UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

UN TEOREMA DE TIPO GAUSS-BONNET PARA SUPERFICIES LORENTZIANAS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

WILLIAMS OMAR MORENO GUZMÁN

DIRECTORES

DR. JOSÉ MATÍAS NAVARRO SOZA

DR. JAIR REMIGIO JUÁREZ

CUNDUACÁN, TAB., MÉXICO

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

División Académica de Ciencias Básicas

INSTITUTO JUÁREZ 1879-2019

DIRECCIÓN

5 de junio de 2019

Lic. Williams Omar Moreno Guzman
Pasante de la Maestría en Ciencias Matemáticas
P r e s e n t e.

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"Un Teorema de tipo Gauss-Bonnet para superfices Lorentzianas",** en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL POR TESIS DE MAESTRÍA para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e.

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'JGPS/emt

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "UN TEOREMA DE TIPO GAUSS-BONNET PARA SUPERFICIES LORENTZIANAS", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 10 días del mes de junio del año 2019.

AUTORIZÓ

Williams Omar Moreno Guzmán

152A21003

EL TESISTA

Dedicatoria

A mi familia.

Agradecimientos

En primera instancia le doy gracias a Dios por ser mi motivador interno. A mis padres por ser los principales promotores para hacerme de este logro. A mi entusiasta hermana por motivarme, a su manera, a seguir adelante. A mis directores de tesis por su paciencia y responsabilidad para conmigo. A la comisión revisora cuyas observaciones ayudaron a mejorar este trabajo. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), agradecerles la inmensa ayuda aportada al ser beneficiado por una de las becas otorgadas por esta institución. En fin, gracias a todas la personas que fueron partícipes en este trabajo, ya sea de manera directa o indirecta, gracias a todos ustedes.

Gracias y Dios siempre los bendiga.

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es el desarrollo del artículo [6], que extiende la fórmula clásica de Gauss-Bonnet para regiones en superficies inmersas en el espacio euclidiano a cierto tipo de regiones en variedades lorentzianas.

En el capítulo 1 se aborda a las variedades diferenciables, que en términos bastante simples, son aquellos espacios que localmente se parecen a algún espacio $\mathbb{R}^n$ y que tienen definida una estructura que nos permite hacer cálculo. Haciendo uso de esta estructura definimos la diferenciabilidad de una función en una variedad para luego generalizarla a funciones entre variedades. Otra de las estructuras asociadas a una variedad es el espacio tangente en un punto de la variedad que es el espacio vectorial de ciertas transformaciones lineales que cumplen la propiedad llamada *regla del producto*.

Una función diferenciable entre variedades origina una transformación lineal, llamada la *diferencial* de la función, entre los espacios tangentes en cada punto de la variedad. En coordenadas locales, la diferencial de una función tiene por matriz asociada a la matriz Jacobiana de derivadas parciales. En este sentido, la diferencial de una función es una generalización de la derivada de una función entre subconjuntos de espacios euclidianos. Definimos también a los *campos vectoriales*, funciones cuyo rango es tomado en la unión de todos los espacios tangentes de la variedad. De manera análoga, una *uno-forma* en una variedad es una función cuyo rango es tomado en la unión de los duales de los espacios tangentes en cada punto de la variedad. Las funciones cuyas diferenciales proporcionan información local importante resultan ser aquellas con diferencial de rango constante. Dos de tales funciones son: las *inmersiones* (funciones cuya diferencial en cada punto es inyectiva) y las *submersiones* (funciones cuya diferencial en cada punto es suprayectiva). Las inmersiones son ingredientes esenciales para definir el concepto de *subvariedad* (como ciertos subconjuntos de otras variedades). Finalizamos este capítulo con algunos resultados relacionados a espacios vectoriales de dimensión finita con productos escalares.

Iniciamos el capítulo 2 definiendo los campos tensoriales en una variedad (operadores que generalizan la noción de funciones diferenciables real-valuada, campos vectoriales y uno-formas) que nos pemitirán describir objetos de sumo interés que se pueden definir en una variedad. Presentamos también a los campos tensoriales pero esta vez como secciones de haces tensoriales que nos permitirán definir en primera instancia los componentes tensoriales (funciones diferenciables en una variedad que definen a un campo tensorial localmente), el pullback de un campo tensorial covariante (el valor de una función originada a partir de una función diferenciable entre variedades) y la derivada exterior (operador que toma un campo tensorial covariante alternante de tipo $(0, k)$ y regresa otro de tipo $(0, k+1)$).

En este capítulo pondremos nuestra atención a las *variedades semi-riemannianas*, aquellas variedades en las que se define un producto escalar de índice constante en cada plano tangente de la variedad. Presentamos también un nuevo objeto en variedades, llamado *conexión*. La *conexión de Levi-Civita* es una conexión con dos propiedades adicionales que garantiza su unicidad. Haciendo uso de esta única conexión podremos definir el *transporte paralelo* a lo largo de una curva y a las geodésicas. Finalizamos este capítulo con la definición de *curvatura seccional* en una variedad semi-riemanniana y como caso particular una expresión en coordenadas para la curvatura en el caso de las variedades de dimensión dos.

En el capítulo 3 presentamos la noción de un *espacio vectorial lorentziano*, centrándonos principalmente en los espacios lorentzianos de dimensión dos. Estudiamos la noción de ángulo entre dos vectores temporales en el espacio tangente de una variedad lorentizana desarrollada en [5], así como también la noción de curvatura geodésica. Terminamos este capítulo con el enunciado y la demostración detallada del teorema de tipo Gauss-Bonnet local para ciertas regiones de un espacio-tiempo de dimensión dos.

Dentro de las secciónes de cada capítulo se irán especificando las referencias consultadas para el desarrollo de cada una de las secciones o en su caso se mencionarán al inicio de cada capítulo.

Capítulo 1

Variedades diferenciables

Entre los objetos con los que trabajaremos en esta tesis están las superficies lorentzianas (las cuales, en particular, son variedades diferenciables) y las funciones diferenciables entre variedades. Por esta razón iniciamos este trabajo con un primer capítulo que trata con estos temas.

1.1. Variedades diferenciables

En esta sección presentamos una serie de definiciones que se irán retomando a lo largo del texto y que pueden ser consultadas a mayor detalle en [8].

Consideremos un espacio topológico M. Recordemos que M es ***Hausdorff*** si para cada par de puntos distintos $p, q \in M$, existen subconjuntos abiertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tal que $p \in U$ y $q \in M$. El espacio topológico M es ***segundo contable*** si existe una base contable para la topológia de M.

Un espacio topológico bastante conocido es el ***n-espacio euclidiano*** $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}, \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}.$$

Tomando la suma de elementos en $\mathbb{R}^n$ como

$$p + q = (p_1, \dots, p_n) + (q_1, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n),$$

y la multiplicación por un escalar $a \in \mathbb{R}$, como

$$ap = (ap_1, \dots, ap_n),$$

el espacio $\mathbb{R}^n$ es además un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En este espacio vectorial tenemos el ***producto interno euclidiano*** definido por

$$p \cdot q = p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n. \tag{1.1}$$

Esto nos permite definir la longitud de $p \in \mathbb{R}^n$ por la ***norma***

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p},$$

y que a su vez permite definir la ***función distancia*** $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$d(p, q) = \|p - q\|.$$

Definimos la bola abierta $B(p, r)$ con centro en $p \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ por el conjunto

$$B(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|p - q\| < r\}.$$

Así, recordemos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ pertenece a la topología o es un abierto de $\mathbb{R}^n$, si para cada $p \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subseteq U$. Como $B(p, r)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces el espacio euclidiano es Hausdorff, ya que para $p, q \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p - q\| < r$ con $r > 0$, las bolas abiertas $B(p, r/2)$ y $B(q, r/2)$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a p y q, respectivamente. Y dado que el conjunto

$$B = \{B(d, 1/n) \mid d \in D, n \in \mathbb{N}\},$$

donde D es la colección de puntos en $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son números racionales, es una base contable para la topología de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es segundo contable.

Un ***sistema coordenado de dimensión*** n o una ***carta de dimensión*** n en un espacio topológico M es un par (U, φ), donde $U \subseteq M$ es abierto y $\varphi : U \to \widetilde{U}$ es un homeomorfismo sobre un abierto $\widetilde{U} = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos al conjunto U un ***dominio coordenado*** o una ***vecindad coordenada***. Sea $p \in M$, diremos que (U, φ) es un ***sistema coordenado de*** p si U contiene al punto p. Si escribimos

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)), \quad \text{para cada} \quad p \in U,$$

las funciones $x^1, \dots, x^n$ son llamadas las ***funciones coordenadas*** de φ. Así

$$\varphi = (x^1, \dots, x^n) : U \to \widetilde{U}.$$

Si para cada $p \in M$ existe una carta de dimensión n cuyo dominio coordenado contiene a p, diremos que M es ***localmente euclidiano de dimensión*** n.

Definición 1.1.1. Una ***variedad topológica de dimensión*** n o una n***-variedad topológica*** es un espacio topológico M que es Hausdorff, segundo contable y localmente euclidiano de dimensión n.

Por lo mencionado anteriormente y debido a que $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ es un sistema coordenado para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad topológica.

Debido a nuestro interés de tratar con funciones diferenciables entre variedades, debemos considerar un nuevo tipo de variedad llamada *variedad diferenciable*. El cual será una n-variedad topológica con una estructura adicional además de su topología. Ya que la definición de esta estructura adicional está basada en el cálculo de funciones entre espacios euclidianos presentamos algunas terminologías básicas de estas funciones.

Una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que es ***diferenciable***, si todas las derivadas parciales de todos los órdenes de f existen y son continuas en cada punto de U. Para cada $i = 1, \ldots, n$, las funciones $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$u^i(p_1, \ldots, p_n) = p_i,$$

son llamadas ***funciones coordenadas naturales*** de $\mathbb{R}^n$.

Una función $F : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, es ***diferenciable*** si cada función componente $F_i = u^i \circ F : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, para cada $i = 1, \ldots, n$. Si además F es biyectiva con inversa diferenciable, F es un ***difeomorfismo***.

Esta estructura adicional al que hacíamos mención se construye a partir de una colección de sistemas coordenados con ciertas propiedades y que definimos a continuación.

Definición 1.1.2. Dos cartas (U, φ), (V, ψ) de dimensión n en una n-variedad topológica M, son C^∞ ***compatibles***, si $U \cap V = \emptyset$ o bien $U \cap V \neq \emptyset$ y las funciones $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ son diferenciables en sus respectivos dominios.

Observemos de la definición anterior que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ y $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$, así los conjuntos abiertos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$ son difeomorfos en el sentido usual.

Definición 1.1.3. Un ***atlas diferenciable*** $\mathcal{A}$ ***de dimensión*** n en una n-variedad topológica M, es una colección de cartas de dimensión n en M que satisface las siguientes condiciones:

(A1) cada punto de M está contenido en el dominio coordenado de alguna carta coordenada de dimensión n en $\mathcal{A}$,

(A2) cualesquiera dos cartas de dimensión n en $\mathcal{A}$ son C^∞ compatibles.

Haciendo uso de un atlas diferenciable queremos definir esta nueva estructura en M que nos permita hacer cálculo de manera consistente en todo M. Pero diferentes atlas pueden producir una misma estructura. Para incluir todos los atlas que dan origen a una misma estructura en M se define lo siguiente.

Definición 1.1.4. Un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ de dimensión n es ***maximal***, si $\mathcal{A}$ contiene a cada carta de dimensión n en M que es C^∞ compatible con cada carta de dimensión n en $\mathcal{A}$.

Proposición 1.1.5. Sea M una variedad topológica. Cada atlas diferenciable $\mathcal{A}$ de dimensión n en M está contenido en un único atlas maximal.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable de dimensión n, definimos $\mathcal{A}'$ como el conjunto de todas las cartas de dimensión n en M tales que son C^∞ compatibles con cada carta de dimensión n contenida en $\mathcal{A}$.

Claramente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, por lo que (A1) es inmediato. Para demostrar (A2), consideremos las cartas $(U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}'$ de dimensión n y demostremos que la composición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es diferenciable. Si $U \cap V = \emptyset$, el resultado es inmediato. Entonces supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$. Sea $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ para algún $p \in U \cap V \subseteq M$, como $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable, existe una carta $(W,\phi) \in \mathcal{A}$ de dimensión n tal que $p \in W$. Ya que cada carta en $\mathcal{A}'$ es C^∞ compatible con (W,ϕ), las composiciones

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \phi(U \cap W)$$

y

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$$

son diferenciables. Ya que $p \in U \cap V \cap W$, entonces $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V \cap W)$ por lo que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap V \cap W) \to \psi(U \cap V \cap W)$ es diferenciable en $\varphi(U \cap V \cap W)$. Así $\psi \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en una vecindad de cada punto en $\varphi(U \cap V)$. Análogamente, $\varphi \circ \psi^{-1}$ es diferenciable en $\psi(U \cap V)$. Por lo tanto $\mathcal{A}'$ es un atlas diferenciable de dimensión n. Sea (U,φ) una carta de dimensión n en M que es C^∞ compatible con cada elemento de $\mathcal{A}'$, como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, en particular (U,φ) es C^∞ compatible con cada elemento de $\mathcal{A}$, entonces por definición $(U,\varphi) \in \mathcal{A}'$, por lo que $\mathcal{A}'$ es maximal. Esto prueba la existencia de un atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es cualquier otro atlas maximal tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $(A2)$ garantiza que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}'$. Pero entonces $(A2)$ también implica que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C} = \mathcal{A}'$. ∎

Definición 1.1.6. Una ***variedad diferenciable M de dimensión n*** o una ***n-variedad diferenciable*** es una n-variedad topológica junto con un atlas maximal.

Como veremos en la siguiente sección esta estructura adicional en una variedad topológica, a la que llamamos atlas maximal, nos permitirá definir a las funciones diferenciables entre variedades diferenciables.

Dado que solo trabajaremos con variedades diferenciables, de ahora en adelante una ***variedad*** significará una variedad diferenciable. Un ***sistema coordenado*** o ***carta*** (U,φ) en una variedad M, es una carta de dimensión n que pertenece al atlas maximal de M. La dimensión n de una variedad M en algunas ocasiones será indicada por la notación M^n o bien simplemente diremos que M es una n-variedad.

Notemos que debido a la proposición anterior, para mostrar que una variedad topológica en una variedad basta definir un atlas diferenciable.

Terminamos esta sección presentando algunos ejemplos de variedades.

► **Ejemplo 1.** El n-espacio euclidiano es una n-variedad con el atlas maximal determinado por el atlas diferenciable $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$. ◄

► **Ejemplo 2.** Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la n-esfera unitaria. El espacio $\mathbb{S}^n$ es Hausdorff y segundo contable por ser un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada $i = 1, \ldots, n+1$ definimos

$$U_i^+ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i > 0\}.$$

De manera similar, sea

$$U_i^- = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i < 0\}.$$

Consideremos la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ la función continua

$$f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}.$$

Entonces para cada $i = 1, \ldots, n+1$, el subconjunto abierto $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ en $\mathbb{S}^n$ es la gráfica de la función

$$x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

donde $\widehat{x^i}$ indica que x^i es omitida. De manera similar, $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ es la gráfica de la función

$$x^i = -f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}).$$

Así, las funciones continuas $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n \to \mathbb{B}^n$ definidas por

$$\varphi_i^\pm(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

son homeomorfismos, ya que tienen inversas continuas $(\varphi_i^\pm)^{-1} : \mathbb{B}^n \to U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n$ dadas por

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|u\|^2}, u^i, \ldots, u^n).$$

Para $i < j$, tenemos las funciones diferenciables

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, \widehat{u^i}, \ldots, \pm\sqrt{1 - \|u\|^2}, \ldots, u^n),$$

donde la raíz cuadrada está en la j-ésima posición. Una expresión similar se obtiene para $j < i$. En el caso $i = j$, la función $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}^n}$. Ya que cada punto en $\mathbb{S}^n$ está en un dominio de los $2n + 1$ sistemas coordenados y que la colección $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ es un atlas diferenciable, entonces $\mathbb{S}^n$ es una n-variedad. ◄

► **Ejemplo 3.** Sean M^m y N^n variedades. Entonces $M^m \times N^n$ es Hausdorff y segundo contable. Sea $(p_1, p_2) \in M^m \times N^n$, por lo que existen sistemas coordenados (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) de p_1 y p_2, respectivamente. Consideremos la función producto

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

dada por

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x_1, x_1) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)).$$

Ya que la función producto de homeomorfismos es un homeomorfismo, la función $\varphi_1 \times \varphi_2$ es un homemomorfismo. Además, la inversa de $\varphi_1 \times \varphi_2$ es

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(y_1, y_2) = (\varphi_1^{-1}(y_1), \varphi_2^{-1}(y_2)).$$

Por lo que el par $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ es un sistema coordenado de dimensión $m + n$ para $M^m \times N^n$ tal que $(p_1, p_2) \in U_1 \times U_2$. Sea $(V_1 \times V_2, \psi_1 \times \psi_2)$ otro sistema coordenado de dimensión $m + n$ para $M^m \times N^n$ cuyo dominio coordenado contiene a (p_1, p_2). Como

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(y_1, y_2) = ((\psi_1 \circ \varphi_1^{-1})(y_1), (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1})(y_2)),$$

es diferenciable y dado que esto ocurre para cada punto $(p_1, p_2) \in M^m \times N^n$, la colección de estos sistemas coordenados $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)\}$ de dimensión n es un atlas diferenciable de $M^m \times N^n$. Esto hace de $M^m \times N^n$ una variedad llamada ***variedad producto*** de dimensión $m + n$. Procediendo de manera similar podemos mostrar que el producto de variedades

$$M_1^{m_1} \times \cdots \times M_k^{m_k},$$

es una variedad de dimensión $m_1 + \cdots + m_k$. ◄

► **Ejemplo 4.** Sea M una n-variedad con atlas maximal $\mathcal{A}$. Si $U \subseteq M$ es cualquier subconjunto abierto. La colección

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi) \in \mathcal{A} \mid V \subseteq U\},$$

es un atlas diferenciable para U. En efecto, como $p \in U \subseteq M$, existe una carta coordenada (W, φ) para M cuyo dominio contiene a p. Tomando $V = W \cap U$, entonces $p \in V$ y $(V, \varphi|_V) \in \mathcal{A}_U$, por lo tanto $\mathcal{A}_U$ cumple (A1). La condición (A2) se sigue también por ser U abierto y el hecho de que los elementos de $\mathcal{A}_U$ son cartas coordenadas para M. Así, cualquier subconjunto abierto de una variedad de dimensión n es una variedad de dimensión n. Llamamos a tal subconjunto una ***subvariedad abierta*** de M. ◄

1.2. Funciones diferenciables

Las proposiciones y lemas que se presentan dentro de esta sección sin demostración pueden consultarse en [8].

Consideremos una función f que toma valores reales y está definida en una variedad M. Si (U, φ) es un sistema coordenado en M, entonces la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es llamada la ***expresión en coordenadas para*** f ***en términos de*** φ.

Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable*** si para cada $p \in M$ existe un sistema coordenado (U, φ) de p en M, tal que la expresión en coordenadas $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual.

Sea $C^\infty(M)$ el conjunto de todas las funciones diferenciables de valores reales en M. Si f y g son funciones diferenciables en M, también lo son la suma $f + g$ y el producto fg, haciendo de $C^\infty(M)$ un anillo conmutativo. La noción de diferenciabilidad se extiende a funciones entre variedades como sigue.

Definición 1.2.1. Sean M y N variedades. Una función $F : M \to N$ es ***diferenciable***, si para cada $p \in M$, existen sistemas coordenados (U, φ) y (V, ψ) de p y $F(p)$, respectivamente, tal que $F(U) \subseteq V$ y la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable en el sentido usual.

La función $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ dada en la definición anterior es llamada ***expresión en coordenadas para*** F ***en términos de*** φ ***y*** ψ.

Una consecuencia de la definición de función diferenciable es que la diferenciabilidad implica continuidad.

Proposición 1.2.2. Sean M y N variedades y $F : M \to N$ una función diferenciable, entonces F es continua.

Demostración. Sea $p \in M$, la diferenciabilidad de F garantiza la existencia de sistemas coordenados (U, φ) y (V, ψ) de p y $F(p)$, respectivamente, tal que $F(U) \subseteq V$ y la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable, y en consecuencia continua. Ya que $\varphi : U \to \varphi(U)$ y $\psi : V \to \psi(V)$ son homeomorfismos, implica que

$$F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to V$$

es continua, esto por ser composición de funciones continuas. Es decir, para cada $p \in M$, existe un abierto U que lo contiene tal que $F|_U$ es continua, por lo tanto F es continua en M. ∎

La siguiente proposición ofrece un manera útil de averiguar si una función continua entre variedades es diferenciable.

Proposición 1.2.3. Sean M, N variedades y $F : M \to N$ una función continua. Si existen atlas diferenciables $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ para M y N, respectivamente, tal que para cada α, β, la función $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ es diferenciable, entonces F es diferenciable.

Demostración. Sea $p \in M$, entonces existen cartas coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (V_β, ψ_β) tal que $p \in U_\alpha$, $F(p) \in V_\beta$ y

$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta),$$

es diferenciable. Como F es continua, $F^{-1}(V_\beta)$ es un abierto en M y en consecuencia $U = U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)$ es un abierto tanto en U_α como en M que contiene a p tal que

$$F(U) = F(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \subseteq F(U_\alpha) \cap F(F^{-1}(V_\beta)) \subseteq F(U_\alpha) \cap V_\beta \subseteq V_\beta.$$

Así, $(U, \varphi_\alpha|_U)$ y (V_β, ψ_β) son sistemas coordenados de p y $F(p)$, respectivamente, tal que $F(U) \subseteq V_\beta$ y $\psi_\beta \circ F \circ (\varphi_\alpha|_U)^{-1} = \psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es diferenciable, por lo tanto F es diferenciable. ∎

► **Ejemplo 5.** Consideremos el $(n+1)$-espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ y la n-esfera $\mathbb{S}^n$ con sus atlas diferenciables dadas en los ejemplos 1 y 2, respectivamente. La función inclusión $\imath : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es continua. Ya que la expresión en coordenadas con respecto a cada una de las cartas coordenadas en sus atlas diferenciables está dada por

$$\begin{aligned}\hat{\imath}(u^1, \ldots, u^n) &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \circ i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u^1, \ldots, u^n) \\ &= (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|u\|^2}, u^i, \ldots, u^n),\end{aligned}$$

la función inclusión es diferenciable en su dominio. ◄

A continuación se presentan algunas propiedades de las funciones diferenciables.

Proposición 1.2.4. Sean M, N y P variedades.

(1) Cada función constante $c : M \to N$ es diferenciable.

(2) La función identidad Id_M de M es diferenciable.

(3) Si $U \subseteq M$ es una subvariedad abierta, entonces la función inclusión $\imath : U \hookrightarrow M$ es diferenciable.

(4) Si $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son diferenciables, entonces $G \circ F : M \to P$ es diferenciable.

Definición 1.2.5. Un ***difeomorfismo entre variedades*** M y N es una función diferenciable $F : M \to N$ que tiene una inversa diferenciable.

Diremos que M y N son ***variedades difeomorfas***, si existe un difeomorfismo entre ellas. La teoría de variedades puede definirse como el estudio de las propiedades de variedades que se preservan bajo difeomorfismos.

Algunas propiedades de los difeomorfismos son las siguientes.

Proposición 1.2.6. Sean M, N y P variedades

(1) Si $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son difeomorfismos, entonces $G \circ F$ es un difeomorfismo.

(2) Si $F : M \to N$ en un difeomorfismo, entonces F es un homeomorfismo.

(3) Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo y U es una subvariedad abierta de M, entonces $F|_U : U \to F(U)$ es un difeomorfismo.

► **Ejemplo 6.** Sea M una n-variedad y (U, φ) una carta en M, entonces $\varphi : U \to \varphi(U)$ es un difeomorfismo. En efecto, observemos que en este caso un atlas diferenciable para U y $\varphi(U)$ están dados por $\{(U, \varphi)\}$ y $\{(\varphi(U), \mathrm{Id}_{\varphi(U)})\}$, respectivamente. Como $\mathrm{Id}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{\varphi(U)})^{-1}$ son iguales a $\mathrm{Id}_{\varphi(U)}$, las funciones φ y φ^{-1} son diferenciables.

Recíprocamente, sea F es un difeomorfismo entre un subconjunto abierto $V \subseteq M$ y un subconjunto abierto $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cualquier sistema coordenado (U, φ) en M, las funciones $F \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi^{-1} \circ F$ son diferenciables, en consecuencia F pertenece al atlas maximal de M, y así F es un sistema coordenado en M. ◄

Si $f \in C^\infty(M)$, el soporte de f, denotado por *supp* f, es la cerradura del conjunto de puntos donde f es distinto de cero:

$$supp\, f = \overline{\{\, p \in M \; : \; f(p) \neq 0\}}.$$

Lema 1.2.7. Sea M una variedad diferenciable. Para cualquier subconjunto cerrado $A \subseteq M$ y cualquier subconjunto abierto U de M que contiene a A, existe una función $f \in C^\infty(M)$, llamada ***bump function*** para A, tal que

(1) $0 \leq f(p) \leq 1$ para todo $p \in M$.

(2) $f(p) = 1$ para todo $p \in A$.

(3) *supp* $f \subseteq U$.

Definición 1.2.8. Sea $A \subseteq M$ un subconjunto arbitrario de la variedad M. Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es ***diferenciable*** en A, si existe un conjunto abierto $U \subseteq M$ que contiene a A y una función diferenciable $\widehat{f} : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $\widehat{f}|_A = f$.

Por último, presentamos el siguiente resultado llamado ***lema de extensión para funciones diferenciables***.

Lema 1.2.9. Sean M una variedad, $A \subseteq M$ un subconjunto cerrado y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Para cualquier subconjunto abierto U de M que contiene a A, existe una función diferenciable $\widetilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $\widetilde{f}|_A = f$ y *supp* $\widetilde{f} \subseteq U$.

1.3. Vectores tangentes

Las definiciones presentadas en esta sección son tomadas de [2]. Uno de los pasos importantes para trasladar el cálculo en $\mathbb{R}^n$ a una variedad arbitraria consiste en precisar adecuadamente el concepto de vector tangente.

Definición 1.3.1. Sea p un punto de una variedad M. Un ***vector tangente a*** M ***en*** p es una función $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que es

(1) lineal: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, y

(2) cumple la regla del producto: $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$,

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

Para cada punto $p \in M$, T_pM denotará al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p. Las definiciones usuales de sumas de funciones y la multiplicación por un escalar:

$$\begin{aligned}(v + w)(f) &= v(f) + w(f),\\ (av)(f) &= av(f),\end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y $a \in \mathbb{R}$, hacen del conjunto T_pM un espacio vectorial real llamado el ***espacio tangente a*** M ***en*** p.

Definición 1.3.2. Sean M una n-variedad, $p \in M$ y $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado de p. Si $f \in C^\infty(M)$, se define

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)), \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde $u^1, \ldots, u^n$ son las funciones coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$.

La función

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

definida por $\partial_i|_p f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, es un vector tangente a M en p. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_i|_p(af + bg) &= \frac{\partial (af + bg)}{\partial x^i}(p) \\
&= \frac{\partial ((af + bg) \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i}\big(a(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + b(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\big) \\
&= a\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) + b\frac{\partial (g \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) \\
&= a\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b\frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \\
&= a\partial_i|_p f + b\partial_i|_p g,
\end{aligned}$$

por lo que $\partial_i|_p$ es $\mathbb{R}$-lineal. Cumple la regla del producto, ya que

$$\begin{aligned}
\partial_i|_p(fg) &= \frac{\partial (fg)}{\partial x^i}(p) \\
&= \frac{\partial ((fg) \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i}\big((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\big) \\
&= (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\frac{\partial (g \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) + (g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) \\
&= f(p)\frac{\partial g}{\partial x^i}(p) + g(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\
&= f(p)\partial_i|_p g + g(p)\partial_i|_p f.
\end{aligned}$$

Lema 1.3.3. Sean M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_pM$.

(1) Si $f, g \in C^\infty(M)$ son iguales en una vecindad de p, entonces

$$v(f) = v(g).$$

(2) Si $f \in C^\infty(M)$ es una función constante, entonces $v(f) = 0$.

Demostración. (1) Sea $h = f - g$, por linealidad es suficiente mostrar que $v(h) = 0$ siempre que $h = 0$ en una vecindad W de p. Consideremos el conjunto cerrado $A = \{p\}$, el cual está contenido en W, por lo que existe una bump function u en p tal que $u(p) = 1$ en A y $supp\, u \subseteq W$. Sea $x \in M$. Si $x \in W$ entonces $h(x) = 0$. Si $x \in M \backslash W$, entonces $u(x) = 0$, ya que $supp\, u \subseteq W$. Por lo tanto $hu = 0$ en M. Por otra parte, $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$ implica, $v(0) = 0$. Así

$$0 = v(hu) = h(p)v(u) + u(p)v(h) = v(h),$$

ya que $h(p) = 0$ y $u(p) = 1$.

(2) Si f_1 es una función constante igual a 1, entonces

$$v(f_1) = v(f_1 f_1) = f_1(p)v(f_1) + f_1(p)v(f_1) = 2v(f_1).$$

Así $v(f_1) = 0$. Ahora, si $f(x) = c$ en M, donde c es una constante, implica

$$v(f) = v(cf_1) = cv(f_1) = 0.$$

∎

Observación 1. El lema anterior es una manera de expresar el hecho de que los vectores tangentes son objetos locales. Si U es un conjunto abierto en M, como subvariedad abierta, U tiene un espacio tangente T_pU en $p \in U$. Si $f \in C^\infty(M)$, entonces $f|_U \in C^\infty(U)$, ya que $f|_U = f \circ \iota$, donde $\iota : U \hookrightarrow M$ es la función inclusión. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \phi: T_pU & \longrightarrow & T_pM & \\ v & \longmapsto & \widetilde{v}: C^\infty(M) \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f \quad \longmapsto & \widetilde{v}(f) = v(f|_U). \end{array}$$

La función ϕ es un isomorfismo lineal. Por esta razón escribimos $T_pU = T_pM$.

El siguiente resultado nos permite relacionar los sistemas coordenados y los vectores tangentes en una variedad.

Teorema 1.3.4. Sean M una n-variedad, $p \in M$ y $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado de p, entonces sus vectores coordenadas $\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p$ forman una base para el espacio tangente T_pM, y

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p, \quad \text{para todo} \quad v \in T_pM.$$

Demostración. Por la observación anterior podemos trabajar únicamente en la vecindad coordenada U de φ. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y que además $\varphi(U) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q\| < \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$.

Sea $g : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ definimos

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq)\, dt, \quad \text{para todo} \quad q \in \varphi(U).$$

Usando el teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$g(q) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} u^i(q) g_i(q), \quad \text{con} \quad q \in \varphi(U).$$

Si $f \in C^\infty(M)$, tomando $g = f \circ \varphi^{-1}$, se cumple que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i\, x^i \quad \text{en} \quad U,$$

donde $f_i = (g_i \circ \varphi) : U \to \mathbb{R}$ y $x^i = u^i \circ \varphi$. Aplicando $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ a f tenemos

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j + \sum_{j=1}^{n} x^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f_j,$$

por lo tanto $f_i(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, ya que $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j = 1$ cuando $i = j$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j = 0$, si $i \neq j$, y $x^j(p) = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así

$$\begin{aligned} v(f) &= 0 + \sum_{i=1}^{n} v(f_i) x^i(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i(p) v(x^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v(x^i) = \left(\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right)(f). \end{aligned}$$

Ya que esto se cumple para todo $f \in C^\infty(M)$, entonces $v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p$.

Resta mostrar que los vectores coordenados son linealmente independientes. Si $\sum_{i=1}^{n} a_i\, \partial_i|_p = 0$, donde cada $a_i \in \mathbb{R}$ y $0 \in T_p(M)$ tal que $0(f) = 0 \in \mathbb{R}$, para todo $f \in C^\infty(M)$, entonces la función x^j cumple que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \partial_i|_p\, x^j = a_j, \quad \text{para cada} \quad 1 \leq j \leq n.$$

■

1.4. Diferencial de una función

La referencia usada para está sección es [2]. En la sección anterior, a cada punto de una variedad M le asociamos un espacio vectorial real T_pM al que llamamos espacio tangente a M en el punto p. Ahora, dado una función diferenciable $F : M \to N$, asociamos a cada punto $p \in M$ una transformación lineal entre los espacios tangentes T_pM y $T_{F(p)}N$. Antes de presentar la definición de esta transformación lineal notemos primero que si $v \in T_pM$, entonces la función

$$v_F : C^\infty(N) \to \mathbb{R},$$

que envía a cada $g \in C^\infty(N)$ a $v(g \circ F)$, es un vector tangente a N en $F(p)$. Para probar la linealidad de v_F consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned} v_F(af + bg) &= v((af + bg) \circ F) \\ &= v(a(f \circ F) + b(g \circ F)) \\ &= av(f \circ F) + bv(g \circ F) \\ &= av_F(f) + bv_F(g). \end{aligned}$$

Cumple la regla del producto, ya que

$$\begin{aligned} v_F(fg) &= v(fg \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f(F(p))v(g \circ F) + g(F(p))v(f \circ g) \\ &= f(F(p))v_F(g) + g(F(p))v_F(f). \end{aligned}$$

Definición 1.4.1. Sea $F : M \to N$ una función diferenciable. Para cada $p \in M$, definimos la función

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

llamada la ***diferencial de F en p***, como sigue. Para cada $v \in T_pM$, $dF_p(v)$ es el vector tangente a N en el punto $F(p)$ tal que

$$dF_p(v)(g) = v(g \circ F),$$

para toda $g \in C^\infty(N)$.

Observemos que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es una transformación lineal, ya que si $g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned} dF_p(av + bw)(g) &= (av + bw)(g \circ F) \\ &= av(g \circ F) + bw(g \circ F) \\ &= (adF_p(v) + bdF_p(w))(g), \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in T_pM$.

Lema 1.4.2. Sean $F : M^m \to N^n$ una función diferenciable entre variedades y $p \in M$. Si $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ es un sistema coordenado de p y $(V, \psi = (y^1, \ldots, y^n))$ es un sistema coordenado de $F(p)$, entonces

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{F(p)}$$

para cada $i \leq j \leq m$.

Demostración. Sea $w = dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)$. Como $w \in T_{F(p)}N$, por el teorema 1.3.4, podemos escribir

$$w = \sum_{i=1}^n w(y^i) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{F(p)}.$$

Por la definición de diferencial de una función tenemos

$$w(y^i) = dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(y^i) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p).$$

Por lo tanto,

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = w = \sum_{i=1}^n w(y^i) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{F(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{F(p)}$$

■

Haciendo uso de este lema, tenemos que la matriz de dF_p con respecto a las bases coordenadas es

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m},$$

llamada la ***matriz jacobiana*** de F en p relativa a φ y ψ.

Lema 1.4.3. Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones diferenciables, y $p \in M$.

(1) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

(2) $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.

(3) Si F es un difeomorfismo, entonces $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}M$ es un isomorfismo lineal y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Demostración. (1) Si $v \in T_pM$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_p(v)(f) = v(f \circ G \circ F) &= dF_p(v)(f \circ G) \\ &= dG_{F(p)}(dF_p(v))(f) \\ &= (dG_{F(p)} \circ dF_p)(v)(f). \end{aligned}$$

(2) Si $v \in T_pM$ y $f \in C^\infty(M)$, tenemos que

$$d(\mathrm{Id}_M)_p(v)(f) = v(f \circ \mathrm{Id}_M) = v(f) = \mathrm{Id}_{T_pM}(v)(f).$$

(3) Como F es un difeomorfismo tiene inversa $G : N \to M$ tal que $G \circ F = \mathrm{Id}_M$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_N$. Por lo tanto,

$$dG_{F(p)} \circ dF_p = d(G \circ F)_p = d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM},$$
$$dF_{(G\circ F)(p)} \circ dG_{F(p)} = d(F \circ G)_{F(p)} = d(\mathrm{Id}_N)_{F(p)} = \mathrm{Id}_{T_{F(p)}N}.$$

Así, tomado $G = F^{-1}$ obtenemos que la inversa de dF_p es $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$. ∎

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [9] y formula en términos de variedades el teorema de la función inversa.

Teorema 1.4.4 (**Teorema de la función inversa**)**.** Sea $F : M \to N$ una función diferenciable. La diferencial dF_p en un punto $p \in M$ es un isomorfismo si y sólo si existe una vecindad V de p en M tal que $F|_V$ es un difeomorfismo de V sobre una vecindad $F(V)$ de $F(p)$ en N.

La demostración del teorema anterior aplica el teorema clásico de la función inversa a la expresión en coordenadas para F cerca de p . Como resultado de este teorema, una función diferenciable $F : M \to N$ tal que cada dF_p es un isomorfismo es llamado un ***difeomorfismo local***. Si F es biyectiva, entonces es un difeomorfismo.

1.5. Campos vectoriales

Las demostraciones de las proposiciones y el lema que se presentan en esta sección pueden consultarse en [2]. Sea M una variedad, definimos el ***haz tangente de*** M, denotada por TM, como la unión disjunta de todos los espacios tangentes en cada punto de M:

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM.$$

Debido a que TM es una unión de conjuntos disjuntos, entonces si $v \in TM$, $v \in T_pM$ para un único $p \in M$. Por esta razón podemos considerar la ***función proyección*** $\pi : TM \to M$ que envía cada $v \in TM$ al punto p en M. Notemos que la imagen inversa de π en un punto $p \in M$ es precisamente el espacio tangente a M en p, es decir, $\pi^{-1}(p) = T_pM$.

La siguiente proposición muestra que el haz tangente TM es una variedad cuya dimensión es la misma que la de M.

Proposición 1.5.1. Sea M una n-variedad. El haz tangente TM tiene una topología natural y un atlas maximal que lo convierte en una variedad de dimensión $2n$. Con respecto a este atlas maximal, la función proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

Observación 2. Un sistema coordenado en TM cuyo dominio coordenado contiene a $v \in T_pM$ es de la forma $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$, tal que existe un sistema coordenado $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M con $p \in U$ y la función $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ está definida por

$$\widetilde{\varphi}(v) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n),$$

donde $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_p$, y con función inversa

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Definición 1.5.2. Un ***campo vectorial*** en M es una función continua $X : M \to TM$ tal que

$$\pi \circ X = \mathrm{Id}_M.$$

Notemos que $\pi(X(p)) = p$, por lo tanto $X(p) \in T_pM$. Así, de manera equivalente, un campo vectorial en M es una función continua X que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X(p) \in T_pM$. Para evitar expresiones como $X(p)(f)$ con $f \in C^\infty(M)$, escribiremos el valor de un campo vectorial X en p como X_p en vez de $X(p)$.

Si X es un campo vectorial en M y $f \in C^\infty(M)$. Definimos la función $Xf : M \to \mathbb{R}$ por

$$(Xf)(p) = X_p(f), \quad p \in M. \tag{1.2}$$

La siguiente proposición resalta la utilidad de la función (1.2).

Proposición 1.5.3. Sea M una variedad. Entonces un campo vectorial $X : M \to TM$ es diferenciable si y sólo si para cada subconjunto abierto $U \subseteq M$ y cada $f \in C^\infty(U)$, la función Xf es diferenciable en U.

La suma de campos vectoriales en M y la multiplicación por una función $f \in C^\infty(M)$ se definen de la siguiente manera:

$$(fX)_p = f(p)X_p,$$
$$(X+Y)_p = X_p + Y_p,$$

para todo $p \in M$. Si X y Y son diferenciables, entonces los campos vectoriales $X+Y$ y fX son diferenciables. Estas dos operaciones hacen al conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de todos los campos vectoriales diferenciables en M, un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Si $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ es un sistema coordenado en M, entonces para cada $1 \leq i \leq n$, el campo vectorial ∂_i en U que envía a cada $p \in U$ a $\partial_i|_p$ es llamado el ***i-ésimo campo vectorial coordenado*** de φ. Ya que $\partial_i(f) = \partial f/\partial x^i$, por la proposición anterior, los campos vectoriales $\partial_i|_p$ son diferenciables. Se sigue del teorema 1.3.4 que para cualquier campo vectorial X y $p \in U$,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p(x^i)\, \partial_i|_p,$$

el cual, omitiendo el punto p, solo escribiremos como

$$X = \sum_{i=1}^{n} Xx^i\, \partial_i, \quad \text{en} \quad U.$$

Las funciones $Xx^i : U \to \mathbb{R}$, son llamadas las ***funciones componentes de X con respecto a*** φ.

En el plano euclidiano, por ejemplo, a menudo denotamos a las funciones coordenadas naturales por x, y como en cálculo usual; entonces los campos vectoriales coordenados son denotados por ∂_x, ∂_y.

Sean $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos el campo vectorial $[X, Z]$, llamado el ***corchete de Lie de X y Z***, como sigue

$$[X,Z]_p(f) = X_p(Zf) - Z_p(Xf)$$

para cada $p \in M$ y $f \in C^{\infty}(M)$.

La demostración del siguiente lema es consecuencia de la definición de corchete de Lie.

Lema 1.5.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. La operación corchete de Lie cumple las siguientes propiedades:

(1) $\mathbb{R}$-bilinealidad:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z].$$

(2) Propiedad antisimétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$.

(3) Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

1.6. Uno-Formas

Las demostraciones de las proposiciones y el lema que se presentan en esta sección pueden ser consultadas en [8]. Sean M una variedad y $p \in M$. El espacio dual T_p^*M del espacio tangente T_pM es llamado el ***espacio cotangente de** M **en** p*. Los elementos de T_p^*M, llamados ***covectores***, son transformaciones lineales de T_pM en $\mathbb{R}$. Definimos el ***haz cotangente** T^*M **de** M* como la unión disjunta de todos los espacios cotangentes de M:

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M.$$

Al igual que el espacio tangente, consideramos la función proyección $\pi : T^*M \to M$ que envía $\alpha \in T_p^*M$ a $p \in M$.

Proposición 1.6.1. Sea M una n-variedad. El haz cotangente T^*M tiene una topología natural y un atlas maximal que lo convierte en una variedad de dimensión $2n$. Con respecto a este atlas maximal, la función proyección $\pi : T^*M \to M$ es diferenciable.

Definición 1.6.2. Una ***uno-forma*** en M es una función continua $\omega : M \to T^*M$ tal que

$$\pi \circ \omega = \mathrm{Id}_M,$$

es decir, ω envía $p \in M$ a $\omega_p \in T_p^*M$.

Si ω es una uno-forma en M y X es un campo vectorial en M, definimos la función $\omega X : M \to \mathbb{R}$ por

$$(\omega X)(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M.$$

Proposición 1.6.3. Sea M una variedad. Entonces una uno-forma $\omega : M \to T^*M$ es diferenciable si y sólo si para cada subconjunto abierto $U \subseteq M$ y cada $X \in \mathfrak{X}(U)$ la función ωX es diferenciable en U.

Sea $\mathfrak{X}^*(M)$ el conjunto de las uno-formas diferenciables en M. Se definen la suma de uno-formas y el producto por una función de valores reales como sigue:

$$(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p,$$
$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p,$$

para toda $p \in M$. Con estas operaciones, $\mathfrak{X}^*(M)$ es un módulo sobre $C^\infty(M)$.

La siguiente definición permite obtener uno-formas a partir de funciones.

Definición 1.6.4. La ***diferencial de*** $f \in C^\infty(M)$ es la uno-forma $df : M \to T^*M$ tal que para cada $p \in M$, la función $df_p \in T_p^*M$ está definida por

$$df_p(v) = v(f),$$

para cada $v \in T_pM$.

La función diferencial df es una uno-forma diferenciable. En efecto, la linealidad de $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ para cada $p \in M$, se sigue de la linealidad de $v \in T_pM$. Dado que $(df)(X) = Xf$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, por la proposición 1.5.3, la diferencial df es diferenciable.

Observación 3. En el caso de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, tenemos dos definiciones diferentes de la diferencial de f en un punto $p \in M$. En la sección 1.4, definimos df_p como una transformación lineal de T_pM a $T_{f(p)}\mathbb{R}$. Mientras que en esta sección es una uno-forma cuyo valor en el punto p es una transformación lineal df_p de T_pM a $\mathbb{R}$. Considerando el isomorfismo canónico lineal entre $\mathbb{R}$ y $T_{f(p)}\mathbb{R}$ que envía x a $x\partial_1|_{f(p)}$, df_p y el valor de df en el punto p son la misma función.

Si $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ es un sistema coordenado en M, las ***uno-formas coordenadas*** $dx^1, \ldots, dx^n$ proporcionan una base dual a los campos vectoriales coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$, ya que para cada $p \in U$,

$$dx_p^i(\partial_j|_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta_{ij}, \quad \text{donde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Es decir, para cada $p \in U$, $dx^1_p, \ldots, dx^n_p$ es la base para T^*_pM dual a la base $\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p$ para T_pM. Por lo que dado una uno-forma ω, existen $a_i \in \mathbb{R}$, para cada $1 \leq i \leq n$, tal que

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i_p. \tag{1.3}$$

Ya que

$$\omega_p(\partial_j|_p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i_p(\partial_j|_p) = a_j, \quad \text{para cada} \quad 1 \leq j \leq n,$$

de (1.3) obtenemos,

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_p(\partial_i|_p) \, dx^i_p,$$

expresión que simplemente escribiremos como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega\partial_i \, dx^i \quad \text{en} \quad U.$$

Las funciones $\omega\partial_i : U \to \mathbb{R}$, son llamadas las ***funciones componentes de*** ω ***con respecto a*** φ.

En particular, si $f \in C^\infty(M)$, entonces como $df(\partial_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i \quad \text{en} \quad U. \tag{1.4}$$

► **Ejemplo 7.** Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} dy \\ &= 2xdx - 2ydy. \end{aligned}$$ ◄

Lema 1.6.5. La diferencial tiene las siguientes propiedades:

(1) $d : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es lineal.

(2) Satisface la regla del producto: si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

(3) Sean $f \in C^\infty(M)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene la imagen de f y $h : J \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces

$$d(h \circ f) = (h' \circ f)df.$$

1.7. Inmersiones, sumersiones y subvariedades

Las definiciones presentadas en está sección son tomadas de [8]. Sea $F : M \to N$ una función diferenciable. El ***rango*** de F en $p \in M$ es el rango de la transformación lineal $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$; o de manera equivalente, es el rango de la matriz jacobiana de F, o bien la dimensión de $\operatorname{Im} dF_p \subseteq T_{F(p)}N$. Si F tiene el mismo rango k en cada punto, decimos que tiene ***rango constante*** y escribimos $\operatorname{rank} F = k$.

Definición 1.7.1. Una ***inmersión*** $F : M \to N$ es una función diferenciable tal que dF_p es inyectiva para cada $p \in M$.

Una ***curva*** en una variedad M es una función diferenciable $\alpha : I \to M$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Para cualquier $t_0 \in I$, la ***velocidad*** $\alpha'(t_0)$ de α, es el vector

$$\alpha'(t_0) = d\alpha\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}M,$$

donde $d/dt|_{t_0}$ es la base estándar en $T_{t_0}\mathbb{R}$. Otras notaciones comunes para la velocidad son

$$\dot{\alpha}(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0), \quad \text{y} \quad \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, un ***segmento de curva*** $\tilde{\alpha} : [a, b] \to M$ es una función que tiene una extensión diferenciable a un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$, esto es, existe una curva $\alpha : I \to M$ tal que $[a, b]$ está contenida en I y $\alpha|_{[a,b]} = \tilde{\alpha}$. Así, $\tilde{\alpha}'$ está bien definida incluso en los puntos $a, b \in [a, b]$.

► **Ejemplo 8.** Si $\gamma : J \to M$ es una curva en M, entonces γ es una inmersión si y sólo si $\gamma'(s) \neq 0$, para cada $s \in J$. ◄

Definición 1.7.2. Un ***encaje*** $F : M \to N$ es una inmersión inyectiva que es también un encaje topológico, es decir, es un homeomorfismo sobre su imagen $F(M) \subseteq N$ con la topología de subespacio.

► **Ejemplo 9.** Sean $M_1, \ldots, M_k$ variedades y $p_i \in M_i$ puntos arbitrarios, la función

$$i_j : M_j \to M_1 \times \cdots \times M_k$$

dada por

$$i_j(q) = (p^1, \ldots, p^{j-1}, q, p^{j+1}, \ldots, p^k)$$

es un encaje. En particular, la inclusión $\iota : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ dada por

$$\iota(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$$

es un encaje. ◄

Definición 1.7.3. Una ***sumersión*** $F : M \to N$ es una función diferenciable tal que dF_p es suprayectiva en cada punto $p \in M$.

► **Ejemplo 10.** Sean $M_1, \ldots, M_k$ variedades, cada proyección

$$\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$$

es una sumersión. En particular, la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sobre las primeras n coordenadas es una sumersión. ◄

Definición 1.7.4. Una ***subvariedad*** de una variedad M es un subconjunto $S \subseteq M$ tal que

(1) S es una variedad con la topología de subespacio,

(2) la función inclusión $\iota : S \hookrightarrow M$ es una inmersión.

Si S es una subvariedad de M y $F : M \to N$ es una función diferenciable, entonces la restricción $F|_S$ de F a S también es una función diferenciable, ya que $F|_S = F \circ i$. En particular, si $f \in C^\infty(M)$, entonces $f|_S \in C^\infty(S)$.

1.8. Formas bilineales simétricas y productos escalares

Algunos de los resultados en esta sección se presentan sin demostración, que pueden encontrarse en [2] y [3], por ejemplo. Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita en $\mathbb{R}$.

Definición 1.8.1. Una ***forma bilineal*** B en V es una función $B : V \times V \to \mathbb{R}$, que es lineal en cada una de sus variables:

$$\begin{aligned} B(av_1 + bv_2, w) &= aB(v_1, w) + bB(v_2, w) \qquad y \\ B(v, cw_1 + dw_2) &= cB(v, w_1) + dB(v, w_2), \end{aligned}$$

para todo $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ y todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Una forma bilineal B se dice que es ***simétrica*** si $B(v, w) = B(w, v)$, para todo $v, w \in V$, y se dice ***antisimétrica*** si $B(v, w) = -B(w, v)$ para todo $v, w \in V$. Consideraremos solo el caso simétrico.

Definición 1.8.2. Una forma bilineal B en V es

(1) ***definida positiva*** (***negativa***), si $B(v, v) > 0$ (< 0), para $v \neq 0$;

(2) ***semidefinida positiva*** (***negativa***), si $B(v, v) \geq 0$ (≤ 0), para todo $v \in V$;

(3) ***no degenerada***, si $B(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

Además, B es ***definida*** siempre que una de las dos alternativas en (1) se cumple, y B es ***semidefinida***, si cualquiera de las dos alternativas en (2) se cumple. Si B es definida entonces es semidefinida y no degenerada.

Si B es una forma bilineal simétrica, entonces para cualquier subespacio W de V la restricción $B|_{W\times W}$, que denotaremos simplemente $B|_W$, es nuevamente bilineal y simétrica. Si B es definida (semidefinida) también lo es $B|_W$.

Definición 1.8.3. El ***índice*** r de una forma bilineal simétrica B en V es el entero más grande que es la dimensión de un subespacio $W \subseteq V$ en el que $B|_W$ es definida negativa.

En consecuencia $0 \leq r \leq \dim V$, y $r = 0$ si y sólo si B es semidefinida positiva. La función $Q : V \to \mathbb{R}$ dada por $Q(v) = B(v, v)$ es la ***función cuadrática asociada*** de B. A partir de Q, podemos reconstruir B con ayuda de la identidad

$$B(v, w) = \frac{1}{2}\big(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)\big).$$

Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V, la matriz $(b_{ij}) = B(e_i, e_j)$ de $n \times n$ es llamada la ***matriz de*** B ***relativa a*** $e_1, \ldots, e_n$. Ya que B es simétrica, la matriz (b_{ij}) es simétrica. Claramente (b_{ij}) determina B ya que

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j b_{ij}$$

Lema 1.8.4. Una forma bilineal simétrica es no degenerada si y sólo si su matriz relativa a una base cualquiera es invertible.

Demostración. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para V. Si $v \in V$, entonces $B(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ si y sólo si $B(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Puesto que B es simétrica

$$B(v, e_i) = B\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j b_{ij}$$

Así b es degenerada si y sólo si existen números $v_1, \ldots, v_n$, no todos ceros tal que

$$\sum_{j=1}^{n} v_i b_{ij} = 0, \quad \text{para } \ i = 1, \ldots, n.$$

Pero esto es equivalente a la dependencia lineal de las columnas de (b_{ij}), esto es, (b_{ij}) es singular. ▪

Definición 1.8.5. Un ***producto escalar*** en el espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica y no degenerada g en V.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n con un producto escalar g diremos que V es un ***espacio semi-euclidiano*** de dimensión n. Un ejemplo es $\mathbb{R}^n_r$ que es el espacio $\mathbb{R}^n$ junto con el producto escalar $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{g}(p,q) = -\sum_{i=1}^{r} p_i q_i + \sum_{j=r+1}^{n} p_j q_j, \tag{1.5}$$

donde $0 \leq r \leq n$. Cuando g es un producto escalar definido positivo en V entonces g es un ***producto interno*** y V es un ***espacio euclidiano*** de dimensión n, el ejemplo inmediato es $\mathbb{R}^n$ con el producto interno euclidiano (1.1), p. 1, el cual también podemos obtener de (1.5) con $r = 0$.

En un espacio semi-euclidiano V con producto escalar g, diremos que dos vectores $v, w \in V$ son ***ortogonales***, si $g(v,w) = 0$. Un vector $v \in V$ es ***nulo*** siempre que $g(v,v) = 0$ y $v \neq 0$. Sea W un subespacio de V y

$$W^\perp = \{v \in V \ : \ g(v,w) = 0, \text{ para toda } w \in W\}.$$

Entonces $W^\perp$ es un subespacio de V. No podemos llamar a $W^\perp$ el complemento ortogonal de W ya que $W + W^\perp$ generalmente no es todo V (por ejemplo, si W es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2_1$ generado por el vector $(1,1)$, entonces $W = W^\perp$). Sin embargo $W^\perp$ tiene las siguientes propiedades:

(1) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$,

(2) $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

Un subespacio W de un espacio semi-euclidiano V es llamado ***no degenerado*** si $g|_W$ es no degenerada, es decir, W es no degenerado si y sólo si W con $g|_W$ es un espacio semi-euclidiano. Cuando V es un espacio euclidiano, cada subespacio W, con la restricción del producto interno de V a W, es nuevamente un espacio euclidiano, así W es no degenerado. En general, un subespacio de un espacio semi-euclidiano no es un espacio semi-euclidiano (por ejemplo, el subespacio W de $\mathbb{R}^2_1$ generado por el vector $(1,1)$). El siguiente teorema puede ser útil para afrontar esta dificultad.

Teorema 1.8.6. Un subespacio W de un espacio semi-euclidiano V es no degenerado si y sólo si $V = W \oplus W^{\perp}$.

Ya que $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$, entonces W es no degenerado si y sólo si $W^{\perp}$ es no degenerado.

La ***norma*** $\|v\|$ de un vector se define como $|g(v,v)|^{1/2}$. Un ***vector unitario*** u es un vector de norma uno, esto es, $g(u,u) = \pm 1$. Diremos que un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales es un conjunto ***ortonormal***. Así, si V es un n-espacio semi-euclidiano, cualquier conjunto ortonormal de n elementos es una base para V.

Teorema 1.8.7. Todo espacio semi-euclidiano $V \neq 0$ tiene una base ortonormal.

Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal para V, entonces la matriz de g relativa a esta base tiene por componentes

$$g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \text{donde} \quad \epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1 \quad \text{y} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Llamamos al vector $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la ***signatura*** de la base $e_1, \ldots, e_n$. Es común referirse al índice del producto escalar g de V como el ***índice de*** V y que escribiremos por ind V.

Lema 1.8.8. Sea V un espacio semi-euclidiano y $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal para V. Entonces el número de signos negativos en la signatura $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ es el índice de V.

Se sigue de este lema que para un subespacio no degenerado W de V,

$$\operatorname{ind} V = \operatorname{ind} W + \operatorname{ind} W^{\perp}.$$

Sean V y $\widetilde{V}$ espacios semi-euclidianos con productos escalares g y $\tilde{g}$, respectivamente. Una transformación lineal $T : V \to \widetilde{V}$ preserva los productos escalares, si

$$\tilde{g}(T(v), T(w)) = g(v, w), \quad \text{para todo} \quad v, w \in V.$$

Un isomorfismo lineal $T : V \to W$ que preserva los productos escalares es llamado ***isometría lineal***.

Lema 1.8.9. Sean V y W espacios semi-euclidianos, entonces V y W tienen la misma dimensión e índice si y sólo si existe una isometría lineal entre V y W.

Demostración. Supongamos que V y W tiene la misma dimensión e índice. Sean $e_1, \ldots, e_n$ y $e'_1, \ldots, e'_n$ bases ortonormales para V y W, respectivamente. Por el lema 1.8.8 podemos suponer que $\langle e_i, e_i \rangle = \langle e'_i, e'_i \rangle$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea T la transformación lineal tal que $T(e_i) = e'_i$ para todo i. Entonces, $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Así, por la linealidad, T es una isometría lineal.

Recíprocamente, si $T : V \to W$ es una isometría lineal, entonces T transforma bases ortonormales de V a bases ortonormales de W. Así $\dim V = \dim W$ y por el lema 1.8.8, $\operatorname{ind} V = \operatorname{ind} W$. ■

Capítulo 2

Variedades semi-riemaniannas

Como veremos, una superficie loretziana es un caso particular de variedad semi-riemanniana. Para definir qué es variedad semi-riemanniana en este capítulo iniciamos con los tensores que nos permitirán definir una serie de conceptos como una métrica (esencial en la definición de variedad semi-rimanniana), así como también la conexión de Levi-Civita (operador que nos permitirá calcular derivadas covariantes).

Toda las secciones en este capítulo, excepto la sección 2.6 que fue tomada de [8], están basadas en [2].

2.1. Tensores

Las siguientes definiciones cubren dos casos importantes que necesitamos: el módulo $\mathfrak{X}(M)$ sobre el anillo $C^{\infty}(M)$ y el espacio vectorial T_pM sobre $\mathbb{R}$.

Sean $V_1, \ldots, V_s$ módulos sobre un anillo K. Entonces $V_1 \times \cdots \times V_s$ es el conjunto de todas la s-uplas $(v_1, \ldots, v_s)$, con $v_i \in V_i$. La definición usual de suma y multiplicación por elementos de K, hace de $V_1 \times \cdots \times V_s$ un módulo sobre K, llamado ***producto directo***. Si W es un módulo sobre K, una función

$$A : V_1 \times \cdots \times V_s \to W,$$

es K-multilineal siempre que A sea K-lineal en cada entrada, esto es, para $1 \leq i \leq s$, la función $T : V_i \to W$ definida por

$$T(v) = A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s)$$

es K-lineal.

Sea V es un módulo sobre el anillo K, que escribiremos K-módulo V, V^* es el conjunto de todas la funciones lineales de V a K. La definición usual de suma de funciones y multiplicación por elementos de K hacen de V^* un módulo sobre K, llamado el ***módulo dual*** de V. El producto directo de s-veces V, $V \times \cdots \times V$, es abreviada por V^s.

Definición 2.1.1. Para enteros $r \geq 0$, $s \geq 0$, sin ser ambos cero, una función K-multilineal

$$A : (V^*)^r \times V^s \to K,$$

es llamado un ***tensor de tipo*** (r, s) o un (r, s)***-tensor*** en el K-módulo V.

Un $(0, 0)$***-tensor*** en V, por convención, es un elemento de K. El conjunto $T_s^r(V)$ de todos los (r, s)-tensores K-módulo V, nuevamente con la suma funcional usual y la multiplicación por elementos de K, es un módulo sobre K.

Definición 2.1.2. Un (r, s)***-campo tensorial*** en una variedad M es un (r, s)-tensor A en el $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$.

Así, si A es un (r, s)-campo tensorial, A es una función $C^\infty(M)$-multilineal de la forma

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M),$$

tal que para r uno-formas $\omega^1, \ldots, \omega^r$ y s campos vectoriales $X_1, \ldots, X_s$,

$$A(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) \in C^\infty(M).$$

El conjunto $\mathcal{T}_s^r(M)$ de todos los (r, s)-campos tensoriales en M es un módulo sobre $C^\infty(M)$. En el caso $r = s = 0$, un $(0, 0)$-campo tensorial en M es justamente una función $f \in C^\infty(M)$; esto es $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

Consideremos los siguientes ejemplos. El primer ejemplo es una función que es un campo tensorial, mientras que el segundo no.

► **Ejemplo 11.** La función evaluación $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ está dada por $E(\omega, X) = \omega X$, donde $(\omega X)(p) = \omega_p(X_p)$ y que en lo sucesivo por simplicidad, cuando no haya peligro de confusión, escribiremos $\omega_p X_p$ en vez de $\omega_p(X_p)$. Sean $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ y $\omega, \widehat{\omega} \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces

$$E(f_1\omega + f_2\widehat{\omega}, X) = (f_1\omega + f_2\widehat{\omega})X.$$

Sea $p \in M$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\big((f_1\omega + f_2\widehat{\omega})X\big)(p) &= (f_1\omega + f_2\widehat{\omega})_p X_p \\
&= \big((f_1\omega)_p + (f_2\widehat{\omega})_p\big)X_p \\
&= \big(f_1(p)\omega_p + f_2(p)\widehat{\omega}_p\big)X_p \\
&= f_1(p)\omega_p X_p + f_2(p)\widehat{\omega}_p X_p \\
&= f_1(p)(\omega X)(p) + f_2(p)(\widehat{\omega}X)(p) \\
&= \big(f_1(\omega X)\big)(p) + \big(f_2(\widehat{\omega}X)\big)(p) \\
&= \big(f_1(\omega X) + f_2(\widehat{\omega}X)\big)(p),
\end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}
E(f_1\omega + f_2\widehat{\omega}, X) &= f_1(\omega X) + f_2(\widehat{\omega}X) \\
&= f_1 E(\omega, X) + f_2 E(\widehat{\omega}, X).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$E(\omega, g_1 X + g_2 Y) = g_1 E(\omega, X) + g_2 E(\omega, Y)$$

para todo $g_1, g_2 \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Así, E es $C^\infty(M)$-lineal en cada entrada y, en consecuencia, es un campo tensorial en M de tipo $(1,1)$. ◄

► **Ejemplo 12.** Sea $\omega \neq 0$ una uno-forma diferenciable fija. Se define la función

$$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

por $F(X,Y) = X(\omega Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tal que para cada $p \in M$,

$$F(X,Y)(p) = X(\omega Y)(p) = X_p\big((\omega Y)\big).$$

Notemos que

$$F(X, fY) = X\omega(fY) = X(f(\omega Y)), \quad \text{para cada} \;\; f \in C^\infty(M).$$

Sea $p \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
\big(X(f(\omega Y))\big)(p) &= X_p(f(\omega Y)) \\
&= f(p)X_p(\omega Y) + (\omega Y)(p)X_p(f) \\
&= f(p)\big(X(\omega Y)\big)(p) + (\omega Y)(p)(Xf)(p) \\
&= \big(fX(\omega Y)\big)(p) + \big(\omega Y(Xf)\big)(p) \\
&= \big(fX(\omega Y) + \omega Y(Xf)\big)(p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
F(X, fY) &= fX(\omega Y) + \omega Y(Xf) \\
&= fF(X,Y) + \omega Y(Xf).
\end{aligned}$$

Esto último muestra que F no es un campo tensorial, ya que en su segunda entrada no es $C^\infty(M)$-lineal. ◄

Mientras que la suma de tensores solo es posible para tensores del mismo tipo, cualesquiera dos tensores pueden ser multiplicados de la siguiente manera: Si $A \in T^r_s(V)$ y $B \in T^{r'}_{s'}(V)$ se define

$$A \otimes B : (V^*)^{r+r'} \times V^{s+s'} \to K$$

por

$$(A \otimes B)(v^*_1, \ldots, v^*_{r+r'}, v_1, \ldots, v_{s+s'}) = \\ A(v^*_1, \ldots, v^*_r, v_1, \ldots, v_s) B(v^*_{r+1}, \ldots, v^*_{r+r'}, v_{s+1}, \ldots, v_{s+s'}).$$

Entonces $A \otimes B$ es un tensor de tipo $(r + r', s + s')$, llamado el ***producto tensorial*** de A y B. Si $r' = s' = 0$, B es un elemento de K, definimos

$$A \otimes B = B \otimes A = BA.$$

Si A también es de tipo $(0, 0)$, el producto tensorial se reduce a la multiplicación usual en K.

El producto tensorial es K-bilineal, esto es,

$$(aA + bA') \otimes B = aA \otimes B + bA' \otimes B,$$

donde $a, b \in K$ y $A' \in T^r_s(V)$, análogamente para el factor B. Además, de la definición, el producto tensorial es asociativo; por lo que podemos escribir $A \otimes B \otimes C$ en vez de $(A \otimes B) \otimes C$ o $A \otimes (B \otimes C)$. Sin embargo el producto tensorial generalmente no es conmutativo. Por ejemplo, considerando ahora el conjunto $\mathcal{T}^r_s(M)$, en una vecindad coordenada

$$(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1) dx^2(\partial_2) = 1,$$

$$(dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1) dx^1(\partial_2) = 0,$$

así $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$.

2.2. Tensores en un punto

Sea M una n-variedad y $p \in M$. Consideremos el conjunto $T^r_s(T_pM)$ de todos los (r, s)-tensores en T_pM sobre $\mathbb{R}$. Notemos que $T^0_1(T_pM) = T^*_pM$, así una uno-forma diferenciable ω es una función tal que para cada $p \in M$, ω_p es un $(0, 1)$-tensor en T_pM. Análogamente, si consideramos el isomorfismo lineal entre T^{**}_pM, el espacio dual de T^*_pM, y T_pM, entonces $T_pM = T^1_0(T_pM)$, por lo que un campo vectorial diferenciable X en M es una función tal que para cada $p \in M$, X_p es un $(1, 0)$-tensor en T_pM.

El objetivo principal de esta sección es mostrar que, así como para un campo vectorial o una uno-forma, cualquier (r, s)-campo tensorial A en M puede verse como una función que asigna a cada punto $p \in M$ un (r, s)-tensor A_p. El hecho esencial es que el valor de A en uno-formas diferenciables ω^i, $1 \leq i \leq r$, y campos vectoriales diferenciables X_j, $1 \leq j \leq s$, es una función $A(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) \in C^\infty(M)$, cuyo valor en un punto $p \in M$ no depende de los valores de cada uno-forma y cada campo vectorial en todo M, ni siquiera de sus valores en una vecindad de p, sino únicamente de sus valores en el punto p. Formalmente:

Proposición 2.2.1. Sea $p \in M$ y $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Sean $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r$ y $\omega^1, \ldots, \omega^r$ uno-formas diferenciables en M tales que $\bar{\omega}^i|_p = \omega^i|_p$ para $1 \leq i \leq r$; sean $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s$ y $X_1, \ldots, X_s$ campos vectoriales diferenciables en M tales que $\overline{X}_j|_p = X_j|_p$ para $1 \leq j \leq s$. Entonces,

$$A(\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^r, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s)(p) = A(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p).$$

La demostración de esta proposición se facilitará en cuanto probemos el siguiente lema.

Lema 2.2.2. Si cualquiera de las uno-formas diferenciables $\omega^1, \ldots, \omega^r$ o campos vectoriales diferenciables $X_1, \ldots, X_s$ es cero en p, entonces

$$A(\omega^1, \ldots \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

Demostración. Supongamos que $X_s|_p = 0$. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado de p. Entonces,

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i \quad \text{en} \quad U,$$

donde $X^i = X_s\, x^i \in C^\infty(U)$. Sea f una bump function en p con soporte en U, ver lema 1.2.7. Entonces, definimos las funciones $h \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ de la siguiente manera

$$h(p) = \begin{cases} f(p)X^i(p), & p \in U, \\ 0, & p \in M \backslash supp\, f, \end{cases}$$

y

$$X(p) = \begin{cases} f(p)\, \partial_i|_p, & p \in U, \\ 0, & p \in M \backslash supp\, f. \end{cases}$$

Así

$$
\begin{aligned}
f^2 A(\omega^1, \ldots, X_s) &= A(\omega^1, \ldots, f^2 X_s) \\
&= A(\omega^1, \ldots, f^2 \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i) \\
&= A(\omega^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} f X^i f \partial_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f X^i A(\omega^1, \ldots, f \partial_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h A(\omega^1, \ldots, X).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Como $X_s|_p = 0$, entonces $X^i(p) = X_s|_p(x^i) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$, y así $h(p) = 0$, como además $f(p) = 1$, evaluando (2.1) en p obtenemos

$$A(\omega^1, \ldots, X_s)(p) = 0.$$

▪

Demostración de la proposición 2.2.1. Supongamos que $r = 1$ y $s = 2$. Consideremos la siguiente identidad (la cual puede ser extendida para cualquier valor de r y s)

$$A(\bar{\omega}, \overline{X}, \overline{Y}) - A(\omega, X, Y) = A(\bar{\omega} - \omega, \overline{X}, \overline{Y}) + A(\bar{\omega}, \overline{X} - X, \overline{Y}) + A(\bar{\omega}, \overline{X}, \overline{Y} - Y).$$

Por hipótesis $\bar{\omega} - \omega$, $\overline{X} - X$, y $\overline{Y} - Y$ evaluadas en el punto p es cero. Por el lema 2.2.2 y la expresión anterior

$$A(\bar{\omega}, \overline{X}, \overline{Y})(p) = A(\omega, X, Y)(p).$$

▪

Observación 4. (1) Consideremos una n-variedad M y el espacio vectorial T_pM sobre $\mathbb{R}$. El *haz de tensores* en M está definido por

$$T^r_s M := \coprod_{p \in M} T^r_s(T_pM),$$

donde $\coprod$ es la unión disjunta de todos los (r, s)-tensores en T_pM para cada $p \in M$. La función proyección $\pi : T^r_s M \to M$ envía $F \in T^r_s(T_pM)$ a $p \in M$. El haz de tensores en M tiene una topología y un atlas maximal que hace de este espacio una variedad de dimensión $n + n^{r+s}$. Además, con este atlas maximal la función proyección es diferenciable. Una *sección* de $T^r_s M$ es una función continua $\sigma : M \to T^r_s M$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$, esto es, para cada $p \in M$, $\sigma_p \in T^r_s(T_pM)$.

(2) Una sección σ de $T^r_s M$ es diferenciable si y sólo si para cualesquiera uno-formas ω^i diferenciables, para $1 \leq i \leq r$, y campos vectoriales X_j diferenciables, para $1 \leq j \leq s$, definidas en un abierto $U \subseteq M$, la función

$$\sigma(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) : U \to \mathbb{R},$$

definida por

$$\sigma(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = \sigma_p(\omega^1_p, \ldots, \omega^r_p, X_1|_p, \ldots, X_s|_p),$$

es diferenciable. El conjunto $\Gamma(T^r_s M)$ de todas las secciones diferenciables de $T^r_s M$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Dado un campo tensorial $A \in \mathcal{T}_s{}^r(M)$ podemos definir una sección diferenciable $\widetilde{A}$ de $T^r_s M$ como sigue. Para cada $p \in M$, asignamos

$$\widetilde{A}_p : (T^*_p M)^r \times (T_p M)^s \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\widetilde{A}_p(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) = A(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p),$$

donde $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in T^*_p M$, $v_1, \ldots, v_s \in T_p M$ y $\omega^1, \ldots, \omega^r$ son cualesquiera uno-formas diferenciables en M tales que $\omega^i|_p = \alpha^i$ para cada $i = 1, \ldots, r$, y $X_1, \ldots, X_s$ cualesquiera campos vectoriales diferenciables tales que $X_j|_p = v_j$ para cada $j = 1, \ldots, s$. Por la proposición 2.2.1, $\widetilde{A}_p$ está bien definida y es $\mathbb{R}$-multilineal; así $\widetilde{A}_p$ es un tensor de tipo (r, s) en el espacio vectorial $T_p M$ sobre $\mathbb{R}$. Por la observación 4 (2), $\widetilde{A}$ es diferenciable.

Recíprocamente, sea σ una sección diferenciable de $T^r_s M$. Para uno-formas $\omega^1, \ldots, \omega^r$ y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_s$ diferenciables de M, por la observación 4 (2), $\sigma(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)$ es diferenciable en M. Así, σ induce una función

$$\widehat{\sigma} : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

dada por

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p) &= \sigma(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p)\\ &= \sigma_p(\omega^1|_p, \ldots, \omega^r|_p, X_1|_p, \ldots, X_s|_p).\end{aligned}$$

La $C^\infty(M)$-multilinealidad de $\widehat{\sigma}$ se sigue de la $\mathbb{R}$-multilinealidad de σ_p para todo punto $p \in M$. Por lo tanto $\widehat{\sigma} \in \mathcal{T}_s{}^r(M)$.

Por todo lo anterior, la función

$$\begin{array}{rccc} H^r_s : & \mathcal{T}_s{}^r(M) & \longrightarrow & \Gamma(T^r_s M) \\ & A & \longmapsto & \widetilde{A} \end{array}$$

es un isomorfismo $C^\infty(M)$-lineal, con inversa

$$\begin{array}{rcl} (H^r_s)^{-1} : \Gamma(T^r_s M) & \longrightarrow & \mathcal{T}^r_s(M) \\ \sigma & \longmapsto & \widehat{\sigma}. \end{array}$$

Por lo que consideramos $\mathcal{T}^r_s(M) = \Gamma(T^r_s M)$. En particular, la interpretación seccional muestra que si $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ y U es un subconjunto abierto de M, la restricción $A|_U$ de A a U es un campo tensorial bien definido en U.

2.3. Interpretaciones

A continuación veremos algunas interpretaciones que serán usadas frecuentemente en este trabajo y que dos de ellas surgen como casos particulares de lo mencionado en la sección 2.2. Sea M una n-variedad.

(1) Por lo presentado en la sección anterior, en particular tenemos que $\mathcal{T}^0_1(M) = \Gamma(T^0_1 M)$, como además $\mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^*M) = \Gamma(T^0_1 M)$, entonces escribiremos

$$\mathcal{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M).$$

Dado ω una uno-forma diferenciable en M, el $(0,1)$-campo tensorial asociado a esta uno forma está dada por

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\omega} : \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ X & \longmapsto & \widehat{\omega}(X) = \omega X. \end{array}$$

Recíprocamente, dado $A \in \mathcal{T}^0_1(M)$, la uno-forma diferenciable asociada a A está definida por

$$\begin{array}{rclcl} \widetilde{A} : M & \longrightarrow & T^*M & & \\ p & \longmapsto & \widetilde{A}_p : T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \widetilde{A}_p(v) = (AX)(p), \end{array}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

(2) De manera similar, dado que $\mathcal{T}^1_0(M) = \Gamma(T^1_0 M)$ y $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) = \Gamma(T^1_0 M)$, escribiremos también

$$\mathcal{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M).$$

En este caso, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X} : \mathfrak{X}^*(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ \omega & \longmapsto & \widehat{X}(\omega) = \omega X. \end{array}$$

Ahora, dado $A \in \mathcal{T}_0^1(M)$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{A} : M & \longrightarrow & TM = T_0^1 M \\ p & \longmapsto & \begin{array}{rrcl} \widetilde{A}_p : & T_p^* M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \widetilde{A}_p(\alpha) = (A\omega)(p), \end{array} \end{array}$$

donde $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\omega_p = \alpha$.

(3) Si $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ es $C^\infty(M)$-multilineal se define

$$\widehat{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

por $\widehat{A}(\omega, X_1, \ldots, X_s) = \omega(A(X_1, \ldots, X_s))$. La función $\widehat{A}$ es $C^\infty(M)$-multilineal: Sean $f, g \in C^\infty(M)$ y $\omega^1, \omega^2 \in \mathfrak{X}^*(M)$,

$$\begin{aligned} \widehat{A}(f\omega^1 + g\omega^2, X_1, \ldots, X_s)(p) &= (f\omega^1 + g\omega^2)(A(X_1, \ldots, X_s))(p) \\ &= (f\omega^1 + g\omega^2)_p(A(X_1, \ldots, X_s)(p)) \\ &= f(p)\omega_p^1(A(X_1, \ldots, X_s)(p)) + g(p)\omega_p^2(A(X_1, \ldots, X_s)(p)) \\ &= (f\omega^1(A(X_1, \ldots, X_s)) + g\omega^2(A(X_1, \ldots, X_s)))(p) \\ &= (f\widehat{A}(\omega^1, X_1, \ldots, X_s) + g\widehat{A}(\omega^2, X_1, \ldots, X_s))(p). \end{aligned}$$

La $C^\infty(M)$-linealidad para cada $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ se procede de manera similar. Por lo tanto, $\widehat{A}$ es un $(1, s)$-campo tensorial. Consideraremos a A como un campo tensorial, usando la fórmula anterior únicamente cuando sea necesario.

A los tensores de tipo $(0, s)$ se les llama ***s-tensores covariantes*** mientras que los tensores de tipo $(r, 0)$ con $r \geq 1$ son llamados ***r-tensores contravariantes***. Por ejemplo, las funciones de valores reales son 0-tensores covariantes y las uno-formas son 1-tensores covariantes; los campos vectoriales son 1-tensores contravariantes. Un tensor de tipo (r, s) es ***mixto*** si ambos r y s son distintos de cero.

2.4. Componentes tensoriales

Las fórmulas en un sistema de coordenadas $X = \sum_{i=1}^n X(x^i)\, \partial_i$ para un campo vectorial y $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i)\, dx^i$ para una uno-forma se extienden fácilmente a cualquier campo tensorial.

Definición 2.4.1. Sea (U, φ) un sistema coordenado en M, con $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Si $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, los ***componentes de*** A ***relativas a*** φ son las funciones de valores reales

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}) \quad \text{en} \quad U,$$

donde $1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n$.

Para un $(0, 1)$-campo tensorial, esto es, una uno-forma ω, estos componentes son precisamente las de la fórmula $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i)\, dx^i$. Para ver que se cumple para un campo vectorial X consideramos su interpretación como un $(1, 0)$-campo tensorial. Por la definición anterior el i-ésimo componente de X relativa a φ es $X(dx^i)$, la cual es interpretada como $dx^i(X) = X(x^i)$.

De manera similar, cuando un $(1, s)$-campo tensorial es dado en la forma $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ sus componentes son determinadas por su interpretación $\widehat{A} \in \mathcal{T}_s^1(M)$ directamente por la ecuación

$$A(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}) = \sum_{i=1}^n \widehat{A}^i_{j_1 \ldots j_s}\, \partial_i,$$

ya que

$$\begin{aligned} A(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}) &= \sum_{i=1}^n A(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s})(x^i)\partial_i \\ &= \sum_{i=1}^n dx^i(A(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}))\partial_i \\ &= \sum_{i=1}^n \widehat{A}(dx^i, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_s}))\partial_i. \end{aligned}$$

La evaluación de un campo tensorial en uno-formas y campos vectoriales puede escribirse en términos de los componentes. Por ejemplo, sea A un $(1, 2)$-campo tensorial y $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i) dx^i$ una uno-forma arbitraria y $X = \sum_{i=1}^n X(x^i)\partial_i$, $Y = \sum_{i=1}^n Y(x^i)\partial_i$ campos vectoriales arbitrarios. Por la $C^\infty(M)$-multilinealidad de A se cumple que

$$\begin{aligned} A(\omega, X, Y) &= \sum_{i,j,k=1}^n A(dx^i, \partial_j, \partial_k)\omega(\partial_i)X(x^j)Y(x^k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n A^i_{jk}\omega(\partial_i)X(x^j)Y(x^k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n A^i_{jk}\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k(\omega, X, Y). \end{aligned}$$

Lema 2.4.2. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado en M. Si A es un (r, s)-campo tensorial, entonces en U,

$$A = \sum A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s},$$

donde $1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n$.

Demostración. Ya que ambos lados de la expresión anterior son $C^\infty(U)$-multilineales es suficiente verificar que tienen el mismo valor en

$$(dx^{l_1}, \ldots, dx^{l_r}, \partial_{k_1}, \ldots, \partial_{k_s}) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq l_1, \ldots, l_r, k_1, \ldots, k_s \leq n.$$

Como

$$\begin{aligned}(\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s})(dx^{l_1}, \ldots, \partial_{k_s}) &= dx^{l_1}(\partial_{i_1}) \cdots dx^{i_s}(\partial_{k_s}) \\ &= \delta^{l_1}_{i_1} \cdots \delta^{j_s}_{k_s},\end{aligned}$$

donde

$$\delta^j_i = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$A(dx^{l_1}, \ldots, dx^{l_r}, \partial_{k_1}, \ldots, \partial_{k_s}) = A^{l_1 \ldots l_r}_{k_1 \ldots k_s}.$$

∎

Existe una operación llamada ***contracción*** o ***traza*** que convierte tensores de tipo (r, s) en tensores de tipo $(r-1, s-1)$. Esta operación se deriva del siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [2].

Lema 2.4.3. Existe una única función $C^\infty(M)$-lineal $\widetilde{C} : \mathcal{T}^1_1(M) \to C^\infty(M) = \mathcal{T}^0_0(M)$ llamada $(1,1)$-***contracción***, tal que $\widetilde{C}(X \otimes \omega) = \omega X$ para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Sea $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Fijamos las uno-formas $\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}$ y los campos vectoriales $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Así la función

$$A(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \ldots, X_{s-1}, \cdot) : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada por

$$A(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \ldots, X_{s-1}, \cdot)(\omega, X) = A(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}, \omega, X_1, \ldots, X_{s-1}, X),$$

para todo $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, es un $(1,1)$-campo tensorial. Aplicando la $(1,1)$-contracción $\widetilde{C}$ a $A(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \ldots, X_{s-1}, \cdot) \in \mathcal{T}^1_1(M)$ obtenemos una función real valuada, la cual denotaremos por $(\widetilde{C}A)(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \ldots, X_{s-1}, \cdot)$. Por lo tanto la función $\widetilde{C}A : \mathfrak{X}^*(M)^{r-1} \times \mathfrak{X}(M)^{s-1} \to C^\infty(M)$ definida así es un $(r-1, s-1)$-campo tensorial. De esta manera $C : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ tal que $C(A) = \widetilde{C}A$ es la ***función contracción*** y $\widetilde{C}A$ es la ***contracción de*** A.

2.5. Pullback de tensores covariantes

A partir de una función $F : M \to N$ diferenciable y cualquier campo tensorial covariante en N podemos obtener un campo tensorial covariante en M.

Definición 2.5.1. Sea $F : M \to N$ una función diferenciable. Si $A \in \mathcal{T}_s^0(N)$, con $s \geq 1$, sea

$$(F^*A)_p(v_1, \ldots, v_s) = A_{F(p)}(dF_p v_1, \ldots, dF_p v_s),$$

para todo $v_i \in T_pM$, $p \in M$. Entonces $F^*(A)$ es llamado el ***pullback de*** A ***por*** F.

Para cada punto $p \in M$, $(F^*A)_p$ es una función $\mathbb{R}$-multilineal de $(T_pM)^s$ a $\mathbb{R}$, es decir, F^*A es una sección de T_s^0M. Haciendo cálculos en coordenadas es posible mostrar que F^*A es diferenciable (ver [8]), por lo tanto F^*A es un $(0, s)$-campo tensorial en M. En el caso especial de un $(0, 0)$-campo tensorial $f \in C^\infty(N)$, el pullback a M es definido como $F^*f = f \circ F \in C^\infty(M)$. Notemos que $F^*(df) = d(F^*f)$.

Lema 2.5.2. Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones diferenciables. Entonces,

(1) $F^* : \mathcal{T}_s^0(N) \to \mathcal{T}_s^0(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal para $s \geq 0$ y

$$F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B),$$

donde $A \in \mathcal{T}_s^0(N)$ y $B \in \mathcal{T}_t^0(N)$.

(2) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : \mathcal{T}_s^0(P) \to \mathcal{T}_s^0(M)$, para toda $s \geq 0$.

Demostración. (1) Sean $A, A' \in \mathcal{T}_s^0(N)$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\big(F^*(A + bA')\big)_p v &= (A + bA')_{F(p)} dF_p v \\
&= A_{F(p)} dF_p v + bA'_{F(p)} dF_p v \\
&= (F^*A)_{F(p)} v + b(F^*A')_{F(p)} v \\
&= \big(F^*(A) + F^*(A')\big)_p v,
\end{aligned}$$

donde $v = (v_1, \ldots, v_s)$ y $dF_p v = (dF_p v_1, \ldots, dF_p v_s)$ y por lo tanto, F^* es lineal. Si $B \in \mathcal{T}_t^0(N)$, entonces

$$\begin{aligned}
\big(F^*(A \otimes B)\big)_p (w_1, \ldots, w_{s+t}) &= (A \otimes B)_{F(p)} (dF_p w_1, \ldots, dF_p w_{s+t}) \\
&= (A_{F(p)} dF_p w)(B_{F(p)} dF_p \widehat{w}) \\
&= \big(F^*(A) \otimes F^*(B)\big)_p (w_1, \ldots, w_{s+t}),
\end{aligned}$$

donde $dF_p w = (dF_p w_1, \ldots, dF_p w_s)$ y $dF_p \widehat{w} = (dF_p w_{s+1}, \ldots, dF_p w_{s+t})$, así $F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B)$.

(2) Sea $A \in \mathcal{T}_s^0(P)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\big((G\circ F)^*A\big)_p(v_1,\dots,v_s) &= A_{(G\circ F)(p)}(d(G\circ F)_p v_1,\dots,d(G\circ F)_p v_s)\\ &= A_{(G(F(p))}(dG_{F(p)}(dF_p v_1),\dots,dG_{F(p)}(dF_p v_s))\\ &= (G^*A)_{F(p)}(dF_p v_1,\dots,dF_p v_s)\\ &= \big(F^*(G^*A)\big)_p(v_1\dots,v_s)\\ &= \big((F^*\circ G^*)A\big)_p(v_1\dots,v_s)\end{aligned}$$

■

Sea A un tensor covariante o contravariante de tipo al menos 2. Diremos que A es ***simétrico*** si al intercambiar dos variables su valor no cambia. Si al intercambiar dos variables, A cambia de signo diremos que es ***alternante***. Por convención las funciones, uno-formas y campos vectoriales son considerados simétricos y alternantes.

2.6. Derivada exterior

Las demostraciones del teorema y la proposición que se presentan en esta sección pueden consultarse en [8]. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T_k(V)$ el conjunto de todos los k-tensores covariantes en V, en particular $T_k(V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos el ***grupo simétrico de k elementos*** S_k, esto es, el grupo de permutaciones del conjunto $\{1,\dots,k\}$. Dado un k-tensor covariante T en V, definimos un nuevo k-tensor covariante $\operatorname{Alt} T$ por

$$(\operatorname{Alt} T)(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\,T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).$$

Sean $r,s\in\{1,\dots,k\}$ tal que $r<s$ y $\tau\in S_k$ la permutación que intercambia entre sí r y s, y deja todos los otros números fijos. Ya que $\operatorname{sgn}\tau=-1$, tomando $w_i = v_{\tau(i)}$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\operatorname{Alt} T)(v_1,\dots,v_s,\dots,v_r\dots,v_k) &= (\operatorname{Alt} T)(w_1,\dots,w_r,\dots,w_s\dots,w_k)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\,T(w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(k)})\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}-\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)\,T(w_{(\tau\circ\sigma)(1)},\dots,w_{(\tau\circ\sigma)(k)})\\ &= -(\operatorname{Alt} T)(v_1,\dots,v_r,\dots,v_s\dots,v_k),\end{aligned}$$

por lo que $\operatorname{Alt} T$ es un k-tensor covariante alternante en V.

El conjunto de todos los k-tensores covariantes alternantes en V, denotado por $\Lambda^k(V)$, es un subespacio vectorial de $T_k(V)$. En general, si $T \in \Lambda^k(V)$ y $S \in \Lambda^l(V)$, el producto tensorial $T \otimes S$ no es alternante, pero en este caso el operador Alt es de utilidad. Definimos el ***producto exterior*** de T y S por

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S),$$

el cual es un $(k+l)$-tensor covariante alternante en V.

Definición 2.6.1. Una ***k-forma diferencial*** es un campo tensorial covariante alternante de tipo $(0, k)$ en una variedad M.

Denotamos por $\Omega^k(M)$ al conjunto de todas las k-formas diferenciales en una variedad M. Así, $\Omega^0(M)$ es el conjunto de las funciones diferenciables en M y $\Omega^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.

Notemos que, por lo presentado en la sección 2.2, un campo tensorial covariante A es alternante si y sólo si A_p es un tensor covariante alternante para cada $p \in M$. Por esta razón el producto exterior de una k-forma diferencial ω y una l-forma diferencial η es definida puntualmente:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p.$$

Así, $\omega \wedge \eta$ es una $(k+l)$-forma diferencial. Si f es una 0-forma diferencial y ω es una k-forma diferencial, el producto $f \wedge \omega$ expresa el producto $f\omega$.

Teorema 2.6.2. Sea M una variedad. Entonces existen operadores $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, llamada ***derivada exterior***, satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) d es lineal sobre $\mathbb{R}$.

(2) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(3) $d \circ d \equiv 0$.

(4) Para $f \in \Omega^0(M)$, df es la diferencial de f.

Sea ω una k-forma diferencial y $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado de M^n. Localmente podemos escribir ω como

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{en} \quad U,$$

donde $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ tales que $i_1 < \cdots < i_k$, y las funciones $\omega_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Antes de aplicar la derivada exterior a ω notemos que

$$\begin{aligned} d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d(dx^{i_1}) \wedge (dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) + (-1)^1 dx^{i_1} \wedge d(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &\vdots \\ &= (-1)^{k-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge d(dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum d\left(\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum \left(d(\omega_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + (-1)^0 \omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})\right) \\ &= \sum d(\omega_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} dx^i\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se sigue de (1.4), p. 21.

El siguiente teorema presenta una fórmula para la derivada exterior de una 1-forma diferencial y que será de utilidad posteriormente en está tesis.

Teorema 2.6.3. Sean X y Z campos vectoriales diferenciables en una variedad M y ω una 1-forma diferencial en M, entonces

$$d\omega(X, Z) = X\big(\omega(Z)\big) - Z\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Z]\big), \tag{2.2}$$

donde $[X, Z]$ es el corchete de Lie de X y Z definida en la sección 1.5.

Demostración. Ya que una uno-forma diferenciable ω puede expresarse localmente como $\sum_{i=1}^{n} f_i dx^i$, donde las f_i son diferenciables, es suficiente considerar este caso. Como además ambos lados de la ecuación (2.2) son $\mathbb{R}$-lineales en ω, podemos asumir que $\omega = f_1 dx^1$. Sean X, Z campos vectoriales diferenciables. Entonces el lado izquierdo de (2.2) es

$$\begin{aligned} d(f_1 dx^1)(X, Z) &= (df_1 \wedge dx^1)(X, Z) \\ &= df_1(X) dx^1(Z) - dx^1(X) df_1(Z) \\ &= (X f_1)(Z x^1) - (X x^1)(Z f_1). \end{aligned}$$

El lado derecho de (2.2) es

$$\begin{aligned}
&X\big(f_1 dx^1(Z)\big) - Z\big(f_1 dx^1(X)\big) - (f_1 dx^1)[X, Z]\\
&\quad = X\big(f_1(Zx^1)\big) - Z\big(f_1(Xx^1)\big) - f_1\big([X, Z]x^1\big)\\
&\quad = f_1 X(Zx^1) + (Zx^1)(Xf) - \big(f_1 Z(Xx^1) + (Xx^1)(Zf_1)\big) - f_1\big(X(Zx^1) - Z(Xx^1)\big)\\
&\quad = (Zx^1)(Xf_1) - (Xx^1)(Wf_1)
\end{aligned}$$

■

2.7. Variedades semi-riemannianas

A continuación definimos a las variedades semi-riemannianas que, en el caso particular de las variedades lorentzianas, serán de gran utilidad para este trabajo.

Definición 2.7.1. Sea M una variedad. Un ***tensor métrico*** g en M es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ en M simétrico y no-degenerado de índice constante.

En otras palabras, un tensor métrico g en M es una función tal que para cada punto $p \in M$, la forma bilineal $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_p(v, w) = g(V, W)(p),$$

donde V, W son campos vectoriales diferenciables en M tales que $V_p = v$ y $W_p = w$, es simétrica y no-degenerada en el espacio tangente T_pM y el índice de g_p es el mismo para cada $p \in M$. Dado que $g(V, W) \in C^\infty(M)$ para cualesquiera campos vectoriales diferenciables V, W en M, la asignación $p \mapsto g_p$ varía diferenciablemente.

Definición 2.7.2. Una ***variedad semi-riemanniana*** es una variedad diferenciable junto con un tensor métrico g.

Es decir, una variedad semi-riemanniana es una variedad M tal que en cada espacio tangente T_pM existe un producto escalar g_p. El valor común r del índice de g_p en una variedad semi-riemanniana M es llamado el ***índice*** de M y donde $0 \leq r \leq n = \dim M$. Si $r = 0$, M es una ***variedad riemanniana***; entonces cada g_p es un producto interno en T_pM. Si $r = 1$ y $n \geq 2$, M es una ***variedad lorentziana***.

Sea M una n-variedad con tensor métrico g. Usaremos $\langle\, , \rangle$ como notación alternativa para g, escribiendo $g(v, w) = \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ para vectores tangentes, y $g(V, W) = \langle V, W\rangle$ la función que pertenece a $C^\infty(M)$ para campos vectoriales diferenciables V, W en M.

Si $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ es un sistema coordenado en M, los componentes del tensor métrico g relativas a φ en U son

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Así, para campos vectoriales diferenciables $V = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i$, $W = \sum_{j=1}^{n} W^j \partial_j$ en M,

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V^i W^j.$$

Ya que g es no-degenerado, en cada punto $p \in U$ la matriz $(g_{ij}(p))$ es invertible, y su matriz inversa es denotada por $(g^{ij}(p))$. La fórmula usual para la inversa de una matriz muestra que las funciones g^{ij} son diferenciables en U.

Como g es simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$ y por lo tanto $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente en U podemos escribir al tensor métrico como

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

► **Ejemplo 13.** En el ejemplo 1 mostramos que $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad. Consideremos el isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ a $T_p\mathbb{R}^n$, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, que envía v a $v_p = \sum_{i=1}^{n} v^i\, \partial_i|_p$. Así, del producto punto en $\mathbb{R}^n$ obtenemos un tensor métrico en $T_p\mathbb{R}^n$ dado por

$$g_p(v_p, w_p) = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i.$$

De ahora en adelante el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ denotará a la variedad riemanniana que resulta de $\mathbb{R}^n$ con el tensor métrico anterior. ◄

► **Ejemplo 14.** Análogamente al ejemplo anterior, el espacio semi-euclidiano $\mathbb{R}^n_r$ denotará a la variedad semi-riemanniana que se origina de $\mathbb{R}^n$ con el tensor métrico

$$g_p(v_p, w_p) = -\sum_{i=1}^{r} v^i w^i + \sum_{j=r+1}^{n} v^j w^j$$

de índice r. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ es llamado el ***espacio de Minkowski***. El tensor métrico de $\mathbb{R}^n_r$ puede escribirse como

$$g = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, du^i \otimes du^i,$$

donde

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad 1 \le i \le r, \\ 1, & \text{si} \quad r+1 \le i \le n, \end{cases}$$

y $u^1, \ldots, u^n$ son las funciones coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$. ◄

Como vemos en los dos ejemplos anteriores, tensores métricos diferentes en la misma variedad constituyen diferentes variedades semi-riemannianas.

Definición 2.7.3. Un vector tangente v a M es

(1) ***tipo espacio*** o ***espacial***, si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$;

(2) ***tipo luz*** o ***nulo***, si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$;

(3) ***tipo tiempo*** o ***temporal***, si $\langle v, v \rangle < 0$.

El conjunto de todos los vectores nulos en T_pM es llamado el ***cono de luz*** en $p \in M$. La categoría a la que pertenece cada vector tangente es llamado su ***carácter causal***.

Definición 2.7.4. Sea P una subvariedad de una variedad semi-riemanniana M. Si $\iota^*(g)$, el pullback de g por la función inclusión $\iota : P \hookrightarrow M$, es un tensor métrico en P, diremos que P es una ***subvariedad semi-riemanniana*** **de** M.

A continuación definimos un tipo especial de función que expresa la noción de isomorfismo para variedades semi-riemannianas.

Definición 2.7.5. Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_M y g_N, respectivamente. Una ***isometría*** de M a N es un difeomorfismo $\phi : M \to N$ tal que $\phi^*(g_N) = g_M$.

Explícitamente $g_N(d\phi(v), d\phi(w)) = g_M(v, w)$ para todo $v, w \in T_pM$, $p \in M$.Ya que ϕ es un difeomorfismo, cada función diferencial $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal; así la condición de métrica quiere decir que cada $d\phi_p$ es una isometría lineal.

Asimismo, se tiene que:

(1) La función identidad de una variedad semi-riemanniana es una isometría.

(2) Una composición de isometrías es una isometría.

(3) La inversa de una isometría es una isometría.

Un objeto que se preserva bajo isometrías es llamado ***invariante isométrico***, y la ***geometría semi-riemanniana*** es tradicionalmente descrita como el estudio de tales invariantes. Si existe una isometría entre M y N, diremos que son ***variedades isométricas***; en general, las variedades isométricas son geométricamente las mismas.

2.8. La conexión de Levi-Civita

Sean V y W campos vectoriales en una variedad semi-riemanniana M. En esta sección se muestra como definir un nuevo campo $\nabla_V W$ en M cuyo valor en cada punto $p \in M$ es el vector de cambio de W en la dirección V_p. Hay una manera natural de hacer esto en $\mathbb{R}^n_r$.

Definición 2.8.1. Sean $u^1, \ldots, u^n$ las coordenadas naturales en $\mathbb{R}^n_r$. Si V y $W = \sum_{i=1}^n W^i \partial_i$ son campos vectoriales en $\mathbb{R}^n_r$, el campo vectorial

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W^i)\partial_i$$

es llamado la ***derivada covariante natural*** de W con respecto a V.

Para extender esta idea a una variedad semi-riemanniana, empezamos por definir el siguiente operador.

Definición 2.8.2. Una ***conexión*** ∇ en una variedad diferenciable M es una función

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (V, W) & \longmapsto & \nabla_V W, \end{array}$$

tal que

(D1) $\nabla_V W$ es $C^\infty(M)$-lineal en V:

$$\nabla_{f V_1 + g V_2} W = f\, \nabla_{V_1} W + g \nabla_{V_2} W \quad \text{para cada } f, g \in C^\infty(M),$$

(D2) $\nabla_V W$ es $\mathbb{R}$-lineal en W:

$$\nabla_V(aW_1 + bW_2) = a\nabla_V W_1 + b\nabla_V W_2 \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{R},$$

(D3) $\nabla_V(f\, W) = (Vf)W + f\, \nabla_V W \quad \text{para } f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_V W$ es llamado ***derivada covariante de*** W ***en la dirección de*** V .

La condición (D1) afirma que $\nabla_V W$ es un campo tensorial en V; así, por la proposición 2.2.1, para un vector tangente $v \in T_pM$ tenemos un vector tangente bien definido $\nabla_v W \in T_pM$, a saber, $(\nabla_V W)_p$ donde V es cualquier campo vectorial tal que $V_p = v$.

El siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [2], muestra que en una variedad semi-riemanniana existe una única conexión que comparte dos propiedades con la conexión natural en $\mathbb{R}^n_r$.

Teorema 2.8.3. En una variedad semi-riemanniana M existe una única conexión ∇ tal que

(D4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$,

(D5) $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$,

para toda $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y donde $[V, W]$ es el corchete de Lie de V y W definida en la sección 1.5. El término del lado izquierdo de la igual en (D5) es del tipo $Xf : M \to \mathbb{R}$, con la función diferenciable $f = \langle V, W\rangle$. Esta conexión única ∇ es llamada la ***conexión de Levi-Civita*** de M y es caracterizada por la ***fórmula de Koszul***:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle \\ +\langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle. \end{aligned}$$

Definición 2.8.4. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado en una variedad semi-riemanniana M. Los ***símbolos de Christoffel*** para este sistema coordenado son las funciones $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad \text{para } 1 \le i, j \le n.$$

Notemos que

$$[\partial_i, \partial_j]_p(f) = \partial_i|_p(\partial_j|_p f) - \partial_j|_p(\partial_i|_p f) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x^j \partial x^i} = 0.$$

Esto para todo $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$. Por lo tanto $[\partial_i, \partial_j] = 0$, se sigue de (D4) que $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$, así $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [2].

Proposición 2.8.5. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado en variedad semi-riemanniana M. Entonces,

(1) $\nabla_{\partial_i}\left(\sum_{j=1}^{n} W^j \partial_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} W^j \Gamma_{ij}^k\right)\partial_k$,

donde los símbolos de Christoffel están dados por

(2) $\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{g^{km}}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$.

Usando (D1) podemos calcular cualquier $\nabla_V W$ en una vecindad coordenada usando la primera fórmula de la proposición anterior, mientras que la segunda fórmula describe como el tensor métrico determina la conexión de Levi-Civita localmente.

Lema 2.8.6. La conexión natural ∇ de la definición 2.8.1 es la conexión de Levi-Civita del espacio semi-euclidiano $\mathbb{R}^n_r$ para $r = 0, 1, \ldots, n$. Con respecto a las coordenadas naturales en $\mathbb{R}^n_r$, tenemos

(1) $g_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$, donde $\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad 1 \le i \le r, \\ \ \ 1, & \text{si} \quad r+1 \le i \le n, \end{cases}$

(2) $\Gamma^k_{ij} = 0$,

para toda $1 \le i, j, k \le n$.

Demostración. De la definición del tensor métrico de $\mathbb{R}^n_r$:

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \, du^i|_p(\partial_i|_p) \, du^i|_p(\partial_j|_p) = \epsilon_i \delta_{ij}.$$

Para probar que ∇ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^n_r$ debemos verificar que satisface (D1)-(D5). Verifiquemos (D5). Ya que $\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^n \epsilon_i V^i W^i$, entonces

$$\begin{aligned} X_p \langle V, W \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i X_p(V^i) W^i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i V^i X_p(W^i) \\ &= \langle \nabla_{X_p} V, W \rangle + \langle V, \nabla_{X_p} W \rangle. \end{aligned}$$

La parte (2) se sigue de la proposición 2.8.5 (2), ya que las g_{ij} son constantes. ∎

El siguiente lema, cuya demostración puede verse en [7], muestra que la conexión de Levi-Civita induce una única función en $\mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}^r_s(M)$ que permite calcular las derivadas covariantes de cualquier campo tensorial en la dirección de cualquier campo vectorial.

Lema 2.8.7. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita en una variedad semi-riemanniana M. Entonces existe una única función

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_s(M) \quad \text{para cada } \ r \ge 0, \ s \ge 0,$$

que también llamamos ***conexión***, tal que las siguientes condiciones se satisfacen.

(1) ∇ es la conexión de Levi-Civita cuando $r = 1$ y $s = 0$,

(2) $\nabla_V f = Vf$, para $f \in C^\infty(M)$,

(3) ∇ cumple la regla del producto con respecto al producto tensorial:

$$\nabla_V(A \otimes B) = \nabla_V A \otimes B + A \otimes \nabla_V B,$$

(4) $\nabla_V(CA) = C\,\nabla_V(A)$, para cualquier contracción C.

Esta conexión satisface la siguiente propiedad adicional:

$$\begin{aligned}(\nabla_V A)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= V(A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} A(\omega^1, \dots, \nabla_V \omega^i, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{s} A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \nabla_V X_j, \dots, X_s),\end{aligned} \tag{2.3}$$

para cualquier $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, campos vectoriales X_j y uno-formas ω^i.

Para un $(1, s)$-campo tensorial A expresado como una función $C^\infty(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_V A$ tiene una expresión similar a (2.3):

$$(\nabla_V A)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_V(A(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^{n} A(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s). \tag{2.4}$$

El (r, s)-campo tensorial $\nabla_V A$ es $C^\infty(M)$-lineal en $V \in \mathfrak{X}(M)$, esto permite definir otro campo tensorial como sigue.

Definición 2.8.8. La ***diferencial covariante*** de un (r, s)-campo tensorial A en M es el $(r, s+1)$-campo tensorial ∇A tal que

$$\nabla A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s),$$

para toda $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$.

En el caso $r = s = 0$ la diferencial covariante de $f \in C^\infty(M)$ es su diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, ya que

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V) \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{X}(M).$$

Un campo tensorial A es ***paralelo*** si su diferencial covariante es cero, esto es, $\nabla_V A = 0$ para todo campo vectorial V. Usando (2.3) tenemos que (D5) es equivalente al paralelismo del tensor métrico g.

2.9. Transporte paralelo

Un ***campo vectorial a lo largo de una curva*** α es una función diferenciable $V : I \to TM$ tal que $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ para cada $t \in I$. La velocidad α' y la restricción V_α de cualquier campo vectorial V a α son ejemplos de campos vectoriales a lo largo de α. El conjunto $\mathfrak{X}(\alpha)$ de todos los campos vectoriales a lo largo de α es un módulo sobre $C^\infty(I)$.

Proposición 2.9.1. Sea $\alpha : I \to M$ una curva en una variedad semi-riemanniana M. Entonces existe una única función

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) \to \mathfrak{X}(\alpha),$$

definida por $Z \mapsto \frac{DZ}{dt} = Z'$, que satisface las siguientes propiedades:

(1) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$, para $a, b \in \mathbb{R}$,

(2) $(hZ)' = (dh/dt)Z + hZ'$, para $h \in C^\infty(I)$,

(3) $(V_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}V$, para $t \in I$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Además esta función satisface

(4) $(d/dt)\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

Dado $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, Z' es llamado la ***derivada covariante de** Z **a lo largo de** α.*

Demostración. Para la unicidad supongamos que existe tal función y que cumple las primeras tres propiedades. Podemos asumir que $\alpha(I) \subset U$, donde $(U, (x^i))$ es un sistema coordenado de M. Si $Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} Z^j(t)\, \partial_j\big|_{\alpha(t)}, \quad \text{donde} \quad Z^j \in C^\infty(I).$$

Por las propiedades (1), (2) y (3)

$$Z'(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dZ^j}{dt}(t)\, \partial_j\big|_{\alpha(t)} + Z^j(t)\nabla_{\alpha'(t)}\partial_j \right). \tag{2.5}$$

Considerando la expresión coordenada $\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n}(x^i \circ \alpha)(t)\ \partial_i|_{\alpha(t)}$ y usando los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha'(t)}\partial_j &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t)\nabla_{\partial_i|_{\alpha(t)}}\partial_j \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t)\Gamma_{ij}^{k}(\alpha(t))\ \partial_k|_{\alpha(t)}\,.\end{aligned}$$

Sustituimos lo anterior en (2.5) y mediante un cambio de índices

$$Z'(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dZ^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} Z^j(t)\frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t)\Gamma_{ij}^{k}(\alpha(t))\right)\partial_k|_{\alpha(t)}\,. \tag{2.6}$$

Esto muestra que Z' está determinada completamente por $x^i \circ \alpha$, Z^j y sus derivadas, así como de los símbolos de Christoffel, por lo que D/dt es única.

Para la existencia, en cualquier subintervalo J de I tal que $\alpha(J)$ pertenece a una vecindad coordenada de M, definimos Z' por la fórmula anterior, es fácil verificar que satisface las propiedades requeridas. En el caso general podemos cubrir $\alpha(I)$ con cartas coordenadas y definir Z' por (2.6) en cada carta, y la unicidad implica que las diversas definiciones concuerdan siempre que dos o más cartas se intersecten. ▪

En el caso especial $Z = \alpha'$, la derivada covariante $Z' = \alpha''$ es llamada la ***aceleración*** de la curva α.

Diremos que Z es ***paralelo*** si $Z' = 0$. La expresión (2.6) muestra que la ecuación $Z' = 0$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Así, por el teorema fundamental de existencia y unicidad para tales sistemas resulta:

Proposición 2.9.2. Dada una curva $\alpha : I \to M$, $a \in I$ y $v \in T_{\alpha(a)}M$ existe un único campo vectorial paralelo Z a lo largo de α tal que $Z(a) = v$.

Si $\alpha : I \to M$ es una curva y $a, b \in I$, la función

$$P_{a\,b} : T_{\alpha(a)}M \to T_{\alpha(b)}M$$

enviando a cada $v \in T_{\alpha(a)}M$ a $P_{a\,b}(v) = Z(b)$, donde Z es el campo vectorial dado por la proposición 2.9.2, es llamada ***el transporte paralelo a lo largo de*** α **de** $\alpha(a)$ **a** $\alpha(b)$.

Lema 2.9.3. La función $P_{a\,b}$ es una isometría lineal.

Demostración. Sean $v, w \in T_{\alpha(a)}M$, existen campos vectoriales paralelos únicos Z_1 y Z_2 a lo largo de α tales que $Z_1(a) = v$ y $Z_2(a) = w$.

Como $(Z_1 + Z_2)' = Z_1' + Z_2' = 0$, $Z_1 + Z_2$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $(Z_1 + Z_2)(a) = v + w$. Por otra parte $v + w \in T_{\alpha(a)}M$, así existe un campo vectorial paralelo único Z_3 a lo largo de α tal que $Z_3(a) = v + w$, en consecuencia $Z_3 = Z_1 + Z_2$. Así

$$P_{a\,b}(v + w) = Z_3(b) = (Z_1 + Z_2)(b) = Z_1(b) + Z_2(b) = P_{a\,b}(v) + P_{a\,b}(w).$$

Análogamente, $P_{a\,b}(tv) = tP_{a\,b}(v)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si $P_{a\,b}(v) = P_{a\,b}(w)$, entonces por la unicidad $v = Z_1(a) = Z_2(a) = w$. Así $P_{a\,b}$ es inyectiva, y ya que los espacios tangentes a M tienen la misma dimensión, $P_{a\,b}$ es un isomorfismo.

Finalmente,

$$\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle = \langle 0, Z_2\rangle + \langle Z_1, 0\rangle = 0.$$

Así $\langle Z_1, Z_2\rangle$ es constante, por lo que

$$\langle P_{a\,b}(v), P_{a\,b}(w)\rangle = \langle Z_1(b), Z_2(b)\rangle = \langle Z_1(a), Z_2(a)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

∎

2.10. Geodésicas

Con la noción de derivada covariante a lo largo de curvas, ahora podemos definir la generalización de la noción de linea recta euclidiana. Sea M una variedad semi-riemanniana.

Una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ es una ***geodésica*** en M si su campo vectorial γ' es paralelo. De manera equivalente, las geodésicas son las curvas de aceleración cero: $\gamma'' = 0$.

Corolario 2.10.1. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado en M. Una curva $\gamma : I \to U$ es una geodésica de M si y sólo si las funciones componentes de su representación coordenada $\gamma(t) = ((x^1 \circ \gamma)(t), \ldots, (x^n \circ \gamma)(t))$ satisfacen

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt}(t)\frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

para $1 \leq k \leq n$.

Lo anterior se sigue de la expresión (2.6) para $Z = \gamma'$ y claramente son los componentes de γ'' relativas a los campos vectoriales coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [2].

Lema 2.10.2. Sea M una variedad semi-riemanniana.

(1) Si $p \in M$ y $v \in T_pM$, existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a 0 y una geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

(2) Si $\alpha, \beta : I \to M$ son geodésicas y existe $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, entonces $\alpha = \beta$.

Proposición 2.10.3. Para cualquier $p \in M$ y $v \in T_pM$, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \to M$ tal que

(1) La velocidad inicial de γ_v es v; esto es, $\gamma'_v(0) = v$.

(2) El dominio I_v de γ_v es el más grande. Así, si $\alpha : J \to M$ es una geodésica con velocidad inicial v, entonces $J \subseteq I_v$ y $\alpha = \gamma_v|_J$.

Demostración. Sea G la colección de todas las geodésicas $\gamma : I_\gamma \to M$ con velocidad inicial v ($G \neq \emptyset$ por el lema 2.10.2 (1)). El lema 2.10.2 (2) muestra que $\alpha, \beta \in G$ coinciden en $I_\alpha \cap I_\beta$. Así la colección G define una única curva en el intervalo $I_v = \bigcup I_\gamma$ que cumple las propiedades requeridas. ∎

Por la proposición 2.10.3 (2), la geodésica γ_v es llamada ***geodésica maximal***. La notación γ_v será usada frecuentemente.

Una curva α en M es ***espacial*** si todos sus vectores velocidad $\alpha'(s)$ son de tipo espacio; de manera similar para una curva ***temporal*** y ***nula***. Una curva arbitraria no tiene que tener algún carácter causal de este tipo, pero una geodésica siempre tiene un carácter causal ya que γ' es paralelo, y el transporte paralelo preserva el carácter causal de los vectores.

Lema 2.10.4. Sea γ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h : J \to M$ es una geodésica si y sólo si h tiene la forma $h(t) = at + b$.

Demostración. Para cualquier curva γ, $(\gamma \circ h)'(t) = (dh/dt)(t)\gamma'(h(t))$. Así

$$(\gamma \circ h)''(t) = \frac{d^2h}{dt^2}(t)\gamma'(h(t)) + \left(\frac{dh}{dt}(t)\right)^2 \gamma''(h(t)).$$

Ya que γ es una geodésica, $\gamma'' = 0$, y γ no constante implica que $\gamma' \neq 0$. Por lo tanto, $\gamma \circ h$ es una geodésica $\Leftrightarrow$ $(\gamma \circ h)'' = 0$ $\Leftrightarrow$ $d^2h/dt^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $h(t) = at + b$. ∎

El teorema para flujos globales de campos vectoriales [12, theorems IV.4.3 y IV.4.5] tiene como consecuencia el siguiente lema.

Lema 2.10.5. Sea $v \in TM$. Entonces existe una vecindad V de v en TM y un intervalo abierto I en $\mathbb{R}$ que contiene a 0 tal que

$$\rho : I \times V \to M$$

dada por $\rho(s, w) = \gamma_w(s)$ está bien definida y es diferenciable.

2.11. La función exponencial

Para un mejor entendimiento de las geodésicas en una variedad semi-riemanniana necesitamos estudiar su comportamiento colectivo, para ello definimos una función importante, la exponencial.

Definición 2.11.1. Sea M una variedad semi-riemanniana, $p \in M$ y

$$\varepsilon_p = \{v \in T_pM \ : \ \text{la geodésica maximal } \gamma_v \text{ está definida al menos en } [0,1]\}.$$

La ***función exponencial*** de M en p es la transformación $\exp_p : \varepsilon_p \to M$ tal que

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

para todo $v \in \varepsilon_p$.

Sea $v \in T_pM$ y $c, t \in \mathbb{R}$, entonces definimos la curva $\tilde{\gamma}_v : J \to M$ por $\tilde{\gamma}_v(t) = \gamma_v(ct)$, donde $J = \{t \ : \ ct$ pertenece al dominio de $\gamma_v\}$. Por el lema 2.10.4, $\tilde{\gamma}_v$ es una geodésica tal que $\tilde{\gamma}_v(0) = p$ y $\tilde{\gamma}\,'_v(0) = cv$, por la unicidad de las geodésicas entonces $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$, siempre que uno de los dos lados este definido. Así, dado $v \in T_pM$, podemos obtener la geodésica γ_v a partir de la función exponencial:

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(tv).$$

Proposición 2.11.2. Para cada $p \in M$, existen vecindades U y $\widetilde{U}$ de p y $0 \in T_pM$, respectivamente, tal que la función $\exp_p : \widetilde{U} \to U$ es un difeomorfismo.

Demostración. Del lema 2.10.5 tenemos que $\exp_p$ es una función bien definida y diferenciable en una vecindad de $0 \in T_pM$. Ya que T_pM es un espacio vectorial, existe una identificación natural $T_0(T_pM) = T_pM$. Usando esta identificación mostramos que

$$d(\exp_p)_0 : T_0(T_pM) = T_pM \to T_pM$$

es la función identidad. Para cada $v \in T_pM$, consideremos la curva $\tau(t) = tv$, claramente $\tau(0) = 0$ y $\tau'(0) = v$. Como $(\exp_p \circ \tau)(t) = \exp_p(tv) = \gamma_v(t)$, entonces

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0(v) &= d(\exp_p)_0(\tau'(0)) = d(\exp_p)_0 \left(d\tau \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) \right) \\ &= d(\exp_p \circ \tau)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) = (\exp_p \circ \tau)'(0) = \gamma'_v(0) = v. \end{aligned}$$

El resultado se sigue ahora del teorema de la función inversa. ■

Una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ para T_pM origina un isomorfismo $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$ definida por $E(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Sean U y $\widetilde{U}$ vecindades de $p \in M$ y $0 \in T_pM$ que cumplen las propiedades de la proposición 2.11.2, podemos componer este isomorfismo E con la función exponencial $\exp_p : \widetilde{U} \to U$ para conseguir un sistema coordenado

$$\varphi = E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$$

dado por $\varphi(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q))$, para todo $q \in U$ y donde $\exp_p^{-1}(q) = \sum_{i=1}^n x^i(q) e_i$, ya que $\exp_p^{-1}(q) \in \widetilde{U} \subseteq T_pM$. El sistema coordenado (U, φ) determinado por $e_i, \ldots, e_n$ es llamado ***sistema coordenado normal***.

Sea $f^1, \ldots, f^n$ la base dual a $e_1, \ldots, e_n$. Como $\exp_p(e_j) \in U$, entonces

$$e_j = \exp_p^{-1}(\exp_p(e_j)) = \sum_{i=1}^n x^i(\exp_p(e_j)) e_i,$$

es decir, $(x^i \circ \exp_p)(e_j) = \delta_{ij}$. Por lo tanto, $f^i = x^i \circ \exp_p$ en U.

Proposición 2.11.3. Sea $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema coordenado normal en $p \in M$, entonces

(1) $g_{ij}(p) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad$ donde $\quad \epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$,

(2) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

Demostración. Continuando con la notación anterior, si $v \in T_pM$ podemos escribir $v = \sum_{i=1}^n a^i e_i$. Consideremos la geodésica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ cuya representación coordenada con respecto al sistema coordenado normal es

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_v(t) &= ((x^1 \circ \gamma_v)(t), \ldots, (x^n \circ \gamma_v)(t)) \\ &= (x^1(\exp_p(tv)), \ldots, x^n(\exp_p(tv))) \\ &= (f^1(tv), \ldots, f^n(tv)) \\ &= (ta^1, \ldots, ta^n). \end{aligned}$$

Así $v = \gamma'_v(0) = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i|_p$. Por lo que $e_j = \partial_j|_p$, en consecuencia $g_{ij}(p) = g_p(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = \langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$. Por la forma de la representación coordenada para γ_v, las ecuaciones dadas por el corolario 2.10.1 se reducen a

$$\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) a^i a^j = 0, \quad \text{para toda} \quad 1 \leq k \leq n.$$

En el caso particular $t = 0$, $\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p)) a^i a^j = 0$ para toda $a = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$. Tomando a tal que $a^i = a^j = 1$ y las otras entradas son cero, obtenemos

$$\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0.$$

Concluimos que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para toda $1 \leq k \leq n$, debido a la simetría de los símbolos de Christoffel. ■

2.12. Curvatura

El estudio de superficies en $\mathbb{R}^3$ nos presenta la *curvatura gaussiana* que es una buena herramienta para entender el comportamiento de las superficies y cuya principal característica es ser invariante bajo isometrías. Como veremos, mediante algunos cambios esta idea se extiende a variedades semi-riemannianas.

Lema 2.12.1. Sea M una variedad semi-riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita . La función $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z,$$

es un $(1,3)$-campo tensorial en M llamado el ***tensor de curvatura riemanniana*** de M.

Demostración. Por lo mencionado en la sección 2.3, podemos interpretar a R como un elemento de $\mathcal{T}_3^1(M)$ siempre que R sea $C^\infty(M)$-multilineal. Claramente R es $\mathbb{R}$-multilineal. Para $f \in C^\infty(M)$, ya que $[X, fY] = Xf \cdot Y + f[X,Y]$, obtenemos

$$\begin{aligned} R_{X(fY)}Z &= \nabla_{[X,fY]}Z - \nabla_X \nabla_{fY} Z + \nabla_{fY} \nabla_X Z \\ &= Xf\, \nabla_Y Z + f\, \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X f\, \nabla_Y Z + f\, \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= f(\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z) \\ &= f R_{XY} Z. \end{aligned}$$

De la definición de R se tiene que $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$, así lo anterior muestra que R es lineal sobre $C^\infty(M)$ en X y Y. En el caso de Z tenemos

$$\begin{aligned} R_{XY}(fZ) &= \nabla_{[X,Y]}(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) + \nabla_Y\nabla_X(fZ) \\ &= [X,Y]f \cdot Z + f\,\nabla_{[X,Y]}Z - X(Yf)\cdot Z - Yf\,\nabla_X Z - Xf\,\nabla_Y Z \\ &\quad - f\,\nabla_X\nabla_Y Z + Y(Xf)\cdot Z + Xf\,\nabla_Y Z + Yf\,\nabla_X Z + f\,\nabla_Y\nabla_X Z \\ &= fR_{XY}Z. \end{aligned}$$

∎

El corchete de Lie y la derivación covariante en campos vectoriales no son campos tensoriales, pero la combinación de ambos origina el campo tensorial R. Recurrimos a la notación alternativa $R(X,Y)Z$ para $R_{XY}Z$ cuando X y Y tengan expresiones más complicadas.

Como se mostró en la sección 2.2, el vector $(R_{XY}Z)_p$ para cada $p \in M$ depende únicamente de los valores de X, Y y Z en p y no de los valores de estos campos vectoriales en una vecindad de p o los valores de estos en todo M. Por esta razón, dado $x, y \in T_pM$, la siguiente función lineal tiene sentido:

$$R_{xy} : T_pM \to T_pM$$

dada por $R_{xy}\,z = (R_{XY}Z)_p$, donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = x, Y_p = y$ y $Z_p = z$. Esta función R_{xy} es llamada ***operador curvatura***. Las siguientes identidades son las ***simetrías*** de la curvatura.

Proposición 2.12.2. Si $x, y, z, v, w \in T_pM$, entonces

(1) $R_{xy} = -R_{yx}$,

(2) $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$,

(3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$,

(4) $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$.

Las primeras dos identidades muestran propiedades antisimétricas del tensor curvatura y la ecuación (3) es llamada la ***primera identidad de Bianchi***.

Demostración. Debido a que la derivada covariante ∇_X y el corchete de Lie en campos vectoriales son operadores locales, es suficiente considerar cualquier vecindad de p. Para nuestros propósitos eligiremos campos vectoriales extendidos X, Y en una vecindad de p para $x, y \in T_pM$ tal que $[X,Y] = 0$, $X_p = x$ y $Y_p = y$. Así $R_{XY}Z$ se reduce a $\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z$.

(1) Esto es consecuencia de que $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$.

(2) Es suficiente mostrar que $\langle R_{xy}v, v\rangle = 0$ para todo $v \in T_pM$, entonces el resultado se sigue del desarrollo de $\langle R_{xy}(v+w), (v+w)\rangle = 0$. Usando (D5) del teorema 2.8.3,

$$\begin{aligned}\langle R_{XY}V, V\rangle &= \langle \nabla_Y\nabla_X V, V\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y V, V\rangle \\ &= Y\langle \nabla_X V, V\rangle - X\langle \nabla_Y V, V\rangle \\ &= \frac{1}{2}Y(\langle \nabla_X V, V\rangle + \langle V, \nabla_X V\rangle) - \frac{1}{2}X(\langle \nabla_Y V, V\rangle + \langle V, \nabla_Y V\rangle) \\ &= \frac{1}{2}Y(X\langle V, V\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle V, V\rangle) \\ &= -\frac{1}{2}[X, Y]\langle V, V\rangle = 0,\end{aligned}$$

ya que $[X, Y] = 0$.

(3) De la definición de R y la propiedad (D4) del teorema 2.8.3,

$$\begin{aligned}R_{XY}Z + R_{Y,Z}X + R_{ZX}Y = &-\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_Y\nabla_Z X \\ &+ \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_Y Z \\ = &\ \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) \\ &+ \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_{[Z,X]}Y \\ = &\ \nabla_X[Z, Y] + \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y, X] + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_{[Z,X]}Y \\ = &-([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]) = 0,\end{aligned}$$

esto último debido a la identidad de Jacobi.

(4) Usando la identidad de Bianchi con y, v, x y w permutados cíclicamente obtenemos

$$\begin{aligned}\langle R_{yv}x, w\rangle + \langle R_{vx}y, w\rangle + \langle R_{xy}v, w\rangle &= 0\\ \langle R_{vx}w, y\rangle + \langle R_{xw}v, y\rangle + \langle R_{wv}x, y\rangle &= 0\\ \langle R_{xw}y, v\rangle + \langle R_{wy}x, v\rangle + \langle R_{yx}w, v\rangle &= 0\\ \langle R_{wy}v, x\rangle + \langle R_{yv}w, x\rangle + \langle R_{vw}y, x\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Sumamos las cuatro ecuaciones. Aplicando (2) a los términos en las primeras dos columnas hace que estas se cancelen y de la última columna, aplicando (1) y (2), obtenemos

$$2\langle R_{xy}v, w\rangle - 2\langle R_{vw}y, x\rangle = 0.$$

Así $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$.

■

La diferencial covariante de R satisface una identidad más llamada la ***segunda identidad de Bianchi***. Por definición ∇R es un $(1,4)$-campo tensorial que podemos considerar como una función $C^\infty(M)$-multilineal $\nabla R : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\nabla R(X,Y,V,Z) = (\nabla_Z R)(X,Y)V.$$

Aplicando (2.4) a la expresión anterior, resulta

$$(\nabla_Z R)(X,Y)V = \nabla_Z(R(X,Y)V) - R(\nabla_Z X, Y)V - R(X, \nabla_Z Y)V - R(X,Y)(\nabla_Z V), \tag{2.7}$$

donde $R(X,Y,V) = R(X,Y)V$.

Al igual que R_{xy}, la transformación lineal $(\nabla_z R)(x,y) : T_pM \to T_pM$, para $x,y,z \in T_pM$, tiene sentido.

Proposición 2.12.3 (**Segunda Identidad de Bianchi**). Si $x,y,z \in T_pM$,

$$(\nabla_z R)(x,y) + (\nabla_x R)(y,z) + (\nabla_y R)(z,x) = 0.$$

Demostración. Como en la demostración de la proposición 2.12.2, extendemos los vectores tangentes x,y,z a campos vectoriales X,Y,Z con componentes constantes en una vecindad coordenada normal en p. Con estas consideraciones no solo el corchete de Lie de cualesquiera dos campos vectoriales X,Y,Z es cero, ya que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, sino que también la derivada covariante de cada uno de estos campos vectoriales con respecto a cualquier otro campo vectorial de estos es cero en p, ya que $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$. Sea V un campo vectorial. Evaluando $(\nabla_Z R)(X,Y)V$ en p los dos términos de en medio del lado derecho en (2.7) son cero y desarrollando el primer término,

$$(\nabla_Z R)(X,Y)V = \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X V - \nabla_Z\nabla_X\nabla_Y V - R(X,Y)(\nabla_Z V)$$

en p. Análogamente, obtenemos expresiones para $(\nabla_X R)(Y,Z)V$ y $(\nabla_Y R)(Z,X)V$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X,Y)V &+ (\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V \\
&= (\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X V - \nabla_Z\nabla_X\nabla_Y V - R(X,Y)(\nabla_Z V)) \\
&\quad + (\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y V - \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z V - R(Y,Z)(\nabla_X V)) \\
&\quad + (\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z V - \nabla_Y\nabla_Z\nabla_X V - R(Z,X)(\nabla_Y V)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en p y dado que V es arbitrario, entonces

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0.$$

∎

Sea $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ un sistema coordenado en M, entonces podemos escribir

$$R_{\partial_i \partial_j} \partial_k = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} \partial_l,$$

donde R^l_{ijk} son los componentes de R y están dados por

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} - \sum_{m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im}, \tag{2.8}$$

para $0 \leq i, j, k \leq n$.

Ahora consideramos una función real valuada que determina completamente a R.

Para $p \in M$, un subespacio Π de dimensión 2 del espacio tangente T_pM será llamado ***plano tangente*** de M en p. Para vectores tangentes v, w definimos

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

Por el lema 1.8.4, el plano tangente Π es no degenerado si y sólo si $Q(v, w) \neq 0$ para una base v, w de Π. El valor absoluto $|Q(v, w)|$ es el cuadrado del área del paralelogramo con lados v y w. $Q(v, w)$ es positiva si $g|_\Pi$ es definida, y es negativa si $g|_\Pi$ es indefinida.

Definimos la ***curvatura seccional*** como la función que asocia a cada plano tangente no degenerado Π de M en p, el número real

$$K(v, w) = \frac{\langle R_{vw} v, w\rangle}{Q(v, w)},$$

donde v, w es una base para Π. El valor de K es independiente de la elección de la base, ver [2].

Una variedad semi-riemanniana M cuyo tensor de curvatura R es cero en cada punto la llamaremos ***plana***. Notemos que M es plana si y sólo si la función curvatura seccional K es idénticamente cero. Por ejemplo, cada espacio semi-Eucliadiano $\mathbb{R}^n_r$ es una variedad plana, ya que en una vecindad coordenada los símbolos de Christoffel son cero y como consecuencia de (2.8) obtenemos que $R = 0$.

2.13. Superficies semi-riemannianas

Una ***superficie semi-riemanniana*** es una variedad semi-riemanniana M de dimensión dos. De manera similar, una ***superficie lorentziana*** es una variedad lorentziana M de dimensión dos.

Sea M una superficie semi-riemanniana y sea $(U, \varphi = (x^1, x^2))$ un sistema coordenado en M, para no complicar aún más la notación, en esta sección escribiremos $u = x^1$ y $v = x^2$, y también $\partial_1 = \partial_u$ y $\partial_2 = \partial_v$. Con estos cambios, los componentes del tensor métrico relativas a φ usualmente son denotados por

$$E = g_{11} = \langle \partial_u, \partial_u \rangle, \qquad F = g_{12} = g_{21} = \langle \partial_u, \partial_v \rangle, \qquad G = g_{22} = \langle \partial_v, \partial_v \rangle.$$

El elemento de línea es

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{y} \quad Q = Q(\partial_u, \partial_v) = EG - F^2.$$

Por lo tanto, $(g_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ y $(g^{ij}) = \frac{1}{Q}\left(\begin{smallmatrix} G & -F \\ -F & E \end{smallmatrix}\right)$. Entonces por la proposición 2.8.5, los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - (E_v/2) & G \end{vmatrix}, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E & E_u/2 \\ F & F_u - (E_v/2) \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E_v/2 & F \\ G_u/2 & G \end{vmatrix}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E & E_v/2 \\ F & G_u/2) \end{vmatrix},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} F_v - (G_u/2) & F \\ G_v/2 & G \end{vmatrix}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} E & F_v - (G_u/2) \\ F & G_v/2 \end{vmatrix}.$$

Por el corolario 2.10.1 las ecuaciones de las geodésicas para una superficie semi-riemanniana se reducen a

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0, \end{aligned}$$

donde $u = u \circ \gamma$ y $v = v \circ \gamma$.

Como M tiene dimensión dos, T_pM es el único plano tangente a M en p. Así la curvatura seccional K se convierte en una función real valuada en M, llamada la ***curvatura gaussiana*** de M.

Un sistema coordenado en una n-variedad $\widetilde{M}$ es ***ortogonal***, si sus campos vectoriales coordenados cumplen que $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = 0$ para cada $i \neq j$, donde $1 \leq i, j \leq n$. En el caso particular de nuestra superfice semi-riemanniana M, que (U, φ) sea ortogonal implica que $F = 0$.

Proposición 2.13.1. Sea $(U, \varphi = (u, v))$ un sistema coordenado ortogonal en una superficie semi-riemanniana M. Entonces,

(1) $\nabla_{\partial_u}\partial_u = \dfrac{E_u}{2E}\,\partial_u - \dfrac{E_v}{2G}\,\partial_v, \qquad \nabla_{\partial_v}\partial_v = -\dfrac{G_u}{2E}\,\partial_u + \dfrac{G_v}{2G}\,\partial_v,$

$\nabla_{\partial_u}\partial_v = \nabla_{\partial_v}\partial_u = \dfrac{E_v}{2E}\,\partial_u + \dfrac{G_u}{2G}\,\partial_v.$

(2) Sea $e = |E|^{1/2}$ y $g = |G|^{1/2}$, y sean $\epsilon_E = \epsilon_G = \pm 1$ el signo de E y G respectivamente. Entonces

$$K = \frac{-1}{eg}\left(\epsilon_E\left(\frac{g_u}{e}\right)_u + \epsilon_G\left(\frac{e_v}{g}\right)_v\right). \tag{2.9}$$

Demostración. (1) El resultado se sigue tomando $F = 0$ en las expresiones anteriores para los símbolos de Christoffel.

(2) Por definición,

$$K = \frac{\langle R_{\partial_u\partial_v}\partial_u, \partial_v\rangle}{EG}. \tag{2.10}$$

Podemos escribir el numerador como

$$\langle R_{\partial_u\partial_v}\partial_u, \partial_v\rangle = -\langle \nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_v}\partial_u, \partial_v\rangle + \langle \nabla_{\partial_v}\nabla_{\partial_u}\partial_u, \partial_v\rangle.$$

Para expresar el numerador en terminos de los componentes del tensor métrico usamos la siguiente igualdad:

$$\langle \nabla_{\partial_u}\nabla_{\partial_v}\partial_u, \partial_v\rangle = \partial_u\langle \nabla_{\partial_v}\partial_u, \partial_v\rangle - \langle \nabla_{\partial_v}\partial_u, \nabla_{\partial_u}\partial_v\rangle,$$

por (1) el lado derecho de esta igualdad puede escribirse como

$$\frac{G_{uu}}{2} - \frac{(E_v)^2}{4E} - \frac{(G_u)^2}{4G}.$$

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_v}\nabla_{\partial_u}\partial_u, \partial_v\rangle &= \partial_v\langle \nabla_{\partial_u}\partial_u, \partial_v\rangle - \langle \nabla_{\partial_u}\partial_u, \nabla_{\partial_v}\partial_v\rangle,\\ &= -\frac{E_{vv}}{2} + \frac{E_uG_u}{4E} + \frac{E_vG_v}{4G}.\end{aligned}$$

Así, la fórmula para la curvatura se verifica calculando el lado derecho de (2.9) para obtener la expresión del lado derecho de la igualdad (2.10) con las respectivas sustituciones.

∎

Capítulo 3

El teorema de Gauss-Bonnet

En este capítulo restringiremos nuestra atención a las superficies lorentzianas que, por lo presentado en las secciones 2.7 y 2.13, son aquellas 2-variedades M en las que existe una función g que asocia de manera diferenciable a cada punto $p \in M$, un producto escalar g_p de índice uno en el espacio tangente T_pM.

A partir de lo mencionado en la sección 1.8, iniciamos este capítulo estudiando los conceptos básicos de los espacios vectoriales lorenzianos (como veremos, los espacios tangentes a las superficies lorentzianas son de este tipo) con la finalidad de definir una superficie lorentziana *tiempo-orientable*.

Veremos que para una superficie lorentziana M existe un sistema coordenado *global*, esto es, un sistema coordenado (U, φ) en M tal que $U = M$ que nos permitirá definir la noción de ángulo entre vectores temporales del espacio tangente lorentziano a M.

Haciendo uso de la métrica en M, las derivadas covariantes a lo largo de curvas dadas en la sección 2.9 y la diferencial de una uno-forma diferenciable presentada en la sección 2.6, definimos la curvatura geodésica y la forma de conexión asociada a una superficie lorentziana. Presentamos también dos resultados que expresan la derivada de la función ángulo y la diferencial de la forma de conexión en términos de la curvatura geodésica y la curvatura gaussiana, respectivamente, y que serán fundamentales en el desarrollo de la demostración del teorema de tipo Gauss-Bonnet local.

3.1. Variedades lorentzianas tiempo-orientables

Esta sección está basada en [2]. Para el estudio de los espacios tangentes de una variedad lorentziana, definimos un ***espacio vectorial lorentziano*** como un espacio vectorial con producto escalar de índice 1 y dimensión ≥ 2. Considerando que únicamente trataremos con espacios vectoriales lorentzianos V de dimensión finita n, por el lema 1.8.9, existe una isometría lineal entre V y el espacio semi-euclidiano $\mathbb{R}^n_1$, por esta razón consideraremos a $V = \mathbb{R}^n_1$ con el producto escalar (1.5) con $r = 1$. Para nuestros propósitos reemplazaremos este producto escalar con el producto escalar equivalente

$$\tilde{g}(p, q) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j q_j - p_n q_n, \tag{3.1}$$

por lo que de ahora en adelante $\mathbb{R}^n_1$ denotará un espacio vectorial lorentziano con el producto escalar (3.1).

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n_1$ y denotemos por $\tilde{g}|_W$ la restricción del producto escalar (3.1) a W. Entonces W es un subespacio

(1) ***tipo espacio*** o ***espacial***, si $\tilde{g}|_W$ es definida positiva;

(2) ***tipo tiempo*** o ***temporal***, si $\tilde{g}|_W$ es no degenerado de índice 1;

(3) ***tipo luz***, si $\tilde{g}|_W$ es degenerado.

El ***carácter causal*** de W es el tipo de subespacio al que pertenece. Esta definición es consistente con la definición 2.7.3 en el sentido de que el carácter causal de un vector individual p es el mismo que el carácter causal del subespacio gen (p), el generado por p. Al vector cero y al subespacio cero los consideraremos tipo espacio.

Lema 3.1.1. Sea $p \in \mathbb{R}^n_1$ un vector tipo tiempo, entonces el subespacio gen $(p)^\perp$ ortogonal a gen (p) es tipo espacio y $\mathbb{R}^n_1 = \text{gen }(p) \oplus \text{gen }(p)^\perp$.

Demostración. El subespacio gen (p) es no degenerado de índice 1. Por el teorema 1.8.6, $\mathbb{R}^n_1 = \text{gen }(p) \oplus \text{gen }(p)^\perp$. Así, ind $\mathbb{R}^n_1 = \text{ind (gen }(p)) + \text{ind (gen }(p)^\perp)$, esto implica que ind (gen $(p)^\perp) = 0$, por lo que gen $(p)^\perp$ es tipo espacio. ∎

Sea CT el conjunto de todos los vectores temporales en $\mathbb{R}^n_1$. El ***cono temporal futuro*** es el subconjunto

$$CT^+ = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \in LC \mid p_n > 0\},$$

y el ***cono temporal pasado*** es el subconjunto

$$CT^- = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \in LC \mid p_n < 0\}.$$

Por lo tanto, LC es la unión disjunta de estos dos conos temporales.

Lema 3.1.2. Sean p y q vectores temporales, entonces

(1) $g(p,q) < 0$, si p y q están en el mismo cono temporal,

(2) $|g(p,q)| \geq \|p\|\|q\|$, con la igualdad si y sólo si p es múltiplo de q.

Demostración. (1) Sea $p \in \mathbb{R}^n_1$, si escribimos $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{n-1})$, entonces $\|p\|^2 = \|\tilde{p}\|^2 - p_n^2$. Por lo que p es tipo tiempo si y sólo si $\|\tilde{p}\| < |p_n|$. Supongamos que p y q son vectores en el cono temporal futuro, entonces $\|\tilde{p}\| < p_n$ y $\|\tilde{q}\| < q_n$. Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la parte riemanniana,

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} \leq |\tilde{p} \cdot \tilde{q}| \leq \|\tilde{p}\|\|\tilde{q}\| < p_n q_n.$$

Por lo tanto, $g(p,q) = \tilde{p} \cdot \tilde{q} - p_n q_n < 0$. Procediendo de manera similar obtenemos el caso en que p y q son vectores en el cono temporal pasado.

(2) Escribiendo $q = ap + \tilde{q}$, donde $\tilde{q} \in \text{gen}\,(p)^{\perp}$, como q es temporal

$$0 > g(q,q) = a^2 g(p,p) + g(\tilde{q},\tilde{q}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g(p,q))^2 &= a^2\,(g(p,p))^2 \\ &= (g(q,q) - g(\tilde{q},\tilde{q}))\,g(p,p) \\ &\geq g(q,q)g(p,p) = \|p\|^2\|q\|^2.\end{aligned}$$

El resultado se sigue tomando raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad. La igualdad se cumple si y sólo si $g(\tilde{q},\tilde{q}) = 0$, esto es, $\tilde{q} = 0$, por lo tanto $q = ap$.

∎

Sea $t > 0$ y p, q vectores tipo tiempo contenidos en el mismo cono temporal. Es fácil ver que el vector tp es tipo tiempo, y que está contenido en el mismo cono temporal que p. Además, por el lema anterior

$$\|p+q\|^2 = \|p\|^2 + 2\tilde{g}(p,q) + \|q\|^2 < 0,$$

así $p+q$ es un vector tipo tiempo contenido en el mismo cono temporal que p y q. Por lo tanto, para $0 < t < 1$, el segmento de recta $(1-t)p + tq$ está contenido en el mismo cono temporal que p y q. De esta forma, los conos temporales son conjuntos convexos y, en consecuencia, conjuntos conexos. Así CT^+ y CT^- son los dos componentes conexos de CT.

Por todo lo anterior, para una variedad lorentziana M, el espacio tangente T_pM en el punto $p \in M$ es un espacio vectorial lorentziano en la que existen dos conos temporales. Diremos que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es ***temporal*** o ***tipo tiempo***, si para cada punto $p \in M$, el vector X_p es temporal en T_pM.

Definición 3.1.3. Una variedad lorentziana M es ***tiempo-orientable***, si admite un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Si M es tiempo-orientable, elegir un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$ fija una ***orientación temporal*** en M. Para cualquier $p \in M$, un vector temporal $v \in T_pM$ se dice que ***apunta al futuro*** (resp. ***apunta al pasado***), si $\langle X_p, v\rangle < 0$ (resp. $\langle X_p, v\rangle > 0$).

3.2. Ángulo en superficies espacio-tiempos

Esta sección está basada en [5]. Una ***superficie espacio-tiempo*** es una superficie lorentziana (es decir, una variedad lorentziana M de dimensión dos), conexa, orientable y tiempo-orientable. En esta sección y en las subsecuentes M denotará una superficie espacio-tiempo.

Para cada punto $p \in M$, el espacio tangente T_pM es orientable y tiene definido un producto escalar. Para cualquier vector temporal unitario $u \in T_pM$, denotamos por $u^\perp$ el único vector espacial unitario tal que $\langle u, u^\perp\rangle = 0$ y la base ordenada $\{u, u^\perp\}$ es orientada positivamente.

Definición 3.2.1. Un ***sistema coordenado lorentziano*** en M es una isometría $\varphi : M \to \mathbb{R}^2_1$ que preserva la orientación temporal.

Que φ preserve la orientación temporal quiere decir que dada una orientación temporal X en M, existe una orientación temporal $\widetilde{X}$ en $\mathbb{R}^2_1$ tal que en cada punto $p \in M$, si $v \in T_pM$ es un vector temporal que apunta al futuro (resp. apunta al pasado), entonces el vector $d\varphi_p(v)$ en $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2_1$ es un vector temporal que apunta al futuro (resp. apunta al pasado).

La función φ en la definición 3.2.1 es, en particular, un difeomorfismo, por lo mencionado en el ejemplo 6, p. 9, implica que φ es realmente un sistema coordenado en M.

Notemos que si $(U, \varphi = (x^1, x^2))$ es un sistema coordenado en M, entonces

$$d\varphi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{\varphi(p)}, \quad i = 1, 2.$$

Por lo que un sistema coordenado $\varphi : M \to \mathbb{R}^2_1$ en M es lorentziano si y sólo si $g_{ij} = \epsilon_i\delta_{ij}$, donde $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, -1)$. La demostración del siguiente lema se presenta en [2].

Lema 3.2.2. Sea e_1, e_2 una base ortonormal de T_pM tal que e_2 apunta al futuro. Entonces existe un único sistema coordenado lorentziano $\varphi = (x^1, x^2)$ tal que

$$\partial_1|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p = e_1 \qquad \text{y} \qquad \partial_2|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p = e_2.$$

Diremos que un sistema coordenado lorentziano $\varphi = (x^1, x^2)$ en M es ***admisible*** en T_pM, si el vector $\partial_2|_p$ es un vector temporal unitario que apunta al futuro y $(\partial_2|_p)^\perp = \partial_1|_p$, es decir, el conjunto $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ es una base ortonormal para T_pM.

Definición 3.2.3. Sean v, w vectores temporales unitarios en T_pM, con $p \in M$, que apuntan al futuro (o apuntan al pasado). El ***ángulo*** entre v y w, que denotamos por $\measuredangle(v, w)$, es el número no negativo θ tal que

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix},$$

donde senh y cosh denotan al seno hiperbólico y al coseno hiperbólico, respectivamente, y los pares ordenados (v^1, v^2) y (w^1, w^2) son los componentes de v y w, respectivamente, con respecto a un sistema coordenado lorentziano admisible $\varphi = (x^1, x^2)$ en T_pM.

Observemos que si (v^1, v^2) y (w^1, w^2) son los componentes dadas en la definición anterior y $\tilde{g}$ es el producto escalar (3.1) en $\mathbb{R}^2_1$, entonces

$$-\tilde{g}((v^1, v^2), (w^1, w^2)) = \cosh\theta, \tag{3.2}$$

donde el lado izquierdo de esta igualdad es mayor o igual que uno, esto por el lema 3.1.2. Así, por ser cosh biyectivo restringida a ángulos no negativos

$$\theta = \cosh^{-1}\big(-\tilde{g}((v^1, v^2), (w^1, w^2))\big),$$

es decir, el ángulo θ existe y es único.

Veamos ahora que θ es independiente del sistema coordenado lorentziano admisible elegido. Sea $\psi = (y^1, y^2)$ otro sistema coordenado lorentziano admisible en T_pM y los vectores $(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$ y $(\tilde{w}^1, \tilde{w}^2)$ los componentes de v y w, respectivamente, con respecto a ψ y denotemos por $\tilde{\theta}$ el ángulo entre estos vectores también con respecto ψ. Ya que las bases $\{\partial/\partial x^1|_p, \partial/\partial x^2|_p\}$ y $\{\partial/\partial y^1|_p, \partial/\partial y^2|_p\}$ son ortonormales, la matriz de cambio de base A con respecto a estas bases es una matriz semi-ortogonal, es decir, la función $A : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^2_1$ dada por $A(u) = Au$ es una isometría lineal. Ya que $A(v^1, v^2) = (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$ y $A(w^1, w^2) = (\tilde{w}^1, \tilde{w}^2)$,

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= -\tilde{g}((v^1, v^2), (w^1, w^2)) \\ &= -\tilde{g}(A(v^1, v^2), A(w^1, w^2)) \\ &= -\tilde{g}((\tilde{v}^1, \tilde{v}^2), (\tilde{w}^1, \tilde{w}^2)) = \cosh\tilde{\theta}, \end{aligned}$$

por la unicidad del ángulo entre v y w obtenemos que $\theta = \tilde{\theta}$. Así, el ángulo entre dos vectores temporales unitarios está bien definido.

Sean v un vector temporal unitario que apunta al futuro y w un vector temporal unitario que apunta al pasado. Notemos que $-w$ apunta al futuro, luego si $\theta = \measuredangle(-w, v)$, entonces

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w^1 \\ -w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix},$$

y, en consecuencia,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(-\theta) & \operatorname{senh}(-\theta) \\ \operatorname{senh}(-\theta) & \cosh(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}.$$

Ignoramos la matriz $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ para obtener la siguiente definición.

Definición 3.2.4. Sea v un vector temporal unitario que apunta al futuro y w un vector temporal unitario que apunta al pasado (o viceversa). Definimos el ***ángulo*** $\measuredangle(v, w) = -\theta$ donde $\theta = \measuredangle(-w, v)$.

Lema 3.2.5. Sean v, w y z vectores temporales unitarios en T_pM, entonces

(1) $\measuredangle(v, v) = 0$;

(2) $\measuredangle(v, w) + \measuredangle(w, z) = \measuredangle(v, z)$;

(3) $\measuredangle(v, -v) = \measuredangle(-v, v) = 0$;

(4) $\measuredangle(v, w) = -\measuredangle(w, v)$;

(5) $\measuredangle(-v, w) = \measuredangle(v, w)$;

(6) $\measuredangle(v, -w) = \measuredangle(v, w)$.

Demostración. (1) $\left(\begin{smallmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} v^1 \\ v^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} v^1 \\ v^2 \end{smallmatrix}\right)$ si y sólo si $\left(\begin{smallmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz identidad, por lo tanto $\theta = \measuredangle(v, v) = 0$. (2) Basta considerar tres casos: (i) cuando los vectores v, w, z apuntan al futuro; (ii) los vectores v, w apuntan al futuro y z apunta al pasado; (iii) los vectores v, z apuntan al futuro y w apunta al pasado. Verificamos el caso (i). Para los casos (ii) y (iii) se procede de manera análoga. Si $\measuredangle(v, w) = \theta_1$ y $\measuredangle(w, z) = \theta_2$, entonces por definición tenemos que

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & -\operatorname{senh}\theta_1 \\ -\operatorname{senh}\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & -\operatorname{senh}\theta_2 \\ -\operatorname{senh}\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix};$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & -\operatorname{senh}\theta_1 \\ -\operatorname{senh}\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta_2 & -\operatorname{senh}\theta_2 \\ -\operatorname{senh}\theta_2 & \cosh\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{senh}(\theta_1+\theta_2) \\ -\operatorname{senh}(\theta_1+\theta_2) & \cosh(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

se sigue que $\measuredangle(v,z) = \theta_1 + \theta_2 = \measuredangle(v,w) + \measuredangle(w,z)$. El resto de las propiedades del ángulo son consecuencia de (1) y (2). ▪

3.3. Curvatura geodésica

Esta sección está basada en [6]. Sea $\gamma : I \to M$ una curva temporal en M de *velocidad unitaria*, esto es, $\|\gamma'(s)\| = 1$, $s \in I$. Sea $T(s) := \gamma'(s)$, entonces $T(s)$ es un vector temporal unitario en cada punto s en el intervalo abierto I en $\mathbb{R}$. Elegimos el vector normal unitario $T^{\perp}(s)$ a lo largo de γ. La ***curvatura geodésica*** $\kappa_g : I \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\kappa_g(s) = \left\langle \frac{DT}{ds}(s), T^{\perp}(s) \right\rangle, \tag{3.3}$$

donde DT/ds es la derivada covariante de T a lo largo de γ. Como $\langle T(s), T(s)\rangle = -1$, entonces

$$\frac{d}{ds}\langle T(s), T(s)\rangle = 0.$$

Por la proposición 2.9.1 (4),

$$2\left\langle \frac{DT}{ds}(s), T(s) \right\rangle = 0.$$

Ya que el espacio tangente de M en $\gamma(s)$ es de dimensión dos y DT/ds es ortogonal a T, DT/ds debe ser múltiplo de $T^{\perp}$, es decir,

$$\frac{DT}{ds}(s) = \sigma(s) T^{\perp}(s),$$

para una función $\sigma : I \to \mathbb{R}$. De esto último y (3.3) obtenemos $\kappa_g(s) = \sigma(s)$. Por lo tanto

$$\frac{DT}{ds}(s) = \kappa_g(s) T^{\perp}(s).$$

Ahora sea Z un campo vectorial temporal unitario paralelo a lo largo de γ y X un campo vectorial temporal unitario definido por la orientación temporal de M. Si Z apunta al futuro para algún $a \in I$, entonces $Z(s)$ apunta al futuro para cada $s \in I$. En efecto, sea $s \in I$ y $P_{as} : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(s)}$ el transporte paralelo a lo largo de γ. Por el lema 2.9.3, P_{as} es una isometría lineal, por lo tanto

$$\langle X_{\gamma(s)}, Z(s)\rangle = \langle P_{as}(X_{\gamma(a)}), P_{as}(Z(a))\rangle = \langle X_{\gamma(a)}, Z(a)\rangle < 0,$$

como s fue tomada arbitrariamente, entonces $\langle X_{\gamma(s)}, Z(s)\rangle < 0$ para toda $s \in I$.

Sea $Z^{\perp}$ el campo vectorial unitario normal a Z a lo largo de γ, así $\langle Z, Z^{\perp}\rangle \equiv 0$ y $\langle Z^{\perp}, Z^{\perp}\rangle \equiv 1$, entonces

$$\frac{d}{ds}\langle Z(s), Z^{\perp}(s)\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{ds}\langle Z^{\perp}(s), Z^{\perp}(s)\rangle = 0.$$

Aplicando nuevamente (4) de la proposición 2.9.1,

$$\left\langle Z(s), \frac{DZ^{\perp}}{ds}(s)\right\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \left\langle Z^{\perp}(s), \frac{DZ^{\perp}}{ds}(s)\right\rangle = 0,$$

por el lema 3.1.1, $DZ^{\perp}/ds \equiv 0$, esto es, $Z^{\perp}$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de γ. El ***ángulo de Z con respecto a*** γ es la función $\theta : I \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(s) = \measuredangle(T(s), Z(s))$, $s \in I$.

Lema 3.3.1. $\dfrac{d\theta}{ds}(s) = -\kappa_g(s)$.

Demostración. Sea γ es una curva que apunta al futuro, es decir, $T(s)$ es un vector temporal que apunta al futuro para cada $s \in I$, y Z un campo vectorial unitario a lo largo de la curva γ que apunta al futuro. Si $s_0 \in I$, por el lema 3.2.2, existe un único sistema coordenado admisible $\varphi = (x^1, x^2)$ en $T_{\gamma(s_0)}M$ tal que

$$\partial_1|_{\gamma(s_0)} = Z^{\perp}(s_0) \quad \text{y} \quad \partial_2|_{\gamma(s_0)} = Z(s_0).$$

Como $Z(s_0), Z^{\perp}(s_0)$ es una base para $T_{\gamma(s_0)}M$, existen únicos $a, b \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$T(s_0) = aZ(s_0) + bZ^{\perp}(s_0).$$

Por la definición 3.2.3, si $\theta(s_0)$ es el ángulo entre $T(s_0)$ y $Z(s_0)$, entonces

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta(s_0) & \operatorname{senh}\theta(s_0) \\ \operatorname{senh}\theta(s_0) & \cosh\theta(s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

Por (3.2), $a = \cosh\theta(s_0)$. Sustituyendo esto último en (3.4) obtenemos un par de ecuaciones. Resolviendo cualquiera de ellas para b resulta que $b = -\operatorname{senh}\theta(s_0)$. En consecuencia,

$$T(s_0) = \cosh\theta(s_0)Z(s_0) - \operatorname{senh}\theta(s_0)Z^{\perp}(s_0).$$

Dado que s_0 fue arbitrario, tenemos que para cada $s \in I$ se cumple que

$$T(s) = \cosh\theta(s)Z(s) - \operatorname{senh}\theta(s)Z^{\perp}(s) \quad \text{y} \quad T^{\perp}(s) = -\operatorname{senh}\theta(s)Z(s) + \cosh\theta(s)Z^{\perp}(s).$$

Análogamente, si γ es una curva que apunta al pasado, entonces

$$T(s) = -\cosh\theta(s)Z(s) + \operatorname{senh}\theta(s)Z^{\perp}(s) \quad \text{y} \quad T^{\perp}(s) = \operatorname{senh}\theta(s)Z(s) - \cosh\theta(s)Z^{\perp}(s).$$

De estas ecuaciones y las propiedades (1) y (2) de la proposición 2.9.1, obtenemos

$$\frac{DT}{ds}(s) = \operatorname{senh}\theta(s)\left(\frac{d\theta}{ds}(s)\right)Z(s) - \cosh\theta(s)\left(\frac{d\theta}{ds}(s)\right)Z^{\perp}(s)$$

o

$$\frac{DT}{ds}(s) = -\operatorname{senh}\theta(s)\left(\frac{d\theta}{ds}(s)\right)Z(s) + \cosh\theta(s)\left(\frac{d\theta}{ds}(s)\right)Z^{\perp}(s).$$

En cualquier caso

$$\begin{aligned}\kappa_g(s) = \left\langle \frac{DT}{ds}(s), T^{\perp}(s)\right\rangle &= \left(\operatorname{senh}^2\theta(s) - \cosh^2\theta(s)\right)\left(\frac{d\theta}{ds}(s)\right)\\ &= -\frac{d\theta}{ds}(s).\end{aligned}$$

■

Observación 5. (1) En general, si $\widetilde{M}$ es una variedad semi-riemanniana de dimensión n, un ***elemento de volumen*** es una n-forma diferencial μ en $\widetilde{M}$ tal que para cada $p \in \widetilde{M}$, $\mu_p(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n) = 1$, donde $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ es una base ortonormal de $T_p\widetilde{M}$ orientada positivamente. En [2, lemma 20, p. 195] se muestra que un elemento de volumen siempre existe si $\widetilde{M}$ es orientable.

(2) Sea V un campo vectorial diferenciable de $\widetilde{M}$, la función $\widetilde{\omega} : \mathfrak{X}(\widetilde{M}) \to C^{\infty}(\widetilde{M})$ definida por $\widetilde{\omega}(W) = \langle V, W\rangle$, para todo $W \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, es una uno-forma, en efecto, para ello (por la interpretación dada en la sección 2.3) basta mostrar que $\widetilde{\omega}$ es $C^{\infty}(\widetilde{M})$-lineal, lo cual se sigue del hecho de que la métrica en $\widetilde{M}$ es un $(0, 2)$-campo tensorial.

Denotamos por dA el elemento de volumen para M, de acuerdo a la observación 5 (1). Así mismo, de la observación 5 (2), definimos la ***forma conexión ω en M basada en X*** por

$$\omega(W) = \langle \nabla_W X, X^{\perp}\rangle, \quad W \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.5}$$

donde X es un campo vectorial temporal unitario de M y $X^{\perp}$ el campo vectorial unitario ortogonal a X.

Lema 3.3.2. Sean ω la forma conexión de M dada por (3.5), K la curvatura gaussiana y dA el elemento de volumen de M, entonces

$$d\omega = KdA.$$

Demostración. Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Considerando el teorema 2.6.3, obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega(V,W) &= V\omega(W) - W\omega(V) - \omega([V,W]) \\ &= V\langle \nabla_W X, X^\perp\rangle - W\langle \nabla_V X, X^\perp\rangle - \langle \nabla_{[V,W]}X, X^\perp\rangle \\ &= \langle \nabla_V\nabla_W X, X^\perp\rangle + \langle \nabla_W X, \nabla_V X^\perp\rangle \\ &\quad - \langle \nabla_W\nabla_V X, X^\perp\rangle - \langle \nabla_V X, \nabla_W X^\perp\rangle - \langle \nabla_{[V,W]}X, X^\perp\rangle \\ &= \langle R_{VW}X, X^\perp\rangle + \langle \nabla_W X, \nabla_V X^\perp\rangle - \langle \nabla_V X, \nabla_W X^\perp\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle X, X\rangle \equiv -1$ y $\langle X^\perp, X^\perp\rangle \equiv 1$, entonces

$$0 = W\langle X, X\rangle = \langle \nabla_W X, X\rangle + \langle X, \nabla_W X\rangle = 2\langle \nabla_W X, X\rangle$$

y

$$0 = V\langle X^\perp, X^\perp\rangle = \langle \nabla_V X^\perp, X^\perp\rangle + \langle X^\perp, \nabla_V X^\perp\rangle = 2\langle \nabla_V X^\perp, X^\perp\rangle.$$

Se tiene que $\nabla_W X$ es un múltiplo escalar de $X^\perp$ y $\nabla_V X^\perp$ es multiplo escalar de X, lo que implica que $\langle \nabla_W X, \nabla_V X^\perp\rangle = 0$. De manera similar $\langle \nabla_V X, \nabla_W X^\perp\rangle = 0$.

Así $d\omega(V,W) = \langle R_{VW}X, X^\perp\rangle$. Tomando $V = X$ y $W = X^\perp$, obtenemos

$$d\omega(X, X^\perp) = \langle R_{XX^\perp}X, X^\perp\rangle = K(X, X^\perp).$$

Ya que $dA(X, X^\perp) = 1$, entonces $d\omega = KdA$. ∎

3.4. El teorema de Gauss-Bonnet para superficies lorentzianas

La fórmula clásica de Gauss-Bonnet local establece una relación entre la curvatura gaussiana K y curvatura geodesica k_g:

$$\int_\gamma k_g\, ds + \iint_D K\, dA + \sum_i \theta_i = 2\pi,$$

donde D es una región simple de una superficie regular, γ es una curva cerrada simple regular a trozos que constituye la frontera de la región D y θ_i son los ángulos externos de γ en sus vértices (ver, por ejemplo [10]).

En esta sección desarrollamos los detalles de la prueba publicada por Birman y Nomizu [6] de esta fórmula para el caso de regiones acotadas por curvas temporales en superficies lorentzianas que satisfacen las siguientes condiciones.

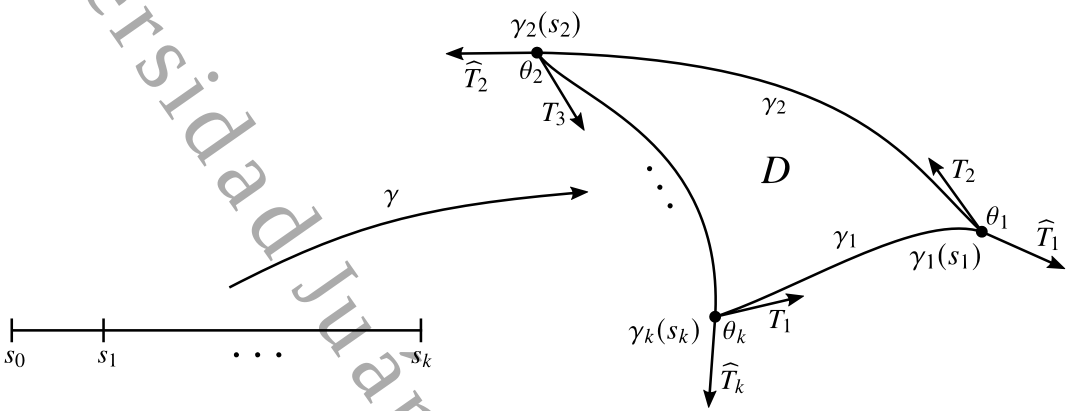

Figura 3.1: El dominio D y su frontera γ.

Sean M una superficie lorentziana, conexa, orientable y tiempo-orientable, y D una región (abierta y conexa) con cerradura compacta en M, cuya frontera es una curva temporal diferenciable por partes simple y cerrada (Figura 3.1), esto es, una función $\gamma : [a, b] \to M$ en la que existe una partición $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = b$ de $[a, b]$ tal que la restricción $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$, para cada $i = 1, \ldots, k$, es un segmento de curva cuya extensión es una curva temporal; que γ sea simple quiere decir que la curva sea inyectiva en $[a, b)$ y cerrada que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Además, como estamos asumiendo que D es abierto y conexo con cerradura compacta en M, tenemos que D es 2-variedad con frontera determinada por la curva γ y la forma de conexión ω tiene soporte compacto. Ahora, por ser M orientable y la inclusión $D \hookrightarrow M$ difeomorfismo local para todo $x \in D$, resulta que D es orientable y le damos a su curva frontera γ la orientación inducida. Por el teorema de Stokes (ver, por ejemplo [11] theorem 6, chapter 8, p. 354) se cumple que

$$\int_\gamma \omega = \iint_D d\omega.$$

Observación 6. En la prueba del teorema de Stokes dada en [11] no se utiliza ningún tipo de métrica. De hecho, Spivak menciona, en la pág. 352, que aunque el elemento de volumen es importante en el capítulo 9 (sobre métricas riemannianas), el capítulo 8 (donde aparece el teorema de Stokes y su demostración) solamente concierne a la integración de formas sobre variedades orientadas.

Los ángulos en los vértices $\gamma(s_1), \ldots, \gamma(s_k)$ de la curva γ serán denotados como sigue. Sea T_i el vector tangente unitario a la curva γ_i en el punto inicial $\gamma_i(s_{i-1})$ y sea $\widehat{T}_i$ el vector tangente unitario a esta misma curva en el punto final $\gamma_i(s_i)$, para cada $1 \leq i \leq k$, donde $\gamma_k(s_k) = \gamma_1(s_0)$. Los ángulos $\theta_1 = \measuredangle(\widehat{T}_1, T_2)$, $\theta_2 = \measuredangle(\widehat{T}_2, T_3)$, $\ldots, \theta_{k-1} = \measuredangle(\widehat{T}_{k-1}, T_k)$ y $\theta_k = \measuredangle(\widehat{T}_k, T_1)$ son los ***ángulos exteriores*** en los vértices $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \ldots, \gamma(s_{k-1})$ y $\gamma(s_k)$, respectivamente.

El resultado principal se enuncia y demuestra a continuación.

Teorema 3.4.1. Sea D una región y su frontera γ con los supuestos mencionados anteriormente en una superficie lorentziana M conexa, orientable y tiempo-orientable. Entonces,

$$\int_\gamma \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{k} \theta_i - \iint_D K dA = 0.$$

Demostración. Sea Z_1 un vector temporal unitario que apunta al futuro en el punto $\gamma_1(s_0)$. Por la proposición 2.9.2, existe un campo vectorial paralelo Z a lo largo de la curva γ tal que $Z(s_0) = Z_1$. Sea $Z_{i+1} = Z(s_i)$ para cada $1 \leq i \leq k$. En general, Z_{k+1} es distinto de Z_1. Al igual que antes, denotamos por $\theta(s)$ el ángulo $\measuredangle(T(s), Z(s))$ en cada $s \in [a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{d\theta}{ds}(s)ds &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\theta}{ds}(s)ds \\
&= \theta(s_1) - \theta(s_0) \\
&= \measuredangle(T(s_1), Z(s_1)) - \measuredangle(T(s_0), Z(s_0)) \\
&= \measuredangle(\widehat{T}_1, Z_2) - \measuredangle(T_1, Z_1).
\end{aligned}$$

Usando el lema 3.3.1 y la propiedades (2) y (4) del lema 3.2.5, obtenemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\gamma_1} \kappa_g ds - \theta_1 &= \measuredangle(\widehat{T}_1, Z_2) - \measuredangle(T_1, Z_1) + \measuredangle(T_2, \widehat{T}_1) \\
&= \measuredangle(T_2, Z_2) - \measuredangle(T_1, Z_1).
\end{aligned}$$

Procediendo de manera similar para γ_i con $2 \leq i \leq k$,

$$\begin{aligned}
-\int_{\gamma_2} \kappa_g ds - \theta_2 &= \measuredangle(T_3, Z_3) - \measuredangle(T_2, Z_2), \\
&\vdots \\
-\int_{\gamma_k} \kappa_g ds - \theta_k &= \measuredangle(T_1, Z_{k+1}) - \measuredangle(T_k, Z_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$
\begin{aligned}
-\int_\gamma \kappa_g ds - \sum_{i=1}^{k} \theta_i &= \sum_{i=1}^{k} \left(-\int_{\gamma_i} \kappa_g ds - \theta_i \right) \\
&= \measuredangle(T_1, Z_{k+1}) - \measuredangle(T_1, Z_1) \\
&= \measuredangle(Z_1, Z_{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Para evaluar $\measuredangle(Z_1, Z_{k+1})$, consideremos un campo vectorial temporal unitario $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $\beta(s) = \measuredangle(Z(s), X(s))$ el ángulo a lo largo de γ. Escribiendo

$$Z(s) = \cosh\beta(s)X(s) - \operatorname{senh}\beta(s)X^\perp(s),$$

aplicando la derivada covariante y el que Z sea paralelo, obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{DZ}{ds}(s) = \operatorname{senh}\beta(s) &\left(\frac{d\beta}{ds}(s)\right) X(s) + \cosh\beta(s)\frac{DX}{ds}(s) \\
&- \cosh\beta(s)\left(\frac{d\beta}{ds}(s)\right) X^\perp(s) - \operatorname{senh}\beta(s)\frac{DX^\perp}{ds}(s).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

A continuación mostramos que

$$\frac{DX}{ds}(s) = \omega(T(s))X^\perp(s) \quad \text{y que} \quad \frac{DX^\perp}{ds}(s) = \omega(T(s))X(s), \tag{3.8}$$

donde ω es la forma conexión basada en X. Por una parte, derivando $\langle X(s), X^\perp(s)\rangle = 0$ y recordando que $DX(s)/ds = \nabla_{T(s)}X$, obtenemos

$$\langle \nabla_{T(s)}X, X^\perp(s)\rangle + \langle X(s), \nabla_{T(s)}X^\perp\rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle \nabla_{T(s)}X, X^\perp(s)\rangle = -\langle X(s), \nabla_{T(s)}X^\perp\rangle.$$

En consecuencia, por la definición de ω,

$$\omega(T(s)) = -\langle X(s), \nabla_{T(s)}X^\perp\rangle.$$

Por otra parte, derivando $\langle X(s), X(s)\rangle = -1$ y $\langle X^\perp(s), X^\perp(s)\rangle = 1$, resulta que

$$\langle \nabla_{T(s)}X, X(s)\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \nabla_{T(s)}X^\perp, X^\perp(s)\rangle = 0.$$

Como $X(s), X^\perp(s)$ es una base ortonormal para $T_{\gamma(s)}M$, entonces

$$\nabla_{T(s)}X = -\langle \nabla_{T(s)}X, X(s)\rangle X(s) + \langle \nabla_{T(s)}X, X^\perp(s)\rangle X^\perp(s),$$

de ahí que

$$\nabla_{T(s)}X = \omega(T(s))X^{\perp}(s).$$

De manera similar,

$$\nabla_{T(s)}X^{\perp} = -\langle \nabla_{T(s)}X^{\perp}, X(s)\rangle X(s) + \langle \nabla_{T(s)}X^{\perp}, X^{\perp}(s)\rangle X^{\perp}(s),$$

y así

$$\nabla_{T(s)}X^{\perp} = -\langle X(s), \nabla_{T(s)}X^{\perp}\rangle X(s) = \omega(T(s))X(s).$$

De (3.7) y (3.8) concluimos que

$$d\beta/ds = \omega(T).$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}\omega &= \int_a^b \omega(T)ds \\ &= \int_a^b \frac{d\beta}{ds}(s)ds \\ &= \beta(b) - \beta(a) \\ &= \beta(s_k) - \beta(s_0) \\ &= \measuredangle(Z(s_k), X(s_k)) - \measuredangle(Z(s_0), X(s_0)) \\ &= \measuredangle(Z(s_k), Z(s_0)) \\ &= \measuredangle(Z_{k+1}, Z_1) \\ &= -\measuredangle(Z_1, Z_{k+1}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esta última igualdad se obtiene por el lema 3.2.5 (4). Por el teorema de Stokes y el lema 3.3.2 tenemos que

$$\int_{\gamma}\omega = \iint_D d\omega = \iint_D K dA. \tag{3.10}$$

La fórmula requerida se sigue de (3.6), (3.9) y (3.10). ∎

Conclusión

El teorema de tipo Gauss-Bonnet que se desarrolló detalladamente en este trabajo a partir del artículo [6], que a diferencia del teorema de Gauss-Bonnet global desarrollado por A. Avez [1] y S. S. Chern [4] de manera independiente para variedades semi-riemannianas compactas y orientables de dimensión par, es un resultado local para ciertas regiones de una variedad lorentziana bidimensional. En comparación con el teorema de Gauss-Bonnet local para variedades riemannianas bidimensionales, tiene como principal diferencia el tipo de métrica, que ya no es definida positiva. Lo anterior involucra un concepto distinto de ángulo entre vectores, dependiendo de la causalidad de los vectores. Para vectores temporales existe un concepto de ángulo bien definido con propiedades muy particulares que son usadas de manera importante en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet local para espacio-tiempos de dimensión dos, como se ha detallado en este trabajo.

Bibliografía

[1] A. Avez. *Formule de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque*. C.R. Acad. Sci. Paris **255** (1962) 2049–2051.

[2] Barret O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, New York, Academic Press, 1983.

[3] W. H. Greub. *Linear Algebra*, New York, Springer-Verlang, 1967.

[4] S. S. Chern. *Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula*. An. Acad. Brasil Ci. **35** (1963) 17–26.

[5] Graciela S. Birman and Katsumi Nomizu. *Trigonometry in Lorentzian Geometry*. Amer. Math. Monthly **91**, no. 9 (1984) 543–549.

[6] Graciela S. Birman and Katsumi Nomizu. *The Gauss-Bonnet Theorem for 2-dimensional Spacetimes*, Michigan Math. J. Michigan Math. J. **31**, no. 1 (1984) 77–81

[7] John M. Lee. *Riemannian Manifolds*, New York, Springer-Verlang, 1997.

[8] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, New York, Springer-Verlang, 2003.

[9] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*, New York, Springer, 2011.

[10] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Revised and Updated 2nd. ed. Dover (2016).

[11] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, 2nd. ed. Publish or Perish, Inc. (1979).

[12] William M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1986.