



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



**DINÁMICA DE POBLACIONES CON
MIGRACIÓN Y DEPRDACIÓN**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**DOCTOR EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

PRESENTA

CARLOS FRANCISCO ARIAS MÉNDEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ
DR. MANUEL FALCONI MAGANA

Cunduacán, Tab.

Julio 2022



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



Ricardo
Flores
Magón
2022
Año de
Magón
PENSADOR DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA

DIRECCIÓN

27 de junio de 2022

**M.C. CARLOS FRANCISCO ARIAS MÉNDEZ
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
P R E S E N T E.**

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado “**Dinamica de Poblaciones con Migración y Depredación**” en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DR'GDP/M'NLBA

CARTA DE AUTORIZACIÓN


El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "Dinámica de Poblaciones con Migración y Depredación", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 04 días del mes de julio del año 2022.

AUTORIZÓ



CARLOS FRANCISCO ARIAS MÉNDEZ
172A22002

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mis seres queridos y a todas aquellas personas que fueron parte de mi formación académica, ya que sin ellos no habría sido posible llegar hasta este nivel académico.

Agradecimientos

A mis asesores de tesis, Dr. Gamaliel Blé González y Dr. Manuel Falconi Magaña, por el tiempo que me dedicaron para poder concluir este trabajo doctoral.

A los revisores de la tesis, por sus sugerencias y hacer de este un mejor trabajo.

A CONACYT, por su apoyo a través de la beca de doctorado 633055-483804.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Dinámica local	5
2.2. Bifurcación	7
2.2.1. Bifurcación doblamiento de periodo	7
2.2.2. Bifurcación Neimark-Sacker	8
2.3. Caos	9
3. Sistema depredador-presa	11
3.1. Sistema depredador-presa con depredador especialista	12
3.1.1. Análisis de estabilidad local	12
3.1.2. Bifurcación doblamiento de periodo	13
3.1.3. Bifurcación Neimark-Sacker	18
3.1.4. Simulación numérica	20
3.2. Sistema depredador-presa con depredador generalista	22
3.2.1. Bifurcación doblamiento de periodo	24
3.2.2. Bifurcación Neimark-Sacker	25
3.2.3. Simulación numérica	25
3.3. Sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo dos	27
3.3.1. Análisis de estabilidad	29
3.3.2. Bifurcación	35
3.3.3. Caos	41
3.3.4. Simulación numérica	44
3.3.5. Comparación entre modelos	46
4. Modelo depredador-presa con migración	48
4.1. Migración unidireccional	48
4.2. Migración bidireccional	51
4.3. Migración y depredación	52
4.4. Región de supervivencia	53
4.5. Análisis de estabilidad	54

ÍNDICE GENERAL

5. Conclusiones	61
A. Apéndice	62
Bibliografía	79

México.

Capítulo 1

Introducción

En el estudio de la dinámica de poblaciones los comportamientos que se observan en general son no lineales y como la evolución es a tiempo discreto, una herramienta de uso frecuente para su análisis son las ecuaciones en diferencias (Ma, KS, E2). Uno de los modelos que se ha utilizado con más frecuencia para estudiar el crecimiento de poblaciones es el modelo logístico, por ser uno de los más sencillos y porque presenta una serie de propiedades las cuales van desde el comportamiento ordenado hasta el caos. Esto ha permitido aplicarla en la modelación de crecimiento de poblaciones con reproducción discreta (Ma, GH, Mu). Además, ha motivado la búsqueda de propiedades universales o genéricas en familias de funciones, así como de los procesos de bifurcación, (MW).

Dado que en sistemas de ecuaciones en diferencias el caos se presenta desde una sola ecuación no lineal, (lo cual no ocurre en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias) esto hace crecer las posibles dinámicas que pueden aparecer en los sistemas de ecuaciones en diferencias y aunado a ello la complejidad de su estudio (E1). Para el análisis de una ecuación en diferencias se tiene desarrollada una teoría que permite caracterizar tanto la dinámica local como la global, mientras que en el caso de dimensión superior la mayoría de las herramientas que se tienen son para el análisis local (C, Ga, E2).

El objetivo de este trabajo es analizar la dinámica de un modelo en el que interactúan dos poblaciones. En particular, se determinan condiciones para la coexistencia cuando la interacción es depredador presa y se presenta migración en la población presa. Explícitamente, analizaremos los siguientes sistemas de ecuaciones en diferencias:

1. Modelo depredador presa:

▪

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r_1 x_n (1 - \alpha x_n z_n), \\ z_{n+1} &= r_2 x_n z_n (1 - z_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= r_1 x_n \left(1 - \frac{\alpha x_n z_n}{1 + z_n}\right), \\z_{n+1} &= \frac{r_2 z_n (1 + x_n)(1 - z_n)}{\beta + x_n}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

2. Modelo depredador presa con respuesta funcional Holling tipo II:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a x_n (1 - x_n) - \frac{x_n z_n}{e + x_n}, \\z_{n+1} &= \frac{d x_n z_n}{e + x_n} - c z_n.\end{aligned}\tag{1.3}$$

3. Modelo con migración en las presas

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a \left(\frac{q_{12} y_n + (1 - q_{21}) x_n}{2}\right) \left(1 - \frac{q_{12} y_n + (1 - q_{21}) x_n}{2}\right), \\y_{n+1} &= b \left(\frac{q_{21} x_n + (1 - q_{12}) y_n}{2}\right) \left(1 - \frac{q_{21} x_n + (1 - q_{12}) y_n}{2}\right).\end{aligned}\tag{1.4}$$

4. Modelo con migración en las presas y depredación

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{a(1 - q_{21})x_n}{2} \left(1 - \frac{(1 - q_{21})x_n}{2}\right) (1 - z_n^2), \\y_{n+1} &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{q_{21}x_n + y_n}{2}\right) (q_{21}x_n + y_n) (1 - z_n^2), \\z_{n+1} &= \frac{\alpha z_n (x_n + y_n)(1 - z_n)}{x_n + y_n + 1},\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde x_n, y_n representan a la densidad de la población presa y z_n a la población depredadora; $x_n, y_n, z_n, q_{12}, q_{21} \in [0, 1]$ y $a, b \in [2, 4]$. Aquí a y b son tasas de crecimientos, q_{21} tasa de migración del parche donde esta la población x al parche donde esta la población y , y q_{12} tasa de migración del parche donde esta la población y al parche donde esta la población x .

Los sistemas de ecuaciones en diferencias (1.1)-(1.5) están basados en sistemas propuestos para modelar interacción depredador presa. Uno de los sistemas que ha sido estudiado es:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + C(x_n)A_1(x_n) - F(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n + D(x_n, y_n)A_2(y_n).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Donde x_n representa la densidad de la población presa, y_n la densidad población depredadora, $C(x_n)$ mide el crecimiento de la presa en ausencia del depredador, $F(x_n, y_n)$ es la respuesta funcional, $D(x_n, y_n)$ mide el crecimiento del depredador y las funciones A_1 y A_2 representan el efecto Allee sobre la presa y el depredador, respectivamente.

Celik y Duman (CD) consideran el caso en que $C(x_n) = rx_n(1 - x_n)$, $F(x_n, y_n) = ax_ny_n$ y $D(x_n, y_n) = ay_n(x_n - y_n)$. Ellos analizan la dinámica local del sistema sin efecto Allee y cuando el efecto Allee está presente sobre la presa, por lo que la función $A_1 = \frac{x_n}{u+x_n}$ y $A_2 = 1$. En particular, ellos demuestran que la convergencia a los puntos fijos del sistema es más rápida cuando se tiene el efecto Allee.

Wang, Zhang y Liu (WZL) analizan el modelo de Celik-Duman tomando el efecto Allee únicamente en la presa, $A_1(x_n) = 1 - e^{-cx_n}$, posteriormente sólo en el depredador, con $A_2(y_n) = \frac{y_n}{\mu+y_n}$ y finalmente ellos consideran el efecto en ambas poblaciones. De igual manera que Celik y Duman, ellos concluyen que cuando el efecto Allee está sólo en una de las poblaciones, la convergencia a los puntos fijos es más rápida. Mientras que cuando el efecto Allee está en ambas poblaciones, éste contribuye a estabilizar el sistema.

Chen, Fu y Jing (CFJ) retoman el modelo de Celik y Duman con el mismo efecto Allee en la presa y ellos determinan condiciones para que el sistema presente bifurcación doblamiento de periodo o bifurcación de Neimark-Sacker. Además, determinan condiciones en las que el sistema presenta caos.

Wang, Jiao y Chen (WJC), consideran una modificación al modelo (1.6), y analizan el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + rx_n\left(1 - \frac{x_n}{k}\right) - \alpha x_n y_n, \\y_{n+1} &= y_n + \beta y_n\left(1 - \frac{y_n}{x_n}\right).\end{aligned}\tag{1.7}$$

En este sistema ellos consideran efecto Allee únicamente en la población depredadora y en consecuencia muestran que el sistema toma mayor tiempo para estabilizarse. Además, la población depredadora disminuye mientras que la población presa aumenta. Así mismo, consideran el efecto Allee en la población presa analizado por Celik y Duman y obtienen el mismo resultado.

Rana, Bhowmick y Bhattacharya (R) consideran el modelo de Celik-Duman incorporando el término $(1 - d)x_n$, el cual considera un refugio para la presa. En particular, ellos analizan el modelo (1.6), con $F(x_n, y_n) = a(1 - d)x_ny_n$, $D(x_n, y_n) = ay_n((1 - d)x_n - y_n)$. Ellos analizan la dinámica del sistema cuando el efecto Allee en la presa es $A_1(x_n) = 1 - e^{-\alpha x_n}$ y cuando el efecto Allee en el depredador es $A_2(y_n) = \frac{y_n}{\mu+y_n}$. Ellos muestran que para valores pequeños de d el efecto Allee contribuye a estabilizar más rápido el sistema, mientras que para valores grandes, no se observa una contribución significativa. Asimismo, ellos determinan condiciones para las cuales el sistema presenta bifurcación doblamiento de periodo, bifurcación de Neimark-Sacker o caos.

Yuan y Yang (Y) consideran el modelo de Celik-Duman y determinan condiciones para que el sistema presente bifurcación doblamiento de periodo o bifurcación de

1. INTRODUCCIÓN

Neimark-Sacker (Hopf). Además, muestran que el sistema puede presentar caos.

Zhao, Xuan y Li (Z), consideran el sistema

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n(1 - x_n) - bx_ny_n, \\y_{n+1} &= -cy_n + dx_ny_n.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ellos analizan la estabilidad local del sistema y determinan condiciones para que el sistema presente bifurcación doblamiento de periodo o bifurcación de Neimark-Sacker. Además, muestran que el sistema puede presentar caos.

Khan (Ka) considera el sistema (1.6), tomando $C(x_n) = rx_n(1 - x_n)$, $F(x_n, y_n) = \frac{ay_nx_n}{b+x_n}$, $D(x_n, y_n) = y_n(\frac{dx_ny_n}{b+x_n} - c)$, sin efecto Allee. Ellos analizan la estabilidad local del sistema y determinan condiciones en las que se presenta bifurcación doblamiento de periodo o bifurcación de Neimark-Sacker.

Para el estudio de los sistemas (1.1)-(1.5), este trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el capítulo uno presentamos algunas definiciones y resultados básicos sobre dinámica local y los tipos de bifurcaciones que pueden presentarse en un sistema a tiempo discreto.

En el capítulo dos se analiza la dinámica de los sistemas (1.1)-(1.3), los cuales modelan la interacción depredador presa considerando diferentes respuestas funcionales. Para cada modelo se analiza la dinámica local y el tipo de bifurcación presente. Además, se muestran varias simulaciones numéricas con la finalidad de ejemplificar cada resultado obtenido. En particular, los resultados del análisis de la dinámica del modelo (1.3) fueron publicados en el artículo "Dynamics of a discrete-time predator-prey system with Holling II functional response" en la revista Qualitative Theory of Dynamical Systems (A).

El capítulo tres se inicia analizando el sistema (1.4) que modela la migración entre dos presas y posteriormente se estudia la dinámica del sistema (1.5) que modela depredación y migración.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos sobre sistemas dinámicos discretos que nos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos. La demostración de los resultados que aquí presentamos pueden ser consultados en (E2, W, GH, Mt2).

2.1. Dinámica local

Consideremos el mapeo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , la órbita positiva de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bajo el mapeo f se define como el siguiente conjunto de puntos:

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots\},$$

en este trabajo a las órbitas positivas simplemente les llamaremos órbitas. Por otra parte, supongamos que $x_k = f^k(x)$, entonces

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es una ecuación en diferencias con $x(0) = x_0$.

Para estudiar el comportamiento de las órbitas de un sistema de ecuaciones en diferencias, necesitamos saber qué pasa alrededor de los puntos fijos que no sufren ningún cambio bajo ninguna iteración, es decir, que sean puntos fijos. La órbita de un punto fijo x^* solo consta de un solo elemento x^* , un tipo de punto que está relacionado con el punto fijo son los puntos eventualmente fijos, estos puntos llegan a ser fijos después de cierta cantidad finita de iteradas, es decir existe un entero k positivo y un punto fijo x^* de f tal que $f^k(x) = x^*$.

Los puntos fijos se clasifican en dos tipos, los puntos fijos que son hiperbólicos y los no hiperbólicos. Un punto fijo x^* del sistema (2.1) es hiperbólico, si todos los valores propios λ de la matriz Jacobiana $A = Df(x^*)$ tienen módulo diferente a uno, y cuando existe un valor propio $|\lambda| = 1$, entonces x^* es no hiperbólico.

2. PRELIMINARES

Para determinar la dinámica local de los puntos fijos del sistema (2.1) se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapeo de clase C^1 , donde G es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , X^* es un punto fijo de f , $A = Df(X^*)$ y $\rho(A)$ es el radio espectral de A . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Si $\rho(A) < 1$, entonces X^* es asintóticamente estable.*
2. *Si $\rho(A) > 1$, entonces es inestable.*
3. *Si $\rho(A) = 1$, entonces X^* puede ser estable o inestable.*

La siguiente idea que es importante para determinar la estabilidad de un mapeo, es la equivalencia entre mapeos. Sean f y g mapeos de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n de clase C^1 , diremos que f y g son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que las órbitas de f son asignadas a las órbitas de g , es decir,

$$h(f(x)) = g(h(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & g & \end{array}$$

Figura 2.1

La dinámica que presenta el mapeo f es la misma dinámica que presenta el mapeo g , siempre y cuando f y g sean conjugados. Es decir, si x^* es un punto fijo de f , entonces $h(x^*)$ es un punto fijo de g , ya que $g(h(x^*)) = h(f(x^*)) = h(x^*)$. De igual forma se cumple para puntos periódicos de f en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.2 (Hartman-Grobman) *Consideremos un mapeo de clase C^1*

$$x \mapsto Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ y $F(x) = O(\|x\|^2)$. Si $x = 0$ es un punto fijo hiperbólico de (2.2), entonces (2.2) es topológicamente equivalente en el origen a su parte lineal

$$x \mapsto Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2.2. Bifurcación

Supongamos que

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

es un sistema dinámico, donde f es diferenciable con respecto a x y al parámetro α . Sea x_0 un punto fijo no hiperbólico del sistema, conforme varía el parámetro α , el punto fijo podría cambiar su dinámica: por ejemplo, si es hiperbólico dejar de serlo; si no lo es, llegar a serlo. Para determinar la estabilidad del punto fijo debemos encontrar los valores propios asociados a la matriz Jacobiana $J = D_x f(x_0, \alpha)$, de esta forma al variar α puede ocurrir lo siguiente:

- Caso 1 J tiene un valor propio real igual a $\lambda = 1$ y los otros valores propios están fuera de la circunferencia unitaria centrada en cero.
- Caso 2 J tiene un valor propio real igual a $\lambda = -1$ y los otros valores propios están fuera de la circunferencia unitaria centrada en cero.
- Caso 3 J tiene dos valores propios conjugados complejos con el módulo 1 ($\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, $0 < \theta < \pi$) y los otros valores propios están fuera de la circunferencia unitaria centrada en cero.

En cada uno de estos casos se genera una bifurcación y en particular analizaremos lo que ocurre en el caso 2 y 3, ya que en estos casos aparecen las bifurcaciones de doblamiento de periodo y de Neimark-Sacker respectivamente, estas bifurcaciones serán las que determinaremos en los modelos de este trabajo. Para una demostración detallada de los siguientes resultados se puede consultar (Ku, W, GH).

2.2.1. Bifurcación doblamiento de periodo

Una de las bifurcaciones más importantes en un sistema dinámico discreto, es aquella donde se produce un nuevo ciclo con periodo doble al ciclo original. En una bifurcación donde existe un punto fijo que cambia de atractor a repulsor o viceversa, además con un valor propio de la matriz Jacobiana evaluado en el punto fijo igual a -1 y la aparición de un nuevo ciclo con un periodo doble al original, se llama bifurcación doblamiento de período. Tal bifurcación se muestra en esta sección.

Teorema 2.2.1 (*Doblamiento de período*). Consideremos el sistema unidimensional

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

con f diferenciable. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

B1) $f(0, 0) = 0$.

B2) $f_x(0, 0) = -1$, condición de no-hiperbolicidad.

B3) $\frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$, condición de no-degeneración.

B4) $f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$, condición de transversalidad.

Entonces el sistema (2.4) es topológicamente equivalente en una vecindad del origen a una de las siguientes formas normales:

$$y \mapsto -(1 + \beta)y \pm y^3.$$

2.2.2. Bifurcación Neimark-Sacker

Teorema 2.2.2 Considere el sistema discreto bidimensional

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

con f diferenciable para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Supongamos que f tiene un punto fijo $x_0 = 0$ cuyos valores propios son

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm\varphi(\alpha)i},$$

con $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

C1) $r'(0) \neq 0$

C2) $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Entonces, existe un cambio de coordenadas y de parámetros que transforman el sistema (2.5) en:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left[(1 + \beta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] + O(\|y\|^4)$$

con $\theta(0) = \theta_0$ y $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0))$, donde $c_1(0)$ está dado por

$$c_1(0) = a_{21} + \frac{|a_{11}|^2}{\bar{\mu}(\mu - 1)} + \frac{2|a_{02}|^2}{\bar{\mu}^2 - \mu} + \frac{a_{11}a_{20}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{\mu(\mu - 1)(\bar{\mu} - 1)}.$$

Por lo tanto, en una vecindad del origen se bifurca de x_0 un curva cerrada invariante cuando α pasa por cero.

2.3. Caos

En esta sección daremos una condición suficiente que nos permitirá detectar comportamientos caóticos en sentido de Marotto para sistemas dinámicos discretos en \mathbb{R}^n . Esta condición se centra principalmente en la detección de un cierto punto fijo llamado *snap-back repeller*, es decir, tiene un órbita homoclínica, las demostraciones de cada resultado mostrado en esta sección se pueden consultar en (Mt1, Mt2).

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, necesitaremos de las siguientes definiciones.

Definición Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Sea z un punto fijo repulsor de f . Fijemos $W_{loc}^u(z)$ un entorno de z que sea una variedad inestable local. Diremos que z es un *snap-back repeller* (SBR), si existe una vecindad $\overline{B_r(z)}$ contenida en $W_{loc}^u(z)$ y $x_0 \neq z, x_0 \in \overline{B_r(z)}$, tal que $f^M(x_0) = z$, para alguna $M > 0$ y $|Df^k(x_0)| \neq 0$ para todo k entre 1 y M .

Sea z es un punto fijo de una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si z es un repulsor, es decir, si todos los valores propios de $|Df(z)|$ tienen módulo mayor que 1, entonces por continuidad de Df se cumple que los valores propios de $|Df(x)|$ tienen módulo mayor que 1 para $x \in \overline{B_r(z)}$ para r suficientemente pequeño. Por lo tanto, diremos que z es **repulsor** en $\overline{B_r(z)}$.

Definición Dada una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$, z es un punto *expansivo* en $\overline{B_r(z)}$, si existen $s > 1, r > 0$ de manera que

$$\|f(x) - f(y)\| > s\|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B_r(z)}.$$

Teorema 2.3.1 (Marotto)

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si f posee un snap-back repeller entonces

1. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $p \geq N$ hay órbitas periódicas de periodo p .
2. Existe un conjunto no numerable $S \subset \mathbb{R}^n$ invariante por f que no contiene puntos periódicos y tal que para cada $x, y \in S, x \neq y$ se tiene que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(y)\| > 0,$$

y para cada $p \in \text{Per}(f)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x) - f^k(p)\| > 0.$$

3. Existe un conjunto no numerable $S_0 \subset S$ tal que $x_0, y_0 \in S_0, x_0 \neq y_0$ se tiene que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f^k(x_0) - f^k(y_0)\| = 0.$$

Corolario 2.3.1 Si f tiene un punto snap-back repeller, entonces f es caótico en el sentido de Marotto.

Capítulo 3

Sistema depredador-presa

En este capítulo analizaremos la dinámica de los modelos depredador-presa

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= r_1 x_n (1 - \alpha x_n z_n), \\z_{n+1} &= r_2 x_n z_n (1 - z_n),\end{aligned}\tag{3.1}$$

y

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= r_1 x_n \left(1 - \frac{\alpha x_n z_n}{1 + z_n}\right), \\z_{n+1} &= \frac{r_2 z_n (1 + x_n) (1 - z_n)}{\beta + x_n}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

En el modelo (3.1) la presa crece exponencialmente en ausencia del depredador. La presencia del depredador incrementa la competencia intraespecífica y el efecto depende directamente del encuentro entre los depredadores y la presa. Por otro lado, en el modelo (3.2) el efecto del depredador es acotado. Además, en el modelo (3.2) la presencia de la presa incrementa la tasa de crecimiento del depredador. En ambos modelos se considera $0 < r_1 < 4$, $0 < r_2 < 4$, $0 < \alpha < 1$ y $\beta > 1$, con la finalidad de que las órbitas de cualquier punto inicial en el primer cuadrante permanezcan en el primer cuadrante. Además, analizaremos el siguiente sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo II

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n(1 - x_n) - \frac{bx_n z_n}{e + x_n} \\z_{n+1} &= \frac{dx_n z_n}{e + x_n} - cz_n.\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde los parámetros a , b , c , d y e son números positivos.

3.1. Sistema depredador-presa con depredador especializada

En esta sección analizaremos la dinámica del modelo (3.1).

3.1.1. Análisis de estabilidad local

Los puntos fijos del modelo (3.1) son:

- $P_0 = (0, 0)$,
- $P_1 = \left(\frac{r_1 - 1}{\alpha r_1} + \frac{1}{r_2}, \frac{(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1 + (r_1 - 1)r_2} \right)$.

El único punto fijo de coexistencia del modelo (3.1) es P_1 , si $r_1 > 1$, $r_2 > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Para los siguientes resultados utilizaremos la matriz Jacobiana del modelo (3.1)

$$J(x, z) = \begin{pmatrix} r_1 - 2r_1xz\alpha & -r_1x^2\alpha \\ -r_2(z-1)z & r_2x(1-2z) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Proposición 3.1.1 ▪ Si $r_1 < 1$, entonces P_0 es asintóticamente estable.

- Si $r_1 > 1$, entonces P_0 es inestable.

Demostración. Consideremos la matriz Jacobiana (3.4) en el punto P_0

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = r_1$ y $\lambda_2 = 0$, si $r_1 < 1$, entonces el punto P_0 es asintóticamente estable. Si $r_1 > 1$, entonces el punto fijo P_0 es inestable.

Proposición 3.1.2 Si $1 < r_1 < 2$, $0 < r_2 < \frac{r_1\alpha(r_1-5)}{(r_1-1)(r_1-3)}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces P_1 es asintóticamente estable.

Demostración. Consideremos la matriz Jacobiana (3.4) en el punto P_1 ,

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 2 - r_1 & -\frac{(\alpha r_1 + (r_1 - 1)r_2)^2}{\alpha r_1 r_2^2} \\ \frac{\alpha(r_1 - 1)r_1 r_2^2}{(\alpha r_1 + (r_1 - 1)r_2)^2} & \frac{\alpha r_1 - r_1 r_2 + r_2}{\alpha r_1} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

el polinomio característico asociado a la matriz $J(P_1)$ es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{r_2 - r_1 r_2}{\alpha r_1} - r_1 + 3 \right) \lambda + \frac{(r_1 - 2)(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1} + 1, \quad (3.7)$$

para determinar la estabilidad del punto fijo P_1 haremos uso de las condiciones de Jury (véase (Mu)), es decir, se deben satisfacer las siguientes desigualdades

$$P(1) > 0, P(-1) > 0 \text{ y } \det(J(P_1)) < 1, \quad (3.8)$$

donde

$$P(1) = \frac{(r_1 - 1)^2 r_2}{\alpha r_1} + r_1 - 1,$$

$$P(-1) = \frac{(r_1 - 3)(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1} - r_1 + 5,$$

$$\det(J(P_1)) = \frac{(r_1 - 2)(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1} + 1.$$

La condición (3.8) se cumple si y solo si

$$1 < r_1 < 2, 0 < r_2 < \frac{\alpha(r_1 - 5)r_1}{(r_1 - 3)(r_1 - 1)} \text{ y } 0 < \alpha < 1.$$

Esto implica que el punto fijo P_1 es asintóticamente estable ■.

3.1.2. Bifurcación doblamiento de periodo

Para realizar el análisis de la bifurcación doblamiento de periodo consideramos el parámetro r_2 como el parámetro de bifurcación, de esta manera enunciamos el siguiente resultado, donde se establecen las condiciones sobre los parámetros para los cuales se presenta una bifurcación doblamiento de periodo.

Teorema 3.1.1 *El sistema (3.1) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto P_1 si y solo si $0 < \alpha < 1$, $r_1 \notin \{2, \sqrt{5}, 3\}$ y $r_2 = r_2^* = \frac{\alpha r_1(r_1 - 5)}{r_1^2 - 4r_1 + 3}$.*

Demostración. De (3.4) tenemos que el polinomio característico de $J(P_1)$ es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{r_2 - r_1 r_2}{\alpha r_1} - r_1 + 3 \right) \lambda + \frac{(r_1 - 2)(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1} + 1, \quad (3.9)$$

si $r_2 = r_2^* = \frac{\alpha r_1(r_1 - 5)}{r_1^2 - 4r_1 + 3}$, los valores propios del polinomio característico (3.9) son

$$\lambda_1 = -1 \text{ y } |\lambda_2| = \left| \frac{r_1^2 - 6r_1 + 7}{3 - r_1} \right| \neq 1 \text{ si } 0 < \alpha < 1 \text{ y } r_1 \notin \{2, 3, 4, 5\}.$$

Con la finalidad de usar el teorema de la variedad central, trasladamos el punto fijo P_1 al origen. Sea

$$u_n = x_n + \frac{2(r_1 - 4)(r_1 - 1)}{\alpha(r_1 - 5)r_1}, \zeta_n = z_n + \frac{r_1 - 5}{2(r_1 - 4)} \text{ y } \gamma_n = r_{2n} - r_2^*.$$

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

Consideramos γ_n como una nueva variable que depende del parámetro r_2 , entonces el sistema (3.1) bajo la traslación queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \\ \zeta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - r_1 & 0 & -\frac{4(r_1^2 - 5r_1 + 4)^2}{\alpha(r_1 - 5)^2 r_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha(r_1 - 5)^2 r_1}{4(r_1 - 4)^2 (r_1 - 1)} & \frac{r_1^2 - 4r_1 + 3}{8\alpha r_1 - 2\alpha r_1^2} & \frac{2}{r_1 - 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \gamma_n \\ \zeta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u_n, \gamma_n, \zeta_n) \\ 0 \\ f_2(u_n, \gamma_n, \zeta_n) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(u_n, \gamma_n, \zeta_n) &= -\frac{4(r_1^2 - 5r_1 + 4)u_n \zeta_n}{r_1 - 5} - r_1 \alpha_n \zeta_n u_n^2 - \frac{(r_1 - 5)r_1 \alpha_n u_n^2}{2(r_1 - 4)}, \\ f_2(u_n, \gamma_n, \zeta_n) &= -\frac{2(r_1^2 - 5r_1 + 4)\gamma_n \zeta_n^2}{\alpha_n (r_1 - 5)r_1} - \frac{(r_1 - 5)r_1 \alpha_n \zeta_n^2 u_n}{r_1^2 - 4r_1 + 3} + \frac{(r_1 - 5)r_1 \alpha_n \zeta_n u_n}{(r_1 - 4)(r_1^2 - 4r_1 + 3)} \\ &+ \frac{(r_1^2 - 8r_1 + 15)\gamma_n u_n}{4(r_1 - 4)^2} + \frac{2(r_1 - 1)\gamma_n \zeta_n}{\alpha_n (r_1 - 5)r_1} - \frac{2(r_1 - 4)\zeta_n^2}{r_1 - 3} + \frac{\gamma_n \zeta_n u_n}{r_1 - 4} - \gamma_n \zeta_n^2 u_n. \end{aligned}$$

Sea

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{4(r_1^2 - 5r_1 + 4)^2}{\alpha(r_1 - 5)^2 (r_1 - 3)r_1} & -\frac{4(r_1 - 4)^2 (r_1 - 1)}{\alpha(r_1 - 5)^2 r_1} & -\frac{4(r_1 - 4)^2 (r_1 - 3)(r_1 - 1)}{\alpha(r_1 - 5)^2 r_1} \\ 0 & \frac{4\alpha(r_1 - 4)^2 r_1}{(r_1 - 3)^2 (r_1 - 1)} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz de vectores propios de la parte lineal del modelo (3.1). Ahora consideremos la siguiente transformación $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \\ \zeta_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Z \end{pmatrix}$. Así (3.10) se transforma en el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \mu_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_1^2 - 6r_1 + 7}{3 - r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \mu_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(X_n, \mu_n, Z_n) \\ 0 \\ F_2(X_n, \mu_n, Z_n) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_1(X, \mu, Z) = & -\frac{8\mu(r_1^2 + r_1 + 6)(r_1 - 4)^2 X^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} - \frac{8\mu^3(r_1 - 3)(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3} \\
 & - \frac{4\mu^2((r_1 - 10)r_1 + 23)(r_1 - 4)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 2)} + \frac{16\mu(r_1 - 1)(r_1 - 4)^4 X^3}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{8(r_1 - 1)(3r_1 - 7)(r_1 - 4)^2 X^3}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{16\mu^2(3r_1 - 5)(r_1 - 4)^4 X^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} + \frac{16\mu((r_1 - 4)r_1 + 7)(r_1 - 4)^4 X^2 Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4((r_1 - 5)r_1 + 8)(r_1(r_1 + 2) - 11)(r_1 - 4)^2 X^2 Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{4((r_1 - 10)r_1 + 17)(r_1 - 4)X^2}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)} + \frac{16\mu^3(3r_1 - 7)(r_1 - 4)^4 X}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{16\mu^3(r_1 - 1)(r_1 - 4)^4 Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} - \frac{8\mu^2(r_1(r_1(2r_1 - 13) + 34) - 43)(r_1 - 4)^2 X}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4\mu(r_1 - 4)^2 X}{(r_1 - 5)(r_1 - 2)} - \frac{4\mu((r_1 - 4)r_1 + 2)(r_1 - 4)Z}{(r_1 - 5)(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{16\mu(r_1(2r_1 - 11) + 17)(r_1 - 4)^4 X Z^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4(r_1(r_1((r_1 - 10)r_1 + 47) - 112) + 106)(r_1 - 4)^2 X Z^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{32\mu^2((r_1 - 4)r_1 + 5)(r_1 - 4)^4 X Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{8\mu(r_1(r_1((r_1 - 1)r_1 - 41) + 179) - 226)(r_1 - 4)^2 X Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4(3r_1 - 7)(r_1 - 4)^2 X Z}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 2)} + \frac{16\mu(r_1 - 3)(r_1 - 4)^4 Z^3}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4(r_1 - 3)^2((r_1 - 5)r_1 + 8)(r_1 - 4)^2 Z^3}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
 & + \frac{16\mu^2(2r_1 - 5)(r_1 - 4)^4 Z^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4\mu(r_1(r_1((r_1 - 10)r_1 + 49) - 140) + 172)(r_1 - 4)^2 Z^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{2(r_1 - 3)(r_1((r_1 - 9)r_1 + 26) - 26)(r_1 - 4)Z^2}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 2)} \\
 & - \frac{4\mu^2(r_1(r_1(r_1 + 4) - 57) + 112)(r_1 - 4)^2 Z}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)},
 \end{aligned}$$

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

$$\begin{aligned}
F_2(X, \mu, Z) = & \frac{16(r_1 - 1)Z^3\mu(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)} - \frac{16(r_1 - 1)^2Z\mu^3(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& - \frac{16(r_1 - 1)(3r_1 - 7)X\mu^3(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} - \frac{16(r_1 - 1)(3r_1 - 5)X^2\mu^2(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& - \frac{32(r_1 - 1)((r_1 - 4)r_1 + 5)XZ\mu^2(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} - \frac{16(r_1 - 1)^2X^3\mu(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& - \frac{16(r_1 - 1)(r_1(2r_1 - 11) + 17)XZ^2\mu(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& - \frac{16(r_1 - 1)((r_1 - 4)r_1 + 7)X^2Z\mu(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)^2((r_1 - 5)r_1 + 8)X^3(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)(r_1((r_1 - 9)r_1 + 26) - 22)Z^3(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)\mu^3(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3} + \frac{2(r_1 - 1)(r_1((r_1 - 10)r_1 + 32) - 31)Z^2(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)^2((r_1 - 7)r_1 + 13)((r_1 - 5)r_1 + 8)XZ^2(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)(r_1(r_1(3r_1 - 31) + 117) - 177) + 64)X\mu^2(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& + \frac{8(r_1 - 1)(r_1(r_1((r_1 - 12)r_1 + 58) - 136) + 131)Z\mu^2(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{8(r_1 - 1)(r_1(r_1((r_1 - 10)r_1 + 38) - 64) + 43)X^2Z(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)(r_1(r_1(3r_1 - 29) + 103) - 143) + 34)X^2\mu(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)(r_1(r_1(r_1((r_1 - 13)r_1 + 64) - 135) + 73) + 82)Z^2\mu(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{16(r_1 - 1)(r_1(r_1(r_1((r_1 - 14)r_1 + 81) - 245) + 395) - 278)XZ\mu(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^3(r_1 - 2)} \\
& - \frac{2(r_1 - 1)((r_1 - 8)r_1 + 19)\mu^2(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} - \frac{16(r_1 - 1)(2r_1 - 5)Z^2\mu^2(r_1 - 4)^4}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& - \frac{2(r_1 - 1)(r_1((r_1 - 10)r_1 + 29) - 28)X^2(r_1 - 4)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& + \frac{4(r_1 - 1)(r_1((r_1 - 9)r_1 + 26) - 22)XZ(r_1 - 4)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)} \\
& - \frac{4(r_1 - 1)((r_1 - 6)r_1 + 10)X\mu(r_1 - 4)}{(r_1 - 5)(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)}.
\end{aligned}$$

Por el teorema de la variedad central, se tiene que la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$ para

$\mu = 0$ está dada por una familia de funciones a un parámetro en la variedad central, que se puede representar de la siguiente manera.

$$W^c(0) = \{(X, \mu, Y) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = h^*(X, \mu), h^*(0, 0) = 0, Dh^*(0, 0) = 0\},$$

donde

$$h^*(X, \mu) = \alpha X^2 + \beta X\mu + \gamma \mu^2 + O((|X| + |\mu|)^3).$$

Entonces de la siguiente igualdad

$$h^*(-X + F_1(X, \mu, h^*(X, \mu)), \mu) + \frac{-(r_2 - 5)(r_2 - 4) + (1 - r_2)\varsigma}{4(r_2 - 3)} h^*(X, \mu) - F_2(X, \mu, h^*(X, \mu)) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2(r_1^3 - 10r_1^2 + 29r_1 - 28)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)}, \\ \beta &= -\frac{4(r_1 - 4)(r_1 - 1)(r_1^2 - 6r_1 + 10)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)^2}, \\ \gamma &= \frac{2(r_1 - 4)(r_1^2 - 8r_1 + 19)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)}. \end{aligned}$$

Así, el mapeo restringido a la variedad central es de la forma

$$\widehat{F}(X) = -X + X^2\psi_1 - X^3\psi_2 - \mu X\psi_3 - \mu X^2\psi_4 + \mu X^3\psi_5 - \mu^2\psi_6 + \mu^2 X\psi_7 + \mu^2 X^2\psi_8 - \mu^2 X^3\psi_9 - \mu^3\psi_{10} + \mu^3 X\psi_{11} - \mu^3 X^2\psi_{12} + \mu^3 X^3\psi_{13} + \mathcal{O}((|X| + |\mu|)^4),$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{4(r_1 - 4)((r_1 - 10)r_1 + 17)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 3)(r_1 - 2)}, \\ \psi_2 &= \frac{16(r_1 - 4)^2(r_1 - 3)(3r_1 - 7)}{(r_1 - 5)^4(r_1 - 2)^2}, \\ \psi_3 &= \frac{4(r_1 - 4)^2}{(r_1 - 5)(r_1 - 2)}, \\ \psi_4 &= \frac{16(r_1 - 4)(r_1(r_1(7r_1 - 94) + 433) - 810) + 520}{(r_1 - 5)^4(r_1 - 2)^3}, \\ \psi_5 &= (16(r_1 - 4)^2(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1((r_1 - 13)r_1 - 10) + 1182) - 10019) + 43167) - 110388) + 169488) - 144480) + 52480) \frac{1}{(r_1 - 5)^6(r_1 - 3)(r_1 - 2)^4}, \\ \psi_6 &= \frac{4(r_1 - 4)((r_1 - 10)r_1 + 23)}{(r_1 - 5)^2(r_1 - 2)}, \\ \psi_7 &= \frac{16(r_1 - 4)^2(r_1(r_1(r_1((r_1 - 23)r_1 + 194) - 749) + 1327) - 862)}{(r_1 - 5)^4(r_1 - 3)(r_1 - 2)^3}, \\ \psi_8 &= (16(r_1 - 4)^2(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(3(r_1 - 23)r_1 + 644) - 2880) + 3595) + 26235) - 155386) + 401570) - 576536) + 445064) - 143968) \frac{1}{(r_1 - 5)^6(r_1 - 3)(r_1 - 2)^5}, \\ \psi_9 &= (32(r_1 - 4)^3(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(9r_1 - 280) + 3985) - 34240) + 197165) - 797816) + 2310607) - 4778416) + 6895442) - 6590384) + 3740328) - 951008) \frac{1}{(r_1 - 5)^7(r_1 - 3)^2(r_1 - 2)^5}, \\ \psi_{10} &= \frac{16(r_1 - 4)^2((r_1 - 4)^2 r_1 - 1)}{(r_1 - 5)^3(r_1 - 3)(r_1 - 2)^2}, \end{aligned}$$

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= (16(r_1-4)^3(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(3r_1-68)+639)-3080)+6869)+2448)-54415)+ \\ &136012) - 150840) + 65120)) \frac{1}{(r_1-5)^6(r_1-3)^2(r_1-2)^4}, \\ \psi_{12} &= (32(r_1-4)^3(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(11(r_1-32)r_1+5149)-45404)+268013)- \\ &1111512)+3302979)-7025988)+10467192)-10376056)+6140800)-1638656)) \frac{1}{(r_1-5)^7(r_1-3)^2(r_1-2)^5}, \\ \psi_{13} &= (128(r_1-4)^4(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(r_1(15r_1-619)+11807)-137899)+ \\ &1101213) - 6357807) + 27356419) - 89083685) + 220531916) - 412851614) + 575119134) - \\ &577883320) + 395806952) - 165378528) + 31802880)) \frac{1}{(r_1-5)^9(r_1-3)^3(r_1-2)^7}.\end{aligned}$$

Para que haya una bifurcación doblamiento de periodo se deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}l_1 &= \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial \mu} \right]_{(0,0)} \neq 0, \\ l_2 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} \right]_{(0,0)} \neq 0,\end{aligned}\quad (3.12)$$

las cuales se satisfacen si y solo si $r_1 \neq \sqrt{5}$, por lo que el sistema (3.1) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto P_1 . ■

3.1.3. Bifurcación Neimark-Sacker

En esta sección mostraremos las condiciones para las cuales el sistema (3.1) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo P_1 .

Teorema 3.1.2 *El sistema (3.1) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo P_1 si y solo si $0 < r_2 < 6$, $\frac{r_2}{6} < \alpha < 1$, $\alpha \notin \left\{ \frac{r_2}{2}, \frac{r_2}{4} \right\}$ y $r_1 = r_1^* = 2$. Además, si $k < 0$ se tiene un órbita periódica atractora que se bifurca desde el punto P_1 para $r_1 > r_1^*$.*

Demostración. La ecuación característica de la matriz Jacobiana (3.4) del sistema (3.1) en el punto P_1 está dada de la siguiente forma

$$\lambda^2 - p(r_1)\lambda + q(r_1) = 0, \quad (3.13)$$

donde

$$p(r_1) = \frac{r_2 - r_1 r_2}{\alpha r_1} - r_1 + 3 \text{ y } q(r_1) = \frac{(r_1 - 2)(r_1 - 1)r_2}{\alpha r_1} + 1.$$

Los valores propios $\lambda_{1,2}$ son complejos conjugados y con módulo menor que uno si $p(r_1)^2 - 4q(r_1) < 0$ y $q(r_1) = 1$. Esto se cumple si $0 < r_2 < 6$, $\frac{r_2}{6} < \alpha < 1$, y $r_1 = 2$. Por lo tanto

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\alpha - r_2}{4\alpha} \pm i \frac{\sqrt{(6\alpha r_2 - r_2)(2\alpha + r_2)}}{4\alpha} = \rho \pm i\omega.$$

Así

$$|\lambda_{1,2}(r_1)| = (q(r_1))^{\frac{1}{2}} \text{ y } R_1 = \frac{d|\lambda_{1,2}(r_1)|}{dr_1} \Big|_{r_1=r_1^*} = \frac{r_2}{4\alpha} \neq 0.$$

Por otro lado, si $p(r_1^*) \neq 0$ y $p(r_1^*) \neq 1$ y $\alpha \in \left\{ \frac{r_2}{2}, \frac{r_2}{4} \right\}$, entonces $\lambda_{1,2}^n(r_1^*) \neq 1$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Ahora trasladamos el punto fijo P_1 al origen. Sea

$$u_n = x_n + \frac{2\alpha + r_2}{2\alpha r_2} \text{ y } \zeta_n = z_n - \frac{r_2}{2\alpha + r_2}.$$

El sistema (3.1) bajo la traslación queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \zeta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(2\alpha + r_2)^2}{2\alpha r_2^2} \\ \frac{2\alpha r_2^2}{(2\alpha + r_2)^2} & 1 - \frac{r_2}{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \zeta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u_n, \zeta_n) \\ f_2(u_n, \zeta_n) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Donde

$$\begin{aligned} f_1(u_n, \zeta_n) &= -\frac{2\alpha r_2 u^2}{2\alpha + r_2} + \left(-\frac{4\alpha}{r_2} - 2 \right) \zeta u - 2\alpha \zeta u^2 + \mathcal{O}((|u_n| + |\zeta_n|)^3), \\ f_2(u_n, \zeta_n) &= \left(-\frac{r_2}{2\alpha} - 1 \right) \zeta^2 - \frac{r_2(r_2 - 2\alpha)\zeta u}{2\alpha + r_2} - r_2 \zeta^2 u + \mathcal{O}((|u_n| + |\zeta_n|)^3). \end{aligned}$$

Sea

$$T = \begin{pmatrix} \frac{(2\alpha + r_2)^{5/2} \sqrt{6\alpha - r_2}}{8\alpha^2 r_2^2} & -\frac{(r_2 - 2\alpha)(2\alpha + r_2)^2}{8\alpha^2 r_2^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_{1,2}$.

Por otra parte, si consideramos la siguiente transformación

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

entonces el sistema (3.14) bajo la traslación queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha - r_2}{4\alpha} & -\frac{\sqrt{(6\alpha r_2 - r_2)(2\alpha + r_2)}}{4\alpha} \\ \frac{\sqrt{(6\alpha r_2 - r_2)(2\alpha + r_2)}}{4\alpha} & \frac{2\alpha - r_2}{4\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(X_n, Y_n) \\ F_2(X_n, Y_n) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_1(X_n, Y_n) &= \frac{(r_2 - 4\alpha)(r_2 - 2\alpha)(2\alpha + r_2)^2 XY^2}{8\alpha^2 r_2^2} + \frac{(r_2 - 4\alpha)(r_2 - 2\alpha)(2\alpha + r_2)^{3/2} Y^2}{8\alpha^2 r_2 \sqrt{6\alpha - r_2}} \\
 &\quad - \frac{(2\alpha + r_2)^{5/2} \sqrt{6\alpha - r_2} X^2 Y}{4\alpha r_2^2} \frac{1}{8} \left(\frac{r_2^2}{\alpha^2} - \frac{6r_2}{\alpha} - \frac{8\alpha}{r_2} - 20 \right) XY \\
 &\quad - \frac{(2\alpha + r_2)^{3/2} \sqrt{6\alpha - r_2} X^2}{4\alpha r_2} + \mathcal{O}((|X_n| + |Y_n|)^3), \\
 F_2(X_n, Y_n) &= -\frac{(2\alpha + r_2)^{5/2} \sqrt{6\alpha - r_2} XY^2}{8\alpha^2 r_2} - \frac{\sqrt{(2\alpha + r_2)(6\alpha - r_2)} (r_2^2 - 4\alpha^2) XY}{8\alpha^2 r_2} \\
 &\quad - \frac{(2\alpha + r_2) (4\alpha^2 + r_2^2) Y^2}{8\alpha^2 r_2} + \mathcal{O}((|X_n| + |Y_n|)^3).
 \end{aligned}$$

Note que el mapeo (3.15) es la forma normal del mapeo (3.14) en la variedad central con coeficiente k (véase (GH)), dado como

$$k = -\operatorname{Re} \left[\frac{(1 - 2\lambda_1) \bar{\lambda}_1^2}{1 - \lambda_1} \xi_{11} \xi_{20} \right] - \frac{1}{2} (|\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2) + \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_1 \xi_{21}),$$

donde

$$\begin{aligned}
 \xi_{20} &= \frac{1}{8} [(F_{1XX} - F_{1YY} + 2F_{2XY}) + i(F_{2XX} - F_{2YY} - 2F_{1XY})], \\
 \xi_{11} &= \frac{1}{4} [F_{1XX} + F_{1YY} + i(F_{2XX} + F_{2YY})], \\
 \xi_{02} &= \frac{1}{8} [(F_{1XX} - F_{1YY} - 2F_{2XY}) + i(F_{2XX} - F_{2YY} + 2F_{1XY})], \\
 \xi_{21} &= \frac{1}{16} [(F_{1XXX} + F_{1XY} + F_{2XXY} + F_{2YY}) + i(F_{2XXX} + F_{2XY} - F_{1XXY} - F_{1YY})].
 \end{aligned}$$

Así

$$k = -\frac{(2\alpha + r_2)^2 (12\alpha^3 + 2r_2^3 - \alpha r_2^2 - 28\alpha^2 r_2)}{128\alpha^3 r_2^2} < 0 \text{ para } 0 < \alpha < 1, 0 < r_2 < \varsigma_1 \text{ y } \varsigma_2 < r_2 < 6\alpha,$$

donde ς_1 y ς_2 son raíces positivas del polinomio $2\sigma^3 - \sigma^2\alpha - 28\sigma\alpha^2 + 12\alpha^3$. ■

3.1.4. Simulación numérica

En esta sección se muestran algunas simulaciones numéricas con la finalidad de ejemplificar los resultados analíticos obtenidos para el modelo (3.1), esto incluye retratos fases y diagramas de bifurcación.

Diagrama de bifurcación y retrato fase

- (I) Consideremos los siguientes valores para los parámetros del sistema(3.1). Sea $r_1 = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $r_2 \in [2.8, 4.3]$ y con valor inicial $(x_0, y_0) = (0.9, 0.7)$. La figura 3.1 muestra que el sistema (3.1) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo $(0.952381, 0.7)$ con $r_2 = 3.5$, $l_1 = -28.5714$ y $l_2 = 22.8053$.

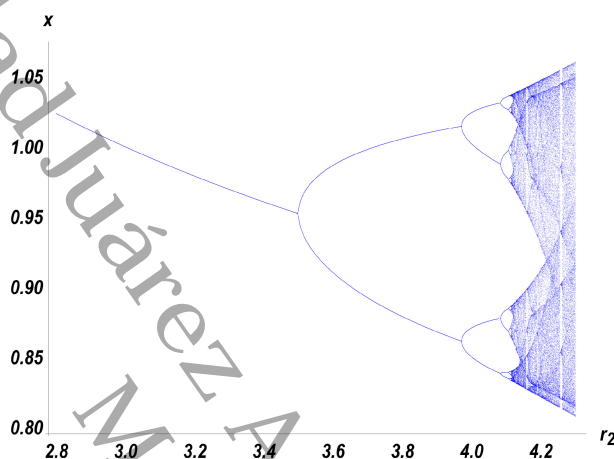


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación del sistema (3.2) para $r_1 = 3.5$, $\alpha = 0.5$, $r_2 \in [2.8, 4.3]$ con valor inicial $(0.9, 0.7)$.

- (II) Si $r_2 = 4$, $\alpha = 0.8$, $r_1 \in [1.94, 2.01]$ y valor inicial $(x_0, y_0) = (0.87, 0.7)$, entonces el sistema (3.1) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo $(0.875, 0.714286)$ con $r_1 = 2$ y $k = -1.48531 < 0$. En la figura 3.2 se muestra el diagrama de bifurcación y retrato fase del sistema (3.1) en el plano (r_1, x) .

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

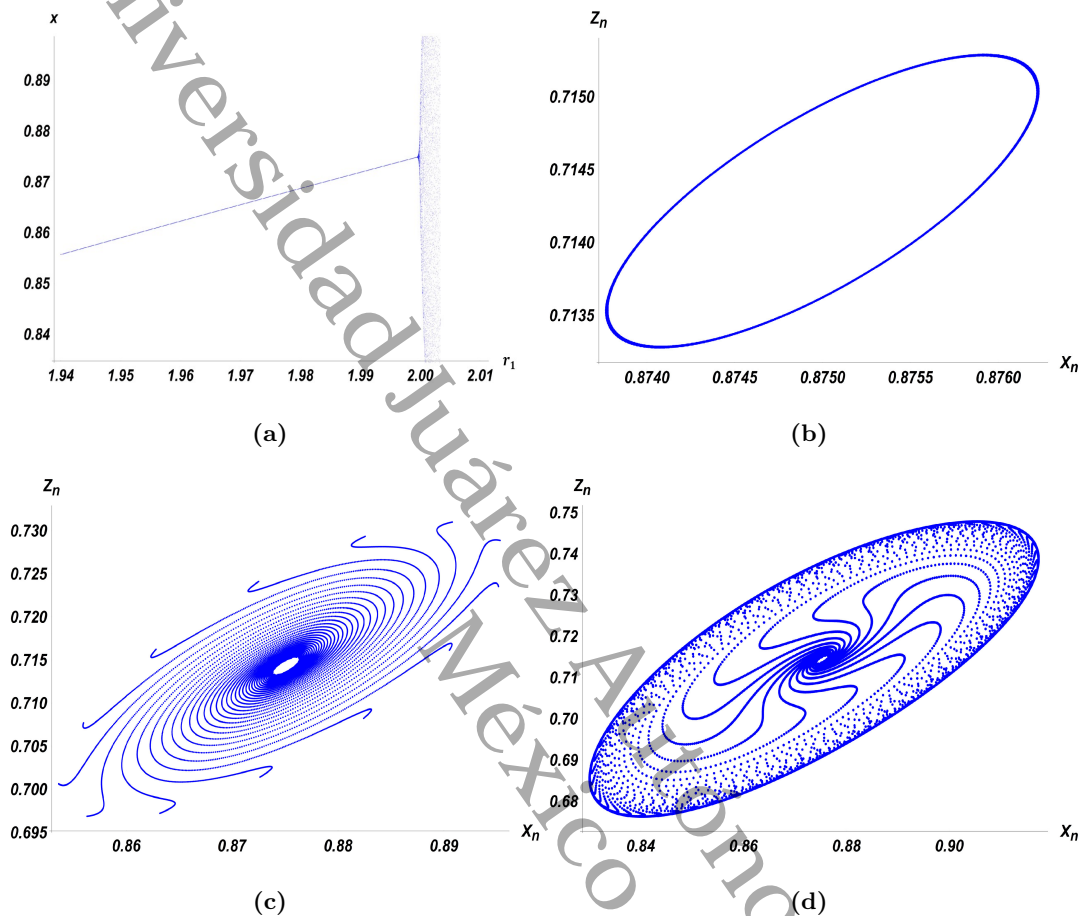


Figura 3.2: (a) Diagrama de bifurcación del sistema (3.1), (b)-(d) Retrato fase del sistema (3.1) para $r_1 = 2, 2.003, 2.001$ respectivamente.

3.2. Sistema depredador-presa con depredador generalista

Con el objetivo de simplificar las expresiones de los puntos fijos del sistema (3.2) vamos a considerar $\beta = 2r_2$, así el nuevo sistema que analizaremos será

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r_1 x_n \left(1 - \frac{\alpha x_n z_n}{1 + z_n} \right) \\ z_{n+1} &= \frac{r_2 z_n (1 + x_n) (1 - z_n)}{2r_2 + x_n}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

para $r_1 > 0$, $r_2 > \frac{1}{2}$ y $0 < \alpha < 1$.

Los puntos fijos del sistema (3.16) son:

- $p_0 = (0, 0)$,
- $p_1 = \left(\frac{r_1((\alpha + 2)r_2 - 1) - 2r_2 + 1}{\alpha r_1(r_2 - 1)}, \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{r_2(\alpha r_1 + r_1 - 1)} \right)$,

el único punto fijo de coexistencia del sistema (3.16) es p_1 para $r_1 > 1$, $r_2 > 1$ y $0 < \alpha < 1$.

Consideremos la matriz Jacobiana del sistema (3.16)

$$J(x, z) = \begin{pmatrix} r_1 \left(1 - \frac{\alpha x z}{z + 1} \right) - \frac{\alpha r_1 x z}{z + 1} & r_1 x \left(\frac{\alpha x z}{(z + 1)^2} - \frac{\alpha x}{z + 1} \right) \\ \frac{r_2(1 - z)z}{2r_2 + x} - \frac{r_2(x + 1)(1 - z)z}{(2r_2 + x)^2} & \frac{r_2(x + 1)(1 - z)}{2r_2 + x} - \frac{r_2(x + 1)z}{2r_2 + x} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

La demostración de la proposición 3.2.1 se realiza siguiendo la misma idea de la demostración de la proposición 3.1.1.

Proposición 3.2.1 Si $0 < r_1 < 1$, $r_2 > \frac{1}{2}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces p_0 es asintóticamente estable.

Con la finalidad de determinar la estabilidad del punto fijo p_1 , consideremos las siguientes asignaciones y conjuntos

- $\tau_1 = \frac{2(r_1 - 3)(r_1 - 1)}{r_1(3r_1 - 11)}$,
- $\tau_2 = \frac{r_1(-5\alpha + (\alpha - 7)r_1 + 28) - 21 + \sqrt{\alpha^2(r_1 - 5)^2 r_1^2 + 25(r_1^2 - 4r_1 + 3)^2 + 2\alpha(r_1 - 3)(r_1 - 1)r_1(11r_1 - 31)}}{2r_1(-11\alpha + (3\alpha - 2)r_1 + 8) - 12}$,
- $\tau_3 = -\frac{(r_1 - 3)^2(r_1 - 1)(2r_1 - 11)}{(r_1 - 5)^2 r_1(2r_1 - 3)}$,
- $\tau_4 = 2 - \frac{4}{r_1}$,
- $\tau_5 = \frac{-5r_1 + 8 + \sqrt{4\alpha r_1(2r_1 - 3) + (4 - 3r_1)^2}}{2(\alpha - 2)r_1 + 8}$,
- $\Upsilon_1 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : 1 < r_1 < \frac{13 - \sqrt{17}}{4}, 1 < r_2 < \tau_2, 0 < \alpha < \tau_1 \right\}$,
- $\Upsilon_2 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : 1 < r_1 < \frac{13 - \sqrt{17}}{4}, r_2 > 1, \tau_1 < \alpha < 1 \right\}$,
- $\Upsilon_3 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : \frac{13 - \sqrt{17}}{4} < r_1 \leq 3, 1 < r_2 < \tau_2, 0 < \alpha < \tau_3 \right\}$,
- $\Upsilon_4 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : \frac{13 - \sqrt{17}}{4} < r_1 \leq 3, 1 < r_2 < \tau_5, \tau_3 < \alpha < \tau_4 \right\}$,

- $\Upsilon_5 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : \frac{13-\sqrt{17}}{4} < r_1 \leq 3, r_2 > 1, \tau_4 < \alpha < 1 \right\},$
- $\Upsilon_6 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : 3 < r_1 \leq 4, \tau_2 < r_2 < \tau_5, \tau_3 < \alpha < \tau_4 \right\},$
- $\Upsilon_7 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : 3 < r_1 \leq 4, r_2 > \tau_2, \tau_4 \leq \alpha < 1 \right\},$
- $\Upsilon_8 = \left\{ (r_1, r_2, \alpha) : 4 < r_1 < 4.26101, \tau_2 < r_2 < \tau_5, \tau_3 < \alpha < 1 \right\},$

Proposición 3.2.2 Si $(r_1, r_2, \alpha) \in \bigcup_{i=1}^8 \Upsilon_i$, entonces p_1 es asintóticamente estable.

Para demostrar la proposición 3.2.2 se sigue la idea de la demostración de la proposición 3.1.1.

3.2.1. Bifurcación doblamiento de periodo

En esta sección estudiaremos la bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo p_1 del modelo (3.16), usando los resultados de (GH).

Antes de enunciar el resultado sobre la bifurcación doblamiento de periodo, consideremos lo siguiente:

Sea

- $\gamma_1 = 1 - \frac{4}{r_1(2r_1-13)+19},$
- $\gamma_2 = \frac{r_1(6r_1-23)+\sqrt{r_1(r_1(24r_1(2r_1-15)+889)-786)+225+21}}{12-2(r_1-3)r_1},$
- $\gamma_3 = \frac{(r_1-3)(r_1-1)(r_2-3)(2r_2-1)}{r_1r_2(r_1(3r_2-1)-11r_2+5)},$
- $\Lambda_1 = \left\{ (r_1, r_2) : 1 < r_1 \leq \frac{13-\sqrt{17}}{4}, r_2 > 3 \right\},$
- $\Lambda_2 = \left\{ (r_1, r_2) : \frac{13-\sqrt{17}}{4} < r_1 < 3, r_2 > 3, r_2 \neq \gamma_1 \right\},$
- $\Lambda_3 = \left\{ (r_1, r_2) : 3 < r_1 < \frac{7}{2}, \gamma_2 < r_2 < 3, r_2 \neq \gamma_1 \right\},$
- $\Lambda_4 = \left\{ (r_1, r_2) : \frac{7}{2} < r_1 < \frac{12-\sqrt{5}+\sqrt{53}}{4}, 3 < r_2 < \gamma_1 \right\},$
- $\Lambda_5 = \left\{ (r_1, r_2) : r_1 \geq \frac{3+\sqrt{33}}{2}, r_2 > 3 \right\}.$

Teorema 3.2.1 El sistema (3.16) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto p_1 si y solo si $(r_1, r_2) \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5$, $r_2 \neq \gamma_1$ y $\alpha = \alpha^* = \gamma_3$.

Para demostrar el teorema 3.2.1 se sigue la misma idea que la demostración del teorema 3.1.1.

3.2.2. Bifurcación Neimark-Sacker

En esta sección estudiaremos la bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo p_1 para el modelo (3.16), donde el parámetro de bifurcación es α . Antes de enunciar el teorema de bifurcación consideremos los siguientes conjuntos.

Sea

- $\Gamma_1 = \left\{ (r_1, r_2) : \frac{49}{17} < r_2 \leq 50.5567, \frac{1}{4} \left(13 - \sqrt{17 - \frac{32}{r_2-1}} \right) < r_1 < \frac{1}{4} \left(\sqrt{17 - \frac{32}{r_2-1}} + 13 \right) \right\}$,
- $\Gamma_2 = \left\{ (r_1, r_2) : r_2 > 50.5567, \frac{1}{4} \left(13 - \sqrt{17 - \frac{32}{r_2-1}} \right) < r_1 < \frac{4(r_2-2)r_2+3}{(r_2-5)r_2+2} \right\}$.

Teorema 3.2.2 *El sistema (3.16) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo p_1 si y solo si $(r_1, r_2) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\alpha = \alpha^* = \frac{(2r_2-1)(r_1(r_2-2)-2r_2+3)}{r_1 r_2^2}$. Además, si $k < 0$ se tiene una órbita periódica atractora que se bifurca desde el punto fijo p_1 para $\alpha > \alpha^*$.*

Para demostrar el teorema 3.2.2 se sigue la misma idea que la demostración del teorema 3.1.2, haciendo uso de los resultados de (GH).

3.2.3. Simulación numérica

En esta subsección se muestran algunas simulaciones numéricas para verificar los resultados obtenidos de forma analítica del modelo (3.16), esto incluye retratos fases y diagramas de bifurcación.

Diagrama de bifurcación y retrato fase

- (I) Sea $r_1 = 2.5$, $\alpha = 0.03$, $r_2 \in [3.2, 4.45]$ y con valor inicial $(x_0, y_0) = (49.12, 0.6)$, en la figura 3.3 se muestra que el sistema (3.16) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo $(49.1284, 0.686615)$ con $r_2 = 3.58354$, $l_1 = -48.9771$ y $l_2 = 11.7164$.

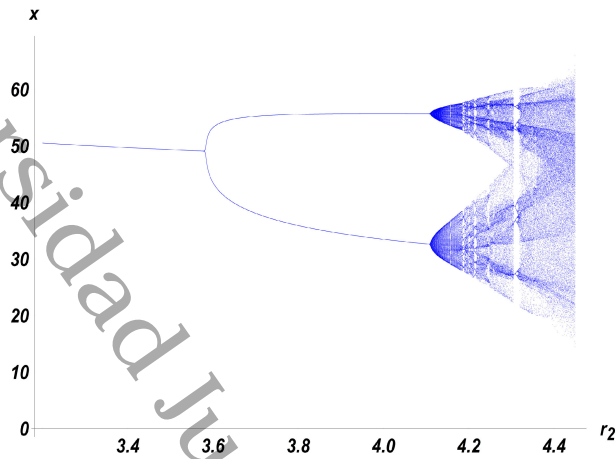


Figura 3.3: Diagrama de bifurcación del sistema (4.1) para $r_1 = 2.5$, $\alpha = 0.03$, $r_2 \in [3.2, 4.45]$ con valor inicial $(49.12, 0.6)$.

- (II) Si $r_1 = 3.2$, $r_2 = 3.5$, $\alpha \in [0, 0.15]$ y valor inicial $(x_0, y_0) = (14.875, 0.606)$, entonces el sistema (3.16) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo $(14.875, 0.606299)$ con $r_1 = 0.0122449$ y $k = -194209 < 0$. En la figura 3.4 se muestra el diagrama de bifurcación y retrato fase del sistema (3.16) en el plano (α, x) .

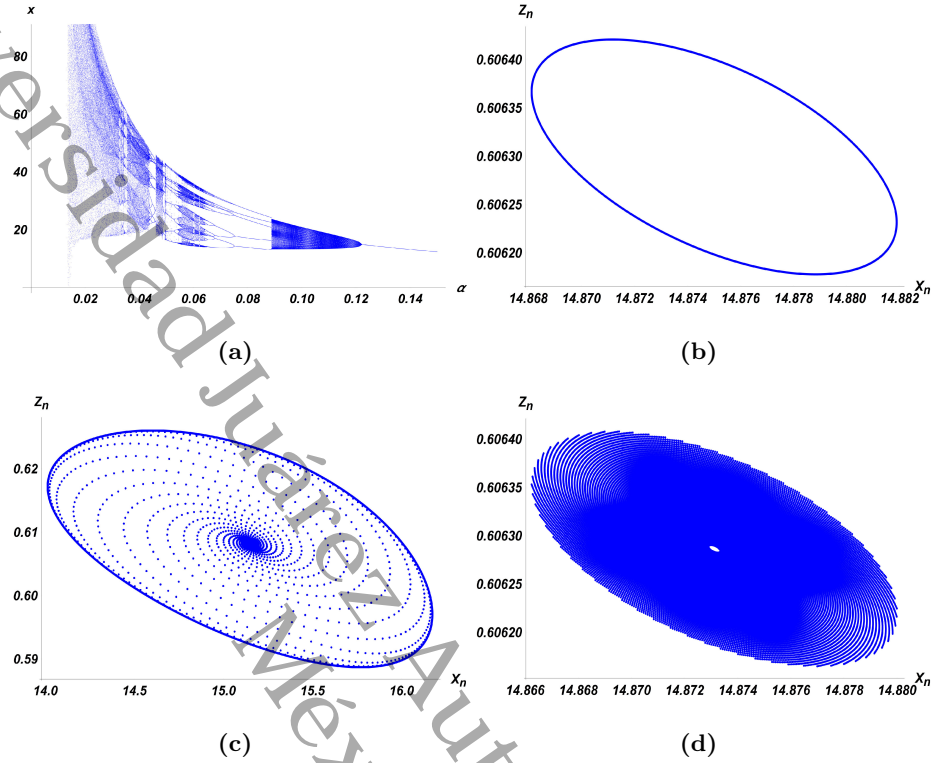


Figura 3.4: (a) Diagrama de bifurcación del sistema (3.16), (b)-(d) Retrato fase del sistema (3.16) para $\alpha = 0.1224488795, 0.12, 0.122466017$ respectivamente.

3.3. Sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo dos

Para el modelo (3.3) consideramos el siguiente cambio de coordenadas, sea $u_n = x_n$ y $v_n = bz_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n(1 - u_n) - \frac{u_nv_n}{e + u_n}, \\ v_{n+1} &= \frac{dv_nu_n}{e + u_n} - cv_n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por simplicidad, consideraremos $x_n = u_n$ y $z_n = v_n$ en el sistema (3.18)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n(1-x_n) - \frac{x_n z_n}{e+x_n} \\z_{n+1} &= \frac{dx_n z_n}{e+x_n} - cz_n.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Región de supervivencia

Para garantizar la supervivencia de las poblaciones, se describe la región en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ que es invariante bajo el sistema (4.1).

Sea $x_n, z_n \in [0, 1]$, queremos determinar condiciones para que $x_{n+1}, z_{n+1} \in [0, 1]$, es decir

$$0 \leq ax_n(1-x_n) - \frac{x_n z_n}{e+x_n} \leq 1, \quad y \tag{3.20}$$

$$0 \leq \frac{dx_n z_n}{e+x_n} - cz_n \leq 1. \tag{3.21}$$

De la desigualdad (3.21) tenemos que $\frac{dx_n}{e+x_n} - c \geq 0$. Por lo tanto,

$$d-c > 0 \quad y \quad x_n \geq \frac{ce}{d-c}.$$

Dado que $x_n \in [0, 1]$, se tiene que $c(e+1) \leq d$.

Así $\frac{dx_n z_n}{e+x_n} - cz_n \leq 1$, tenemos que

$$z_n \leq \frac{e+x_n}{(d-c)x_n - ce}. \tag{3.22}$$

Tomando $x_n \in [\frac{ce}{d-c}, 1]$, se verifica que $x_{n+1} \in [\frac{ce}{d-c}, 1]$. Es decir,

$$\frac{ce}{d-c} \leq ax_n(1-x_n) - \frac{x_n z_n}{e+x_n} \leq 1. \tag{3.23}$$

Esta desigualdad implica lo siguiente

$$a(1-x_n)(e+x_n) - \frac{e+x_n}{x_n} \leq z_n \leq a(1-x_n)(e+x_n) - \frac{ce}{d-c} \frac{e+x_n}{x_n}. \tag{3.24}$$

En resumen, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1 Si $d-c > 0$ y $c(e+1) \leq d$,

- $d-c-1 > 0$ y $\frac{ce}{d-c} \leq x_0 < \min\{\frac{e+ce}{d-c-1}, 1\}$ o $d-c-1 < 0$ y $\frac{ce}{d-c} \leq x_0$,

- $0 \leq z_0 \leq \frac{e + x_0}{(d - c)x_0 - ce}$,
- $a(1 - x_0)(e + x_0) - \frac{e + x_0}{x_0} \leq z_0 \leq a(1 - x_0)(e + x_0) - \frac{ce}{d - c} \frac{e + x_0}{x_0}$.

Entonces $(x_n, z_n) \in [0, 1] \times [0, 1]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto dado por la proposición 3.3.1, es llamado *región de supervivencia*.

3.3.1. Análisis de estabilidad

El sistema (3.19) tiene los siguientes puntos fijos,

- $P_1 = (0, 0)$,
- $P_2 = \left(\frac{a - 1}{a}, 0\right)$ para $a > 1$,
- $P_3 = \left(\frac{(c + 1)e}{d - c - 1}, \frac{de(c + 1 - d - a(ce + c - d + e + 1))}{(c - d + 1)^2}\right)$ para $a > 1$,
 $c > 0, e > 0$ y $d > \frac{a(c + 1)e}{a - 1} + c + 1$.

El único punto fijo de coexistencia del sistema de ecuaciones (3.19) es P_3 . Para mostrar la estabilidad local de los puntos fijos, fijamos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5c^2 + c(6 - 5d) - 9d + 1}{(c + 1)(c - d + 1)}, \\ d_1 &= \frac{(c + 1)(ae + a - 1)}{a - 1}, \\ d_2 &= \frac{(c - 1)(ae + a - 1)}{a - 1}, \\ e_1 &= -\frac{(a - 1)(c^2 - 2cd + c + (d - 1)d)}{a(c^2 - cd + c - 2d)}, \\ e_2 &= -\frac{(a - 1)(c - d + 1)}{a(c + 1)}, \\ e_3 &= -\frac{(c - d + 1)(a(c + 1)(c - d - 1) - c^2 + cd - 3d + 1)}{a(c + 1)(c^2 - cd - 3d - 1)}. \end{aligned}$$

Lema 3.3.1 1. Si $a < 1$ y $c < 1$, entonces P_1 es asintóticamente estable.

2. Si $0 < c \leq 1$, $1 < a \leq 3$ y $0 < d < d_2$ o $c > 1$, $1 < a \leq 3$ y $d_1 < d < d_2$, entonces P_2 es asintóticamente estable.

3. Si $d > c + 1$, y si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones, entonces P_3 es localmente asintóticamente estable.

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

- i) $1 < a < 3$ y $e_1 < e < e_2$,
- ii) $a = 3$, $0 < c < \frac{1}{3}$ y $e_1 < e < e_2$,
- iii) $3 < a < a_1$ y $e_1 < e < e_3$,
- iv) $a = 3$, $c \geq \frac{1}{3}$ y $e_1 < e < e_3$.

Demostración.

1. Evaluando la matriz Jacobiana J del sistema en P_1 tenemos

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = -c$. Entonces el punto fijo P_1 es asintóticamente estable si $a < 1$ y $c < 1$, además es asintóticamente inestable si $a > 1$ y $c > 1$, (véase (E1)).

2. Para que el punto P_2 pertenezca al eje invariante del primer cuadrante, se debe cumplir que $a > 1$. La matriz Jacobiana J del sistema en P_2 es

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 2 - a & \frac{1 - a}{ae + a - 1} \\ 0 & \frac{(a - 1)d}{ae + a - 1} - c \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Los valores propios de la matriz $J(P_2)$ son $\lambda_1 = 2 - a$ y $\lambda_2 = \frac{(a - 1)d}{ae + a - 1} - c$. Por lo que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ si y solo si

$$0 < c \leq 1, \quad 1 < a < 3 \quad \text{y} \quad 0 < d < \frac{(c + 1)(ae + a - 1)}{a - 1}$$

o

$$c > 1, \quad 1 < a < 3 \quad \text{y} \quad \frac{(c - 1)(ae + a - 1)}{a - 1} < d < \frac{(c + 1)(ae + a - 1)}{a - 1}.$$

Si $a = 3$ los valores propios $J(P_2)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \frac{2d}{3e + 2} - c$, dado que uno de los valores propios de la matriz $J(P_2)$ es menos uno, usaremos el teorema de la variedad central para determinar la estabilidad del punto fijo P_2 cuando $a = 3$.

3.3 Sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo dos

Primero trasladamos el punto fijo P_2 al origen, para ello hacemos $u_n = x_n - \frac{2}{3}$ y $v_n = z_n$ en el sistema (3.19). Así el sistema se transforma en,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3e+2} \\ 0 & \frac{2d}{3e+2} - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(u_n, v_n) \\ h_2(u_n, v_n) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

donde

$$\begin{aligned} h_1(u_n, v_n) &= \frac{81eu_n^3v_n}{(3e+2)^4} + u_n^2 \left(\frac{27ev_n}{(3e+2)^3} - 3 \right) - \frac{9eu_nv_n}{(3e+2)^2} + \mathcal{O}(|u_n| + |v_n|)^4 \text{ y} \\ h_2(u_n, v_n) &= \frac{81deu_n^3v_n}{(3e+2)^4} - \frac{27deu_n^2v_n}{(3e+2)^3} + \frac{9deu_nv_n}{(3e+2)^2} + \mathcal{O}(|u_n| + |v_n|)^4. \end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3ce+2c-2d-3e-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

el sistema (3.27) se convierte en lo siguiente

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{2d}{3e+2} - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(X_n, Z_n) \\ g(X_n, Z_n) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f(X_n, Z_n) &= -\frac{81(c-1)eX_n^3Z_n}{(3e+2)^3(c(3e+2)-2d-3e-2)} - \frac{486(c-1)eX_n^2Z_n^2}{(3e+2)^3(-c(3e+2)+2d+3e+2)^2} \\ &+ \frac{27(c-1)eX_n^2Z_n}{(3e+2)^2(c(3e+2)-2d-3e-2)} - \frac{972(c-1)eX_nZ_n^3}{(3e+2)^3(c(3e+2)-2d-3e-2)^3} \\ &+ \frac{108(c-1)eX_nZ_n^2}{(3e+2)^2(-c(3e+2)+2d+3e+2)^2} - \frac{3X_nZ_n(3(c+3)e+8)}{(3e+2)(c(3e+2)-2d-3e-2)} \\ &+ \frac{108(c-1)eZ_n^3}{(3e+2)^2(c(3e+2)-2d-3e-2)^3} - \frac{6Z_n^2(3(c+1)e+4)}{(3e+2)(-c(3e+2)+2d+3e+2)^2} \\ &- 3X_n^2 + \mathcal{O}(|X_n| + |Z_n|)^4, \\ g(X_n, Z_n) &= \frac{486deX_n^2Z_n^2}{(3e+2)^4(c(3e+2)-2d-3e-2)} + \frac{972deX_nZ_n^3}{(3e+2)^4(-c(3e+2)+2d+3e+2)^2} \\ &- \frac{108deX_nZ_n^2}{(3e+2)^3(c(3e+2)-2d-3e-2)} - \frac{108deZ_n^3}{(3e+2)^3(-c(3e+2)+2d+3e+2)^2} \\ &+ \frac{18deZ_n^2}{(3e+2)^2(c(3e+2)-2d-3e-2)} + \frac{81deX_n^3Z_n}{(3e+2)^4} \\ &- \frac{27deX_n^2Z_n}{(3e+2)^3} + \frac{9deX_nZ_n}{(3e+2)^2} + \mathcal{O}(|X_n| + |Z_n|)^4. \end{aligned}$$

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

Aplicando el teorema de la variedad central y asumiendo que la variedad central tiene la siguiente forma

$$Z = h(X) = \alpha X^2 + \beta X^3 + \mathcal{O}(|X|^4),$$

la función $h(X)$ satisface la siguiente igualdad

$$h(-X + f(X, h(X))) - \left(\frac{2d}{3e+2} - c \right) h(X) - g(X, h(x)) = 0. \quad (3.29)$$

Al resolver la ecuación (3.29) con respecto a α y β se tiene que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, por lo tanto $h(X) = 0$. Así la dinámica en la variedad central está dada por el mapeo

$$\hat{f}(X) = -X + f(X, h(X)) = -3X^2 - X.$$

Dado que la derivada Schwarz del mapeo \hat{f} en $X = 0$ es

$$S\hat{f}(0) = -\frac{3}{2}(-6)^2 = -54 < 0,$$

y $|\lambda_2| < 1$, por el teorema de la variedad central, concluimos que el punto fijo P_2 es asintóticamente estable si $a = 3$, ver (E1).

Si $b = \frac{(c+1)(ae+a-1)}{a-1}$, entonces los valores propios de la matriz Jacobiana (3.26) son $\lambda_1 = 2 - a$ y $\lambda_2 = 1$. Determinaremos la dinámica local del punto fijo P_2 de la misma manera que en el caso anterior.

Realizamos el siguiente cambio de coordenadas $u_n = x_n - \frac{a-1}{a}$ y $v_n = z_n$ en el sistema (3.19) con $1 < a < 3$ y $b = \frac{(c+1)(ae+a-1)}{a-1}$. De esta forma el sistema (3.19) se convierte en

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & \frac{1-a}{ae+a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{h}_1(u_n, v_n) \\ \bar{h}_2(u_n, v_n) \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(u_n, v_n) &= -\frac{a^4 e u_n^3 v_n}{(ae+a-1)^4} + u_n^2 \frac{a^3 e v_n}{(ae+a-1)^3} - u_n^2 a - \frac{a^2 e u_n v_n}{(ae+a-1)^2} \\ &+ \mathcal{O}((|u_n| + |v_n|)^4), \\ \bar{h}_2(u_n, v_n) &= \frac{a^4 (c+1) e u_n^3 v_n}{(a-1)(ae+a-1)^3} - \frac{a^3 (c+1) e u_n^2 v_n}{(a-1)(ae+a-1)^2} + \frac{a^2 (c+1) e u_n v_n}{(a-1)(ae+a-1)} \\ &+ \mathcal{O}((|u_n| + |v_n|)^4). \end{aligned}$$

3.3 Sistema depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo dos

Sea $T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{ae+a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas columnas son vectores propios generados por los valores propios $\lambda_1 = 2 - a$ y $\lambda_2 = 1$.

De esta forma proponemos el siguiente cambio de variable $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix}$ para el sistema (3.30). Aplicando el cambio de variable se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(X_n, Z_n) \\ g_1(X_n, Z_n) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(X_n, Z_n) &= \frac{a^4 e X_n^3 Z_n (-a+c+2)}{(a-1)(ae+a-1)^4} + \frac{3a^4 e X_n^2 Z_n^2 (a-c-2)}{(a-1)(ae+a-1)^5} + \frac{3a^4 e X_n Z_n^3 (-a+c+2)}{(a-1)(ae+a-1)^6} \\ &+ \frac{a^3 e X_n^2 Z_n (a-c-2)}{(a-1)(ae+a-1)^3} + \frac{2a^3 e X_n Z_n^2 (-a+c+2)}{(a-1)(ae+a-1)^4} + \frac{a^3 e Z_n^3 (a-c-2)}{(a-1)(ae+a-1)^5} \\ &+ \frac{a X_n Z_n (a^2(e+2) + a(ce-4) + 2)}{(a-1)(ae+a-1)^2} - \frac{a Z_n^2 (a^2 + a(ce+e-2) + 1)}{(a-1)(ae+a-1)^3} \\ &- a X_n^2 + \mathcal{O}(|X_n| + |Z_n|)^4, \\ g_1(X_n, Z_n) &= \frac{a^4 (c+1) e X_n^3 Z_n}{(a-1)(ae+a-1)^3} - \frac{3a^4 (c+1) e X_n^2 Z_n^2}{(a-1)(ae+a-1)^4} + \frac{3a^4 (c+1) e X_n Z_n^3}{(a-1)(ae+a-1)^5} \\ &- \frac{a^3 (c+1) e X_n^2 Z_n}{(a-1)(ae+a-1)^2} + \frac{2a^3 (c+1) e X_n Z_n^2}{(a-1)(ae+a-1)^3} - \frac{a^3 (c+1) e Z_n^3}{(a-1)(ae+a-1)^4} \\ &+ \frac{a^2 (c+1) e X_n Z_n}{(a-1)(ae+a-1)} - \frac{a^2 (c+1) e Z_n^2}{(a-1)(ae+a-1)^2} + \mathcal{O}(|X_n| + |Z_n|)^4. \end{aligned}$$

Por el teorema de la variedad central, asumimos que la variedad central tiene la siguiente forma

$$X = h(Z) = \alpha_1 Z^2 + \beta_1 Z^3 + \mathcal{O}(|Z|^4),$$

entonces se satisface la siguiente igualdad

$$h(Z + g_1(h(Z), Z)) - (2-a)h(Z) - f_1(h(Z), Z) = 0. \quad (3.31)$$

Resolviendo la ecuación (3.31) se tiene que

$$\alpha_1 = -\frac{a(a(a+ce+e-2)+1)}{(a-1)^2(ae+a-1)^3}$$

y

$$\beta_1 = \frac{a^2(-a^2(c+1)e^2(a+3c+2) - 6a(a-1)^2(c+1)e - 2(a-1)^4)}{(a-1)^4(ae+a-1)^5}.$$

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

Así

$$h(Z) = \frac{a^2 Z^3 (-a^2(c+1)e^2(a+3c+2) - 6a(a-1)^2(c+1)e - 2(a-1)^4)}{(a-1)^4(ae+a-1)^5} - \frac{aZ^2(a(a+ce+e-2)+1)}{(a-1)^2(ae+a-1)^3} + \mathcal{O}(|Z|^4).$$

De esta manera se tiene el mapeo con el que podemos estudiar la dinámica del punto fijo en la variedad central

$$\hat{f}_1(Z) = Z + g_1(h(Z), Z) = Z - \frac{a^2(c+1)eZ^2}{(a-1)(ae+a-1)^2} + \frac{a^4(c+1)^2e^2Z^3}{(a-1)^3(ae+a-1)^4} + \mathcal{O}(|Z|^4),$$

la derivada de la función \hat{f}_1 en el punto fijo cero es 1 y $\hat{f}_1''(0) = -\frac{2a^2(c+1)e}{(a-1)(ae+a-1)^2} < 0$, entonces el punto fijo cero es inestable, así $\left(\frac{a-1}{a}, 0\right)$ es inestable cuando $b = \frac{(c+1)(ae+a-1)}{a-1}$, ver (E1).

Por lo tanto, si

$$0 < c \leq 1, 1 < a \leq 3 \text{ y } 0 < d < \frac{(c+1)(ae+a-1)}{a-1}$$

o

$$c > 1, 1 < a \leq 3 \text{ y } \frac{(c-1)(ae+a-1)}{a-1} < d < \frac{(c+1)(ae+a-1)}{a-1},$$

entonces $\left(\frac{a-1}{a}, 0\right)$ es localmente asintóticamente estable.

3. La matriz Jacobiana del sistema (3.19) en el punto P_3 es la siguiente

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{a(c+1)(c(e+1)+d(e-1)+e+1) - (c-d+1)^2}{d(c-d+1)} & -\frac{c+1}{d} \\ -a(ce+c-d+e+1)+c-d+1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

y el polinomio característico de la matriz Jacobiana (3.32) es

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + \frac{(-a(c+1)(ce+c+de-d+e+1)+c^2+c(2-3d)+2d^2-3d+1)}{d(c-d+1)}\lambda \\ &+ \frac{c^3(-(ae+a-1))-c(a(d^2-3d(e+1)+e+1)-(d-1)^2)+ad(-d+2e+1)}{d(c-d+1)} \\ &+ \frac{+c^2(a(d(e+2)-2(e+1))-2d+2)}{d(c-d+1)} = 0, \end{aligned}$$

con la finalidad de encontrar la región donde P_3 es asintóticamente estable, aplicaremos las condiciones de *Jury*, así que debemos mostrar que se satisfacen las siguientes desigualdades

$$P(1) > 0, \quad P(-1) > 0, \quad \det(J(P_3)) < 1. \quad (3.33)$$

donde

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{(c+1)(-a(ce+c-d+e+1)+c-d+1)}{d}, \\ P(-1) &= -\frac{(c-d+1)((a-1)(c^2-1)-d((a-1)c+a+3))}{d(c-d+1)} \\ &\quad -\frac{a(c+1)e(c^2-(c+3)d-1)}{d(c-d+1)}, \\ \det(J(P_3)) &= -\frac{(c-d+1)((a-1)c(c+1)-d((a-1)c+a))}{d(c-d+1)} \\ &\quad -\frac{a(c+1)e(c(c+1)-(c+2)d)}{d(c-d+1)}. \end{aligned}$$

Usando Mathematica se verifica que (3.33) se cumple si y solo si

$$0 < c < \frac{1}{3}, \quad d > c+1, \quad 1 < a \leq 3$$

$$y - \frac{(a-1)(c^2-2cd+c+(d-1)d)}{a(c^2-cd+c-2d)} < e < -\frac{(a-1)(c-d+1)}{a(c+1)},$$

o

$$0 < c < \frac{1}{3}, \quad d > c+1, \quad 3 < a < \frac{5c^2+c(6-5d)-9d+1}{(c+1)(c-d+1)}$$

$$y - \frac{(a-1)(c^2-2cd+c+(d-1)d)}{a(c^2-cd+c-2d)} < e < -\frac{(c-d+1)(a(c+1)(c-d-1)-c^2+cd-3d+1)}{a(c+1)(c^2-cd-3d-1)}$$

o

$$c \geq \frac{1}{3}, \quad d > c+1, \quad 1 < a < 3$$

$$y - \frac{(a-1)(c^2-2cd+c+(d-1)d)}{a(c^2-cd+c-2d)} < e < -\frac{(a-1)(c-d+1)}{a(c+1)}$$

o

$$c \geq \frac{1}{3}, \quad d > c+1, \quad 3 \leq a < \frac{5c^2+c(6-5d)-9d+1}{(c+1)(c-d+1)}$$

$$y - \frac{(a-1)(c^2-2cd+c+(d-1)d)}{a(c^2-cd+c-2d)} < e < -\frac{(c-d+1)(a(c+1)(c-d-1)-c^2+cd-3d+1)}{a(c+1)(c^2-cd-3d-1)}.$$

3.3.2. Bifurcación

En esta sección estudiaremos la bifurcación doblamiento de periodo y bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo P_3 . Usando la teoría de la variedad central y de bifurcación, mostraremos estas bifurcaciones moviendo el parámetro e , (E2, GH, W).

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

Teorema 3.3.1 *El sistema (3.19) presenta una bifurcación de duplicación de período en el punto P_3 si y solo si $e > 0$, $d > c + 1$, $a > 3$, $a \neq \frac{5c^2 + c(6-5d) - 9d + 1}{(c+1)(c-d+1)}$ y $e = e^* = \frac{d((a-1)c + a + 3)(c-d+1)}{a(c+1)(c^2 - (c+3)d - 1)} - \frac{(a-1)(c^2-1)(c-d+1)}{a(c+1)(c^2 - (c+3)d - 1)}$. Además, si $3 < a < \frac{5c^2 + c(6-5d) - 9d + 1}{(c+1)(c-d+1)}$, entonces las órbitas de período dos que bifurcan del punto fijo P_3 son inestables.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - \frac{-a(c+1)(ce + c + de - d + e + 1) + c^2 + c(2-3d) + 2d^2 - 3d + 1}{d(c-d+1)}\lambda \\ &+ \frac{c(-a(d^2 - 3d(e+1) + e + 1) - (d-1)^2) - c^3(ae + a - 1)}{d(c-d+1)} \\ &+ \frac{c^2(a(d(e+2) - 2(e+1)) - 2d + 2) + ad(-d + 2e + 1)}{d(c-d+1)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

el polinomio característico de la matriz Jacobiana $J(P_3)$.

Si $e = e^* = -\frac{(a-1)(c^2-1)(c-d+1)}{a(c+1)(c^2 - (c+3)d - 1)} + \frac{d((a-1)c + a + 3)(c-d+1)}{a(c+1)(c^2 - (c+3)d - 1)}$ los valores propios del polinomio característico $J(P_3)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -\frac{a(b-2) - 5b + 6}{2b}$. Dado que el punto P_3 está en el primer cuadrante para $b > 2$, $a > 3$, entonces $|\lambda_2| \neq 1$ si $a \neq \frac{5c^2 + c(6-5d) - 9d + 1}{(c+1)(c-d+1)}$.

Con la finalidad de usar el teorema de la variedad central trasladamos el punto fijo P_3 al $(0, 0)$ y agregamos una nueva coordenada \bar{e} en lugar del parámetro e . Sea $u_n = x_n + \frac{(c+1)e}{c-d+1}$, $v_n = z_n + \frac{de(a(ce+c-d+e+1)-c+d-1)}{(c-d+1)^2}$, $\bar{e}_n = e_n - e^*$. Con este cambio de coordenadas, el sistema (3.19) se convierte en,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \bar{e}_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{d((a-2)c+a) - (c+1)((a-2)c+a-4)}{c^2 - (c+3)d - 1} & -\frac{2(a-3)(c+1)}{c^2 - (c+3)d - 1} & \frac{c+1}{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2(a-3)d(c-d+1)}{c^2 - (c+3)d - 1} & \frac{2(a-3)(c+1)d}{c^2 - (c+3)d - 1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \bar{e}_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} f_1(u_n, \bar{e}_n, v_n) \\ 0 \\ f_2(u_n, \bar{e}_n, v_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donde $f_1(u, \bar{e}, v)$ y $f_2(u, \bar{e}, v)$ se pueden consultar en el apéndice A.

Sea

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-c^2 + (c+3)d + 1}{(a-3)d(c-d+1)} & -\frac{(c+1)(c^2 - (c+3)d - 1)}{d((a-1)(c^2-1) + d(a(-c) + a + c - 9))} & -\frac{c+1}{2d} \\ 0 & \frac{(c-d+1)(c^2 - (c+3)d - 1)}{d((a-1)(c^2-1) + d(a(-c) + a + c - 9))} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz de vectores propios de la parte lineal del sistema (3.35). Ahora consideremos el siguiente cambio de variable $\begin{pmatrix} u_n & \bar{e}_n & v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_n & \mu_n & Z_n \end{pmatrix}$. El sistema (3.19) se transforma en

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \mu_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d((a-4)c+a-6)-(c+1)((a-4)c+a-2)}{c^2-(c+3)d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \mu_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(X_n, \mu_n, Z_n) \\ 0 \\ F_2(X_n, \mu_n, Z_n) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

donde las funciones $F_1(X_n, \mu_n, Z_n)$ y $F_2(X_n, \mu_n, Z_n)$ se pueden consultar en el apéndice B.

Por el teorema de la variedad central se tiene que la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$ para $\mu = 0$ se determina estudiando una familia de funciones a un parámetro en la variedad central, que se puede representar de la siguiente manera.

$$W^c(0) = \{(X, \mu, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z = h^*(X, \mu), h^*(0, 0) = 0, Dh^*(0, 0) = 0\},$$

donde

$$h^*(X, \mu) = \alpha X^2 + \beta X\mu + \gamma \mu^2 + O((|X| + |\mu|)^3).$$

De la igualdad

$$h^*(-X + F_1(X, \mu, h^*(X, \mu)), \mu) + \frac{d((a-4)c+a-6)-(c+1)((a-4)c+a-2)}{c^2-(c+3)d-1} h^*(X, \mu) - F_2(X, \mu, h^*(X, \mu)) = 0, \text{ se obtiene que}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-2a(c^2-(c+3)d-1)^3((c+1)d((a-7)c+a-2c^2+3)+(c+3)^2d^2)}{\tau_1} \\ &+ \frac{2a(c-1)(c+1)^2(a-c-2)(c^2-(c+3)d-1)^3}{\tau_1}, \\ \beta &= \frac{2a(c+1)(c^2-(c+3)d-1)^3(d(a+c)+(c+1)(a-c-2))}{\tau_2}, \\ \gamma &= -\frac{2a(c+1)(c^2-(c+3)d-1)^3}{\tau_3}, \end{aligned}$$

donde τ_1 , τ_2 y τ_3 se pueden consultar en el apéndice B1. Así el mapeo restringido a la variedad central es de la siguiente forma

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

$$\widehat{F}(X) = -X - h_1 X^2 + h_2 X^3 - h_3 \mu X + h_4 \mu X^2 + h_5 \mu X^3 + h_6 \mu^2 + h_7 \mu^2 X + h_8 \mu^2 X^3 + h_9 \mu^2 X^2 - h_{10} \mu^3 + h_{11} \mu^3 X^2 + h_{12} \mu^3 X - h_{13} \mu^3 X^3 + \mathcal{O}(|X| + |\mu|)^4,$$

donde $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}$ y h_{13} se pueden consultar en el apéndice C1.

Si se satisfacen las siguientes condiciones

$$l_1 = \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial \mu} \right]_{(0,0)} \neq 0$$

$$l_2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} \right]_{(0,0)} \neq 0, \quad (3.37)$$

entonces el sistema (3.19) presenta una bifurcación de periodo en el punto fijo P_3 , ver (GH, W).

Además, la condición (3.37) se satisface si y solo si

$$(a, c, d) \in \{(a, c, d) | 3 < a \leq \frac{4}{c+1} + 5, 0 < c < 1 \text{ y } d > c + 1\}$$

o

$$(a, c, d) \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5 \cup Q_6 \cup Q_7,$$

donde $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ y Q_7 se pueden consultar en el apéndice C2. Además si $3 < a < \frac{5c^2 + c(6 - 5d) - 9d + 1}{(c+1)(c-d+1)}$ y $d > c + 1$, entonces $|\lambda_2| < 1$ y $l_2 < 0$, así las órbitas de periodo dos que se bifurcan del punto fijo P_3 son inestables.

Para la bifurcación de Neimark-Sacker se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2 Si los parámetros del sistema (3.19) satisfacen $d > 1 + c$, $a > 1$,

$$a \notin \left\{ \frac{(3d - c - 1)(d - c - 1)}{(c+1)(c(e+1) + d(e-1) + e+1)}, \frac{(2d - c - 1)(d - c - 1)}{(c+1)(c(e+1) + d(e-1) + e+1)} \right\}$$

y $e = e^{**} = \frac{(a-1)(d-c)(d-c-1)}{a((d-c)(c+1)d)}$, entonces el sistema (3.19) exhibe una bifurcación de Neimark-Sacker en P_3 .

Demostración. La ecuación característica de la matriz Jacobiana (3.32) del sistema (3.19) en el punto P_3 , está dada de la siguiente manera:

$$\lambda^2 - p(e)\lambda + q(e) = 0,$$

donde

$$p(e) = \frac{a(c+1)e(c+d+1) + (c-d+1)((a-1)(c+1)+2d)}{d(-c+d-1)},$$

$$q(e) = \frac{d(c+1)e(c(c+1)-(c+2)d) + (c-d+1)((a-1)c(c+1)-d((a-1)c+a))}{d(c-d+1)}.$$

Los valores propios $\lambda_{1,2}$ son complejos conjugados si $p(e)^2 - 4q(e) < 0$. A partir del análisis de estabilidad del punto P_3 en el lema 3.3.1, vamos a considerar

$$e^{**} = -\frac{(a-1)(c-d)(c-d+1)}{a(c(c+1)-(c+2)d)} \text{ para } d > c+1 \text{ y } 1 < a < \frac{5c^2 + c(6-5d) - 9d + 1}{(c+1)(c-d+1)}. \quad (3.38)$$

En consecuencia

$$q(e^{**}) = 1,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{d((a-3)c+a-5) - (c+1)((a-3)c+a-1)}{2c(c+1) - 2(c+2)d}$$

$$\pm \frac{i\sqrt{(1-a)(c+1)(c-d+1)((c+1)((a-5)c+a-1) - d((a-5)c+a-9))}}{2c(c+1) - 2(c+2)d}$$

$$= \rho \pm i\omega.$$

De (3.38) se tiene que

$$|\lambda_{1,2}(e^{**})| = (q(e^{**}))^{\frac{1}{2}} \text{ y } e_1 = \frac{d|\lambda_{1,2}(e)|}{de} \Big|_{e=e^{**}} = \frac{a(c+1)(c(c+1)-(c+2)d)}{2d(c-d+1)} \neq 0.$$

Ademas $p(e^{**}) \neq 0, 1$ si $a \notin \left\{ \frac{(c-2d+1)(c-d+1)}{(c+1)(c(c+1)+d(e-1)+e+1)}, \frac{(c-3d+1)(c-d+1)}{(c+1)(c(c+1)+d(e-1)+e+1)} \right\}$, entonces $\lambda_{1,2}^n(e^{**}) \neq 1$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Ahora trasladamos el punto fijo P_3 al $(0, 0)$, sea

$$u_n = x_n + \frac{(c+1)e}{c-d+1} \text{ y } v_n = z_n - \frac{de(-a(ce+c-d+e+1)+c-d+1)}{(c-d+1)^2}.$$

Así, el sistema (3.19) bajo la traslación queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d((a-2)c+a-3)-(c+1)((a-2)c+a-1)}{c(c+1)-(c+2)d} & -\frac{c+1}{d} \\ \frac{(a-1)d(c-d+1)}{c(c+1)-(c+2)d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u_n, v_n) \\ f_2(u_n, v_n) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Donde

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

$$f_1(u_n, v_n) = -\frac{u^2 v a^2 (c-d+1) (c^2 - cd + c - 2d)^2}{(a-1)^2 d^3 (c-d)^2} + \frac{u^2 a (-cd + c + d^2 - d + 1)}{d(c-d)} \\ + \frac{u v a (c^3 - 2c^2(d-1) + c(d^2 - 4d + 1) + 2(d-1)d)}{(a-1)d^2(c-d)} + \mathcal{O}((|u_n| + |v_n|)^3),$$

$$f_2(u_n, v_n) = \frac{u^2 v (c-d+1) a^2 (c^2 - cd + c - 2d)^2}{(a-1)^2 d^2 (c-d)^2} + \frac{u^2 a (-c + d - 1)}{c-d} \\ - \frac{u v a (c^3 - 2c^2(d-1) + c(d^2 - 4d + 1) + 2(d-1)d)}{(a-1)d(c-d)} + \mathcal{O}((|u_n| + |v_n|)^3).$$

Sea

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{(a-1)(c+1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}{2(a-1)d\sqrt{-c+d-1}} & -\frac{c+1}{2d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_{1,2}$. Ahora consideremos la siguiente transformación $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$. Entonces el mapeo (3.39) bajo la traslación queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(X_n, Z_n) \\ F_2(X_n, Z_n) \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

donde

$$F_1(X_n, Z_n) = \gamma_1 X^2 + \gamma_2 XZ + \gamma_3 X^2 Z + \gamma_4 Z^2 - \gamma_5 XZ^2 + \mathcal{O}((|X_n| + |Z_n|)^3),$$

$$F_2(X_n, Z_n) = \beta_1 X^2 + \beta_2 XZ - \beta_3 X^2 Z - \beta_4 Z^2 - \beta_5 XZ^2 + \mathcal{O}((|X_n| + |Z_n|)^3),$$

γ_i y β_i se pueden encontrar en el apéndice D1 para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

De acuerdo con el teorema de la variedad central, el mapeo (3.40) se puede ver como el mapeo (3.40) en la variedad central. Además, el coeficiente k (definido en la sección 3.5.16 de (GH)) es

$$k = -\operatorname{Re} \left[\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} \right] - \frac{1}{2} (|\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21})),$$

donde

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= \frac{1}{8}[(F_{1XX} - F_{1ZZ} + 2F_{2XZ}) + i(F_{2XX} - F_{2ZZ} - 2F_{1XZ})], \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4}[F_{1XX} + F_{1ZZ} + i(F_{2XX} + F_{2ZZ})], \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8}[(F_{1XX} - F_{1ZZ} - 2F_{2XZ}) + i(F_{2XX} - F_{2ZZ} + 2F_{1XZ})], \\ \xi_{21} &= \frac{1}{16}[(F_{1XXX} + F_{1XZZ} + F_{2XXZ} + F_{2ZZZ}) + i(F_{2XXX} + F_{2XZZ} - F_{1XXZ} - F_{1ZZZ})].\end{aligned}$$

Así

$$k = -\frac{A}{32(a-1)^2 d^4 (c-d)^2 (c-d+1)} < 0 \text{ para } a > 1, 0 < c < d-1 \text{ y } d > 1,$$

donde

$$\begin{aligned}A &= a^2(1+c)(c(1+c) - (2+c)d)(c(1+c)^2(6-2c(-4+c)(3+2c) \\ &\quad + a(-3+c(-6+c(-7+4c)))) - (1+c)(6+c(54+2c(35+(7-8c)c) \\ &\quad + ad(1+c)(-9+c(-17+16c)))) + (12+c(58-6c(-8+c(3+4c) \\ &\quad + a(1+c)(-13+3c(5+8c))))d^2 + (2-cd^3(4-2c(11+8c) \\ &\quad + a(1+c)(21+16c))) + 4d^4(2+c)(a+(-1+a)c).\end{aligned}$$

Dado que $k \neq 0$, el mapeo (3.40) tiene una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo $(X, Y) = (0, 0)$.

3.3.3. Caos

En esta sección demostraremos que el sistema (3.19) presenta un comportamiento caótico en el sentido Marotto (Mt1, Mt2).

Según (Mt2), para que exista caos es suficiente que el sistema tenga un *snap-back repeller*. Para mostrar que el sistema (3.19) tiene un *snap-back repeller*, primero mostramos que existe un punto fijo expansivo.

Los valores propios asociados a la matriz $J(P_3)$ son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p(x, z) \pm \sqrt{p(x, z)^2 - 4q(x, z)}}{2},$$

3. SISTEMA DE PREDADOR-PRESA

donde

$$p(x, z) = \frac{(e+x)(a(2x-1)(e+x) + c(e+x) - dx) + ez}{(e+x)^2},$$

$$q(x, z) = \frac{a(2x-1)(e+x)(c(e+x) - dx) + cez}{(e+x)^2}.$$

Entonces, los valores propios son números complejos conjugados con módulo mayor que uno, si

$$\frac{a^2(c+1)^2e^2(c+d+1)^2}{d^2(c-d+1)^2} + \frac{2a(c+1)^2e(c-d+1)(d(a+2c+1) + (a-1)(c+1) - 2d^2)}{d^2(c-d+1)^2}$$

$$+ \frac{(a-1)(c+1)(c-d+1)^2((a-1)(c+1) + 4(c+1)d - 4d^2)}{d^2(c-d+1)^2} < 0$$

y

$$- \frac{a(c+1)e(c(c+1) - (c+2)d) + (c-d+1)((a-1)c(c+1) - d((a-1)c+a))}{d(c-d+1)} > 1.$$

Ahora necesitamos encontrar una vecindad V_{P_3} del punto fijo P_3 , tal que para todo $(x, z) \in V_{P_3}$ la matriz Jacobiana $J(x, z)$ tenga valores propios complejos conjugados con norma mayor que uno. Esto es equivalente a encontrar V_{P_3} cuando

$$\begin{cases} p(x, z)^2 - 4q(x, z) < 0 \\ q(x, z) - 1 > 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

para toda $(x, y) \in V_{P_3}$.

Note que la ecuación

$$p(x, z)^2 - 4q(x, z) = 0. \quad (3.42)$$

tiene dos raíces reales positivas

$$z_1(x) = \frac{-2\sqrt{-de^2x(e+x)^3(2ax - a - c) - ae(2x-1)(e+x)^2 + e(e+x)(c(e+x) + dx)}}{e^2}$$

y

$$z_2(x) = \frac{2\sqrt{-de^2x(e+x)^3(2ax - a - c) - ae(2x-1)(e+x)^2 + e(e+x)(c(e+x) + dx)}}{e^2},$$

si

$$x \in V_1(x) = \{x | 0 \leq x \leq \frac{a+c}{2a}\}.$$

Así, para cada $x \in V_1(x)$ y $z \in V_2(x) = \{z \in \mathbb{R} : z_1(x) < z < z_2(x)\}$, entonces $p(x, z)^2 - 4q(x, z) < 0$.

Por otra parte, la ecuación $q(x, z) - 1 = 0$ tiene una solución si $z = z_3$, donde

$$z_3 = -\frac{(e+x)(2acex - ace + 2acx^2 - acx - 2adx^2 + adx - e - x)}{ce}$$

para toda x en los números reales. Por lo tanto, $q(x, z) - 1 > 0$ si $z \in V_3(x) = \{z \in \mathbb{R} : z > z_3(x)\}$. Finalmente, si $(a, c, d, e) \in \Gamma_j$, para algún $j \in \{1, \dots, 8\}$, entonces las desigualdades de (3.41) se cumplen. Los conjuntos Γ_j se pueden consultar en el apéndice E1. En resumen se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.3.2 *Si $(a, c, d, e) \in \Gamma_j$, para alguna $j \in \{1, \dots, 8\}$, $x \in V_1$ y $z \in V_4 = V_2(x) \cap V_3(x)$, entonces $p(x, z)^2 - 4q(x, z) < 0$ y $q(x, z) > 1$. Además si el punto fijo $P_3 \in V_{P_3} = \{(x, z) | x \in V_1 \text{ y } z \in V_4\}$, entonces el punto fijo P_3 es un punto fijo expansivo en V_{P_3} .*

Teorema 3.3.3 *Si se satisfacen las hipótesis del Lema 3.3.2, entonces el sistema (3.19) presenta caos en el sentido de Marotto.*

Demostración. Del Lema 3.3.2, P_3 es un punto expansivo. Ahora vamos a demostrar que P_3 es snap back repeller, ver (Mt2). Es decir, existe $(x_2, z_2) \in V_{P_3}$, tal que $F^2(x_2, z_2) = P_3$ y $|DF^k(x_2, z_2)| \neq 0$ para $k = 1, 2$, aquí el mapeo F está definido por el sistema (3.19).

Para encontrar (x_2, z_2) , resolvemos la ecuación $F^2(x, z) = P_3$, en dos pasos. Primero se resuelve el sistema $F(x, z) = P_3$, y obtenemos una solución (x_1, z_1) , entonces (x_2, z_2) es una solución de $F(x, z) = (x_1, z_1)$.

Las soluciones (x_1, z_1) de $F(x, z) = P_3$, diferentes de $P_3 = (x_0, z_0)$, satisfacen

$$\begin{cases} (ac - ad)x_1^3 + (ace - ac + ad)x_1^2 + (-ace + cx_0 - dx_0 - z_0)x_1 + cex_0 = 0 \\ z_1 = -\frac{(e + x_1)(ax_1^2 - ax_1 + x_0)}{x_1}, \end{cases} \quad (3.43)$$

Finalmente, (x_2, z_2) es una solución de la ecuación $F(x, z) = (x_1, z_1)$ y satisface

$$\begin{cases} (ac - ad)x_2^3 + (ace - ac + ad)x_2^2 + (-ace + cx_1 - dx_1 - z_1)x_2 + cex_1 = 0 \\ z_2 = -\frac{(e + x_2)(ax_2^2 - ax_2 + x_1)}{x_2}. \end{cases} \quad (3.44)$$

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

Con la finalidad de mostrar que el proceso iterativo descrito por (3.43) y (3.44) tiene solución, elegimos los parámetros $a, c, d, e \in \Gamma_1$; por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del Lema 3.3.2. De hecho, nosotros consideramos $a = 12, c = 3.7, d = 5$ y $e = 0.031500$. En este caso el sistema (3.19) tiene un punto fijo $P_3 = (0.493502, 2.66595)$ y los valores propios de $J(P_3)$ son $\lambda_{1,2} = 0.425641 \pm 1.049810i$. La vecindad

$$V = \{(x, z) | 0.48 < x < 0.5 \text{ y } 2.55 < z < 2.68\},$$

está contenida en V_{P_3} , por lo que P_3 es un punto expansivo. Además, existe

$$(x_2, z_2) = (0.482489, 2.570510) \in V,$$

tal que $F^2(x_2, z_2) = P_3$, $Det(DF(x_2, z_2)) = 1.55 \neq 0$ y $Det(DF^2(x_2, z_2)) = -2.01 \neq 0$. En consecuencia, P_3 es un punto *snap back repeller*. Por lo tanto, el sistema (3.19) presenta caos en el sentido de Marotto.

3.3.4. Simulación numérica

En esta sección presentamos algunas simulaciones numéricas que incluyen diagramas de bifurcación y retratos fases para el sistema (3.19), con el objetivo de ilustrar los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

1. Consideremos los siguientes valores para los parámetros del sistema (3.19), sean $a = 3.5$, $c = 0.3$, $d = 1.5$, $e \in [0.08, 0.149]$ y con valor inicial $(x_0, z_0) = (0.6410001, 0.1890001)$, la figura (3.5) muestra que el sistema (3.19) presenta una bifurcación doblamiento de periodo en el punto fijo $(0.641151, 0.189365)$ con $e^* = 0.0986386$, $l_1 = 6.02757$ y $l_2 = -30520.9 < 0$.

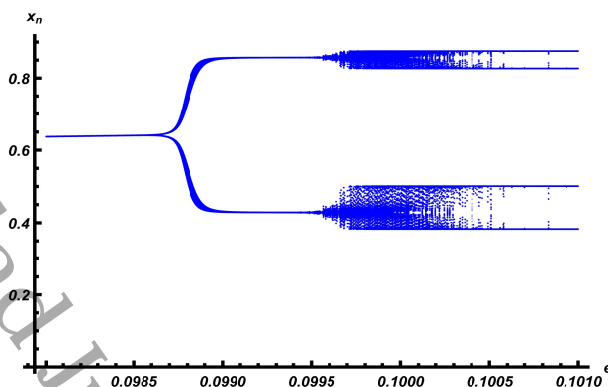


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación del sistema (3.19) para $a = 3.5$, $c = 0.3$, $d = 1.5$, $e \in [0.08, 0.149]$ con valor inicial $(0.6410001, 0.1890001)$.

- Si $a = 1.5$, $c = 0.2$, $d = 1.3$, $e \in [0.0119, 0.0150]$ y valor inicial $(x_0, z_0) = (0.140, 0.044)$, entonces el sistema (3.19) presenta una bifurcación Neimark-Sacker en el punto fijo $P_3 = (0.143999, 0.044303)$ con $e^{**} = 0.012$ y $k = -15.89 < 0$. En la figura 3.6 se muestra el diagrama de bifurcación en el plano (e, x) y el retrato fase del sistema (3.19) en el plano (x, y) .

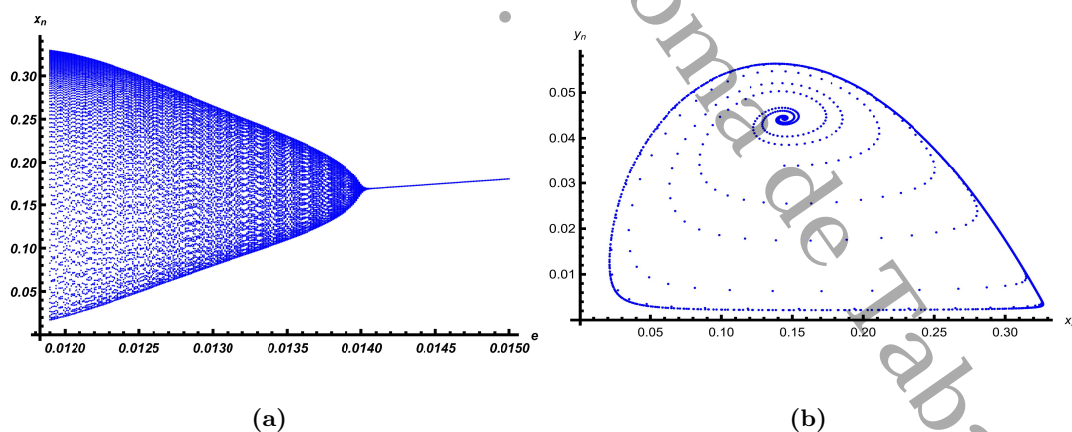


Figura 3.6: (a) Diagrama de bifurcación para el sistema (3.19), (b) retrato fase del sistema (3.19) con $e = 0.012$.

- Si $a = 12$, $c = 3.7$, $d = 5$, $e \in [0.0315, 0.0317]$ y valor inicial $(x_0, z_0) = (0.493500, 2.665900)$,

3. SISTEMA DEPREDADOR-PRESA

por el teorema (3.3.3) el sistema (3.19) es caótico en sentido Marotto. En la figura 3.7 se muestra el diagrama de bifurcación y retrato fase del sistema (3.19) en el plano (e, x) .

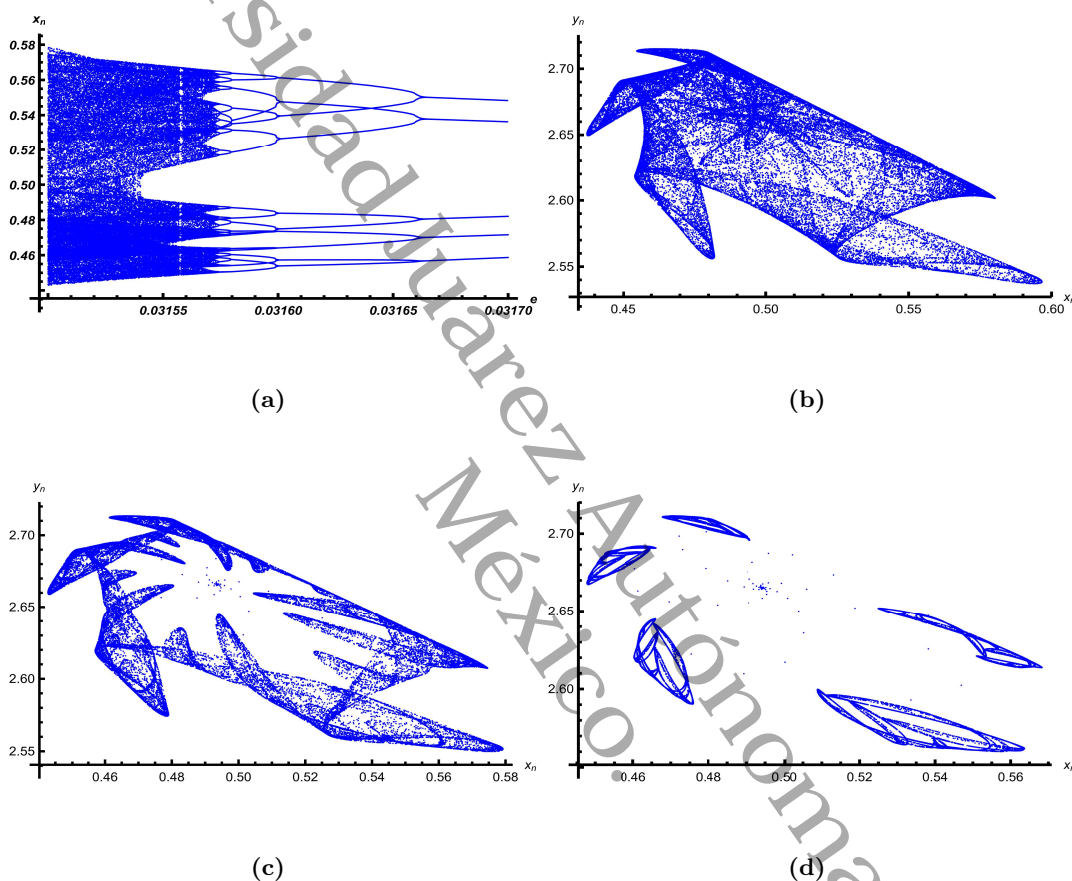


Figura 3.7: (a) Diagrama de bifurcación para el sistema (3.19), (b)-(d) retrato fase del sistema (3.19) con $e = 0.0315001101, 0.031508, 0.031548$ respectivamente.

3.3.5. Comparación entre modelos

En este capítulo se analizaron tres modelos de tipo depredador-presa donde en cada modelo cambia el tipo de respuesta funcional y la forma en que el depredador obtiene el beneficio de la presa. Para ver el cambio en la dinámica de los modelos (3.1) y (3.16) vamos a considerar que $r_1 = 1.5$ de donde se tiene que la región determinada por las condiciones de estabilidad del punto fijo $(\frac{3\alpha+r_2}{3\alpha r_2}, \frac{r_2}{3\alpha+r_2})$ del modelo (3.1) es más grande en comparación con la del modelo (3.16). Esto indica que al modificar la forma en que el depredador se beneficia y agregar un

recurso más al nuevo modelo (3.16) las oportunidades para que las dos especies sobrevivan por un largo tiempo aumenta. Además, podemos observar que los parámetros donde ocurre la bifurcación doblamiento de periodo en el modelo (3.1) es $r_2 = \frac{15\alpha}{2}$ y para el modelo (3.16) es $r_2 = \frac{-7\alpha + \sqrt{\alpha(49\alpha + 58) + 25} + 7}{4 - 26\alpha}$, lo cual indica que para el modelo (3.1) se logra una bifurcación de doblamiento de periodo siempre y cuando la cantidad de presas que consume el depredador en un cierto tiempo sea proporcional a su beneficio, mientras que para el modelo (3.16) el depredador no depende completamente de la presa ya que con consumir pequeñas cantidades su población aumenta.

Modelo depredador-presa con migración

En este capítulo analizaremos un modelo con migración entre dos parches, donde la densidad de la población en el parche uno la denotaremos por x y en el parche dos por y . También se analizará la dinámica de un modelo tridimensional considerando una población de presa que migra entre dos parches y que sufre depredación por otra especie con densidad z .

Primero consideremos el modelo solo con migración

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a \left(\frac{q_{12}y_n + (1 - q_{21})x_n}{2} \right) \left(1 - \frac{q_{12}y_n + (1 - q_{21})x_n}{2} \right), \\y_{n+1} &= b \left(\frac{q_{21}x_n + (1 - q_{12})y_n}{2} \right) \left(1 - \frac{q_{21}x_n + (1 - q_{12})y_n}{2} \right),\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde $0 < x_n < 1$, $0 < y_n < 1$, $0 < q_{12} < 1$, $0 < q_{21} < 1$, $2 < a < 4$, y $2 < b < 4$. Aquí a y b son tasas de crecimiento, q_{21} es la tasa de migración del parche uno al parche dos y q_{12} es la tasa de migración del parche dos al parche uno.

Para analizar el modelo (4.1) en la siguiente sección consideramos el caso cuando solo existe migración del primer parche hacia el segundo parche, es decir, $q_{12} = 0$ y $0 < q_{21} < 1$.

4.1. Migración unidireccional

El modelo (4.1), cuando $q_{12} = 0$, se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a \frac{(1 - q_{21})x_n}{2} \left(1 - \frac{(1 - q_{21})x_n}{2} \right), \\y_{n+1} &= b \frac{q_{21}x_n + y_n}{2} \left(1 - \frac{q_{21}x_n + y_n}{2} \right).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Para realizar el análisis, vamos a considerar los siguientes casos sobre la cantidad de puntos fijos del modelo:

- Caso 1: uno solo punto fijo
- Caso 2: dos puntos fijos
- caso 3: tres puntos fijos.

Cabe mencionar que el modelo (4.2) a lo más tiene tres puntos fijos.

Caso 1: Si $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{1-q_{21}}$ y $b = 2$ el modelo tiene como único punto fijo al origen.

Proposición 4.1.1 *El punto fijo $(0, 0)$ es asintóticamente estable si y solo si $a = \frac{2}{1-q_{21}}$, $b = 2$, $q_{12} = 0$ y $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$.*

Demostración. Sea $V(x, y) = x^2 + y^2$ definida positiva y $F(x, y)$ definida por el sistema (4.2), entonces

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= V(F(x, y)) - V(x, y) = \frac{1}{4}x^2((q_{21}-1)x+2)^2 + \frac{1}{4}(q_{21}x+y-2)^2(q_{21}x+y)^2 - x^2 - y^2 \\ &\leq \left(\frac{(2+(q_{21}-1)x)^2}{4} - 1 \right) x^2 + \frac{1}{4}(q_{21}x+y-2)^2(q_{21}x+y)^2 \\ &\leq \left(\frac{(2+(q_{21}-1)x)^2}{4} - 1 \right) x^2 + (q_{21}x+y-2)(q_{21}x+y)^2. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{(2+(q_{21}-1)x)^2}{4} < 1$ y $q_{21}x+y < 2$ para $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$, por el teorema de Lyapunov (véase (E1)) el punto fijo $(0, 0)$ es asintóticamente estable ■.

Casos 2: Ahora consideremos el caso cuando el sistema (4.2) tiene solo dos puntos fijos en $[0, 1] \times [0, 1]$. Para ello los parámetros a , b , q_{21} deben cumplir lo siguiente: $a = \frac{2}{1-q_{21}}$, $2 < b < 4$ y $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$. Así el sistema (4.2) se convierte en el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n(2 - (1 - q_{21})x_n), \\ y_{n+1} &= \frac{1}{4}b(q_{21}x_n + y_n)(2 - (q_{21}x_n + y_n)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

Los puntos fijos del modelo (4.3) son : $(0, 0)$ y $(0, \frac{2(b-2)}{b})$.

Proposición 4.1.2 *Si $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$ y $2 < b < 4$, entonces el punto fijo $(0, \frac{2(b-2)}{b})$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Los valores propios asociados al modelo (4.3) en el punto fijo $(0, \frac{2(b-2)}{b})$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2 - \frac{b}{2}$. Para determinar la estabilidad del punto fijo $(0, \frac{2(b-2)}{b})$, haremos uso del teorema de la variedad estable y la derivada schwarziana. Haciendo el cambio de coordenadas, sea $u_n = x_n$ y $v_n = y_n - \frac{2(b-2)}{b}$, el modelo (4.3) queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(b-4)q_{21} & 2 - \frac{b}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_{21}-1)u_n^2 \\ -\frac{1}{4}bq_{21}^2u_n^2 - \frac{1}{2}bq_{21}u_nv_n - \frac{bv_n^2}{4} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

$$\text{Sea } T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b-2}{(b-4)q_{21}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz de vectores propios de la parte lineal del modelo (4.3). Ahora consideremos el siguiente cambio de variables $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$. El modelo (4.4) queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(X_n, Y_n) \\ g(X_n, Y_n) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde

$$f(X_n, Y_n) = \frac{Y_n^2 (b^2(q_{21}-1) + b(6-8q_{21}) + 8(q_{21}-1))}{2(b-4)^2q_{21}} - \frac{bX_n^2}{4} + \frac{bX_nY_n}{b-4},$$

$$g(X_n, Y_n) = -\frac{(b-2)(q_{21}-1)Y_n^2}{2(b-4)q_{21}}.$$

Aplicamos el teorema de la variedad central, asumiendo que la variedad central tiene la forma

$$X = h(Y) = \alpha Y^2 + \beta Y^3 + \mathbf{O}(Y^4),$$

donde la función $h(Y)$ satisface la siguiente igualdad

$$h(Y + g(h(Y), Y)) - \frac{2b}{4-b}h(Y) - f(h(Y), Y) = 0. \quad (4.6)$$

Resolviendo la ecuación (4.6) con respecto a α y β se tiene que

$$\alpha = \frac{b(b(q_{21}-1) - 8q_{21} + 6) + 8(q_{21}-1)}{(b-4)^2(b-2)q_{21}},$$

$$\beta = \frac{2(b(b(q_{21}-1) - 8q_{21} + 6) + 8(q_{21}-1))(2(b-1)q_{21} - b + 2)}{(b-4)^3(b-2)^2q_{21}^2}.$$

Por lo tanto

$$h(Y) = \frac{2Y^3(b(b(q_{21}-1)-8q_{21}+6)+8(q_{21}-1))(2(b-1)q_{21}-b+2)}{(b-4)^3(b-2)^2q_{21}^2} + \frac{Y^2(b(b(q_{21}-1)-8q_{21}+6)+8(q_{21}-1))}{(b-4)^2(b-2)q_{21}}.$$

Así la dinámica en la variedad central está dada por el mapeo

$$\hat{f}(Y) = Y - \frac{(b-2)(q_{21}-1)Y^2}{2(b-4)q_{21}}.$$

Dado que la derivada schwarziana del mapeo \hat{f} en $X = 0$ es

$$S\hat{f}(0) = -\frac{3(b-2)^2(q_{21}-1)^2}{2(b-4)^2q_{21}^2} < 0,$$

para $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$ y $2 < b < 4$, por el teorema de la variedad central el punto fijo $(0, \frac{2(b-2)}{b})$ es asintóticamente estable ■

Caso 3: Si $-\frac{2}{q_{21}-1} < a < 4$, $2 < b < 4$ y $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$ el modelo tiene tres puntos fijos en el cuadrado unitario. Así, los puntos fijos del modelo (4.2) son:

$$P_0 = (0, 0),$$

$$P_1 = (0, 2 - \frac{4}{b}),$$

$$P_2 = (-\frac{2(a(q_{21}-1)+2)}{a(q_{21}-1)^2}, y^*),$$

donde

$$y^* = \frac{a^{3/2}(q_{21}-1)^3 \sqrt{a(q_{21}-1)(b^2(q_{21}-1) + b(4-12q_{21}) + 4(q_{21}-1)) - 16bq_{21}}}{a^2b(q_{21}-1)^4} + \frac{a^2(q_{21}-1)^3(b(3q_{21}-1) - 2q_{21} + 2) + 4ab(q_{21}-1)^2q_{21}}{a^2b(q_{21}-1)^4}.$$

Evaluando en la matriz Jacobiana se tiene directamente el siguiente resultado.

Proposición 4.1.3 Si $0 < q_{21} < \frac{1}{2}$, $\frac{2}{1-q_{21}} < a < 4$, y $2 < b < 4$, entonces P_0 y P_1 son inestables y P_2 es localmente asintóticamente estable.

4.2. Migración bidireccional

En esta sección estudiaremos la dinámica del modelo (4.1) considerando que existe migración entre los dos parches. El primer caso que analizaremos es cuando los parámetros de migración

4. MODELO DE PREDADOR-PRESA CON MIGRACIÓN

q_{21} y q_{12} son complementarios, es decir, $q_{12} = 1 - q_{21}$, bajo esta condición el modelo (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{1}{4}a(1 - q_{21})(x_n + y_n)(2 - (1 - q_{21})(x_n + y_n)) \\y_{n+1} &= \frac{1}{4}bq_{21}(x_n + y_n)(2 - q_{21}(x_n + y_n)).\end{aligned}\quad (4.7)$$

El modelo (4.7) tiene dos puntos fijos:

$$\begin{aligned}Q_0 &= (0, 0), \\Q_1 &= (x_1^*, y_1^*),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{a(q_{21} - 1)(2bq_{21}^2 - (b + 2)q_{21} + 2)(a(q_{21} - 1) - bq_{21} + 2)}{(a(q_{21} - 1)^2 + bq_{21}^2)^2}, \\y_1^* &= \frac{bq_{21}(a(q_{21} - 1)(2q_{21} - 1) + 2q_{21})(-aq_{21} + a + bq_{21} - 2)}{(a(q_{21} - 1)^2 + bq_{21}^2)^2},\end{aligned}$$

para $a, b \in [2, 4]$ y $q_{21} \in [0, 1]$. Evaluando directamente en los puntos fijos la matriz jacobiana del sistema y usando la condición de Jury obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1 *Si $2 < a < 4$, $2 < b < 4$ y $0 < q_{21} < 1$, entonces Q_0 es inestable y Q_1 es localmente asintóticamente estable.*

4.3. Migración y depredación

Con la finalidad de estudiar el efecto de la migración en un sistema depredador-presa, consideramos el siguiente modelo

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{a(1 - q_{21})x_n}{2} \left(1 - \frac{(1 - q_{21})x_n}{2}\right) (1 - z_n^2), \\y_{n+1} &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{q_{21}x_n + y_n}{2}\right) (q_{21}x_n + y_n) (1 - z_n^2), \\z_{n+1} &= \frac{\alpha z_n(x_n + y_n)(1 - z_n)}{x_n + y_n + 1},\end{aligned}\quad (4.8)$$

donde

- x_n y y_n representan las densidades de las poblaciones presas y z_n la densidad de la población depredadora,

- a, b y α son las tasas de crecimiento para cada población,
- q_{21} es el parámetro de migración de la población x a y .

4.4. Región de supervivencia

Para garantizar la supervivencia de las poblaciones vamos a demostrar que existe una región en el cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ que es invariante bajo el sistema (4.8).

Sean $x_n, y_n, z_n \in [0, 1]$, queremos determinar las condiciones para que $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} \in [0, 1]$.

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{a(1 - q_{21})x}{2} \left(1 - \frac{(1 - q_{21})x}{2} \right)$$

cuyo máximo se tiene en $f\left(\frac{1}{1 - q_{21}}\right) = \frac{a}{4}$, así

$$0 \leq \frac{a(1 - q_{21})x}{2} \left(1 - \frac{(1 - q_{21})x}{2} \right) (1 - z^2) \leq \frac{a}{4} (1 - z^2) \leq \frac{a}{4}, \quad (4.9)$$

entonces $0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$ si $0 \leq a \leq 4$.

Por otra parte si consideramos la función

$$g(x, y) = \left(1 - \frac{q_{21}x + y}{2} \right) (q_{21}x + y)$$

que tiene como valor máximo $\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$, entonces

$$0 \leq \frac{b}{2} g(x, y) (1 - z^2) \leq \frac{b}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (1 - z^2) \leq \frac{b}{4} \leq 1$$

si $0 \leq b \leq 4$.

Por último consideremos la función

$$h(z) = z(1 - z)$$

que tiene como valor máximo $\frac{1}{4}$ en $z = \frac{1}{2}$, entonces

$$0 \leq \alpha \frac{(x + y)}{x + y + 1} h(z) \leq \alpha \frac{(x + y)}{x + y + 1} \left(\frac{1}{4} \right) \leq \frac{\alpha}{4} \leq 1$$

si $0 \leq \alpha \leq 4$.

En resumen, se tiene el siguiente resultado

Proposición 4.4.1 Si $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq q_{21} \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq 4$, entonces $(x_n, y_n, z_n) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

4.5. Análisis de estabilidad

Los puntos fijos del modelo (4.8) se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$$\frac{a(1-q_{21})x}{2} \left(1 - \frac{(1-q_{21})x}{2}\right) (1-z^2) = x \quad (4.10)$$

$$\frac{b}{2} \left(1 - \frac{q_{21}x+y}{2}\right) (q_{21}x+y) (1-z^2) = y \quad (4.11)$$

$$\frac{\alpha z(x+y)(1-z)}{x+y+1} = z, \quad (4.12)$$

de la ecuación (4.10) se obtiene $x = 0$ o $x = -\frac{2(aq_{21}z^2 - aq_{21} - az^2 + a - 2)}{a(q_{21}-1)^2(z^2-1)}$. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (4.11) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}b \left(1 - \frac{y}{2}\right) y (1-z^2) - y = 0 \quad (4.13)$$

despejando y de la ecuación (4.13) se obtiene $y = 0$ o $y = \frac{4}{b(z^2-1)} + 2$.

Si $x = 0$ y $y = \frac{4}{b(z^2-1)} + 2$ de la ecuación (4.12) se obtiene

$$\frac{2\alpha bz^4 + (\beta b + 2b - 2\alpha b)z^3 + (4\alpha - 2\alpha b)z^2 + (2\alpha b - \beta b - 2b - 4\alpha + 4)z}{b(\beta + 2)z^2 - b(\beta + 2) + 4} = 0$$

$$\Rightarrow z(2\alpha bz^3 + (\beta b + 2b - 2\alpha b)z^2 + (4\alpha - 2\alpha b)z + (2\alpha b - \beta b - 2b - 4\alpha + 4)) = 0, \quad (4.14)$$

usando Mathematica para resolver la ecuación (4.14) se obtienen los siguientes puntos fijos

- $F_0 = (0, 0, 0)$
- $F_1 = (0, 2 - \frac{4}{b}, 0)$
- $F_2 = (0, \frac{4}{b(z^{*2}-1)} + 2, z^*)$, donde z^* es una raíz positiva del polinomio de grado tres dado en la ecuación (4.14). $F_2 \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ si $2 < \alpha < 4$, $\frac{4\alpha-4}{2\alpha-3} < b < 4$.

Por otra parte, para determinar el punto fijo de coexistencia despejamos x de la ecuación (4.10), donde se obtiene

$$x = \frac{2a(q_{21}-1)(z^2-1)-4}{a(q_{21}-1)^2(1-z^2)}. \quad (4.15)$$

Al sustituir x en la ecuación (4.12) y despejando y , se tiene que

$$y = \frac{a(q_{21}-1)(z^2-1)(\beta(q_{21}-1)-2\alpha(z-1)-2)+4\alpha(z-1)+4}{a(q_{21}-1)^2(z^2-1)(\alpha(1-z)-1)}.$$

Finalmente, al sustituir x y y en la ecuación (4.11) se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
& 8a^2b(q_{21}-1)^2\alpha^2z^6 - 2a^2b(q_{21}-1)^2\alpha(8\alpha-11)z^5 - a(q_{21}-1)(8a\alpha^2+24b\alpha^2+ab(q_{21}-1)(22\alpha+8\alpha^2 \\
& -15))z^4 + 4a(q_{21}-1)\alpha(2b(6\alpha-7)+a(q_{21}-5+4\alpha+b(-1+q_{21})(8\alpha-11)))z^3 + 8a(2\alpha^2 \\
& +b(q_{21}-1)(7\alpha-4)) - 2a^2(q_{21}-1)(6-2q_{21}+2(q_{21}-5)\alpha+b(q_{21}-1)(15-22\alpha+4\alpha^2))z^2 \\
& - 2\alpha(16b(\alpha-1)+4a(4(\alpha-1)+b(q_{21}-1)(6\alpha-7))+a^2(q_{21}-1)(2(q_{21}+4\alpha-5)+b(q_{21}-1)(8\alpha \\
& -11)))z + 16b(\alpha-1)^2 + 8a(\alpha-1)(2(\alpha-1)+b(q_{21}-1)(3\alpha-4))+a^2(q_{21}-1)(4(\alpha-1)(q_{21}+2\alpha \\
& -3)+b(q_{21}-1)(2\alpha-3)(4\alpha-5))+16b\alpha^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Para resolver la ecuación (4.16) usamos Mathematica y en consecuencia se tiene que el punto fijo de coexistencia es el siguiente:

$$F_3 = \left(\frac{2a(1-q_{21})(1-z^{**2}) - 4a(1-q_{21})(1-z^{**2})(2\alpha+q_{21}-2\alpha z^{**}-3) + 4\alpha(z^{**}-1) + 4}{a(q_{21}-1)^2(1-z^{**2})}, \frac{a(1-q_{21})(1-z^{**2})(2\alpha+q_{21}-2\alpha z^{**}-3) + 4\alpha(z^{**}-1) + 4}{a(q_{21}-1)^2(1-z^{**2})(\alpha(z^{**}-1)+1)}, z^{**} \right),$$

donde z^{**} es una raíz positiva del polinomio de grado seis dado en la ecuación (4.16).

$$F_3 \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \text{ si } \alpha > \frac{5q_{21}-3}{4q_{21}-2}, 0 < q_{21} < \frac{1}{2}, \frac{4(1-\alpha)}{(4\alpha-5)(q_{21}-1)} < a < 2 \text{ y } b > \frac{4a(1-\alpha)(a(q_{21}-1)(2\alpha+q_{21}-3)+4(\alpha-1))}{(a(2\alpha-3)(q_{21}-1)+4(\alpha-1))(a(4\alpha-5)(q_{21}-1)+4(\alpha-1))}.$$

Con la finalidad de analizar la estabilidad de los puntos fijos calculamos la matriz Jacobiana del sistema (4.8).

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(q_{21}-1)(z^2-1)((q_{21}-1)x+1) & 0 & \frac{1}{2}a(q_{21}-1)xz((q_{21}-1)x+2) \\ \frac{1}{2}bq_{21}(z^2-1)(q_{21}x+y-1) & \frac{1}{2}b(z^2-1)(q_{21}x+y-1) & \frac{1}{2}bz(q_{21}x+y-2)(q_{21}x+y) \\ -\frac{\alpha\beta(z-1)z}{(\beta+x+y)^2} & -\frac{\alpha\beta(z-1)z}{(\beta+x+y)^2} & \frac{\alpha(2z-1)(x+y)}{\beta+x+y} \end{pmatrix}.
\tag{4.17}$$

Proposición 4.5.1 ■ Si $0 < q_{21} \leq \frac{1}{2}, 0 < b < 2, 0 < \alpha < 4$ y $0 < a < \frac{2}{1-q_{21}}$, entonces F_0 es localmente asintóticamente estable.

■ Si $0 < a < \frac{2}{1-q_{21}}, 0 < q_{21} < \frac{1}{2}, 0 < \alpha < \frac{3b-2}{2b-4}$ y $\frac{14}{5} < b < 4$, entonces F_1 es localmente asintóticamente estable.

Demostración.

4. MODELO DEPREDADOR-PRESA CON MIGRACIÓN

- Evaluando la matriz Jacobiana (4.17) en F_0 se obtiene

$$J(F_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) & 0 & 0 \\ \frac{bq_{21}}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

cuyos valores propios son $\lambda_{01} = \frac{1}{2}a(1 - q_{21})$, $\lambda_{02} = \frac{b}{2}$ y $\lambda_{03} = 0$, para determinar la estabilidad local del punto fijo F_0 basta con determinar las condiciones sobre los parámetros para que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} & |\lambda_{01}| < 1 \text{ y } |\lambda_{02}| < 1 \\ \Rightarrow & \left| \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) \right| < 1 \text{ y } \left| \frac{b}{2} \right| < 1 \\ \Rightarrow & \left| \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) \right| < 1 \text{ y } 0 < b < 2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

dado que $0 < q_{21} < 1$, entonces de (4.19) se tiene que $0 < a < \frac{2}{1 - q_{21}}$, entonces F_0 es localmente asintóticamente estable.

- Ahora evaluamos la matriz Jacobiana (4.17) en F_1

$$J(F_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}q_{21}(4 - b) & 2 - \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\alpha(b-2)}{3b-4} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

los valores propios de $J(F_1)$ son $\lambda_{11} = \frac{1}{2}a(1 - q_{21})$, $\lambda_{12} = 2 - \frac{b}{2}$ y $\lambda_{13} = \frac{2\alpha(b-2)}{3b-4}$. Como queremos que el punto fijo F_1 sea localmente estable, se debe cumplir

$$|\lambda_{11}| < 1, |\lambda_{12}| < 1 \text{ y } |\lambda_{13}| < 1,$$

es decir

$$\left| \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) \right| < 1, \left| 2 - \frac{b}{2} \right| < 1 \text{ y } \left| \frac{2\alpha(b-2)}{3b-4} \right| < 1.$$

Sabemos que $0 < a < 4$, $2 < b < 4$, $0 < \alpha < 4$ y $0 < q_{21} < 1$, entonces

$$\left| \frac{1}{2}a(1 - q_{21}) \right| < 1 \text{ si } 0 < a < \frac{2}{1 - q_{21}} \text{ y } 0 < q_{21} < \frac{1}{2}$$

$$\left| 2 - \frac{b}{2} \right| < 1 \text{ si } 2 < b < 4$$

$$\left| \frac{2\alpha(b-2)}{3b-4} \right| < 1 \text{ si } 0 < \alpha < \frac{3b-2}{2b-4} \text{ y } \frac{14}{5} < b < 4,$$

por lo tanto el punto fijo F_1 es localmente asintóticamente estable si

$$0 < a < \frac{2}{1-q_{21}}, 0 < q_{21} < \frac{1}{2}, 0 < \alpha < \frac{3b-2}{2b-4} \text{ y } \frac{14}{5} < b < 4$$

■.

Evaluando directamente el punto fijo F_2 en la matriz jacobiana del sistema y usando la condición de Jury obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.5.2 *El punto fijo F_2 es localmente asintóticamente estable si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} |A_1 + A_3| &< 1 + A_2, \\ |A_1 - 3A_3| &< 3 - A_2, \\ A_3^2 + A_2 - A_1A_3 &< 1, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2}a(q_{21}-1)\left((z^*)^2-1\right) - \frac{2(-\alpha+\alpha z^*+2)}{-2\alpha+2\alpha z^*+3} + \frac{1-2z^*}{z^*-1}, \\ A_2 &= \frac{a(q_{21}-1)\left((z^*)^2-1\right)(-\alpha+\alpha z^*+2)}{-2\alpha+2\alpha z^*+3} + \frac{1}{2}a(q_{21}-1)(z^*+1)(2z^*-1) \\ &\quad - \frac{2(z^*)^2(-\alpha+\alpha z^*+1)}{\alpha(z^*-1)^2(z^*+1)} + \frac{2(2z^*-1)(-\alpha+\alpha z^*+2)}{(z^*-1)(-2\alpha+2\alpha z^*+3)}, \\ A_3 &= -\frac{a(q_{21}-1)\left((2-\alpha)\alpha-3(\alpha^2-\alpha+1)(z^*)^2+(\alpha-1)\alpha(z^*)^3+\alpha(3\alpha-4)z^*\right)}{\alpha(z^*-1)(-2\alpha+2\alpha z^*+3)}. \end{aligned}$$

Para mostrar que las condiciones (4.21) son no vacías presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5.1 *Si $a \in [0, 4]$, $b = 3.81495$, $q_{21} \in [0, 1]$ y $\alpha = 3.2125$ el sistema (4.8) tiene como punto fijo $F_2 = (0, 0.835178730106757, 0.316000466823659)$. El polinomio característico de la matriz Jacobiana (4.17) en el punto fijo F_2 es*

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_2\lambda + A_1,$$

4. MODELO DEPREDADOR-PRESA CON MIGRACIÓN

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= a(0.122939q_{21} - 0.122939), \\ A_2 &= a(0.369513 - 0.369513q_{21}) + 0.273153, \\ A_3 &= a(0.450072q_{21} - 0.450072) - 0.821009. \end{aligned}$$

Sustituyendo A_1, A_2 y A_3 en las desigualdades (4.21) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |0.57301a - 0.57301aq_{21} + 0.821009| &< 1.27315 + a(0.369513 - 0.369513q_{21}) \\ |1.22728a - 1.22728aq_{21} + 2.46303| &< 2.72685 + a(0.369513q_{21} - 0.369513) \\ 0.947209 + a(1.20947 - 1.20947q_{21}) + 0.257896a^2(1 - q_{21})^2 &< 1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

al resolver el sistema de desigualdades (4.22) se obtienen las siguientes condiciones sobre los parámetros a y q_{21} :

- $0 < q_{21} \leq 0.989188$ y $0 < a < \frac{0.0432491}{1 - q_{21}}$
- $0 < a < 4$ y $0.989188 < q_{21} < 1$,

por la proposición 4.5.1 el punto fijo F_2 es localmente asintóticamente estable. En la figura 4.1 se puede observar un retrato fase del sistema con las condiciones obtenidas en este ejemplo.

Evaluando directamente el punto fijo F_3 en la matriz jacobiana del sistema y usando la condición de Jury obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.5.3 *El punto fijo F_3 es localmente asintóticamente estable si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} |B_1 + B_3| &< 1 + B_2, \\ |B_1 - 3B_3| &< 3 - B_2, \\ B_3^2 + B_2 - B_1B_3 &< 1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde B_1, B_2 y B_3 se encuentran en el apéndice F.

En el siguiente ejemplo se puede observar que las condiciones (4.23) son no vacías.

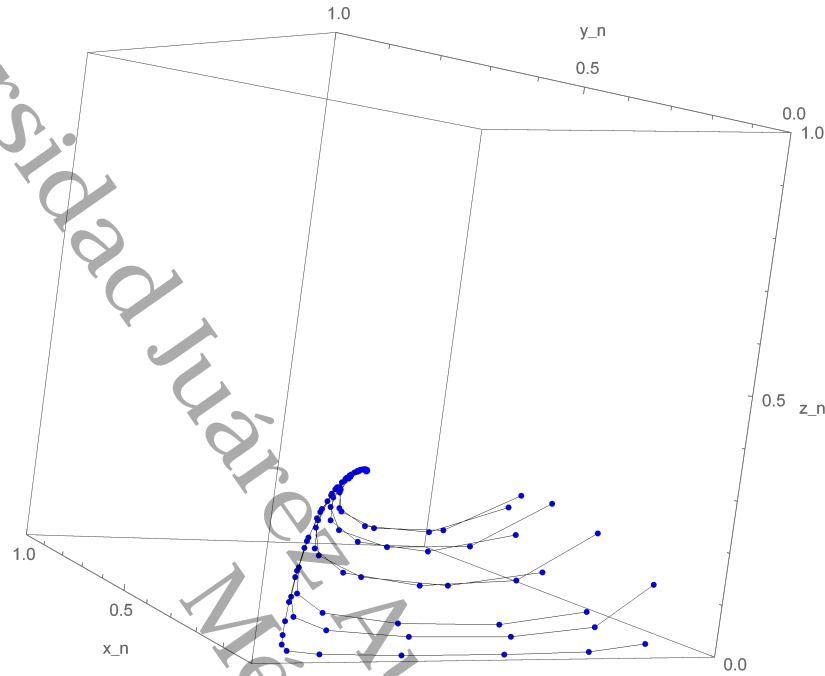


Figura 4.1: Retrato fase del sistema (4.8) para $a = 0.12$, $b = 3.81495$, $\alpha = 3.2125$ y $q_{21} = 0.7$.

Ejemplo 4.5.2 Sea $a = 3.5$, $b = 2.6$, $q_{21} = 0.2$ y $\alpha = 3.5$, el sistema (4.8) tiene como punto fijo de coexistencia $F_3 = (0.421067359568706, 0.422421584239531, 0.375556572888407)$. El polinomio característico $Q(\lambda) = \lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3$ de la matriz Jacobiana (4.17) en el punto fijo F_3 es $Q(\lambda) = \lambda^3 - 1.74695\lambda^2 + 1.1549\lambda - 0.285444$, así $B_1 = -1.74695$, $B_2 = 1.1549$ y $B_3 = -0.285444$. Al sustituir los valores de B_1, B_2 y B_3 en el sistema de desigualdades (4.23), estas se cumplen. Así que por la proposición 4.5.3 el punto fijo F_3 es localmente asintóticamente estable. A continuación, en la figura 4.2 podemos observar el retrato fase del sistema (4.8) con los valores de los parámetros propuestos en este ejemplo.

Ejemplo 4.5.3 Sea $a = 3.5$, $b = 2.6$, $q_{21} = 0.2$ y $\alpha = 5$, el sistema (4.8) tiene como punto fijo de coexistencia $F_3 = (0.421067359568706, 0.422421584239531, 0.375556572888407)$. El polinomio característico $Q(\lambda) = \lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3$ de la matriz Jacobiana (4.17) en el punto fijo F_3 es $Q(\lambda) = \lambda^3 - 1.74695\lambda^2 + 1.1549\lambda - 0.285444$, así $B_1 = -1.74695$, $B_2 = 1.1549$ y $B_3 =$

4. MODELO DE PREDADOR-PRESA CON MIGRACIÓN

-0.285444 . Al sustituir los valores de B_1, B_2 y B_3 en el sistema de desigualdades (4.23), estas se cumplen. Así que por la proposición 4.5.3 el punto fijo F_3 es localmente asintóticamente estable. A continuación, en la figura 4.2 podemos observar el retrato fase del sistema (4.8) con los valores de los parámetros propuestos en el ejemplo 4.5.3.

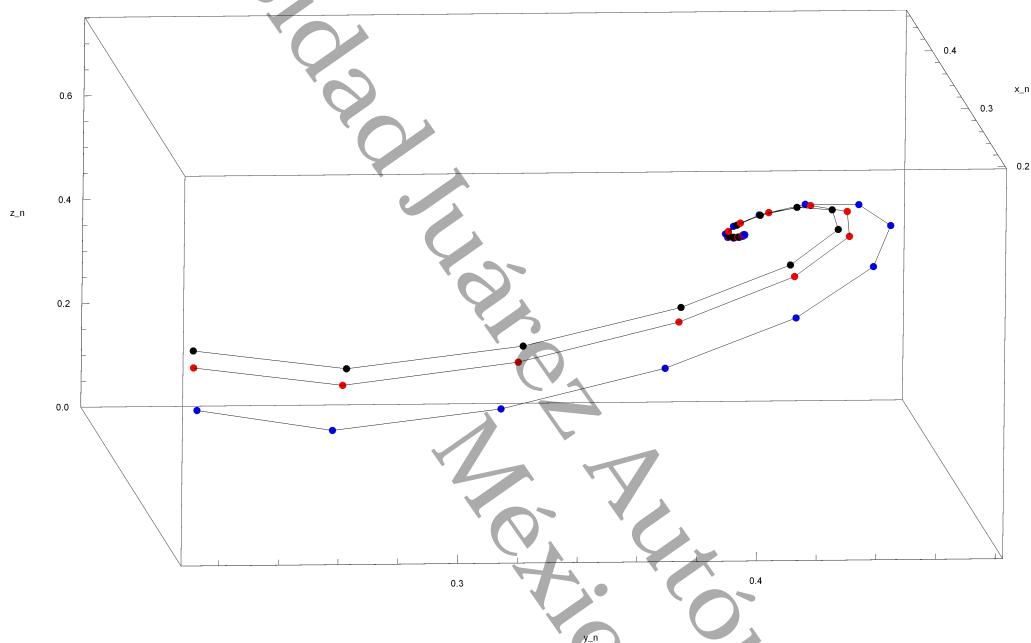


Figura 4.2: Retrato fase del sistema (4.8) con valores iniciales (0.5, 0.6, 0.8), (0.7, 0.6, 0.8) y (0.8, 0.6, 0.8)

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo analizamos un modelo depredador-presa a tiempo discreto, el cual considera migración entre las presas, con la finalidad de determinar el efecto de la migración en la coexistencia de las poblaciones. Iniciamos el estudio con los modelos (1.1)-(1.3), donde se considera únicamente la depredación. En este caso determinamos condiciones en los parámetros para la coexistencia de las dos poblaciones y para que el sistema presente una bifurcación doblamiento de periodo o de Neimark-Sacker. En particular, esta última muestra que la coexistencia de las dos poblaciones se puede dar alrededor de una órbita cuya cerradura es una curva de Jordan. En el caso del modelo (3.19), donde la depredación se da con una respuesta funcional Holling tipo II, mostramos que existe una región invariante donde el sistema tiene un punto de coexistencia estable. Además, mostramos condiciones en las que el sistema presenta caos en el sentido de Marotto, por lo que el crecimiento de la presa y el depredador pueden presentar un comportamiento caótico. En las simulaciones numéricas mostramos algunos de estos comportamientos dinámicos en el sistema.

Posteriormente, analizamos el modelo (1.4) que considera solo la migración entre las dos poblaciones. En este caso, como no hay depredación las poblaciones coexisten y el sistema no presenta bifurcación doblamiento de periodo o de Neimark-Sacker. Finalmente, analizamos el modelo depredador-presa con migración (1.5) y determinamos una región invariante para el sistema. Además, determinamos condiciones en los parámetros para que se de la coexistencia de las tres poblaciones. En particular, mostramos que la migración beneficia a la coexistencia de las poblaciones.

Apéndice A

Apéndice

Apéndice A. Expresión de $f_1(u, \bar{e}, v)$ y $f_2(u, \bar{e}, v)$ para el mapeo (3.36).

$$\begin{aligned} f_1(u, \bar{e}, v) = & (a(-2(-3+a)(1+c)^2 + (1+c)(-5+a+(-1+a)c)d - (3+a+(-1+a)c)d^2)u^2)/ \\ & (d(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) - (a(1+c)(1+c-d)(-1+c^2 - \\ & (3+c)d)uv)/(d^2(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) - (a^2(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2 + \\ & (3+c)d)^2u^2v)/(d^3((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) - (2(-3+a)a(1+c)(2+2c - \\ & d)u\bar{e})/(d(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) - (2(-3+a)a^2(1+c)^2(3+3c-2d)(-1 + \\ & c^2 - (3+c)d)u^2\bar{e})/(d^2((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) + (-((a(1+c)^2(-1+c^2 - \\ & (3+c)d))/d^2(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) - (a^2(1+c)^2(2+2c-d)(1-c^2 + \\ & (3+c)d)^2u)/(d^3((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) - (a^3(1+c)^3(3+3c-2d)(-1 + \\ & c^2 - (3+c)d)^3u^2)/(d^4(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d^3))v\bar{e} - (2(-3+a)a(1+c) \\ &)^2\bar{e}^2)/(d(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) - (2(-3+a)a^2(1+c)^2(3+3c-d)(-1 + \\ & c^2 - (3+c)d)u\bar{e}^2)/(d^2((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) - (6(-3+a)a^3(1+c)^3(2+2c - \\ & d)(1-c^2 + (3+c)d)^2u^2\bar{e}^2)/(d^3(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d^3)) + (-((a^2(1+c)^3(1 - \\ & c^2 + (3+c)d)^2)/d^3((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) - (a^3(1+c)^3(3+3c-d)(-1 + \\ & c^2 - (3+c)d)^3u)/(d^4(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d^3)) - (3a^4(1+c)^4(2+2c-d)(1 - \\ & c^2 + (3+c)d)^4u^2)/(d^5((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^4))v\bar{e}^2 + \mathbf{O}((|X| + |\mu| + |Y|)^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(u, \bar{e}, v) = & -((2(-3+a)a(1+c)(1+c-d)u^2)/((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d)) + \\ & (a(1+c)(1+c-d)(-1+c^2 - (3+c)d)uv)/(d(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) + \\ & (a^2(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2 + (3+c)d)^2u^2v)/(d^2((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) - \\ & (2(-3+a)a(1+c)(2+2c-d)u\bar{e})/((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d) + (2(-3+a)a^2(1+c) \\ &)^2(3+3c-2d)(-1+c^2 - (3+c)d)u^2\bar{e})/(d((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d^2)) + ((a(1+c) \\ &)^2(-1+c^2 - (3+c)d))/d(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)) + (a^2(1+c)^2(2+2c - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d)(1-c^2+(3+c)d^2u)/(d^2((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^2)+(a^3(1+c)^3(3+3c- \\
& 2d)(-1+c^2-(3+c)d^3u^2)/(d^3(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d^3))v\bar{e}-(2(-3+ \\
& a)a(1+c)^2\bar{e}^2)/((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)+(2(-3+a)a^2(1+c)^2(3+3c-d)(-1+ \\
& c^2-(3+c)d)a\bar{e}^2)/(d((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^2)+(6(-3+a)a^3(1+c)^3(2+2c- \\
& d)(1-c^2+(3+c)d^2u^2\bar{e}^2)/(d^2(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d^3))+((a^2(1+c)^3(1- \\
& c^2+(3+c)d^2)/((d^2((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^2)+(a^3(1+c)^3(3+3c-d)(-1+ \\
& c^2-(3+c)d^3u)/(d^3(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d^3))+ (3a^4(1+c)^4(2+2c-d)(1- \\
& c^2+(3+c)d^4u^2)/(d^4((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^4))v\bar{e}^2+\mathbf{O}(|X|+|\mu|+|Y|)^3).
\end{aligned}$$

Apéndice B. Expresión de $F_1(X, \mu, Y)$ y $F_2(X, \mu, Y)$ para el mapeo (3.35).

$$\begin{aligned}
F_1(X, \mu, Y) = & (a(1-c^2+(3+c)d)^2((-3+a)(-1+c^2)^2-2(-1+a+(-3+a)c)(-1+c^2)d+ \\
& (9+a(1+c)^2-c(2+3c)d^2)X^2)/((-3+a)(1+c-d)d^2((1+c)(-1+a+(-5+a)c)-(-9+a+(-5+ \\
& a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)+(a(1+c)((7+a(-3+c)-c)(-1+c)^2(1+c)^3-(-1+ \\
& c)(1+c)^2(15-11a+12c+3(-1+a)c^2)d+3(-1+c)(1+c)(3+c)(3+a+(-1+a)c)d^2-(3+c)^2(3+ \\
& a+(-1+a)c)d^3)XY)/(2d^2(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+ \\
& c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)-(a^2(-1+c)(1+c)^2(-2(2+c(3+c-d))+a(1+c)(1+c-d))(-1+c^2- \\
& (3+c)d)^3X^2Y)/((-3+a)d^4(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+ \\
& c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^2)+((-3+a)a(1+c)^3(1+c-d)((-2+a-c)(-1+c^2)-2(-1+c)(2+ \\
& c)d+(a+c)d^2)Y^2)/(2d^2(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+ \\
& c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)-(a^2(-1+c)(1+c)^3(1+c-d)(1-c^2+(3+c)d)^2((1+c)(-7+a+c+ac)- \\
& (9+a+c+ac)d)XY^2)/(4d^4(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+ \\
& c^2)-(3+a+(-1+a)c)d^2)-(a(1+c)(-1+c^2-(3+c)d)^3X\mu)/(d^2(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+ \\
& (-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)-(a^2(-1+c)(1+c)^2(1-c^2+(3+ \\
& c)d)^4((1+c)(-17-c+a(5+c))-2(a+c)d-(-3+a)d^2)X^2\mu)/((-3+a)d^4(-(-1+c)(-1+a+(-5+ \\
& a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+ \\
& a+c-ac)d)-((-3+a)a(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2+(3+c)d)^2Y\mu)/(2d^2(-(-1+c)(-1+a+(-5+ \\
& a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)-(a^2(-1+c)(1+c)^2(1+c- \\
& d)(-1+c^2-(3+c)d)^3(-2(1+c)^2(17+c)+(1+c)^2d+(-3+c)d^2+a(1+c)(2(1+c)(5+c)-(5+c)d- \\
& d^2))XY\mu)/(2d^4(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+ \\
& (-1+a)c)d^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)-(a^3(-1+c)(1+c)^3(-2(2+c(3+c-d))+a(1+ \\
& c)(1+c-d))(3+3c-2d)(-1+c^2-(3+c)d)^5X^2Y\mu)/((-3+a)d^6(-(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+
\end{aligned}$$

A. APÉNDICE

$$\begin{aligned}
& a+(-5+a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d))- \\
& ((-3+a)a^2(-1+c)(1+c)^3(1+c-d)^2(1-c^2+(3+c)d)^2((1+c)^2(-17-c+a(5+c))- \\
& (1+c)(-1-3c+a(3+c))d-2(3+c)d^2)Y^2\mu)/(4d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+ \\
& c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d))-a^3(-1+c)(1+c)^4(3+3c-2d)(1+ \\
& c-d)(1-c^2+(3+c)d)^4((1+c)(-7+a+c+ac)-(9+a+c+ac)d)XY^2\mu)/(4d^6(-1+c)(-1+a+ \\
& (-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2)+ \\
& (-9+a+c-ac)d))+(2(-3+a)a(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2+(3+c)d)^2\mu^2)/(d(-1+c)(-1+a+(-5+a) \\
& a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)-(a^2(-1+c)(1+c)^2(1+c- \\
& d)(1-c^2+(3+c)d)^4(6(-3+a)(1+c)^2+(-1+a)(-1+c^2)d-(3+a+(-1+a)c)d^2)X\mu^2)/(d^4(-1+ \\
& c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a) \\
& a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)-(a^3(-1+c)(1+c)^3(1-c^2+(3+c)d)^6(6(1+c)^2(-7-2c+a(2+ \\
& c))-2(1+c)(-17-7c+4a(2+c))d+(1+a)(3+c)d^2+(-3+a)d^3)X^2\mu^2)/((-3+a)d^6(-1+c)(-1+ \\
& a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+ \\
& c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)-((-3+a)a^2(-1+c)(1+c)^3(1+c-d)^2(-1+c^2-(3+c)d)^3(6(-3+a)(1+ \\
& c)^2+(-1+a)(-1+c^2)d-(3+a+(-1+a)c)d^2)Y\mu^2)/(2d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+ \\
& (-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)- \\
& (a^3(-1+c)(1+c)^3(1+c-d)(-1+c^2-(3+c)d)^5(3(1+c)^3(-3(9+c)+a(7+3c))- \\
& (1+c)^2(-41+29a+13(-1+a)c)d+(1+c)(5+7a+3(-1+a)c)d^2+(3+a+(-1+a)c)d^3)XY\mu^2)/(2d^6(-1+ \\
& c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a) \\
& a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)-(3a^4(-1+c)(1+c)^4(-2(2+c(3+c-d))+a(1+c)(1+c-d))(1+ \\
& c-d)(2+2c-d)(-1+c^2-(3+c)d)^7X^2Y\mu^2)/((-3+a)d^8(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+ \\
& (-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^4((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)- \\
& ((-3+a)a^3(-1+c)(1+c)^4(1+c-d)^2(1-c^2+(3+c)d)^4(3(1+c)^3(-13+c+a(3+c))- \\
& (1+c)^2(-7+c+a(13+5c))d+2(1+c)(1-2c+a(2+c))d^2+2(3+c)d^3)Y^2\mu^2)/(4d^6(-1+c)(-1+a+(-5+a) \\
& a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+ \\
& a+c-ac)d)^2)-(3a^4(-1+c)(1+c)^5(1+c-d)^2(2+2c-d)(1-c^2+(3+c)d)^6((1+c)(-7+a+c+ \\
& ac)-(9+a+c+ac)d)XY^2\mu^2)/(4d^8(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a) \\
& a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^4((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)+\mathcal{O}(|X|+|\mu|+|Y|)^3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(X, \mu, Y) = & -((2a(1-c^2+(3+c)d)^2(-(-2+a-c)(-1+c)(1+c)^2+(1+c)(3+a+(-7+a)c- \\
& 2c^2)d+(3+c)d^2)X^2)/((-3+a)(1+c-d)d^2((1+c)(-1+a+(-5+a)c)-(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d))) - (a(1+c)(-1+c^2-(3+c)d)((7+a(-3+c)- \\
& c)(1+c)^2(2-a+c)-2(7+a(-3+c)-c)(1+c)(3+c)d+(a+c)(3+a+(-1+a)c)d^2)XY)/((-3+a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a)d^2(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d(-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d) \\
& + (2a^2(1+c)^2(-2(2+c(3+c-d))+a(1+c)(1+c-d))(-1+c^2-(3+c)d)^3((-2+a-c)(1+c) \\
& + (6-a+c)d)X^2Y)/((-3+a)^2(1+c-d)d^4((1+c)(-1+a+(-5+a)c)-(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2+(a(1+c)^2(-2(1+c)^3(2-a+c)^2+(1+c)^2(41+a^2(3+c) \\
& +c(37+6c)-2a(13+7c))d-2(1+c)(30+a^2(1+c)-4a(3+2c)+c(25+3c))d^2+(-6a(1+c)+a^2(1+c) \\
& +(9+c)(3+2c)d^3)Y^2)/(2d^2(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d(-(-1+a)(-1+c^2) \\
& +(3+a+(-1+a)c)d)-(a^2(1+c)^3(1-c^2+(3+c)d)^2((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d) \\
& ((1+c)(-7+a+c+ac)-(9+a+c+ac)d)XY^2)/(2(-3+a)d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) \\
& +(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2-(2a(1+c)(1-c^2+(3+c)d)^2 \\
& ((-2+a-c)(1+c)+(a+c)d)X\mu)/((-3+a)d^2(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)+(2a^2(1+c)^2(1-c^2+(3+c)d)^4((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d) \\
& ((1+c)(-17-c+a(5+c))-2(a+c)d-(-3+a)d^2)X^2\mu)/((-3+a)^2(1+c-d)d^4((1+c)(-1+a+(-5+a)c) \\
& -(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d) \\
& -a(1+c)^2(1+c-d)(-1+c^2-(3+c)d)((-2+a-c)(1+c)+(a+c)d)Y\mu)/(d^2(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) \\
& +(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)-(a^2(1+c)^2(-1+c^2-(3+c)d)^3 \\
& ((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d)(-2(1+c)^2(17+c)+(1+c)^2d+(-3+c)d^2+a(1+c)(2(1+c)(5+c) \\
& -(5+c)d-d^2))XY\mu)/((-3+a)d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d) \\
& -(2a^3(1+c)^3(-2(2+c(3+c-d))+a(1+c)(1+c-d))(3+3c-2d)(-1+c^2-(3+c)d)^5 \\
& ((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d)X^2Y\mu)/((-3+a)^2(1+c-d)d^6((1+c)(-1+a+(-5+a)c) \\
& -(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d) \\
& -a^2(1+c)^3(1+c-d)(1-c^2+(3+c)d)^2((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d)((1+c)^2(-17-c+a(5+c) \\
& -(1+c)(-1-3c+a(3+c))d-2(3+c)d^2)Y^2\mu)/(2d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d) \\
& -(a^3(1+c)^4(3+3c-2d)(1-c^2+(3+c)d)^4((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d)((1+c)(-7+a+c+ac) \\
& -(9+a+c+ac)d)XY^2\mu)/(2(-3+a)d^6(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& (-(-1+a)(-1+c^2)+(3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d) \\
& -(2(-3+a)a(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2+(3+c)d)^2\mu^2)/(d(-1+c)(-1+a+(-5+a)c)+(-9+a+(-5+a)c)d) \\
& ((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2)-(2a^2(1+c)^2(1-c^2+(3+c)d)^4((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d) \\
& (6(-3+a)(1+c)^2+(-1+a)(-1+c^2)d-(3+a+(-1+a)c)d^2)X\mu^2)/((-3+a)d^4(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) \\
& +(-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2)-(3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+c^2)+(-9+a+c-ac)d)^2 \\
& -(2a^3(1+c)^3(1-c^2+(3+c)d)^6((-2+a-c)(1+c)+(6-a+c)d)(6(1+c)^2(-7-2c+a(2+c)) \\
& -2(1+c)(-17-7c+4a(2+c))d+(1+a)(3+c)d^2+(-3+a)d^3)X^2\mu^2)/((-3+a)^2(1+c-d)d^6((1+c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c)(-1+a+(-5+a)c) - (-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a) \\
 & a)(-1+c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) - (a^2(1+c)^3(1+c-d)(-1+c^2 - (3+c)d)^3((-2+a-c)(1+c) + \\
 & (6-a+c)d)(6(-3+a)(1+c)^2 + (-1+a)(-1+c^2)d - (3+a+(-1+a)c)d^2)Y\mu^2)/(d^4(-1+c)(-1+ \\
 & a+(-5+a)c) + (-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d)^2((-1+a)(-1+ \\
 & c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) - (a^3(1+c)^3(-1+c^2 - (3+c)d)^5((-2+a-c)(1+c) + (6-a+c)d)(3(1+ \\
 & c)^3(-3(9+c)+a(7+3c)) - (1+c)^2(-41+29a+13(-1+a)c)d + (1+c)(5+7a+3(-1+a)c)d^2 + (3+ \\
 & a+(-1+a)c)d^3)XY\mu^2)/((-3+a)d^6(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) + (-9+a+(-5+a)c)d)(-(-1+a) \\
 & a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d^3)((-1+a)(-1+c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) - (6a^4(1+c)^4(-2(2+ \\
 & c(3+c-d)) + a(1+c)(1+c-d))(2+2c-d)(-1+c^2 - (3+c)d)^7((-2+a-c)(1+c) + (6-a+ \\
 & c)d)X^2Y\mu^2)/((-3+a)^2d^8(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) + (-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a)(-1+c^2) - \\
 & (3+a+(-1+a)c)d)^4((-1+a)(-1+c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) - (a^3(1+c)^4(1+c-d)(1-c^2 + (3+ \\
 & c)d)^4((-2+a-c)(1+c) + (6-a+c)d)(3(1+c)^3(-13+c+a(3+c)) - (1+c)^2(-7+c+a(13+5c))d + \\
 & 2(1+c)(1-2c+a(2+c))d^2 + 2(3+c)d^3)Y^2\mu^2)/(2d^6(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) + (-9+a+(-5+ \\
 & a)c)d)(-(-1+a)(-1+c^2) + (3+a+(-1+a)c)d)^3((-1+a)(-1+c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) - (3a^4(1+ \\
 & c)^5(1+c-d)(2+2c-d)(1-c^2 + (3+c)d)^6((-2+a-c)(1+c) + (6-a+c)d)((1+c)(-7+a+c+ac) - \\
 & (9+a+c+ac)d)XY^2\mu^2)/(2(-3+a)d^8(-1+c)(-1+a+(-5+a)c) + (-9+a+(-5+a)c)d)((-1+a) \\
 & a)(-1+c^2) - (3+a+(-1+a)c)d)^4((-1+a)(-1+c^2) + (-9+a+c-ac)d)^2) + \mathbf{O}(|X|+|\mu|+|Y|^3).
 \end{aligned}$$

Apéndice B1. Expresión de τ_1 , τ_2 y τ_3 .

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = & (-3+a)^2(-1+a)(-1+c)(1+c)^5(-1+a-5c+ac)d^2 - 2(-3+a)^2(1+c)^4(-7-9c+ \\
 & 10c^2+a(8-12c^2)+a^2(-1+c+2c^2))d^3 + 2(-3+a)^2(1+c)^3(-26-15c+15c^2+3a^2c(1+c)- \\
 & 2a(-5+6c+9c^2))d^4 - 2(-3+a)^2(1+c)^2(-33-11c+10c^2-4ac(4+3c)+a^2(1+3c+2c^2))d^5 + \\
 & (-3+a)^2(1+c)(-27-6c+5c^2-6a(1+c)^2+a^2(1+c)^2)d^6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & (3-4a+a^2)(-1+c)(1+c)^3(-1+a-5c+ac)^2d^2 - (-3+a)(1+c)^2(3a^3(-1+c)(1+ \\
 & c)^2+a^2(33+49c-17c^2-33c^3)+3(9+57c+55c^2-25c^3)+a(-57-217c-23c^2+105c^3))d^3 + \\
 & (-3+a)(1+c)(243+891c+285c^2-75c^3+3a^3(-1+c)(1+c)^2+a^2(57+65c-25c^2-33c^3)+ \\
 & a(-297-441c-7c^2+105c^3))d^4 - (-3+a)(9+a(-1+c)-c)(-9+a-5c+ac)^2d^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_3 = & -(-1+a)^2(-1+c)^2(1+c)^3(-1+a-5c+ac)d + (-1+a)(-1+c)(1+c)^2(a(30+20c-18c^2)+ \\
 & 3a^2(-1+c^2)+3(-9-28c+5c^2))d^2 - (1+c)(3a^3(-1+c)^2(1+c)+a^2(-57+29c+49c^2-21c^3)-
 \end{aligned}$$

$$3(81+99c-57c^2+5c^3)+a(297+15c-217c^2+33c^3))d^3+(9+a(-1+c)-c)^2(-9+a-5c+ac)d^4.$$

Apéndice C. Expresión de a^* para los conjuntos U_1 y U_3 .

$$a^* = \frac{\sqrt{(b-2)^3 b^2 (2(b-6)e^2 - 2(2b-5)(b-2)e + (b-2)^3) + b(b(b^2 - 2b(e+3) + 7e+13) - 4(2e+3)) + 4e+4}}{(b+2)e - b+2)^2}.$$

Apéndice C1. Expresión de $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}$, y h_{13} .

$$h_1 = -((a(1-c^2+3d+cd)^2(-3-3c^4-2d+6c^3d+9d^2-2cd(3+d)+a(1+c)^2(1-c+d)^2+c^2(6+2d-3d^2)))/((-3+a)(1+c-d)d^2(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))).$$

$$h_2 = (a^2(1-c^2+3d+cd)^4(-14+c^8+33d+63d^2-81d^3-81d^4-c^7(3+4d)+c^6(-25+3d+6d^2)+c^5(-27+84d+9d^2-4d^3)+c^2(5-135d+24d^2+144d^3)+c(-33+4d+153d^2+18d^3-54d^4)+c^4(33+99d-93d^2-15d^3+d^4)+c^3(63-84d-162d^2+34d^3+6d^4)+a^2(1+c)^3(-3+c^4-5d-5d^2-3d^3-c^3(4+3d)+c^2(2+5d+3d^2)+c(4+3d+2d^2-d^3))-a(1+c)(-13+c^7+c^6(1-4d)+4d+42d^2+36d^3+27d^4+3c^5(-5-4d+2d^2)+c^4(-15+36d+30d^2-4d^3)+c^3(27+48d-28d^3+d^4)+3c^2(9-12d-24d^2-16d^3+3d^4)+c(-13-36d-6d^2+12d^3+27d^4)))/((-3+a)^2(1+c-d)^2d^4(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)^2(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^2).$$

$$h_3 = -((a(1+c)(-1+c^2-3d-cd)^3)/((1+5c^2+c(6-5d)-a(1+c)(1+c-d)-9d)d^2(-1+c^2-a(-1+c)(1+c-d)+9d-cd))).$$

$$h_4 = (a^2(1+c)(1-c^2+3d+cd)^4(33-6c^{10}-412d+1752d^2-1014d^3-513d^4-486d^5+15c^9(-3+2d)+c^8(-519+142d-60d^2)+2c^7(-954+733d-59d^2+30d^3)-2c^6(1380-2861d+528d^2+24d^3+15d^4)+c^2(1302-7858d+7224d^2+468d^3+1080d^4-420d^5)+c^4(1950+2406d-7860d^2+210d^3+775d^4-38d^5)+c^5(-918+8502d-5082d^2-438d^3+107d^4+6d^5)-2c^3(-1278+3417d+693d^2-816d^3-739d^4+114d^5)-c(-315+3164d-6586d^2+1638d^3+273d^4+594d^5)+a^3(1+c)^4(-9+3c^5+c^4(3-10d)+8d-24d^2+14d^3+9d^4+2d^5+2c^3(3-9d+5d^2)+2c^2(3+d+18d^2)-c(9-18d+22d^2+30d^3+5d^4))-a^2(1+c)^2(-47+2c^8+c^7(23-10d)+168d-184d^2+258d^3-d^4-66d^5+c^6(89-90d+20d^2)+c^5(195-328d+130d^2-20d^3)+c^4(201-492d+472d^2-$$

$$80d^3 + 10d^4) + c(-191 + 492d - 582d^2 + 262d^3 + 185d^4 - 22d^5) - c^3(27 + 154d - 452d^2 + 338d^3 - 15d^4 + 2d^5) + c^2(-245 + 414d - 308d^2 - 274d^3 + 127d^4 + 2d^5) + a(1+c)(-71 + 8c^9 + c^8(61 - 40d) + 556d - 1048d^2 + 554d^3 - 489d^4 - 270d^5 + c^7(388 - 250d + 80d^2) - 2c^6(-556 + 630d - 195d^2 + 40d^3) + 2c^5(654 - 1585d + 767d^2 - 140d^3 + 20d^4) + c^2(-1216 + 3740d - 2282d^2 + 512d^3 + 644d^4 - 82d^5) + c^4(114 - 2996d + 2940d^2 - 922d^3 + 85d^4 - 8d^5) - 2c^3(610 - 449d - 730d^2 + 586d^3 - 171d^4 + 3d^5) - 2c(242 - 1261d + 1537d^2 - 758d^3 + 7d^4 + 177d^5)))/((-3+a)(1+c-d)d^4(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d)-9d+cd)(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)^2(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^3).$$

$$\begin{aligned} h_5 = & (a^3(1+c)(1-c^2+3d+cd)^6(116-4c^13-1744d+7995d^2-3078d^3-24948d^4+486d^5- \\ & 2187d^6+6c^12(5+4d)+c^11(1198-105d-60d^2)+c^10(6574-5034d+75d^2+80d^3)+c^9(13870- \\ & 30505d+8024d^2+150d^3-60d^4)+c^8(8080-70120d+53691d^2-5716d^3-300d^4+24d^5)+c(1342- \\ & 14797d+32276d^2+37116d^3-73170d^4+6237d^5-972d^6)+c^6(-29540+56308d+136050d^2- \\ & 129670d^3+16264d^4+286d^5-45d^6)+c^7(-15540-51170d+139852d^2-43990d^3+1374d^4+ \\ & 195d^5-4d^6)-c^5(13960-124182d+51804d^2+161338d^3-52534d^4+2241d^5+132d^6)+c^4(8510+ \\ & 60720d-206022d^2-12894d^3+72272d^4-8086d^5+207d^6)+c^3(13094-27605d-128288d^2+ \\ & 168062d^3+20474d^4-5919d^5+1620d^6)+c^2(6230-40154d+8211d^2+151278d^3-62136d^4+ \\ & 5562d^5+2025d^6)+a^4(1+c)^5(16+4c^6+c^5(12-13d)-5d+6d^2+36d^3+10d^4+d^5+c^4(8-45d+ \\ & 12d^2)+2c^3(-12+d+31d^2+d^3)-2c^2(14-25d+9d^2+18d^3+4d^4)+c(12+11d-62d^2-2d^3+6d^4+ \\ & 3d^5))-a^3(1+c)^3(118+4c^9+c^8(58-19d)-317d-15d^2+330d^3-380d^4-93d^5-27d^6+c^7(292- \\ & 234d+35d^2)+c^6(444-1042d+347d^2-30d^3)+c^5(-164-1418d+1427d^2-208d^3+10d^4)+ \\ & c^4(-944+416d+1659d^2-922d^3+12d^4+d^5)+c^2(324+962d-1991d^2+622d^3+432d^4+28d^5- \\ & 9d^6)-c^3(564-2130d+591d^2+992d^3-244d^4-34d^5+d^6)-c(-432+478d+871d^2-1200d^3+ \\ & 190d^4+98d^5+27d^6))+a^2(1+c)^2(300+26c^10+c^9(378-127d)-1811d+1415d^2+2610d^3-2934d^4+ \\ & 945d^5+243d^6+c^8(1948-1611d+245d^2)+c^7(3408-7644d+2646d^2-230d^3)+2c^6(18-6566d+ \\ & 5833d^2-1017d^3+50d^4)-c^5(6156+1842d-19462d^2+8614d^3-666d^4+11d^5)-2c^2(-1705+ \\ & 606d+8921d^2-6637d^3+148d^4+507d^5)+c^4(-5720+17766d+4516d^2-13850d^3+3066d^4- \\ & 27d^5-3d^6)-2c^3(-288-7802d+9847d^2+1369d^3-2482d^4+211d^5+9d^6)+c(1794-5991d- \\ & 2414d^2+11582d^3-5694d^4+81d^5+162d^6))+a(1+c)(-314+4c^12+3227d-7559d^2-5670d^3+ \\ & 12420d^4-4293d^5-243d^6-8c^11(7+3d)+c^10(-1122+221d+60d^2)-c^9(5816-4848d+265d^2+ \\ & 80d^3)+3c^8(-3758+8405d-2621d^2-10d^3+20d^4)+c^7(-3680+50232d-42580d^2+5412d^3+ \\ & 310d^4-24d^5)+c^6(16636+23194d-89068d^2+33944d^3-708d^4-239d^5+4d^6)+c^5(22304- \\ & 55416d-55038d^2+76908d^3-11262d^4-876d^5+59d^6)+c^4(4704-78218d+64902d^2+56132d^3- \\ & 30792d^4-167d^5+309d^6)+2c^3(-5012-8832d+54926d^2-20066d^3-11555d^4+1808d^5+333d^6)+ \end{aligned}$$

$$c^2(-8634+26361d+39528d^2-84376d^3+19788d^4+2907d^5+378d^6)-c(2728-18024d+11969d^2+42108d^3-34830d^4+3996d^5+405d^6)))/((-3+a)^2(1+c-d)d^6(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d)-9d+cd)(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)^3(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^4).$$

$$\mathbf{h}_6 = (2(-3+a)a(1+c)^2(1+c-d)(1-c^2+3d+cd)^2)/((1+5c^2+c(6-5d)-a(1+c)(1+c-d)-9d)d(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d)-9d+cd)^2).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_7 = & -((a^2(1+c)^2(1-c^2+3d+cd)^4(20-c^10+5c^9(-1+d)-344d+1702d^2-1290d^3+270d^4- \\ & 486d^5-2c^8(228+6d+5d^2)+2c^7(-986+660d+49d^2+5d^3)-c^6(2966-6068d+1228d^2+172d^3+ \\ & 5d^4)+c^4(2140+2244d-8772d^2+2638d^3+36d^4-32d^5)+c^5(-966+9042d-6330d^2+324d^3+ \\ & 123d^4+d^5)+c^3(2684-7376d-594d^2+3002d^3-698d^4+4d^5)+c(259-2991d+6826d^2-3144d^3+ \\ & 543d^4+27d^5)+c^2(1263-7956d+8308d^2-984d^3-333d^4+294d^5)+a^3(1+c)^3(-7+c^6-c^5(-6+ \\ & d)+11d-28d^2+8d^3+11d^4+5d^5+c^4(15-25d-6d^2)+2c^3(6-17d+17d^2+7d^3)+c^2(-9+14d+ \\ & 34d^2-12d^3-11d^4)+c(-18+35d-34d^2-26d^3-8d^4+3d^5))-a^2(1+c)^2(-34+c^8-5c^7(-1+d)+ \\ & 166d-254d^2+234d^3+40d^4-24d^5+c^6(79-4d+10d^2)-c^5(-249+259d+34d^2+10d^3)+c^4(237- \\ & 666d+278d^2+76d^3+5d^4)-c^3(81+307d-652d^2+70d^3+59d^4+d^5)+c^2(-283+504d-34d^2- \\ & 326d^3-53d^4+16d^5)+c(-173+571d-618d^2+64d^3+115d^4+25d^5))+a(1+c)(-47+2c^9+c^8(9- \\ & 10d)+499d-1144d^2+892d^3-321d^4-135d^5+c^7(336+9d+20d^2)-c^6(-1244+997d+126d^2+ \\ & 20d^3)+c^5(1500-3651d+902d^2+234d^3+10d^4)+c(-414+2559d-3618d^2+1426d^3+236d^4- \\ & 141d^5)-c^4(-30+3669d-3668d^2+84d^3+171d^4+2d^5)+c^3(-1424+1083d+2696d^2-1500d^3- \\ & 230d^4+45d^5)+c^2(-1236+4177d-2398d^2-628d^3+380d^4+73d^5)))/((1+5c^2+c(6-5d)-a(1+c) \\ & (1+c-d)-9d)^3d^4(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d)-9d+cd)^2(-1+c^2+3d-cd+a(1-c^2+d+cd))^2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_8 = & (a^4(-1+c)(1+c)^2(1-c^2+3d+cd)^8(-374-9c^15+7927d-62959d^2+204153d^3-80685d^4- \\ & 528903d^5+248751d^6-12393d^7+19683d^8+c^14(1148+83d)+c^13(22187-7262d-329d^2)+ \\ & c^12(151358-135971d+19163d^2+735d^3)+c^11(539191-940312d+349778d^2-26764d^3-1015d^4)+ \\ & c^10(1128604-3425021d+2431052d^2-484448d^3+20185d^4+889d^5)+c^9(1380259-7363326d+ \\ & 9065745d^2-3359408d^3+381465d^4-6478d^5-483d^6)+c^8(737982-9445043d+20224883d^2- \\ & 12775821d^3+2634571d^4-160427d^5-1123d^6+149d^7)+c^5(-1213831+5321446d+5796793d^2- \\ & 39178080d^3+37174526d^4-10466936d^5+882206d^6-6156d^7-1422d^8)+c^6(-1295388+742417d+ \\ & 21684224d^2-43317256d^3+24195606d^4-4362198d^5+220518d^6+4382d^7-301d^8)+c^7(-485523- \\ & 6136576d+27678396d^2-29625112d^3+10134086d^4-1130372d^5+24456d^6+1432d^7-20d^8))- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c^4(671494 - 5046431d + 5808575d^2 + 19450283d^3 - 36677794d^4 + 16220478d^5 - 2036268d^6 + \\
& 67908d^7 + 1251d^8) + c^3(-235675 + 2539224d - 6867918d^2 - 2298236d^3 + 22267617d^4 - 16210700d^5 + \\
& 2884920d^6 - 163440d^7 + 9720d^8) + c^2(-51836 + 739545d - 3181292d^2 + 2721608d^3 + 7363665d^4 - \\
& 10064691d^5 + 2486754d^6 - 177606d^7 + 33453d^8) + c(-6599 + 117174d - 715969d^2 + 1386288d^3 + \\
& 854457d^4 - 3521322d^5 + 1200069d^6 - 85212d^7 + 42282d^8) - 2a^5(1+c)^6(1+c-d)^2(-19+6c^5+ \\
& c^4(23-22d)+2d+5d^2-13d^3+6d^4+3d^5+c^3(30-70d+27d^2)-c^2(4+64d-77d^2+9d^3)-c(36+14d- \\
& 47d^2+36d^3+5d^4))+a^4(1+c)^4(-347+9c^10+c^9(296-68d)+1512d-1744d^2-422d^3+2440d^4- \\
& 1932d^5+556d^6-54d^7-9d^8+c^8(1909-1728d+218d^2)-4c^7(-1395+2539d-1051d^2+96d^3)+ \\
& c^6(8358-27056d+22182d^2-5454d^3+400d^4)+c^5(4972-37212d+53464d^2-25372d^3+3970d^4- \\
& 244d^5)+2c^4(-1717-11612d+33467d^2-27421d^3+7982d^4-758d^5+39d^6)-4c^3(2119-627d- \\
& 10403d^2+15358d^3-7664d^4+1305d^5-52d^6+2d^7)+c^2(-6495+13248d+7322d^2-35282d^3+ \\
& 29676d^4-8896d^5+690d^6+26d^7-d^8)-2c(1186-3840d+2184d^2+4406d^3-6927d^4+3440d^5- \\
& 574d^6-6d^7+3d^8))+a^3(1+c)^3(1157+3c^12-8905d+17933d^2-6325d^3-22477d^4+28373d^5- \\
& 11313d^6+1449d^7+108d^8-7c^11(22+3d)+c^10(-2864+1045d+63d^2)-c^9(17458-17405d+ \\
& 3024d^2+105d^3)+c^8(-52761+98859d-44579d^2+4823d^3+105d^4)-c^7(86452-280758d+ \\
& 233980d^2-61976d^3+4550d^4+63d^5)+c^6(-66552+438090d-621534d^2+297968d^3-49890d^4+ \\
& 2499d^5+21d^6)+c^5(13068+347970d-919532d^2+736334d^3-218042d^4+22589d^5-700d^6-3d^7)+ \\
& c^4(80497+41550d-738826d^2+1023398d^3-498324d^4+89671d^5-4815d^6+49d^7)+c^3(80334- \\
& 175281d-236212d^2+800128d^3-638410d^4+188811d^5-17956d^6+94d^7+12d^8)+c^2(40520- \\
& 160527d+74943d^2+316488d^3-455078d^4+214465d^5-35429d^6+758d^7+84d^8)+c(10662- \\
& 60719d+80748d^2+38019d^3-164662d^4+123671d^5-33008d^6+2037d^7+180d^8))-a^2(1+c)^2(1799+ \\
& 15c^13-21185d+75337d^2-61517d^3-70701d^4+165837d^5-91341d^6+9153d^7+810d^8-c^12(865+ \\
& 109d)+c^11(-13198+5624d+343d^2)-c^10(78770-82602d+15473d^2+609d^3)+c^9(-247947+ \\
& 470488d-217903d^2+23174d^3+665d^4)-c^8(442855-1423097d+1184931d^2-311719d^3+ \\
& 20065d^4+455d^5)+c^7(-412724+2480400d-3442458d^2+1620024d^3-257260d^4+9580d^5+ \\
& 189d^6)-c^6(48988-2384796d+5843962d^2-4525118d^3+1281760d^4-117928d^5+1879d^6+43d^7)+ \\
& c^5(357769+761872d-5752702d^2+7455124d^3-3452018d^4+569460d^5-23967d^6-202d^7+4d^8)+ \\
& c^4(462113-920427d-2734102d^2+7340870d^3-5481450d^4+1488306d^5-118783d^6-617d^7+ \\
& 106d^8)+c^3(294690-1285768d+231763d^2+4056472d^3-5203164d^4+2249620d^5-309641d^6+ \\
& 2436d^7+696d^8)+c^2(107566-709286d+989403d^2+952707d^3-2829736d^4+1949536d^5- \\
& 437181d^6+13491d^7+1836d^8)+c(21395-193128d+467229d^2-86506d^3-771935d^4+892492d^5- \\
& 315765d^6+19494d^7+2052d^8))+a(1+c)(1325+21c^14-21639d+121207d^2-218933d^3-106161d^4+ \\
& 400671d^5-293463d^6+32157d^7+2916d^8-c^13(1868+171d)+3c^12(-9465+3975d+203d^2))-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c^4(174770 - 179274d + 31878d^2 + 1239d^3) + c^10(-579809 + 1080186d - 475914d^2 + 45451d^3 + \\
& 1575d^4) - c^9(1122914 - 3531999d + 2814256d^2 - 681417d^3 + 35700d^4 + 1281d^5) + c^8(-1215653 + \\
& 6831327d - 9083691d^2 + 3971487d^3 - 555315d^4 + 13083d^5 + 651d^6) + c^7(-425332 + 7675548d - \\
& 17583684d^2 + 12691378d^3 - 3221446d^4 + 240900d^5 + 490d^6 - 189d^7) + c^6(720763 + 3794556d - \\
& 20569636d^2 + 24570070d^3 - 10247784d^4 + 1436644d^5 - 35964d^6 - 1947d^7 + 24d^8) + c^5(1256336 - \\
& 1849773d - 12972792d^2 + 29555738d^3 - 19785774d^4 + 4614606d^5 - 272632d^6 - 8871d^7 + 444d^8) + \\
& c^4(976835 - 4387821d - 1365501d^2 + 21321622d^3 - 23867652d^4 + 8864214d^5 - 952856d^6 - 13925d^7 + \\
& 2868d^8) + c^3(449030 - 3225702d + 4297114d^2 + 7755077d^3 - 17755938d^4 + 10387660d^5 - 1850486d^6 + \\
& 12765d^7 + 8712d^8) + c(19518 - 256263d + 1028952d^2 - 915971d^3 - 1636982d^4 + 2674851d^5 - \\
& 1206684d^6 + 78759d^7 + 10044d^8) + c^2(124913 - 1253622d + 3296382d^2 + 76703d^3 - 7660503d^4 + \\
& 7202124d^5 - 2047680d^6 + 67203d^7 + 13392d^8)))/((-3+a)^2(1+c-d)d^8(1-c^2+a(-1+c)(1+c- \\
& d)-9d+cd)^2(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)^4(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_9 = & -((2a^3(1+c)^2(1-c^2+3d+cd)^6(81-c^16-2177d+23219d^2-119048d^3+285792d^4- \\
& 231057d^5+38799d^6+18954d^7-19683d^8+4c^15(3+2d)-c^14(2037+62d+28d^2)+c^13(-28003+ \\
& 13098d+98d^2+56d^3)+c^12(-148560+171823d-34920d^2+42d^3-70d^4)+c^11(-422094+900216d- \\
& 437321d^2+48534d^3-350d^4+56d^5)+c^10(-701107+2540280d-2239895d^2+582446d^3-34710d^4+ \\
& 518d^5-28d^6)+c^9(-636033+4151018d-6192449d^2+2899882d^3-406010d^4+7542d^5-378d^6+ \\
& 8d^7)+c(1625-36978d+315391d^2-1218974d^3+1977206d^4-1139466d^5+105219d^6+107730d^7- \\
& 35721d^8)+c^2(14499-269300d+1785685d^2-4963450d^3+5495330d^4-2107730d^5+9459d^6+ \\
& 157680d^7-12717d^8)+c^7(488744+212808d-7711770d^2+11614572d^3-5128964d^4+558320d^5+ \\
& 46127d^6-4470d^7-22d^8)+c^8(-110076+3565153d-9788385d^2+7757068d^3-1986860d^4+ \\
& 100363d^5+6072d^6+142d^7-d^8)+c^6(703077-3270182d+800110d^2+7942700d^3-7121900d^4+ \\
& 1511972d^5+100949d^6-36344d^7+891d^8)+c^5(521067-4140450d+8596784d^2-2936292d^3- \\
& 3813532d^4+2010132d^5+26675d^6-102490d^7+6919d^8)+c^3(74682-1099720d+5429267d^2- \\
& 10407778d^3+7369346d^4-1426600d^5-204395d^6+30390d^7+16776d^8)+c^4(244124-2735535d+ \\
& 9454214d^2-11199758d^3+3360114d^4+735918d^5-182003d^6-109264d^7+18438d^8)+a^5(1+ \\
& c)^5(1+c-d)^2(-15+2c^7+c^6(9-12d)+25d-39d^2+13d^3-30d^4-2d^5+3c^5(8-13d+9d^2)+c^4(39- \\
& 71d+69d^2-28d^3)+c^3(18-42d+50d^2-63d^3+12d^4)+c^2(-33+58d-30d^2+15d^3+30d^4)-c(44- \\
& 81d+77d^2-63d^3+16d^4+6d^5+d^6))+a^4(1+c)^4(119+c^11-813d+2043d^2-2860d^3+2452d^4- \\
& 1509d^5+631d^6-18d^7-45d^8-6c^10(7+d)+2c^9(-160+155d+7d^2)-c^8(1169-2095d+968d^2+ \\
& 14d^3)+3c^7(-870+2144d-1919d^2+550d^3)+c^6(-3368+11148d-14415d^2+8566d^3-1640d^4+ \\
& 14d^5)+c^5(-1588+9444d-17881d^2+16722d^3-7400d^4+922d^5-14d^6)+c^4(1890-1338d-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5807d^2 + 12130d^3 - 10508d^4 + 3675d^5 - 240d^6 + 6d^7) + c(876 - 4794d + 10231d^2 - 12058d^3 + 8864d^4 - \\
& 4330d^5 + 779d^6 + 182d^7 - 6d^8) - c^3(-3641 + 11392d - 13393d^2 + 6314d^3 + 1416d^4 - 3456d^5 + 965d^6 + \\
& 2d^7 + d^8) + c^2(2570 - 11086d + 19147d^2 - 17822d^3 + 9744d^4 - 2132d^5 - 655d^6 + 112d^7 + 10d^8)) - \\
& a^3(1+c)^3(347+9c^12-3864d+14350d^2-25422d^3+26146d^4-14804d^5+5006d^6-294d^7-441d^8- \\
& 2c^1(170+27d)+2c^10(-1526+1199d+63d^2)-2c^9(6088-9886d+3593d^2+63d^3)+c^8(-28255+ \\
& 69944d-53778d^2+11798d^3)+2c^7(-19076+68626d-83012d^2+39534d^3-5665d^4+63d^5)- \\
& 2c^6(11176-71758d+132702d^2-104086d^3+33525d^4-3085d^5+63d^6)+2c^5(7040+16084d- \\
& 92438d^2+126816d^3-72785d^4+15986d^5-779d^6+27d^7)+c^4(38299-114032d+77124d^2+ \\
& 66840d^3-116826d^4+54856d^5-7382d^6-14d^7-9d^8)+2c^3(16510-79311d+133852d^2-99982d^3+ \\
& 23981d^4+8871d^5-5202d^6+194d^7+31d^8)+2c^2(7502-48981d+113791d^2-130694d^3+78769d^4- \\
& 22951d^5+659d^6+802d^7+31d^8)-2c(-1784+15258d-45191d^2+66305d^3-54373d^4+24760d^5- \\
& 5453d^6-491d^7+201d^8))-a^2(1+c)^2(c^14-c^13(29+8d)+2c^12(683+80d+14d^2)-4c^11(-3545+ \\
& 2324d+77d^2+14d^3)+c^10(61865-90586d+26864d^2+112d^3+70d^4)+c^9(151703-366092d+ \\
& 242474d^2-42464d^3+490d^4-56d^5)+c^8(217326-811290d+898314d^2-348872d^3+39100d^4- \\
& 896d^5+28d^6)-4c^7(-37704+250364d-440478d^2+291876d^3-71290d^4+5044d^5-175d^6+2d^7)+ \\
& c^4(-202598+1015228d-1498256d^2+530112d^3+454208d^4-327294d^5+43798d^6+2796d^7- \\
& 226d^8)+c^6(-41037-474644d+1764944d^2-1968592d^3+843396d^4-124970d^5+4576d^6-272d^7+ \\
& d^8)+c^5(-197663+482672d+279236d^2-1431072d^3+1166988d^4-316044d^5+20826d^6+256d^7+ \\
& 43d^8)-c^2(36445-353454d+1148496d^2-1682784d^3+1207706d^4-368410d^5+31308d^6+2376d^7+ \\
& 45d^8)-4c^3(28145-203192d+483749d^2-494274d^3+201022d^4-7186d^5-6650d^6-578d^7+252d^8)+ \\
& 2(-239+3839d-21699d^2+52228d^3-64214d^4+42183d^5-9027d^6-378d^7+891d^8)+c(-6427+ \\
& 81412d-348318d^2+664000d^3-647910d^4+307148d^5-49086d^6-3168d^7+2349d^8))+a(1+c) \\
& (-316+2c^15+6749d-54190d^2+194554d^3-305103d^4+219753d^5-54324d^6-22032d^7+3645d^8- \\
& c^14(33+16d)+2c^13(1359+87d+28d^2)-2c^12(-16027+8993d+147d^2+56d^3)+c^11(153378- \\
& 201553d+50021d^2-42d^3+140d^4)+c^10(402717-924227d+529186d^2-74628d^3+840d^4- \\
& 112d^5)+c^9(618878-2308893d+2304729d^2-738900d^3+62075d^4-1302d^5+56d^6)+c^8(495048- \\
& 3297203d+5393910d^2-3030286d^3+567285d^4-25138d^5+966d^6-16d^7)+c^3(-156730+ \\
& 1652043d-5636751d^2+7739262d^3-4288316d^4+582485d^5+84373d^6+50190d^7-11772d^8)+ \\
& c^4(-392034+3010568d-6932626d^2+5358612d^3-309214d^4-917795d^5+78210d^6+61008d^7- \\
& 5625d^8)+c^5(-603126+2996932d-3093614d^2-1985016d^3+3860246d^4-1333173d^5+15289d^6+ \\
& 25894d^7-817d^8)+c^7(-9834-2231114d+6948074d^2-6532644d^3+2178392d^4-204529d^5+ \\
& 531d^6-366d^7+2d^8)+c^6(-499063+692498d+3535516d^2-7279320d^3+4258296d^4-746511d^5- \\
& 3812d^6+3224d^7+57d^8)+c(-5286+92411d-572515d^2+1517340d^3-1815225d^4+964071d^5-
\end{aligned}$$

$$\frac{118233d^6 - 52326d^7 + 1539d^8) - c^2(38373 - 529617d + 2471502d^2 - 4831180d^3 + 4214792d^4 - 1477355d^5 + 39024d^6 + 18792d^7 + 8613d^8))}{((-3+a)(1+c-d)d^6(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d) - 9d+cd)^2(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d) - 3d+cd)^3(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^5)}.$$

$$\mathbf{h}_{10} = ((-3+a)a^2(1+c)^3(1+c-d)(-1+c^2-3d-cd)^5)/(d^3(-1+c^2-a(-1+c)(1+c-d)+9d-cd)^3(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^2).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{11} = & -((a^4(-1+c)(1+c)^3(1-c^2+3d+cd)^8(c^13-4c^12(49+2d)+c^11(-4098+1097d+27d^2) \\ & -2c^10(15305-9709d+1308d^2+25d^3)+c^9(-122993+129337d-37005d^2+3485d^3+55d^4) \\ & -2c^8(154251-237712d+106744d^2-18518d^3+1430d^4+18d^5)+c^7(-518076+1107218d-689938d^2 \\ & +173100d^3-23024d^4+1491d^5+13d^6)-2c^6(301122-869566d+706252d^2-231610d^3+39533d^4 \\ & -5847d^5+236d^6+d^7)+c^5(-489825+1890682d-1946250d^2+761214d^3-157190d^4+36233d^5 \\ & -5257d^6+71d^7)+2c^4(-138304+712016d-925860d^2+392568d^3-93415d^4+30548d^5-10990d^6 \\ & +618d^7)+2(-115+1692d-7892d^2+3690d^3+9213d^4+5652d^5-486d^6+4374d^7)+c^3(-105538+726149d \\ & -1211913d^2+509580d^3-105824d^4+66917d^5-45405d^6+6474d^7)+2c^2(-12885+118493d-262184d^2 \\ & +103783d^3+8077d^4+28755d^5-23112d^6+7893d^7)+c(-3631+43885d-135401d^2+52909d^3 \\ & +51807d^4+36927d^5-18999d^6+18711d^7)-a^4(1+c)^4(1+c-d)^2(26+8c^5+c^4(50-11d)+d-18d^2 \\ & +32d^3-16d^4-d^5-2c^3(-64+30d+7d^2)+2c^2(82-43d-19d^2+14d^3)-2c(-52+18d+21d^2 \\ & -32d^3+5d^4))+a^3(1+c)^4(207+7c^8+c^7(168-45d)-741d+607d^2+649d^3-1467d^4+885d^5 \\ & -131d^6-9d^7)+c^6(1108-659d+119d^2)+c^5(3472-3625d+854d^2-165d^3)+c^4(6130-9423d+3393d^2 \\ & -195d^3+125d^4)+c^3(6472-13175d+6788d^2+622d^3-460d^4-47d^5)+c^2(4068-10297d+6825d^2 \\ & +1690d^3-2594d^4+367d^5+5d^6)+c(1408-4275d+3302d^2+1687d^3-3412d^4+1227d^5-66d^6+d^7) \\ & +a^2(1+c)^2(-554+c^11+3555d-4936d^2-1333d^3+6654d^4-3991d^5-60d^6+153d^7-2c^10(40+3d)+c^9(-1355+471d+15d^2) \\ & -c^8(9090-6075d+1152d^2+20d^3)+c^7(-32982+34212d-10580d^2+1495d^3+15d^4)-c^6(73104-107296d+45400d^2 \\ & -8729d^3+1080d^4+6d^5)+c^4(-99780+253130d-177368d^2+27301d^3+3222d^4+329d^5-56d^6) \\ & +c^5(-104934+206010d-114094d^2+21075d^3-3191d^4+405d^5+d^6)-c^3(62475-200836d+172388d^2 \\ & -18565d^3-23929d^4+4406d^5+66d^6+3d^7)+c^2(-24752+99966d-102280d^2+3659d^3+37444d^4 \\ & -11820d^5+204d^6+59d^7)+c(-5615+28487d-34089d^2-2799d^3+25487d^4-11487d^5+217d^6+183d^7) \\ & -a(1+c)(-603+2c^12+6201d-16095d^2-181d^3+13327d^4-3417d^5-4005d^6+1701d^7-c^11(269+14d) \\ & +c^10(-4195+1525d+42d^2)-c^9(27931-20012d+3589d^2+70d^3)+c^8(-104627+114509d-38315d^2 \\ & +4485d^3+70d^4)-c^7(245890-377700d+180040d^2)- \end{aligned}$$

$$37374d^3 + 3135d^4 + 42d^5) + c^6(-383054 + 793986d - 493644d^2 + 132950d^3 - 19761d^4 + 1159d^5 + 14d^6) - c^4(293156 - 1054202d + 1010670d^2 - 323056d^3 + 44529d^4 - 10609d^5 + 1553d^6 + d^7) - c^5(405718 - 1112696d + 866682d^2 - 266666d^3 + 46331d^4 - 6104d^5 + 175d^6 + 2d^7) + c^3(-141857 + 666874d - 786464d^2 + 234026d^3 + 8355d^4 + 5670d^5 - 5362d^6 + 334d^7) + c^2(-43807 + 269065d - 396646d^2 + 92906d^3 + 57805d^4 - 4767d^5 - 10008d^6 + 1596d^7) + c(-7775 + 62220d - 118553d^2 + 15220d^3 + 48023d^4 - 8148d^5 - 9759d^6 + 2772d^7)))/((-3 + a)(1 + 5c^2 + c(6 - 5d) - a(1 + c)(1 + c - d) - 9d)^5 d^8 (-1 + c^2 - a(-1 + c)(1 + c - d) + 9d - cd)^3 (-1 + c^2 + 3d - cd + a(1 - c^2 + d + cd))^3).$$

$$\mathbf{h}_{12} = (a^3(1 + c)^3(1 + c - d)(1 - c^2 + 3d + cd)^6(-36 + 312d + 343d^2 - 2793d^3 + 81d^4 - 243d^5 + c^9(90 + d) + c^8(648 - 222d - 4d^2) + c^7(1836 - 646d + 153d^2 + 6d^3) - c^6(-2412 + 942d + 799d^2 + 27d^3 + 4d^4) + c^3(-2412 + 662d + 1395d^2 + 5082d^3 - 474d^4 - 2d^5) + c^5(864 - 1524d - 4887d^2 + 942d^3 + 33d^4 + d^5) - c^4(1620 + 1458d + 5967d^2 - 4245d^3 + 143d^4 + 27d^5) + c(-378 + 1507d + 3339d^2 - 6030d^3 + 345d^4 + 81d^5) + c^2(-1404 + 2310d + 6427d^2 - 1425d^3 - 30d^4 + 222d^5) - a^3(1 + c)^3(-6 - 7d + 23d^2 - 35d^3 - 5d^4 - 2d^5 + 3c^5(2 + d) + c^4(18 + 5d - 7d^2) + c^3(12 + 6d - 38d^2 + 3d^3) + c^2(-12 + 2d - 16d^2 + 35d^3 + 3d^4) - c(18 + 9d - 38d^2 + 3d^3 + 6d^4 + 2d^5)) + a^2(1 + c)^2(-36 + 26d + 277d^2 - 375d^3 + 107d^4 + 33d^5 + c^7(6 + d) + c^6(84 + 6d - 4d^2) + c^5(246 + 41d - 45d^2 + 6d^3) + c^4(228 + 38d - 407d^2 + 39d^3 - 4d^4) + c^3(-78 - 61d - 602d^2 + 354d^3 + 3d^4 + d^5) - c(174 - 19d - 647d^2 + 360d^3 + 51d^4 + d^5) - c^2(276 + 70d - 134d^2 - 336d^3 + 71d^4 + 9d^5)) - a(1 + c)(-66 + 249d + 773d^2 - 1645d^3 + 465d^4 + 2c^8(24 + d) + c^7(402 - 75d - 8d^2) + c^6(1146 - 99d - 29d^2 + 12d^3) + c^5(1314 - 123d - 1260d^2 + 57d^3 - 8d^4) + c^2(-1218 + 415d + 2673d^2 + 482d^3 - 354d^4 - 58d^5) + c^4(90 - 567d - 3417d^2 + 1151d^3 + 33d^4 + 2d^5) - c^3(1242 + 537d + 1704d^2 - 2706d^3 + 136d^4 + 34d^5) + c(-474 + 735d + 2972d^2 - 2763d^3 + 160d^4 + 42d^5)))/((d^6(-1 + c^2 - a(-1 + c)(1 + c - d) + 9d - cd)^3(-1 - 5c^2 + a(1 + c)(1 + c - d) + 9d + c(-6 + 5d))^4(-1 + c^2 + 3d - cd + a(1 - c^2 + d + cd))^2).$$

$$\mathbf{h}_{13} = -((a^5(-1 + c)(1 + c)^4(1 - c^2 + 3d + cd)^{10}(33c^13 + c^12(561 - 180d) + c^11(4635 - 3610d + 367d^2) + c^10(23799 - 29934d + 9511d^2 - 270d^3) + c^9(82626 - 141344d + 77206d^2 - 12824d^3 - 165d^4) + c^8(201942 - 433816d + 338946d^2 - 99652d^3 + 8535d^4 + 472d^5) + c^7(355014 - 926028d + 930410d^2 - 399676d^3 + 62139d^4 - 1186d^5 - 375d^6) + c^6(453150 - 1422068d + 1702458d^2 - 999704d^3 + 205955d^4 - 8026d^5 - 1975d^6 + 138d^7) + 2(246 - 2948d + 8835d^2 - 2996d^3 + 2490d^4 - 21510d^5 - 8451d^6 + 14094d^7) + c^2(38043 - 270638d + 522855d^2 - 411578d^3 + 447481d^4 - 91130d^5 - 199431d^6 + 45270d^7 - 1512d^8) + c^3(127119 - 722986d + 1211471d^2 - 1087540d^3 + 765521d^4 + 45054d^5 - 157279d^6 + 20388d^7 - 864d^8) + c^4(277341 - 1279644d + 1922096d^2 - 1680756d^3 + 737721d^4 + 72808d^5 -$$

$$\begin{aligned}
& 59180d^6 + 5988d^7 - 216d^8) + c^5(419301 - 1588280d + 2153816d^2 - 1617660d^3 + 460657d^4 + 12624d^5 - \\
& 11492d^6 + 1204d^7 - 20d^8) - 2c(-3300 + 29964d - 70133d^2 + 40126d^3 - 58260d^4 + 62694d^5 + 54171d^6 - \\
& 27972d^7 + 486d^8) + a^4(1+c)^4(1+c-d)^3(33+3c^4+23d+d^2+3d^3-8d^4-3c^3(-6+7d)+5c^2(12-7d+ \\
& 3d^2)+c(78+9d+24d^2+11d^3))+2a^3(1+c)^2(1+c-d)^2(3c^8+3c^7(-13+d)+c^6(-303+194d-36d^2)+ \\
& c^5(-1023+1051d-338d^2+60d^3)+c^4(-2097+2418d-1110d^2+256d^3-39d^4)+c^2(-2061+2206d- \\
& 1144d^2+116d^3-9d^4+6d^5)+c(-861+921d-274d^2-152d^3+71d^4+7d^5)+c^3(-2685+3017d- \\
& 1660d^2+364d^3-79d^4+9d^5)+2(-75+87d+9d^2-50d^3+20d^4+9d^5))+2a(-570+12c^13+4602d- \\
& 8508d^2+2256d^3-6536d^4+5394d^5+3636d^6-1836d^7-486d^8-3c^12(25+28d)+c^11(-1749+483d+ \\
& 254d^2)-c^10(11439-10926d+1313d^2+432d^3)+c^9(-43659+65901d-27809d^2+1935d^3+450d^4)- \\
& c^8(113664-223530d+152696d^2-36954d^3+1635d^4+292d^5)+c^7(-213090+502398d-458296d^2+ \\
& 179418d^3-27067d^4+745d^5+114d^6)-c^6(292350-799164d+877734d^2-469938d^3+108571d^4- \\
& 10442d^5+123d^6+24d^7)+c(-6711+42921d-69833d^2+41241d^3-50303d^4+17467d^5+14685d^6- \\
& 3357d^7-702d^8)+c^2(-34755+180822d-269761d^2+210390d^3-160737d^4+24806d^5+20721d^6- \\
& 1626d^7-324d^8)+c^3(-105561+456495d-641326d^2+533862d^3-287433d^4+29499d^5+10716d^6+ \\
& 40d^7-36d^8)+c^5(-292794+922458d-1139246d^2+764952d^3-235455d^4+28193d^5-1803d^6- \\
& 27d^7+2d^8)+c^4(-210699+771696d-1026244d^2+802302d^3-322329d^4+35554d^5-522d^6+ \\
& 142d^7+10d^8))-a^2(1+c)(-915+9c^12+c^11(24-60d)+4732d-5579d^2+3016d^3-717d^4-804d^5- \\
& 201d^6+576d^7-108d^8+c^10(-762-22d+171d^2)-2c^9(3228-2521d+166d^2+135d^3)+c^8(-26085+ \\
& 35796d-13867d^2+1154d^3+255d^4)-2c^7(33816-62104d+39662d^2-10297d^3+850d^4+72d^5)+ \\
& c^6(-122556+268268d-229302d^2+90218d^3-17912d^4+1326d^5+45d^6)-2c^5(79176-196350d+ \\
& 201394d^2-102595d^3+28238d^4-4625d^5+274d^6+3d^7)+c^4(-144561+401152d-457802d^2+ \\
& 277966d^3-90714d^4+20104d^5-2759d^6+102d^7)+c^2(-36906+133338d-162229d^2+113790d^3- \\
& 41440d^4+7310d^5-3789d^6+970d^7-36d^8)-2c^3(45300-141998d+170586d^2-115419d^3+ \\
& 41134d^4-9730d^5+2362d^6-225d^7+2d^8)-2c(4380-18689d+22496d^2-14896d^3+5042d^4+ \\
& 315d^5+716d^6-570d^7+54d^8)))/((-3+a)^2(1+c-d)d^10(1-c^2+a(-1+c)(1+c-d)-9d+ \\
& cd)^3(1-c^2+a(1+c)(-1+c-d)-3d+cd)^4(-1-5c^2+a(1+c)(1+c-d)+9d+c(-6+5d))^5)).
\end{aligned}$$

Apéndice C2. Conjunto $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ y Q_7 .

$$Q_1 = \{(a, c, d) | 0 < c < 1, 3 < a \leq \frac{4}{c+1} + 5 \text{ y } c + 1 < d < \frac{(c+1)((a-5)c+a-1)}{(a-5)c+a-9}\}.$$

$$Q_2 = \{(a, c, d) | 0 < c < 1, \frac{4}{c+1} + 5 < a \leq \frac{c-9}{c-1} \text{ y } d > \frac{(c+1)((a-5)c+a-1)}{(a-5)c+a-9}\}.$$

A. APÉNDICE

$$Q_3 = \{(a, c, d) | 0 < c < 1, a > \frac{c-9}{c-1} \text{ y } \frac{(c+1)((a-5)c+a-1)}{(a-5)c+a-9} < d < \frac{(a-1)(c^2-1)}{a(c-1)-c+9}\}.$$

$$Q_4 = \{(a, c, d) | 0 < c < 1, a > \frac{c-9}{c-1} \text{ y } d > \frac{(a-1)(c^2-1)}{a(c-1)-c+9}\}.$$

$$Q_5 = \{(a, c, d) | c \geq 1, \wedge 3 < a \leq \frac{4}{c+1} + 5 \text{ y } d > c + 1\}.$$

$$Q_6 = \{(a, c, d) | c \geq 1, a > \frac{4}{c+1} + 5 \text{ y } c + 1 < d < \frac{(c+1)((a-5)c+a-1)}{(a-5)c+a-9}\}.$$

$$Q_7 = \{(a, c, d) | c \geq 1, a > \frac{4}{c+1} + 5 \text{ y } d > \frac{(c+1)((a-5)c+a-1)}{(a-5)c+a-9}\}.$$

Apéndice D1. Expresión de γ_i y β_i para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\gamma_1 = \frac{a\sqrt{c+1}(c^2+cd-2d^2+d-1)\sqrt{(a-1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}{4(a-1)d^2(c-d)\sqrt{-c+d-1}}.$$

$$\gamma_2 = \frac{a(a(c+1)(c^2+cd-2d^2+d-1)-c^4+2c^3(d-1)-c^2(d-1)d+c(d^2-4d+2)+4d^2-3d+1)}{2(a-1)d^2(c-d)}.$$

$$\gamma_3 = \frac{a^2(c-1)\sqrt{c+1}\sqrt{-c+d-1}(c^2-cd+c-2d)^2\sqrt{(a-1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}{4(a-1)^3d^4(c-d)^2}.$$

$$\gamma_4 = \frac{a\sqrt{c+1}\sqrt{-c+d-1}(a(c+1)(c^2+cd-2d^2+d-1)-2c^4+c^3(4d-3)+c^2(-2d^2+3d+1)+c(3-6d)+6d^2-5d+1)}{4d^2(c-d)\sqrt{(a-1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}.$$

$$\gamma_5 = \frac{a^2(c^2-1)(c-d+1)(c^2-cd+c-2d)^2}{2(a-1)^2d^4(c-d)^2}.$$

$$\beta_1 = \frac{a(c+1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}{4(a-1)d^2(c-d)}.$$

$$\beta_2 = \frac{a\sqrt{c+1}\sqrt{-c+d-1}(a(c+1)-c^2+c(d-2)+2d-1)\sqrt{(a-1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}{2(a-1)^2d^2(c-d)}.$$

$$\beta_3 = \frac{a^2(c+1)(c^2-cd+c-2d)^2(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}{4(a-1)^3d^4(c-d)^2}.$$

$$\beta_4 = \frac{a(c+1)(c-d+1)(ac+a-2e^2+2cd-3c+4d-1)}{4(a-1)d^2(c-d)}.$$

$$\beta_5 = \frac{a^2(c+1)^{3/2}\sqrt{-c+d-1}(c^2-cd+c-2d)^2\sqrt{(a-1)(a(c+1)(c-d+1)-5c^2+c(5d-6)+9d-1)}}{2(a-1)^3d^4(c-d)^2}.$$

Apéndice E1. Conjunto de parámetros.

$$\Gamma_1 = \{(a, c, d, e) \mid a > \frac{c^2+c-d^2-d}{cd-d^2+d}, c > 0, d > c+1 \text{ y } e = \frac{-c+d-1}{c+d+1}\}.$$

$$\Gamma_2 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, 0 < c \leq 3, d > c+1 \text{ y } 0 < e < 1 - \frac{2(c+1)}{c+d+1}\}.$$

$$\Gamma_3 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, 0 < c \leq 3, d > c+1 \text{ y } 1 - \frac{2(c+1)}{c+d+1} < e < -\frac{4(c-d)(c-d+1)}{c(5c-5d+6)-9d+1}\}.$$

$$\Gamma_4 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, c > 3, d > \frac{c^2-1}{c-3} \text{ y } 0 < e < \frac{-c+d-1}{c+d+1}\}.$$

$$\Gamma_5 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, c > 3, c+1 < d \leq \frac{c^2-1}{c-3} \text{ y } 1 - \frac{2(c+1)}{c+d+1} < e < -\frac{4(c-d)(c-d+1)}{c(5c-5d+6)-9d+1}\}.$$

$$\Gamma_6 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, c > 3, d > c + \frac{8}{c-3} + 3 \text{ y } 1 - \frac{2(c+1)}{c+d+1} < e \leq -\frac{4(c-d)(c-d+1)}{c(5c-5d+6)-9d+1}\}.$$

$$\Gamma_7 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, c > 3, d > c+1 \text{ y } 0 < e < \frac{-c+d-1}{c+d+1}\}.$$

$$\Gamma_8 = \{(a, c, d, e) \mid \frac{(c-d)(c-d+1)}{c^2(e+1)+c(-d(e+2)+e+1)+d(d-2e-1)} < a < a_1, c > 3, d > c + \frac{8}{c-3} + 3 \text{ y } -\frac{4(c-d)(c-d+1)}{c(5c-5d+6)-9d+1} < e < \frac{1}{2} \left(-\sqrt{-\frac{(c-d+1)^2(4(c+1)d-c-4d^2-1)}{(c+1)(c(c-d+3)+2)}} + \frac{2cd+c+d(5-2d)+1}{c(c-d+3)+2} - 2 \right)\}.$$

$$a_1 = -\frac{2a(c+1)^2e(c-d+1)(d(a+2c+1)+(a-1)(c+1)-2d^2)}{d^2(c-d+1)^2} - \frac{a^2(c+1)^2e^2(c+d+1)^2}{d^2(c-d+1)^2}$$

A. APÉNDICE

$$- \frac{(a-1)(c+1)(c-d+1)^2((a-1)(c+1)+4(c+1)d-4d^2)}{d^2(c-d+1)^2} + 2\sqrt{\frac{d^2(c-d+1)^3((c+1)e^2(c(c-d+3)+2)+(c+1)e(2c-2d+3)(c-d+1)+(c-d+1)^3)}{(c+1)^2(e(c+d+1)+c-d+1)^4}}.$$

Apéndice F.

$$B_1 = 1/2(-4 + a - aq_{21} + a(-1 + q_{21})(z_{**})^2 - (2\alpha(-1 + 2z_{**}))/(-\alpha + \alpha z_{**}) - (b(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**}))))/(a(-1 + q_{21})(1 - \alpha + \alpha z_{**})))$$

$$B_2 = 1/4(-((16\alpha(-1 + z_{**})(z_{**})^2(1 - \alpha + \alpha z_{**})^2(-2 + a - aq_{21} + a(-1 + q_{21})(z_{**})^2))/((a(-1 + q_{21})^2(-\alpha + \alpha z_{**})^2(-1 + (z_{**})^2)^2)) + (2\alpha(-1 + 2z_{**})(4 + a(-1 + q_{21}) + (a - aq_{21})(z_{**})^2))/(-\alpha + \alpha z_{**}) + (2b\alpha(-1 + 2z_{**})(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**}))))/(a(-1 + q_{21})(-\alpha + \alpha z_{**})(1 - \alpha + \alpha z_{**})) + (1/(a(-1 + q_{21})(1 - \alpha + \alpha z_{**})))b(4 + a(-1 + q_{21}) + (a - aq_{21})(z_{**})^2)(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**})))) + (2b\alpha(-1 + z_{**})(z_{**})^2(4(-1 + \alpha) + a(-1 + q_{21})(-3 + 2\alpha) + z_{**}(2(-2 + a - aq_{21})\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(3 - 2\alpha + 2\alpha z_{**}))))(4(-1 + \alpha) + a(-1 + q_{21})(-5 + 4\alpha) + z_{**}(-4(1 + a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(5 - 4\alpha + 4\alpha z_{**}))))/(a^2(-1 + q_{21})^2(-\alpha + \alpha z_{**})^2(-1 + (z_{**})^2)^2))$$

$$B_3 = (1/(4a^2(-1 + q_{21})^3(-\alpha + \alpha z_{**})^2))b\alpha((1/((-1 + (z_{**})^2)^2))8(-1 + z_{**})(z_{**})^2(1 - \alpha + \alpha z_{**})(-2 + a - aq_{21} + a(-1 + q_{21})(z_{**})^2)(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**})))) - (1/((-1 + (z_{**})^2)^2))8q_{21}(-1 + z_{**})(z_{**})^2(1 - \alpha + \alpha z_{**})(-2 + a - aq_{21} + a(-1 + q_{21})(z_{**})^2)(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**})))) - (1/(1 - \alpha + \alpha z_{**}))a(-1 + q_{21})^2(-1 + 2z_{**})(-\alpha + \alpha z_{**})(4 + a(-1 + q_{21}) + (a - aq_{21})(z_{**})^2)(4 - 4\alpha - a(-1 + q_{21})(-4 + 3\alpha) + z_{**}((4 + 3a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(-4 + 3\alpha - 3\alpha z_{**})))) - (1/((-1 + (z_{**})^2)^2))(-1 + q_{21})(-1 + z_{**})(z_{**})^2(4 + a(-1 + q_{21}) + (a - aq_{21})(z_{**})^2)(4(-1 + \alpha) + a(-1 + q_{21})(-3 + 2\alpha) + z_{**}(2(-2 + a - aq_{21})\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(3 - 2\alpha + 2\alpha z_{**}))))(4(-1 + \alpha) + a(-1 + q_{21})(-5 + 4\alpha) + z_{**}(-4(1 + a(-1 + q_{21}))\alpha + a(-1 + q_{21})z_{**}(5 - 4\alpha + 4\alpha z_{**}))))).$$

Bibliografía

- [A] Arias, C.F., Blé, G. and Falconi, M. Dynamics of a Discrete-Time Predator–Prey System with Holling II Functional Response. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 21, 31 (2022). <https://doi.org/10.1007/s12346-022-00562-5> 4
- [C] Chen G, Dong X (1998), *From chaos to order: perspectives, methodologies, and applications*, World Scientific, Singapore. 1
- [CD] Celik, C. and Duman, O. (2009). "Allee effect in a discrete-time predator-prey system". *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4), pp.1956-1962. 3
- [CFJ] Chen, X., Fu, X. and Jing, Z. (2013). "Dynamics in a discrete-time predator-prey system with Allee effect". *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 29(1), pp.143-164. 3
- [E1] Elaydi, S (2005) , *An Introduction to Difference Equations*, 3rd edn. Springer, New York. 1, 30, 32, 34, 49
- [E2] Elaydi, S(2008), *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*, 2nd edn, Chapman,Hall/CRC, Boca Raton. 1, 5, 35
- [Ga] Galor, O. (2011), *Discrete Dynamical Systems*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1
- [GH] Guckenheimer, J. Johnson, S. (1993), *Beyond hyperbolicity: expansion properties of one-dimensional mappings*, From Topology to Computation, Proceedings of the Smalefest (Berkeley, CA, 1990), 227–236, Springer, New York. 1, 5, 7, 20, 24, 25, 35, 38, 40

BIBLIOGRAFÍA

- [Ka] Khan, A. Q.: Bifurcations of a two-dimensional discrete-time predator-prey model, *Adv. Difference Equ.* **56**, 1–23 (2019). [4](#)
- [KS] Kot, M. Schaffer, W.M. (1984), *The effects of seasonality on discrete models of population growth*, *Theor. Pop. Biol.* **26**, 340-360. [1](#)
- [Ku] Kuznetsov, Y. (2013). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Publishing. [7](#)
- [Mt1] Marotto, F. R.: Snap-back repellers imply chaos in \mathbb{R}^n , *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , **63**, 199-223 (1978). [9](#), [41](#)
- [Mt2] Marotto, F.: On redefining a snap-back repeller, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 25–28 (2005). [5](#), [9](#), [41](#), [43](#)
- [Ma] May, M. R. (1976), *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, *Nature* **261**, 459–467. [1](#)
- [MW] Melo, W. Strien, S. (1993), *One-dimensional dynamics*, Springer, Berlin. [1](#)
- [Mu] Murray, J.D (1993), *Biology. Springer*, New York, [1](#), [13](#)
- [R] Rana, S. (2015), " Bifurcation and complex dynamics of a discrete-time predator-prey system with simplified Monod-Haldane functional response", *Advances in Difference Equations*. [3](#)
- [WZL] Wang, W., Zhang, Y. and Liu, C. (2011). " Analysis of a discrete-time predator-prey system with Allee effect. *Ecological Complexity*", 8(1), pp.81-85. [3](#)
- [WJC] Wang, W., Jiao, Y. and Chen, X. (2013). " Asymmetrical Impact of Allee Effect on a Discrete-Time Predator-Prey System. *Journal of Applied Mathematics*", pp.1-10. [3](#)
- [W] Winggins, S (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer, New York. [5](#), [7](#), [35](#), [38](#)
- [Y] Yuan, L. and Yang, Q. (2015). " Bifurcation, invariant curve and hybrid control in a discrete-time predator-prey system. *Applied Mathematical Modelling*", 39(8), pp.2345-2362. [3](#)
- [Z] Zhao, M., Xuan, Z. and Li, C. (2016), " Dynamics of a discrete-time predator-prey system", *Advances in Difference Equations*. [4](#)