$ y $x_0 < y_0$, ó
3. $K_1 + y_0 > x_0$ y $x_0 > y_0$.

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz al polinomio característico $P(\lambda)$ asociado a $J(\hat{P})$, obtenemos el siguiente resultado en términos de los coeficientes de $P(\lambda)$, e_1, e_2 y e_3 , los cuales están dados en el apéndice C.

Proposición 3.2.2. *Si e_1, e_2, e_3 son positivos y $e_1 e_2 > e_3$ entonces el CEP \hat{P} es localmente asintóticamente estable.*

Para mostrar que las hipótesis de la proposición son no vacías, fijamos los parámetros, $b_2 = 0.7, \mu_2 = 0.15, c_3 = 0.1, c_4 = 1.757, c_2 = 0.2, \mu_1 = 0.2, b_1 = 0.211, c_1 = 0.012, s = 0.329, d = 0.062, r = 0.3, x_0 = 1, y_0 = 2$ y dejamos libre las capacidades de carga K_1 y K_2 . Bajo estas asignaciones, las hipótesis de la proposición 3.2.2 se satisfacen cuando (K_1, K_2) están en el interior de la región A (véase apéndice C) que se muestra en la figura 3.1. En consecuencia, el punto de equilibrio \hat{P} es localmente asintóticamente estable.

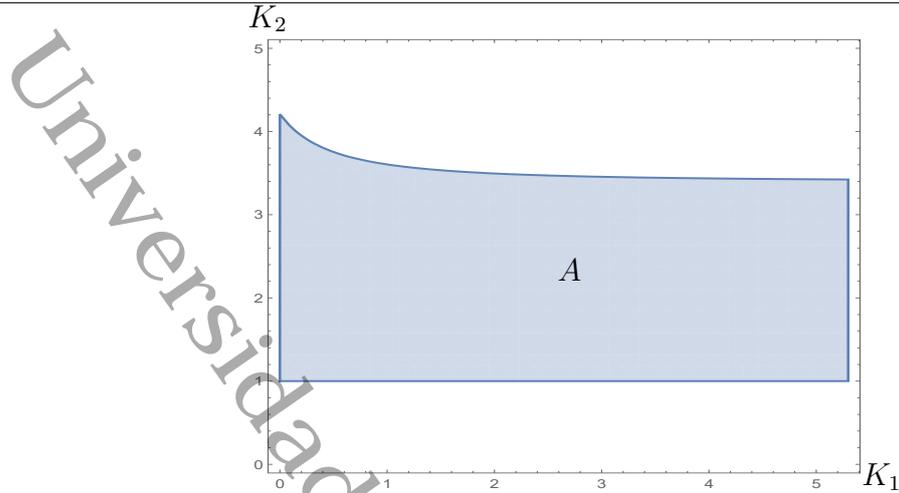


Figura 3.1: Región de parámetros donde \hat{P} es estable.

Ejemplo 3.2.3. Tomando $(K_1, K_2) = (5, 3) \in A$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio asintóticamente estable, \hat{P} es uno trivial.

Resolviendo numéricamente encontramos que los puntos de equilibrio del sistema (3) son:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (0, 0, 0), \\
 P_1 &= (5, 0, 0), \\
 P_2 &= (0, 3, 0), \\
 P_3 &= (2.326, 0, 1.200), \\
 P_4 &= (4.344, 5.902, 3.442), \\
 P_5 &= (1.033, 1.576, 1.603), \\
 \hat{P} &= (1, 2, 1.621).
 \end{aligned}$$

Directamente de la matriz jacobiana obtenemos que los puntos P_j son puntos silla para $j \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Por otro lado, como $J(P_3)$ tiene valores propios $\lambda_1 = -0.511$ y $\lambda_{2,3} = -0.051 \pm 0.056 i$, entonces P_3 es localmente asintóticamente estable. Ya que los valores propios de $J(\hat{P})$ son $\lambda_1 = -0.031$, $\lambda_{2,3} = -0.0015 \pm 0.060 i$, en consecuencia \hat{P} es localmente asintóticamente estable. En conclusión, se obtiene que existen condiciones en los parámetros los cuales garantizan la coexistencia de las tres poblaciones, gracias a la existencia del punto de equilibrio estable \hat{P} .

3.3. Análisis de bifurcación

3.3.1. Bifurcación Bogdanov-Takens de un CEP en Ω visto en \mathbb{R}^3

En la sección 2.3.3 se mostró la existencia de un punto de equilibrio no hiperbólico en Ω . En esta sección se analiza la dinámica de este punto de equilibrio cuando se tiene la

interacción de las tres poblaciones x, y, z y además, se determinan condiciones para las cuales el sistema (3.1) presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens en este punto de equilibrio.

Fijando los parámetros

$$K_1 = 3d \left(\frac{1}{b_1\mu_1 - c_1d - 2R_1} + \frac{2}{b_1\mu_1 - c_1d + R_1} \right) = \hat{K}_1,$$

$$r = \frac{c_1^2d^2 - R_1^2 - 2b_1c_1d\mu_1 + b_1^2\mu_1^2}{3c_2d\mu_1},$$

$$c_2 = \frac{(R_1 + b_1\mu_1 - c_1d)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)} = \hat{c}_2,$$

como en la sección 2.3.3 y tomando $c_1d - b_1\mu_1 < R_1 < 0$, ó $0 < 2R_1 < b_1\mu_1 - c_1d$, entonces los parámetros anteriores son positivos. Así, el sistema (3.1) tiene como punto de equilibrio a

$$\bar{P}_3 = \left(\frac{3d}{R_1 + b_1\mu_1 - c_1d}, 0, \frac{2(b_1\mu_1 - c_1d) - R_1}{3c_2d} \right) \in \Omega.$$

Ya que la matriz jacobiana del sistema (3.1) asociada a \bar{P}_3 es

$$J(\bar{P}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1} & -\frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)(c_1d+2R_1-b_1\mu_1)^2}{3(c_1d-R_1-b_1\mu_1)(c_1d+R_1-b_1\mu_1)(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)} & -\frac{d(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1^2} \\ 0 & s - \frac{3b_2d\mu_1(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)^2}{(-c_1d+R_1+b_1\mu_1)^2(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)} & 0 \\ \frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)^2}{3b_1(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)} & \frac{3b_2d\mu_1(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)^2\mu_2}{(-c_1d+R_1+b_1\mu_1)^2(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)} & \frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1} \end{pmatrix},$$

ésta tiene como valores propios

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{(-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1)s - 3(b_2d(2c_1d + R_1)^2 + b_1(c_1d - R_1)(c_1d + R_1)s)\mu_1}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} + \frac{3b_1(4b_2d(2c_1d + R_1) + b_1R_1s)\mu_1^2 + b_1^2(-12b_2d + c_1s)\mu_1^3}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}.$$

En consecuencia \bar{P}_3 es no hiperbólico. Ahora analizaremos el tipo de bifurcación que presenta el sistema (3.1) cuando variamos los parámetros (c_2, K_1) en una pequeña vecindad (\hat{c}_2, \hat{K}_1) . Para ello consideramos $(\hat{c}_2 + \beta_1, \hat{K}_1 + \gamma_1)$, donde (β_1, γ_1) están en una vecindad de cero. Ya que $J(\bar{P}_3)$ tiene como valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y $\lambda_3 \neq 0$ cuando $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, a continuación mostraremos que el sistema (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros (c_2, K_1) . Para ello, establezcamos la siguiente hipótesis.

$$\text{H1)} \quad b_2 \neq \frac{(-c_1d+R_1+b_1\mu_1)^2(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)}{9b_1\mu_1^2(-2c_1d-R_1+2b_1\mu_1)} \quad \text{y} \quad s \neq \frac{3b_2d\mu_1(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)^2}{(-c_1d+R_1+b_1\mu_1)^2(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)}.$$

Proposición 3.3.1. *Si los parámetros del sistema (3.1) satisfacen la condición H1, entonces la transformación*

$$(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) \mapsto \left(f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right) \right)$$

es regular en el punto $(\bar{P}_3, 0, 0)$.

Demostración. En el apéndice D, mostramos como se reescribe el sistema (3.1), cuando $(c_2, K_1) = (\hat{c}_2 + \beta_1, \hat{K}_1 + \gamma_1)$.

Sea $F(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) = \left(f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right) \right)$. Como las expresiones para $\text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right)$ y $\text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right)$ son demasiado extensas, las hemos colocado en el apéndice D.

Para mostrar la regularidad de F calculamos el determinante de

$$(DF)(\bar{P}_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1} & a_{12} & -\frac{d(2c_1d+R_1+b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1^2} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \frac{d(2c_1d+R_1-2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

donde las entradas a_{ij} para $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ de esta matriz se muestran en el apéndice D.

Usando el software Mathematica se obtiene que

$$\text{Det}((DF)(\bar{P}_3, 0, 0)) = \frac{B_1}{9b_1^3\mu_1^2(-c_1d - R_1 + b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^9(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^6},$$

donde,

$$\begin{aligned} B_1 = & -((2d^6R_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^6(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2(2c_1^3d^3 + R_1^3 + 3b_1R_1^2\mu_1 + 18b_1b_2c_1d\mu_1^2 \\ & + 3b_1(b_1 + 3b_2)R_1\mu_1^2 + b_1^2(b_1 - 18b_2)\mu_1^3 - 3c_1^2d^2(R_1 + b_1\mu_1))(2c_1^3d^3s + R_1^3s + 3b_1R_1(4b_2d \\ & + b_1s)\mu_1^2 + 6b_1^2(-12b_2d + b_1s)\mu_1^3 - 12b_2c_1d^2\mu_1(R_1 - 2b_1\mu_1) - 3c_1^2d^2(R_1s + 4b_2d\mu_1 + b_1s\mu_1) \\ & + R_1^2(-3b_2d\mu_1 + 3b_1s\mu_1))^2). \end{aligned}$$

Usando Mathematica se muestra que si se satisface la condición H1 entonces

$$\frac{B_1}{9b_1^3\mu_1^2(-c_1d - R_1 + b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^9(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^6} \neq 0.$$

En consecuencia, la transformación F es regular en $(\bar{P}_3, 0, 0)$. ■

Sean

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \left(\frac{1}{243 b_1^4 \mu_1^5} \right) 2d^3 (2c_1 d + R_1 - 2b_1 \mu_1)^3 (c_1 d - R_1 - b_1 \mu_1) (2c_1 d + R_1 + b_1 \mu_1) \\
 &+ \left(\frac{1}{243 b_1^4 \mu_1^6} \right) 2d^3 (2c_1 d + R_1 - 2b_1 \mu_1) (-2c_1 d - R_1 + 2b_1 \mu_1) (-2c_1 d \mu_1 - R_1 \mu_1 + 2b_1 \mu_1^2) \\
 &(-2c_1^2 d^2 + R_1^2 - 7b_1 R_1 \mu_1 + b_1^2 \mu_1^2 + c_1 d (R_1 + b_1 \mu_1)) \quad y \\
 b_0 &= \left(\frac{1}{27 b_1^2 \mu_1^3} \right) d (8c_1^3 d^3 - 2R_1^3 - 9b_1 c_1^2 d^2 \mu_1 + 21b_1 R_1^2 \mu_1 - 24b_1^2 R_1 \mu_1^2 + 7b_1^3 \mu_1^3 \\
 &- 6c_1 d (R_1^2 - 4b_1 R_1 \mu_1 + b_1^2 \mu_1^2)),
 \end{aligned}$$

los coeficientes cuadráticos de las primeras dos ecuaciones del sistema (3.1). Usando Mathematica se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3.2. *Si $0 < 2R_1 < b_1 \mu_1 - c_1 d$ entonces $a_0 b_0 \neq 0$.*

Del teorema 1.2.12 y las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.3. *Si se satisface la condición H1, $0 < 2R_1 < b_1 \mu_1 - c_1 d$, entonces el sistema (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio \bar{P}_3 con respecto a los parámetros (c_2, K_1) en (\hat{c}_2, \hat{K}_1) .*

De manera análoga como se hizo en el plano xz se pueden obtener los mismos resultados para el correspondiente punto de equilibrio en el plano yz . Para ello fijamos,

$$\begin{aligned}
 K_2 &= 3d \left(\frac{1}{b_2 \mu_2 - c_3 d - 2R_2} + \frac{2}{b_2 \mu_2 - c_3 d + R_2} \right) = \hat{K}_2, \\
 s &= \frac{c_3^2 d^2 - R_2^2 - 2b_2 c_3 d \mu_2 + b_2^2 \mu_2^2}{3c_4 d \mu_2}, \\
 c_4 &= -\frac{(R_2 + b_2 \mu_2 - c_3 d)^2 (2c_3 d + R_2 + b_2 \mu_2)}{9d^2 \mu_2 (2c_3 d + R_2 - 2b_2 \mu_2)} = \hat{c}_4.
 \end{aligned}$$

Considerando $c_3 d - b_2 \mu_2 < R_2 < 0$, o $0 < 2R_2 < b_2 \mu_2 - c_3 d$, los parámetros anteriores son positivos. Así el sistema (3.1) tiene como punto de equilibrio a

$$\bar{P}_4 = \left(0, \frac{3d}{R_2 + b_2 \mu_2 - c_3 d}, \frac{2(b_2 \mu_2 - c_3 d) - R_2}{3c_4 d} \right) \in \Omega,$$

el cual también es no hiperbólico.

Si en las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 y en la condición H1 sustituimos los parámetros R_1 por R_2 , c_1 por c_3 , b_1 por b_2 , μ_1 por μ_2 , se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 3.3.4. *Si los parámetros del sistema (3.1) satisfacen la nueva condición H1 entonces, la transformación*

$$(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) \mapsto \left(f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial (x, y, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial (x, y, z)} \right) \right)$$

es regular en el punto $(\bar{P}_4, 0, 0)$.

Proposición 3.3.5. Si $0 < 2R_2 < b_2\mu_2 - c_3d$ entonces $a_0b_0 \neq 0$.

Teorema 3.3.6. Si se satisface la condición H1 y $0 < 2R_2 < b_2\mu_2 - c_3d$ entonces el sistema (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio \bar{P}_4 con respecto a los parámetros (c_4, K_2) en (\hat{c}_4, \hat{K}_2) .

3.3.2. Bifurcación de Hopf

Para mostrar que el sistema (3.1) presenta órbitas periódicas en Ω_1 , se determinarán condiciones sobre los parámetros para los cuales el sistema presenta una bifurcación de Hopf. Supongamos que el sistema (3.1) tiene un punto de equilibrio de la forma $\hat{P} = (x_0, y_0, z_0)$. De las ecuaciones del sistema tenemos que

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{r(1+c_1x_0)(K_1-x_0+y_0)}{c_2rx_0(-K_1+x_0-y_0)+b_1(K_1+y_0)}, \\ s &= \frac{b_2r(K_2+x_0)(1+c_1x_0)(K_1-x_0+y_0)}{(K_2+x_0-y_0)(b_1(K_1+y_0)(1+c_3y_0)+r(K_1-x_0+y_0)(c_4(1+c_1x_0)y_0-c_2(x_0+c_3x_0y_0)))}, \\ d &= \frac{D_1(b_1x_0(K_1+y_0)(1+c_3y_0)\mu_1-rx_0(K_1-x_0+y_0)(-c_4(1+c_1x_0)y_0+c_2(x_0+c_3x_0y_0))\mu_1+b_2(1+c_1x_0)y_0(K_1+y_0)\mu_2)}{(1+c_1x_0)(K_1+y_0)(b_1(K_1+y_0)(1+c_3y_0)+r(K_1-x_0+y_0)(c_4(1+c_1x_0)y_0-c_2(x_0+c_3x_0y_0)))}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $D_1 = c_2rx_0(x_0 - K_1 - y_0) + b_1(K_1 + y_0)$. Dado que solo estamos interesados en las soluciones positivas, cada una de estas asignaciones deben serlo.

Observación 3.3.7. Las asignaciones de z_0, s y d en (3.11) son positivas si

$$c_2 < \frac{(b_1(K_1 + y_0))}{(rx_0(K_1 - x_0 + y_0))} \text{ y además se satisface alguna de las siguientes condiciones,}$$

1. $x_0 = y_0$,
2. $K_2 + x_0 > y_0$ y $x_0 < y_0$,
3. $K_1 + y_0 > x_0$ y $x_0 > y_0$.

Para determinar que el sistema presenta una bifurcación de Hopf alrededor del punto \hat{P} en el parámetro K_1 , a partir de ahora, fijamos los siguientes parámetros del sistema: $r = 0.5, b_1 = 1.9, c_1 = 0.7, c_2 = 0.10, c_4 = 0.2, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.7, b_2 = 1, c_3 = 0.5, x_0 = 1.5$ y $y_0 = 1$. Además, tomamos en cuenta las asignaciones en (3.11). Bajo estas asignaciones el punto de coexistencia es

$$\hat{P} = \left(1.5, 1, 0.511 - \frac{0.877}{1.061 + K_1} \right).$$

La matriz jacobiana correspondiente al sistema (3.1) es

$$J(\hat{P}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \frac{-0.875 + (-0.631 + 0.265K_1)K_1}{(1 + K_1)^2}, \\
 J_{12} &= \frac{1.125}{(1 + K_1)^2}, \\
 J_{13} &= -\frac{1.282(1.061 + 1.K_1)^2}{(1 + K_1)^2}, \\
 J_{21} &= \frac{0.348(-0.5 + K_1)}{(0.952 + K_1)(0.5 + K_2)(1.5 + K_2)}, \\
 J_{22} &= \frac{0.140 + K_1(-0.139 + K_1(-0.282 + 0.132K_2) + 0.036K_2) - 0.051K_2}{(0.952 + K_1)^2(0.5 + K_2)}, \\
 J_{23} &= -\frac{0.577(1.061 + 1.K_1)^2}{(0.952 + K_1)^2}, \\
 J_{31} &= -\frac{-0.062 + (0.065 + 0.117K_1)K_1}{(1 + K_1)^2}, \\
 J_{32} &= \frac{-0.080 + (0.084 + 0.151K_1)K_1}{(0.952 + K_1)^2}, \\
 J_{33} &= \frac{0.0290 + 0.115K_1 + 0.085K_1^2 - 0.291K_1^3 - 0.720K_1^4 - 0.687K_1^5 - 0.313K_1^6 + 0.056K_1^7}{(1.061 + K_1)(0.952 + K_1(1.952 + K_1))^3}.
 \end{aligned}$$

El polinomio característico asociado a $J(\hat{P})$ es de la forma

$$P(\lambda) = \lambda^3 + l_2(K_1, K_2)\lambda^2 + l_1(K_1, K_2)\lambda + l_0(K_1, K_2), \quad (3.13)$$

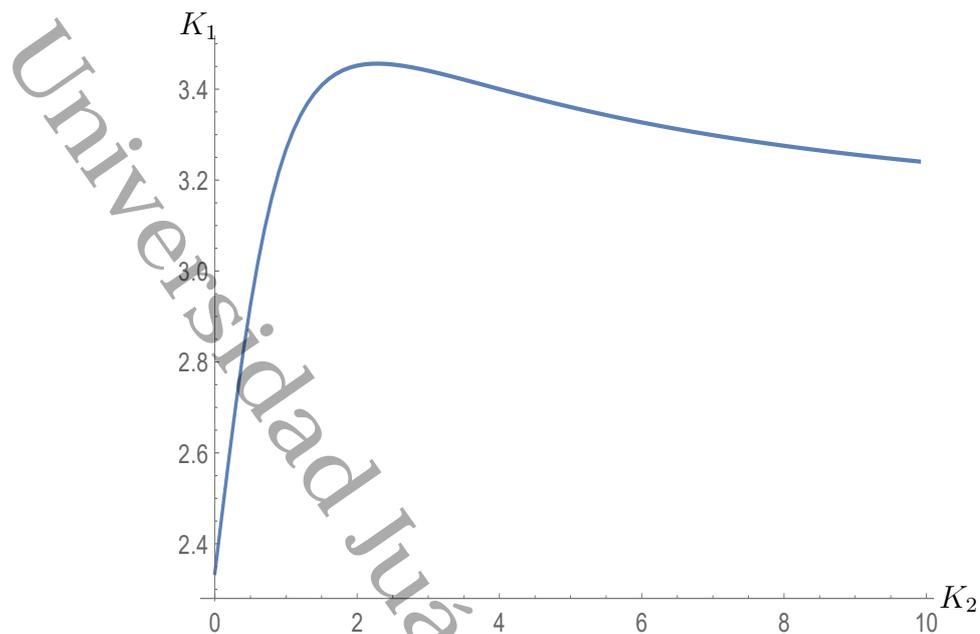
donde $l_0(K_1, K_2)$, $l_1(K_1, K_2)$ y $l_2(K_1, K_2)$ están descritos en el apéndice E. Para determinar cuando $P(\lambda)$ tiene un par de raíces complejas con parte real cero, es necesario verificar que $l_1(K_1, K_2) > 0$ y

$$Q(K_1, K_2) = l_2(K_1, K_2)l_1(K_1, K_2) - l_0(K_1, K_2) = 0. \quad (3.14)$$

Usando Mathematica podemos simplificar (3.14) y obtenemos que $Q(K_1, K_2)$ es un polinomio de grado 34 en K_1 y de grado 4 en K_2 , el cual se describe en el apéndice E. Con la finalidad de mostrar numéricamente el conjunto de puntos donde se satisface la ecuación (3.14), en la figura 3.2 se muestra la curva algebraica

$$\Gamma = \{(K_1, K_2) : Q(K_1, K_2) = 0\}.$$

Para determinar el tipo de bifurcación que presenta el sistema (3.1), en cada pareja de parámetros $(K_1, K_2) \in \Gamma$, calculamos el primer coeficiente de Lyapunov. Fijando los parámetros K_1, K_2 tal que $Q(K_1, K_2) = 0$, obtenemos el siguiente resultado.

Figura 3.2: Curva algebraica Γ .

Teorema 3.3.8. *El sistema (3.1) presenta una bifurcación de Hopf alrededor del punto de equilibrio \hat{P} , la cual es supercrítica cuando $(K_2, K_1) = (0, 2.335)$ y subcrítica cuando $(K_2, K_1) = (2, 3.451)$.*

Demostración. Fijando $K_2 = 0$, se tiene lo siguiente:

Ya que las únicas entradas de $J(\hat{P})$ en las que aparece K_2 son J_{21} y J_{22} , éstas se reescriben como

$$J_{21} = \frac{-0.232 + 0.464K_1}{0.952 + K_1},$$

$$J_{22} = \frac{(0.267 + 0.014K_1 - 0.816K_1^2 - 0.564K_1^3)}{(0.952 + K_1)^3}.$$

El polinomio característico asociado a $J(\hat{P})$ está dado por

$$P(\lambda) = \lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0,$$

donde

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{0.346 + 5.999K_1 + 48.824K_1^2 + 247.915K_1^3 + 879.58K_1^4}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{2313.88K_1^5 + 4673.22K_1^6 + 0.355K_1^{17}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{7400.7K_1^7 + 9302.86K_1^8 + 9334.04K_1^9 + 7474.31K_1^{10} + 4748.71K_1^{11}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{2364.01K_1^{12} + 902.582K_1^{13} + 255.165K_1^{14} + 50.316K_1^{15} + 6.176K_1^{16}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3}, \\
C_1 &= \frac{-0.108 - 1.661K_1 - 11.268K_1^2 - 43.797K_1^3 - 102.132K_1^4}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{648.178K_1^7 - 117.455K_1^5 + 82.835K_1^6 + 1459.81K_1^8 + 2087.73K_1^9}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{907.182K_1^{12} + 2134.1K_1^{10} + 1614.02K_1^{11} + 373.302K_1^{13} + 108.506K_1^{14}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{20.811K_1^{15} + 2.300K_1^{16} + 0.104K_1^{17}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
C_0 &= \frac{-0.030 - 0.425K_1 - 2.740K_1^2 - 10.434K_1^3 - 24.772K_1^4 - 31.712K_1^5}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{141.828K_1^7 + 359.778K_1^8 + 568.721K_1^9 + 646.085K_1^{10} + 549.51K_1^{11}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{169.415K_1^{13} + 59.086K_1^{14} + 14.166K_1^{15} + 2.090K_1^{16} + 0.143K_1^{17}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3} \\
&+ \frac{8.799K_1^6 + 352.914K_1^{12}}{(1 + K_1)^5(0.952 + K_1)^6(0.952 + 1.952K_1 + K_1^2)^3}.
\end{aligned}$$

Usando Mathematica resolvemos numéricamente la ecuación $C_1C_2 - C_0 = 0$ y obtenemos que $K_1 = 2.335$. Sustituyendo este valor de K_1 , el punto de equilibrio de coexistencia es $\hat{P} = (1.5, 1, 0.303)$ y los valores propios asociados a $J(\hat{P})$ son $\lambda_1 = -0.432$ y $\lambda_{2,3} = \pm 0.391 i$. Usando la fórmula de Kuznetsov y Mathematica podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov alrededor de \hat{P} , el cual resulta ser -0.003 . En consecuencia, la bifurcación que presenta el sistema (3.1) en $K_1 = 2.335$ y $K_2 = 0$ es supercrítica y la órbita periódica que aparece es atractora. En la Figura 3.3 se muestra la dinámica del sistema alrededor de \hat{P} .

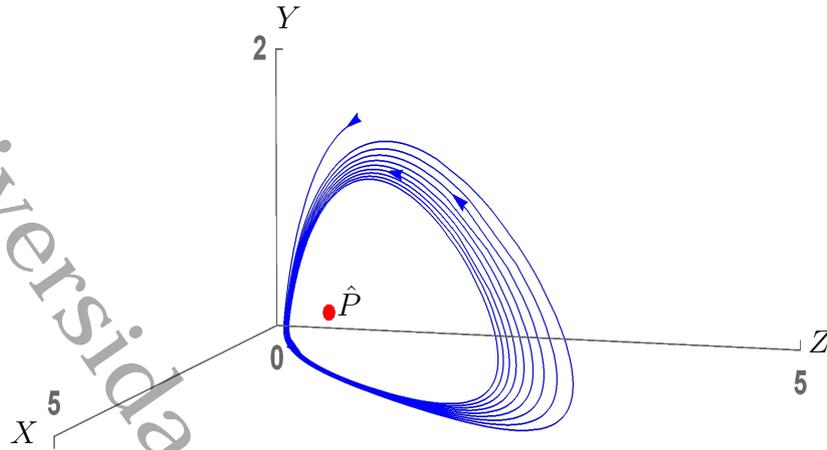


Figura 3.3: Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $\hat{P} = (1.5, 1, 0.303)$, cuando $K_1 = 2.335$ y $K_2 = 0$. En una vecindad del punto de equilibrio \hat{P} hay ciclo límite estable generado por una bifurcación de Hopf supercrítica.

Cuando $K_2 = 2$ tenemos lo siguiente:

El polinomio característico asociado a $J(\hat{P})$ es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_1\lambda + D_0, \quad (3.15)$$

donde

$$D_2 = \frac{1}{\alpha}(0.535 + 8.725K_1 + 66.475K_1^2 + 314.288K_1^3 + 1031.33K_1^4 + 2488.27K_1^5 + 4559.55K_1^6 + 6459.36K_1^7 + 7126.22K_1^8 + 6109.3K_1^9 + 4016.21K_1^{10} + 1962.97K_1^{11} + 665.037K_1^{12} + 126.015K_1^{13} - 3.4758K_1^{14} - 9.093K_1^{15} - 2.251K_1^{16} - 0.202K_1^{17}),$$

$$D_1 = \frac{1}{\alpha}(-0.111 - 1.565K_1 - 9.911K_1^2 - 36.283K_1^3 - 79.957K_1^4 - 84.337K_1^5 + 80.415K_1^6 + 519.986K_1^7 + 1143.46K_1^8 + 1636.98K_1^9 + 1703.22K_1^{10} + 1332.75K_1^{11} + 789.558K_1^{12} + 350.375K_1^{13} + 113.197K_1^{14} + 25.193K_1^{15} + 3.458K_1^{16} + 0.220K_1^{17}),$$

$$D_0 = \frac{1}{\alpha}(-0.065 - 0.826K_1 - 4.575K_1^2 - 14.150K_1^3 - 23.929K_1^4 - 8.034K_1^5 + 68.611K_1^6 + 205.461K_1^7 + 337.004K_1^8 + 377.865K_1^9 + 305.701K_1^{10} + 179.535K_1^{11} + 74.451K_1^{12} + 20.048K_1^{13} + 2.597K_1^{14} - 0.222K_1^{15} - 0.132K_1^{16} - 0.014K_1^{17}),$$

$$\alpha = 0.647449 + k1(11.295 + k1(92.7239 + k1(475.732 + k1(1708.5 + k1(4557.81 + k1(9352.75 + k1(15079. + k1(19337.6 + k1(19838.5 + k1(16281.3 + k1(10628.4 + k1(5451.25 + k1(2150.63 + k1(630.266 + k1(129.29 + k1(16.5756 + 1.k1)))))))))))))))).$$

Usando Mathematica resolvemos numéricamente la ecuación $D_1 D_2 - D_0 = 0$ y obtenemos $K_1 = 3.451$. Sustituyendo este valor de K_1 el punto de equilibrio está dado por $\hat{P} = (1.5, 1, 0.367)$ y los valores propios asociados a $J(\hat{P})$ son $\lambda_1 = -0.041$ y $\lambda_{2,3} = \pm 0.406 i$. Usando la fórmula de Kuznetsov y Mathematica calculamos el primer coeficiente de Lyapunov alrededor de \hat{P} , el cual resulta ser 0.052. En consecuencia, el sistema (3.1) presenta una bifurcación de Hopf subcrítica cuando $K_1 = 3.451$ y $K_2 = 2$, por lo que la órbita periódica que aparece es inestable. Ya que el primer coeficiente de Lyapunov es una función continua en K_2 , existe un valor K_2^0 , tal que el sistema tiene una bifurcación de Hopf supercrítica si $0 < K_2 < K_2^0$ y se tiene una bifurcación degenerada si $K_2 = K_2^0$.

■

3.3.3. Bifurcación Bogdanov-Takens en un CEP en Ω_1

Para mostrar que el sistema (3.1) presenta orbitas periódicas y órbitas homoclínicas estables en Ω_1 , se determinarán condiciones sobre los parámetros para los cuales el sistema presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens. Supongamos que el sistema (3.1) tiene un punto de equilibrio de la forma $P_* = (x_0, y_0, z_0)$. Para ello, vamos a suponer que z_0, s y d satisfacen (3.11) y que además se satisface la observación 3.3.7. Determinaremos que el sistema presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens alrededor del punto P_* en los parámetros μ_2 y s .

A partir de ahora, fijamos los siguientes parámetros del sistema: $r = \frac{5}{2}, b_1 = 4, c_1 = \frac{535}{597}, c_2 = 1, \mu_1 = 1.712, K_1 = 10, K_2 = 1, b_2 = 1, x_0 = \frac{1}{2}$ y $y_0 = 1$. Además, tomamos en cuenta las asignaciones en (3.11), por lo que los parámetros restantes del sistema quedan como:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{245}{199}, \\ s &= \frac{1.312 \times 10^{28} + c_4(-1.267 \times 10^{28} + 1.875 \times 10^{26} c_4)}{-3.531 \times 10^{27} + c_4(-4.810 \times 10^{26} + 5.600 \times 10^{25} c_4)} = \hat{s}, \\ d &= \left(\frac{1}{\alpha} \right) (-1.279 \times 10^{55} + c_4(1.805 \times 10^{55} + c_4(2.603 \times 10^{54} \\ &\quad + c_4(-3.544 \times 10^{53} + c_4(4.698 \times 10^{51} + 6.441 \times 10^{35} c_4))))), \\ c_3 &= \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) (-((1.087(-1.681 \times 10^{26} + 35.c_4(-6.544 \times 10^{23} \\ &\quad + 7.619 \times 10^{22} c_4))(4.392 \times 10^{28} + 35.c_4(-4.7998 \times 10^{25} + 2.072 \times 10^{23} c_4))))), \\ \mu_2 &= \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) (0.0000203446(5055. - 60515.c_4 + (7.(-5.231 \times 10^{31} + 2.319 \times 10^{31} c_4))) = \hat{\mu}_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha &= -1.254 \times 10^{55} + c_4(1.040 \times 10^{55} + c_4(1.670 \times 10^{54} + c_4(-2.165 \times 10^{53} \\ &\quad + 2.844 \times 10^{51}c_4))), \\ \alpha_1 &= (3.55307 \times 10^{27} + 8575.c_4(-4.00135 \times 10^{23} + 5.92212 \times 10^{21}c_4))^2.\end{aligned}$$

Así el sistema (3.1) tiene como punto de equilibrio de coexistencia a

$$P_* = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{245}{199} \right).$$

Para garantizar la positividad de los parámetros del sistema, a partir de ahora consideramos la siguiente hipótesis.

H2) $1.051 < c_4 < 1.492$.

La matriz jacobiana del sistema (3.1) evaluada en P_* es

$$J(P_*) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde

$$J_{11} = \frac{8645}{7744},$$

$$J_{12} = \frac{5}{968},$$

$$J_{13} = -\frac{147459}{216832},$$

$$J_{21} = 0.00001009 \left(1.475 \times 10^5 + \frac{5.231 \times 10^{31} - 2.319 \times 10^{31}c_4}{-1.682 \times 10^{26} + 35.00c_4(-6.545 \times 10^{23} + 7.620 \times 10^{22}c_4)} \right),$$

$$\begin{aligned}J_{22} &= -\frac{1}{\alpha_2} (0.04467(3.553 \times 10^{27} + 8575.c_4(-4.001 \times 10^{23} + 5.922 \times 10^{21}c_4))(1.362 \times 10^{24} \\ &\quad + 245.0c_4(-9.980 \times 10^{23} + 2.724 \times 10^{22}c_4))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{23} &= \frac{1}{\alpha_2} ((0.01970(3.553 \times 10^{27} + 8575.c_4(-4.001 \times 10^{23} + 5.922 \times 10^{21}c_4))(4.064 \times 10^{26} \\ &\quad + 245.0c_4(2.281 \times 10^{24} + 35.00c_4(-5.745 \times 10^{22} + 8.392 \times 10^{20}c_4)))))),\end{aligned}$$

$$J_{31} = \frac{41834493798880950}{21126143373290839},$$

$$J_{32} = \frac{0.003(4.393 \times 10^{28} + 35.00c_4(-4.795 \times 10^{25} + 2.073 \times 10^{23}c_4))}{1.682 \times 10^{26} - 35.00c_4(-6.545 \times 10^{23} + 7.620 \times 10^{22}c_4)},$$

$$J_{33} = \frac{0.023(3.553 \times 10^{27} + c_4(6.175 \times 10^{27} + 1120.c_4(-2.444 \times 10^{23} + 8.392 \times 10^{20}c_4)))}{-1.682 \times 10^{26} + 35.00c_4(-6.545 \times 10^{23} + 7.620 \times 10^{22}c_4)},$$

$$\alpha_2 = (1.682 \times 10^{26} + 35.00(6.545 \times 10^{23} - 7.620 \times 10^{22}c_4)c_4)^2.$$

Los valores propios de $J(P_*)$ son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_3 &= \left(\frac{1}{\alpha_3}\right) (6.703 \times 10^{-23} (2.588 \times 10^{74} + 3.189 \times 10^{74} c_4 - 6.111 \times 10^{74} c_4^2 \\ &\quad + 2.939 \times 10^{73} c_4^3 - 3.701 \times 10^{71} c_4^4 + 8.7611 \times 10^{68} c_4^5)),\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_3 = (1.681 \times 10^{26} + 2.290 \times 10^{25} c_4 - 2.666 \times 10^{24} c_4^2)^2.$$

Por lo tanto, bajo la hipótesis H2, el punto P_* es no hiperbólico.

Observación 3.3.9. *Si se satisface la hipótesis H2 entonces el valor propio λ_3 es negativo.*

Ahora analizaremos el sistema (3.1) cuando variamos los parámetros (μ_2, s) en una pequeña vecindad de $(\hat{\mu}_2, \hat{s})$. Para ello consideramos $(\hat{\mu}_2 + \beta_2, \hat{s} + \gamma_2)$ donde (β_2, γ_2) están en una vecindad de cero.

A continuación mostraremos que el sistema (3.1) presenta bifurcación Bogdanov-Takens con respecto a los parámetros (μ_2, \hat{s}) .

Proposición 3.3.10. *Si los parámetros del sistema (3.1) satisfacen la hipótesis H2 entonces la transformación*

$$(x, y, z, \beta_2, \gamma_2) \mapsto \left(f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right) \right)$$

es regular en el punto $(P_*, 0, 0)$.

Demostración. En el apéndice E, mostramos como se reescribe el sistema (3.1), cuando $(\mu_2, s) = (\hat{\mu}_2 + \beta_2, \hat{s} + \gamma_2)$.

Sea $F(x, y, z, \beta_2, \gamma_2) = \left(f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2), \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right), \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right) \right)$. Las expresiones para $\text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right)$ y $\text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x, y, z)} \right)$ se pueden calcular con Mathematica, pero son demasiado extensas por lo que se omiten en este trabajo.

Para mostrar la regularidad de F calcularemos el determinante de

$$(DF)(P_*, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{8645}{7744} & \frac{5}{968} & -\frac{147459}{216832} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{41834493798880950}{21126143373290839} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -\frac{1}{3} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

donde las entradas a_{ij} de la matriz se muestran explícitamente en el apéndice E.

Usando Mathematica se obtiene

$$\begin{aligned} Det((DF)(P_*, 0, 0)) = & \left(\frac{1}{\alpha_4}\right) (6.568 \times 10^{-43} c_4(-2717. + 35.00c_4)(3.553 \times 10^{27} \\ & + 8575.c_4(-4.001 \times 10^{23} + 5.922 \times 10^{21}c_4))^3(-3.381 \times 10^{113} \\ & + 5.000c_4(4.546 \times 10^{113} + 245.0c_4(-1.545 \times 10^{111} \\ & + 5.000c_4(1.058 \times 10^{110} + 4.217 \times 10^{18}c_4(-1.126 \times 10^{90} \\ & + 1.300 \times 10^{25}c_4(1.694 \times 10^{63} + 5.422 \times 10^{25}c_4(-3.125 \times 10^{35} \\ & + 1.314 \times 10^{33}c_4))))))))) \end{aligned}$$

donde,

$$\alpha_4 = (1.682 \times 10^{26} + 35.00(6.545 \times 10^{23} - 7.620 \times 10^{22}c_4)c_4)^6.$$

Por último, con la ayuda de Mathematica se muestra que si se satisface la hipótesis H2 entonces

$$Det((DF)(P_*, 0, 0)) \neq 0.$$

En consecuencia, la transformación F es regular en $(P_*, 0, 0)$. ■

Sean

$$\begin{aligned} a_0 = & \left(\frac{1}{\alpha_4}\right) (5.796 \times 10^{65} c_4^2(-2.064 \times 10^{12} + 5.648 \times 10^{10}c_4)(3.553 \times 10^{27} \\ & + 8575.c_4(-4.001 \times 10^{23} + 5.922 \times 10^{21}c_4))^3(-4.426 \times 10^{64} \\ & + 5.000c_4(7.589 \times 10^{63} + 175.0c_4(-1.878 \times 10^{61} + 7.000c_4(8.839 \times 10^{58} \\ & + 1.678 \times 10^{21}c_4(-6.578 \times 10^{35} + 3.176 \times 10^{33}c_4)))))) \quad y \\ b_0 = & \left(\frac{1}{\alpha_4}\right) (-1.166 \times 10^{17}c_4(3.553 \times 10^{27} + 8575.c_4(-4.001 \times 10^{23} \\ & + 5.922 \times 10^{21}c_4))(1.273 \times 10^{180} + 25.00c_4(-2.009 \times 10^{179} + c_4(4.082 \times 10^{179} \\ & + 35.00c_4(-1.396 \times 10^{178} + 35.00c_4(2.606 \times 10^{176} + 175.0c_4(-4.249 \times 10^{173} \\ & + 3.136 \times 10^{13}c_4(1.141 \times 10^{159} + 8.434 \times 10^{18}c_4(-5.536 \times 10^{138} \\ & + 3.776 \times 10^{21}c_4(3.356 \times 10^{115} + 8.752 \times 10^{22}c_4(-5.073 \times 10^{90} \\ & + 7.311 \times 10^{24}c_4(5.106 \times 10^{63} + 2.154 \times 10^{23}c_4(-8.434 \times 10^{37} \\ & + 9.409 \times 10^{34}c_4))))))))) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & (2.589 \times 10^{74} + 5.000c_4(6.379 \times 10^{73} + 35.00c_4(-3.492 \times 10^{72} \\ & + 4.761 \times 10^{23}c_4(3.528 \times 10^{47} + 8.951 \times 10^{20}c_4(-4.963 \times 10^{24} + 1.175 \times 10^{22}c_4))))^3, \end{aligned}$$

los coeficientes cuadráticos de las primeras dos ecuaciones del sistema (3.1). Usando Mathematica se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3.11. *Si se satisface la condición H2 entonces, $a_0 b_0 \neq 0$.*

Del teorema 1.2.12 y las proposiciones 3.3.10 y 3.3.11 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. *Si se satisface la hipótesis H2 entonces el sistema (3.1) presenta una bifurcación Bogdanov-Takens en el punto de equilibrio P_* con respecto a los parámetros (μ_2, s) en $(\hat{\mu}_2, \hat{s})$.*

Ejemplo 3.3.13. Tomando $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ y $c_4 = 1.2$ entonces se satisfacen las hipótesis del teorema 3.3.12 y existen

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (10, 0, 0), \\ P_2 &= (0, 1, 0), \\ P_3 &= (9.813, 0, 0.128), \\ P_4 &= (9.371, 0.094, 0.725), \\ P_5 &= (9.250, 0.351, 1.605), \\ P_6 &= (0.5, 1, 1.231), \end{aligned}$$

puntos de equilibrio del sistema (3.1). En este caso P_0, P_1, P_2, P_3 y P_5 son puntos silla, P_4 es un pozo y P_6 es un punto de equilibrio no hiperbólico.

La matriz jacobiana asociado al punto de equilibrio P_4 está dada por

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} -2.152 & 2.154 & -1.342 \\ 0.000037 & 0.167 & -0.055 \\ 0.018 & 9.945 & -1.771 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios están dados por $\lambda_1 = -2.111, \lambda_2 = -1.469$ y $\lambda_3 = -0.175$. En consecuencia, P_4 es localmente asintóticamente estable.

Por otro lado, los valores propios de

$$J(P_6) = \begin{pmatrix} 1.116 & 0.005 & -0.680 \\ 0.200 & -0.168 & -0.099 \\ 1.980 & 0.663 & -1.291 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_{1,2} = 0$ y $\lambda_3 = -0.343$. En consecuencia, P_6 es un punto de equilibrio no hiperbólico. En la figura 3.4 se muestra la dinámica del sistema (3.1) para estos valores de los parámetros.

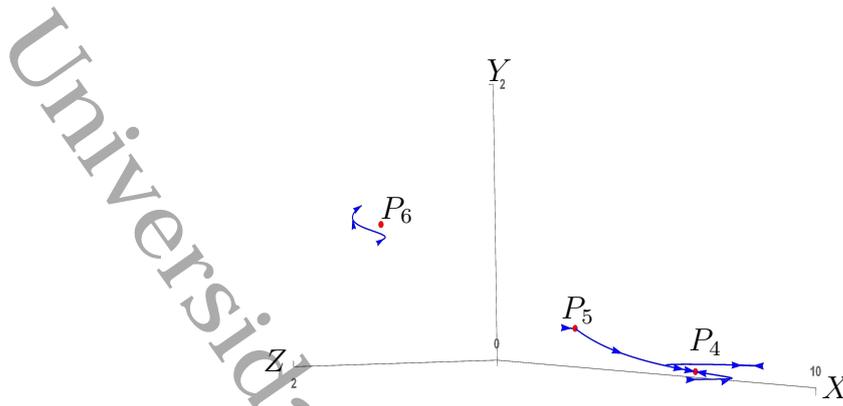


Figura 3.4: Retrato fase del sistema (3) alrededor de $P_4 = (9.371, 0.094, 0.725)$, $P_5 = (9.250, 0.351, 1.605)$ y $P_6 = (0.5, 1, 1.231)$, cuando $\beta_2 = 0$ y $\gamma_2 = 0$. El punto de equilibrio P_4 es localmente asintóticamente estable, P_5 es inestable y P_6 es no hiperbólico.

3.4. Simulación numérica

En esta sección se muestran diferentes escenarios que puede presentar el sistema (3.1) sobre las curvas de bifurcación generadas de la bifurcación Bogdanov-Takens analizada en la sección 2.3.4 para el modelo bi-dimensional (2.1).

Tomamos $\beta = 0.26$ y $\gamma = 1.734 * 10^{-18}$ sobre la curva

$$SN = \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma - 3.409 \gamma^2 - 3.283 \gamma\beta = 0, \gamma > 0\}.$$

Fijamos a partir de ahora $s = 0.015$, $K_2 = 5$, $b_2 = 0.45$, $\mu_2 = 0.02$, $c_3 = 0.3$, $c_4 = 0.01$, $\mu_1 = 0.294$, $b_1 = 1.965$, $c_1 = 0.059$, $d = 0.04$ y $R_1 = 0.05$. El sistema (3.1) tiene la siguiente dinámica.

Los puntos de equilibrio del sistema son:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (6.614, 0, 0), \\ P_2 &= (0, 5, 0), \\ P_3 &= (2.641, 0, 1.240), \\ P_4 &= (1.986, 0, 1.088), \end{aligned}$$

donde P_0 , P_1 y P_2 son puntos silla. Por otro lado, para analizar la dinámica de P_3 y P_4 calculamos la parte lineal del sistema en estos puntos.

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.046 & 0.170 & -0.412 \\ 0 & -0.544 & 0 \\ 0.049 & 0.011 & -0.278 \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\lambda_1 = -0.544$, $\lambda_2 = -0.194$ y $\lambda_3 = -0.037$, en consecuencia P_3 es un pozo.

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 0.165 & 0.096 & -0.529 \\ 0 & -0.475 & 0 \\ 0.076 & 0.009 & -0.244 \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.475$, $\lambda_2 = -0.078$ y $\lambda_3 = 0$, en consecuencia P_4 es un punto de equilibrio no hiperbólico. En la figura 3.5 se muestra la dinámica del sistema (3.1) bajo los valores de estos parámetros.

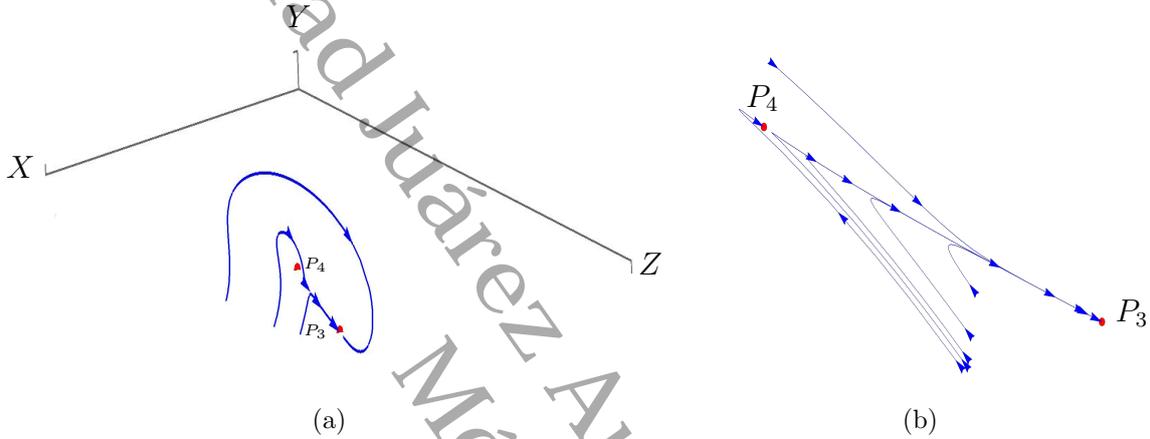


Figura 3.5: a) Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_3 = (2.641, 0, 1.240)$ y $P_4 = (1.986, 0, 1.088)$ cuando $\beta = 0.26$, $\gamma = 1.734 \cdot 10^{-18}$. El punto de equilibrio P_3 es localmente asintóticamente estable y P_4 es un silla-nodo. b) Zoom alrededor de P_3 y P_4 .

Ahora, tomemos $\beta = 0.1$ y $\gamma = -0.615$ sobre la curva

$$H = \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma + 1.181 \gamma^2 - 10.345 \gamma \beta + 2.716 \beta^2 = 0, \gamma < 0, \beta > 0\}$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.1) son:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (5.998, 0, 0), \\ P_2 &= (0, 5, 0), \\ P_3 &= (1.463, 0, 1.080), \end{aligned}$$

donde P_0, P_1, P_2 son puntos silla. Por otro lado,

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.205 & 0.079 & -0.699 \\ 0 & -0.471 & 0 \\ 0.139 & 0.009 & -0.194 \end{pmatrix},$$

y tiene valores propios $\lambda_{1,2} = 0.005 \pm 0.240 i$ y $\lambda_3 = -0.471$, en consecuencia P_3 es inestable. En la figura 3.6 se muestra la dinámica del sistema (3.1).

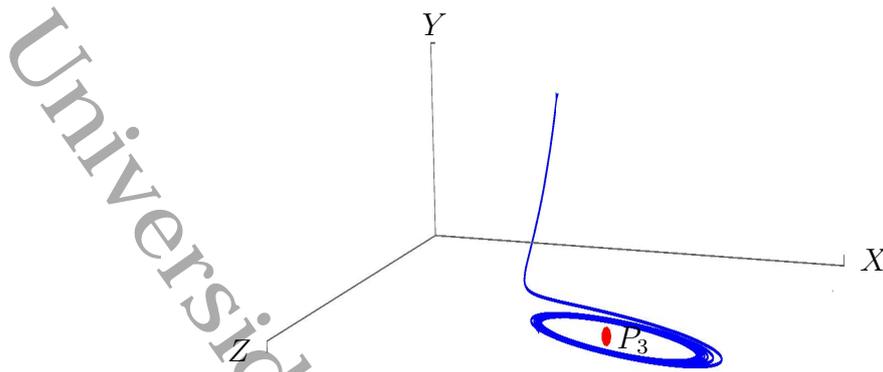


Figura 3.6: Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_3 = (1.463, 0, 1.080)$ cuando $\beta = 0.1, \gamma = -0.615$. El punto de equilibrio P_3 es inestable y existe un ciclo límite generado por una bifurcación de Hopf.

Por otro lado, cuando β y γ están en la curva

$$HL = \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma + 5.589 \gamma^2 - 17.125 \gamma\beta + 5.323 \beta^2 = 0, \gamma < 0\},$$

Por ejemplo, $\beta = 0.04$ y $\gamma = -0.007$, el sistema (3.1) tiene como puntos de equilibrio

$$P_0 = (0, 0, 0),$$

$$P_1 = (6.605, 0, 0),$$

$$P_2 = (0, 5, 0),$$

$$P_3 = (2.583, 0, 1.692),$$

$$P_4 = (2.138, 0, 1.555),$$

$$P_5 = (1.883, 0, 1.448),$$

P_0, P_1, P_2 son puntos silla. Para P_3 se tiene

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0.079 & 0.223 & -0.420 \\ 0 & -0.746 & 0 \\ 0.070 & 0.015 & -0.276 \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.746, \lambda_2 = -0.145$ y $\lambda_3 = -0.050$, en consecuencia P_3 es estable. Por otro lado,

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 0.195 & 0.153 & -0.495 \\ 0 & -0.685 & 0 \\ 0.094 & 0.014 & -0.254 \end{pmatrix}.$$

Ésta tiene valores propios $\lambda_1 = -0.685, \lambda_2 = -0.091$ y $\lambda_3 = 0.032$, en consecuencia P_4 es una silla. Por último,

$$J(P_5) = \begin{pmatrix} 0.244 & 0.118 & -0.555 \\ 0 & -0.636 & 0 \\ 0.113 & 0.013 & -0.236 \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.636, \lambda_{2,3} = 0.003 \pm 0.070 i$, en consecuencia P_5 es inestable, véase la figura 3.7.

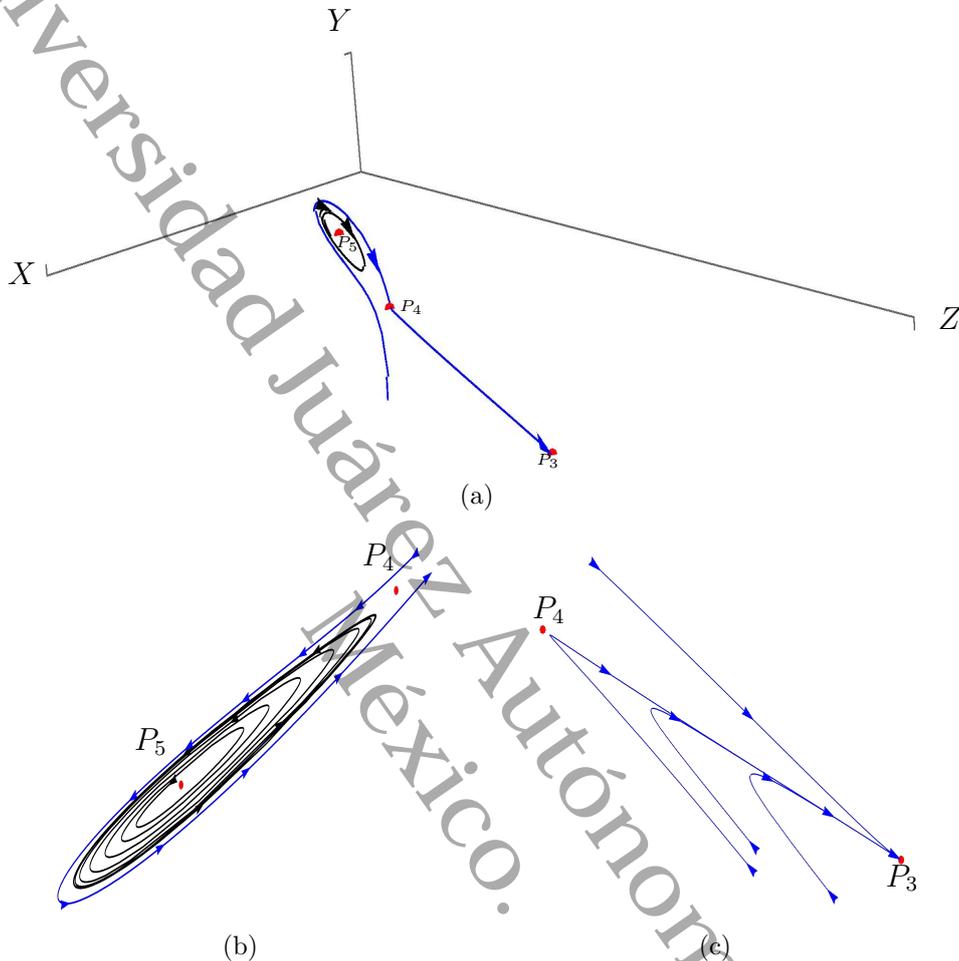


Figura 3.7: a) Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_4 \equiv (2.138, 0, 1.555)$ y $P_5 \equiv (1.883, 0, 1.448)$ cuando $\beta = 0.04$ y $\gamma = -0.007$. El punto de equilibrio P_3 es localmente asintóticamente estable y los puntos P_4 y P_5 son puntos silla. En particular, existe una órbita homoclínica en P_4 . b) Zoom alrededor de P_5 . c) Zoom alrededor de P_4 y P_3 .

Sean $s = 1.303, K_2 = 5.623, b_2 = 0.599, \mu_2 = 0.007, c_3 = 0.087, c_4 = 0.029, \mu_1 = 0.247, b_1 = 1.965, c_1 = 0.185, d = 0.198$ y $R_1 = -0.071$. Los puntos de equilibrio del sistema se muestran en la tabla 3.1. Los puntos de equilibrio P_0, P_1, P_2 y P_5 son silla, P_3 es una fuente, P_6 es un pozo y P_4 es un punto de equilibrio no hiperbólico. Ya que los parámetros satisfacen el teorema 3.3.6, el sistema (3.1) presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens en P_4 . En la figura 3.8 se muestra un esbozo del retrato fase del sistema (3.1).

| Puntos de Equilibrio | Valores propios |
|---------------------------------|-------------------------|
| $P_0 = (0, 0, 0)$ | 1.623, 1.303, -0.198 |
| $P_1 = (4.149, 0, 0)$ | -1.623, 1.303, 0.941 |
| $P_2 = (0, 5.623, 0)$ | 1.623, -1.303, -0.182 |
| $P_3 = (1.005, 0, 1.542)$ | 0.379, 0.148, 0.086 |
| $P_4 = (1.572, 0, 1.977)$ | 0.118, 0, 0 |
| $P_5 = (63.133, 60.374, 3.094)$ | -2.555, -0.172, 0.002 |
| $P_6 = (2.103, 0.147, 2.181)$ | -0.148, -0.059 ± 0.072i |

Tabla 3.1: Puntos de Equilibrio.

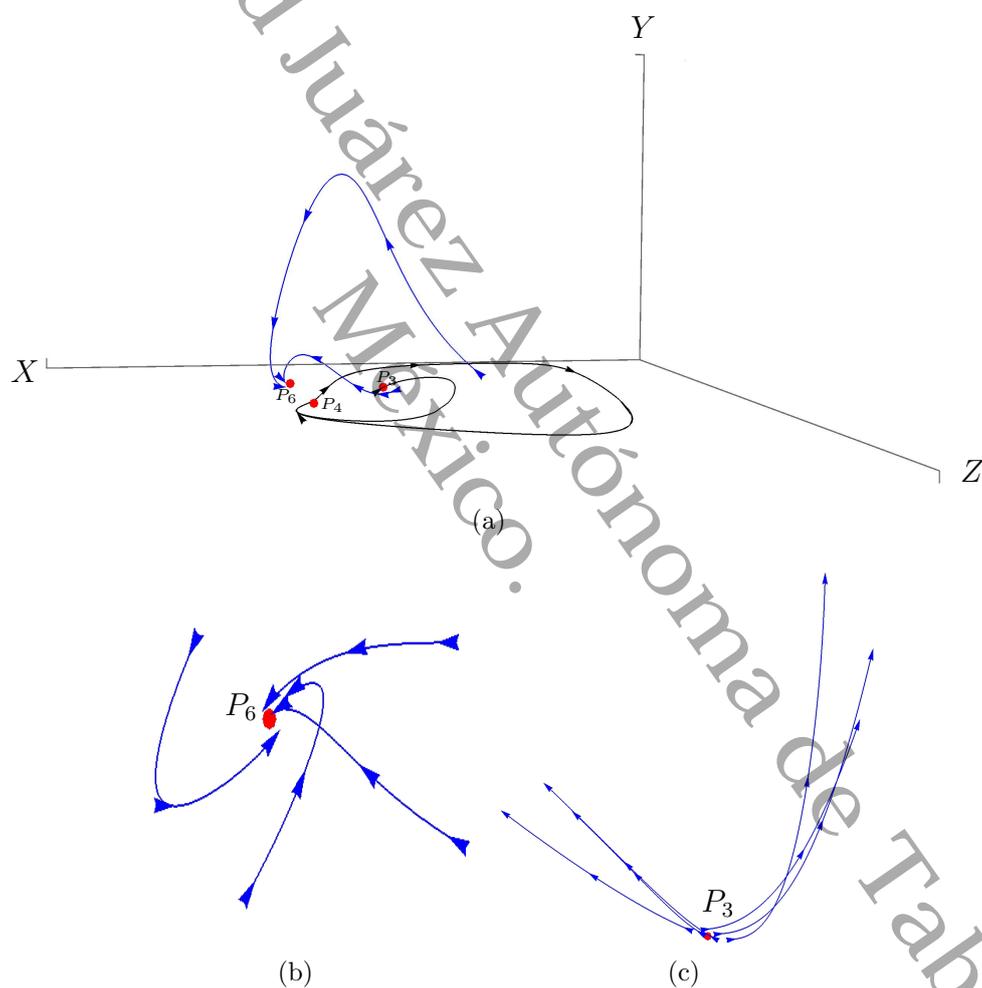


Figura 3.8: a) Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_3 = (1.005, 0, 1.542)$, $P_4 = (1.572, 0, 1.977)$ y $P_6 = (2.103, 0.147, 2.181)$. El punto de equilibrio P_3 es una fuente, P_4 es un silla-nodo y P_6 es localmente asintóticamente estable. b) Zoom alrededor de P_6 . c) Zoom alrededor de P_3 .

3.5. Contraste entre los planos xz, yz y Ω_1 .

En esta sección se muestra una exploración numérica del sistema (3.1) bajo la bifurcación Bogdanov-Takens analizada en la sección 2.3.4. En particular, debido a la reflexión que existe entre los planos xz, yz mostramos qué ocurre cuando ambos mantienen la misma dinámica en Ω_1 .

Fijamos,

$$s = \frac{c_3^2 d^2 - R_2^2 - 2b_2 c_3 d \mu_2 + b_2^2 \mu_2^2}{3c_4 A d \mu_2},$$

$$K_2 = 3d \left(\frac{1}{-c_3 d - 2R_2 + b_2 \mu_2} + \frac{2}{-c_3 d + R_2 + b_2 \mu_2} \right),$$

$$c_4 = -\frac{(-c_3 d + R_2 + b_2 \mu_2)^2 (2c_3 d + R_2 + b_2 \mu_2)}{9d^2 \mu_2 (2c_3 d + R_2 - 2b_2 \mu_2)},$$

donde R_2 es un parámetro auxiliar como en (2.6) para el plano yz . Además, tomamos $\beta = 0.012$ y $\gamma = -1.419$ sobre la curva

$$H = \{(\beta, \gamma) : 1.805 \gamma + 1.181 \gamma^2 - 10.345 \gamma \beta + 2.716 \beta^2 = 0, \gamma < 0, \beta > 0\},$$

$b_1 = b_2 = 1.965, \mu_1 = \mu_2 = 0.294, c_1 = c_3 = 0.059, d = 0.04, R_1 = R_2 = 0.05$.

Los puntos de equilibrio del sistema (3.1) son

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (5.195, 0, 0), \\ P_2 &= (0, 5.195, 0), \\ P_3 &= (0, 1.308, 1.104), \\ P_4 &= (1.308, 0, 1.104), \\ P_5 &= (0.429, 0.429, 0.896), \\ P_6 &= (2.916, 3.728, 4.489), \\ P_7 &= (3.209, 3.209, 4.477), \\ P_8 &= (3.728, 2.916, 4.489). \end{aligned}$$

P_0, P_1 y P_2 son puntos silla. Para analizar la dinámica de los puntos de equilibrio P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 y P_8 calculamos las matrices jacobianas, respectivamente. Para P_3 se tiene que

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -0.635 & 0 & 0 \\ 0.097 & 0.154 & -0.775 \\ 0.638 & 0.178 & -0.172 \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.635$ y $\lambda_{2,3} = -0.008 \pm 0.334 i$, en consecuencia P_3 es localmente asintóticamente estable.

Por otro lado, para P_4 se tiene

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 0.154 & 0.097 & -0.775 \\ 0 & -0.635 & 0 \\ 0.178 & 0.638 & -0.172 \end{pmatrix},$$

la cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.635$ y $\lambda_{2,3} = -0.008 \pm 0.334 i$, en consecuencia P_4 es localmente asintóticamente estable.

Para los puntos de equilibrio de coexistencia se tiene que los valores propios de

$$J(P_5) = \begin{pmatrix} 0.158 & 0.008 & -0.561 \\ 0.008 & 0.158 & -0.561 \\ 0.335 & 0.335 & -0.069 \end{pmatrix},$$

son $\lambda_1 = 0.150$ y $\lambda_{2,3} = 0.049 \pm 0.602 i$, en consecuencia P_5 es una fuente. Para

$$J(P_6) = \begin{pmatrix} 0.410 & 0.164 & -0.092 \\ 0.324 & 0.046 & -0.079 \\ 0.035 & 0.022 & -0.349 \end{pmatrix},$$

son $\lambda_1 = 0.516$, $\lambda_2 = -0.343$ y $\lambda_3 = -0.066$ en consecuencia P_6 es un punto silla.

$$J(P_7) = \begin{pmatrix} 0.260 & 0.223 & -0.087 \\ 0.223 & 0.260 & -0.087 \\ 0.030 & 0.030 & -0.348 \end{pmatrix},$$

tiene como valores propios a $\lambda_1 = 0.477$, $\lambda_2 = -0.342$ y $\lambda_3 = 0.036$ en consecuencia P_7 es un punto silla.

$$J(P_8) = \begin{pmatrix} 0.046 & 0.324 & -0.079 \\ 0.164 & 0.410 & -0.092 \\ 0.022 & 0.035 & -0.349 \end{pmatrix},$$

tiene como valores propios a $\lambda_1 = 0.516$, $\lambda_2 = -0.343$ y $\lambda_3 = -0.066$, en consecuencia P_8 es un punto silla. En la figura 3.9 se muestra el retrato fase correspondiente a estos parámetros.

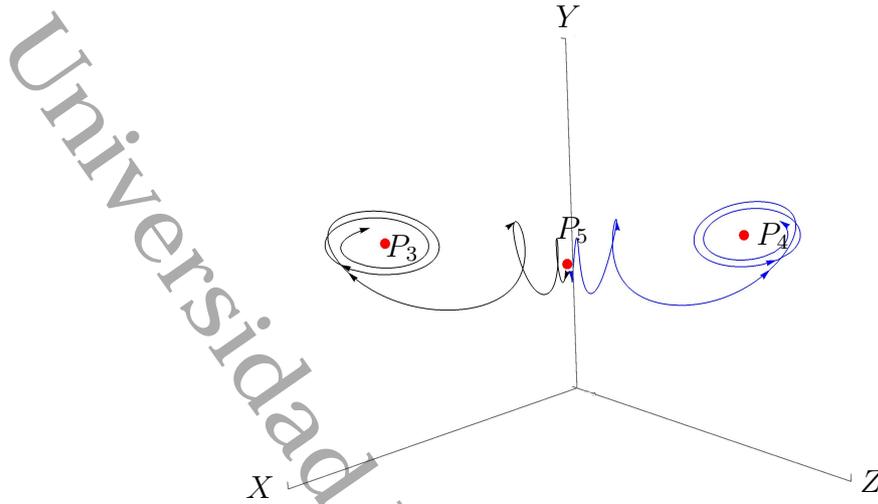


Figura 3.9: Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_3 = (0, 1.308, 1.104)$, $P_4 = (1.308, 0, 1.104)$ y $P_5 = (0.429, 0.429, 0.896)$ cuando $\beta = 0.012$, $\gamma = -1.419$. Los puntos de equilibrio P_3 y P_4 son localmente asintóticamente estables y P_5 es una fuente.

3.6. Exploración numérica

Fijando $s = 0.872$, $K_1 = 1.072$, $K_2 = 35.077$, $b_2 = 0.7$, $\mu_2 = 0.005$, $c_3 = 0.005$, $c_4 = 0.029$, $\mu_1 = 0.671$, $b_1 = 1.9$, $c_1 = 0.698$ y $d = 0.198$, el sistema (3.1) tiene la siguiente dinámica.

Los puntos de equilibrio del sistema son:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), \\ P_1 &= (1.072, 0, 0), \\ P_2 &= (0, 35.077, 0), \\ P_3 &= (0.155, 0, 0.067), \\ P_4 &= (0.090, 32.684, 0.111), \end{aligned}$$

donde P_0, P_1, P_2 son puntos silla. Por otro lado, $J(P_3)$ tiene valores propios $\lambda_1 = 0.825$ y $\lambda_{2,3} = -0.004 \pm 0.151 i$, en consecuencia P_3 es inestable.

Los valores propios de $J(P_4)$ son $\lambda_1 = -0.792$ y $\lambda_{2,3} = -0.0005 \pm 0.142 i$, en consecuencia P_4 es localmente asintóticamente estable. En conclusión se obtiene que bajo ciertas condiciones en los parámetros, se garantiza la coexistencia de las tres poblaciones con un punto de equilibrio estable P_4 como se muestra en la figura 3.10.

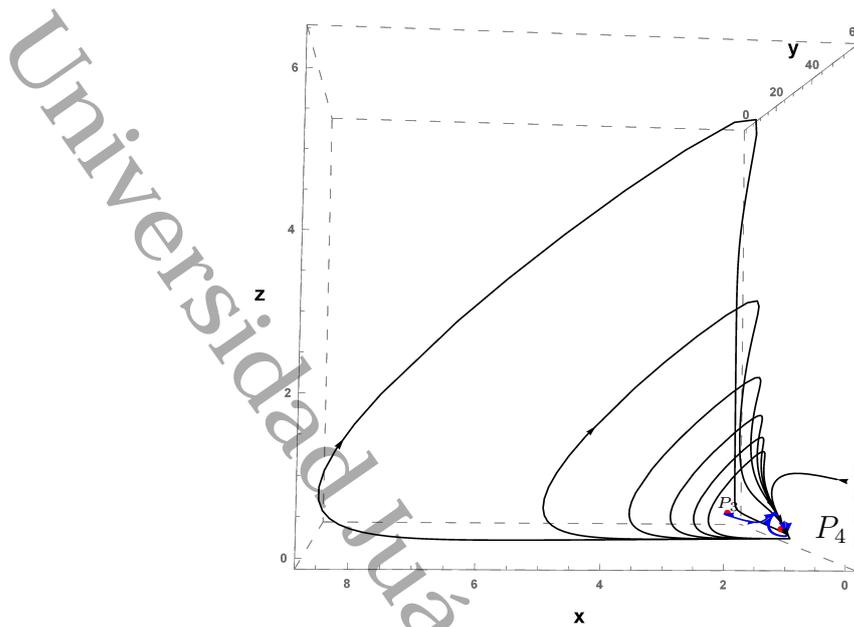


Figura 3.10: Retrato fase del sistema (3.1) alrededor de $P_3 = (0.155, 0, 0.067)$ y $P_4 = (0.090, 32.684, 0.111)$. El punto de equilibrio P_4 es localmente asintóticamente estable y P_3 es inestable.

Ejemplo 3.6.1. Tomamos los valores de los parámetros,

$$c_1 = 0.0156, d = 0.65, b_1 = 0.23, \mu_1 = 0.14, c_2 = 0.009, r = 0.8 \text{ y } K_1 = 25. \quad (3.17)$$

El sistema (2.1) tiene en $(25, 0)$ un punto de equilibrio el cual es globalmente estable, es decir, no sobrevive el depredador. Incorporamos la población y en mutualismo con x , tomando los siguientes valores de los parámetros en el sistema (3.1),

$$\begin{aligned} c_1 = 0.0156, d = 0.65, b_1 = 0.23, \mu_1 = 0.14, c_2 = 0.009, r = 0.8, \\ K_1 = 25, \mu_2 = 0.18, b_2 = 0.45, s = 0.035, K_2 = 40, c_3 = 1 \text{ y } c_4 = 0.002. \end{aligned} \quad (3.18)$$

El sistema (3.1) tiene como punto de equilibrio a $(28.376, 6.343, 0.518)$, el cual es localmente asintóticamente estable. Mientras que en ausencia de la población x , el punto de equilibrio $(40, 0)$ en el plano yz es globalmente estable. Por lo que la población depredadora no sobrevive en ausencia de una de las presas.

Ejemplo 3.6.2. Tomamos en el sistema (2.1) los parámetros como (3.17) e incrementamos la capacidad de carga de la población x a $K_1 = 30$, lo cual genera el punto de equilibrio $(29.772, 0.038)$, que es globalmente estable. Incorporando la población en mutualismo y , y tomando los parámetros como en (3.18) se mantiene la coexistencia en el sistema tridimensional con un CEP $(29.606, 0.108, 0.086)$ que es localmente asintóticamente estable.

Al incrementar la capacidad de carga K_1 de la población x , el punto de equilibrio de coexistencia en el plano xz se mantiene y es estable. Además, a medida que K_1 crece,

ambas poblaciones van creciendo pero la coordenada z crece más lento. Por otro lado, cuando consideramos los valores de los parámetros como en (3.18), y K_1 aumenta, el CEP estable desaparece. Por ejemplo, si $K_1 = 35$ no hay punto de coexistencia. Sin embargo, si K_1 se incrementa aparece de nuevo un punto de coexistencia el cual es inestable. Tal es el caso $K_1 = 45$ para el cual, el sistema tiene un punto de equilibrio de coexistencia inestable (516.371, 494.383, 4.329). Además, este comportamiento se mantiene para valores de K_1 mas grandes.

Ejemplo 3.6.3. Tomamos en el sistema (2.1) los parámetros como en (3.17) con $K_1 = 30$ y variando el parámetro de interferencia c_2 , el punto de equilibrio estable se mantiene. Incorporando la población en mutualismo y , y tomando los parámetros como en (3.18), al variar c_2 se tiene que para valores pequeños de interferencia como $c_2 = 0.016$, hay un punto de coexistencia (29.695, 0.256, 0.097), el cual es localmente asintóticamente estable. Además, este desaparece al incrementar c_2 , por ejemplo cuando $c_2 = 0.027$ no hay punto de coexistencia.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Conclusión

En este trabajo se ha analizado la dinámica asociada a un modelo que describe la interacción entre dos especies de presas en mutualismo, en presencia de un depredador común y los diferentes escenarios que podrían observarse en la naturaleza. En el sistema (2.1) el cual considera una población de presas y un depredador es posible obtener hasta tres puntos de equilibrios de coexistencia, como se mostró en [L]. En el caso donde se tienen tres puntos equilibrio de coexistencia P_2 , P_3 y P_4 , el punto de equilibrio P_2 siempre es silla y los puntos de equilibrio P_3 y P_4 pueden ser simultáneamente estables, generando una biestabilidad en el sistema. Así, dependiendo de las condiciones iniciales el sistema puede converger a uno de los dos posibles estados estacionarios estables, es decir, dependiendo de la cantidad de presas y depredadores en el estado inicial será el límite asintótico de éstas. Ya que las coordenadas de P_3 son menores que las de P_4 , se podrá obtener un número bajo de depredadores y de presas o un incremento en ambas poblaciones. Al variar el parámetro μ_1 que representa el aprovechamiento del depredador, la dinámica de los puntos P_3 y P_4 cambia y se obtiene una órbita periódica estable de amplitud grande. Por lo que la coexistencia de las dos poblaciones se puede dar alrededor del punto de equilibrio u oscilar alrededor de la órbita periódica estable.

Otro escenario posible del sistema (2.1) es cuando tiene dos puntos de equilibrio de coexistencia P_2 y P_3 , uno de ellos P_3 , es siempre no hiperbólico y la estabilidad del punto de equilibrio P_2 depende de la interferencia entre los depredadores (c_2). De hecho, bajo ciertas condiciones respecto a este parámetro se presenta bifurcación de Hopf, es decir, este parámetro influye en la coexistencia de las dos especies. Además, mostramos condiciones para las cuales el punto de equilibrio P_3 es estable, generando biestabilidad en el sistema junto con P_2 . Por lo que el límite asintótico depende de las condiciones iniciales. Por otro lado, se mostraron condiciones para las cuales el sistema (2.1) exhibe una bifurcación de Bogdanov-Takens en P_3 . En consecuencia, la coexistencia entre especies se puede dar alrededor de un punto de equilibrio, una órbita periódica o una órbita homoclínica.

Generalmente los ecosistemas están en equilibrio, es decir, los organismos que lo componen tiene las mismas posibilidades de sobrevivir y desarrollarse. Pero cuando alguno de los factores que compone el ecosistema se modifica, puede o no alterarse el ecosistema, en este sentido se analizó el caso en el cual al sistema depredador-presa, se le anexa otra población de presas, considerando que ambas poblaciones presas interactúan en mutualismo y tienen al mismo depredador en común (sistema (3.1)), mostramos que bajo ciertas restricciones sobre los parámetros existe un punto de equilibrio de coexistencia estable. Además, cuando se consideran los valores de los parámetros que garantizan una

bifurcación de Bogdanov-Takens para el modelo depredador presa (2.1), se mostró que en el sistema de las tres poblaciones se presenta esta misma bifurcación alrededor de un punto de equilibrio que corresponde a una población de presa y una población depredadora. Por otro lado, cuando se consideran los valores de los parámetros que garantizan la existencia de un punto de equilibrio de coexistencia para el sistema (3.1), existen condiciones particulares sobre los parámetros del sistema, que garantizan una bifurcación de Bogdanov-Takens. Las simulaciones numéricas ejemplifican los resultados teóricos obtenidos y muestran que la coexistencia de las tres especies se puede dar a través de un punto de equilibrio, una órbita periódica o una órbita homoclínica estable. Además, nos muestran condiciones en la capacidad de carga de las poblaciones presa que contribuyen a la coexistencia con el depredador, así como el papel que juega la interferencia.

Trabajos a futuro

- Ya que los depredadores están en lo alto de la cadena alimentaria y siempre en busca de comida, las presas deben evitar constantemente ser devoradas. Esto las lleva a adaptarse y a desarrollar mecanismos de defensa. En el modelo la defensa de la presa está medido por los exponentes m y n . Un problema interesante es determinar la influencia que tienen los mecanismos de defensa en la coexistencia de las tres poblaciones. En particular, numéricamente se ha observado la existencia de puntos de coexistencia estables cuando $m = 2$ y $n = 3$.
- Los resultados obtenidos muestran la existencia de conjuntos límites estables tales como puntos de equilibrio, órbitas periódicas y órbitas homoclínicas. Sin embargo, el sistema puede presentar otros comportamientos, en particular, estamos interesados en determinar si el sistema presenta comportamiento caótico.
- En el modelo se consideró que el beneficio que recibe una población presa por la interacción mutualista se ve reflejado en su capacidad de carga. Por otro lado, existen otras propuestas en las que la interacción influye directamente en la tasa de crecimiento, por lo que es importante considerar en el modelo otros tipos de funciones que midan una interacción mutualista.

Bibliografía

- [A] Addicott J. F. (1981). Stability properties of 2-species models of mutualism: Simulation studies. *Oecologia*, 49 (1), pp. 42-49.
- [ALGM] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I. & Maier A.G. (1973). *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*. New York: John Wiley and Sons.
- [AJ] Ali N. & Jazar M. (2013). Global dynamics of a modified Leslie-Gower predator-prey model with Crowley-Martin functional responses. *J Appl Math Comput*, 43, pp. 271-293.
- [BJ] Bronstein J.L. (1994). Conditional outcomes in mutualistic interactions. *Trends Ecol. Evol.*, 9, pp. 214-217.
- [C] Crowley P.H. & Martin E.K. (1989). Functional responses and interference within and between year classes of a dragonfly population. *J. N. Am. Benthol. Soc.*, 8(3), pp. 211-221.
- [CF] Chisholm R. A. & Fung T. (2020). Janzen-Connell effects are a weak impediment to competitive exclusion. *The American Naturalist.*, 196 (5), pp. 1-44.
- [EI] Ezoë H. & Ikegawa Y. (2013). Coexistence of mutualists and non-mutualists in a dual-lattice model. *J. Theoret. Biol.*, 332, pp.1-8.
- [GY] Guojun P. & Yaolin J. (2011). Practical computation of normal forms of the Bogdanov–Takens bifurcation. *Nonlinear Dyn.*, 66, pp. 99-132.
- [JT] Jana D. & Tripathi J.P. (2017). Impact of generalist type sexually reproductive top predator interference on the dynamics of a food chain model. *Int. J. Dynam. Control*, 5, pp. 999-1009.
- [KK] Kharbanda H. & Kumar S. (2019). Asymptotic stability of one prey and two predators model with two functional responses. *Ricerche mat.*, 68, pp. 435-452.
- [J] Jack C. (1982); *Applications of Centre Manifold Theory*, Vol. 35, Springer-Verlag, New York.

- [K] Kuznetsov Y. (2004); *Elements of applied bifurcation theory, Applied Mathematical Sciences*, Vol. 112, Springer-Verlag, New York.
- [LG] Legović T. & Gecěk S. (2012). Impact of maximum sustainable yield on mutualistic communities. *Ecological Modelling*, 230, pp. 63-72.
- [L] López N.J. (2018). *Análisis del efecto de la depredación sobre especies mutualistas K-estrategas: Caso facultativo*. (Tesis de maestría). Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México.
- [M] Golubitsky M. & Guillemin V. (1973). The Malgrange Preparation Theorem. In: *Stable Mappings and Their Singularities. Springer, New York, NY*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 14.
- [MGL] Maxin D., Georgescu P., Segal L. & Berec L. (2017). Global stability of the coexistence equilibrium for a general class of models of facultative mutualism. *J. Biol. Dyn.*, 11 , pp. 339-364.
- [MPS] Mondal A., Pal A. K. & Samanta G. P. (2018). Stability and bifurcation analysis of a delayed three species food chain model with Crowley-Martin response function. *Applications and Applied Mathematics*, 13 , pp. 709-749.
- [P] L. Perko, (2006); *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York.
- [SG] Skalski G. T. & Gilliam J. F. (2001). Functional responses with predator interference: viable alternatives to the Holling type II model. *Ecology*, 82(11), pp. 3083-3092.
- [U] Upadhyay, R.K. and Naji, R.K. (2009). Dynamics of a three species food chain model with Crowley-Martin type functional response. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, pp. 1337-1346.
- [V] Vargas De León C. (2012). Lyapunov functions for two-species cooperative systems. *Appl. Math. Comput.*, 219, pp. 2493-2497.
- [VT] Křivan V. & Revilla T. A. (2019). Plant coexistence mediated by adaptive foraging preferences of exploiters or mutualists. *J. Theoret. Biol.*, 480 , pp. 112-128.
- [Z] Zhao M. & Lv S. (2009). Chaos in a three-species food chain model with a Beddington-DeAngelis functional response. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40, pp. 2305-2316.

A. Estabilidad del punto de equilibrio no hiperbólico en el plano

La matriz jacobiana asociada al sistema (2.13), evaluada en el origen está dada por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} J_{11} &= 81b_1d^3\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1), \\ J_{12} &= -729b_1c_2d^5\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1), \\ J_{21} &= -81b_1d^3\mu_1^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1), \\ J_{22} &= 729b_1c_2d^5\mu_1^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1). \end{aligned}$$

la cual tiene como valores propios

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \\ \omega &= 81b_1d^3\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1^3d^3 + R_1^3 + 18c_1c_2d^3\mu_1 + 3R_1(3c_2d^2 + b_1R_1)\mu_1 \\ &\quad + 3b_1(-6c_2d^2 + b_1R_1\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3 - 3c_1^2d^2(R_1 + b_1\mu_1))). \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones de los polinomios en la forma normal, asignamos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{9c_2d^2\mu_1}{\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}, \\ \omega_2 &= \frac{2c_1d + R_1 + b_1\mu_1}{\mu_1(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}, \\ \omega_3 &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{3b_1}{2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1} + \frac{9c_2d^2}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}, \\ \omega_4 &= (-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2, \\ \omega_5 &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{3b_1}{2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1}, \\ \omega_6 &= 2c_1d + R_1 + b_1\mu_1. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
P(x, z) = & \frac{\omega_4}{\omega\omega_3} ((-(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) + d(-3 + c_1(x\omega_1 + z\omega_2))(-9c_2d^2(x + z) \\
& + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) + R_1^2(x\omega_1 + z\omega_2) - R_1(3c_2d(x + z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x + z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1\mu_1(2b_1\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + 3d(3 + c_2(x + z)(x\omega_1 + z\omega_2)))))(c_1^4d^4(x\omega_1 + z\omega_2)^2 + c_1^3d^3(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& -(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) + 3d(2 + c_2(x + z)((x\omega_1 + z\omega_2)))) \\
& - (R_1 + b_1\mu_1)(27c_2d^3(x + z) - 9c_2d^2(x + z)(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + (R_1 - 2b_1\mu_1)(2R_1 - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)^2 - 3d(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& (R_1 + b_1\mu_1 + 2c_2R_1(x + z)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1c_2(x + z)\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2))) \\
& + c_1d(-54c_2d^3(x + z) + (R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)(-1c_2d^2(x + z) \\
& + (5R_1^2 + b_1\mu_1(9c_2d(x + z) + 5b_1\mu_1) - R_1(9c_2d(x + z) + 8b_1\mu_1)) \\
& (x\omega_1 + z\omega_2))) - 3c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2)(-3c_2d^2(x + z) \\
& + (R_1^2 - b_1R\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)(x\omega_1 + z\omega_2) + 3d(R_1 + b_1\mu_1(1 + c_2(x + z)(x\omega_1 + z\omega_2)))))) \\
& + 9d^2\mu_1(-81b_1c_2d^3(x + z)\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1) + (2c_1d + R_1 - 3c_2d(x + z) \\
& - 2b_1\mu_1)(-9c_2d^2(x + z) + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x + z) - 2b_1\mu_1) \\
& (x\omega_1 + z\omega_2) + (R_1 + b_1\mu_1)(R_1 - 3c_2d(x + z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)) \\
& (-9c_2d^2(x + z) + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) + R_1^2(x\omega_1 + z\omega_2) - R_1(3c_2d(x + z) + b_1\mu_1) \\
& (x\omega_1 + z\omega_2) + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x + z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1\mu_1(2b_1\mu_1 \\
& (x\omega_1 + z\omega_2) + 3d(3 + c_2(x + z)((x\omega_1 + z\omega_2)))))) + 9b_1d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1) \\
& (x\omega_1 + z\omega_2)\omega_4\omega_5 + 729b_1c_2d^5(x + z)\mu_1\omega_6 - 81b_1d^3\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2)\omega_4\omega_6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x, z) = & \frac{1}{\omega\omega_3} (81c - 2d^4\mu_1(-81b_1c_2d^3(x+z)\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1) \\
& + (2c_1d + R_1 - 3c_2d(x+z) - 2b_1\mu_1)(-9c_2d^2(x+z) + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x+z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2))(-9c_2d^2(x+z) + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + R_1^2(x\omega_1 + z\omega_2) - R(3c_2d(x+z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x+z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1\mu_1(2b_1\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + 3d(3 + c_2(x+z)(x\omega_1 + z\omega_2)))) + 9b_1d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)\omega_4 \\
& - \omega_4((- (R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) + d(-3 + c_1(x\omega_1 + z\omega_2))(-9c_2d^2(x+z) \\
& + c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2) + R_1^2(x\omega_1 + z\omega_2) - R_1(3c_2d(x+z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + c_1d(-2R_1 + 3c_2d(x+z) + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1\mu_1(2b_1\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + 3d(3 + c_2(x+z)(x\omega_1 + z\omega_2)))))(c_1^4d^4(x\omega_1 + z\omega_2)^2 + c_1^3d^3(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& (- (R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) + 3d(2 + c_2(x+z)(x\omega_1 + z\omega_2))) - (R_1 + b_1\mu_1) \\
& (27c_2d^3(x+z) - 9c_2d^2(x+z)(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) + (R_1 - 2b_1\mu_1) \\
& (2R_1 - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)^2 - 3d(R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& (R_1 + b_1\mu_1 + 2c_2R_1(x+z)(x\omega_1 + z\omega_2) - b_1c_2(x+z)\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2))) \\
& + c_1d(-54c_2d^3(x+z) + (R_1 + b_1\mu_1)(x\omega_1 + z\omega_2)(-18c_2d^2(x+z) \\
& + (5R_1^5 + b_1\mu_1(9c_2d(x+z) + 5b_1\mu_1) - R_1(9c_2d(x+z) + 8b_1\mu_1))(x\omega_1 + z\omega_2))) \\
& - 3c_1^2d^2(x\omega_1 + z\omega_2)(-3c_2d^2(x+z) + (R_1^2 - b_1R_1\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)(x\omega_1 + z\omega_2) \\
& + 3d(R_1 + b_1\mu_1(1 + c_2(x+z)(x\omega_1 + z\omega_2)))) + 729b_1c_2d^5(x+z)\mu_1\omega_6 \\
& - 81b_1d^3\mu_1(x\omega_1 + z\omega_2)\omega_4\omega_6).
\end{aligned}$$

B. Bifurcación Bogdanov-Takens en el plano

Entradas de la matriz de regularidad

$$(DF)(P_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

donde

$$a_{11} = -\frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1},$$

$$a_{12} = -\frac{b_1d(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3}{3\alpha_2^2\mu_1^2},$$

$$a_{13} = \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_1^2}\right) (-27d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1d - R_1 - b_1\mu_1)(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2),$$

$$a_{14} = \frac{9d^4(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^3}{b_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)},$$

$$a_{21} = \frac{b_1d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{3\alpha_2^2},$$

$$a_{22} = \frac{b_1d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}{3\alpha_2^2\mu_1},$$

$$a_{24} = -\frac{9b_1d^4\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^4}{\alpha_2^2},$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \left(\frac{1}{9b_1\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \right) (-2c_1^3d^3 + 9c_1^2d^2R_1 - 6c_1dR_1^2 \\
&\quad - 5R_1^3 + 3b_1(c_1d + R_1)(c_1d + 5R_1)\mu_1 - 3b_1^2(4c_1d + 9R_1)\mu_1^2 + 7b_1^3\mu_1^3), \\
a_{32} &= -\frac{b_1^2(2c_1d + R_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^8(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3}{3\alpha_2^3\mu_1^2(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}, \\
a_{33} &= \left(\frac{1}{\alpha\alpha_1^2} \right) (18d^2(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 \\
&\quad - b_1\mu_1)^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2), \\
a_{34} &= -\frac{3d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(8c_1d + 4R_1 + b_1\mu_1)}{b_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}, \\
a_{41} &= \left(\frac{1}{9b_1\mu_1(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \right) (-d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1^2d^2 \\
&\quad + 10c_1dR_1 + 7R_1^2 - 2b_1(c_1d + 5R_1)\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)), \\
a_{42} &= -\frac{b_1^2d^2(-c_1d - R_1 + b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^8(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3}{\alpha_1\alpha_2^3\mu_1^2}, \\
a_{43} &= \left(\frac{1}{\alpha\alpha_1^2\alpha_2^2\mu_1} \right) (6b_1d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(c_1d \\
&\quad + 2R_1 - b_1\mu_1)^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^6(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2), \\
a_{44} &= \left(\frac{1}{\alpha^2\alpha_1\alpha_2^3} \right) (-27b_1^2d^5(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^3(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(-c_1d \\
&\quad + R_1 + b_1\mu_1)^8(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3),
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha &= (-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) - 3b_1(c_1d - R_1)(c_1d + R_1)\mu_1 + 3b_1^2R_1\mu_1^2 \\
&\quad + b_1^3\mu_1^3, \\
\alpha_1 &= -9c_1d^2 - 9d(R_1 - b_1\mu_1), \\
\alpha_2 &= b_1(-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1) + 3b_1^2(-c_1^2d^2 + R_1^2)\mu_1 + 3b_1^3R_1\mu_1^2 + b_1^4\mu_1^3.
\end{aligned}$$

Coefficientes de la forma normal Bogdanov-Takens

En este apartado describimos las expresiones de los coeficientes asociados a los cambios de variable que se consideran al momento de llevar el sistema (2.15) a la forma normal de la bifurcación Bogdanov-Takens.

Los coeficientes asociados al sistema (2.18), están dados por

$$\begin{aligned}
P_{z00} &= P_{00}, \\
P_{z10} &= \frac{P_{00}P_{02}(P_{10} + Q_{01}) - P_{01}P_{02}Q_{00} - P_{00}P_{01}(P_{11} + Q_{02})}{P_{01}^2}, \\
P_{z01} &= 1 - \frac{P_{00}P_{02}}{P_{01}^2}, \\
P_{z20} &= \left(\frac{1}{2P_{01}^4} \right) (P_{01}P_{02}Q_{00}(P_{02}(2P_{10} + Q_{01}) - P_{01}(P_{11} + Q_{02})) + P_{00}(-P_{02}^2Q_{01}(P_{10} + Q_{01}) \\
&\quad - P_{01}^2(-2P_{02}P_{20} + (P_{11} + Q_{02})^2) + P_{01}P_{02}(2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) + P_{10}(P_{11} + 3Q_{02}) \\
&\quad - 2P_{02}Q_{10}))), \\
P_{z11} &= \frac{P_{02}(-P_{01}P_{02}Q_{00} + P_{00}P_{02}Q_{01} - P_{00}P_{01}(P_{11} + 2Q_{02}))}{P_{01}^4}, \\
Q_{z00} &= P_{00}P_{10} + P_{01}Q_{00}, \\
Q_{z10} &= \left(\frac{1}{P_{01}^2} \right) (-P_{01}(P_{02}P_{10}Q_{00} + P_{01}P_{10}Q_{01} + P_{01}Q_{00}Q_{02}) + P_{00}P_{01}(2P_{01}P_{20} - P_{10}(2P_{11} \\
&\quad + Q_{02})) + P_{01}^3Q_{10} + P_{00}P_{02}(P_{10}^2 + 2P_{10}Q_{01} - 2P_{01}Q_{10})), \\
Q_{z01} &= P_{10} + Q_{01} - \frac{P_{00}(P_{02}P_{10} + P_{01}Q_{02})}{P_{01}^2}, \\
Q_{z20} &= \left(\frac{1}{2P_{01}^4} \right) (P_{00}(-P_{02}^2P_{10}Q_{01}(3P_{10} + 2Q_{01}) + 2P_{01}^3P_{20}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{01}P_{02}(P_{10}^2(3P_{11} \\
&\quad + 5Q_{02}) + 2P_{02}Q_{01}Q_{10} + P_{10}(4P_{11}Q_{01} + 5Q_{01}Q_{02} + 2P_{02}Q_{10})) - P_{01}^2(P_{10}(2P_{11}^2 + 2P_{02}P_{20} \\
&\quad + 5P_{11}Q_{02} + Q_{02}^2) + 2P_{02}(P_{20}Q_{01} + P_{11}Q_{10} + 2Q_{02}Q_{10}))) + P_{01}(P_{02}^2P_{10}Q_{00} \\
&\quad (2P_{10} + Q_{01}) + P_{01}P_{02}(Q_{01}(Q_{00}Q_{02} + P_{01}Q_{10}) - P_{10}(P_{11}Q_{00} + Q_{01}^2 - Q_{00}Q_{02} + 2P_{01}Q_{10})) \\
&\quad + P_{01}^2(2P_{10}^2Q_{02} - Q_{00}Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{01}(-2P_{20}Q_{01} + P_{11}Q_{10} - Q_{02}Q_{10}) + P_{10}(P_{11}Q_{01} \\
&\quad + Q_{01}Q_{02} - 2P_{01}Q_{11}) - 2P_{01}^2Q_{20}))), \\
Q_{z11} &= 2P_{20} + Q_{11} + \left(\frac{1}{P_{01}^4} \right) (2P_{00}P_{02}^2P_{10}Q_{01} + P_{01}^2(2P_{00}P_{02}P_{20} + P_{02}P_{20}Q_{01} - P_{02}Q_{00}Q_{02} \\
&\quad - P_{00}Q_{02}^2) - P_{01}^3(P_{10}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02}Q_{10}) - P_{01}P_{02}(P_{02}P_{10}Q_{00} + P_{00}(2P_{10}P_{11} \\
&\quad + 3P_{10}Q_{02} + 2P_{02}Q_{10}))), \\
Q_{z02} &= 0.
\end{aligned}$$

Los coeficientes asociados al sistema (2.19), están dados por

$$\begin{aligned}
Q_{w00} &= \left(\frac{1}{P_{01}^6} \right) (P_{01}^7 Q_{00} - P_{00} P_{01}^5 (P_{02} Q_{00} + P_{01} Q_{01}) + P_{00}^2 P_{01}^3 (-P_{02}^2 Q_{00} + P_{01} P_{02} (P_{10} \\
&\quad + Q_{01}) + P_{01}^2 Q_{02}) + P_{00}^4 P_{02}^2 (-P_{02} Q_{01} + P_{01} (P_{11} + 2Q_{02})) + P_{00}^3 P_{01} P_{02} (P_{02}^2 Q_{00} \\
&\quad + P_{01} P_{02} Q_{01} - P_{01}^2 (P_{11} + 2Q_{02}))), \\
Q_{w10} &= \left(\frac{1}{P_{01}^8} \right) (-P_{00}^4 P_{02}^2 (-P_{01} P_{11} + P_{02} (2P_{10} + Q_{01})) (P_{02} Q_{01} - P_{01} (P_{11} + 2Q_{02})) + P_{01}^6 \\
&\quad (-P_{02}^2 Q_{00}^2 + P_{01} P_{02} Q_{00} Q_{01} + P_{01}^2 (-P_{10} Q_{01} - Q_{00} Q_{02} + P_{01} Q_{10})) + P_{00}^3 P_{01} P_{02} \\
&\quad (2P_{02}^3 Q_{00} (P_{10} + Q_{01}) - P_{01}^3 (P_{11}^2 - 4P_{02} P_{20} + 3P_{11} Q_{02} + 4Q_{02}^2) - P_{01} P_{02}^2 (Q_{01} (-2P_{10} \\
&\quad + Q_{01}) + 2Q_{00} (P_{11} + Q_{02})) + P_{01}^2 P_{02} (2P_{11} Q_{01} + 3Q_{01} Q_{02} - 2P_{10} (P_{11} + Q_{02}) \\
&\quad - 4P_{02} Q_{10})) - P_{00} P_{01}^5 (-P_{02}^2 Q_{00} Q_{01} + P_{01} P_{02} (Q_{01}^2 + Q_{00} (P_{11} + Q_{02})) - P_{01}^2 (2P_{10} Q_{02} \\
&\quad + Q_{01} (P_{11} + Q_{02}) - 2P_{02} Q_{10}) + P_{01}^3 Q_{11}) + P_{00}^2 P_{01}^2 (-P_{02}^4 Q_{00}^2 + P_{01} P_{02}^3 Q_{00} Q_{01} + P_{01}^2 P_{02}^2 \\
&\quad (P_{10}^2 - Q_{00} (P_{11} + 3Q_{02})) + P_{01}^3 P_{02} (2Q_{01} Q_{02} + P_{10} (P_{11} + Q_{02}) + 3P_{02} Q_{10}) + P_{01}^4 \\
&\quad (-P_{11} Q_{02} + P_{02} (-2P_{20} + Q_{11}))), \\
Q_{w01} &= \left(\frac{1}{P_{01}^8} \right) (P_{01}^2 + P_{00} P_{02}) (-P_{00} P_{01}^4 P_{02} P_{10} - 2P_{00}^2 P_{01}^2 P_{02}^2 Q_{01} + 2P_{00}^3 P_{02}^3 Q_{01} + P_{01}^6 \\
&\quad (P_{10} + Q_{01}) - P_{01}^5 (P_{02} Q_{00} + P_{00} (P_{11} + 2Q_{02})) + 2P_{00} P_{01}^3 P_{02} (P_{02} Q_{00} + P_{00} (P_{11} + 2Q_{02})) \\
&\quad - 2P_{00}^2 P_{01} P_{02}^2 (P_{02} Q_{00} + P_{00} (P_{11} + 2Q_{02}))), \\
Q_{w11} &= \left(\frac{1}{P_{01}^{10}} \right) (2P_{00}^4 P_{02}^5 (P_{10} - Q_{01}) Q_{01} - 2P_{00}^3 P_{01} P_{02}^4 ((P_{00} P_{11} + P_{02} Q_{00}) (P_{10} - 2Q_{01}) \\
&\quad + P_{00} (2P_{10} - 5Q_{01}) Q_{02}) - P_{00}^2 P_{01}^2 P_{02}^3 (2P_{02}^2 Q_{00}^2 + 2P_{00}^2 (P_{11} + 2Q_{02}) (P_{11} + 3Q_{02}) \\
&\quad + P_{00} P_{02} (4P_{11} Q_{00} - 3Q_{01}^2 + 10Q_{00} Q_{02})) - P_{01}^8 (P_{02} (P_{11} Q_{00} - P_{10} Q_{01} + 2Q_{00} Q_{02}) \\
&\quad + P_{00} (P_{11}^2 - 4P_{02} P_{20} + 2P_{11} Q_{02} + 2Q_{02}^2)) + P_{00} P_{01}^4 P_{02}^2 (2P_{02}^2 Q_{00}^2 + P_{00} P_{02} \\
&\quad (5P_{11} Q_{00} + Q_{01}^2 + 9Q_{00} Q_{02}) + P_{00}^2 (3P_{11}^2 - 4P_{02} P_{20} + 9P_{11} Q_{02} + 8Q_{02}^2)) - P_{01}^9 (P_{10} (P_{11} \\
&\quad + 2Q_{02}) + P_{02} Q_{10}) + P_{00} P_{01}^5 P_{02}^2 (-P_{02} P_{10} Q_{00} - P_{00} Q_{01} Q_{02} + P_{00} P_{02} Q_{10}) + P_{00}^2 P_{01}^3 P_{02}^3 \\
&\quad (-P_{00} (6P_{11} Q_{01} + 2P_{10} Q_{02} + 9Q_{01} Q_{02}) + P_{02} (-2P_{10} Q_{00} - 5Q_{00} Q_{01} + 4P_{00} Q_{10})) + P_{01}^7 P_{02} \\
&\quad (P_{02} Q_{00} (P_{10} + Q_{01}) + P_{00} (-P_{10} P_{11} + 2Q_{01} (P_{11} + Q_{02}) - 4P_{02} Q_{10})) + P_{01}^1 0 (2P_{20} + Q_{11}) \\
&\quad - P_{01}^6 P_{02} (P_{02}^2 Q_{00}^2 + P_{00} P_{02} (2P_{11} Q_{00} - P_{10} Q_{01} + Q_{01}^2 + 3Q_{00} Q_{02}) + P_{00}^2 ((P_{11} + Q_{02}) \\
&\quad (P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02} (2P_{20} + Q_{11}))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{w02} &= \left(\frac{P_{02}}{P_{01}^2} \right) (-P_{01}^2 + P_{00}P_{02})(P_{01}^2 + P_{00}P_{02})^2(P_{01}P_{02}Q_{00} - P_{00}P_{02}Q_{01} + P_{00}P_{01}(P_{11} \\
&\quad + 2Q_{02})), \\
Q_{w20} &= \left(\frac{1}{2P_{01}^2} \right) (2P_{00}^4P_{02}^2(-P_{02}Q_{01} + P_{01}(P_{11} + 2Q_{02}))(-2P_{01}^2(P_{11} + Q_{02})(P_{11} + 2Q_{02}) \\
&\quad + P_{01}P_{02}(2P_{01}P_{20} + 4P_{11}Q_{01} + 6Q_{01}Q_{02} + P_{10}(P_{11} + 5Q_{02})) + P_{02}^2((P_{10} - 2Q_{01}) \\
&\quad (P_{10} + Q_{01}) - 2P_{01}Q_{10})) + P_{00}^3P_{01}P_{02}(2P_{02}^4Q_{00}(P_{10}^2 - 3P_{10}Q_{01} - 5Q_{01}^2) + P_{01}^4(3P_{11}^3 \\
&\quad - 2P_{02}P_{11}P_{20} + 12P_{11}^2Q_{02} + 4P_{02}P_{20}Q_{02} + 17P_{11}Q_{02}^2 + 6Q_{02}^3) + P_{01}P_{02}^3(2P_{10}^2Q_{01} \\
&\quad + 20P_{11}Q_{00}Q_{01} - 5P_{10}Q_{01}^2 - 3Q_{01}^3 + 34Q_{00}Q_{01}Q_{02} + 6P_{10}Q_{00}(P_{11} + 3Q_{02}) \\
&\quad - 4P_{02}Q_{00}Q_{10}) + P_{01}^2P_{02}^2(-2P_{10}^2P_{11} - 10P_{11}^2Q_{00} + 4P_{02}P_{20}Q_{00} + 10P_{10}P_{11}Q_{01} \\
&\quad + 9P_{11}Q_{01}^2 - 34P_{11}Q_{00}Q_{02} + 19P_{10}Q_{01}Q_{02} + 12Q_{01}^2Q_{02} - 28Q_{00}Q_{02}^2 - 2P_{02}(4P_{10} \\
&\quad + Q_{01})Q_{10}) + P_{01}^3P_{02}(8P_{02}P_{10}P_{20} - P_{10}(P_{11} + 2Q_{02})(5P_{11} + 9Q_{02}) - Q_{01}(9P_{11}^2 \\
&\quad - 2P_{02}P_{20} + 24P_{11}Q_{02} + 17Q_{02}^2) + 2P_{02}(P_{11} - 2Q_{02})Q_{10})) - P_{00}^2P_{01}^2(-4P_{02}^5Q_{00}^2(P_{10} \\
&\quad + 2Q_{01}) + P_{01}P_{02}^4Q_{00}(-2P_{10}^2 + 8P_{11}Q_{00} - 9P_{10}Q_{01} - 8Q_{01}^2 + 14Q_{00}Q_{02}) + P_{01}^2P_{02}^3 \\
&\quad (P_{10}^2Q_{01} + 16P_{11}Q_{00}Q_{01} + 3Q_{01}^3 + 23Q_{00}Q_{01}Q_{02} + P_{10}(9P_{11}Q_{00} + 5Q_{01}^2 + 17Q_{00}Q_{02}) \\
&\quad - 2P_{02}Q_{00}Q_{10}) + P_{01}^3P_{02}^2(-8P_{11}^2Q_{00} + 2P_{02}P_{20}Q_{00} - 6P_{11}Q_{01}^2 - 23P_{11}Q_{00}Q_{02} \\
&\quad - 7Q_{01}^2Q_{02} - 15Q_{00}Q_{02}^2 - P_{10}^2(P_{11} + 3Q_{02}) + 4P_{02}Q_{01}Q_{10} + P_{10}(-7P_{11}Q_{01} - 13Q_{01}Q_{02} \\
&\quad + 4P_{02}Q_{10})) + P_{01}^5((P_{11} + Q_{02})(2P_{02}P_{20} + Q_{02}(P_{11} + 3Q_{02})) - 2P_{02}Q_{02}Q_{11}) + P_{01}^4P_{02} \\
&\quad (Q_{01}(3P_{11}^2 - 4P_{02}P_{20} + 6P_{11}Q_{02} + Q_{02}^2) - 2P_{02}(P_{11} + 2Q_{02})Q_{10} + 2P_{10}(P_{11}^2 + 3P_{11}Q_{02} \\
&\quad + 3Q_{02}^2 - P_{02}(3P_{20} + Q_{11})))) + P_{01}^5(2P_{02}^4Q_{00}^3 + P_{01}^2P_{02}^2Q_{00}(2P_{10} - Q_{01})Q_{01} \\
&\quad - 2P_{01}P_{02}^3Q_{00}^2(P_{10} + Q_{01}) - P_{01}^3P_{02}(-Q_{00}Q_{01}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{10}(Q_{01}^2 + 2Q_{00}(P_{11} \\
&\quad + Q_{02})) + 4P_{02}Q_{00}Q_{10}) - P_{01}^5(2P_{20}Q_{01} - P_{11}Q_{10} + Q_{02}Q_{10} + 2P_{10}Q_{11}) + P_{01}^4 \\
&\quad (2P_{10}^2Q_{02} + P_{10}Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - Q_{00}Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{02}(4P_{20}Q_{00} - 2P_{10}Q_{10} \\
&\quad + Q_{01}Q_{10} + 2Q_{00}Q_{11})) + 2P_{01}^6Q_{20}) + P_{00}P_{01}^3(-2P_{02}^5Q_{00}^3 - P_{01}P_{02}^4Q_{00}^2(4P_{10} + 7Q_{01}) \\
&\quad - P_{01}^3P_{02}^2(P_{10} + Q_{01})(5P_{11}Q_{00} + 4P_{10}Q_{01} - Q_{01}^2 + 7Q_{00}Q_{02}) + P_{01}^2P_{02}^3Q_{00}((P_{10} + Q_{01}) \\
&\quad (4P_{10} + 5Q_{01}) + Q_{00}(7P_{11} + 11Q_{02})) + P_{01}^4P_{02}(4P_{10}^2(P_{11} + Q_{02}) + Q_{01}(-2Q_{01}(P_{11} \\
&\quad + Q_{02}) + 7P_{02}Q_{10}) + P_{10}(6P_{11}Q_{01} + 9Q_{01}Q_{02} + 8P_{02}Q_{10})) - P_{01}^5(-P_{11}^2Q_{01} \\
&\quad + 6P_{02}P_{20}Q_{01} - 2P_{11}Q_{01}Q_{02} - Q_{01}Q_{02}^2 + P_{10}(3P_{11}^2 + 8P_{02}P_{20} + 9P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) \\
&\quad + 7P_{02}P_{11}Q_{10} + 9P_{02}Q_{02}Q_{10} + 2P_{02}Q_{01}Q_{11}) + 2P_{01}^6(4P_{20}Q_{02} + Q_{02}Q_{11} + P_{11}(3P_{20} \\
&\quad + Q_{11}) - P_{02}Q_{20})).
\end{aligned}$$

Los coeficientes asociados al sistema (2.20), son

$$Q_{w'00} = P_{01}Q_{00} - P_{00}Q_{01},$$

$$Q_{w'10} = \left(\frac{1}{P_{01}^2}\right) (P_{01}P_{02}Q_{00}Q_{01} - P_{00}P_{02}Q_{01}^2 + P_{01}^3Q_{10} + P_{00}P_{01}(2P_{10}Q_{02} + Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - 2P_{02}Q_{10}) - P_{01}^2(P_{10}Q_{01} + Q_{00}Q_{02} + P_{00}Q_{11})),$$

$$Q_{w'01} = P_{10} + Q_{01} + \left(\frac{1}{P_{01}^2}\right) (P_{00}P_{02}Q_{01} - P_{01}(P_{00}P_{11} + P_{02}Q_{00} + 2P_{00}Q_{02})),$$

$$Q_{w'11} = 2P_{20} + Q_{11} + \left(\frac{1}{P_{01}^4}\right) (P_{00}P_{02}^2(P_{10} - Q_{01})Q_{01} - P_{01}^2(P_{02}(P_{11}Q_{00} - P_{10}Q_{01} + 2Q_{00}Q_{02}) + P_{00}(P_{11}^2 - 4P_{02}P_{20} + 2P_{11}Q_{02} + 2Q_{02}^2)) - P_{01}^3(P_{10}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02}Q_{10}) + P_{01}P_{02}(P_{02}Q_{00}(P_{10} + Q_{01}) + P_{00}(-P_{10}P_{11} + 2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - 4P_{02}Q_{10}))),$$

$$Q_{w'20} = \left(\frac{1}{2P_{01}^4}\right) (P_{01}(P_{02}^2Q_{00}(2P_{10} - Q_{01})Q_{01} - P_{01}P_{02}(-Q_{00}Q_{01}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{10}(Q_{01}^2 + 2Q_{00}(P_{11} + Q_{02})) + 4P_{02}Q_{00}Q_{10}) - P_{01}^3(2P_{20}Q_{01} - P_{11}Q_{10} + Q_{02}Q_{10} + 2P_{10}Q_{11}) + P_{01}^2(2P_{10}^2Q_{02} + P_{10}Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - Q_{00}Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{02}(4P_{20}Q_{00} - 2P_{10}Q_{10} + Q_{01}Q_{10} + 2Q_{00}Q_{11})) + 2P_{01}^4Q_{20}) + P_{00}(-P_{02}^2(4P_{10} - Q_{01})Q_{01}(P_{10} + Q_{01}) + P_{01}P_{02}(4P_{10}^2(P_{11} + Q_{02}) + Q_{01}(-2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) + 7P_{02}Q_{10}) + P_{10}(6P_{11}Q_{01} + 9Q_{01}Q_{02} + 8P_{02}Q_{10})) - P_{01}^2(-P_{11}^2Q_{01} + 6P_{02}P_{20}Q_{01} - 2P_{11}Q_{01}Q_{02} - Q_{01}Q_{02}^2 + P_{10}(3P_{11}^2 + 8P_{02}P_{20} + 9P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) + 7P_{02}P_{11}Q_{10} + 9P_{02}Q_{02}Q_{10} + 2P_{02}Q_{01}Q_{11}) + 2P_{01}^3(4P_{20}Q_{02} + Q_{02}Q_{11} + P_{11}(3P_{20} + Q_{11}) - P_{02}Q_{20}))),$$

$$Q_{w'02} = \left(\frac{1}{P_{01}^4}\right) (P_{02}(-P_{01}P_{02}Q_{00} + P_{00}P_{02}Q_{01} - P_{00}P_{01}(P_{11} + 2Q_{02}))),$$

Los coeficientes asociados al sistema (2.20), son

$$\begin{aligned}
Q_{u00} = & (2(P_{00}P_{02}^2(P_{10} - Q_{01})Q_{01} - P_{01}^2(P_{02}(P_{11}Q_{00} - P_{10}Q_{01} + 2Q_{00}Q_{02}) + P_{00}(P_{11}^2 \\
& - 4P_{02}P_{20} + 2P_{11}Q_{02} + 2Q_{02}^2)) - P_{01}^3(P_{10}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02}Q_{10}) + P_{01}P_{02}(P_{02}Q_{00}(P_{10} \\
& + Q_{01}) + P_{00}(-P_{10}P_{11} + 2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - 4P_{02}Q_{10})) + P_{01}^4(2P_{20} + Q_{11}))^2)^{-1}, \\
& (P_{01}^3(P_{02}^4Q_{00}^3(2P_{10}^2 + 8P_{10}Q_{01} + 3Q_{01}^2) - P_{01}P_{02}^3Q_{00}^2(4P_{10}^2Q_{01} + 3P_{10}(2P_{11}Q_{00} + Q_{01}^2 \\
& + 4Q_{00}Q_{02}) + Q_{00}(5P_{11}Q_{01} + 12Q_{01}Q_{02} + 4P_{02}Q_{10})) + P_{01}^2P_{02}^2Q_{00}(2P_{11}^2Q_{00}^2 + (4P_{10} \\
& - Q_{01})Q_{01}(P_{10} + Q_{01})^2 + 3P_{11}Q_{00}(-P_{10}Q_{01} + 3Q_{00}Q_{02}) + Q_{00}Q_{02}(-9P_{10}Q_{01} + 2Q_{01}^2 \\
& + 11Q_{00}Q_{02}) + P_{02}Q_{00}(4P_{20}Q_{00} + 4P_{10}Q_{10} + 5Q_{01}Q_{10} + 2Q_{00}Q_{11})) + P_{01}^3P_{02}(P_{10}^3(Q_{01}^2 \\
& - 2Q_{00}(P_{11} + 3Q_{02})) - P_{10}^2Q_{00}(7P_{11}Q_{01} + 10Q_{01}Q_{02} + 2P_{02}Q_{10}) + P_{10}(4P_{11}^2Q_{00}^2 - Q_{01}^4 \\
& + 2Q_{00}Q_{01}^2Q_{02} + 2P_{11}Q_{00}(-Q_{01}^2 + 9Q_{00}Q_{02}) - 8P_{02}Q_{00}Q_{01}Q_{10} + 2Q_{00}^2(9Q_{02}^2 - P_{02}Q_{11})) \\
& + Q_{00}(P_{11}Q_{01}^3 + 2Q_{01}Q_{02}(Q_{01}^2 - Q_{00}Q_{02}) + P_{02}(2P_{20}Q_{00}Q_{01} + 3P_{11}Q_{00}Q_{10} - 6Q_{01}^2Q_{10} \\
& + 5Q_{00}Q_{02}Q_{10} + 2Q_{00}Q_{01}Q_{11}))) + P_{01}^4(2P_{10}^4Q_{02} - Q_{00}Q_{01}^2Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{10}^3 \\
& (-P_{11}Q_{01} + Q_{01}Q_{02} - 2P_{02}Q_{10}) + P_{02}(4P_{20}Q_{00}(Q_{01}^2 - 5Q_{00}Q_{02}) + Q_{01}^3Q_{10} \\
& + 4Q_{00}Q_{01}Q_{02}Q_{10} - 10Q_{00}^2Q_{02}Q_{11} - 4P_{11}Q_{00}^2(2P_{20} + Q_{11})) + P_{10}^2(2P_{11}^2Q_{00} \\
& + 5P_{11}Q_{00}Q_{02} + 3Q_{00}Q_{02}^2 + P_{02}(4P_{20}Q_{00} - 7Q_{01}Q_{10} + 6Q_{00}Q_{11})) + P_{10}(Q_{01}Q_{02}(Q_{01}^2 \\
& - 6Q_{00}Q_{02}) + P_{11}Q_{01}(Q_{01}^2 - 4Q_{00}Q_{02}) + 2P_{02}(6P_{20}Q_{00}Q_{01} + P_{11}Q_{00}Q_{10} - 2Q_{01}^2Q_{10} \\
& + 4Q_{00}Q_{02}Q_{10} + 4Q_{00}Q_{01}Q_{11})) + 2P_{02}^2Q_{00}^2Q_{20}) + 2P_{01}^6((2P_{20} + Q_{11})(2P_{20}Q_{00} - (P_{10} \\
& + Q_{01})Q_{10} + Q_{00}Q_{11}) + (P_{10} + Q_{01})^2Q_{20}) - P_{01}^5(-P_{11}Q_{01}^2Q_{10} + Q_{01}^2Q_{02}Q_{10} \\
& - 2P_{02}Q_{01}Q_{10}^2 + 2P_{20}(Q_{01}^3 - 2Q_{00}Q_{01}Q_{02} + 2P_{02}Q_{00}Q_{10}) + 2P_{10}^3Q_{11} - 2Q_{00}Q_{01}Q_{02}Q_{11} \\
& + 2P_{02}Q_{00}Q_{10}Q_{11} - P_{10}^2(2P_{20}Q_{01} + 3(P_{11} + Q_{02})Q_{10} - 2Q_{01}Q_{11}) + 4P_{02}Q_{00}Q_{01}Q_{20} \\
& + 2P_{10}(6P_{20}Q_{00}Q_{02} - Q_{01}Q_{02}Q_{10} - P_{02}Q_{10}^2 + 3Q_{00}Q_{02}Q_{11} + 2P_{11}(2P_{20}Q_{00} - Q_{01}Q_{10} \\
& + Q_{00}Q_{11}) + 2P_{02}Q_{00}Q_{20}))) + P_{00}P_{01}^2(-P_{02}^4Q_{00}^2Q_{01}(2P_{10}^2 + 13P_{10}Q_{01} + 9Q_{01}^2) \\
& + P_{01}P_{02}^3Q_{00}(8P_{10}^3Q_{01} + 2P_{10}^2(9Q_{01}^2 + 4Q_{00}Q_{02}) + Q_{00}Q_{01}(22P_{11}Q_{01} + 36Q_{01}Q_{02} \\
& - 13P_{02}Q_{10}) + P_{10}(20P_{11}Q_{00}Q_{01} + 4Q_{01}^3 + 39Q_{00}Q_{01}Q_{02} - 12P_{02}Q_{00}Q_{10})) - P_{01}^2P_{02}^2 \\
& (4P_{10}^4Q_{01} + 17P_{11}^2Q_{00}^2Q_{01} - 10P_{02}P_{20}Q_{00}^2Q_{01} - Q_{01}^5 + 49Q_{00}^2Q_{01}Q_{02}^2 + P_{10}^3(8P_{11}Q_{00} \\
& + 9Q_{01}^2 + 12Q_{00}Q_{02}) + 4P_{02}Q_{00}Q_{01}^2Q_{10} - 23P_{02}Q_{00}^2Q_{02}Q_{10} + P_{11}Q_{00}^2(54Q_{01}Q_{02} \\
& - 5P_{02}Q_{10}) + P_{10}^2(32P_{11}Q_{00}Q_{01} + 9Q_{01}^3 + 50Q_{00}Q_{01}Q_{02} + 12P_{02}Q_{00}Q_{10}) \\
& + 8P_{02}Q_{00}^2Q_{01}Q_{11} + P_{10}(7P_{11}^2Q_{00}^2 + 3Q_{01}^4 + 4Q_{00}Q_{02}(Q_{01}^2 + 8Q_{00}Q_{02}) + P_{11}Q_{00}(4Q_{01}^2 \\
& + 25Q_{00}Q_{02}) + 2P_{02}Q_{00}(-4P_{20}Q_{00} + 15Q_{01}Q_{10} + Q_{00}Q_{11}))) + P_{01}^3P_{02}(4P_{11}^3Q_{00}^2 \\
& - 8P_{02}P_{20}Q_{00}Q_{01}^2 + 18P_{11}^2Q_{00}^2Q_{02} - 16P_{02}P_{20}Q_{00}^2Q_{02} - 2Q_{01}^4Q_{02} + 24Q_{00}^2Q_{02}^3 + 4P_{10}^4 \\
& (P_{11} + Q_{02}) + 9P_{02}Q_{01}^3Q_{10} + 12P_{02}Q_{00}Q_{01}Q_{02}Q_{10} + 12P_{02}^2Q_{00}Q_{10}^2 + P_{10}^3(12P_{11}Q_{01} \\
& + 17Q_{01}Q_{02} + 8P_{02}Q_{10}) - 2P_{02}Q_{00}Q_{01}^2Q_{11} + 14P_{02}Q_{00}^2Q_{02}Q_{11} + P_{10}^2(14P_{11}^2Q_{00} \\
& + 24Q_{02}(Q_{01}^2 + Q_{00}Q_{02}) + 8P_{11}(2Q_{01}^2 + 5Q_{00}Q_{02}) + 13P_{02}Q_{01}Q_{10} + 2P_{02}Q_{00}(8P_{20} \\
& + Q_{11})) - 2P_{11}(Q_{01}^4 - 15Q_{00}^2Q_{02}^2 + P_{02}Q_{00}(P_{20}Q_{00} - 5Q_{01}Q_{10} - 4Q_{00}Q_{11})) + P_{10} \\
& (-4P_{11}^2Q_{00}Q_{01} + Q_{01}Q_{02}(9Q_{01}^2 - 20Q_{00}Q_{02}) + 2P_{11}(3Q_{01}^3 - 8Q_{00}Q_{01}Q_{02} \\
& + 19P_{02}Q_{00}Q_{10}) + 2P_{02}(18P_{20}Q_{00}Q_{01} + 7Q_{01}^2Q_{10} + 25Q_{00}Q_{02}Q_{10} + 7Q_{00}Q_{01}Q_{11})) \\
& - 2P_{02}^2Q_{00}^2Q_{20}) + 2P_{01}^6(-(2P_{20} + Q_{11})(2P_{20}Q_{01} - (P_{11} + 2Q_{02})Q_{10} - P_{10}Q_{11}) - 2(P_{10} \\
& + Q_{01})(P_{11} + 2Q_{02})Q_{20}) + 2P_{01}^5(16P_{02}P_{20}^2Q_{00} + 6P_{20}Q_{01}^2Q_{02} - 12P_{20}Q_{00}Q_{02}^2 \\
& + 2P_{02}P_{20}Q_{01}Q_{10} + 4Q_{01}Q_{02}^2Q_{10} - 2P_{02}Q_{02}Q_{10}^2 + 6P_{02}P_{20}Q_{00}Q_{11} - 6Q_{00}Q_{02}^2Q_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2P_{02}Q_{01}Q_{10}Q_{11} - P_{02}Q_{00}Q_{11}^2 - 2P_{11}^2Q_{00}(2P_{20} + Q_{11}) + P_{10}(10P_{20}Q_{01}Q_{02} \\
& - P_{11}^2Q_{10} + 3Q_{01}Q_{02}Q_{11} + P_{02}Q_{10}Q_{11} + P_{11}(8P_{20}Q_{01} - 3Q_{02}Q_{10} + 3Q_{01}Q_{11})) + P_{02}(Q_{01}^2 \\
& + 4Q_{00}Q_{02})Q_{20} + P_{10}^2(3P_{11}P_{20} + 2P_{11}Q_{11} + Q_{02}Q_{11} - P_{02}Q_{20}) + P_{11}(3P_{20}Q_{01}^2 \\
& - 10P_{20}Q_{00}Q_{02} + Q_{01}Q_{02}Q_{10} - P_{02}Q_{10}^2 - 5Q_{00}Q_{02}Q_{11} + 2P_{02}Q_{00}Q_{20})) - P_{01}^4(P_{10}^3(3P_{11}^2 \\
& + 8P_{02}P_{20} + 9P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) - Q_{01}(P_{11}^2Q_{01}^2 + Q_{01}^2Q_{02}^2 + 2P_{11}Q_{02}(Q_{01}^2 + Q_{00}Q_{02}))) \\
& + 2P_{02}^2Q_{10}(24P_{20}Q_{00} - 2Q_{01}Q_{10} + 9Q_{00}Q_{11}) + P_{10}^2(7P_{11}^2Q_{01} + 14P_{02}P_{20}Q_{01} + 11Q_{01}Q_{02}^2 \\
& + 5P_{02}Q_{02}Q_{10} + 5P_{11}(4Q_{01}Q_{02} + P_{02}Q_{10}) + 4P_{02}Q_{01}Q_{11}) + P_{02}(6P_{20}Q_{01}^3 \\
& - 16P_{20}Q_{00}Q_{01}Q_{02} - 2P_{11}^2Q_{00}Q_{10} + 17Q_{01}^2Q_{02}Q_{10} + 4Q_{00}Q_{02}^2Q_{10} - 8Q_{00}Q_{01}Q_{02}Q_{11} \\
& + P_{11}Q_{01}(-8P_{20}Q_{00} + 9Q_{01}Q_{10} - 6Q_{00}Q_{11})) + P_{10}(-4P_{11}^3Q_{00} + 3P_{11}^2(Q_{01}^2 - 6Q_{00}Q_{02}) \\
& + 6Q_{02}^2(Q_{01}^2 - 4Q_{00}Q_{02}) + 2P_{02}(8P_{20}(Q_{01}^2 + 3Q_{00}Q_{02}) + 9Q_{01}Q_{02}Q_{10} + 3Q_{01}^2Q_{11} \\
& + 8Q_{00}Q_{02}Q_{11}) + P_{11}(Q_{02}(9Q_{01}^2 - 34Q_{00}Q_{02}) + 4P_{02}(11P_{20}Q_{00} + 3Q_{01}Q_{10} + 4Q_{00}Q_{11})) \\
& - 4P_{02}^2(Q_{10}^2 + Q_{00}Q_{20}))) - P_{00}^3(3P_{02}^4Q_{01}^3(2P_{10}^2 - P_{10}Q_{01} + Q_{01}^2) + P_{01}P_{02}^3Q_{01}^2 \\
& (-16P_{10}^2(P_{11} + Q_{02}) + P_{10}(6P_{11}Q_{01} - 11Q_{01}Q_{02} - 28P_{02}Q_{10}) + 3Q_{01}(-4Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) \\
& + 7P_{02}Q_{10})) + P_{01}^2P_{02}^2Q_{01}(18P_{11}^2Q_{01}^2 - 18P_{02}P_{20}Q_{01}^2 + 36P_{11}Q_{01}^2Q_{02} + 23Q_{01}^2Q_{02}^2 \\
& + P_{10}Q_{01}Q_{02}(47P_{11} + 56Q_{02}) + 2P_{10}^2(7P_{11}^2 + 16P_{11}Q_{02} + 12Q_{02}^2) - 39P_{02}P_{11}Q_{01}Q_{10} \\
& - 35P_{02}Q_{01}Q_{02}Q_{10} + 48P_{02}^2Q_{10}^2 + 4P_{02}^2Q_{01}^2Q_{11} + P_{02}P_{10}(24P_{20}Q_{01} + 40P_{11}Q_{10} + 24Q_{02}Q_{10} \\
& - 2Q_{01}Q_{11})) - P_{01}^3P_{02}(12P_{11}^3Q_{01}^2 - 24P_{02}P_{20}Q_{01}^2Q_{02} + 24Q_{01}^2Q_{02}^3 + 4P_{10}^2(P_{11} + 2Q_{02}) \\
& (P_{11}^2 + 2P_{11}Q_{02} + 2Q_{02}^2) + 80P_{02}^2P_{20}Q_{01}Q_{10} - 8P_{02}Q_{01}Q_{02}^2Q_{10} + 32P_{02}^2Q_{02}Q_{10}^2 + 3P_{11}^2Q_{01} \\
& (12Q_{01}Q_{02} - 5P_{02}Q_{10}) + 18P_{02}Q_{01}^2Q_{02}Q_{11} - 8P_{02}^2Q_{01}Q_{10}Q_{11} + 2P_{11}(23Q_{01}^2Q_{02}^2 + 8P_{02}^2Q_{10}^2 \\
& + P_{02}Q_{01}(-15P_{20}Q_{01} - 7Q_{02}Q_{10} + 6Q_{01}Q_{11})) + P_{10}(6P_{11}^3Q_{01} + P_{11}^2(61Q_{01}Q_{02} + 12P_{02}Q_{10}) \\
& + 4Q_{01}Q_{02}(4P_{02}P_{20} + 19Q_{02}^2 - P_{02}Q_{11}) + 4P_{11}(8P_{02}P_{20}Q_{01} + 31Q_{01}Q_{02}^2 + 6P_{02}Q_{02}Q_{10} \\
& - P_{02}Q_{01}Q_{11})) - 2P_{02}^2Q_{01}^2Q_{20}) - 2P_{01}^5(P_{11} + 2Q_{02})(8P_{20}Q_{02}^2 - 4P_{02}P_{20}Q_{11} + 4Q_{02}^2Q_{11} \\
& + 5P_{11}Q_{02}(2P_{20} + Q_{11}) + P_{11}^2(3P_{20} + 2Q_{11}) - P_{02}P_{11}Q_{20} - 2P_{02}Q_{02}Q_{20}) + P_{01}^4(3P_{11}^4Q_{01} \\
& + 3P_{11}^3(4Q_{01}Q_{02} + P_{02}Q_{10}) + P_{10}(P_{11} + 2Q_{02})(3P_{11}^3 + 19P_{11}^2Q_{02} + 16Q_{02}^3 + P_{11}(8P_{02}P_{20} \\
& + 30Q_{02}^2 - 2P_{02}Q_{11})) + P_{11}^2(23Q_{01}Q_{02}^2 + 3P_{02}(-2P_{20}Q_{01} + 7Q_{02}Q_{10} + 4Q_{01}Q_{11})) + 4P_{11} \\
& (6Q_{01}Q_{02}^3 + P_{02}Q_{02}(2P_{20}Q_{01} + 10Q_{02}Q_{10} + 9Q_{01}Q_{11}) + P_{02}^2(4P_{20}Q_{10} - 2Q_{10}Q_{11} \\
& - Q_{01}Q_{20})) + 4(3Q_{01}Q_{02}^4 + P_{02}Q_{02}^2(2P_{20}Q_{01} + 5Q_{02}Q_{10} + 7Q_{01}Q_{11}) + P_{02}^2(8P_{20}^2Q_{01} \\
& + 8P_{20}Q_{02}Q_{10} - 2P_{20}Q_{01}Q_{11} - 4Q_{02}Q_{10}Q_{11} - 2Q_{01}Q_{02}Q_{20}))) + P_{00}^2P_{01}(P_{02}^4Q_{00}Q_{01}^2(6P_{10}^2 \\
& + 2P_{10}Q_{01} + 9Q_{01}^2) - P_{01}P_{02}^3Q_{01}(8P_{10}^3Q_{01} + Q_{00}Q_{01}^2(29P_{11} + 36Q_{02}) + 2P_{10}^2(8P_{11}Q_{00} \\
& + 7Q_{01}^2 + 12Q_{00}Q_{02}) + P_{10}Q_{01}(8P_{11}Q_{00} + Q_{01}^2 + 38Q_{00}Q_{02})) + 2P_{01}P_{02}^4Q_{00}Q_{01}(-8P_{10} \\
& + 19Q_{01})Q_{10} + P_{01}^2P_{02}^2(33P_{11}^2Q_{00}Q_{01}^2 - 32P_{02}P_{20}Q_{00}Q_{01}^2 - 2Q_{01}^4Q_{02} + 61Q_{00}Q_{01}^2Q_{02}^2 \\
& + 4P_{10}^3Q_{01}(4P_{11} + 5Q_{02}) + P_{10}Q_{01}(10P_{11}^2Q_{00} + 16P_{02}P_{20}Q_{00} + 5P_{11}Q_{01}^2 + 76P_{11}Q_{00}Q_{02} \\
& + 17Q_{01}^2Q_{02} + 84Q_{00}Q_{02}^2) - P_{02}Q_{01}^3Q_{10} - 58P_{02}Q_{00}Q_{01}Q_{02}Q_{10} + 2P_{02}P_{10}(17Q_{01}^2 + 4Q_{00} \\
& (4P_{11} + Q_{02}))Q_{10} + 48P_{02}^2Q_{00}Q_{10}^2 + P_{11}Q_{00}Q_{01}(81Q_{01}Q_{02} - 44P_{02}Q_{10}) + 2P_{10}^2(5P_{11}^2Q_{00} \\
& + 3Q_{02}(9Q_{01}^2 + 4Q_{00}Q_{02}) + P_{11}(17Q_{01}^2 + 12Q_{00}Q_{02}) + 10P_{02}Q_{01}Q_{10}) + 10P_{02}Q_{00}Q_{01}^2Q_{11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - P_{01}^3 P_{02} (15 P_{11}^3 Q_{00} Q_{01} - 6 P_{02} P_{20} Q_{01}^3 - 40 P_{02} P_{20} Q_{00} Q_{01} Q_{02} - 2 Q_{01}^3 Q_{02}^2 + 48 Q_{00} Q_{01} Q_{02}^3 \\
& - 4 P_{11} Q_{01} Q_{02} (Q_{01}^2 - 20 Q_{00} Q_{02}) + 4 P_{10}^3 (2 P_{11}^2 + 5 P_{11} Q_{02} + 4 Q_{02}^2) + 80 P_{02}^2 P_{20} Q_{00} Q_{10} \\
& + 29 P_{02} Q_{01}^2 Q_{02} Q_{10} - 20 P_{02} Q_{00} Q_{02}^2 Q_{10} + 28 P_{02}^2 Q_{01} Q_{10}^2 + 6 P_{11}^2 Q_{00} (9 Q_{01} Q_{02} - P_{02} Q_{10}) \\
& + 32 P_{02} Q_{00} Q_{01} Q_{02} Q_{11} - 8 P_{02}^2 Q_{00} Q_{10} Q_{11} + 2 P_{10}^2 (13 P_{11}^2 Q_{01} + 8 P_{02} P_{20} Q_{01} + 43 P_{11} Q_{01} Q_{02} \\
& + 30 Q_{01} Q_{02}^2 + 10 P_{02} P_{11} Q_{10} + 8 P_{02} Q_{02} Q_{10} - P_{02} Q_{01} Q_{11}) + P_{02} P_{11} (-32 P_{20} Q_{00} Q_{01} \\
& + 7 Q_{01}^2 Q_{10} - 2 Q_{00} Q_{02} Q_{10} + 20 Q_{00} Q_{01} Q_{11}) + P_{10} (4 P_{11}^3 Q_{00} + 36 P_{11} Q_{02} (Q_{01}^2 + 2 Q_{00} Q_{02}) \\
& + 6 Q_{02}^2 (5 Q_{01}^2 + 8 Q_{00} Q_{02}) + P_{11}^2 (7 Q_{01}^2 + 38 Q_{00} Q_{02}) + 16 P_{02}^2 Q_{10}^2 + 4 P_{02} P_{11} (8 P_{20} Q_{00} \\
& + 11 Q_{01} Q_{10}) + 2 P_{02} (18 P_{20} Q_{01}^2 + 8 P_{20} Q_{00} Q_{02} + 31 Q_{01} Q_{02} Q_{10} + 4 Q_{01}^2 Q_{11} + 2 Q_{00} Q_{02} Q_{11})) \\
& - 4 P_{02}^2 Q_{00} Q_{01} Q_{20}) + 2 P_{01}^6 (P_{11} + 2 Q_{02}) (-Q_{11} (2 P_{20} + Q_{11}) + (P_{11} + 2 Q_{02}) Q_{20}) - P_{01}^5 \\
& (16 P_{20} Q_{01} (2 P_{02} P_{20} + Q_{02}^2) + P_{11}^3 Q_{10} + 12 Q_{02}^3 Q_{10} + P_{11}^2 (2 P_{20} Q_{01} + 5 Q_{02} Q_{10}) + 4 P_{02} (P_{20} Q_{01} \\
& + Q_{02} Q_{10}) Q_{11} - 2 P_{02} Q_{01} Q_{11}^2 + 2 P_{11} (10 P_{20} Q_{01} Q_{02} + 6 Q_{02}^2 Q_{10} + Q_{01} Q_{02} Q_{11} + P_{02} Q_{10} Q_{11}) \\
& + 2 P_{10} (8 P_{20} Q_{02}^2 - 4 P_{02} P_{20} Q_{11} + 2 Q_{02}^2 Q_{11} + 3 P_{11}^2 (2 P_{20} + Q_{11}) - 4 P_{02} Q_{02} Q_{20} + 2 P_{11} \\
& (8 P_{20} Q_{02} + 3 Q_{02} Q_{11} - P_{02} Q_{20}))) + P_{01}^4 (2 P_{11}^4 Q_{00} + 9 P_{11}^3 Q_{00} Q_{02} + P_{11}^2 (-2 Q_{01}^2 Q_{02} \\
& + 19 Q_{00} Q_{02}^2 + 9 P_{02} Q_{01} Q_{10} + 10 P_{02} Q_{00} Q_{11}) + 2 P_{10}^2 (3 P_{11}^3 + 16 P_{11}^2 Q_{02} + 8 (P_{02} P_{20} Q_{02} \\
& + Q_{02}^3) + P_{11} (8 P_{02} P_{20} + 22 Q_{02}^2 - P_{02} Q_{11})) - 2 P_{11} (Q_{02}^2 (Q_{01}^2 - 10 Q_{00} Q_{02}) + P_{02} (2 P_{20} Q_{01}^2 \\
& - 8 P_{20} Q_{00} Q_{02} - 21 Q_{01} Q_{02} Q_{10} - 16 Q_{00} Q_{02} Q_{11}) + 2 P_{02}^2 (Q_{10}^2 + Q_{00} Q_{20})) + P_{10} (3 P_{11}^3 Q_{01} \\
& + 30 P_{11} Q_{01} Q_{02}^2 + 12 Q_{01} Q_{02}^3 + P_{11}^2 (19 Q_{01} Q_{02} + 10 P_{02} Q_{10}) + 4 P_{02} Q_{02} (14 P_{20} Q_{01} + 7 Q_{02} Q_{10} \\
& + 3 Q_{01} Q_{11}) + 2 P_{02} P_{11} (24 P_{20} Q_{01} + 19 Q_{02} Q_{10} + 7 Q_{01} Q_{11}) + 4 P_{02}^2 (4 P_{20} Q_{10} - 2 Q_{10} Q_{11} \\
& - Q_{01} Q_{20})) + 2 (6 Q_{00} Q_{02}^4 + P_{02} Q_{02} (6 Q_{01} (P_{20} Q_{01} + 3 Q_{02} Q_{10}) + (Q_{01}^2 + 14 Q_{00} Q_{02}) Q_{11}) \\
& + P_{02}^2 (16 P_{20}^2 Q_{00} + 32 P_{20} Q_{01} Q_{10} - 4 Q_{02} Q_{10}^2 - 4 P_{20} Q_{00} Q_{11} + 5 Q_{01} Q_{10} Q_{11} - (Q_{01}^2 \\
& + 4 Q_{00} Q_{02}) Q_{20}))))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{u10} &= (P_{01}^2 (P_{00} P_{02}^2 (P_{10} - Q_{01}) Q_{01} - P_{01}^2 (P_{02} (P_{11} Q_{00} - P_{10} Q_{01} + 2 Q_{00} Q_{02}) + P_{00} (P_{11}^2 \\
& - 4 P_{02} P_{20} + 2 P_{11} Q_{02} + 2 Q_{02}^2)) - P_{01}^3 (P_{10} (P_{11} + 2 Q_{02}) + P_{02} Q_{10}) + P_{01} P_{02} (P_{02} Q_{00} \\
& (P_{10} + Q_{01}) + P_{00} (-P_{10} P_{11} + 2 Q_{01} (P_{11} + Q_{02}) - 4 P_{02} Q_{10})) + P_{01}^4 (2 P_{20} + Q_{11})))^{-1} \\
& (-P_{01}^2 (-3 P_{02}^3 P_{10} Q_{00}^2 Q_{01} + P_{01} P_{02}^2 Q_{00} (3 P_{10}^2 Q_{01} - Q_{01}^3 + Q_{00} Q_{01} Q_{02} + P_{10} (2 P_{11} Q_{00} \\
& + 2 Q_{01}^2 + 3 Q_{00} Q_{02}) + 4 P_{02} Q_{00} Q_{10}) + P_{01}^3 (2 P_{10}^3 Q_{02} + P_{10}^2 Q_{01} Q_{02} - Q_{00} Q_{01} Q_{02} (P_{11} \\
& + Q_{02}) + P_{10} Q_{02} (Q_{01}^2 - 3 Q_{00} Q_{02}) + P_{10} P_{11} (Q_{01}^2 - 2 Q_{00} Q_{02}) + P_{02} (4 P_{20} Q_{00} Q_{01} \\
& - 2 P_{10}^2 Q_{10} - 3 P_{10} Q_{01} Q_{10} + Q_{01}^2 Q_{10} + 2 Q_{00} Q_{02} Q_{10} + Q_{00} Q_{01} Q_{11} + 4 P_{10} Q_{00} (P_{20} \\
& + Q_{11}))) - P_{01}^2 P_{02} (2 P_{10}^2 Q_{00} (P_{11} + 2 Q_{02}) + P_{10} (2 P_{11} Q_{00} Q_{01} + Q_{01}^3 + 3 P_{02} Q_{00} Q_{10}) \\
& + Q_{00} (Q_{00} Q_{02}^2 - Q_{01}^2 (P_{11} + 2 Q_{02}) + P_{02} (4 P_{20} Q_{00} + 5 Q_{01} Q_{10} + 2 Q_{00} Q_{11}))) + P_{01}^4 \\
& (-2 P_{20} Q_{01}^2 + 2 P_{20} Q_{00} Q_{02} + 2 P_{10} P_{11} Q_{10} + P_{11} Q_{01} Q_{10} + P_{10} Q_{02} Q_{10} - Q_{01} Q_{02} Q_{10} \\
& + P_{02} Q_{10}^2 - 2 P_{10}^2 Q_{11} - P_{10} Q_{01} Q_{11} + Q_{00} Q_{02} Q_{11} - 2 P_{02} Q_{00} Q_{20}) + P_{01}^5 (-Q_{10} (2 P_{20} \\
& + Q_{11}) + 2 (P_{10} + Q_{01}) Q_{20})) + P_{00} P_{01} (-P_{02}^3 P_{10} Q_{00} Q_{01} (4 P_{10} + 5 Q_{01}) + P_{01} P_{02}^2 \\
& (4 P_{10}^3 Q_{01} - Q_{01}^4 + P_{10}^2 (4 P_{11} Q_{00} + 6 (Q_{01}^2 + Q_{00} Q_{02}))) + 5 P_{02} Q_{00} Q_{01} Q_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_{10}(10P_{11}Q_{00}Q_{01} + 3Q_{01}^3 + 17Q_{00}Q_{01}Q_{02} + 6P_{02}Q_{00}Q_{10}) - P_{01}^2P_{02}(4P_{10}^3(P_{11} + Q_{02}) \\
& - 2Q_{01}^3(P_{11} + Q_{02}) + P_{10}^2(9P_{11}Q_{01} + 13Q_{01}Q_{02} + 8P_{02}Q_{10}) + P_{10}(5P_{11}^2Q_{00} + 8P_{02}P_{20}Q_{00} \\
& + 6P_{11}Q_{01}^2 + 16P_{11}Q_{00}Q_{02} + 9Q_{01}^2Q_{02} + 12Q_{00}Q_{02}^2 + 10P_{02}Q_{01}Q_{10} + P_{02}Q_{00}Q_{11}) + P_{02} \\
& (6P_{20}Q_{00}Q_{01} + 9P_{11}Q_{00}Q_{10} + 8Q_{01}^2Q_{10} + 9Q_{00}Q_{02}Q_{10} + 5Q_{00}Q_{01}Q_{11})) - P_{01}^4(10P_{20}Q_{01}Q_{02} \\
& + 4Q_{02}^2Q_{10} + Q_{01}Q_{02}Q_{11} + P_{02}Q_{10}Q_{11} + P_{10}(3P_{11} + 2Q_{02})(2P_{20} + Q_{11}) + P_{11}(6P_{20}Q_{01} \\
& + Q_{02}Q_{10} + Q_{01}Q_{11}) - 2P_{02}P_{10}Q_{20}) - P_{01}^5(2P_{20}Q_{11} + Q_{11}^2 - 2(P_{11} + 2Q_{02})Q_{20}) + P_{01}^3 \\
& (-P_{11}^2Q_{01}^2 - 2P_{11}Q_{01}^2Q_{02} - (P_{11}Q_{00} + Q_{01}^2)Q_{02}^2 + P_{10}^2(3P_{11}^2 + 8P_{02}P_{20} + 9P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) \\
& + P_{10}(3P_{11}^2Q_{01} + 10P_{02}P_{20}Q_{01} + 9P_{11}Q_{01}Q_{02} + 5Q_{01}Q_{02}^2 + 6P_{02}P_{11}Q_{10} + 7P_{02}Q_{02}Q_{10} \\
& + 3P_{02}Q_{01}Q_{11}) + P_{02}(6P_{20}(Q_{01}^2 + 2Q_{00}Q_{02}) + 8P_{11}Q_{01}Q_{10} + 13Q_{01}Q_{02}Q_{10} + Q_{01}^2Q_{11} \\
& + 8Q_{00}Q_{02}Q_{11} + 5P_{11}Q_{00}(2P_{20} + Q_{11})) - 2P_{02}^2(Q_{10}^2 + Q_{00}Q_{20}))) + P_{00}^2(2P_{02}^3P_{10}Q_{01}^2 \\
& (2P_{10} + Q_{01}) - P_{01}P_{02}^2Q_{01}(2P_{10}^2(4P_{11} + 5Q_{02}) + Q_{01}(-Q_{01}Q_{02} + P_{02}Q_{10}) + P_{10}(7P_{11}Q_{01} \\
& + 16Q_{01}Q_{02} + 10P_{02}Q_{10})) + P_{01}^2P_{02}(-Q_{01}^2Q_{02}(2P_{11} + Q_{02}) + 2P_{10}^2(2P_{11}^2 + 5P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) \\
& + 8P_{02}^2Q_{10}^2 + P_{02}Q_{01}(2P_{20}Q_{01} + 6P_{11}Q_{10} + 15Q_{02}Q_{10} + 3Q_{01}Q_{11}) + P_{10}(8P_{11}^2Q_{01} \\
& + 8P_{02}P_{20}Q_{01} + 33P_{11}Q_{01}Q_{02} + 26Q_{01}Q_{02}^2 + 10P_{02}P_{11}Q_{10} + 8P_{02}Q_{02}Q_{10} - P_{02}Q_{01}Q_{11})) \\
& + P_{01}^4(16P_{20}Q_{02}^2 - 4P_{02}P_{20}Q_{11} + 6Q_{02}^2Q_{11} + 3P_{11}^2(2P_{20} + Q_{11}) - 4P_{02}Q_{02}Q_{20} + P_{11} \\
& (20P_{20}Q_{02} + 8Q_{02}Q_{11} - 2P_{02}Q_{20})) - P_{01}^3(-P_{11}Q_{01}Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{10}(P_{11} + Q_{02})(3P_{11}^2 \\
& + 8P_{02}P_{20} + 14P_{11}Q_{02} + 12Q_{02}^2) - P_{02}P_{10}P_{11}Q_{11} + P_{02}(5P_{11}^2Q_{10} + 2Q_{02}(8P_{20}Q_{01} \\
& + 7Q_{02}Q_{10} + 4Q_{01}Q_{11}) + P_{11}(8P_{20}Q_{01} + 19Q_{02}Q_{10} + 6Q_{01}Q_{11})) + P_{02}^2(8P_{20}Q_{10} - 4Q_{10}Q_{11} \\
& - 2Q_{01}Q_{20}))),
\end{aligned}$$

$$Q_{u01} = 0,$$

$$Q_{u02} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}^4} \right) (-P_{01}P_{02}Q_{00} + P_{00}P_{02}Q_{01} - P_{00}P_{01}(P_{11} + 2Q_{02})),$$

$$\begin{aligned}
Q_{u20} = & \left(\frac{1}{2P_{01}^4} \right) (P_{01}(P_{02}^2Q_{00}(2P_{10} - Q_{01})Q_{01} - P_{01}P_{02}(-Q_{00}Q_{01}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{10}(Q_{01}^2 \\
& + 2Q_{00}(P_{11} + Q_{02})) + 4P_{02}Q_{00}Q_{10}) - P_{01}^3(2P_{20}Q_{01} - P_{11}Q_{10} + Q_{02}Q_{10} + 2P_{10}Q_{11}) \\
& + P_{01}^2(2P_{10}^2Q_{02} + P_{10}Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - Q_{00}Q_{02}(P_{11} + Q_{02}) + P_{02}(4P_{20}Q_{00} - 2P_{10}Q_{10} \\
& + Q_{01}Q_{10} + 2Q_{00}Q_{11})) + 2P_{01}^4Q_{20}) + P_{00}(-P_{02}^2(4P_{10} - Q_{01})Q_{01}(P_{10} + Q_{01}) \\
& + P_{01}P_{02}(4P_{10}^2(P_{11} + Q_{02}) + Q_{01}(-2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) + 7P_{02}Q_{10}) + P_{10}(6P_{11}Q_{01} \\
& + 9Q_{01}Q_{02} + 8P_{02}Q_{10})) - P_{01}^2(-P_{11}^2Q_{01} + 6P_{02}P_{20}Q_{01} - 2P_{11}Q_{01}Q_{02} - Q_{01}Q_{02}^2 \\
& + P_{10}(3P_{11}^2 + 8P_{02}P_{20} + 9P_{11}Q_{02} + 4Q_{02}^2) + 7P_{02}P_{11}Q_{10} + 9P_{02}Q_{02}Q_{10} + 2P_{02}Q_{01}Q_{11}) \\
& + 2P_{01}^3(4P_{20}Q_{02} + Q_{02}Q_{11} + P_{11}(3P_{20} + Q_{11}) - P_{02}Q_{20}))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{u11} = & 2P_{20} + Q_{11} + \left(\frac{1}{P_{01}^4} \right) (P_{00}P_{02}^2(P_{10} - Q_{01})Q_{01} - P_{01}^2(P_{02}(P_{11}Q_{00} - P_{10}Q_{01} + 2Q_{00}Q_{02}) \\
& + P_{00}(P_{11}^2 - 4P_{02}P_{20} + 2P_{11}Q_{02} + 2Q_{02}^2)) - P_{01}^3(P_{10}(P_{11} + 2Q_{02}) + P_{02}Q_{10}) + P_{01}P_{02} \\
& (P_{02}Q_{00}(P_{10} + Q_{01}) + P_{00}(-P_{10}P_{11} + 2Q_{01}(P_{11} + Q_{02}) - 4P_{02}Q_{10}))).
\end{aligned}$$

C. Estabilidad Local de un punto de equilibrio de coexistencia en \mathbb{R}^3

Dado que la expresión de e_1 es muy extensa, explícitamente tenemos a e_2 y e_3 de $P(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
 e_2 = & \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) (r(c_2 r^3 x_0 (K_2 + x_0 - y_0)(K_1 - x_0 + y_0)^4 (c_4(1 + c_1 x_0) y_0 \\
 & - c_2(x_0 + c_3 x_0 y_0))^2 (1 + c_2 x_0^2 \mu_1) + b_1^3 x_0 (K_2 + x_0 - y_0)(K_1 + y_0)^3 (1 \\
 & + c_3 y_0)^2 (-1 + c_1(K_1 - 2x_0 + y_0) - c_2 x_0 (K_1 - x_0 + y_0) \mu_1) + b_1^2 (K_1 \\
 & + y_0)^2 (K_1 - x_0 + y_0) (3r x_0^3 (K_2 + x_0 - y_0)(K_1 - x_0 + y_0) (c_2 \\
 & + c_2 c_3 y_0)^2 \mu_1 + c_2 r x_0 (K_2 + x_0 - y_0) (1 + c_3 y_0) (-1 + c_3 y_0) (K_1 (-1 \\
 & + 2c_1 x_0) - y_0 + x_0 (-1 - 4c_1 x_0 + 2c_1 y_0)) - 2c_4 x_0 (1 + c_1 x_0) y_0 (K_1 \\
 & - x_0 + y_0) \mu_1) - (1 + c_1 x_0) y_0 (2c_4 r x_0 (K_2 + x_0 - y_0) (1 + c_3 y_0) (1 \\
 & - c_1 (K_1 - 2x_0 + y_0)) + b_2 (1 + c_1 x_0) (K_1 + y_0) (1 - c_3 (K_2 + x_0 - 2y_0) \\
 & + c_4 (K_2 + x_0 - y_0) y_0 \mu_2))) + b_1 r (K_1 + y_0) (K_1 - x_0 + y_0)^2 (c_4 (1 \\
 & + c_1 x_0)^2 y_0 (b_2 (1 + c_1 x_0) (K_2 + x_0 - 2y_0) (K_1 + y_0) + c_4 r x_0 (K_2 + x_0 \\
 & - y_0) y_0 (-1 + c_1 (K_1 - 2x_0 + y_0))) - 3c_2^3 r x_0^4 (K_2 + x_0 - y_0) (K_1 - x_0 \\
 & + y_0) (1 + c_3 y_0)^2 \mu_1 + c_2^2 r x_0^2 (K_2 + x_0 - y_0) (1 + c_3 y_0) ((1 + c_3 y_0) (x_0 \\
 & + K_1 (-2 + c_1 x_0) - 2y_0 + c_1 x_0 (-2x_0 + y_0)) + 4c_4 x_0 (1 + c_1 x_0) y_0 (K_1 \\
 & - x_0 + y_0) \mu_1) + c_2 x_0 (1 + c_1 x_0) y_0 (c_4 r (K_2 + x_0 - y_0) (2(K_1 - c_1 K_1 x_0 \\
 & + c_1 x_0 (2x_0 - y_0) + y_0) (1 + c_3 y_0) - c_4 x_0 (1 + c_1 x_0) y_0 (K_1 - x_0 + y_0) \mu_1) \\
 & + b_2 (1 + c_1 x_0) (K_1 + y_0) (1 - c_3 (K_2 + x_0 - 2y_0) + c_4 (K_2 + x_0 \\
 & - y_0) y_0 \mu_2))))), \\
 e_3 = & \left(\frac{1}{\alpha_2} \right) (b_2 r^2 x_0 y_0 (K_1 - x_0 + y_0) (-b_1 (K_1 + y_0) + c_2 r x_0 (K_1 - x_0 \\
 & + y_0)) (b_1^3 (K_2 + x_0) (K_1 + y_0)^3 (1 + c_3 y_0) (-K_1^2 (-1 + c_3 (K_2 + x_0 - 2y_0)) \\
 & + K_1 (-1 + c_3 (K_2 + x_0 - 2y_0)) (x_0 - 2y_0) + (x_0 - y_0)^2 (1 + 2c_3 y_0) \\
 & + K_2 (x_0 + 2c_3 x_0 y_0 - c_3 y_0^2)) \mu_1 + b_1^2 (K_1 + y_0)^2 (-c_4 r (K_2 + x_0) (1 \\
 & + c_1 x_0) (K_1 - x_0 + y_0) (K_1 (K_1 - x_0) (K_2 + x_0) + (K_1 - x_0) (2(K_2 \\
 & + x_0) + K_1 (-3 + 2c_3 (K_2 + x_0))) y_0 + (-4c_3 K_1^2 + K_2 + 5x_0 - 3c_3 x_0 (K_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_0) + K_1(-6 + 4c_3(K_2 + 2x_0))y_0^2 + (-3 + c_3(-8K_1 + 2K_2 + 7x_0))y_0^3 \\
& - 4c_3y_0^4\mu_1 + c_2rx_0(-K_1 + x_0 - y_0)(1 + c_3y_0)(3x_0(K_2 + x_0)^2 - K_1^2(K_2 \\
& + x_0)(4 + c_1x_0)(-1 + c_3(K_2 + x_0 - 2y_0)) + x_0(2c_3K_2^2(4 + c_1x_0) \\
& + 2K_2(4 + c_1x_0)(-1 + 2c_3x_0) + x_0(-7 + 8c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 2c_3x_0)))y_0 \\
& + (-c_3K_2^2(4 + c_1x_0) - x_0(4 + c_1x_0)(-1 + 4c_3x_0) + K_2(4 + x_0(c_1 \\
& - 21c_3 - 6c_1c_3x_0)))y_0^2 + 2c_3(K_2 + x_0)(4 + c_1x_0)y_0^3 + K_1(K_2 + x_0)(-1 \\
& + c_3(K_2 + x_0 - 2y_0))(x_0(5 + 2c_1x_0) - 2(4 + c_1x_0)y_0)\mu_1 + b_2(1 \\
& + c_1x_0)(K_1 + y_0)^2((K_2 + x_0)^2(1 - c_1K_1 + 2c_1x_0) + (K_1 - K_2 - 2x_0)(1 \\
& + c_1(K_2 + 2x_0))y_0 + (1 + c_1(K_2 + 2x_0))y_0^2)\mu_2) + c_2r^2(K_1 - x_0 \\
& + y_0)^3(-c_2^2rx_0^3(1 + c_3y_0)(-K_1^2(K_2 + x_0)(2 + c_1x_0)(-1 + c_3(K_2 + x_0 \\
& - 2y_0)) + K_1(K_2 + x_0)(-1 + c_3(K_2 + x_0 - 2y_0))(x_0(3 + 2c_1x_0) - 2(2 \\
& + c_1x_0)y_0) + x_0(x_0 - y_0)(x_0 + (2 + c_1x_0)(-1 + 2c_3x_0)y_0 - 2c_3(2 \\
& + c_1x_0)y_0^2) + K_2^2(x_0 + 2c_3x_0(2 + c_1x_0)y_0 - c_3(2 + c_1x_0)y_0^2) + K_2(2x_0^2 \\
& + 2x_0(2 + c_1x_0)(-1 + 2c_3x_0)y_0 + (2 + x_0(c_1 - 11c_3 - 6c_1c_3x_0))y_0^2 \\
& + 2c_3(2 + c_1x_0)y_0^3))\mu_1 + c_4(1 + c_1x_0)^2y_0(-c_4rx_0(-K_1^2(K_2 + x_0)(2 \\
& + c_1x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0) + K_1(K_2 + x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0)(x_0(3 + 2c_1x_0) \\
& - 2(2 + c_1x_0)y_0) + y_0(x_0(K_2 + x_0)^2(3 + 2c_1x_0) - (K_2^2(2 + c_1x_0) \\
& + 2K_2x_0(5 + 3c_1x_0) + x_0^2(7 + 4c_1x_0))y_0 + 2(K_2 + x_0)(2 + c_1x_0)y_0^2))\mu_1 \\
& + b_2(K_2 + x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0)(K_1 + y_0)^2\mu_2) + c_2x_0(1 \\
& + c_1x_0)(c_4rx_0(-K_1^2(K_2 + x_0)(2 + c_1x_0)(K_2 + x_0 + (-3 + 2c_3(K_2 \\
& + x_0))y_0 - 4c_3y_0^2) + K_1(K_2 + x_0)(x_0(3 + 2c_1x_0) - 2(2 + c_1x_0)y_0)(K_2 \\
& + x_0 + (-3 + 2c_3(K_2 + x_0))y_0 - 4c_3y_0^2) + y_0(2x_0(K_2 + x_0)^2(2 + c_1x_0) \\
& + (2K_2x_0(7 + 4c_1x_0)(-1 + c_3x_0) + x_0^2(-10 + 7c_3x_0 + c_1x_0(-5 \\
& + 4c_3x_0)) + K_2^2(-2 + 7c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 4c_3x_0)))y_0 - (2c_3K_2^2(2 \\
& + c_1x_0) + 3K_2(-2 + 7c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 4c_3x_0)) + x_0(-6 + 15c_3x_0 \\
& + c_1x_0(-3 + 8c_3x_0)))y_0^2 + 4c_3(K_2 + x_0)(2 + c_1x_0)y_0^3))\mu_1 + b_2(K_1 \\
& + y_0)^2((K_2 + x_0)^2 - K_2y_0 + c_1x_0^2y_0)\mu_2) - b_1r(K_1 + y_0)(K_1 - x_0 \\
& + y_0)(c_2^2rx_0^2(-K_1 + x_0 - y_0)(1 + c_3y_0)(3x_0(K_2 + x_0)^2 - K_1^2(K_2 \\
& + x_0)(5 + 2c_1x_0)(-1 + c_3(K_2 + x_0 - 2y_0)) + 2x_0(c_3K_2^2(5 + 2c_1x_0) \\
& + K_2(5 + 2c_1x_0)(-1 + 2c_3x_0) + x_0(-4 + 5c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 2c_3x_0)))y_0 \\
& - (c_3K_2^2(5 + 2c_1x_0) + x_0(5 + 2c_1x_0)(-1 + 4c_3x_0) + K_2(-5 + 27c_3x_0 \\
& + 2c_1x_0(-1 + 6c_3x_0)))y_0^2 + 2c_3(K_2 + x_0)(5 + 2c_1x_0)y_0^3 + K_1(K_2 + x_0)(-1 \\
& + c_3(K_2 + x_0 - 2y_0))(x_0(7 + 4c_1x_0) - 2(5 + 2c_1x_0)y_0))\mu_1 - c_2(1 \\
& + c_1x_0)(c_4rx_0(-K_1 + x_0 - y_0)(-K_1^2(K_2 + x_0)(3 + c_1x_0)(K_2 + x_0 + (-3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2c_3(K_2 + x_0)y_0 - 4c_3y_0^2) + 2K_1(K_2 + x_0)(x_0(2 + c_1x_0) - (3 \\
& + c_1x_0)y_0)(K_2 + x_0 + (-3 + 2c_3(K_2 + x_0))y_0 - 4c_3y_0^2) + y_0(2x_0(K_2 \\
& + x_0)^2(3 + c_1x_0) + (4K_2x_0(5 + 2c_1x_0)(-1 + c_3x_0) + x_0^2(5(-3 + 2c_3x_0) \\
& + c_1x_0(-5 + 4c_3x_0)) + K_2^2(-3 + 10c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 4c_3x_0)))y_0 \\
& - (2c_3K_2^2(3 + c_1x_0) + 3K_2(-3 + 10c_3x_0 + c_1x_0(-1 + 4c_3x_0)) + x_0(-9 \\
& + 22c_3x_0 + c_1x_0(-3 + 8c_3x_0)))y_0^2 + 4c_3(K_2 + x_0)(3 + c_1x_0)y_0^3)\mu_1 \\
& - b_2(K_1 + y_0)^2((K_2 + x_0)^2(K_1 - c_1K_1x_0 + 2c_1x_0^2) + (K_2(-K_1 + K_2) \\
& + (K_1 + c_1K_1K_2 + K_2(2 - c_1K_2))x_0 + (-1 + 3c_1K_1 - 4c_1K_2)x_0^2 \\
& - 5c_1x_0^3)y_0 + (-K_2 + x_0 + c_1K_2x_0 + 3c_1x_0^2)y_0^2)\mu_2) + c_4(1 + c_1x_0)^2y_0(K_1 \\
& + y_0)(c_4r(K_2 + x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0)(K_1 - x_0 + y_0)^2\mu_1 + b_2(-c_1K_1^2(K_2 \\
& + x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0) + K_1(K_2 + x_0)(K_2 + x_0 - 2y_0)(1 + 2c_1x_0 - 2c_1y_0) \\
& + y_0((K_2 + x_0)^2(1 + 2c_1x_0) - (K_2(2 + c_1K_2) + x_0 + 6c_1K_2x_0 + 4c_1x_0^2)y_0 \\
& + 2c_1(K_2 + x_0)y_0^2)\mu_2))).
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= b_1(1 + c_1x_0)(y_0 - K_2 - x_0)(K_1 + y_0)^2(b_1(K_1 + y_0)(1 + c_3y_0) \\
& + r(K_1 - x_0 + y_0)(c_4(1 + c_1x_0)y_0 - c_2(x_0 + c_3x_0y_0)))^2, \\
\alpha_2 &= b_1(K_2 + x_0)(1 + c_1x_0)(y_0 - K_2 - x_0)(K_1 + y_0)^4(b_1(K_1 + y_0)(1 \\
& + c_3y_0) + r(K_1 - x_0 + y_0)(c_4(1 + c_1x_0)y_0 - c_2(x_0 + c_3x_0y_0)))^3.
\end{aligned}$$

Región de estabilidad A

La región sobre la cual el punto de equilibrio \hat{P} es estable, está dada por:

$$1 < K_2 < \rho \text{ y } 0 < K_1 < 5.298,$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho &= 0.002(4.089 \times 10^{64} + 1.734 \times 10^{65}k_1 + 3.040 \times 10^{65}k_1^2 + 2.840 \times 10^{65}k_1^3 \\
& + 1.515 \times 10^{65}k_1^4 + 4.544 \times 10^{64}k_1^5 + 6.862 \times 10^{63}k_1^6 + 3.703 \times 10^{62}k_1^7)/(5.271 \times 10^{61} \\
& + 2.560 \times 10^{62}k_1 + 4.973 \times 10^{62}k_1^2 + 5.021 \times 10^{62}k_1^3 + 2.838 \times 10^{62}k_1^4 + 8.885 \times 10^{61}k_1^5 \\
& + 1.383 \times 10^{61}k_1^6 + 7.617 \times 10^{59}k_1^7) + 7.831 \times 10^{-63}\text{Sqrt}((2.682 \times 10^{248} + 2.462 \times 10^{249}k_1 \\
& + 1.030 \times 10^{250}k_1^2 + 2.603 \times 10^{250}k_1^3 + 4.425 \times 10^{250}k_1^4 + 5.342 \times 10^{250}k_1^5 \\
& + 4.712 \times 10^{250}k_1^6 + 3.077 \times 10^{250}k_1^7 + 1.489 \times 10^{250}k_1^8 + 5.295 \times 10^{249}k_1^9 \\
& + 1.352 \times 10^{249}k_1^{10} + 2.389 \times 10^{248}k_1^{11} + 2.728 \times 10^{247}k_1^{12} + 1.778 \times 10^{246}k_1^{13} \\
& + 4.952 \times 10^{244}k_1^{14})/(5.271 \times 10^{61} + 2.560 \times 10^{62}k_1 + 4.973 \times 10^{62}k_1^2 + 5.021 \times 10^{62}k_1^3 \\
& + 2.838 \times 10^{62}k_1^4 + 8.885 \times 10^{61}k_1^5 + 1.383 \times 10^{61}k_1^6 + 7.617 \times 10^{59}k_1^7)^2).
\end{aligned}$$

D. Bifurcación Bogdanov-Takens del plano visto en \mathbb{R}^3

El sistema (3.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\eta_1(x,y,z,\beta_1,\gamma_1)}{\eta_2(x,y,z,\beta_1,\gamma_1)}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{K_2+x}\right) - \frac{b_2y}{1+c_3y+c_4yz} \\ \dot{z} &= \frac{\eta_3(x,y,z,\beta_1,\gamma_1)}{\eta_4(x,y,z,\beta_1,\gamma_1)},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\eta_1(x,y,z,\beta_1,\gamma_1) &= 3dx(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(2c_1^7d^7xz(x-y-\gamma_1) + 243b_1d^4z\beta_1\mu_1^2(R_1 - 2b_1\mu_1) \\ &(R_1 - b_1\mu_1) + xz(x-y-\gamma_1)(R_1 - b_1\mu_1)(2R_1 - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)^5 - 3dz(R_1 \\ &+ b_1\mu_1)^4(3R_1^2x + 2b_1R_1(-3x+y+\gamma_1)\mu_1 + b_1^2(3x-y+\gamma_1)\mu_1^2) + 27d^3\mu_1(R_1 \\ &- 2b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)(3R_1^2(1+xz\beta_1) + 2b_1R_1(-3+ z\beta_1(-3x+y+\gamma_1))\mu_1 \\ &+ b_1^2(3+3xz\beta_1 - z\beta_1(y+\gamma_1))\mu_1^2) + 9d^2\mu_1(-R_1 + b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)^2(2R_1^2(1 \\ &+ xz\beta_1)(x-y-\gamma_1) + b_1R_1(3z - 5(1+xz\beta_1)(x-y-\gamma_1)\mu_1) + b_1^2\mu_1(3z + 2(1 \\ &+ xz\beta_1)(x-y-\gamma_1)\mu_1)) + c_1^6d^6x(-z(x-y-\gamma_1)(R_1 + 11b_1\mu_1) + 18d(z + (-x \\ &+ y + \gamma_1)\mu_1)) - c_1^4d^4(162d^3(\mu_1 + xz\beta_1\mu_1) + 9d^2\mu_1(6b_1z - 3R_1(y + \gamma_1 + x(-10 \\ &+ z\beta_1(-x + y + \gamma_1)))) + 2b_1(5(y + \gamma_1) + x(-41 + 5z\beta_1(-x + y + \gamma_1)))\mu_1) \\ &- xz(x-y-\gamma_1)(8R_1^3 + 33b_1R_1^2\mu_1 - 25b_1^3\mu_1^3) + 3d(b_1^2\mu_1^2(-45xz + 7z(y + \gamma_1) \\ &+ 60x(x-y-\gamma_1)\mu_1) + b_1R_1\mu_1(-6xz + z(y + \gamma_1) - 36x^2\mu_1 + 36x(y + \gamma_1)\mu_1) \\ &+ 15R_1^2x(z + (-x + y + \gamma_1)\mu_1)) - 3c_1^5d^5(-6d^2(y + \gamma_1 + x(-10 + z\beta_1(-x + y \\ &+ \gamma_1)))\mu_1 + xz(x-y-\gamma_1)(3R_1^2 - b_1R_1\mu_1 - 8b_1^2\mu_1^2) + d(3R_1x(z + 3(x-y-\gamma_1)\mu_1) \\ &+ b_1\mu_1(27xz - 2z(y + \gamma_1) + 30x(-x + y + \gamma_1)\mu_1)) + c_1d(243b_1d^4z\beta_1\mu_1^2(3R_1 \\ &- 4b_1\mu_1) - xz(x-y-\gamma_1)(R_1 + b_1\mu_1)^4(R_1^2 - 7b_1R_1\mu_1 + 4b_1^2\mu_1^2) + 81d^3\mu_1(3R_1^3(1 \\ &+ xz\beta_1) + b_1R_1^2(-2 + z\beta_1(-2x + y + \gamma_1))\mu_1 + b_1^2R_1(-9 - 9xz\beta_1 + 2z\beta_1(y \\ &+ \gamma_1))\mu_1^2 + 2b_1^3(4 + 4xz\beta_1 - z\beta_1(y + \gamma_1))\mu_1^3) - 3d(R_1 + b_1\mu_1)^2(3R_1^3x(z + 2(x-y \\ &- \gamma_1)\mu_1) + b_1^3\mu_1^3(-9xz + 2z(y + \gamma_1) - 6x^2\mu_1 + 6x(y + \gamma_1)\mu_1) - b_1R_1^2\mu_1(z(-9x \\ &+ y + \gamma_1) - 21x(-x + y + \gamma_1)\mu_1) + b_1^2R_1\mu_1^2(z(-3x + y + \gamma_1) - 21x(-x + y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_1) \mu_1) - 9d^2 \mu_1 (R_1 + b_1 \mu_1) (-3R_1^3 (y + \gamma_1 + x(2 + z\beta_1(-x + y + \gamma_1))) \\
& + b_1^2 R_1 \mu_1 (6z - 67x\mu_1 + 22(y + \gamma_1)\mu_1 + 22xz\beta_1(-x + y + \gamma_1)\mu_1) + b_1 R_1^2 (3z \\
& - 7(y + \gamma_1)\mu_1 + x(43 + 7xz\beta_1 - 7z\beta_1(y + \gamma_1))\mu_1) + b_1^3 \mu_1^2 (3z + 2(-5(y + \gamma_1) \\
& + x(14 + 5xz\beta_1 - 5z\beta_1(y + \gamma_1)))\mu_1))) + 3c_1^2 d^2 (162b_1 d^4 z\beta_1 \mu_1^2 - xz(x - y - \gamma_1)(R_1 \\
& - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^3 (3R_1 + b_1 \mu_1) + 27d^3 \mu_1 (R_1^2 (1 + xz\beta_1) + b_1 R_1 (9 + 9xz\beta_1 \\
& - z\beta_1(y + \gamma_1))\mu_1) + 2b_1^2 (-6 + z\beta_1(-6x + y + \gamma_1))\mu_1^2) - d(R_1 + b_1 \mu_1) (3R_1^3 x(-4z \\
& + 3(x - y - \gamma_1)\mu_1) + b_1 R_1^2 \mu_1 (12xz - 7z(y + \gamma_1) + 21x(x - y - \gamma_1)\mu_1) + 2b_1^3 \mu_1^3 (z(y \\
& + \gamma_1) - 15x(-x + y + \gamma_1)\mu_1) + b_1^2 R_1 \mu_1^2 (24xz - 5z(y + \gamma_1) + 66x(-x + y + \gamma_1)\mu_1)) \\
& + 3d^2 \mu_1 (R_1^3 (-5(y + \gamma_1) + x(32 + 5xz\beta_1 - 5z\beta_1(y + \gamma_1))) + 9b_1^2 R_1 (2(y + \gamma_1) \\
& + x(-11 + 2z\beta_1(-x + y + \gamma_1)))\mu_1^2 + 3b_1 R_1^2 (3z - 11x\mu_1 + 5(y + \gamma_1)\mu_1 \\
& + 5xz\beta_1(-x + y + \gamma_1)\mu_1) + b_1^3 \mu_1^2 (-9z + 4(-5(y + \gamma_1) + x(23 + 5xz\beta_1 - 5z\beta_1(y \\
& + \gamma_1)))\mu_1))) + c_1^3 d^3 (-27d^3 \mu_1 (9R_1 (1 + xz\beta_1) + 2b_1 (-12 + z\beta_1(-12x + y \\
& + \gamma_1))\mu_1) + 2xz(x - y - \gamma_1)(R_1 + b_1 \mu_1)^2 (4R_1^2 - 15b_1 R_1 \mu_1 + 5b_1^2 \mu_1^2) \\
& + 3d(3R_1^3 x(2z + 5(x - y - \gamma_1)\mu_1) + b_1 R_1^2 \mu_1 (7z(6x - y - \gamma_1) + 45x(-x + y \\
& + \gamma_1)\mu_1) + b_1^2 R_1 \mu_1^2 (z(6x + y + \gamma_1) + 54x(-x + y + \gamma_1)\mu_1) + 2b_1^3 \mu_1^3 (4z(y + \gamma_1) \\
& + 30x^2 \mu_1 - 15x(z + 2(y + \gamma_1)\mu_1))) + 9d^2 \mu_1 (R_1^2 (-5(y + \gamma_1) + x(14 + 5xz\beta_1 \\
& - 5z\beta_1(y + \gamma_1))) + 3b_1 R_1 (z - 4(y + \gamma_1)\mu_1 + x(31 + 4xz\beta_1 - 4z\beta_1(y + \gamma_1))\mu_1) \\
& + b_1^2 \mu_1 (4(-32x + 5(y + \gamma_1))\mu_1 + 5z(3 + 4x\beta_1(-x + y + \gamma_1)\mu_1)))) \\
\eta_2(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) & = ((-c_1 d + R_1)^2 (2c_1 d + R_1) - 3(b_1 (c_1 d - R_1)(c_1 d + R_1) + 3d^2 (2c_1 d + R_1) \\
& \beta_1) \mu_1 + 3b_1 (b_1 R_1 + 6d^2 \beta_1) \mu_1^2 + b_1^3 \mu_1^3) (2c_1^2 d^3 xz + R_1^3 xz + 3R_1 (b_1 R_1 xz - 3d^2 (1 + xz\beta_1)) \mu_1 \\
& + 3b_1 (b_1 R_1 xz + 6d^2 (1 + xz\beta_1)) \mu_1^2 + b_1^3 xz \mu_1^3 - 3c_1^2 d^2 x (R_1 z + 6d \mu_1 + b_1 z \mu_1) \\
& - 9c_1 d^2 \mu_1 (2d(1 + xz\beta_1) + x(R_1 - 2b_1 \mu_1))) (c_1^2 d^2 (y + \gamma_1) - 9d(R_1 - b_1 \mu_1) - (y \\
& + \gamma_1)(2R_1 - b_1 \mu_1)(R_1 + b_1 \mu_1) + c_1 d(-9d + (y + \gamma_1)(R_1 - 2b_1 \mu_1))), \\
\eta_3(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) & = z(-9d^3 (1 + c_3 y + c_4 yz)(1 + xz\beta_1) \mu_1 (R_1 - 2b_1 \mu_1) + dxz(1 + c_3 y + c_4 yz)(R_1 \\
& + b_1 \mu_1)^3 - b_2 xyz (R_1 + b_1 \mu_1)^3 \mu_2 + 2c_1^3 d^3 xz(d + c_3 dy + c_4 dyz - b_2 y \mu_2) \\
& - 3c_1^2 d^2 x (R_1 z + 6d \mu_1 + b_1 z \mu_1)(d + c_3 dy + c_4 dyz - b_2 y \mu_2) - 9d^2 \mu_1 (-R_1 \\
& + 2b_1 \mu_1)(b_1 x(1 + c_3 y + c_4 yz) \mu_1 + b_2 y(1 + xz\beta_1) \mu_2) + 9c_1 d^2 \mu_1 (-d(1 + c_3 y \\
& + c_4 yz)(2d(1 + xz\beta_1) + x(R_1 - 4b_1 \mu_1)) + b_2 y(2d(1 + xz\beta_1) + x(R_1 - 2b_1 \mu_1)) \mu_2)), \\
\eta_4(x, y, z, \beta_1, \gamma_1) & = -(1 + c_3 y + c_4 yz)(2c_1^3 d^3 xz + R_1^3 xz + 3R_1 (b_1 R_1 xz - 3d^2 (1 + xz\beta_1)) \mu_1 \\
& + 3b_1 (b_1 R_1 xz + 6d^2 (1 + xz\beta_1)) \mu_1^2 + b_1^3 xz \mu_1^3 - 3c_1^2 d^2 x (R_1 z + 6d \mu_1 + b_1 z \mu_1) \\
& - 9c_1 d^2 \mu_1 (2d(1 + xz\beta_1) + x(R_1 - 2b_1 \mu_1))).
\end{aligned}$$

Traza y determinante de F

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right) &= -d + s - \frac{2sy}{K_2 + x} - \frac{b_2z}{(1 + c_3y + c_4yz)^2} \\
 &+ \left(\frac{1}{\zeta_4} \right) (c_1^2d^2 - R_1^2 - 2b_1c_1d\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)(x - \zeta_1) \\
 &(9d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)) \\
 &- \frac{b_2c_4y^2z\mu_2}{(1 + c_3y + c_4yz)^2} + \frac{b_2y\mu_2}{1 + c_3y + c_4yz} - \frac{b_1x^2z\mu_1\zeta}{(1 + c_1x + xz\zeta)^2} \\
 &+ \frac{b_1xz(c_1 + z\zeta)}{(1 + c_1x + xz\zeta)^2} - \frac{b_1z}{1 + c_1x + xz\zeta} + \frac{b_1x\mu_1}{1 + c_1x + xz\zeta} \\
 &- \frac{x(c_1^2d^2 - R_1^2 - 2b_1c_1d\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)}{3d\mu_1\zeta\zeta_1}, \\
 \text{Det} \left(\frac{\partial f(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\partial(x, y, z)} \right) &= \frac{\zeta_2(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)}{\zeta_3(x, y, z, \beta_1, \gamma_1)},
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{\beta_1 - (-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{9d^2\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}, \\
 \zeta_1 &= y + \gamma_1 + 3d \left(\frac{1}{(-c_1d - 2R_1 + b_1\mu_1)} + \frac{2}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \right), \\
 \zeta_2 &= 3d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(81b_1d^4z(1 + c_3y + c_4yz)^2\mu_1^3(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)^2(27b_1d^3x(K_2 \\
 &+ x)(1 + c_1x)(K_2s + sx - 2sy + 2c_3K_2sy + 2c_3sxy - 4c_3sy^2 + c_3^2K_2sy^2 + c_3^2sxy^2 - 2c_3^2sy^3 \\
 &- b_2kz - b_2xz + 2c_4K_2sy + 2c_4sxyz - 4c_4sy^2z + 2c_3c_4K_2sy^2z + 2c_3c_4sxy^2z - 4c_3c_4sy^3z \\
 &+ c_4^2K_2sy^2z^2 + c_4^2sxy^2z^2 - 2c_4^2sy^3z^2)\mu_1^2(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)(-9c_1d^2 - 9dR_1 + c_1^2d^2y \\
 &+ c_1dR_1y - 2R_1^2y + c_1^2d^2\gamma_1 + c_1dR_1\gamma_1 - 2R_1^2\gamma_1 + 9b_1d\mu_1 - 2b_1c_1d\mu_1 - b_1R_1y\mu_1 - 2b_1c_1d\gamma_1\mu_1 \\
 &- b_1R_1\gamma_1\mu_1 + b_1^2y\mu_1^2 + b_1^2\gamma_1\mu_1^2)^2(2c_1^3d^3 - 3c_1^2d^2R_1 + R_1^3 - 3b_1c_1^2d^2\mu_1 + 3b_1R_1^2\mu_1 - 18c_1d^3\beta_1\mu_1 \\
 &- 9d^2R_1\beta_1\mu_1 + 3b_1^2R_1\mu_1^2 + 18b_1d^2\beta_1\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3) - b_2x^2(K_2 + x)^2y(1 + c_3y)(c_1d - R_1 \\
 &- b_1\mu_1)^3(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2(2c_1^3d^3xz - 3c_1^2d^2R_1xz + R_1^3xz - 18c_1d^3\mu_1 \\
 &- 9d^2R_1\mu_1 - 18c_1^2d^3x\mu_1 - 9c_1d^2R_1x\mu_1 - 3b_1c_1^2d^2xz\mu_1 + 3b_1R_1^2xz\mu_1 - 18c_1d^3xz\beta_1\mu_1 \\
 &- 9d^2R_1xz\beta_1\mu_1 + 18b_1d^2\mu_1^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_3 = & (K_2 + x)^2(1 + c_3y + c_4yz)^4(-9c_1d^2 - 9dR_1 + c_1^2d^2y + c_1dR_1y - 2R_1^2y + c_1^2d^2\gamma_1 \\
& + c_1dR_1\gamma_1 - 2R_1^2\gamma_1 + 9b_1d\mu_1 - 2b_1c_1d\gamma_1\mu_1 - b_1R_1y\mu_1 - 2b_1c_1d\gamma_1\mu_1 - b_1R_1\gamma_1\mu_1 + b_1^2y\mu_1^2 \\
& + b_1^2\gamma_1\mu_1^2)^2(-2c_1^3d^3 + 3c_1^2d^2R_1 - R_1^3 + 3b_1c_1^2d^2\mu_1 - 3b_1R_1^2\mu_1 + 18c_1d^3\beta_1\mu_1 + 9d^2R_1\beta_1\mu_1 \\
& - 3b_1^2R_1\mu_1^2 - 18b_1d^2\beta_1\mu_1^2 - b_1^3\mu_1^3)(-2c_1^3d^3xz + 3c_1^2d^2R_1xz - R_1^3xz + 18c_1d^3\mu_1 + 9d^2R_1\mu_1 \\
& + 18c_1^2d^3x\mu_1 + 9c_1d^2R_1x\mu_1 + 3b_1c_1^2d^2xz\mu_1 - 3b_1R_1^2xz\mu_1 + 18c_1d^3xz\beta_1\mu_1 + 9d^2R_1xz\beta_1\mu_1 \\
& - 18b_1d^2\mu_1^2 - 18b_1c_1d^2x\mu_1^2 - 3b_1^2R_1xz\mu_1^2 - 18b_1d^2xz\beta_1\mu_1^2 - b_1^3xz\mu_1^3)^2(2c_1^3d^3xz - 3c_1^2d^2R_1xz \\
& + R_1^3xz - 18c_1d^3\mu_1 - 9d^2R_1\mu_1 - 18c_1^2d^3x\mu_1 - 9c_1d^2R_1x\mu_1 - 3b_1c_1^2d^2xz\mu_1 + 3b_1R_1^2xz\mu_1 \\
& - 18c_1d^3xz\beta_1\mu_1 - 9d^2R_1xz\beta_1\mu_1 + 18b_1d^2\mu_1^2 + 18b_1c_1d^2x\mu_1^2 + 3b_1^2R_1xz\mu_1^2 + 18b_1d^2xz\beta_1\mu_1^2 \\
& + b_1^3xz\mu_1^3)^2, \\
\zeta_4 = & 3(9d^2\beta_1\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1) - (-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1))\zeta_1.
\end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
 México.

Entradas de la matriz de regularidad

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1}, \\
 a_{12} &= \frac{3d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1^2d^2 - R_1^2 - 2b_1c_1d\mu_1 + b_1^2\mu_1^2)}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
 a_{13} &= -\frac{d(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1^2}, \\
 a_{14} &= -\frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{3(c_1d - R_1 - b_1\mu_1)(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
 a_{15} &= \frac{9d^4(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^3}{b_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
 a_{22} &= s - \frac{3b_2d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
 a_{31} &= \frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}{3b_1(2c_1^3d^3 + R_1^3 + 3b_1R_1^2\mu_1 + 3b_1^2R_1\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3 - 3c_1^2d^2(R_1 + b_1\mu_1))}, \\
 a_{32} &= \frac{3b_2d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2\mu_2}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
 a_{33} &= \frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{3b_1\mu_1}, \\
 a_{35} &= -\frac{9d^4\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^4}{b_1(2c_1^3d^3 + R_1^3 + 3b_1R_1^2\mu_1 + 3b_1^2R_1\mu_1^2 + b_1^3\mu_1^3 - 3c_1^2d^2(R_1 + b_1\mu_1))^2}, \\
 a_{41} &= \frac{1}{9} \left(26c_1d + 34R_1 - \frac{(c_1d - R_1)(c_1d + 5R_1) - 7b_1\mu_1}{b_1\mu_1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{9} \left(\frac{54(c_1d + R_1)^2}{2c_1d + R_1 + b_1\mu_1} \right), \\
 a_{42} &= b_2\mu_2 + \frac{2(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{9(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \\
 &\quad - \frac{2s(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}{3d + K_2(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \\
 &\quad + \frac{6b_2d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(3c_4d\mu_1(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2)}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2} \\
 &\quad + \frac{6b_2d\mu_1(c_3(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1))}{(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= \frac{2b_1(c_1d - R_1)(2c_1d + R_1)\mu_1 - (-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1)}{3b_1\mu_1^2(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)} \\
&\quad + \frac{b_1(3b_2 - b_1)(2c_1d + R_1)\mu_1^2 + 6b_1^2b_2\mu_1^3}{3b_1\mu_1^2(-2c_1d - R_1 + 2b_1\mu_1)}, \\
a_{44} &= \frac{2(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{9(c_1d + R_1 - b_1\mu_1)(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)}, \\
a_{45} &= -\frac{3d^3(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(8c_1d + 4R_1 + b_1\mu_1)}{b_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2}, \\
a_{51} &= \left(\frac{1}{9b_1\mu_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2} \right) \cdot (-(d(2c_1d + R_1 \\
&\quad - 2b_1\mu_1)(c_1^2d^2 + 10c_1dR_1 + 7R_1^2 - 2b_1(c_1d + 5R_1)\mu_1 + b_1^2\mu_1^2))(-c_1d \\
&\quad + R_1)^2(2c_1d + R_1)s - 3(b_2d(2c_1d + R_1)^2 + b_1(c_1d - R_1)(c_1d \\
&\quad + R_1)s)\mu_1 + 3b_1(4b_2d(2c_1d + R_1) + b_1R_1s)\mu_1^2 + b_1^2(-12b_2d + b_1s)\mu_1^3), \\
a_{52} &= \left(\frac{d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)}{\alpha_5} \right) \cdot \\
&\quad (-8c_1^6d^6s - (R_1 - 2b_1\mu_1)(-2R_1 + b_1\mu_1)^2(2R_1^3s + 3b_1R_1(9b_2d \\
&\quad + 2b_1s)\mu_1^2 + 2b_1^2(-9b_2d + b_1s)\mu_1^3 + R_1^2(-9b_2d\mu_1 + 6b_1s\mu_1)) + 9b_2s(R_1 \\
&\quad - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)^4\mu_2 + 3c_1d((2R_1 - b_1\mu_1)(-4R_1^4s + 4R_1^3(9b_2d \\
&\quad - 2b_1s)\mu_1 - 141b_1b_2dR_1^2\mu_1^2 + 8b_1^2R_1(21b_2d + b_1s)\mu_1^3 + 4b_1^3(-15b_2d \\
&\quad + b_1s)\mu_1^4) + 3b_2s(3R_1 - b_1\mu_1)(R_1 + b_1\mu_1)^3\mu_2) + 12c_1^5d^5(-2R_1s \\
&\quad + 3(b_2d\mu_1 + b_1s\mu_1 + b_2s\mu_2)) + 6c_1^4d^4(R_1^2s + 3R_1(12b_2d + 5b_1s)\mu_1 \\
&\quad - 2b_1\mu_1(15b_2d\mu_1 + 5b_1s\mu_1 + 6b_2s\mu_2)) + c_1^3d^3(52R_1^3s + 9b_2R_1^2(53d\mu_1 \\
&\quad - 7s\mu_2) - 6b_1R_1\mu_1(144b_2d\mu_1 + 20b_1s\mu_1 + 9b_2s\mu_2) + b_1^2\mu_1^2(40(9b_2d \\
&\quad + b_1s)\mu_1 + 9b_2s\mu_2)) + 3c_1^2d^2(2R_1^4s + 15b_1^3b_2\mu_1^3(-8d\mu_1 + s\mu_2) \\
&\quad - 3b_1R_1^2\mu_1(159b_2d\mu_1 + 4b_1s\mu_1 - 3b_2s\mu_2) + 3R_1^3(53b_2d\mu_1 - 10b_1s\mu_1 \\
&\quad - b_2s\mu_2) + b_1^2R_1\mu_1^2(432b_2d\mu_1 + 20b_1s\mu_1 + 27b_2s\mu_2))), \\
a_{53} &= \left(\frac{d}{9b_1\mu_1^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)} \right) \cdot (3(b_2d(2c_1d + R_1)^2 + b_1(c_1d \\
&\quad - R_1)(c_1d + R_1)s)\mu_1 - (-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1)s \\
&\quad - 3b_1(4b_2d(2c_1d + R_1) + b_1R_1s)\mu_1^2 + b_1^2(12b_2d - b_1s)\mu_1^3), \\
a_{54} &= \left(\frac{2d(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^2(c_1d + 2R_1 - b_1\mu_1)^2}{\alpha_6} \right) \cdot (3(b_2d(2c_1d \\
&\quad + R_1)^2 - b_1(c_1d - R_1)(c_1d + R_1)s)\mu_1 - (-c_1d + R_1)^2(2c_1d + R_1)s \\
&\quad - 3b_1(4b_2d(2c_1d + R_1) + b_1R_1s)\mu_1^2 - b_1^2(-12b_2d + b_1s)\mu_1^3), \\
a_{55} &= \left(\frac{3d^4(2c_1d + R_1 - 2b_1\mu_1)^3}{b_1(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^4(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^3} \right) \cdot ((-c_1d \\
&\quad + R_1)^2(2c_1d + R_1)s - 3(b_2d(2c_1d + R_1)^2 + b_1(c_1d - R_1)(c_1d + R_1)s)\mu_1 \\
&\quad + 3b_1(4b_2d(2c_1d + R_1) + b_1R_1s)\mu_1^2 + b_1^2(-12b_2d + b_1s)\mu_1^3),
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_5 = 27b_1\mu_1(-c_1d - R_1 + b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2,$$

$$\alpha_6 = 27b_1\mu_1(-c_1d - R_1 + b_1\mu_1)(-c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2(2c_1d + R_1 + b_1\mu_1)^2.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

E. Bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^3

Los coeficientes del polinomio (3.13) son

$$\begin{aligned}
 l_3 &= 1, \\
 l_2 &= \frac{1}{\alpha_1}(-0.289 + K_1(-4.982 + K_1(-40.293 + K_1(-203.31 \\
 &\quad + K_1(-716.775 + K_1(-1873.64 + K_1(-3760.03 + K_1(-5916.55 \\
 &\quad + K_1(-7389.67 + K_1(-7366.92 + K_1(-5861.28 + K_1(-3700 \\
 &\quad + K_1(-1830.13 + K_1(-694.278 + K_1(-195.025 + K_1(-38.2135 \\
 &\quad + (-4.661 - 0.266K_1)K_1)))))))))) + (-1.167 \\
 &\quad + K_1(-18.937 + K_1(-143.755 + K_1(-677.451 + K_1(-2217.04 \\
 &\quad + K_1(-5338.55 + K_1(-9773.36 + K_1(-13853.2 + K_1(-15325.8 \\
 &\quad + K_1(-13222. + K_1(-8801.19 + K_1(-4409.03 + K_1(-1577.03 \\
 &\quad + K_1(-352.669 + K_1(-24.532 + K_1(11.100 + (3.486 \\
 &\quad + 0.334K_1)K_1))))))))))K_2 + (-0.649 + K_1(-10.410 \\
 &\quad + K_1(-77.928 + K_1(-361.274 + K_1(-1159.46 + K_1(-2726.3 \\
 &\quad + K_1(-4844.45 + K_1(-6605.87 + K_1(-6932.87 + K_1(-5540.46 \\
 &\quad + K_1(-3262.45 + K_1(-1294.9 + K_1(-237.959 + K_1(73.4554 \\
 &\quad + K_1(70.323 + K_1(24.384 + (4.396 \\
 &\quad + 0.341K_1)K_1))))))))))K_2^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 = & \frac{1}{\alpha_1} (0.090 + K_1(1.378 + K_1(9.277 + K_1(35.731 \\
& + K_1(82.318 + K_1(92.147 + K_1(-73.476 + K_1(-529.73 \\
& + K_1(-1174.12 + K_1(-1661.4 + K_1(-1683. + K_1(-1262.23 \\
& + K_1(-703.797 + K_1(-287.375 + K_1(-82.906 + K_1(-15.788 \\
& + (-1.734 - 0.078K_1)K_1)))))))))) + (0.303 \\
& + K_1(4.170 + K_1(25.666 + K_1(91.019 + K_1(192.205 \\
& + K_1(182.55 + K_1(-245.935 + K_1(-1309.07 + K_1(-2741.53 \\
& + K_1(-3797.65 + K_1(-3843.03 + K_1(-2931.92 + K_1(-1696.01 \\
& + K_1(-735.689 + K_1(-232.545 + K_1(-50.681 + (-6.819 \\
& - 0.427K_1)K_1))))))))))K_2 + (0.096 + K_1(1.357 \\
& + K_1(8.623 + K_1(31.79 + K_1(70.993 + K_1(77.842 + K_1(-62.703 \\
& + K_1(-450.856 + K_1(-1017.3 + K_1(-1486.39 + K_1(-1578.4 \\
& + K_1(-1262.25 + K_1(-765.694 + K_1(-348.686 + K_1(-115.878 \\
& + K_1(-26.596 + (-3.775 - 0.250K_1)K_1))))))))))K_2^2), \\
l_0 = & \frac{1}{\alpha_1} (0.025 + K_1(0.353 + K_1(2.254 + K_1(8.510 + K_1(19.982 \\
& + K_1(25.027 + K_1(-8.657 + K_1(-116.357 + K_1(-290.164 \\
& + K_1(-453.907 + K_1(-511.171 + K_1(-431.267 + K_1(-274.827 \\
& + K_1(-130.926 + K_1(-45.318 + K_1(-10.784 + (-1.579 \\
& - 0.107K_1)K_1)))))))))) + (0.146 + K_1(1.825 + K_1(10.023 \\
& + K_1(30.690 + K_1(51.019 + K_1(14.684 + K_1(-152.316 + K_1(-444.665 \\
& + K_1(-718.76 + K_1(-794.73 + K_1(-632.562 + K_1(-363.409 \\
& + K_1(-145.473 + K_1(-36.3445 + K_1(-3.377 + K_1(0.962 + (0.348 \\
& + 0.035K_1)K_1))))))))))K_2 + (0.080 + K_1(0.996 + K_1(5.377 \\
& + K_1(16.025 + K_1(25.148 + K_1(2.510 + K_1(-87.364 + K_1(-232.972 \\
& + K_1(-352.774 + K_1(-360.269 + K_1(-254.268 + K_1(-116.969 \\
& + K_1(-25.577 + K_1(6.404 + K_1(7.362 + K_1(2.730 + (0.513 \\
& + 0.041K_1)K_1))))))))))K_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & -0.541 + K_1(-9.380 + K_1(-76.529 + K_1(-390.206 + K_1(-1392.62 \\
& + K_1(-3691.92 + K_1(-7528.4 + K_1(-12061.3 + K_1(-15370. \\
& + K_1(-15668.1 + K_1(-12776.9 + K_1(-8287.51 + K_1(-4223.4 \\
& + K_1(-1655.5 + K_1(-482.034 + K_1(-98.242 + (-12.513 \\
& - 0.75K_1)K_1)))))))))) + (-1.442 + K_1(-25.014 + K_1(-204.078 \\
& + K_1(-1040.55 + K_1(-3713.66 + K_1(-9845.12 + K_1(-20075.7 \\
& + K_1(-32163.4 + K_1(-40986.5 + K_1(-41781.6 + K_1(-34071.7 \\
& + K_1(-22100. + K_1(-11262.4 + K_1(-4414.68 + K_1(-1285.43 \\
& + K_1(-261.979 + (-33.368 - 2.K_1)K_1))))))))))K_2 + (-0.721 \\
& + K_1(-12.507 + K_1(-102.039 + K_1(-520.275 + K_1(-1856.83 \\
& + K_1(-4922.56 + K_1(-10037.9 + K_1(-16081.7 + K_1(-20493.3 \\
& + K_1(-20890.8 + K_1(-17035.9 + K_1(-11050. + K_1(-5631.19 \\
& + K_1(-2207.34 + K_1(-642.713 + K_1(-130.99 + (-16.684 \\
& - 1.K_1)K_1))))))))))K_2^2.
\end{aligned}$$

Curva algebraica (3.14)

$$\begin{aligned}
Q(K_1, K_2) = & -0.044(0.283 + 9.533K_1 + 152.061K_1^2 + 1531.946K_1^3 \\
& + 10936.331K_1^4 + 58739.125K_1^5 + 245438.665K_1^6 \\
& + 810749.509K_1^7 + 2.114 \times 10^6 K_1^8 + 4.225 \times 10^6 K_1^9 \\
& + 5.743 \times 10^6 K_1^{10} + 2.013 \times 10^6 K_1^{11} - 1.581 \times 10^7 K_1^{12} \\
& - 5.838 \times 10^7 K_1^{13} - 1.311 \times 10^8 K_1^{14} - 2.261 \times 10^8 K_1^{15} \\
& - 3.190 \times 10^8 K_1^{16} - 3.778 \times 10^8 K_1^{17} - 3.799 \times 10^8 K_1^{18} \\
& - 3.249 \times 10^8 K_1^{19} - 2.351 \times 10^8 K_1^{20} - 1.420 \times 10^8 K_1^{21} \\
& - 6.927 \times 10^7 K_1^{22} - 2.512 \times 10^7 K_1^{23} - 4.794 \times 10^6 K_1^{24} \\
& + 1.487 \times 10^6 K_1^{25} + 1.957 \times 10^6 K_1^{26} + 1.090 \times 10^6 K_1^{27} \\
& + 421701.935K_1^{28} + 122770.622K_1^{29} + 27185.334K_1^{30} \\
& + 4481.739K_1^{31} + 521.635K_1^{32} + 38.387K_1^{33} + 1.346K_1^{34} \\
& + 1.760K_2 + 57.384K_1K_2 + 889.295K_1^2K_2 + 8719.728K_1^3K_2 \\
& + 60649.841K_1^4K_2 + 317533.515K_1^5K_2 + 1.293 \times 10^6 K_1^6K_2 \\
& + 4.157 \times 10^6 K_1^7K_2 + 1.052 \times 10^7 K_1^8K_2 + 2.021 \times 10^7 K_1^9K_2 \\
& + 2.553 \times 10^7 K_1^{10}K_2 + 3.275 \times 10^6 K_1^{11}K_2 - 8.808 \times 10^7 K_1^{12}K_2 \\
& - 2.949 \times 10^8 K_1^{13}K_2 - 6.357 \times 10^8 K_1^{14}K_2 - 1.065 \times 10^9 K_1^{15}K_2 \\
& - 1.469 \times 10^9 K_1^{16}K_2 - 1.708 \times 10^9 K_1^{17}K_2 - 1.692 \times 10^9 K_1^{18}K_2 \\
& - 1.433 \times 10^9 K_1^{19}K_2 - 1.035 \times 10^9 K_1^{20}K_2 - 6.322 \times 10^8 K_1^{21}K_2 \\
& - 3.206 \times 10^8 K_1^{22}K_2 - 1.300 \times 10^8 K_1^{23}K_2 - 3.817 \times 10^7 K_1^{24}K_2 \\
& - 5.075 \times 10^6 K_1^{25}K_2 + 2.289 \times 10^6 K_1^{26}K_2 + 2.011 \times 10^6 K_1^{27}K_2 \\
& + 863492.990K_1^{28}K_2 + 257380.287K_1^{29}K_2 + 56385.438K_1^{30}K_2 \\
& + 9014.985K_1^{31}K_2 + 1002.813K_1^{32}K_2 + 69.630K_1^{33}K_2 \\
& + 2.275K_1^{34}K_2 + 3.787K_2^2 + 116.516K_1K_2^2 + 1716.683K_1^2K_2^2 \\
& + 16098.549K_1^3K_2^2 + 107624.622K_1^4K_2^2 + 543827.877K_1^5K_2^2 \\
& + 2.144 \times 10^6 K_1^6K_2^2 + 6.692 \times 10^6 K_1^7K_2^2 + 1.644 \times 10^7 K_1^8K_2^2 \\
& + 3.0594 \times 10^7 K_1^9K_2^2 + 3.657 \times 10^7 K_1^{10}K_2^2 \\
& - 1.218 \times 10^6 K_1^{11}K_2^2 - 1.445 \times 10^8 K_1^{12}K_2^2 \\
& - 4.608 \times 10^8 K_1^{13}K_2^2 - 9.753 \times 10^8 K_1^{14}K_2^2 \\
& - 1.621 \times 10^9 K_1^{15}K_2^2 - 2.233 \times 10^9 K_1^{16}K_2^2 \\
& - 2.609 \times 10^9 K_1^{17}K_2^2 - 2.615 \times 10^9 K_1^{18}K_2^2 \\
& - 2.258 \times 10^9 K_1^{19}K_2^2 - 1.682 \times 10^9 K_1^{20}K_2^2 \\
& - 1.076 \times 10^9 K_1^{21}K_2^2 - 5.882 \times 10^8 K_1^{22}K_2^2 \\
& - 2.704 \times 10^8 K_1^{23}K_2^2 - 1.021 \times 10^8 K_1^{24}K_2^2 \\
& - 3.015 \times 10^7 K_1^{25}K_2^2 - 6.076 \times 10^6 K_1^{26}K_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -325318.908K_1^{27}K_2^2 + 329164.036K_1^{28}K_2^2 + 160664.812K_1^{29}K_2^2 \\
& + 43276.109K_1^{30}K_2^2 + 7820.546K_1^{31}K_2^2 + 949.599K_1^{32}K_2^2 \\
& + 70.843K_1^{33}K_2^2 + 2.471K_1^{34}K_2^2 + 1.964K_2^3 + 60.126K_1K_2^3 \\
& + 883.053K_1^2K_2^3 + 8269.244K_1^3K_2^3 + 55304.863K_1^4K_2^3 + 280111.475K_1^5K_2^3 \\
& + 1.109 \times 10^6 K_1^6 K_2^3 + 3.487 \times 10^6 K_1^7 K_2^3 + 8.669 \times 10^6 K_1^8 K_2^3 \\
& + 1.643 \times 10^7 K_1^9 K_2^3 + 2.054 \times 10^7 K_1^{10} K_2^3 + 2.472 \times 10^6 K_1^{11} K_2^3 \\
& - 7.117 \times 10^7 K_1^{12} K_2^3 - 2.389 \times 10^8 K_1^{13} K_2^3 - 5.196 \times 10^8 K_1^{14} K_2^3 \\
& - 8.832 \times 10^8 K_1^{15} K_2^3 - 1.243 \times 10^9 K_1^{16} K_2^3 - 1.484 \times 10^9 K_1^{17} K_2^3 \\
& - 1.522 \times 10^9 K_1^{18} K_2^3 - 1.348 \times 10^9 K_1^{19} K_2^3 - 1.031 \times 10^9 K_1^{20} K_2^3 \\
& - 6.803 \times 10^8 K_1^{21} K_2^3 - 3.840 \times 10^8 K_1^{22} K_2^3 - 1.833 \times 10^8 K_1^{23} K_2^3 \\
& - 7.245 \times 10^7 K_1^{24} K_2^3 - 2.269 \times 10^7 K_1^{25} K_2^3 - 5.065 \times 10^6 K_1^{26} K_2^3 \\
& - 476616.884K_1^{27}K_2^3 + 190017.614K_1^{28}K_2^3 + 115123.146K_1^{29}K_2^3 \\
& + 33946.682K_1^{30}K_2^3 + 6579.514K_1^{31}K_2^3 + 852.718K_1^{32}K_2^3 + 67.909K_1^{33}K_2^3 \\
& + 2.535K_1^{34}K_2^3 + 0.091K_2^4 + 3.418K_1K_2^4 + 59.190K_1^2K_2^4 + 638.935K_1^3K_2^4 \\
& + 4846.803K_1^4K_2^4 + 27520.918K_1^5K_2^4 + 121273.430K_1^6K_2^4 \\
& + 422641.249K_1^7K_2^4 + 1.168 \times 10^6 K_1^8 K_2^4 + 2.512 \times 10^6 K_1^9 K_2^4 \\
& + 3.871 \times 10^6 K_1^{10} K_2^4 + 2.762 \times 10^6 K_1^{11} K_2^4 - 6.172 \times 10^6 K_1^{12} K_2^4 \\
& - 3.035 \times 10^7 K_1^{13} K_2^4 - 7.536 \times 10^7 K_1^{14} K_2^4 - 1.391 \times 10^8 K_1^{15} K_2^4 \\
& - 2.082 \times 10^8 K_1^{16} K_2^4 - 2.612 \times 10^8 K_1^{17} K_2^4 - 2.790 \times 10^8 K_1^{18} K_2^4 \\
& - 2.553 \times 10^8 K_1^{19} K_2^4 - 2.003 \times 10^8 K_1^{20} K_2^4 - 1.341 \times 10^8 K_1^{21} K_2^4 \\
& - 7.593 \times 10^7 K_1^{22} K_2^4 - 3.559 \times 10^7 K_1^{23} K_2^4 - 1.326 \times 10^7 K_1^{24} K_2^4 \\
& - 3.525 \times 10^6 K_1^{25} K_2^4 - 384564.109K_1^{26}K_2^4 + 207431.807K_1^{27}K_2^4 \\
& + 152933.909K_1^{28}K_2^4 + 57352.019K_1^{29}K_2^4 + 14734.149K_1^{30}K_2^4 \\
& + 2696.369K_1^{31}K_2^4 + 340.525K_1^{32}K_2^4 + 26.835K_1^{33}K_2^4 + 1.1K_1^{34}K_2^4).
\end{aligned}$$

F. Bifurcación Bogdanov-Takens de un CEP en Ω_1

El sistema (3.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{1}{\eta_1(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)} \right) \left((0.5000x(-2.985 \times 10^4 + x(-2.377 \times 10^4 + y(-2675. - 2985.z) \right. \\ &\quad \left. - 2.985 \times 10^4 z) + 4.776 \times 10^4 z + x^2(2675. + 2985.z) + y(-2985. + 4776.z)) \right), \\ \dot{y} &= \left(-\frac{1}{\eta_2(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)} \right) \left((0.005025y(-8.793 \times 10^{58} + 2.632 \times 10^{59}y - 1.753 \times 10^{59}y^2 \right. \\ &\quad - 2.366 \times 10^{58}z + 2.366 \times 10^{58}\gamma_2 - 7.084 \times 10^{58}y\gamma_2 + 4.718 \times 10^{58}y^2\gamma_2 + x(-8.793 \times 10^{58} \\ &\quad - 2.366 \times 10^{58}z + y(1.753 \times 10^{59} - 4.718 \times 10^{58}\gamma_2) + 2.366 \times 10^{58}\gamma_2) + c_4^5y(2.211 \times 10^{55} \\ &\quad - 1.796 \times 10^{55}z + 6.603 \times 10^{54}\gamma_2 - 5.363 \times 10^{54}z\gamma_2 + x(2.211 \times 10^{55} + z(-1.796 \times 10^{55} \\ &\quad - 5.363 \times 10^{54}\gamma_2) + 6.603 \times 10^{54}\gamma_2) + y(-2.211 \times 10^{55} + 1.796 \times 10^{55}z - 6.603 \times 10^{54}\gamma_2 \\ &\quad + 5.363 \times 10^{54}z\gamma_2)) + c_4^2(-8.451 \times 10^{58} + 3.150 \times 10^{57}z - 3.150 \times 10^{57}\gamma_2 + y(-5.169 \times 10^{58} \\ &\quad + 1.698 \times 10^{59}z + 3.077 \times 10^{58}\gamma_2 - 1.963 \times 10^{58}z\gamma_2) + y^2(1.362 \times 10^{59} - 1.698 \times 10^{59}z \\ &\quad - 2.762 \times 10^{58}\gamma_2 + 1.963 \times 10^{58}z\gamma_2) + x(-8.451 \times 10^{58} + 3.150 \times 10^{57}z - 3.150 \times 10^{57}\gamma_2 \\ &\quad + y(-1.362 \times 10^{59} + 1.698 \times 10^{59}z + 2.762 \times 10^{58}\gamma_2 - 1.963 \times 10^{58}z\gamma_2)) + c_4^3(2.427 \times 10^{57} \\ &\quad - 4.084 \times 10^{56}z + 4.084 \times 10^{56}\gamma_2 + y(1.007 \times 10^{59} - 8.451 \times 10^{58}z + 3.162 \times 10^{57}\gamma_2 \\ &\quad - 3.150 \times 10^{57}z\gamma_2) + y^2(-1.031 \times 10^{59} + 8.451 \times 10^{58}z - 3.571 \times 10^{57}\gamma_2 + 3.150 \times 10^{57}z\gamma_2) \\ &\quad + x(2.427 \times 10^{57} - 4.084 \times 10^{56}z + 4.084 \times 10^{56}\gamma_2 + y(1.031 \times 10^{59} - 8.451 \times 10^{58}z \\ &\quad + 3.571 \times 10^{57}\gamma_2 - 3.150 \times 10^{57}z\gamma_2)) + c_4^4(-1.796 \times 10^{55} + 5.363 \times 10^{54}z \\ &\quad - 5.363 \times 10^{54}\gamma_2 + y^2(2.990 \times 10^{57} - 2.427 \times 10^{57}z + 5.034 \times 10^{56}\gamma_2 - 4.084 \times 10^{56}z\gamma_2) \\ &\quad + y(-2.972 \times 10^{57} + 2.427 \times 10^{57}z - 4.980 \times 10^{56}\gamma_2 + 4.084 \times 10^{56}z\gamma_2) + x(-1.796 \times 10^{55} \\ &\quad + 5.363 \times 10^{54}z - 5.363 \times 10^{54}\gamma_2 + y(-2.990 \times 10^{57} + 2.427 \times 10^{57}z - 5.034 \times 10^{56}\gamma_2 \\ &\quad + 4.084 \times 10^{56}z\gamma_2)) + c_4(1.698 \times 10^{59} + 1.963 \times 10^{58}z - 1.963 \times 10^{58}\gamma_2 + y^2(1.341 \times 10^{59} \\ &\quad + 8.793 \times 10^{58}z + 1.591 \times 10^{58}\gamma_2 - 2.366 \times 10^{58}z\gamma_2) + y(-3.039 \times 10^{59} - 8.793 \times 10^{58}z \\ &\quad + 3.715 \times 10^{57}\gamma_2 + 2.366 \times 10^{58}z\gamma_2) + x(1.698 \times 10^{59} + 1.963 \times 10^{58}z - 1.963 \times 10^{58}\gamma_2 \\ &\quad + y(-1.341 \times 10^{59} - 8.793 \times 10^{58}z - 1.591 \times 10^{58}\gamma_2 + 2.366 \times 10^{58}z\gamma_2)) \right), \end{aligned}$$

$$\dot{z} = \left(\frac{1}{\eta_2(x, y, z, \beta_2, \gamma_2)} \right) \left((4.319 \times 10^{-22} z(-1.676 \times 10^{80} + 4.386 \times 10^{80} y + 1.654 \times 10^{80} \beta_2 - 1.654 \times 10^{80} y \beta_2 + x(9.756 \times 10^{80} + y(-1.852 \times 10^{81} + z(4.386 \times 10^{80} - 1.654 \times 10^{80} \beta_2) - 1.482 \times 10^{80} \beta_2) + 1.482 \times 10^{80} \beta_2 + z(-1.676 \times 10^{80} + 1.654 \times 10^{80} \beta_2)) + c_4^5 y(-7.578 \times 10^{76} - 4.159 \times 10^{76} \beta_2 + z(6.155 \times 10^{76} + 3.378 \times 10^{76} \beta_2)) + x(2.463 \times 10^{77} + z(-2.758 \times 10^{77} - 1.132 \times 10^{76} \beta_2) - 3.727 \times 10^{76} \beta_2 + z^2(6.155 \times 10^{76} + 3.378 \times 10^{76} \beta_2))) + c_4^2(3.411 \times 10^{79} + 1.589 \times 10^{80} \beta_2 + y(-3.289 \times 10^{80} + 2.366 \times 10^{80} z + 2.343 \times 10^{80} \beta_2 - 3.194 \times 10^{80} z \beta_2) + x(-1.193 \times 10^{80} + 3.411 \times 10^{79} z + 1.424 \times 10^{80} \beta_2 + 1.589 \times 10^{80} z \beta_2 + y(1.019 \times 10^{81} + z^2(2.366 \times 10^{80} - 3.194 \times 10^{80} \beta_2) + z(-1.051 \times 10^{81} - 5.194 \times 10^{79} \beta_2) + 2.099 \times 10^{80} \beta_2))) + c_4^4(6.155 \times 10^{76} + 3.378 \times 10^{76} \beta_2 + y(5.722 \times 10^{78} - 4.642 \times 10^{78} z + 5.586 \times 10^{78} \beta_2 - 4.565 \times 10^{78} z \beta_2) + x(-2.000 \times 10^{77} + 6.155 \times 10^{76} z + 3.027 \times 10^{76} \beta_2 + 3.378 \times 10^{76} z \beta_2 + y(-1.882 \times 10^{79} + z^2(-4.642 \times 10^{78} - 4.565 \times 10^{78} \beta_2) + 5.006 \times 10^{78} \beta_2 + z(2.100 \times 10^{79} + 1.495 \times 10^{78} \beta_2)))) + c_4^3(-4.642 \times 10^{78} - 4.565 \times 10^{78} \beta_2 + y(-3.852 \times 10^{79} + 3.411 \times 10^{79} z - 1.911 \times 10^{80} \beta_2 + 1.589 \times 10^{80} z \beta_2) + x(1.527 \times 10^{79} - 4.642 \times 10^{78} z - 4.091 \times 10^{78} \beta_2 - 4.565 \times 10^{78} z \beta_2 + y(1.354 \times 10^{80} + z(-1.578 \times 10^{80} - 4.868 \times 10^{79} \beta_2) - 1.713 \times 10^{80} \beta_2 + z^2(3.411 \times 10^{79} + 1.589 \times 10^{80} \beta_2)))) + c_4(2.366 \times 10^{80} - 3.194 \times 10^{80} \beta_2 + y(4.359 \times 10^{79} - 1.676 \times 10^{80} z + 1.158 \times 10^{80} \beta_2 + 1.654 \times 10^{80} z \beta_2) + x(-7.218 \times 10^{80} + 2.366 \times 10^{80} z - 2.862 \times 10^{80} \beta_2 - 3.194 \times 10^{80} z \beta_2 + y(-7.180 \times 10^{80} + 1.038 \times 10^{80} \beta_2 + z^2(-1.676 \times 10^{80} + 1.654 \times 10^{80} \beta_2) + z(1.019 \times 10^{81} + 2.640 \times 10^{80} \beta_2))))),$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_1(x, y, z, \beta_2, \gamma_2) &= (10.00 + y)(597.0 + 535.0x + 597.0xz), \\ \eta_2(x, y, z, \beta_2, \gamma_2) &= (-1.682 \times 10^{26} - 2.291 \times 10^{25} c_4 + 2.667 \times 10^{24} c_4^2)(1.000 + x)(7.071 \times 10^{29} \\ &\quad - 1.410 \times 10^{30} y + c_4^2(1.011 \times 10^{28} + y(8.417 \times 10^{29} - 6.828 \times 10^{29} z)) \\ &\quad + c_4^3 y(-1.244 \times 10^{28} + 1.011 \times 10^{28} z) + c_4(-6.828 \times 10^{29} + y(-2.834 \times 10^{29} \\ &\quad + 7.071 \times 10^{29} z))). \end{aligned}$$

Entradas de la matriz de regularidad

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\frac{8645}{7744}, \\
 a_{12} &= \frac{5}{968}, \\
 a_{13} &= -\frac{147459}{216832}, \\
 a_{14} &= 0, \\
 a_{15} &= 0, \\
 a_{21} &= \left(\frac{1}{\rho_1}\right) (0.07817(3.553 \times 10^{27} - 3.431 \times 10^{27}c_4 + 5.078 \times 10^{25}c_4^2)), \\
 a_{22} &= \left(\frac{1}{(-\rho_1)^2}\right) (0.0005583(-3.870 \times 10^{53} + 6.988 \times 10^{55}c_4 - 6.902 \times 10^{55}c_4^2 \\
 &\quad + 2.825 \times 10^{54}c_4^3 - 2.711 \times 10^{52}c_4^4)), \\
 a_{23} &= \left(\frac{1}{(-\rho_1)^2}\right) (0.01970(3.553 \times 10^{27} - 3.431 \times 10^{27}c_4 + 5.078 \times 10^{25}c_4^2)(4.064 \times 10^{26} \\
 &\quad + 5.588 \times 10^{26}c_4 - 4.926 \times 10^{26}c_4^2 + 7.196 \times 10^{24}c_4^3)), \\
 a_{24} &= \frac{1}{3}, \\
 a_{25} &= 0, \\
 a_{31} &= \frac{41834493798880950}{21126143373290839}, \\
 a_{32} &= \left(\frac{1}{(-\rho_1)^2}\right) (2.532 \times 10^{-23}(8.855 \times 10^{74} + 8.679 \times 10^{73}c_4 - 1.851 \times 10^{73}c_4^2 \\
 &\quad + 5.565 \times 10^{71}c_4^3 - 2.319 \times 10^{69}c_4^4)), \\
 a_{33} &= -\left(\frac{1}{(-\rho_1)^2}\right) (3.127 \times 10^{-21}(4.477 \times 10^{72} + 8.390 \times 10^{72}c_4 + 6.438 \times 10^{71}c_4^2 \\
 &\quad - 1.692 \times 10^{71}c_4^3 + 5.632 \times 10^{69}c_4^4 - 1.878 \times 10^{67}c_4^5)), \\
 a_{34} &= 0, \\
 a_{35} &= 0, \\
 a_{41} &= 2.578 + \left(\frac{1}{(\rho_1)^2}\right) (0.1563(3.553 \times 10^{27} - 3.431 \times 10^{27}c_4 + 5.078 \times 10^{25}c_4^2)), \\
 a_{42} &= -\left(\frac{1}{(\rho_1)^3}\right) (1.424 \times 10^{-28}(3.548 \times 10^{107} - 4.483 \times 10^{107}c_4 + 2.047 \times 10^{107}c_4^2 \\
 &\quad - 7.468 \times 10^{106}c_4^3 + 3.730 \times 10^{105}c_4^4 - 1.098 \times 10^{104}c_4^5 + 1.181 \times 10^{102}c_4^6 \\
 &\quad - 1.995 \times 10^{99}c_4^7)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= \left(\frac{1}{(\rho_1)^3} \right) (6.243 \times 10^{-30} (1.489 \times 10^{108} + 1.801 \times 10^{108} c_4 - 3.557 \times 10^{108} c_4^2 \\
&\quad + 4.445 \times 10^{108} c_4^3 - 2.020 \times 10^{108} c_4^4 + 1.054 \times 10^{107} c_4^5 - 2.250 \times 10^{105} c_4^6 \\
&\quad + 1.961 \times 10^{103} c_4^7 - 4.549 \times 10^{100} c_4^8)), \\
a_{44} &= -\frac{1}{3}, \\
a_{45} &= -\left(\frac{1}{(-\rho_1)^2} \right) (0.002792 c_4 (3.553 \times 10^{27} - 3.431 \times 10^{27} c_4 + 5.078 \times 10^{25} c_4^2)^2), \\
a_{51} &= -\left(\frac{1}{(-\rho_1)^3} \right) (2.823 \times 10^{-34} (-8.123 \times 10^{112} + 2.809 \times 10^{112} c_4 + 4.446 \times 10^{112} c_4^2 \\
&\quad + 2.955 \times 10^{111} c_4^3 - 8.085 \times 10^{110} c_4^4 + 2.608 \times 10^{109} c_4^5 - 8.960 \times 10^{106} c_4^6 \\
&\quad - 1.986 \times 10^{105} c_4^7)), \\
a_{52} &= \left(\frac{1}{(\rho_1)^4} \right) (1.129 \times 10^{-33} (7.469 \times 10^{138} - 1.072 \times 10^{139} c_4 + 2.004 \times 10^{138} c_4^2 \\
&\quad + 1.462 \times 10^{138} c_4^3 - 6.692 \times 10^{136} c_4^4 - 2.417 \times 10^{136} c_4^5 + 2.208 \times 10^{135} c_4^6 \\
&\quad - 5.808 \times 10^{133} c_4^7 + 5.878 \times 10^{131} c_4^8 - 1.942 \times 10^{129} c_4^9)), \\
a_{53} &= \left(\frac{1}{(-\rho_1)^4} \right) (4.980 \times 10^{-34} (-1.493 \times 10^{138} - 4.590 \times 10^{138} c_4 + 7.447 \times 10^{138} c_4^2 \\
&\quad - 7.793 \times 10^{137} c_4^3 - 8.710 \times 10^{137} c_4^4 + 2.734 \times 10^{136} c_4^5 + 1.452 \times 10^{136} c_4^6 \\
&\quad - 1.175 \times 10^{135} c_4^7 + 2.521 \times 10^{133} c_4^8 - 1.636 \times 10^{131} c_4^9)), \\
a_{54} &= \left(\frac{1}{(-\rho_1)^2} \right) (1.282 \times 10^{-26} (-1.110 \times 10^{78} + 4.447 \times 10^{77} c_4 + 8.288 \times 10^{76} c_4^2 \\
&\quad - 1.151 \times 10^{76} c_4^3 + 2.667 \times 10^{74} c_4^4 - 1.715 \times 10^{72} c_4^5)), \\
a_{55} &= \left(\frac{1}{(\rho_1)^3} \right) (2.876 \times 10^{-11} (3.553 \times 10^{27} - 3.431 \times 10^{27} c_4 + 5.078 \times 10^{25} c_4^2)^2 \\
&\quad (2.272 \times 10^{34} c_4 - 2.194 \times 10^{34} c_4^2 + 3.247 \times 10^{32} c_4^3)), \\
\rho_1 &= -1.682 \times 10^{26} - 2.291 \times 10^{25} c_4 + 2.667 \times 10^{24} c_4^2.
\end{aligned}$$