



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas



ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y CONTROL
DE UN SISTEMA CELDA CONVERTIDOR.

Tesis

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

HÉCTOR ARGOTE MORALES

Director de tesis:

Dr. GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ

Dr. JOSÉ ARMANDO OLMOS LÓPEZ

Cunduacán, Tabasco.



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

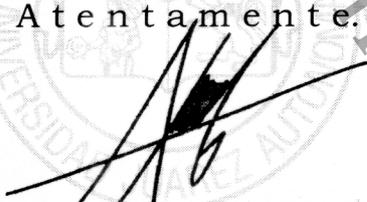
9 de octubre de 2019

Ing. Héctor Argote Morales
Pasante de la Maestría en Ciencias
En Matemáticas Aplicadas
Presente

Por medio del presente y de la manera más cordial, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"Análisis de estabilidad y control de un sistema celda convertidor"**, en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL POR TESIS DE MAESTRÍA para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Aplicadas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

Atentamente.


Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

C.c.p.- Archivo
Dr'GDP/Dr'MAVR/emt

Miembro CUMEX desde 2008

Consortio de
Universidades
Mexicanas

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cuenduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cuenduacán, Tab., México
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx
www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de maestría “ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y CONTROL DE UN SISTEMA CELDA CONVERTIDOR” de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con la que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Villahermosa, Tabasco a los 18 días del mes de Octubre del año 2019.

Autorizó



Héctor Argote Morales
172A15002

Símbolo	Variable
R	Resistencia de carga
L	Inductancia del convertidor
C	Capacitancia del convertidor
R_s	Resistencia en serie de la celda
R_{sh}	Resistencia en paralelo de la celda
C_f	Capacitancia de acoplo
I_S	Corriente fotogenerada
I_0	Corriente de saturación del diodo
V_T	Voltaje térmico del diodo
I_{SC}	Corriente en corto circuito
V_{OC}	Voltaje en circuito abierto
i_{elem}	Corriente instantánea que pasa por el componente "elem"
v_{elem}	Voltaje instantánea que se encuentra en el componente "elem"

Tabla 1: Descripción de Variables.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Ecuaciones Diferenciales	1
1.1.1. Estabilidad Local	1
1.1.2. Función de Lyapunov	2
1.1.3. Criterio de Routh-Hurwitz	2
1.2. Álgebra Lineal y Polinomios	3
1.2.1. Polinomio Cúbico	3
1.2.2. Cálculo de Vectores Propios a Partir de la Nulidad	6
1.2.3. Matrices Definidas Positivas	12
1.3. Teoría de Control por Ubicación de Polos	21
2. Modelo	25
2.1. Descripción del Modelo	25
2.1.1. Celda Solar	26
2.1.2. Reparametrización del Modelo de la Celda	28
2.1.3. Convertidor Boost	30
2.1.4. Sistema Promediado	31
2.1.5. Convertidor Boost en Cascada	32
3. Estabilidad del Sistema	37
3.1. Sistema en Lazo Abierto	37
3.1.1. Matriz Exponencial	39
3.2. Diseño de Funciones de Control	41
3.2.1. Análisis de Estabilidad	43
3.2.2. Control Basado en Modos Deslizantes	44
3.2.3. Control por Ubicación de Polos	45
3.2.4. Generalización de Resultados	46
3.3. Sistema en Cascada	54
3.3.1. Estabilidad del Sistema en Cascada	55
3.4. Control Basado en Modos Deslizantes	58
3.4.1. Algunos Comentarios Complementarios acerca del Control Basado en Modos Deslizantes	59

4. Simulación Numérica	61
4.1. Cálculo de los Parámetros	61
4.2. Sistema en Lazo Abierto	63
4.3. Sistema en Lazo Cerrado	66
4.3.1. Control Basado en Modos Deslizantes	66
4.3.2. Control por Ubicación de Polos	69
4.4. Comparación entre Respuestas	72
4.5. Sistema en Cascada en Lazo Abierto	73
4.6. Sistema en Cascada en Lazo Cerrado	78
4.6.1. Control por Ubicación de Polos	78
4.6.2. Control Basado en Modos Deslizantes	79
5. Resultados Experimentales	83
5.1. Aspectos Físicos del Circuito	83
5.2. Comparativas entre Respuestas	85
5.3. Propuestas	88
6. Conclusiones	91
A. Herramientas de Modelado	95
A.1. Modelo Promediado	95
A.2. Producto Tensorial Computacional	96
B. Cálculo de Parámetros	99
B.1. Análisis en DC	99
B.2. Ecuaciones de Diseño del Convertidor	102
B.2.1. Cálculo del Inductor	102
B.2.2. Cálculo del Capacitor	102
B.2.3. Elección del Transistor	103
B.2.4. Elección del Diodo	105
B.3. Diseño del Inductor	105
C. Aspectos Computacionales	109
C.1. Código Implementado en Matlab	109

Agradecimientos

Dedico este espacio para agradecer a todos aquellos que de manera directa o indirecta me apoyaron a lo largo de la realización de esta tesis, ya que sin ellos, no podría haber completado este proyecto.

A mi familia, por darme la educación que me ha formado como persona y creer en mi éxito en cada momento.

A mi esposa, por estar siempre conmigo y apoyarme a sobrellevar los altibajos que conlleva el proceso de investigación.

Al grupo de Sistemas Dinámicos, por sus ideas y sugerencias que sirvieron de inspiración para resolver el problema de tesis.

A mis asesores de tesis, por guiarme durante este proceso, por su disposición y por estar siempre pendientes del avance del proyecto.

A Conacyt, por su apoyo económico para la realización de mi tesis, con número de becario 721785.

-Héctor Argote Morales

AGRADECIMIENTOS

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Introducción

En el campo de las energías renovables, el uso de los generadores fotovoltaicos por medio de paneles solares, se ha difundido gracias a su fácil instalación y el poco mantenimiento que requieren posteriormente a su puesta en marcha. Sin embargo, el costo inicial de inversión y la variación de energía entregada debido a la intensidad de luz y calor, hacen aún inviable el uso de estos dispositivos para un gran segmento de la población. Una de las causas de esta problemática es la topología convertidor-inversor que se utiliza para el acoplamiento de la celda solar con la red de energía eléctrica, [1]. Usualmente, un sistema fotovoltaico se compone de celdas solares, un banco de baterías, un convertidor DC, un inversor y un controlador, [2]. Ya que estos tres últimos determinan el desempeño del sistema, resulta indispensable estudiar la dinámica inmersa como sistema acoplado. Asimismo, la electrónica de potencia juega actualmente un papel estratégico debido a los requisitos en el ahorro de energía, la utilización de fuentes de energías renovables y el aseguramiento de la disponibilidad de energía en el futuro, [3]. Sin embargo, las energías producidas por cada una de las fuentes renovables requieren de un control ya que pueden presentar grandes variaciones en voltaje de entrada y tipo de carga conectada al sistema, [4, 5]. Una de las herramientas que se han utilizado para el análisis y control en la variabilidad de la energía entregada, son los sistemas dinámicos, [6, 7]. En particular, a partir de ecuaciones diferenciales se puede modelar el comportamiento de cada uno de los convertidores involucrados en un sistema electrónico de potencia, [8] y es que son éstos los que permiten tomar decisiones acerca de las leyes de control que mantienen estable su comportamiento.

La electrónica de potencia es la disciplina que se encarga de la conversión de energía eléctrica utilizando interruptores y dispositivos que almacenan energía con la finalidad de obtener la mayor eficiencia posible. La filosofía de esto yace en disminuir la cantidad de componentes que disipan energía en forma de calor. Bajo esta ideología, se han construido circuitos cuya dinámica viene dada por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales discontinuas. Ante la problemática de la complejidad que implica el estudio de estos sistemas bajo técnicas tradicionales de ecuaciones diferenciales, se ha optado por modelar estos circuitos usando como variables de estado el valor promedio de los voltajes y corrientes de los dispositivos reactivos (capacitores e inductores). De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales promediado, el cual puede ser estudiado usando la teoría geométrica. En esta tesis se utilizarán estas técnicas para modelar un circuito convertidor, y diseñar leyes de control. •

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Ecuaciones Diferenciales

En esta sección se enuncian los teoremas de ecuaciones diferenciales que se utilizan para probar estabilidad a lo largo de esta tesis. Las demostraciones se pueden consultar en [6] y [9].

1.1.1. Estabilidad Local

Teorema 1.1.1 (Dependencia en parámetros)

Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{n+w} que contiene al punto (\mathbf{x}_0, μ_0) donde $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$ y suponga que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$. Entonces existe una $a > 0$ y una $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{y} \in V_\delta(\mathbf{x}_0)$ y $\mu \in V_\delta(\mu_0)$, el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y},\end{aligned}$$

tiene una única solución $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}, \mu)$ con $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(I)$ donde $I = [-a, a] \times V_\delta(\mathbf{x}_0) \times V_\delta(\mu_0)$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hartman-Grobman)

Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, sea $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Suponga que $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$ y que la matriz $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(0)$ no tienen valores propios con parte real cero. Entonces, existe un homeomorfismo \mathbf{H} de un conjunto abierto U que contienen al origen a un conjunto abierto V que contiene al origen tal que, para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, hay un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que, para todo $\mathbf{x}_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$\mathbf{H} \circ \Phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{H}(\mathbf{x}_0),$$

es decir, \mathbf{H} mapea trayectorias cerca del origen de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

a trayectorias cerca del origen de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

preservando la parametrización del tiempo.

1.1.2. Función de Lyapunov

Teorema 1.1.3. (Funciones de Lyapunov) Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a \mathbf{x}_0 . Suponga que $\mathbf{f} \in C^1(E)$ y que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Suponga también que existe una función real $V \in C^1(E)$ que satisface $V(\mathbf{x}_0) = 0$ y $V(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Entonces

- a) si $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para toda $\mathbf{x} \in E$, \mathbf{x}_0 es estable;
- b) si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in E - \{\mathbf{x}_0\}$, \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable;
- c) si $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in E - \{\mathbf{x}_0\}$, \mathbf{x}_0 es inestable.

Además si $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ implica que $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable, entonces \mathbf{x}_0 es globalmente asintóticamente estable.

1.1.3. Criterio de Routh-Hurwitz

Considere el siguiente polinomio

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0. \quad (1.3)$$

Construyase el siguiente arreglo

λ^n	1	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
λ^{n-2}	$\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\frac{a_{n-3}a_{n-4}-a_{n-2}a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\frac{a_{n-5}a_{n-6}-a_{n-4}a_{n-7}}{a_{n-5}}$	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Proposición 1 Si todos los coeficientes de la segunda columna son positivos, entonces todas las raíces del polinomio (1.3) tienen parte real negativa. En consecuencia si (1.3) corresponde al polinomio característico del sistema lineal (1.2), el origen es localmente asintóticamente estable.

Ejemplo 1.1.1 Considere el polinomio cúbico

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0. \quad (1.4)$$

Su arreglo de Routh-Hurwitz es

λ^3	1	a_1
λ^2	a_2	a_0
λ^1	$a_1 - \frac{a_0}{a_2}$	0
λ^0	a_0	

Por lo tanto todas las raíces del polinomio (1.4) tendrán parte real negativa si todos los coeficientes de este polinomio son positivos y además

$$a_1 - \frac{a_0}{a_2} > 0.$$

1.2. Álgebra Lineal y Polinomios

1.2.1. Polinomio Cúbico

En esta sección se realiza un análisis cualitativo sobre la forma de las raíces de un polinomio cubico dependiendo de los parámetros de éste.

Primero, considere la siguiente ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Después completando el cubo se llega a

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)x - \frac{a^3}{27} + c.$$

Posteriormente se realiza la traslación $z = x + \frac{a}{3}$, con lo cual queda una ecuación de la forma

$$z^3 + pz + q = 0, \quad (1.5)$$

donde

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Geoméricamente lo que se ha hecho hasta ahora es desplazar la función cúbica y centrarla en el eje y para simplificar su análisis.

Note que la ecuación (1.5) tiene dos parámetros p y q los cuales indican los cambios cualitativos de la función. Es fácil ver que el parámetro q es la ordenada al origen. Al cambiar su valor cambia la altura de la función. En particular, cuando $q = 0$ la gráfica es simétrica con respecto al origen. El parámetro p es un factor de concavidad e indica la formación de valles. Si $p > 0$ la función tiene pendiente positiva en todo el dominio. Si $p = 0$ se tiene un punto de inflexión en $z = 0$. Finalmente, si $p < 0$ la gráfica tiene un cambio en la pendiente y surgen máximos y mínimos.

Ahora se calculan los valores donde la pendiente cambia de signo. Derivando la ecuación cúbica con respecto a z e igualando a cero se obtiene la ecuación

$$\frac{df}{dz} = 3z^2 + p = 0,$$

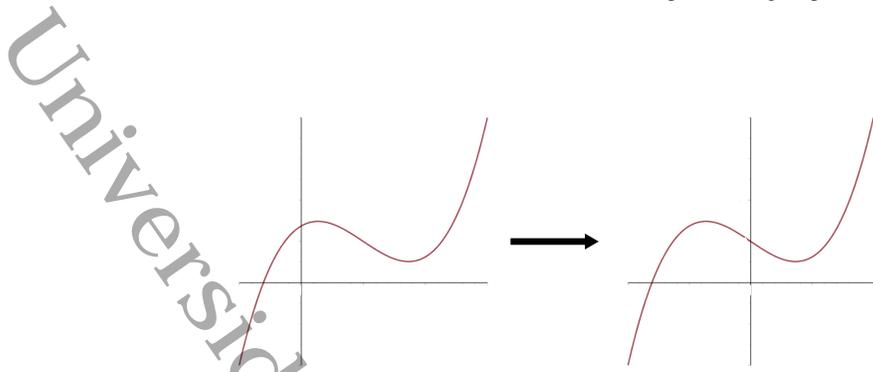


Figura 1.1: Desplazamiento de Función Cúbica.

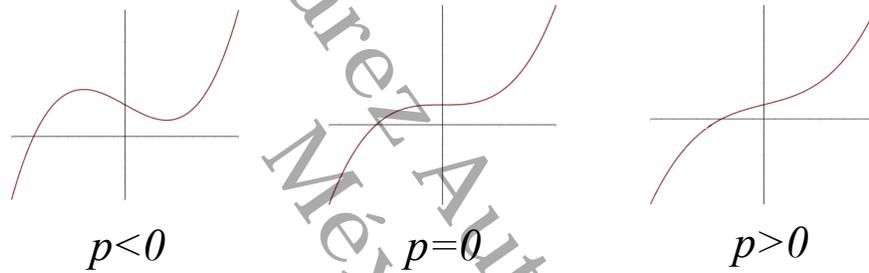


Figura 1.2: Cambios Cualitativos de p .

cuya solución es

$$z = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

De aquí se observa que para que se tengan cambios de concavidad reales se requiere que p sea no positivo, lo cual es congruente con el análisis gráfico previo. Suponga que p es no positivo con magnitud \tilde{p} , i.e. $|p| = \tilde{p}$. Derivando nuevamente se obtiene que

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 6z. \quad (1.6)$$

Por lo cual el máximo se encuentra en la solución negativa de la primera derivada y viceversa. De esta forma el valor del máximo relativo de la función es

$$f\left(-\sqrt{\frac{\tilde{p}}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\tilde{p}^{3/2} + q,$$

análogamente su mínimo es

$$f\left(\sqrt{\frac{\tilde{p}}{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}\tilde{p}^{3/2} + q.$$

Ahora se buscan las condiciones donde se obtienen más de una raíz real, en otras palabras, cuando alguno de los valles cruza el eje horizontal. Sin pérdida de generalidad suponga que $p \leq 0$ y $q > 0$. Con estas condiciones se asegura que el corte de la función con el eje ordenado esté en la parte positiva. Por lo cual, en este caso, la condición para que existan múltiples raíces reales se da cuando el mínimo cruza por el eje de las abscisas, es decir

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9}\tilde{p}^{3/2} + q \leq 0,$$

la cual reacomodándola queda como

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{p}}{3}\right)^3 \leq 0,$$

donde la expresión de la izquierda se recupera de la definición de valor absoluto. Cabe mencionar que en la desigualdad se tienen tres raíces reales y cuando se da la igualdad se tienen dos.

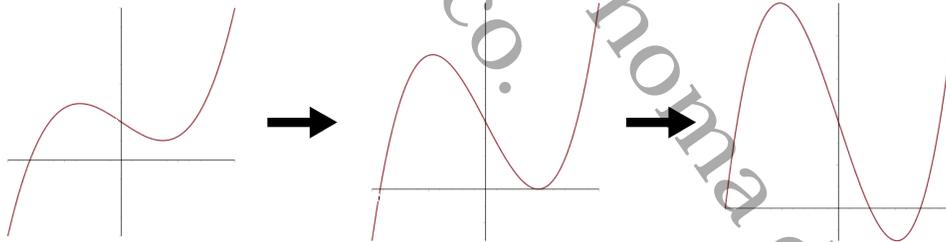


Figura 1.3: Transición en la Formación de Raíces Reales.

Finalmente se procederá a resolver la ecuación cúbica, el cual se ha propuesto con el fin de dar una noción geométrica a los cálculos. Se propone la solución de la forma $z = s + t$ sustituyendo en la ecuación cúbica se llega a

$$(s + t)(p + 3st) + (s^3 + t^3 + q) = 0,$$

la cual se satisface si

$$p + 3st = 0, s^3 + t^3 + q = 0, \quad (1.7)$$

y resolviendo simultáneamente se llega a

$$27s^6 + 27qs^3 - p^3 = 0,$$

que es una ecuación cuadrática en s^3 . Se puede comprobar que si se despeja para t en vez de s se llega a la misma ecuación con t en lugar de s .

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior se obtienen las soluciones

$$s^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

la cual al sustituir en (1.7) se tiene que

$$t^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

por lo tanto la solución real de la ecuación cúbica es

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

1.2.2. Cálculo de Vectores Propios a Partir de la Nulidad

Muchas veces, cuando se está haciendo computo simbólico, no se puede obtener un vector propio de forma explícita debido a la forma de los valores propios. Esto sucede comúnmente, para sistemas de tercer y cuarto orden ya que los eigenvalores suelen tener expresiones complicadas de manejar. Sin embargo éstos se pueden calcular de forma implícita, donde se pueden resumir los casos aplicando el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}$ singular con coeficientes reales y $m = Nul(\mathbf{A})$.

i) $\mathbf{A} \equiv 0$ si y sólo si $m = 3$ y además

$$Ker(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3.$$

ii) Dos renglones cualesquiera son simultáneamente múltiplos escalares del tercero no escogido si y sólo si $m = 2$ y además

$$\begin{aligned} Ker(\mathbf{A}) &= gen \left\{ \begin{bmatrix} -a_{i2} \\ a_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a_{i3} \\ 0 \\ a_{i1} \end{bmatrix} \right\} && si \ a_{i1} \neq 0, \\ &= gen \left\{ \begin{bmatrix} a_{i2} \\ -a_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i3} \\ a_{i2} \end{bmatrix} \right\} && si \ a_{i2} \neq 0, \\ &= gen \left\{ \begin{bmatrix} a_{i3} \\ 0 \\ -a_{i1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a_{i3} \\ -a_{i2} \end{bmatrix} \right\} && si \ a_{i3} \neq 0. \end{aligned}$$

iii) $m = 1$ Si y sólo si

$$Ker(\mathbf{A}) = gen \left\{ \begin{bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ C_{j3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Aquí a_{ik} son los coeficientes del renglón distinto de cero al aplicar eliminación gaussiana y C_{jk} son los cofactores del renglón cero de la matriz \mathbf{A} en su forma escalonada.

Demostración. Por definición se tiene $Nul(\mathbf{A}) = dim(Ker(\mathbf{A}))$ y recuerde que la nulidad se puede obtener del número de vectores renglón idénticamente cero obtenidos al realizar eliminación gaussiana sobre \mathbf{A} .

- i) Si $\mathbf{A} \equiv 0$ la matriz ya se encuentra en su forma reducida y cuenta con tres filas de ceros, por lo tanto $m = Nul(\mathbf{A}) = 3$. Recíprocamente si, $m = 3$ entonces mediante operaciones elementales se puede llevar a \mathbf{A} a la matriz cero. Suponga que \mathbf{A} tiene al menos un elemento distinto de cero. Sin pérdida de generalidad sea éste el coeficiente a_{11} , es decir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix},$$

entonces por hipótesis se puede eliminar el elemento mediante operaciones elementales. Sin embargo, intercambiar dos renglones o sumar múltiplos escalares de R_2 o R_3 a R_1 mantiene igual a la matriz. La única forma restante de eliminar el primer renglón es multiplicarlo por cero, pero esto no es una operación elemental. De aquí se concluye que no es posible llevar a \mathbf{A} a la matriz cero mediante estas operaciones, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto todos los coeficientes de \mathbf{A} deben ser cero.

Finalmente

$$\begin{aligned} Ker(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

- ii) Si dos renglones cualesquiera son simultáneamente múltiplos escalares del tercero no escogido, entonces estos pueden eliminarse arbitrariamente por eliminación gaussiana y quedarse en general con un sólo renglón. Al realizar estas operaciones quedan dos renglones de ceros por lo que

$$m = dim(Ker(\mathbf{A})) = 2.$$

Se prueba el recíproco. Si $m = 2$ implica que se pueden eliminar dos renglones de la matriz A mediante operaciones elementales.

Primero, \mathbf{A} , tiene un renglón con al menos un elemento distinto de cero. Luego, coloque el sistema homogéneo de forma tal que éste sea el primer renglón. Si otro renglón es el vector cero es inmediato que es múltiplo escalar 0 del primero.

Suponga que al menos uno de los otros dos renglones no es múltiplo escalar del primero. Sea este renglón el segundo. Como no es múltiplo escalar, entonces al aplicar operaciones elementales con el primer renglón no se elimina y queda un vector distinto de cero. Entonces quedan dos casos:

- Si el tercero se anula al aplicar eliminación gaussiana sólo con el renglón uno, entonces no se puede reducir a cancelar el renglón dos y sólo se puede tener una fila de ceros, lo que haría $m = 1$ lo cual es una contradicción.
- Si el tercero no se anula entonces es múltiplo escalar del nuevo renglón dos, debido a que la matriz \mathbf{A} es singular. De aquí se puede eliminar alguno de estos, pero esto implicaría tener nuevamente sólo una fila de ceros, haciendo $m = 1$ y contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto ambas filas son simultáneamente múltiplos escalares de la primera. Ahora por definición

$$Ker(\mathbf{A}) = \{x \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

el cual se obtiene resolviendo el sistema homogéneo. Luego por lo anterior se reduce a uno de la forma

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 &= 0, \\ x_k &= x_k, \quad k = (1, 2), (1, 3) \text{ o } (2, 3), \end{aligned}$$

donde al menos un $a_{ik} \neq 0$ ya que de lo contrario se reduce al caso (i). Finalmente se puede despejar para ese a_{ik} , resolver para el x_k de ese coeficiente y obtener el espacio generado.

- iii) Si $m = 1$ entonces al aplicar operaciones elementales queda un renglón de ceros. Así se puede escribir la matriz de la forma

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde se usan los subíndices h y i en vez de 1 y 2 ya que en general se puede eliminar cualquier renglón. Por ejemplo, si el segundo renglón es múltiplo escalar del primero, al operar estos, la fila de ceros obtenida es la segunda. Así para obtener una matriz de la forma anterior se tiene que hacer un intercambio de filas

y el que ahora es el renglón dos era inicialmente el tres. Note que estos renglones son vectores linealmente independientes ya que de lo contrario se podría eliminar uno de ellos pero esto es una contradicción ya que implicaría que $m = 2$. De igual forma se concluye que al menos un elemento del renglón uno es distinto de cero y que también al menos un elemento del renglón dos, en una columna diferente al del renglón uno, es distinto de cero. En otras palabras \mathbf{A} a lo mas queda de algunas de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} a_{h1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{h1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{j3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{h2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{j3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o con los renglones intercambiados.

Se calculan los cofactores de la ultima fila

$$\begin{aligned} C_{j1} &= a_{h2}a_{i3} - a_{h3}a_{i2}, \\ C_{j2} &= a_{h3}a_{i1} - a_{h1}a_{i3}, \\ C_{j3} &= a_{h1}a_{i2} - a_{h2}a_{i1}. \end{aligned}$$

Observe que por lo comentado anteriormente al menos uno de estos cofactores es distinto de cero. Así quedan 3 opciones posibles para resolver el sistema dependiendo de cuantos cofactores sean cero.

- Ningún cofactor es cero. Si ningún cofactor es cero se puede eliminar alguna de las variables por métodos tradicionales y llegar a algún par de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} C_{j3}x_2 &= C_{j2}x_3, \\ C_{j2}x_1 &= C_{j1}x_2, \\ C_{j1}x_3 &= C_{j3}x_1, \end{aligned}$$

donde cualesquiera dos implica la tercera.

Finalmente por simetría se pueden tomar arbitrariamente dos de estas ecuaciones y obtener el vector generador del núcleo.

- Un cofactor es cero. Sin pérdida de generalidad suponga que $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$. Se demostrará este caso y los otros dos son análogos.

Sea \mathbf{A}_1 la matriz correspondiente al cofactor C_1 , es decir

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{h2} & a_{h3} \\ a_{i2} & a_{i3} \end{bmatrix}.$$

Note que, esta matriz no puede ser la matriz cero ni puede tener una columna de ceros porque de ser así implicaría que algún otro cofactor es cero. Entonces

los vectores renglón de \mathbf{A}_1 son multiples escalares o un renglón es cero. Si los vectores son multiples al realizar operaciones elementales se reduce al caso de que un renglón es cero.

Como $m = 2$ implica que el otro elemento del renglón donde se eliminan los dos coeficientes es distinto de cero y si el que está arriba de éste no es nulo, se puede eliminar. En otras palabras

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{eq} &= \begin{bmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{eq}^{(1)} &= \begin{bmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \\ a_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{eq}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{h2} & a_{h3} \\ a_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde por hipótesis los elementos restantes son siempre distintos de cero. Aquí el superíndice indica el número de operaciones elementales realizadas. Note que se puede regresar el valor del coeficiente del renglón dos a su valor original mediante multiplicación por escalar.

De aquí resolviendo el sistema equivalente puede comprobar que

$$\text{Ker}(\mathbf{A}_{eq}^{(2)}) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{h3} \\ a_{h2} \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ a_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{h3} \\ a_{h2} \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \end{bmatrix} \right\},$$

donde $C_k^{(2)}$ son los cofactores de la matriz de la última fila de $\mathbf{A}_{eq}^{(2)}$.

Ahora, recordando que las operaciones elementales por renglones se pueden interpretar como multiplicación por una matriz invertible por la izquierda y como sólo se hicieron operaciones en las primeras filas se pueden definir las matrices por bloques

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{1}_{1 \times 1} \end{array} \right], \quad \mathbf{A}_{eq} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{2 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{array} \right],$$

donde \mathbf{E} es la matriz de todas las operaciones elementales que se realizaron. Así operando se llega a

$$\mathbf{A}_{eq}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{A}_{eq} \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_{2 \times 2}\mathbf{A}_{2 \times 3} + \mathbf{0}_{2 \times 1}\mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 2}\mathbf{A}_{2 \times 3} + \mathbf{1}_{1 \times 1} + \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_{2 \times 2}\mathbf{A}_{2 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{array} \right].$$

Esto implica que para cada cofactor se cumple

$$C_k^{(2)} = \det(\mathbf{E}_{2 \times 2})C_k = \alpha C_k \quad k = 1, 2, 3, \alpha \neq 0.$$

Por lo tanto

$$\text{Ker}(\mathbf{A}_{eq}) = \text{Ker}(\mathbf{A}_{eq}^{(2)}) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \\ C_3^{(2)} \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Dos cofactores son cero. Sin pérdida de generalidad suponga que $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 0$. Observe que las matrices \mathbf{A}_2 y \mathbf{A}_3 asociadas a los respectivos cofactores, no pueden ser simultáneamente matrices nulas ya que implicaría que $m = 3$. Note que tampoco pueden tener al mismo tiempo un renglón cero en la misma fila porque esto significaría que $m = 2$. Así que los vectores renglón de \mathbf{A}_2 y \mathbf{A}_3 son múltiplos escalares entre si. Entonces a partir de operaciones elementales se puede eliminar un renglón de estas matrices quedando

$$\mathbf{A}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{s3} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & a_{r2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pero éstas al cumplirse simultáneamente implican que se redujo a \mathbf{A}_{eq} a la siguiente forma

$$\mathbf{A}_{eq}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & a_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{s3} \end{bmatrix}.$$

Finalmente resolviendo el sistema equivalente se concluye que

$$\text{Ker}(\mathbf{A}_{eq}) = \text{Ker}(\mathbf{A}_{eq}^{(2)}) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Análogamente se puede probar para $C_2 \neq 0$ y para $C_3 \neq 0$.

El recíproco de éste último inciso es inmediato ya que si el núcleo es generado por un sólo vector, entonces la nulidad es uno. ■

Observación De este teorema se pueden obtener las siguientes conclusiones.

- En el inciso dos, note que como los tres renglones son múltiplos escalares entre ellos, se puede escoger arbitrariamente cualquier renglón donde no todos sus coeficientes sean cero.
- En el inciso tres, sólo se requieren dos vectores renglón linealmente independientes. Así salvo que dos vectores renglón sean múltiplos escalares entre ellos, se pueden tomar arbitrariamente. Por otra parte, si se puede identificar cuales dos son múltiplos escalares, se puede seleccionar uno de estos y el otro sin escoger para hacer uso del teorema.

Ejemplo 1.2.1 Obtenga los vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Sea λ valor propio de A . Por definición los vectores propios son los $v \in \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ donde λ es un valor propio de A . Así se calcula el núcleo de esta matriz

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Observe que esta matriz no es la matriz cero y que los vectores renglón no son múltiplos escalares entre sí. Así por el teorema anterior su nulidad es uno y el núcleo es generado por los cofactores del renglón que se elimina. Note también que ningún renglón es múltiplo escalar de otro por lo que se puede eliminar cualquier fila. Por lo tanto si se elige el renglón dos se tiene que

$$\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} a_{12}(\lambda - a_{33}) \\ (\lambda - a_{33})(\lambda - a_{11}) \\ a_{32}(\lambda - a_{11}) \end{bmatrix} \right\}.$$

1.2.3. Matrices Definidas Positivas

En esta sección se incluyen unos lemas importantes de álgebra lineal acerca de las matrices definidas positivas que son usados para demostrar estabilidad usando funciones de Lyapunov.

Definición (Simétrica) Una matriz \mathbf{M} es simétrica si $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.

Definición (Antisimétrica) Una matriz \mathbf{M} es antisimétrica si $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^T$.

Lema 1.2.1 La forma cuadrática de \mathbf{A} es cero si y sólo si \mathbf{A} es una matriz real antisimétrica.

Demostración. Si \mathbf{A} es real antisimétrica, usando el producto interior euclidiano, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle -\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si la forma cuadrática es cero, se puede recuperar cada coeficiente de la matriz mediante el siguiente procedimiento. Primero note que los elementos de la diagonal son cero. Usando la base canónica se tiene que

$$0 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i = a_{ii}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Después, para recuperar cada elemento fuera de la diagonal, tome vectores de la forma $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$, realizando los cálculos se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j \\ &= a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} \\ &= a_{ij} + a_{ji}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 0$, es decir, \mathbf{A} es antisimétrica. ■

Lema 1.2.2 Si \mathbf{Q} es una matriz definida positiva y \mathbf{P} una matriz cambio de base entonces $\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P}$ es definida positiva.

Demostración. Como \mathbf{Q} es definida positiva, entonces su forma cuadrática es definida positiva, es decir

$$0 < \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, se tiene que

$$0 < \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto $\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P}$ es definida positiva. ■

Lema 1.2.3 Suponga que \mathbf{A} una matriz cuadrada. Existe una matriz simétrica y una matriz antisimétrica tal que \mathbf{A} se puede escribir como suma de ambas.

Demostración. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ tal que \mathbf{B} es simétrica y \mathbf{C} antisimétrica. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{B} - \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 2\mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = 2\mathbf{C}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

■

Lema 1.2.4 Sea $\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ una forma cuadrática donde \mathbf{R} no es simétrica. Existe una matriz simétrica \mathbf{Q} tal que $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$.

Demostración. Como toda matriz se puede descomponer en una matriz simétrica y otra antisimétrica, sea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{S}$; donde \mathbf{Q} es simétrica y \mathbf{S} es antisimétrica. Entonces, la forma cuadrática es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

ya que la forma cuadrática de una matriz antisimétrica es cero. ■

Lema 1.2.5 Sea \mathbf{A} una matriz cuya diagonal contiene algún cero. La forma cuadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ no es definida positiva.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga que el elemento $a_{ii} = 0$. Sea $\mathbf{x} = e_i$. Luego $e_i^T \mathbf{A} e_i = a_{ii} = 0$. Entonces existe un vector distinto de cero tal que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$. Por lo tanto \mathbf{A} no es definida positiva. ■

Lema 1.2.6 Sea

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

y $b \neq 0$. Existe una matriz cuadrada \mathbf{R} definida positiva tal que $\mathbf{R} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$

Demostración. Sea

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Calculando directamente se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2(ar_{11} + br_{12}) & a(r_{12} + r_{21}) - b(r_{11} - r_{22}) \\ a(r_{12} + r_{21}) - b(r_{11} - r_{22}) & 2(ar_{22} - br_{21}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones de la diagonal se pueden obtener los términos de la diagonal secundaria de \mathbf{R} . Es decir

$$r_{12} = -\frac{a}{b} r_{11} \quad , \quad r_{21} = \frac{a}{b} r_{22}. \quad (1.8)$$

Luego sustituyendo (1.8) en la ecuación de los elementos fuera de la diagonal se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= a(r_{12} + r_{21}) - b(r_{11} - r_{22}) \\ &= \frac{a^2}{b}(r_{22} - r_{11}) - b(r_{11} - r_{22}) \\ &= (a^2 + b^2)(r_{22} - r_{11}). \end{aligned}$$

Es decir que $r_{11} = r_{22}$. Por consiguiente se concluye que

$$\mathbf{R} = \frac{r_{11}}{b} \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix},$$

donde r_{11} es arbitrario. Para verificar positividad, se calcula

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \frac{r_{11}}{b} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{r_{11}}{b} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Es fácil ver que en efecto es definida positiva, tomando $r_{11} = \alpha b$, donde α es un número positivo. ■

Corolario 1.2.1 Sea

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

y $b \neq 0$. Existe \mathbf{R} simétrica definida positiva tal que $\mathbf{R}\mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$ si y sólo si $a = 0$.

Demostración. Si $a = 0$, \mathbf{R} se construye como el lema anterior y se verifica que $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$. Por otro lado si $\mathbf{R}\mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$, \mathbf{R} debe ser como en el lema anterior y al resolver la condición de simetría $\mathbf{R} - \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$ se observa que sólo tiene solución si $a = 0$. ■

Lema 1.2.7 Sean

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y μ, σ números reales no nulos. Si $\mu \mathbf{R}\mathbf{J} + \sigma \mathbf{J}^T \mathbf{R} = \mathbf{0}$, entonces

- $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ si $|\mu| \neq |\sigma|$ o bien
- $r_{11} = \pm r_{22}$ y $r_{12} = \mp r_{21}$ si $|\mu| = |\sigma|$.

Demostración. Realizando el producto de forma explícita se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mu \mathbf{R}\mathbf{J} + \sigma \mathbf{J}^T \mathbf{R} \\ &= \begin{bmatrix} \mu r_{12} + \sigma r_{21} & \sigma r_{22} - \mu r_{11} \\ \mu r_{22} - \sigma r_{11} & -(\sigma r_{12} + \mu r_{21}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, esta igualdad genera los sistemas de ecuaciones simultáneos

$$\begin{bmatrix} \mu & -\sigma \\ -\sigma & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mu & \sigma \\ \sigma & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante para ambos sistemas es $\mu^2 - \sigma^2 = 0$. De aquí se tienen los siguientes casos.

Si $|\mu| \neq |\sigma|$, entonces las matrices de ambos sistemas son invertibles y cada entrada de \mathbf{R} es cero.

Si $|\mu| = |\sigma|$, entonces las matrices de ambos sistemas son singulares y las soluciones de cada sistema son $r_{11} = \pm r_{22}$ y $r_{12} = \mp r_{21}$. ■

Teorema 1.2.2 Sea \mathbf{B} una matriz cuadrada. Existe una matriz simétrica definida positiva \mathbf{Q} tal que \mathbf{QB} es antisimétrica si y sólo si los valores propios de \mathbf{B} son cero o imaginarios puros y además sus formas canónicas de Jordan son diagonales o diagonal por bloques respectivamente.

Demostración. Para \mathbf{B} existe \mathbf{P} invertible tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \mathbf{J}$ donde \mathbf{J} es la forma canónica de Jordan de \mathbf{B} . Como \mathbf{QB} debe ser antisimétrica se debe cumplir que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{QBx} = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$, luego

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}^T \mathbf{QBx} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{QPJP}^{-1} \mathbf{Py} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{QPJy} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{RJy}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde por el lema 1.2.2 \mathbf{R} debe ser simétrica definida positiva. Por la igualdad (1.9), se concluye que \mathbf{RJ} es antisimétrica. Es decir, el problema se reduce a encontrar las matrices \mathbf{R} simétricas definidas positivas tales que $\mathbf{RJ} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$. Se analiza por casos.

- Caso 1

Si $\mathbf{J} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, tal que $\lambda_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Entonces no existe \mathbf{R} definida positiva tal que $\mathbf{RJ} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$.

Realizando las operaciones, se puede observar que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{RJ} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2\lambda_1 r_{11} & \lambda_1 r_{21} + \lambda_2 r_{12} & \cdots & \lambda_1 r_{n1} + \lambda_n r_{1n} \\ \lambda_1 r_{21} + \lambda_2 r_{12} & 2\lambda_2 r_{22} & \cdots & \lambda_2 r_{n2} + \lambda_n r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 r_{n1} + \lambda_n r_{1n} & \lambda_1 r_{21} + \lambda_2 r_{12} & \cdots & 2\lambda_n r_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq 0$ para algún i , implica que $r_{ii} = 0$. Es decir, \mathbf{R} tiene un elemento cero en su diagonal. Luego por el lema 1.2.5, \mathbf{R} no puede ser definida positiva.

- Caso 2

Si \mathbf{J} es un bloque de Jordan con unos arriba de la diagonal principal. Entonces no existe \mathbf{R} definida positiva tal que $\mathbf{RJ} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{0}$.

Calculando directamente se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\mathbf{R}^T \\ &= \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} + \lambda(r_{12} + r_{21}) & \cdots & r_{1n-1} + \lambda(r_{1n} + r_{n1}) \\ r_{21} + \lambda(r_{12} + r_{21}) & 2(r_{21} + \lambda r_{22}) & \cdots & r_{2n-1} + r_{n1} + \lambda(r_{2n} + r_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n-1} + \lambda(r_{1n} + r_{n1}) & r_{2n-1} + r_{n1} + \lambda(r_{2n} + r_{n2}) & \cdots & 2(r_{nn-1} + \lambda r_{nn}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Del primer elemento de la diagonal se concluye que $\lambda = 0$, ya que de lo contrario, \mathbf{R} tendría un elemento cero en su diagonal, lo cual la haría no definida positiva. Si eso sucede, del elemento de la primera fila con la segunda columna, se concluye que $r_{11} = 0$. Por consiguiente \mathbf{R} siempre tendrá un elemento cero en su diagonal. Así, nuevamente por el lema 1.2.5, \mathbf{R} no es definida positiva.

- Caso 3

Si \mathbf{J} tiene valores propios complejos y es diagonal por bloques. Es decir

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z}_{nn} \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{Z}_{ii} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_i) & -\operatorname{Im}(\lambda_i) \\ \operatorname{Im}(\lambda_i) & \operatorname{Re}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

en el cual λ_i son los valores propios de \mathbf{J} . Denote a \mathbf{R} como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \cdots & \mathbf{R}_{1n} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \cdots & \mathbf{R}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1} & \mathbf{R}_{n2} & \cdots & \mathbf{R}_{nn} \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{2i-1, 2j-1} & r_{2i-1, 2j} \\ r_{2i, 2j-1} & r_{2i, 2j} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Con estas consideraciones se puede calcular

$$\mathbf{R}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{R}_{12}\mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{R}_{1n}\mathbf{Z}_n \\ \mathbf{R}_{21}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{R}_{22}\mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{R}_{2n}\mathbf{Z}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{R}_{n2}\mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{R}_{nn}\mathbf{Z}_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}^T\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^T\mathbf{R}_{11}^T & \mathbf{Z}_1^T\mathbf{R}_{21}^T & \cdots & \mathbf{Z}_1^T\mathbf{R}_{n1}^T \\ \mathbf{Z}_2^T\mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{Z}_2^T\mathbf{R}_{22}^T & \cdots & \mathbf{Z}_2^T\mathbf{R}_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_n^T\mathbf{R}_{1n}^T & \mathbf{Z}_n^T\mathbf{R}_{2n}^T & \cdots & \mathbf{Z}_n^T\mathbf{R}_{nn}^T \end{bmatrix}.$$

Por lo que resolver la ecuación $\mathbf{R}\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\mathbf{R}^T = \mathbf{0}$ implica resolver ecuaciones de la forma

$$\mathbf{R}_{ij}\mathbf{Z}_j + \mathbf{Z}_i^T\mathbf{R}_{ji}^T = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Para $i = j$, \mathbf{R}_{ij} debe ser como se propone en el lema 1.2.6. Mas aún, por el corolario 1.2.1, como \mathbf{R} es simétrica, la ecuación (1.10) sólo tiene solución distinta de cero si la parte real de los valores propios de \mathbf{J} son todos cero. Es decir

$$\mathbf{Z}_i = \text{Im}(\lambda_i) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Para $i \neq j$, y por el hecho anterior, las ecuaciones por resolver se reducen a

$$\text{Im}(\lambda_j)\mathbf{R}_{ij}\mathbf{T} + \text{Im}(\lambda_i)\mathbf{T}^T\mathbf{R}_{ji}^T = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

donde \mathbf{T} es la matriz asociada en (1.11). Luego \mathbf{R}_{ij} , se puede escoger mediante el lema 1.2.7. Para abarcar la mayor cantidad de casos posibles se elige $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{0}$.

Ahora, para probar que \mathbf{R} es definida positiva denote

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Descomponiendo \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} &= (\hat{\mathbf{x}}_1^T + \hat{\mathbf{x}}_2^T + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n^T) \mathbf{R} (\hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n) \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{x}_i^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{x}_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{x}_i + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i^T \mathbf{R}_{ij} \mathbf{x}_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathbf{x}_i\|^2,
 \end{aligned}$$

donde $\alpha_i > 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Como $\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ es suma de números positivos, no puede ser definida negativa. Para verificar que no es semidefinida positiva, suponga que existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = 0$. Sin embargo, la última igualdad, implica que

$$0 = \|\mathbf{x}_i\|^2 = x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De aquí se sigue que $\mathbf{x}_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Por consiguiente $\mathbf{x} = 0$. Lo cual contradice el supuesto de que existía \mathbf{x} diferente de cero. Por lo tanto \mathbf{R} es definida positiva.

- Caso 4 Si \mathbf{J} tiene valores complejos repetidos con bloques de identidad arriba de los bloques en diagonal. Esto es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z} \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda) & -\operatorname{Im}(\lambda) \\ \operatorname{Im}(\lambda) & \operatorname{Re}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y λ es el valor propio de \mathbf{J} . Definiendo \mathbf{R} al igual que en el caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} \mathbf{Z} & \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12} \mathbf{Z} & \cdots & \mathbf{R}_{1n-1} + \mathbf{R}_{1n} \mathbf{Z} \\ \mathbf{R}_{21} \mathbf{Z} & \mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22} \mathbf{Z} & \cdots & \mathbf{R}_{2n-1} + \mathbf{R}_{2n} \mathbf{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1} \mathbf{Z} & \mathbf{R}_{n1} + \mathbf{R}_{n2} \mathbf{Z} & \cdots & \mathbf{R}_{nn-1} + \mathbf{R}_{nn} \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{J}^T \mathbf{R}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{11}^T & \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{21}^T & \cdots & \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{n1}^T \\ \mathbf{R}_{11}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{R}_{21}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{22}^T & \cdots & \mathbf{R}_{n1}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{1n-1}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{1n}^T & \mathbf{R}_{2n-1}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{2n}^T & \cdots & \mathbf{R}_{nn-1}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{nn}^T \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por lo que las ecuaciones a resolver son de la forma

$$\mathbf{R}_{ij-1} + \mathbf{R}_{ji-1}^T + \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{R}_{ji}^T = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

donde si un subíndice se anula, se define que $\mathbf{R}_{i0} = \mathbf{R}_{0j} = \mathbf{0}$. Como \mathbf{R} es simétrica, implica que $\mathbf{R}_{ij}^T = \mathbf{R}_{ji}$. Entonces, las ecuaciones para resolver se simplifican a

$$\mathbf{R}_{ij-1} + \mathbf{R}_{i-1j} + \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora se resuelve el sistema de ecuación por inducción por renglones. Primero, se fija $i = 1$ y luego varía $j = 1, 2, \dots, n$.

Para $i = 1$ y $j = 1$, la ecuación a resolver es

$$\mathbf{R}_{11}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{R}_{11} = \mathbf{0}.$$

Nuevamente del lema 1.2.6 y el corolario 1.2.1, se tiene que $\mathbf{Z} = Im(\lambda)\mathbf{T}$ y que $\mathbf{R}_{11} = \alpha\mathbf{I}$, donde \mathbf{T} se define al igual que el caso anterior y $\alpha > 0$.

Por ejemplo, para $i = 1$ y $j = 2$, la ecuación a resolver se reduce a

$$\mathbf{R}_{11} + Im(\lambda)[\mathbf{R}_{12}\mathbf{T}^T + \mathbf{T}^T\mathbf{R}_{12}].$$

Sea

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Calculando se tiene que

$$\begin{bmatrix} 2b & c-a \\ c-a & -2b \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{Im(\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, de las entradas en la diagonal se obtienen las igualdades

$$b = \frac{\alpha}{2Im(\lambda)} \quad y \quad b = -\frac{\alpha}{2Im(\lambda)},$$

donde sólo tiene solución si $b = 0$ y $\alpha = 0$. Sin embargo, se necesita que $\alpha > 0$ para que \mathbf{R} sea definida positiva. Por lo tanto \mathbf{R} no es definida positiva. ■

1.3. Teoría de Control por Ubicación de Polos

En esta sección se presenta el método de control por ubicación de polos como herramienta para modificar la estabilidad local para sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

donde \mathbf{A} es una matriz real de $n \times n$ y \mathbf{B} es un vector columna en \mathbb{R}^n .

En general, el método consiste en escoger $u = \mathbf{K}\mathbf{x}$, donde \mathbf{K} es un vector renglón de entradas reales, de tal forma que la jacobiana del sistema se convierte en $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$. Así su respuesta no depende sólo de la aportación de \mathbf{A} sino también de la nueva matriz $\mathbf{B}\mathbf{K}$. Este de control, busca poder ajustar los valores propios de la nueva jacobiana de manera arbitraria a cualquier valor deseado. Los sistemas que permiten tal ajuste, se le conocen como controlables.

Definición (Controlabilidad) Un sistema es completamente controlable si la matriz de controlabilidad $[\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ es de rango completo (n).

Intuitivamente se puede entender la controlabilidad como la capacidad que tiene el control a partir de \mathbf{B} de modificar la estabilidad de \mathbf{A} . Sin embargo, no hay nada que indique a priori que se pueda elegir de forma arbitraria \mathbf{K} tal que los valores propios de la nueva jacobiana sean los deseados. Esto se clarifica mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1 La ubicación arbitraria de polos es posible si y sólo si el sistema es completamente controlable.

Demostración. Necesidad

Suponga que

$$\text{Rank}[\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = m < n.$$

Entonces, la matriz de controlabilidad tiene m vectores columna linealmente independientes. Sean $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$ dichos vectores.

Luego se construye \mathbf{P} con estos vectores y se completa con $n - m$ vectores linealmente independientes para que sea de rango n

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_m | \mathbf{v}_{m+1} | \dots | \mathbf{v}_n].$$

Realizando el cambio de variable se sigue que

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right], \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right].$$

Ahora se define

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P} = [\mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2].$$

Calculando el polinomio característico de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 |\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| &= |\mathbf{P}^{-1}[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]\mathbf{P}| \\
 &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BK}\mathbf{P}| \\
 &= |\lambda\mathbf{I} - (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})| \\
 &= \left| \lambda\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2] \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cc} \lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_{11} & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} \end{array} \right| \\
 &= |\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_{11}| |\lambda\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22}|,
 \end{aligned}$$

donde se usa el hecho que el polinomio característico es invariante bajo semejanza. De la última ecuación se puede observar que los valores propios de \mathbf{A}_{22} no dependen de \mathbf{K} . Por lo tanto, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores propios de la matriz \mathbf{A} que no se pueden colocar de forma arbitraria.

Suficiencia

Primero se define la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W},$$

donde \mathbf{M} es la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Note que \mathbf{T} es invertible ya que \mathbf{W} es no singular y \mathbf{M} de rango completo. Ahora bajo el cambio de coordenadas $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$, la ecuación de estados se puede escribir como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u,$$

donde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considere $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ valores propios deseados de para el polinomio característico. Así el polinomio es

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\dots(\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Denote

$$\mathbf{KT} = [\delta_0 | \delta_1 | \dots | \delta_{n-1}].$$

Así aplicando la ley de control $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ se obtiene el polinomio característico

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| &= |\mathbf{T}^{-1}[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]\mathbf{T}| \\ &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 + \delta_0 & a_1 + \delta_1 & \dots & a_{n-1} + \delta_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + \delta_1)\lambda + (a_0 + \delta_0). \end{aligned}$$

Se desea que este polinomio tenga los mismos coeficientes que el polinomio deseado, lo cual implica que

$$a_i + \delta_i = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Finalmente, resolviendo para \mathbf{K} se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\delta_0 | \delta_1 | \dots | \delta_{n-1}]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [\alpha_0 - a_0 | \alpha_1 - a_1 | \dots | \alpha_{n-1} - a_{n-1}]\mathbf{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si el sistema es de estado completamente controlable, todos los valores propios se pueden colocar arbitrariamente. ■

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 2

Modelo

2.1. Descripción del Modelo

En la figura 2.1 se muestra el diagrama esquemático de un convertidor elevador (tipo Boost) acoplado al circuito equivalente de una celda solar. De aquí se obtienen las ecuaciones dinámicas que modelan el comportamiento del sistema.

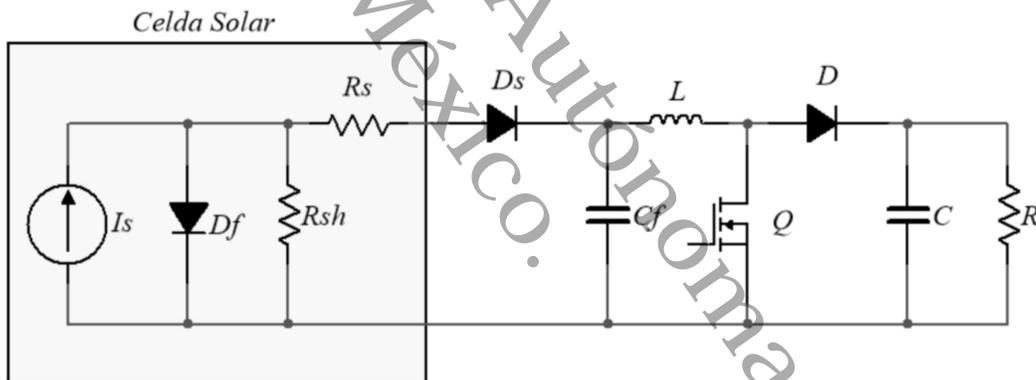


Figura 2.1: Diagrama Esquemático de un Convertidor Elevador con una Celda Solar como Fuente de Energía.

Si bien las resistencias son dispositivos que disipan energía, estas pérdidas son intrínsecas del sistema fotovoltaico y la carga R , por lo que se considerarán en el modelo; además de que se busca conocer cómo éstas afectan la transmisión de potencia. En el diagrama esquemático también se pueden observar dispositivos semiconductores. Estos, se modelan de distinta manera dependiendo de su comportamiento del circuito. Por un lado, el diodo D_f , se modela con la ecuación característica de los diodos, ya que refleja la respuesta Voltaje-Corriente de la celda. Por otro lado, los dispositivos D y Q se caracterizan como interruptores ideales, ya que estos trabajan en corte-saturación la mayor parte del tiempo y actualmente se pueden conseguir con pérdidas mínimas.

Finalmente D_s es un diodo de protección y en el circuito está siempre encendido, por lo que se modelará como un corto circuito.

2.1.1.1. Celda Solar

Primero la celda solar satisface las siguientes ecuaciones.

$$I_S = i_{D_f} + i_{R_{sh}} + i_{R_s}, \quad (2.1)$$

$$i_{R_s} = i_{C_f} + i_L, \quad (2.2)$$

$$i_{R_s} = \frac{v_{D_f} - v_{C_f}}{R_s}, \quad (2.3)$$

$$i_{R_{sh}} = v_{D_f}/R_{sh}, \quad (2.4)$$

$$i_{D_f} = I_0(e^{v_{D_f}/V_T} - 1), \quad (2.5)$$

donde v_{elem} y i_{elem} son los voltajes y las corrientes que pasa por el dispositivo correspondiente. I_S es la corriente fotogenerada, I_0 es la corriente de saturación inversa del diodo D y V_T es el voltaje térmico. R_s y R_{sh} son las resistencias internas en serie y paralelo de la celda. Finalmente C_f es la capacitancia de acoplamiento de la celda, L y C son la inductancia y capacitancia del convertidor respectivamente; y R es la carga del circuito.

Note que las primeras tres ecuaciones son obtenidas directamente de un análisis nodal antes y después de la resistencia R_s . La cuarta es consecuencia de la ley de Ohm y la última es la ecuación característica del diodo.

Ahora se busca usar como estados dinámicos cantidades fáciles de medir como lo es el voltaje del capacitor de acoplo v_{C_f} . Para lograr esto, se requiere despejar para la corriente del capacitor C_f de las ecuaciones que modelan el circuito y así obtener una ecuación diferencial.

Primero de (2.3) y (2.2), se tiene que

$$v_{D_f} = R_s(i_{C_f} + i_L) + v_{C_f}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1) y despejando para i_{C_f} , se concluye que

$$i_{C_f} = I_S - i_{D_f} - i_{R_{sh}} - i_L. \quad (2.7)$$

Luego, de (2.4) y (2.5) en (2.7), se llega a

$$i_{C_f} = I_S - I_0(e^{v_{D_f}/V_T} - 1) - \frac{v_{D_f}}{R_{sh}} - i_L. \quad (2.8)$$

Finalmente de (2.6) en (2.8), se obtiene una ecuación para i_{C_f} en términos de los estados dinámicos del sistema (v_{C_f} , i_L y v_C), que es

$$i_{C_f} = I_S - I_0(e^{(R_s(i_{C_f} + i_L) + v_{C_f})/V_T} - 1) - \frac{R_s}{R_{sh}}(i_{C_f} + i_L) - \frac{v_{C_f}}{R_{sh}} - i_L. \quad (2.9)$$

Sin embargo por definición

$$i_{C_f} = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

y como esta variable se encuentra en la exponencial no se puede resolver de forma explícita para $\frac{dv_{C_f}}{dt}$. Por consiguiente existen dos opciones para trabajar el sistema.

Por un lado se puede analizar esta ecuación diferencial de forma implícita introduciendo como variable dinámica a i_{D_f} con una restricción. Es decir

$$\begin{aligned} i_{C_f} &= I_S - i_{D_f} - \frac{R_s}{R_{sh}}(i_{C_f} + i_L) - \frac{v_{C_f}}{R_{sh}} - i_L, \\ i_{D_f} &= I_0(e^{(R_s(i_{C_f} + i_L) + v_{C_f})/V_T} - 1). \end{aligned}$$

Por otro lado, si se trunca la exponencial a los primeros términos de su serie infinita, se puede aproximar mediante

$$e^{(R_s(i_{C_f} + i_L) + v_{C_f})/V_T} \approx 1 + (R_s(i_{C_f} + i_L) + v_{C_f})/V_T,$$

y así llegar a

$$\frac{dv_{C_f}}{dt} \approx \frac{I_S}{\xi C_f} - \frac{i_L}{C_f} - \frac{v_{C_f}}{\xi R_{eq} C_f}, \quad (2.10)$$

donde

$$\xi = 1 + \frac{I_0 R_s}{V_T} + \frac{R_s}{R_{sh}} \quad (2.11)$$

y

$$R_{eq} = \left[\frac{I_0}{V_T} + \frac{1}{R_{sh}} \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Note que ξ es un factor mayor a uno el cual se puede interpretar como las pérdidas debido a los materiales de la celda fotovoltaica. Esto se debe a que ξ se encuentra en el denominador de I_S , reduciendo la corriente que puede ingresar en el sistema.

Estas dos formas de modelar la celda solar presentan ventajas y desventajas que se deben afrontar al momento de decidir cual de las dos manejar. Por un lado, si se opta por analizar la celda mediante ecuaciones de forma implícita los cálculos se vuelven mas complicados pero la precisión de las predicciones manejan un amplio rango de estados accesibles del sistema. Por otro lado, si se decide aproximar la exponencial, la precisión del modelo se limita a cierto punto de operación, sin embargo los cálculos son mas accesibles y en la mayoría de los casos la exactitud es aceptable; además de que facilita el ajuste numérico de los parámetros del sistema con los datos experimentales. Para el propósito de esta tesis, se optará trabajar con el modelo truncado de la ecuación diferencial, ya que se adecua más con el alcance de la misma, que es el estudio de la estabilidad del sistema ante diferentes leyes de control.

2.1.2. Reparametrización del Modelo de la Celda

En la aproximación de la celda solar se ha obtenido una expresión en términos de parámetros desconocidos o difíciles de obtener experimentalmente. Por ello, se busca obtener una estimación de estos parámetros en términos de cantidades conocidas como son el voltaje en circuito abierto V_{OC} (Open Circuit Voltage) y la corriente en corto circuito I_{SC} (Short Circuit Current). Para ello se procede el análisis del circuito. En la figura (2.2) se muestra el circuito equivalente cuando la celda solar no tiene carga.

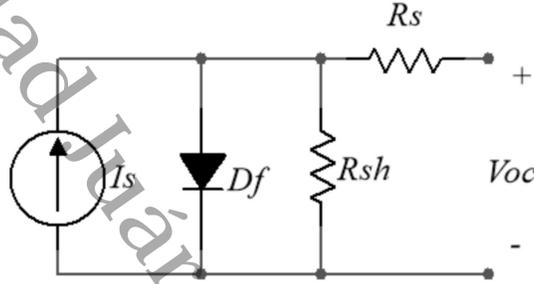


Figura 2.2: Celda Solar Circuito Abierto.

En este estado la celda solar satisface las siguientes ecuaciones

$$I_S = I_D + I_{R_{sh}} \quad (2.13)$$

$$V_D = V_{OC}, \quad (2.14)$$

$$I_{R_{sh}} = V_{OC}/R_{sh}, \quad (2.15)$$

$$I_D = I_0(e^{V_D/V_T} - 1) \approx \frac{I_0 V_D}{V_T} = \frac{I_0 V_{OC}}{V_T}. \quad (2.16)$$

La primera ecuación es resultado de un análisis nodal donde se encuentra la fuente. La segunda es consecuencia de que como no hay corriente por R_s , no hay caída de tensión en ésta y el voltaje de circuito abierto es el mismo que el del diodo y R_{sh} ya que están en paralelo. La tercera es dada a la ley de Ohm y la última es la aproximación que se consideró de la corriente del diodo.

De estas ecuaciones se concluye que

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{I_0 V_{OC}}{V_T} + \frac{V_{OC}}{R_{sh}} \\ &= \left(\frac{I_0}{V_T} + \frac{1}{R_{sh}} \right) V_{OC} \\ &= R_{eq}^{-1} V_{OC}, \end{aligned}$$

donde R_{eq} se definió en (2.12), por lo tanto

$$I_S R_{eq} = V_{OC}. \quad (2.17)$$

En la figura (2.3) se muestra el diagrama esquemático de la celda solar en corto circuito.

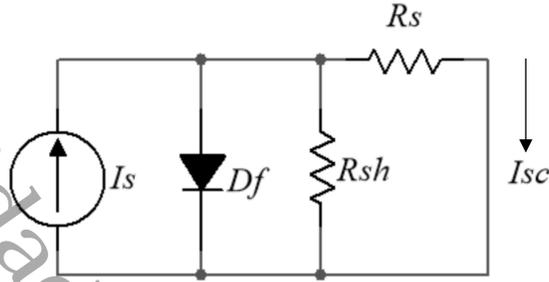


Figura 2.3: Celda Solar Corto Circuito.

En este estado la celda satisface

$$I_S = I_D + I_{R_{sh}} + I_{R_s}, \quad (2.18)$$

$$I_{R_s} = I_{SC}, \quad (2.19)$$

$$I_{R_{sh}} = \frac{V_{R_s}}{R_{sh}} = \frac{R_s I_{SC}}{R_{sh}}, \quad (2.20)$$

$$I_D = I_0 (e^{V_D/V_T} - 1) \approx \frac{I_0 V_D}{V_T} = \frac{I_0 R_s I_{SC}}{V_T}. \quad (2.21)$$

La primera ecuación es resultado de un análisis nodal en la fuente. La segunda es consecuencia de que la corriente que pasa por R_s es I_{SC} . La tercera es consecuencia de la ley de Ohm y la última es nuevamente la aproximación de la corriente del diodo.

De estas ecuaciones se sigue que

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{I_0 R_s I_{SC}}{V_T} + \frac{R_s I_{SC}}{R_{sh}} + I_{SC} \\ &= \left(\frac{I_0 R_s}{V_T} + \frac{R_s}{R_{sh}} + 1 \right) I_{SC} \\ &= \xi I_{SC}, \end{aligned}$$

donde ξ se definió en la ecuación (2.11). Por lo tanto

$$\frac{I_S}{\xi} = I_{SC}. \quad (2.22)$$

Ahora bien, introduciendo la cantidad de resistencia fotovoltaica R_f y de las ecuaciones (2.17) y (2.22) se tiene que

$$R_f = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = \xi R_{eq}. \quad (2.23)$$

Por lo que la ecuación diferencial que se usará para modelar a la celda fotovoltaica es

$$\frac{dv_{C_f}}{dt} = \frac{I_{SC}}{C_f} - \frac{v_{C_f}}{R_f C_f} - \frac{i_L}{C_f}. \quad (2.24)$$

2.1.3. Convertidor Boost

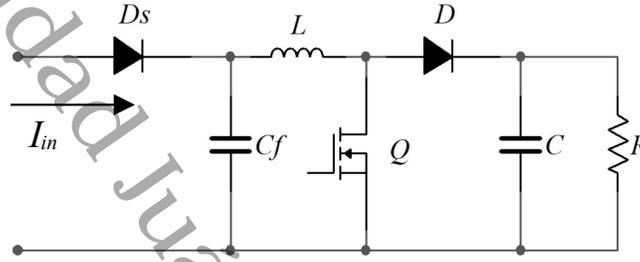


Figura 2.4: Convertidor Boost.

En el proceso de modelado también se requiere analizar el convertidor elevador, el cual se puede observar en la figura 2.4. Para obtener las ecuaciones diferenciales correspondientes, se estudia el comportamiento del circuito equivalente cuando el interruptor Q está cerrado y cuando éste se encuentra abierto (véase figura 2.5).

A partir de las leyes de Kirchoff se obtienen las ecuaciones que modelan el estado cerrado (izquierda) y el estado abierto (derecha) del convertidor.

$$\begin{aligned} v_L &= v_{C_f}, & v_L &= v_{C_f} - v_C, \\ i_C &= \frac{-v_C}{R} & i_C &= i_L - \frac{v_C}{R}. \end{aligned}$$

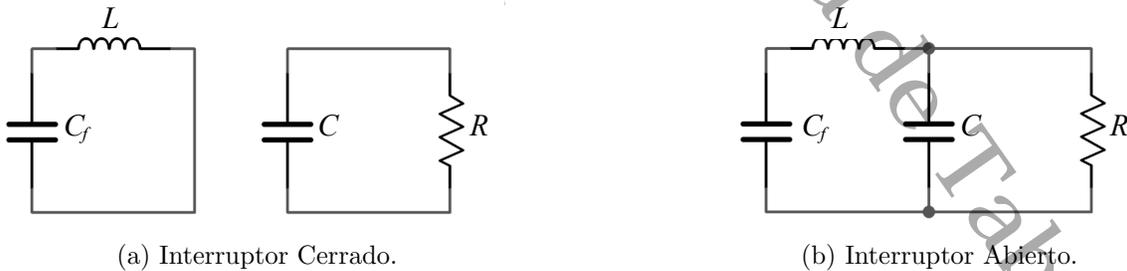


Figura 2.5: Circuito Equivalente del Convertidor Elevador.

Recordando que los estados dinámicos del sistema son las corrientes de los inductores y los voltajes de los capacitores, se introduce por definición

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

y resolviendo para la derivada de los estados, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_{C_f}}{L}, & \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_{C_f}}{L} - \frac{v_C}{L}, \\ \frac{dv_C}{dt} &= \frac{-v_C}{RC}, & \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC}, \end{aligned}$$

donde v_{C_f} es el voltaje de salida de la fuente, i_L la corriente del inductor y v_C el voltaje del capacitor de salida.

2.1.4. Sistema Promediado

Ahora se tiene un par de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales periódicas de la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_{C_f} \\ \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_f} & -\frac{1}{C_f} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_f} \\ i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & t \in [nT, nT + DT), \\ \begin{bmatrix} \dot{v}_{C_f} \\ \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_f} & -\frac{1}{C_f} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_f} \\ i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & t \in [nT + DT, (n+1)T). \end{aligned}$$

Promediando*, se obtienen las matrices

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_f} & -\frac{1}{C_f} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{D'}{L} \\ 0 & \frac{D'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad y \quad \langle \mathbf{B} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde D' es el complemento del ciclo de trabajo ($1 - D$). Una propiedad importante de las ecuaciones diferenciales es el hecho que las soluciones dependen continuamente de los parámetros. Afortunadamente, todos estos se pueden medir explícitamente por lo tanto conocerse, salvo uno R , el cual debe de medirse en tiempo real. Esto se debe a que la carga del sistema es variable dependiendo de la cantidad de dispositivos se conecten para ser alimentados por la celda solar. Sin embargo, se requiere que el voltaje

*Para ver la demostración de como se obtiene el modelo promediado, véase el apéndice A.1.

de salida se mantenga constante para el buen funcionamiento de los aparatos eléctricos. Dado que R , puede tener un amplio rango de valores de operación, pero es fija con respecto al sistema, se propone modificar el ciclo de trabajo en tiempo real mediante un control. Por consiguiente, de aquí en adelante se denotará al complemento del ciclo de trabajo D' como \bar{U} para ser consistente con la notación estándar del elemento control. También hay que recalcar que el ciclo de trabajo se encuentra entre cero y uno, así se tiene la restricción que $0 < \bar{U} < 1$ y el sistema de ecuaciones diferenciales para analizar será

$$\begin{aligned}\dot{V}_{C_f} &= \frac{I_{SC}}{C_f} - \frac{I_L}{C_f} - \frac{V_{C_f}}{R_f C_f}, \\ \dot{I}_L &= \frac{V_{C_f}}{L} - \frac{\bar{U}(V_{C_f}, I_L, V_C)V_C}{L}, \\ \dot{V}_C &= \frac{\bar{U}(V_{C_f}, I_L, V_C)I_L}{C} - \frac{V_C}{RC},\end{aligned}\quad (2.25)$$

donde se denotan los estados del sistema en mayúscula, ya que el estudio no se realizará en variables instantáneas sino promediadas.

El circuito equivalente que modela este sistema de ecuaciones diferenciales se observa en la figura 2.6, donde el símbolo de transformador modificado representa un "transformador de corriente directa". Este símbolo caracteriza la amplificación del voltaje del convertidor.

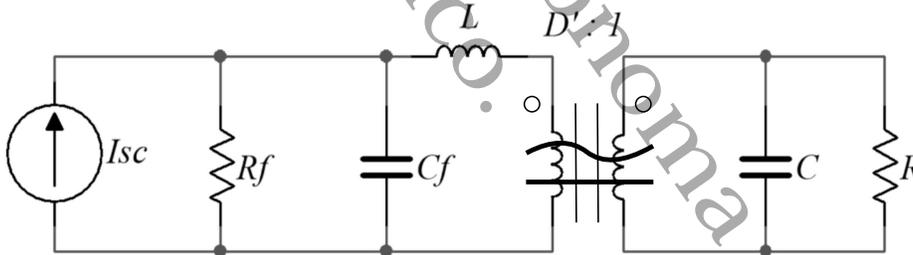


Figura 2.6: Circuito Equivalente del Sistema.

Cabe mencionar que al retroalimentar este sistema, es decir, haciendo el control dependiente de las variables de estado del sistema, éste se vuelve fácilmente no lineal. Por ejemplo, tomando $\bar{U} = V_C$, las ecuaciones (2.25) se tornan de segundo grado.

2.1.5. Convertidor Boost en Cascada

Se finaliza este capítulo obteniendo el modelo de un convertidor Boost en cascada. En la figura 2.7 se muestra el diagrama esquemático de este convertidor. Se modificaron las etiquetas para poder agrupar apropiadamente las mallas en los circuitos

equivalentes. Siendo ahora C_0 el capacitor de acoplo para mantener el voltaje de entrada prácticamente constante, L_0 el inductor del primer convertidor y C_n es el capacitor de salida del último convertidor.

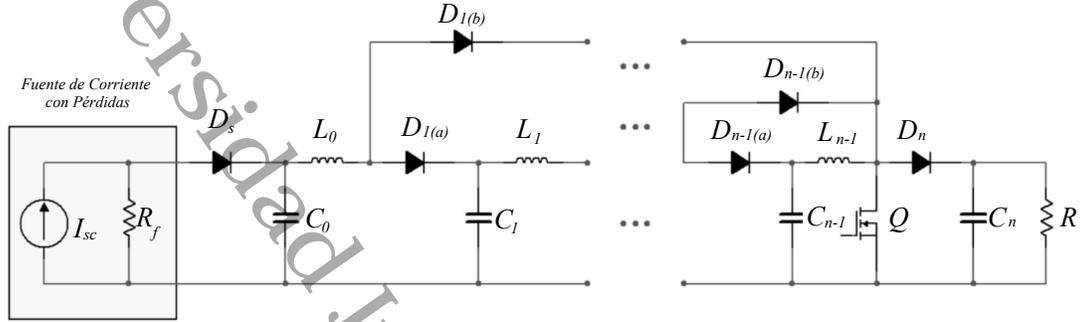


Figura 2.7: Convertidor Boost en Cascada con una Fuente de Corriente Genérica.

Cuando el interruptor Q está cerrado, el circuito equivalente se puede observar en la figura 2.8. En este estado las ecuaciones diferenciales que modelan todas las mallas, excepto la de carga, son

$$\frac{di_{L_k}}{dt} = \frac{v_{C_k}}{L_k},$$

$$\frac{dv_{C_k}}{dt} = -\frac{i_{L_k}}{C_k},$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

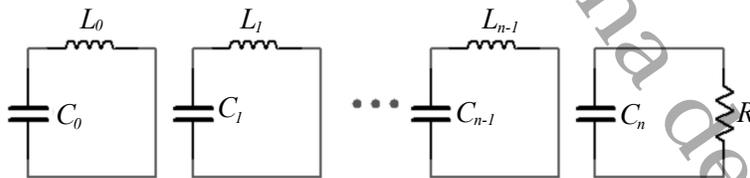


Figura 2.8: Convertidor Boost en Cascada, Interruptor Cerrado.

En la figura 2.9 se muestra el circuito equivalente cuando Q está abierto, las ecuaciones que modelan a los circuitos intermedios son

$$\frac{di_{L_k}}{dt} = \frac{v_{C_k} - v_{C_{k+1}}}{L_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$\frac{dv_{C_k}}{dt} = \frac{i_{L_{k-1}} - i_{L_k}}{C_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

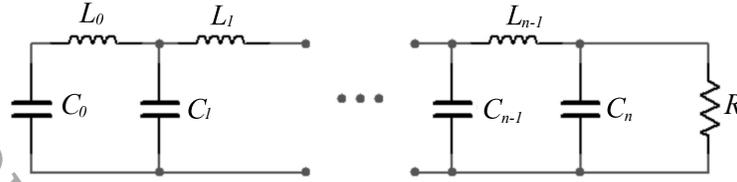


Figura 2.9: Convertidor Boost en Cascada, Interruptor Abierto.

Finalmente, agregando las ecuaciones de la celda solar y la red correspondiente a la carga, se obtienen lo siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_0} \\ \dot{i}_{L_0} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \vdots \\ \dot{v}_{C_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_0} & -\frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{RC_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_0} \\ i_{L_0} \\ v_{C_1} \\ i_{L_1} \\ v_{C_2} \\ \vdots \\ v_{C_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuando el interruptor está cerrado y

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_0} \\ \dot{i}_{L_0} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \vdots \\ \dot{v}_{C_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_0} & -\frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{L_0} & 0 & -\frac{1}{L_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{RC_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_0} \\ i_{L_0} \\ v_{C_1} \\ i_{L_1} \\ v_{C_2} \\ \vdots \\ v_{C_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuando el interruptor está abierto.

Finalmente, las matrices del sistema promediado son

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_f C_0} & -\frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_0} & 0 & -\frac{D'}{L_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{D'}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{D'}{L_1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D'}{C_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{RC_n} \end{bmatrix} \quad y \quad \langle \mathbf{B} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{I_{SC}}{C_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C_0} &= \frac{1}{C_0} [I_{SC} - V_{C_0}/R_f - I_{L_0}], \\ \dot{I}_{L_k} &= \frac{1}{L_k} [V_{C_k} - \bar{U}V_{C_{k+1}}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \dot{V}_{C_k} &= \frac{1}{C_k} [\bar{U}I_{L_{k-1}} - I_{L_k}], \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{V}_{C_n} &= \frac{1}{C_n} [\bar{U}I_{L_{n-1}} - V_{C_n}/R]. \end{aligned}$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 3

Estabilidad del Sistema

En este capítulo se realiza primero el análisis del sistema del modelo de la celda fotovoltaica a la ecuación diferencial lineal con un convertidor que se obtuvo en la sección 2.1. Inicialmente se estudia el comportamiento del sistema en lazo abierto, es decir, cuando \bar{U} es independiente de los estados. De esta manera se podrá observar los equilibrios a los cuales puede acceder el sistema y su estabilidad, ya que éstos están intrínsecamente relacionados con ciclo de trabajo. Luego, se aplican algunas leyes de control retroalimentando los estados, es decir, haciendo a \bar{U} dependiendo de estos. Haciendo esto se busca modificar la respuesta transitoria y mejorar la robustez del sistema. Finalmente se generalizan los resultados obtenidos para sistemas con la misma estructura que el convertidor como lo es el convertidor elevador en cascada.

3.1. Sistema en Lazo Abierto

El sistema de ecuaciones diferenciales que describen el modelo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{C_f} &= \frac{I_{SC}}{C_f} - \frac{I_L}{C_f} - \frac{V_{C_f}}{R_f C_f}, \\ \dot{I}_L &= \frac{V_{C_f}}{L} - \frac{\bar{U} V_C}{L}, \\ \dot{V}_C &= \frac{\bar{U} I_L}{C} - \frac{V_C}{RC}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Cuando el sistema no es retroalimentado, el control \bar{U} es constante. En consecuencia, el campo vectorial es lineal y su comportamiento está completamente determinado por la correspondiente matriz exponencial.

Para empezar el análisis primero se llevará el sistema (3.1) al origen. Así se calculan los puntos de equilibrio del sistema. Recordando que esto sucede cuando la derivada temporal se vuelve cero se deduce que el punto de equilibrio tiene que cumplir la

ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & R_f & 0 \\ 1 & 0 & -\bar{U} \\ 0 & \bar{U}R & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_f} \\ I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{SC}R_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Como el campo vectorial es lineal y la matriz asociada al sistema (3.2) es no singular, se tiene que el circuito tiene un único punto de equilibrio. Resolviendo esta ecuación se concluye que el equilibrio es

$$\begin{aligned} V_{C_f} &= I_{SC}R_{tot}, \\ I_L &= \frac{I_{SC}R_{tot}}{R\bar{U}^2}, \\ V_C &= \frac{I_{SC}R_{tot}}{\bar{U}}, \end{aligned}$$

donde

$$R_{tot} = \left[\frac{1}{\frac{R}{R_f}\bar{U}^2 + 1} \right] \bar{U}^2 R.$$

Note que se definieron estas cantidades de esta forma para mantener la consistencia de las unidades y tener una estructura de la ley de Ohm. Observe también que, como $0 < \bar{U} < 1$, el valor en estado estacionario del voltaje del capacitor de salida V_C , es mayor al voltaje de entrada V_{C_f} , lo cual corresponde a la acción elevadora del convertidor.

Ahora para estudiar la estabilidad, se realiza el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} V_{C_f} &= \tilde{V}_{C_f} + I_{SC}R_{tot} \\ V_C &= \tilde{V}_C + \frac{I_{SC}R_{tot}}{\bar{U}} \\ I_L &= \tilde{I}_L + \frac{I_{SC}R_{tot}}{R\bar{U}^2}, \end{aligned}$$

donde las variables tildadas son cambios de voltaje y corriente alrededor del equilibrio; estas serán los nuevos estados del sistema. De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, el cual se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{V}}_{C_f} \\ \dot{\tilde{I}}_L \\ \dot{\tilde{V}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_f C_f} & -\frac{1}{C_f} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{\bar{U}}{L} \\ 0 & \frac{\bar{U}}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{C_f} \\ \tilde{I}_L \\ \tilde{V}_C \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Análisis de Estabilidad

Como (3.3) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales sin forzamiento, el análisis de estabilidad se reduce a conocer las condiciones para que las raíces del

polinomio característico de la matriz asociada al sistema tengan parte real negativa. Primero, su polinomio característico es

$$\lambda^3 + \left(\frac{RC + R_f C_f}{RCR_f C_f} \right) \lambda^2 + \left(\frac{L + \bar{U}^2 RR_f C_f + RCR_f}{RLCR_f C_f} \right) \lambda + \left(\frac{\bar{U}^2 R + R_f}{RLCR_f C_f} \right). \quad (3.4)$$

Luego por el criterio de Routh-Hurwitz (sección 1.1.3), todas las raíces del polinomio (3.4) tienen parte real negativa siempre que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{RC + R_f C_f}{RCR_f C_f}, \\ 0 &< \frac{\bar{U}^2 RR_f^2 C_f^2 + R_f R^2 C^2 + LR_f C_f + RLC}{RLCR_f C_f (RC + R_f C_f)}, \\ 0 &< \frac{\bar{U}^2 R + R_f}{RLCR_f C_f}. \end{aligned}$$

Como todos los coeficientes son positivos, se cumple el criterio de Routh-Hurwitz y por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Mas aún, como el sistema es lineal, es globalmente asintóticamente estable.

Ya que todos los coeficientes del polinomio son positivos, por la ley de signos de Descartes, cabe la posibilidad de que las 3 raíces sean reales negativas. En la sección 1.2.1 se muestra que si se cumple que $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$ se garantiza que las tres raíces son reales. Así bajo los parámetros actuales se tiene que

$$\begin{aligned} p &= \frac{\bar{U}^2}{LC} + \frac{1}{LC_f} + \frac{1}{3RCR_f C_f} - \frac{1}{3R_f^2 C_f^2} - \frac{1}{3R^2 C^2}, \\ q &= \frac{2\bar{U}^2}{3LCR_f C_f} + \frac{2}{27R_f^3 C_f^3} + \frac{2}{3RLC C_f} + \frac{2}{27R^3 C^3} \\ &\quad - \frac{\bar{U}^2}{3RLC^2} - \frac{1}{9R^2 C^2 R_f C_f} - \frac{1}{9RCR_f^2 C_f^2} - \frac{1}{3LR_f C_f^2}, \end{aligned}$$

donde si se da la igualdad en la condición anterior, entonces el polinomio característico tiene una raíz real repetida.

3.1.1. Matriz Exponencial

En la sección anterior se obtuvieron las formas de las raíces del polinomio característico, donde se concluyó que se pueden tener tres raíces reales negativas o una raíz real negativa y dos complejas con parte real siempre negativa. De aquí se pueden calcular las bases de vectores propios usando el teorema 1.2.1. A continuación se estudian los casos cuando se tienen tres valores propios reales diferentes y cuando se tienen dos complejos y uno real.

Tres Raíces Reales Diferentes

Por el teorema 1.2.1 los vectores propios de la matriz asociada al sistema (3.3) pueden ser de la forma

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{\bar{U}}{LC_f} \\ -\frac{\bar{U}}{L}(\lambda + \frac{1}{R_f C_f}) \\ \lambda(\lambda + \frac{1}{R_f C_f}) + \frac{1}{LC_f} \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_f}(\lambda + \frac{1}{RC}) \\ (\lambda + \frac{1}{R_f C_f})(\lambda + \frac{1}{RC}) \\ \frac{\bar{U}}{C}(\lambda + \frac{1}{R_f C_f}) \end{bmatrix} \text{ ó } V_3 = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda + \frac{1}{RC}) + \frac{\bar{U}^2}{LC} \\ \frac{1}{L}(\lambda + \frac{1}{RC}) \\ \frac{\bar{U}}{LC} \end{bmatrix}.$$

Esto se puede verificar calculando $(A - \lambda I)V_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ el cual es un vector con dos componentes cero y la tercera es el polinomio característico.

Recuerde que estos vectores sólo indican la estructura de los vectores propios. En general, se pueden escoger sólo una de estas opciones y sustituir los tres valores distintos de λ ó una combinación de estos y asignar un eigenvalor diferente a cada vector.

Así se escoge la matriz de cambio de base como

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\bar{U}}{LC_f} & -\frac{1}{C_f}(\lambda_2 + \frac{1}{RC}) & \lambda_3(\lambda_3 + \frac{1}{RC}) + \frac{\bar{U}^2}{LC} \\ -\frac{\bar{U}}{L}(\lambda_1 + \frac{1}{R_f C_f}) & (\lambda_2 + \frac{1}{R_f C_f})(\lambda_2 + \frac{1}{RC}) & \frac{1}{L}(\lambda_3 + \frac{1}{RC}) \\ \lambda_1(\lambda_1 + \frac{1}{R_f C_f}) + \frac{1}{LC_f} & \frac{\bar{U}}{C}(\lambda_2 + \frac{1}{R_f C_f}) & \frac{\bar{U}}{LC} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Su correspondiente matriz diagonal y exponencial son de la forma

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente se puede calcular el valor de la matriz exponencial mediante $e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$.

Raíces Complejas

Por el análisis anterior, existen valores en los parámetros para los cuales se puede tener valores propios complejos con parte imaginaria no cero. Sea α el valor propio real, μ la parte real del valor propio complejo y ω la parte imaginaria. Usando nuevamente

el teorema 1.2.1 se concluye que los vectores pueden ser de la forma

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\bar{U}}{LC_f} \\ -\frac{\bar{U}}{L}(\mu + \frac{1}{R_f C_f}) \\ \mu^2 - \omega^2 + \frac{\mu}{R_f C_f} + \frac{1}{LC_f} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\bar{U}}{L} \\ (2\mu + \frac{1}{R_f C_f}) \end{bmatrix} \\
 V_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_f}(\mu + \frac{1}{RC}) \\ \mu^2 - \omega^2 + \mu(\frac{1}{R_f C_f} + \frac{1}{RC}) + \frac{1}{RCR_f C_f} \\ \frac{\bar{U}}{C}(\mu + \frac{1}{R_f C_f}) \end{bmatrix} \\
 &\quad + i\omega \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_f} \\ 2\mu + \frac{1}{R_f C_f} + \frac{1}{RC} \\ \frac{\bar{U}}{C} \end{bmatrix} \\
 V_3 &= \begin{bmatrix} \mu^2 - \omega^2 + \frac{\mu}{RC} + \frac{\bar{U}^2}{LC} \\ \frac{1}{L}(\mu + \frac{1}{RC}) \\ \frac{\bar{U}}{LC} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} 2\mu + \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, se puede escoger la matriz de cambio de base como

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\bar{U}}{LC_f} & \omega(2\mu + \frac{1}{RC}) & \mu^2 - \omega^2 + \frac{\mu}{RC} + \frac{\bar{U}^2}{LC} \\ -\frac{\bar{U}}{L}(\alpha \frac{1}{R_f C_f}) & \omega \frac{1}{L} & \frac{1}{L}(\mu + \frac{1}{RC}) \\ \alpha(\alpha + \frac{1}{R_f C_f}) + \frac{1}{LC_f} & 0 & \frac{\bar{U}}{LC} \end{bmatrix},$$

donde su matriz diagonal por bloques y la respectiva exponencial de ésta son de la forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\omega \\ 0 & \omega & \mu \end{bmatrix}, e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \cos(\omega t) & -e^{\mu t} \sin(\omega t) \\ 0 & e^{\mu t} \sin(\omega t) & e^{\mu t} \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

3.2. Diseño de Funciones de Control

El propósito de obtener funciones de control consiste en cambiar la dinámica del sistema físico para que este cumpla ciertas características de diseño. Algunas de éstas propiedades son: estabilidad asintótica, eliminación de oscilaciones, seguimiento de trayectorias, minimización de picos (*sobrepaso*) y reducción del tiempo de llegada a la referencia (*tiempo de levantamiento*). Para lograr esto, se espera que el modelo describa con suficiente precisión al sistema real y que la ley de control diseñada para el modelo genere en la realidad, comportamientos similares al teórico. En particular para el fin de este estudio se busca lograr la estabilidad asintótica con la mínima cantidad de oscilaciones y picos, ya que el tiempo de reacción del sistema es del orden de milésimas de segundos. A lo largo de esta sección se muestra la metodología para obtener las leyes del control tomando como base el modelo promediado que se ha venido trabajando hasta el momento.

Para facilitar el cálculo de cantidades importantes se denotarán las variables de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3]^T = [V_{C_f}, I_L, V_C]^T, \\ u(\mathbf{x}) &= \bar{U}(V_{C_f}, I_L, V_C), \\ v &= I_{SC}.\end{aligned}$$

Así el sistema a analizar queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C_f} \left[v - x_2 - \frac{x_1}{R_f} \right], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} [x_1 - u(\mathbf{x})x_3], \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{C} \left[u(\mathbf{x})x_2 - \frac{x_3}{R} \right].\end{aligned}$$

En el análisis usual para conocer la dinámica local de un sistema, lo primero que se estudia son los puntos de equilibrio, lo cual corresponde a que el campo vectorial sea cero, es decir resolviendo

$$v = \frac{x_1}{R_f} + x_2, \quad (3.6)$$

$$x_1 = u(\mathbf{x})x_3, \quad (3.7)$$

$$\frac{x_3}{R} = u(\mathbf{x})x_2, \quad (3.8)$$

donde $0 < u(\mathbf{x}) < 1$, debido a que los valores del ciclo de trabajo están restringidos a este intervalo, y $v > 0$ ya que se está modelando bajo el supuesto que la celda solar siempre entrega energía*.

Primero se verifica que el equilibrio es distinto de cero. Suponga inicialmente que alguna componente del equilibrio es cero, entonces por (3.7) y (3.8) implica que las otras dos son cero. Pero si todas estas son cero, por (3.6) implica que $v = 0$ lo cual es una contradicción al hecho de que $v > 0$. Por lo tanto el origen no es un equilibrio, mas aún, no existe ningún punto de equilibrio sobre los ejes coordenados.

Como ninguna componente del equilibrio es cero, se puede despejar de (3.7) y (3.8) para $u(\mathbf{x})$ y obtener la siguiente condición de positividad

$$0 < u(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_3}{R x_2}. \quad (3.9)$$

Luego, si $x_i > 0$ para algún i entonces por (3.9) y el hecho de que los parámetros son positivos, se tiene que las otras componentes son positivas. De forma análoga si

*Recuerde que en el diagrama esquemático en la sección 2.1, se encuentra un diodo a la salida de la celda solar que impide que entre corriente a la celda, es decir, la celda solar siempre entrega corriente. Esto último se representa en el modelo tomando a $I_{SC} > 0$

$x_i < 0$ para algún i , entonces nuevamente por (3.9) y que los parámetros son positivos implica que las demás componentes son negativas.

Finalmente se prueba que el equilibrio se encuentra en el octante positivo. Esto se verifica mediante la positividad de v , es decir, si todas las componentes del equilibrio son negativas por (3.6) implicaría que v es negativo lo cual es una contradicción a la positividad de v .

También de (3.9) se obtiene la ecuación

$$x_1 x_2 = \frac{x_3^2}{R}, \quad (3.10)$$

la cual es una forma de conservación de energía ya que indica que toda la potencia de entrada del convertidor se transfiere a la carga.

3.2.1. Análisis de Estabilidad

Se buscan condiciones sobre la función $u(\mathbf{x})$ para el cual el equilibrio sea globalmente asintóticamente estable. Como el origen no es un equilibrio, se desplaza el origen a este. Primero, se tiene que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Sea $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Definiendo $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ se sigue que $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^*(\mathbf{y})$. Note que $\mathbf{f}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{0}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Así realizando este cambio de variable, el sistema a analizar queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{C_f} \left[v - y_2 - \frac{y_1}{R_f} \left(-\bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_1}{R_f} \right) \right], \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{L} [y_1 - h(\mathbf{y})y_3 + \bar{x}_1 - h(\mathbf{y})\bar{x}_3], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{C} \left[h(\mathbf{y})y_2 - \frac{y_3}{R} + h(\mathbf{y})\bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_3}{R} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $h(\mathbf{y}) = u(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y})$.

Como el lado derecho de estas ecuaciones es cero en $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ se genera el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h(\mathbf{0}) \\ 0 & h(\mathbf{0}) & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que tiene como solución

$$\bar{x}_1 = R\beta h^2(\mathbf{0}), \quad \bar{x}_2 = \beta, \quad \bar{x}_3 = R\beta h(\mathbf{0}), \quad (3.12)$$

donde

$$\beta = \frac{v}{1 + \frac{R}{R_f} h^2(\mathbf{0})} > 0.$$

Observe que estas cantidades no son el valor del equilibrio, sino es una representación de estas variables simbólicas en términos del valor la ley de control en el estado

estacionario. Así sustituyendo (3.12) en (3.11) se obtiene que cerca del equilibrio el sistema tiene la estructura

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{1}{C_f} \left[-y_2 - \frac{y_1}{R_f} \right], \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{L} [y_1 - h(\mathbf{y})y_3 + R\beta h(\mathbf{0})[h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y})]], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{C} \left[h(\mathbf{y})y_2 - \frac{y_3}{R} - \beta[h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y})] \right].\end{aligned}\tag{3.13}$$

Considere la función de Lyapunov

$$V(\mathbf{y}) = \frac{C_f}{2} y_1^2 + \frac{L}{2} y_2^2 + \frac{C}{2} y_3^2,$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}) &= C_f y_1 \dot{y}_1 + L y_2 \dot{y}_2 + C y_3 \dot{y}_3 \\ &= -\frac{y_1^2}{R_f} - \frac{y_3^2}{R} + \beta [h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y})] [Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3].\end{aligned}$$

Así una condición suficiente para garantizar la estabilidad asintótica se reduce a que la derivada de la función de Lyapunov sea negativa.

3.2.2. Control Basado en Modos Deslizantes

Una propuesta para garantizar la negatividad de la función de Lyapunov consiste en buscar las condición tales que

$$[h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y})][Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3] < 0.$$

Esto se puede obtener tomando

$$h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y}) = -\alpha \operatorname{sgn}(Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3),\tag{3.14}$$

donde α es un real positivo. En efecto

$$\begin{aligned}[h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y})][Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3] &= -\alpha (\operatorname{sgn}(Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3))^2 |Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3| \\ &= -\alpha |Rh(\mathbf{0})y_2 - y_3| \\ &< 0 \quad \text{para todo } \mathbf{y} \neq 0.\end{aligned}$$

De la ecuación (3.14) se puede despejar la ley de control. Recordando que $h(\mathbf{y}) = u(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$ se puede escribir como

$$u(\mathbf{x}) = u(\bar{\mathbf{x}}) + \alpha \operatorname{sgn}(Ru(\bar{\mathbf{x}})y_2 - y_3),\tag{3.15}$$

la cual se puede escalar para que se encuentre entre cero y uno tomando

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}(1 - |1 - 2u(\bar{\mathbf{x}})|).$$

3.2.3. Control por Ubicación de Polos

El método de ubicación de polos consiste en retroalimentar el sistema escogiendo la función de control como la referencia menos una combinación lineal de los estados esto es

$$\bar{U}(V_{C_f}, I_L, V_C) = ref - k_{C_f}V_{C_f} - k_L I_L - k_C V_C.$$

Denótese ahora

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \\ &= ref - k_{C_f}V_{C_f} - k_L I_L - k_C V_C \\ &= \bar{U}(V_{C_f}, I_L, V_C). \end{aligned}$$

Luego, por construcción, se calcula $h(0) - h(\mathbf{y})$,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{0}) - h(\mathbf{y}) &= u(\bar{\mathbf{x}}) - u(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) \\ &= -k_1 y_1 - k_2 y_2 - k_3 y_3 \\ &= -\mathbf{k}^T \mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{k} = [k_1, k_2, k_3]^T$ y $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$.

Procediendo con los cálculos, se puede escribir en forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}) &= -\mathbf{y}^T \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) \\ -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) \mathbf{y} \\ &= -\mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ k_1 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & k_2 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & k_3 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) \\ -k_1 \beta & -k_2 \beta & \frac{1}{R} - k_3 \beta \end{bmatrix} \mathbf{y} \\ &= -\mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & \frac{1}{2} k_1 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & -\frac{1}{2} k_1 \beta \\ \frac{1}{2} k_1 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & k_2 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\beta}{2} (k_3 R u(\bar{\mathbf{x}}) - k_2) \\ -\frac{1}{2} k_1 \beta & \frac{\beta}{2} (k_3 R u(\bar{\mathbf{x}}) - k_2) & \frac{1}{R} - k_3 \beta \end{bmatrix} \mathbf{y} \\ &\leq -\min\{\lambda_{\mathbf{W}}\} \|\mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & \frac{1}{2} k_1 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & -\frac{1}{2} k_1 \beta \\ \frac{1}{2} k_1 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & k_2 \beta R u(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\beta}{2} (k_3 R u(\bar{\mathbf{x}}) - k_2) \\ -\frac{1}{2} k_1 \beta & \frac{\beta}{2} (k_3 R u(\bar{\mathbf{x}}) - k_2) & \frac{1}{R} - k_3 \beta \end{bmatrix}.$$

En la penúltima igualdad se obtiene del lema 1.2.4 y $\min\{\lambda_{\mathbf{W}}\}$ denota el valor propio mas pequeño de \mathbf{W} . Así una condición suficiente para que $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ es que el mínimo de los valores propios de \mathbf{W} sea positivo, es decir que todos sus valores propios sean positivos. Como \mathbf{W} es simétrica esto se reduce a que \mathbf{W} sea definida positiva.

Simplificando estas condiciones se reduce a que

$$k_2 > \frac{1}{4} \beta R_f R u(\bar{\mathbf{x}}) k_1^2, \quad \left| k_3 + \frac{k_2}{R u(\bar{\mathbf{x}})} \right| < \sqrt{\frac{4k_2}{\beta R^2 u(\bar{\mathbf{x}})} - \frac{R_f k_1^2}{R}}. \quad (3.16)$$

3.2.4. Generalización de Resultados

En la sección anterior, se lograron obtener funciones de control tales que un sistema en particular, tuviera un único punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable. En esta sección se extenderán estas ideas para sistemas mas generales de mayor dimensión y mayor orden. A continuación se introducen las nociones de la metodología a seguir y la notación que se va a utilizar. Cabe mencionar que, a lo largo de todo este desarrollo, se utilizará el producto tensorial computacional[†], el cual permite que las variables \mathbf{x} de las formas multilineales, se vean como producto de vectores columnas por la derecha. Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \in \mathcal{C}^s$ y $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^s$. La idea de este método de control es proponer una ley u polinomial

$$u(\mathbf{x}) = k_0 + \mathbf{K}\mathbf{x} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{x}^2 + \dots,$$

donde k_0 es un escalar, \mathbf{K} es un vector renglón y $\widehat{\mathbf{K}}$ es un tensor de segundo orden. Luego se obtiene la expansión de Taylor del sistema retroalimentado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})),$$

para después escoger las constantes k_i de u tales que \mathbf{f} cumpla ciertas condiciones de estabilidad.

Los coeficientes de la expansión de Taylor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, u(\bar{\mathbf{x}})) + D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, u(\bar{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}D^2\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, u(\bar{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 + \dots,$$

se pueden calcular mediante la regla de la cadena introduciendo unas funciones auxiliares. Sean $\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $\psi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$. Como $\mathbf{f}(\chi, \psi)$ y $D\mathbf{f}(\chi, \psi)$ es la derivada total con respecto a \mathbf{x} se tiene que

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) &= D\mathbf{f}(\chi, \psi) \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\chi=\mathbf{x} \\ \psi=u(\mathbf{x})}} \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \chi} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\chi=\mathbf{x} \\ \psi=u(\mathbf{x})}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ denota la jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ tomando a u constante. De la misma forma

[†]Para ver ejemplos acerca del producto tensorial computacional véase el apéndice A.2.

se obtiene la segunda derivada

$$\begin{aligned}
D^2\mathbf{f}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) &= D^2\mathbf{f}(\chi, \psi) \\
&= \left[\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\chi^2} \frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\psi\partial\chi} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\chi\partial\psi} \frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\psi^2} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \right) \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{x}^2} \right]_{\substack{\chi=\mathbf{x} \\ \psi=u(\mathbf{x})}} \\
&= \left[\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\chi^2} + 2 \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\psi\partial\chi} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\psi^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \right)^2 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{x}^2} \right]_{\substack{\chi=\mathbf{x} \\ \psi=u(\mathbf{x})}} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^2} + 2 \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial u \partial \mathbf{x}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2},
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial^2\mathbf{x}}$ denota la hessiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$. De la misma forma, se pueden calcular las derivadas de orden superior. Algo importante por recalcar es que dependiendo de los requerimientos de estabilidad, bastará con que u sea de orden finito menor a s . Esto último se ilustra con los convertidores de potencia.

En general los sistemas de ecuaciones para los convertidores de potencia con sólo una señal de control son de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}u(\mathbf{x}) + \mathbf{C}, \quad (3.17)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices reales de $n \times n$, \mathbf{C} es un vector columna en \mathbb{R}^n y u escalar de orden $r < s$.

Note que para el sistema (3.17) en el punto $\bar{\mathbf{x}}$, se tiene que

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}u(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial u \partial \mathbf{x}} = \mathbf{B}, \quad \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial u^2} = 0$$

y que además

$$\frac{\partial^{i+j}\mathbf{f}}{\partial u^i \partial \mathbf{x}^j} = 0, \quad i, j \in \mathbb{N}, i + j \geq 3$$

Por lo tanto su expansión en serie de Taylor alrededor de $\bar{\mathbf{x}}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}u(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{C} + \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}u(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\
&\quad + \mathbf{B} \sum_{k=2}^{r+1} \frac{1}{k!} \left[2 \frac{\partial^{k-1}u}{\partial \mathbf{x}^{k-1}} + \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial^k u}{\partial \mathbf{x}^k} \right] (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^k. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Ahora se muestra cómo fijar el punto de equilibrio del sistema (3.17).

Lema 3.2.1 Sea $\bar{\mathbf{x}}$ un punto de equilibrio del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}\bar{u} + \mathbf{C}, \quad (3.19)$$

donde \bar{u} es constante. Si

$$u(\mathbf{x}) = k_0 + \mathbf{K}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}^2 + \dots,$$

entonces existe k_0 tal que $\bar{\mathbf{x}}$ es equilibrio de (3.17).

Demostración. Sea

$$k_0 = \bar{u} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}}^2 + \dots,$$

entonces

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^2) + \dots,$$

luego

$$\begin{aligned} u(\bar{\mathbf{x}}) &= \bar{u} + \mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) + \widehat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}}^2 - \bar{\mathbf{x}}^2) + \dots \\ &= \bar{u}. \end{aligned}$$

Como $\bar{\mathbf{x}}$ es equilibrio de (3.19), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}u(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\bar{u} + \mathbf{C} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\mathbf{x}}$ es equilibrio de (3.17) ■

Ahora, continuando con la metodología, el criterio para escoger el orden de u es un proceso iterativo. Por lo general, es mejor que el orden sea lo mas pequeño posible, ya que simplifica la implementación. Por ejemplo, tome el caso $r = 1$. En esta situación, realizando el cambio de coordenadas $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ y fijando k_0 del control, el campo vectorial del convertidor se reduce a

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}^2. \quad (3.20)$$

A partir de aquí hay varias opciones para escoger \mathbf{K} dependiendo de los requerimientos de estabilidad. Una opción es hacer la asignación $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u}$ y $\tilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}$, de forma tal que la jacobiana sea

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}. \quad (3.21)$$

Ahora bajo esta consideración, si el par $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ es completamente controlable[‡], se puede usar la técnica de control por ubicación de polos para asignar los valores propios de \mathbf{J} de forma arbitraria. Así, por el teorema de Hartman-Grobman, el origen del sistema (3.20), sería localmente topológicamente equivalente a un sistema lineal dado por \mathbf{J} . Sin embargo esto no es suficiente para garantizar la estabilidad global del equilibrio.

Para solventar esto, se puede aprovechar el hecho que $\mathbf{K}\mathbf{x}$ es un escalar y encontrar una función de Lyapunov en donde la estabilidad global del sistema sea dependiente sólo de la parte lineal.

[‡]Véase la sección 1.3, para consultar la demostración del método de ubicación de polos para sistemas lineales.

Teorema 3.2.1 Sea \mathbf{B} de la ecuación (3.20) tal que sus valores propios son cero o imaginarios puros y su eigenspacio es de rango completo. Entonces existe una función de Lyapunov $V(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^2$ tal que su derivada restringida al campo (3.20) es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{K})\mathbf{x},$$

si y sólo si existe una matriz \mathbf{Q} simétrica definida positiva tal que $\mathbf{Q}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Demostración. Denote como $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{K}$. Si existe \mathbf{Q} simétrica definida positiva, sea $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T[\mathbf{J}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{J}]\mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{x}^T(\mathbf{x}^T\mathbf{K}^T)\mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{K}\mathbf{x})\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T[\mathbf{J}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{J}]\mathbf{x} + (\mathbf{K}\mathbf{x})[\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}] \\ &= \mathbf{x}^T[\mathbf{J}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{J}]\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)\mathbf{J}\mathbf{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{J}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se tiene del lema 1.2.4 de la sección 1.2.

Por otro lado, si existe una función de Lyapunov tal que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{K})\mathbf{x},$$

implica que

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}^2 = (\mathbf{K}\mathbf{x})\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, como $V(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^2$ y el cero es un mínimo, se tiene que que la función $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ debe satisfacer

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad D\mathbf{g}(\mathbf{0}) > 0. \quad (3.22)$$

Ahora, como \mathbf{B} tiene valores propios cero o imaginarios puros y su eigenspacio es de rango completo, por el teorema 1.2.2, de la sección 1.2 existe \mathbf{Q} simétrica definida positiva tal que $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$.

Sea $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Q}\mathbf{x}$. Es fácil ver que esta función cumple con (3.22). En particular, indica que $\mathbf{Q}\mathbf{B}$ es antisimétrica. Finalmente se puede integrar $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ y llegar a que $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$. ■

Este último teorema es útil ya que, si se garantiza la estabilidad con la \mathbf{Q} construida y la \mathbf{J} del sistema, entonces, los términos que generan la no linealidad del sistema, no tienen impacto sobre su estabilidad global.

Para terminar esta sección, se realiza un análisis acerca de como la estabilidad del sistema es independiente de algunos parámetros al momento de calcular la derivada de la función de Lyapunov construida con anterioridad. Por lo general los circuitos eléctricos provienen de leyes de conservación que tienen la forma de

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es la interacción entre los componentes y \mathbf{M} es la matriz de “inercia” del circuito, en analogía de los sistemas mecánicos. Usando los estados dinámicos adecuados, se puede obtener una representación donde \mathbf{M} sea diagonal, definida positiva y cuyas entradas sean los parámetros de los elementos reactivos como lo son los capacitores y los inductores. Esto es relevante ya que éstos parámetros sólo se encuentran en esta matriz y no vuelven a aparecer en $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Por consiguiente vale la pena revisar condiciones suficientes para las cuales del conjunto de las matrices simétricas definidas positivas que sirven para la función de Lyapunov, exista alguna tal que anule la aportación de \mathbf{M} . Para clarificar esto, primero se introducirá la siguiente caracterización.

Definición Sea $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]$ un vector de parámetros. Se dirá que una función $\mathbf{f}: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ es independiente de μ si

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j} \equiv 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora con esta caracterización, se podrá obtener un método para verificar la existencia de una \mathbf{Q} tal que la derivada de la función cuadrática de Lyapunov sea independiente de parámetros. Para esto, se enuncian los siguientes lemas que permiten encontrar las condiciones necesarias para que esto suceda.

Lema 3.2.2 Sea $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ una forma cuadrática tal que \mathbf{Q} es simétrica. Si $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Demostración. Por contradicción, suponga que $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$. Por un lado

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{x}^T \right) \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{Q} \right) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{x} \right) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

En particular esta última igualdad se cumple para los vectores canónicos. Primero, sea $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. Es fácil ver que $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Esto implica que

$$0 = \mathbf{e}_i^T \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{Q} \right) \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{Q} \right)_{ii}.$$

Por consiguiente, todos los elementos de la diagonal son cero. Ahora, sea $\mathbf{x} = e_i + e_j$.
Luego

$$\begin{aligned} 0 &= (e_i + e_j)^T \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right) (e_i + e_j) \\ &= e_i^T \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right) e_j + e_j^T \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right) e_i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right)_{ji} \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right)_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left(\frac{\partial}{\partial \mu_l} \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0}$. ■

Lema 3.2.3 Sea $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}$. Si \mathbf{Q} es independiente de μ_l , entonces \mathbf{A} se puede descomponer como $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$, donde \mathbf{S} es una matriz antisimétrica dependiente de μ_l y \mathbf{T} es una matriz triangular independiente de μ_l .

Demostración. Primero las entradas de \mathbf{Q} son

$$q_{ij} = a_{ij} + a_{ji}.$$

Como \mathbf{Q} es independiente de μ_l implica que

$$0 = \frac{\partial q_{ij}}{\partial \mu_l} = \frac{\partial}{\partial \mu_l} (a_{ij} + a_{ji}),$$

para todos los parámetros. Es decir, $a_{ij} + a_{ji} = f_{ij}(\mathbf{x})$ para cada entrada donde $f_{ij}(\mathbf{x})$ es una función independiente del parámetro. Así, se puede resolver para una entrada de \mathbf{A} , dependiendo de que la matriz triangular resultante sea superior o inferior. En particular para la triangular superior, tome $a_{ij} = f_{ij}(\mathbf{x}) - a_{ji}$ para $i \neq j$ y $a_{ii} = f_{ii}(\mathbf{x})$ para $i = j$. Entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) - a_{21} & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) - a_{n1} \\ a_{21} & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) - a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Aquí

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ 0 & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

De forma análoga, se construye el caso triangular inferior. ■

De este último lema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1 Si $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ es independiente de μ_i , entonces $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{A}$ es antisimétrica.

Demostración. Por el lema anterior $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$, así derivando $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{S}$ que es antisimétrica. ■

De estos lemas, se ha podido concluir que la condición necesaria para que la derivada de la función de Lyapunov sea independiente de un conjunto de parámetros M es que $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QJ}$ sea antisimétrico para cada parámetro en M , donde \mathbf{Q} es la matriz simétrica definida positiva de la forma cuadrática propuesta como función de Lyapunov y \mathbf{J} es la jacobiana del campo vectorial a estudiar. Por lo general, resolver esto no es trivial, sin embargo, existe un caso fácil de verificar que vale la pena revisar, que es cuando $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QJ} = \mathbf{0}$. Pidiendo esta condición, verificar que se cumplan las condiciones necesarias para la independencia de los parámetros de \dot{V} en circuitos eléctricos, se reduce a verificar la independencia de los parámetros de un producto de matrices. Esto se ilustra en el siguiente lema.

Lema 3.2.4 Si para un conjunto de parámetros M , $\frac{\partial}{\partial \mu_i} (\mathbf{QA}) = \mathbf{0}$, donde \mathbf{Q} es simétrica y además $\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{A}}$ donde \mathbf{D} es una matriz diagonal definida positiva dependiente de parámetros y $\hat{\mathbf{A}}$ es una matriz invertible independiente de los parámetros en M , entonces existe \mathbf{S} diagonal independiente de los parámetros tal que $\mathbf{Q} = \mathbf{SD}$.

Demostración. Primero observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QA} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QD}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QD}^{-1} \right) \hat{\mathbf{A}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \mathbf{QD}^{-1}. \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathbf{QD}^{-1} = \mathbf{S}$ es una matriz independiente de los parámetros, es decir que $\mathbf{Q} = \mathbf{SD}$. Ahora, como \mathbf{Q} es una matriz simétrica se tiene que $\mathbf{SD} = \mathbf{D}^T \mathbf{S}^T$. Pero como \mathbf{D} es diagonal implica que $\mathbf{SD} = \mathbf{DS}^T$. Esto se reduce a resolver ecuaciones de la forma $d_i s_{ij}^T = d_j s_{ij}$ o lo que es lo mismo

$$d_i s_{ji} = d_j s_{ij}.$$

Para $i = j$ no hay restricciones. Para $i \neq j$, se tiene que $d_i s_{ji} - d_j s_{ij} = 0$, o en forma vectorial

$$\begin{bmatrix} d_i \\ d_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_{ij} \\ s_{ji} \end{bmatrix} = 0.$$

Lo que indica que $[s_{ij}, s_{ji}]^T$ es paralelo a $[d_i, d_j]^T$. Pero esto haría a \mathbf{S} dependiente a los parámetros. Por consiguiente la única solución es $s_{ij} = s_{ji} = 0$ para $i \neq j$. Lo que hace a \mathbf{S} diagonal. ■

Finalmente se procederá a aplicar estos lemas a los convertidores de potencia. En el teorema 3.2.1, muestra la existencia de la \mathbf{Q} tal que la estabilidad global depende de sólo de \mathbf{Q} y \mathbf{J} , donde \mathbf{Q} se obtiene del teorema 1.2.2 como $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$. Luego por el lema 3.2.4 $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \mathbf{D}$, lo que implica que \mathbf{Q} es diagonal. Así sólo basta verificar si existen valores de \mathbf{R} en \mathbf{Q} tales que $\mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1}$ sea independiente de los parámetros que se buscan eliminar.

México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

3.3. Sistema en Cascada

En la sección 2.1.5 se obtuvo el modelado del sistema cuando se tiene una serie de convertidores en cascada. A continuación, se aprovechará este sistema para poder implementar la metodología generalizada que se desarrolló en la sección anterior. Primero se requiere calcular los equilibrios del sistema cuando \bar{U} es constante. Cuando la derivada temporal del sistema (2.26) es cero, se obtienen las siguientes ecuaciones lineales.

$$I_{SC} = \frac{V_{C_0}}{R_f} + I_{L_0}, \quad (3.23)$$

$$V_{C_k} = \bar{U}V_{C_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.24)$$

$$I_{L_k} = \bar{U}I_{L_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.25)$$

$$\bar{U}I_{L_{n-1}} = \frac{V_{C_n}}{R}. \quad (3.26)$$

Para resolver este sistema, primero se itera (3.24), obteniendo

$$\begin{aligned} V_{C_0} &= \bar{U}V_{C_1} \\ &= \bar{U}^2V_{C_2} \\ &= \bar{U}^iV_{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De igual manera con (3.25) se tiene que

$$\begin{aligned} I_{L_0} &= \frac{I_{L_1}}{\bar{U}} \\ &= \frac{I_{L_2}}{\bar{U}^2} \\ &= \frac{I_{L_j}}{\bar{U}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por otro lado de (3.26)

$$I_{L_{n-1}} = \frac{V_{C_n}}{\bar{U}R}. \quad (3.29)$$

Luego de (3.27), (3.28) y (3.29) en (3.23) con $i = n$ y $j = n-1$ se llega a

$$\begin{aligned} I_{SC} &= \bar{U}^n \frac{V_{C_n}}{R_f} + \frac{V_{C_n}}{\bar{U}^n R} \\ &= \left[\frac{\bar{U}^n}{R_f} + \frac{1}{\bar{U}^n R} \right] V_{C_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el voltaje de salida es

$$V_{C_n} = \left[\frac{\bar{U}^n}{1 + \frac{R}{R_f} \bar{U}^{2n}} \right] R I_{SC}. \quad (3.30)$$

Finalmente, sustituyendo (3.30) en las ecuaciones, (3.24) y (3.25) con (3.29), se tiene que el equilibrio del sistema (2.26) con \bar{U} constante cumple

$$\begin{aligned} V_{C_i} &= \left[\frac{\bar{U}^{2n-i}}{1 + \frac{R}{R_f} \bar{U}^{2n}} \right] R I_{SC}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ I_{L_j} &= \left[\frac{\bar{U}^j}{1 + \frac{R}{R_f} \bar{U}^{2n}} \right] I_{SC}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

3.3.1. Estabilidad del Sistema en Cascada

Ahora, se busca garantizar la estabilidad global del equilibrio del sistema. Para este convertidor, la matriz \mathbf{B} correspondiente es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{C_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{C_n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz resultante es diagonal por bloques, por consiguiente $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}$ es diagonal por bloques. Como el determinante de esta clase de matrices es el producto de los determinantes de cada bloque, se tiene que el polinomio característico de \mathbf{B} es

$$p(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^n \left(\lambda^2 + \frac{1}{L_{k-1} C_k} \right).$$

Como los parámetros del sistema son estrictamente positivos, implica que los valores propios de \mathbf{B} son

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{L_{k-1} C_k}} i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora, suponga que cada $L_{k-1} C_k$ es diferente entre si, el cual es el caso encontrado con mayor frecuencia en la práctica. Esto implica que la forma de Jordan de \mathbf{B} es de

rango completo. Debido a esto y que sus valores propios son imaginarios puros o cero se tiene, por el teorema 3.2.1, que existe una función de Lyapunov, con la cual la estabilidad global sólo depende de su parte lineal.

Para construir esta función de Lyapunov, es necesario calcular la matriz \mathbf{Q} simétrica definida positiva. Por el teorema 1.2.2, se concluye que $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$, donde \mathbf{P} es la matriz de cambio de base de \mathbf{B} y \mathbf{R} es una matriz diagonal que se construye dependiendo del bloque de Jordan correspondiente.

A continuación se calculan los vectores propios.

- Para $\lambda = 0$, calcular los vectores propios se reduce a calcular el $Ker(\mathbf{B})$. Observe que los vectores columna de \mathbf{B} son múltiplos escalares de los vectores canónicos salvo el correspondiente a la primer entrada. Por lo tanto $Ker(\mathbf{B}) = gen\{e_1\}$. En consecuencia se elige como vector propio a e_1 .
- Para $\lambda = \frac{1}{\sqrt{L_{k-1}C_k}}i$, $k = 1, 2, \dots, n$, resolver $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, genera el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{L_{k-1}C_k}}i v_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L_{k-1}C_k}}i & \frac{1}{L_{j-1}} \\ \frac{1}{C_j} & \frac{1}{\sqrt{L_{k-1}C_k}}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2j} \\ v_{2j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Observe que el determinante del sistema matricial es

$$\frac{1}{L_{j-1}C_j} - \frac{1}{L_{k-1}C_k},$$

el cual, para este caso, sólo se anula cuando $k = j$. Por este hecho y la positividad de los parámetros, sólo v_{2k} y v_{2k+1} son diferentes de cero y están restringidos por la ecuación.

$$\frac{v_{2k}}{C_k} = \frac{v_{2k+1}i}{\sqrt{L_{k-1}C_k}}.$$

Tomando $v_{2k+1} = \sqrt{L_{k-1}}$, se tiene que $v_{2k} = \sqrt{C_k}i$.

De esta forma la matriz de cambio de base es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{L_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{C_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{L_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{C_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{L_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

y la \mathbf{R} correspondiente es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto \mathbf{Q} es

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{C_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{L_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{C_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{L_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha_n}{C_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha_n}{L_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Como \mathbf{Q} es diagonal, vale la pena verificar si se pueden eliminar los parámetros de los elementos reactivos. Para este sistema la matriz \mathbf{D} es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix}.$$

Por lo que \mathbf{QD}^{-1} es

$$\mathbf{QD}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{L_0 C_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{L_0 C_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{L_1 C_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{L_1 C_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha_{n-1}}{L_{n-1} C_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha_{n-1}}{L_{n-1} C_n} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto se pueden escoger las α_i como $\alpha_1 = C_f \beta_1$ y $\alpha_i = L_{i-1} C_i \beta_i$ para $i = 2, 3, \dots, n$ donde todos los $\beta_i > 0$.

3.4. Control Basado en Modos Deslizantes

Para implementar el control por modos deslizantes primero hay que fijar un punto de equilibrio del sistema, a uno en el cual el vector de estados tenga como coordenada el valor deseado a la salida. Esto se hace de la siguiente forma. Primero considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}u(\mathbf{x}) + \mathbf{C},$$

con u escalar. Basándose en el lema 3.2.1, se puede escoger

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u} + h(\tilde{\mathbf{x}}),$$

donde \bar{u} es una constante tal que cumple que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

con $\bar{\mathbf{x}}$ constante y $h(\mathbf{0}) = 0$. Realizando el cambio de variables $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ se llega a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{C} + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})h(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})h(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})h(\tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Así el estudio se reduce a encontrar una función $h(\tilde{\mathbf{x}})$, tal que el origen del sistema (3.31) sea globalmente asintóticamente estable.

Para obtener una h , considere el caso en el que \mathbf{B} tiene valores propios cero o imaginarios puros cuya dimensión del espacio sea igual a su multiplicidad algebraica. Luego por el teorema 1.2.2, existe \mathbf{Q} simétrica definida positiva tal que \mathbf{QB} es antisimétrica. Escogiendo la función de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) &= 2\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}[(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\tilde{\mathbf{x}} + h(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})] \\ &= 2\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + 2h(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}} + 2(\bar{u} + h(\tilde{\mathbf{x}}))\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} + 2h(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Ahora, si $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}$ es definida negativa, se puede escoger $h(\tilde{\mathbf{x}}) = -\alpha \text{sgn}(S)$, con $\alpha > 0$ y

$$S = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}},$$

para garantizar que $\dot{V} < 0$ para toda $\tilde{\mathbf{x}} \neq 0$.

En particular, para el sistema en cascada, tomando \mathbf{Q} construida como en la sección 3.3.1, con todas las $\beta_i = 1/2$, se llega a

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{R_f} \tilde{x}_1^2 - \frac{1}{R} \tilde{x}_n^2 + h(\tilde{\mathbf{x}}) \sum_{k=2}^{n-1} (\bar{x}_k \tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \tilde{x}_k),$$

y el argumento de la función signo será

$$S = \sum_{k=2}^{n-1} (\bar{x}_k \tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \tilde{x}_k).$$

3.4.1. Algunos Comentarios Complementarios acerca del Control Basado en Modos Deslizantes

- La hipótesis que $h(\mathbf{0}) = 0$ es para que el equilibrio en las coordenadas \mathbf{x} sea $\bar{\mathbf{x}}$. Esto es inmediato ya que

$$u(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{u} + h(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) = \bar{u} + h(\mathbf{0}) = \bar{u}.$$

Luego

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}u(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{u})\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

- S tiene una expresión de la misma forma usando las variables $\bar{\mathbf{x}}$ y \mathbf{x} . Recordando que $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$, se concluye que

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=2}^{n-1} (\bar{x}_k \tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \tilde{x}_k) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} [\bar{x}_k (x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) - \bar{x}_{k+1} (x_k - \bar{x}_k)] \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} (\bar{x}_k x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} x_k).\end{aligned}$$

- Esta última expresión es menos costosa computacionalmente si la simulación se hace en términos de \mathbf{x} , ya que no se requiere calcular $\tilde{\mathbf{x}}$. De la misma forma reduce el costo en la implementación física analógica ya que no se necesitan amplificadores en diferencia para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ en el circuito.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 4

Simulación Numérica

Con el fin de predecir resultados esperados en el experimento físico. Se realizaron diversas simulaciones numéricas con el Simulink de MATLAB. En particular se utilizó el bloque de Simulink conocido como función-S para programar el sistema. En este capítulo se muestran los resultados numéricos del comportamiento del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado para el convertidor con celda de una etapa y en cascada. Para cada caso analizado se dedica una sección donde se presentan generalidades acerca de las curvas obtenidas. La comparativa entre las respuestas se pospone hasta haber expuesto cada uno de los resultados. Los parámetros utilizados fueron calculados usando los métodos mostrados en el apéndice B. Se invita al lector que no está habituado con la notación y al significado físico de estos parámetros consultar este apéndice para facilitar la lectura de este capítulo.

4.1. Cálculo de los Parámetros

Los parámetros de la celda solar son fácilmente obtenidos de sus hojas de datos. Por lo general, los valores comerciales de la celda son de 12V o 24V a 6A. Para esta simulación se tomó que $V_{OC} = 24V$ y $I_{SC} = 6A$. Luego de la construcción del modelo

$$R_f = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = \frac{24V}{6A} = 4\Omega.$$

Para calcular el ciclo de trabajo nominal, hay que recordar que las leyes de control se diseñaron de forma tal que cuando el sistema llegue a la referencia, el valor de la función de control sea constante y el comportamiento del sistema retroalimentado sea equivalente al sistema en lazo abierto. En otras palabras, que para tiempos suficientemente grandes el sistema con control tenga el mismo punto de equilibrio que el sistema lineal. Así, en estado estacionario, el valor del ciclo de trabajo con control y lazo abierto son iguales, es decir, $\bar{U} = u(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{u}$. En particular se busca que el voltaje de salida sea constante. Como el voltaje del capacitor es la salida, de su expresión de

equilibrio, se tiene que

$$V_C = \frac{I_{SC} R_{tot}}{u(\bar{x})} = \frac{I_{SC} R u(\bar{x})}{\frac{R}{R_f} u^2(\bar{x}) + 1},$$

el cual resolviendo para $u(\bar{x})$ se llega a

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{R_f I_{SC}}{V_C} \pm \sqrt{\frac{R_f^2 I_{SC}^2}{V_C^2} - \frac{4R_f}{R}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{V_{OC}}{V_C} \pm \sqrt{\frac{V_{OC}^2}{V_C^2} - \frac{4R_f}{R}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{OC}}{V_C} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{P_{out}}{P_{in}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para la existencia de este valor se puede observar del discriminante de (4.1) que se requiere que

$$P_{out} \leq \frac{P_{in}}{4},$$

lo que implica que, para elegir arbitrariamente el valor del voltaje del capacitor de salida, la máxima potencia que se podrá extraer es un cuarto de la potencia de entrada.

Cuando se decide extraer la máxima potencia del convertidor, el ciclo de trabajo nominal se reduce a

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{2} \frac{V_{OC}}{V_C}.$$

Sin embargo, por condiciones del modelo se sabe que $0 < V_{OC} < V_C$. Por lo que el ciclo de de trabajo está acotado a

$$0 < u(\bar{x}) < \frac{1}{2}.$$

Así la potencia de salida para esta simulación es

$$P_{out} = \frac{P_{in}}{4} = \frac{(V_{OC})(I_{SC})}{4} = \frac{(24V)(6A)}{4} = 36W.$$

Si se desea que el voltaje de salida sea de $V_{out} = 64V$, se calcula el ciclo de trabajo nominal como

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{2} \frac{V_{OC}}{V_C} = \frac{1}{2} \frac{V_{OC}}{V_{out}} = \frac{1}{2} \frac{24V}{64V} = 0.1875.$$

Es fácil calcular la resistencia de salida mediante su expresión de potencia

$$R = \frac{V_{out}^2}{P_{out}} = \frac{(64V)^2}{36W} = 113.7\Omega.$$

En los convertidores, se suele manejar una frecuencia de conmutación alta para que el capacitor y el inductor sean pequeños. Por lo general éstas son del orden de kilohertz. En esta simulación se tomó esta frecuencia como $f_s = 100kHz$.

Para calcular el valor de los capacitores e inductores, en las fórmulas se necesitan los valores en estado estacionario de los componentes. Así el valor del equilibrio se puede calcular como

$$\begin{aligned} V_{C_f} &= \bar{U}V_C = (0.1875)64V = 12V, \\ I_L &= \frac{V_C}{\bar{U}R} = \frac{64V}{0.1875(113.7\Omega)} = 3A, \\ V_C &= 64V. \end{aligned}$$

Entonces el inductor se calcula por

$$L = \frac{DV_{in}}{\Delta i_l(on)f_s} = \frac{(1-u(\bar{x}))V_{C_f}}{(I_L * 5\%)100kHz} = \frac{(1-0.1875)12V}{0.05(3A)(100kHz)} = 0.65mH$$

y el capacitor por

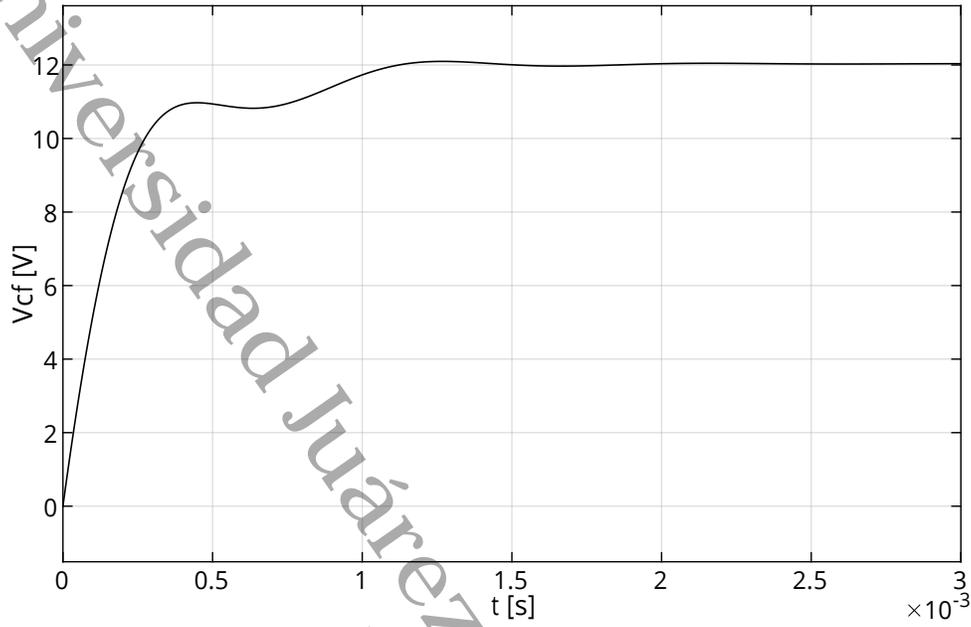
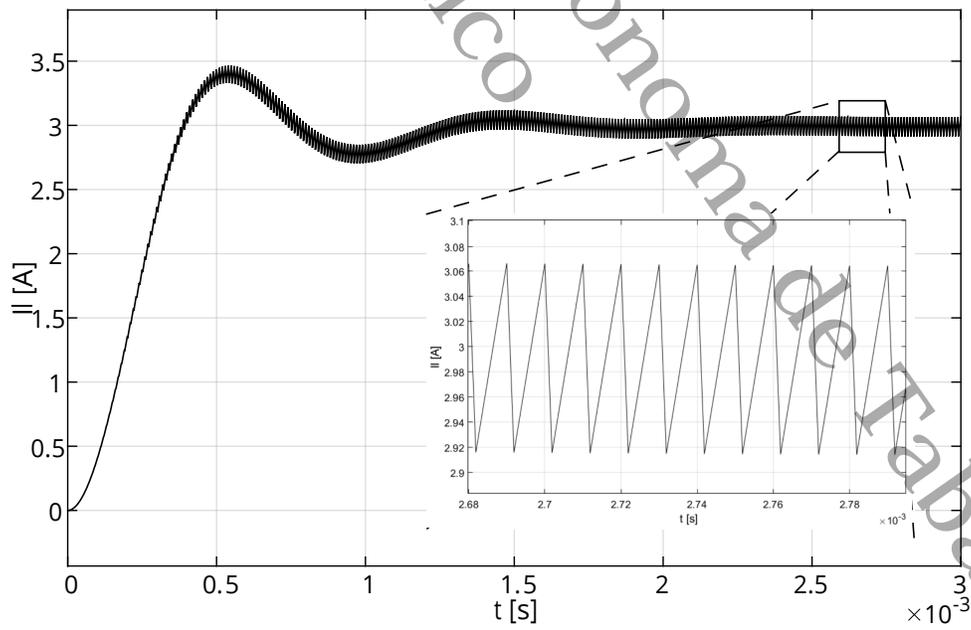
$$C = \frac{DP_{out}}{\Delta V_{out}V_{out}f_s} = \frac{(1-0.1875)36W}{0.05(64V)^2(100kHz)} = 1.42\mu F.$$

Finalmente el capacitor fotovoltaico se considera como $C_f = 100,000\mu F$, esto con el fin de que el voltaje del capacitor sea prácticamente constante.

4.2. Sistema en Lazo Abierto

Al completar la obtención de los parámetros, se realizó una simulación en lazo abierto. Para resolver las ecuaciones diferenciales, en Simulink, se usó el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de 1×10^{-8} segundos. Se simularon 3 milisegundos, obteniendo los resultados mostrados en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4.

Observe que en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, los estados del sistema, convergen en promedio, al equilibrio calculado analíticamente. Siendo $12V$, $3A$ y $64V$ respectivamente. También que la curva del voltaje del capacitor de salida V_C y del inductor I_L tienen el rizo del 5% de su valor en estado estacionario; siendo de $150mA$ para el inductor y $3.2V$ para el capacitor. En la figura 4.4, se aprecia que la ley de control es constante para este caso. El sistema en general, presenta en sus estados promediados, oscilaciones en el transitorio, por lo que se debe implementar una ley de control que mejore la respuesta. En vista de que el convertidor converge al equilibrio en el orden de milésimas de segundo, sólo se interesa en disminuir las oscilaciones y garantizar la estabilidad global.

Figura 4.1: V_{C_f} en Lazo Abierto.Figura 4.2: I_L en Lazo Abierto.

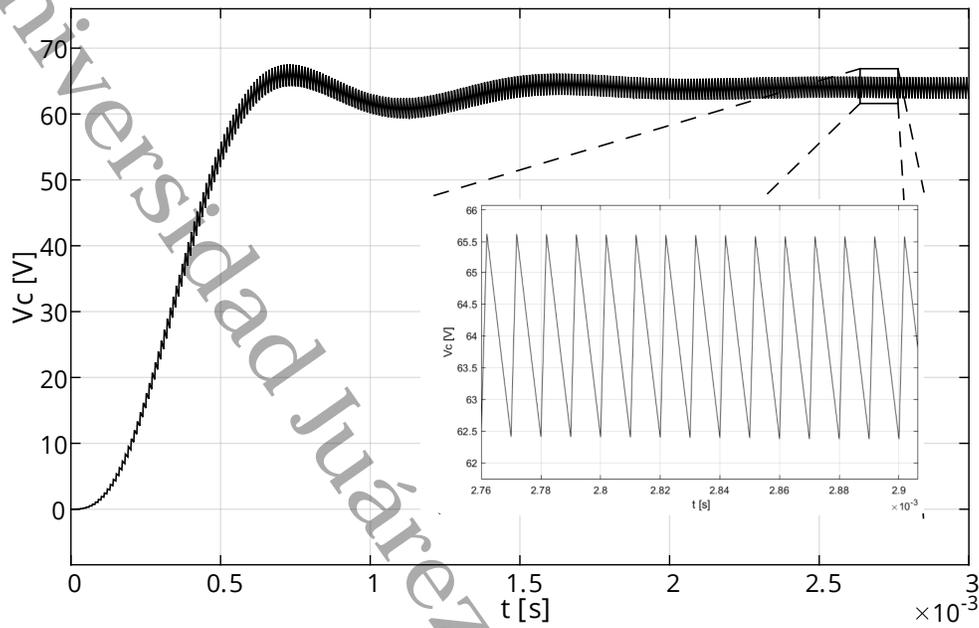


Figura 4.3: V_C en Lazo Abierto.

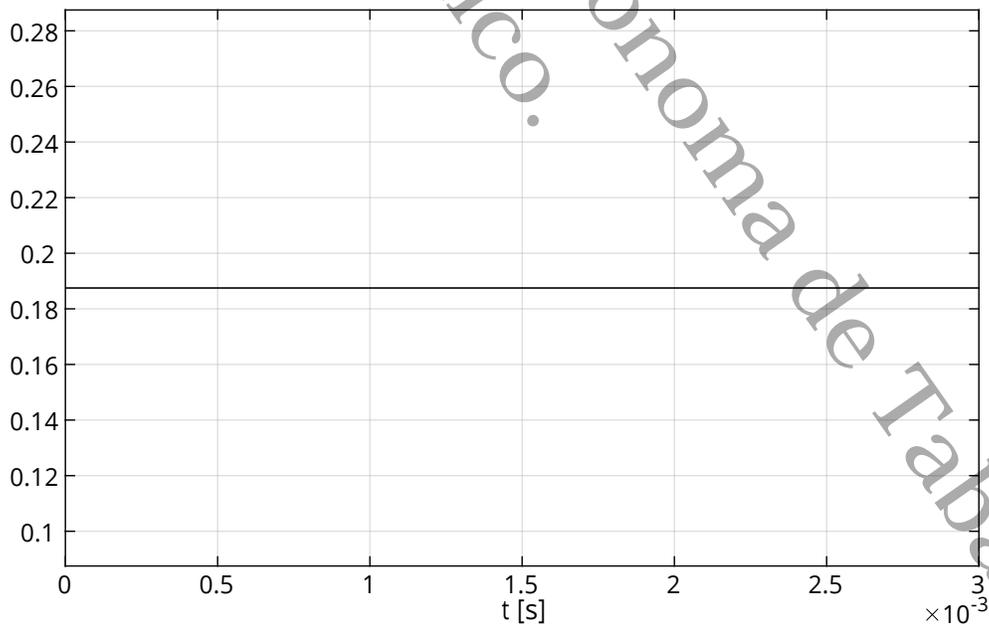


Figura 4.4: $u(x)$ en Lazo Abierto.

4.3. Sistema en Lazo Cerrado

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas del sistema al retroalimentar con dos funciones de control. Se espera con esto cambiar la respuesta transitoria, manteniendo la estabilidad global del sistema. Observe que al implementar estas funciones de control, los parámetros originales del sistema no cambiaron, sólo la función de control. Los datos temporales de la solución numérica como el paso de tiempo y el periodo de simulación fueron iguales que en el sistema en lazo abierto.

4.3.1. Control Basado en Modos Deslizantes

En la sección 3.2, se obtuvo una señal de control discontinua basada en la función signo, donde se tenía que escalar una ganancia α . Para esta simulación se tomó

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 - |1 - 2u(\bar{\mathbf{x}})|) - \epsilon, \quad (4.2)$$

donde ϵ es el epsilon de la máquina. Así se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

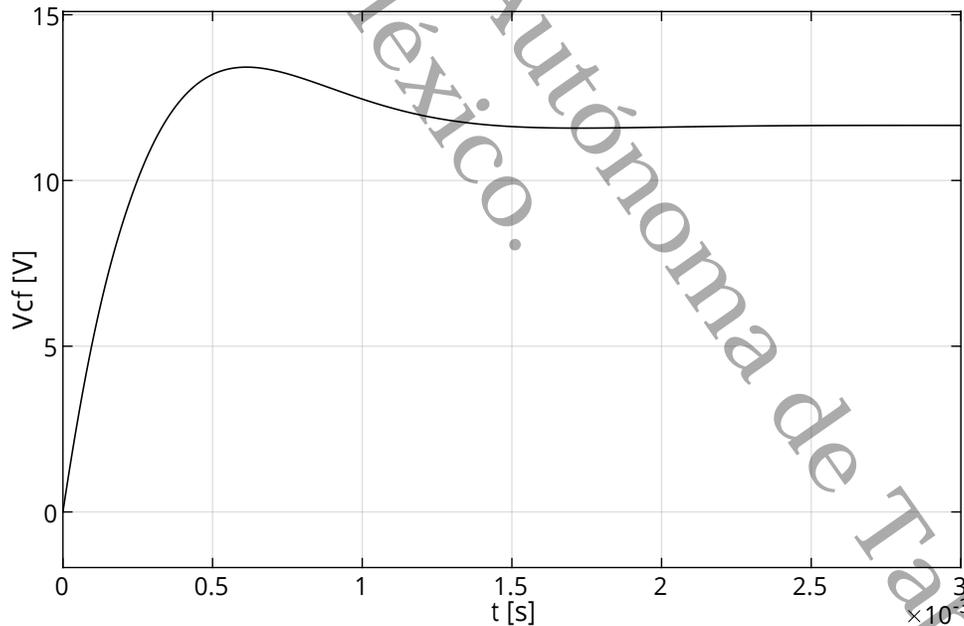


Figura 4.5: V_{Cf} con Control Deslizante.

Con el control basado en modos deslizantes, se aprecia una reducción en las oscilaciones del transitorio en los valores promedios de los estados, en contraste con el sistema en lazo abierto. En la figura 4.5, se muestra un sobrepaso (valle al arranque)

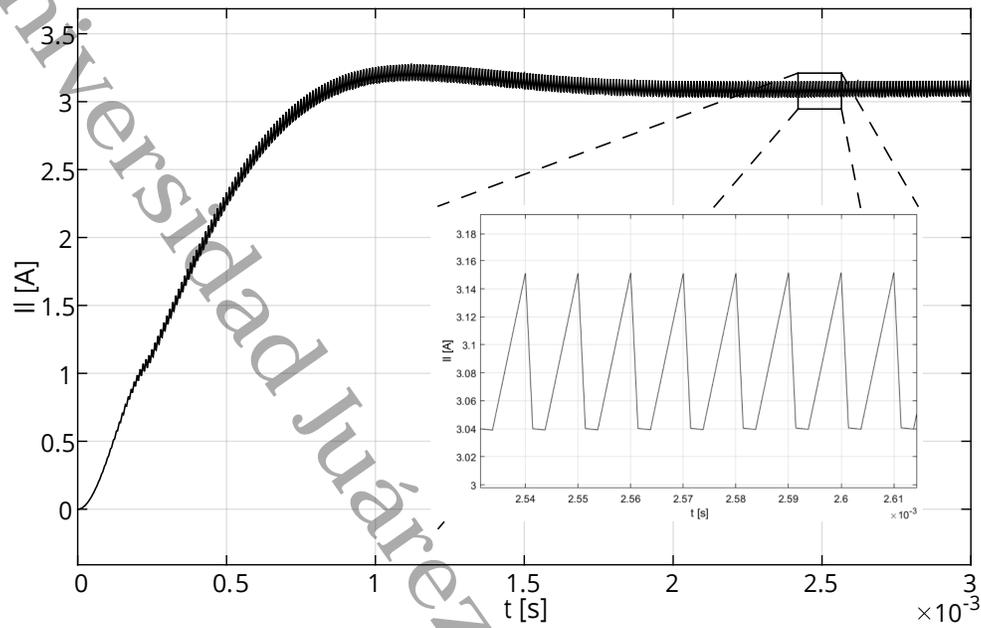


Figura 4.6: I_L con Control Deslizante.

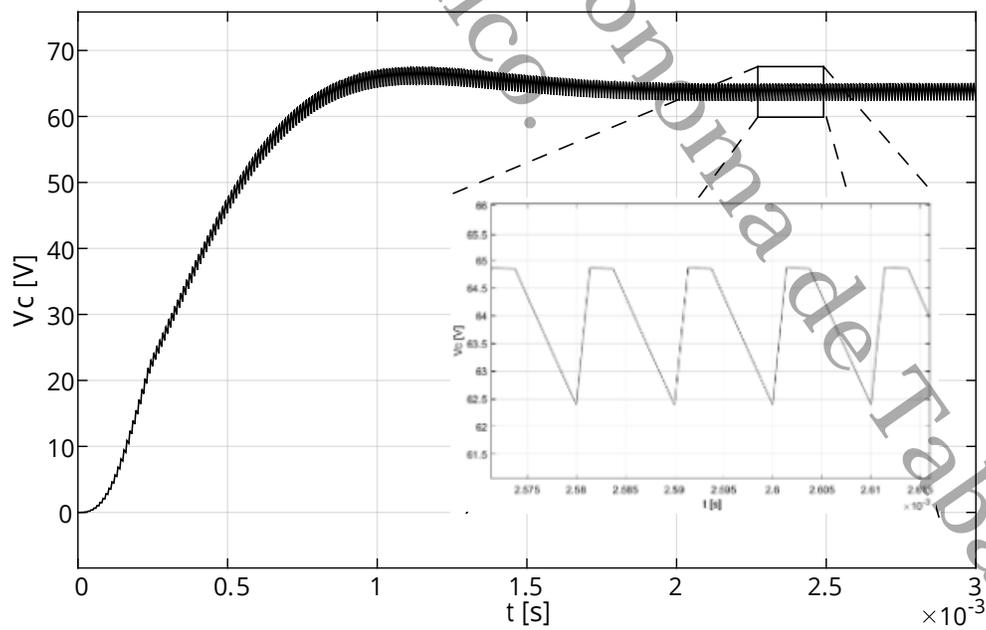


Figura 4.7: V_C con Control Deslizante.

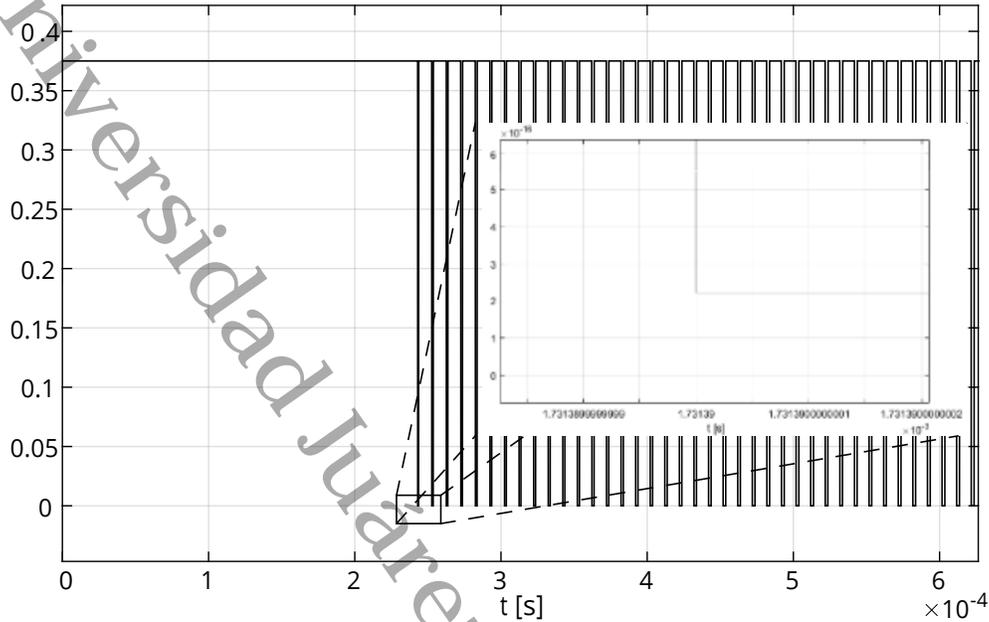


Figura 4.8: $u(\mathbf{x})$ con Control Deslizante.

antes de llegar al valor en estado estacionario, elevando el voltaje por encima del valor deseado antes de estabilizarse en el equilibrio. Por lo general los sobrepasos no son deseados, pero son aceptables en el margen de operación. Esto último se debe a que hoy en día, la protección por sobretensión es algo común y muchos dispositivos ya manejan estos rangos de operación a un costo reducido. Algo relevante a mencionar es que el valor en estado estacionario tiene valores por encima de los estimados por el equilibrio del sistema en lazo abierto; viéndose esto más marcado en las figuras 4.6 y 4.7. Por otro lado, en estas mismas figuras, se puede apreciar como el rizo sigue estando, aproximadamente, en los mismos rangos de operación que el sistema en lazo abierto, pero no consiste en triángulos consecutivos, sino que existe un intervalo constante antes de iniciar el siguiente rizo. Esto sugiere que los capacitores e inductores se descargan más rápido antes de que inicie el siguiente ciclo de conmutación, lo que implica que se requiere incrementar sus valores para operar adecuadamente. En la figura 4.8, se puede apreciar como la función de control es discontinua. A simple vista, pareciera que el valor de $u(\mathbf{x})$ conmuta entre 0.37 y 0, pero esto no es así. Se puede observar en la imagen ampliada que el límite inferior vale el ϵ de la máquina. Esto último asegura que siempre el convertidor esté cambiando de circuito equivalente de forma periódica como asegura el modelo. Cabe mencionar que en la práctica, es muy difícil ajustar los valores del ciclo de trabajo tan cerca de cero, por lo que se sugiere

otra clase de elección de α . En particular se propone utilizar de la forma

$$\alpha = \frac{1}{n}(1 - |1 - 2u(\bar{\mathbf{x}})|),$$

donde $n > 2$. Así, se asegura que los valores del ciclo de trabajo en el control por modos deslizantes, se encuentren mas cerca del valor nominal calculado para el sistema en lazo abierto. Nóte también que el control deslizante se queda en su extremo superior durante el arranque para acercar

4.3.2. Control por Ubicación de Polos

El método de control por ubicación de polos presenta la mejoría que la señal de control es siempre continua. Sin embargo para esto había que calcular unas ganancias \mathbf{K} . Estas ganancias se obtuvieron, tomando los siguientes dos criterios.

- El punto de equilibrio debe ser globalmente asintóticamente estable.
- La parte imaginaria de los valores propios de la jacobiana del sistema debe ser mínima.

En la sección 3.2.3 se obtuvieron condiciones suficientes para que el sistema fuera globalmente asintóticamente estable. Así una forma de escribir las condiciones (3.16) es que

$$\left(k_3 + \frac{k_2}{Ru(\bar{\mathbf{x}})}\right)^2 + \frac{Rf}{R}k_1^2 < \frac{4k_2}{Rx_3}. \quad (4.3)$$

Por lo tanto, escoger el vector \mathbf{K} adecuado se reduce a un problema de optimización el cual es minimizar la función objetivo

$$F(\mathbf{K}) = \text{Im}(\lambda(\mathbf{J})),$$

dada la restricción (4.3).

Esto se resolvió usando la paquetería de *MATHEMATICA* con la función `NMinimize`. De esta forma con los parámetros utilizados se obtuvo que el mínimo es

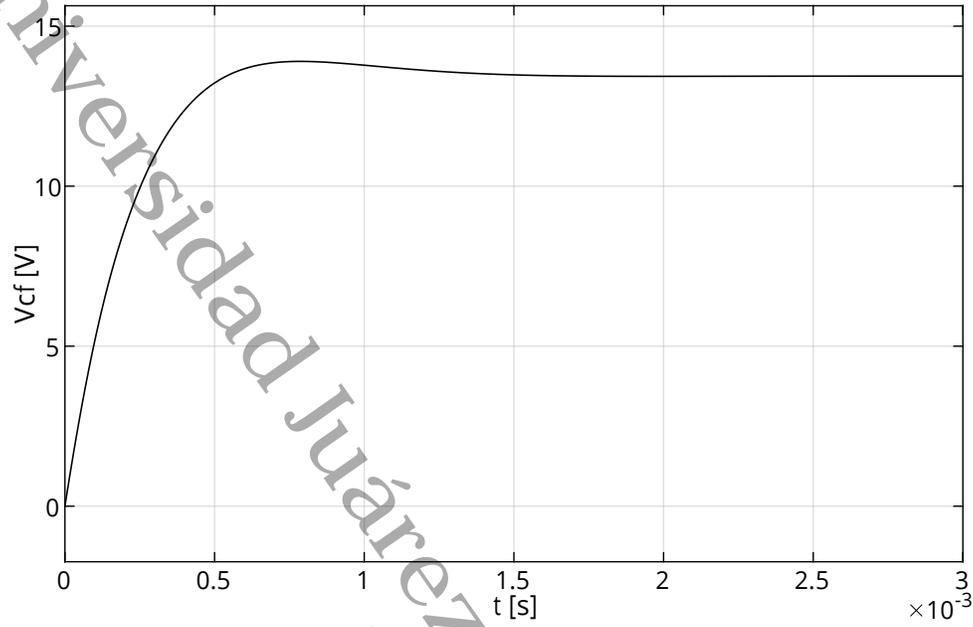
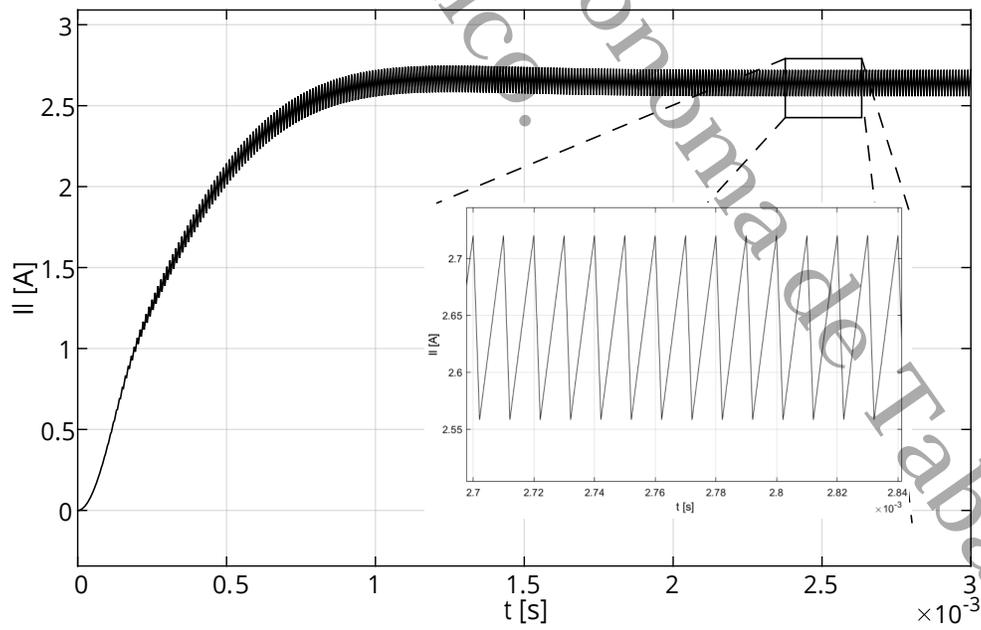
$$\min\{\text{Im}(\lambda(\mathbf{J}))\} = 1.01863 \times 10^{-10},$$

cuando

$$k_1 = 0.000252549, \quad k_2 = 0.414126, \quad k_3 = -0.0159656.$$

Con estos resultados se obtuvieron las gráficas mostradas en las figuras 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12.

Lo primero que se puede observar es que en la figura 4.9, presenta un comportamiento muy cercano al de un sistema de primer orden, presentando un sobrepaso de magnitud mínima entre 0.5 y 1 milisegundos. Esto mejora en gran medida la respuesta

Figura 4.9: V_{C_f} con Control por Ubicación de Polos.Figura 4.10: I_L con Control por Ubicación de Polos.

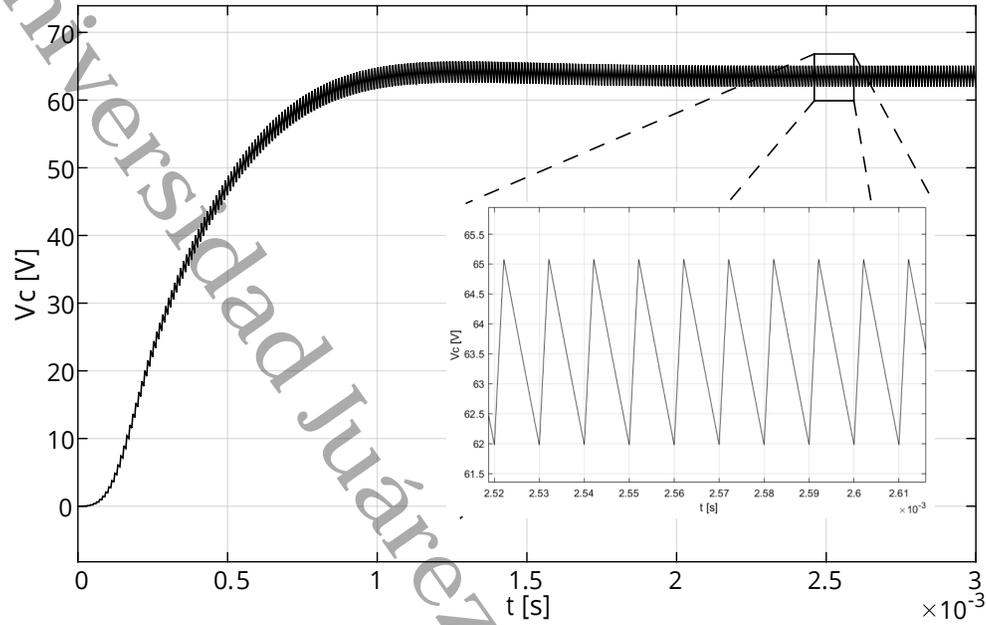


Figura 4.11: V_c con Control por Ubicación de Polos.

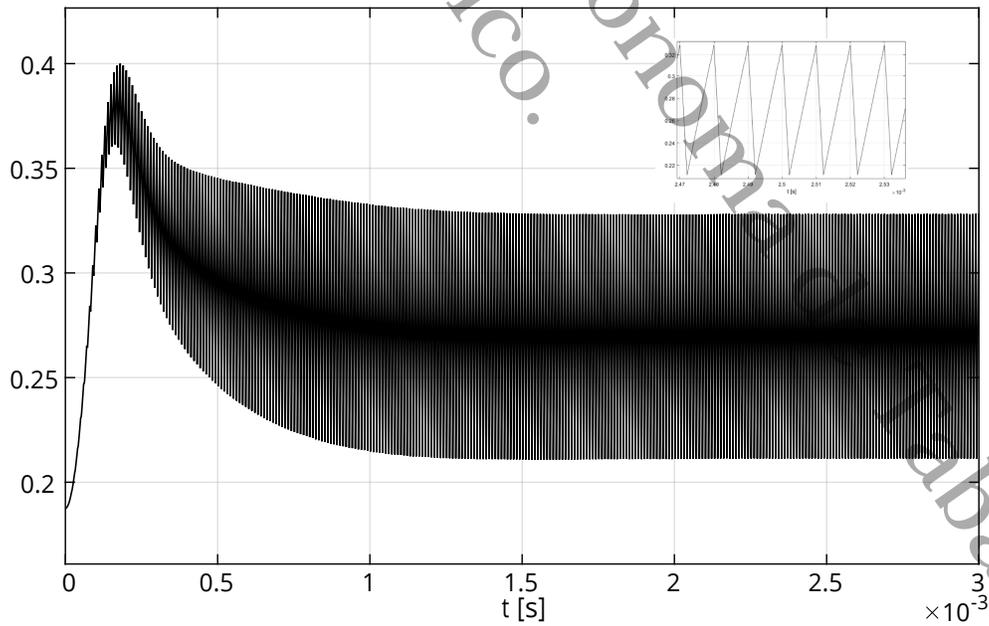


Figura 4.12: $u(x)$ con Control por Ubicación de Polos.

en comparación del sistema en lazo abierto y por el control por modos deslizantes. De igual forma, la respuesta la corriente del inductor y el voltaje del capacitor tienen un comportamiento en promedio muy similar al de un sistema de primer orden. Observe la amplitud en los rizados de las figuras 4.10 y 4.11, sigue siendo del 5% para cada uno de los elementos, pero se encuentran centrados un poco por debajo del valor en estado estacionario. Finalmente la función de control se puede observar en la figura 4.12. Se puede apreciar que la función de control es continua pero no diferenciable. Al inicio del trayecto, al rededor de 0 a 0.5 milisegundos, el ciclo de trabajo incrementa para acercarse más rápido la trayectoria del sistema al punto de equilibrio. Después de un milisegundo, la trayectoria está tan cerca de su valor en estado estacionario que también se estabiliza el valor de función al rededor de su valor nominal. Cabe mencionar que la existencia del rizo en el circuito debido a su naturaleza de conmutación, hace presente de igual manera el rizo en la función de control. Se sugiere que, reduciendo el rizo eligiendo capacitores e inductores de mayor tamaño, se vea igual reducido el rizo en $u(\mathbf{x})$.

4.4. Comparación entre Respuestas

En esta sección se discuten las diferencias entre cada una de las respuestas obtenidas, presentar sus pros y sus contras así como también discutir cuando es más conveniente escoger una técnica de control en vez de otra. En la figura 4.13, se presentan todas las respuestas obtenidas. La primera columna muestra los resultados de la simulación del sistema en lazo abierto, la segunda la del control basado en modos deslizantes y la tercera por ubicación de polos. Así mismo se compara cada gráfica por fila. En la primera fila se presenta el voltaje del capacitor de entrada, en la segunda la corriente del inductor, la tercera el voltaje del capacitor de salida y en la última la de la función de control. Para la comparación de los tres casos se tomarán como criterios

- Amortización de sobrepicos.
- Cambio en el rizo.
- Número de variables de estado a retroalimentar.
- Continuidad en la ley de control.

Primero, el control por modos deslizantes y el control por ubicación de polos fueron eficaces al momento de amortizar las oscilaciones del inductor y el capacitor de salida. Sin embargo, el control por modos deslizantes indujo un sobre impulso en el capacitor de entrada el cual debe de ser considerado en el diseño físico.

Segundo, en los tres casos se mantuvo el rizo con el mismo porcentaje calculado para el inductor y el capacitor de salida, siendo la única diferencia, el cambio de la geometría en el caso del modos deslizantes, el cual ya se discutió con anterioridad.

Tercero, el número de variables de estado a retroalimentar es menor en el control por modos deslizantes que en el ubicación de polos, ya que la expresión obtenida sólo utiliza dos en comparación de las tres que utiliza el método de ubicación de polos. Cabe mencionar que aunque el sistema en lazo abierto no requiere retroalimentar ningún estado, su respuesta no es satisfactoria.

Cuarto, la ley de control por modos deslizantes no es continua, lo cual puede generar problemas físicos en la implementación ya que el generador de pulsos puede no sincronizarse al cambiar el ciclo de trabajo. Por lo tanto el control por ubicación de polos es mas apropiada.

En conclusión para un sistema de una celda y un convertidor, la mejor opción teórica, para controlar el sistema en estado continuo de las dos presentadas es el control por ubicación de polos.

4.5. Sistema en Cascada en Lazo Abierto

En la sección 3.3 se generalizó el estudio de estabilidad para n convertidores en cascada. Utilizar convertidores en cascada tiene sus beneficios. Primero, ya que permite que se pueda amplificar en mayor medida el voltaje de salida con la misma señal de control. Segundo, el ciclo de trabajo se puede centrar, para evitar operar en los extremos del intervalo lo cual a su vez da mayor rango de operación para el funcionamiento del control. Tercero, como en la práctica no se tiene disponible todo el espectro del ciclo de trabajo en un convertidor de una etapa debido a las limitaciones de los dispositivos que no conmutan de manera inmediata como un interruptor ideal, colocar mas etapas elevadoras permiten obtener la misma amplificación de voltaje operando con un menor ciclo de trabajo. Lo que se hará a continuación es obtener una formula para decidir cuantas etapas de convertidores se necesitarían si se desea elevar el voltaje de $V_{OC} = 24V$ a $V_{C_n} = 170V$ centrando el ciclo de trabajo en $u(\bar{x}) = 1/2$.

De la ecuación del voltaje del último capacitor en estado estacionario (3.30) y del hecho que $V_{OC} = I_{SC}R_f$, se puede resolver para n , como

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\ln(u(\bar{x}))} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{V_{OC}}{V_{C_n}} + \sqrt{\frac{V_{OC}^2}{V_{C_n}^2} - \frac{4R_f}{R}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\ln(u(\bar{x}))} \ln \left(\frac{1}{2} G(1 + \sqrt{1 - 4\eta}) \right). \end{aligned}$$

donde $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$ es la eficiencia del sistema y $G = \frac{V_{OC}}{V_{C_n}}$ es el inverso de la amplificación de voltaje para un convertidor con una fuente voltaje ideal. Nuevamente la eficiencia del sistema está acotada entre $0 \leq \eta \leq \frac{1}{4}$. Como $0 < u(\bar{x}) < 1$ al igual que $0 < G < 1$. Se puede reescribir n como suma de logaritmos positivos como

$$n = \frac{\ln(2) + \ln(G^{-1}) - \ln(1 + \sqrt{1 - 4\eta})}{\ln(u(\bar{x})^{-1})}.$$

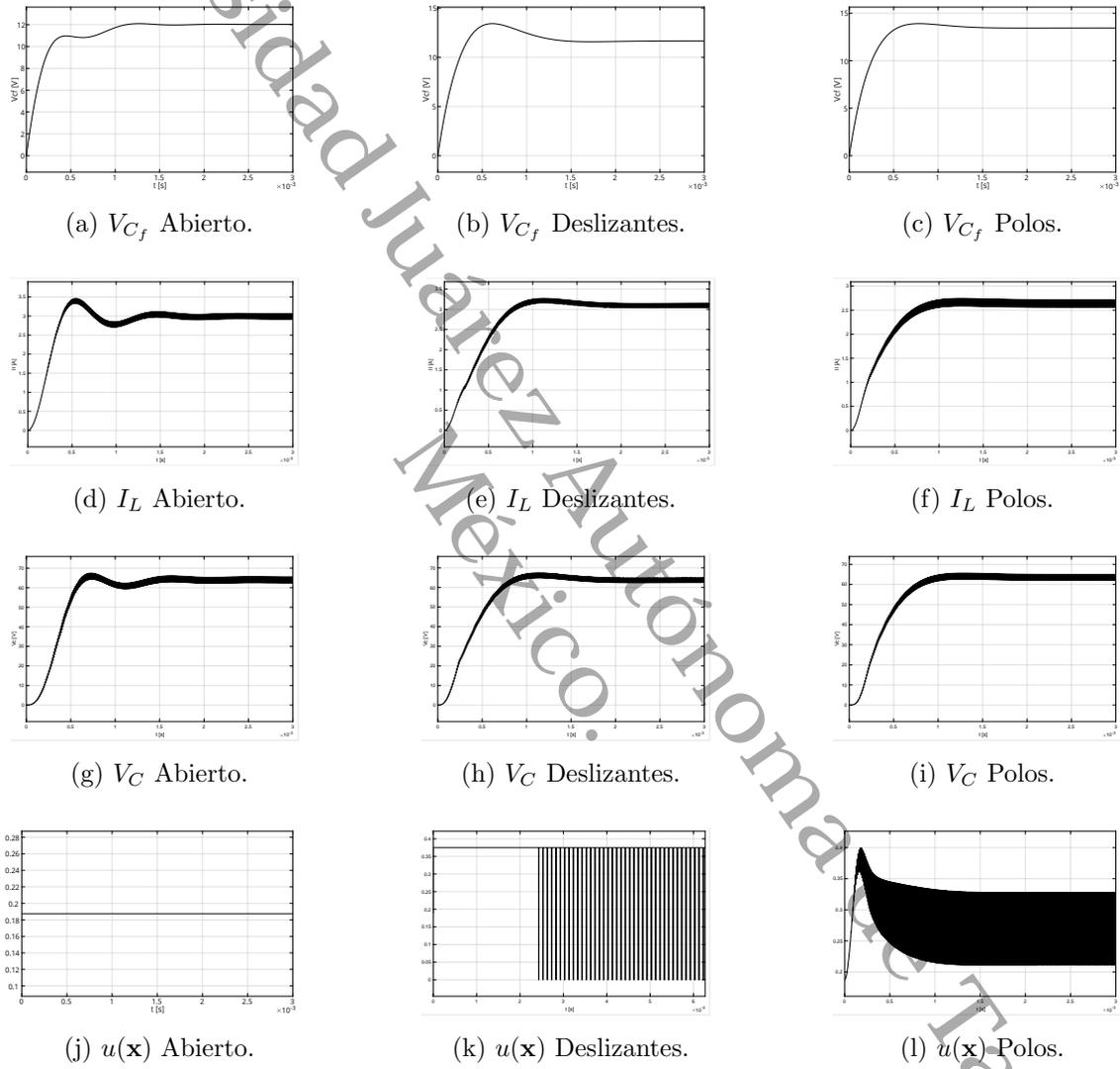


Figura 4.13: Comparativa entre Todas las Respuestas.

Debido a que la eficiencia está acotada, se tiene que que n también lo está y que se encuentra entre

$$\frac{\ln(G)}{\ln(u(\bar{x}))} \leq n \leq \frac{\ln(G) - \ln(2)}{\ln(u(\bar{x}))}.$$

Ahora $G = 24V/170V = 1/7.08\bar{3}$ y se busca centrar el ciclo de trabajo a la mitad del intervalo $u(\bar{x}) = 0.5$. De aquí se tiene que

$$2.82 \approx \frac{\ln(1/7.08\bar{3})}{\ln(0.5)} \leq n \leq \frac{\ln(1/7.08\bar{3}) - \ln(2)}{\ln(0.5)} \approx 3.82.$$

Como n tiene que ser entero, implica que se requieren tres convertidores en cascada para obtener el voltaje deseado a la salida con un ciclo de trabajo lo mas cercano a 0.5. Así, el ciclo de trabajo para tres convertidores a máxima potencia se calcula por

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}G(1 + \sqrt{1 - 4\eta})} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{24V}{170V}} \\ &\approx 0.41328. \end{aligned}$$

Como se simulará con la misma celda fotovoltaica, se sigue teniendo que $V_{OC} = 24V$, $I_{SC} = 6A$, $R_f = 4\Omega$. Nuevamente la máxima potencia se encuentra cuando $P_{out} = P_{in}/4$ por lo que $P_{out} = 36W$. Ahora la nueva carga se calcula mediante la expresión de potencia

$$R = \frac{V_{out}^2}{P_{out}} = \frac{(170V)^2}{36W} = 802.7\Omega.$$

Para calcular los valores de los inductores y los capacitores se requiere conocer sus valores en estado estacionario. Observe que el equilibrio para tres convertidores en cascada se puede escribir como

$$\begin{aligned} V_{C_0} &= V_{C_3} \bar{U}^3 = 12V, \\ I_{L_0} &= \frac{V_{C_3}}{R \bar{U}^3} = 3A, \\ V_{C_1} &= V_{C_3} \bar{U}^2 = 29.036V, \\ I_{L_1} &= \frac{V_{C_3}}{R \bar{U}^2} = 1.2398A, \\ V_{C_2} &= V_{C_3} \bar{U} = 70.2576V, \\ I_{L_2} &= \frac{V_{C_3}}{R \bar{U}} = 0.5124A, \\ V_{C_3} &= 170V. \end{aligned}$$

De esta forma se pueden calcular los valores de los inductores y los capacitores mediante las fórmulas

$$L_k = \frac{DV_{C_k}}{\Delta I_{L_k} f_s}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2,$$

$$C_k = \frac{DI_{L_k}}{\Delta V_{C_k} f_s}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

En particular para este convertidor, las ecuaciones se reducen a

$$L_k = \frac{RD^{2(n-k)+1}}{(rip\%)f_s}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n,$$

$$C_k = \frac{1}{D^{2(n-k)-1}R(rip\%)f_s}, \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Usando estas fórmulas se tiene que

$$L_0 = 0.33mH \quad C_1 = 4.41\mu F,$$

$$L_1 = 1.9mH \quad C_2 = 0.75\mu F,$$

$$L_2 = 11.3mH \quad C_3 = 0.13\mu F,$$

mientras que $C_0 = 100,000\mu F$ para que el voltaje de salida de la fuente sea prácticamente constante.

Para esta simulación, sólo se muestran el voltaje del primer capacitor e inductor, así como también el voltaje del último capacitor. Estas respuestas se pueden consultar en las figuras 4.14, 4.14 y 4.16 respectivamente.

Este sistema presenta un comportamiento complejo en comparación al sistema con un sólo convertidor y la celda solar. Observe el a figura 4.14, la respuesta es similar a la del sistema de un etapa. Sin embargo, el la curva de los inductores y capacitores muestra oscilaciones de diversas frecuencias. Esto se debe a que la jacobiana del campo vectorial cuenta con valores propios complejos con parte imaginaria diferente, lo cual implica que la solución presente oscilaciones de diferentes frecuencias naturales. Cabe mencionar que el equilibrio sigue siendo asintóticamente estable y sigue convergiendo al valor calculado analíticamente. Note también que el rizo se mantiene al igual que en los casos anteriores, mostrando un valor del 5% del valor del estado estable. Así la amplitud del rizo del primer inductor es de $150mA$ y el del último capacitor de $8.5V$. Algo interesante es que conforme se van agregando etapas de convertidores, el tiempo en el que la energía llegue a V_{C_3} se incrementa. Esto se puede ver en la figura 4.16. De cero a aproximadaente $0.25ms$, el voltaje de salida es prácticamente nulo, hasta que empieza a cargarse el capacitor, mostrando así, el voltaje de salida esperado. Una pregunta natural que surge ante la existencia de este retraso, en la señal, es ¿Qué parámetros son los que influyen en la presencia de este retraso?, lo cual abre camino a una investigación a futuro.

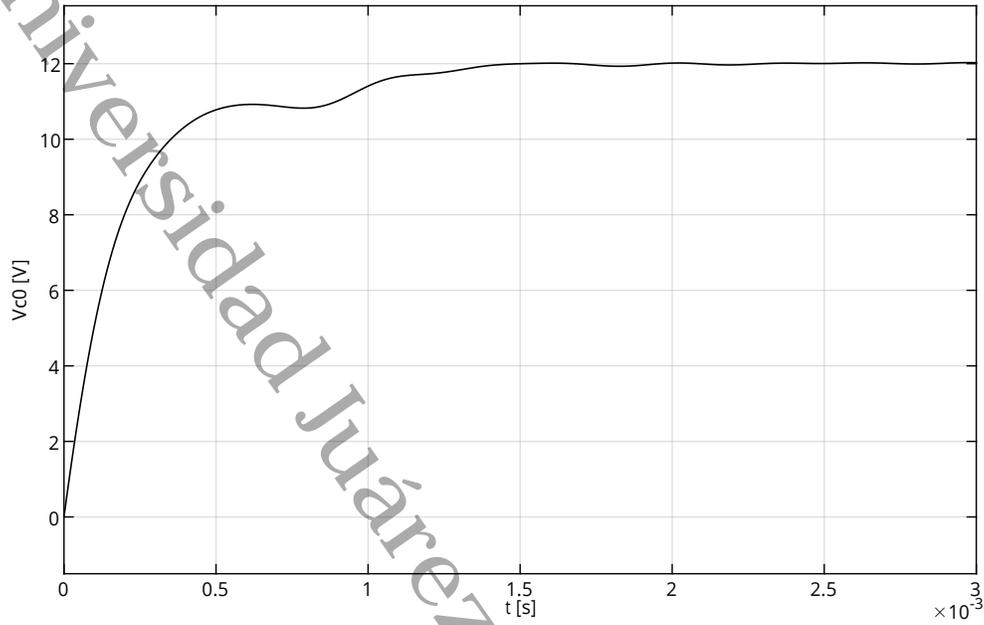


Figura 4.14: V_{c0} en Cascada con Lazo Abierto.

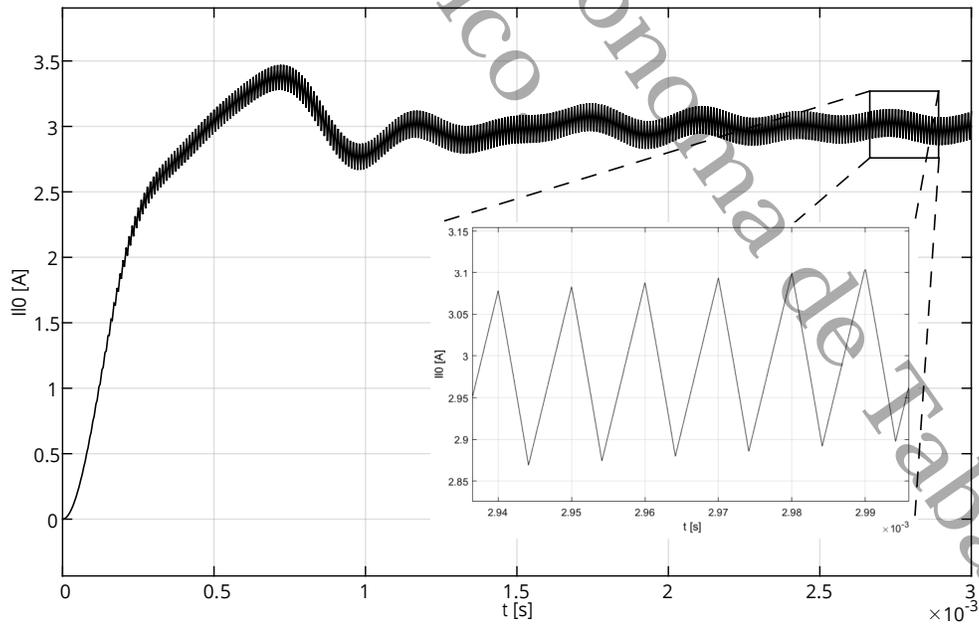


Figura 4.15: I_{L_0} en Cascada Lazo Abierto.

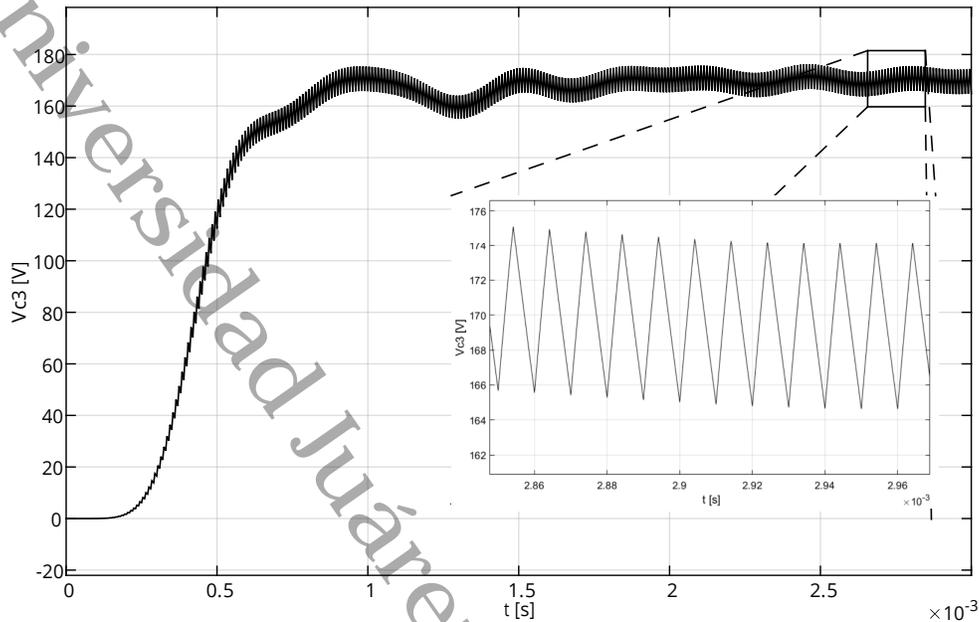


Figura 4.16: V_{C_3} en Cascada Lazo Abierto.

4.6. Sistema en Cascada en Lazo Cerrado

En esta sección se muestran los resultados al aplicar las metodologías basadas en control por ubicación de polos y modos deslizantes al sistema en cascada. Se realizaron simulaciones con los mismos parámetros que en el sistema en lazo abierto, al igual que el mismo paso del tiempo para la solución numérica. Los resultados no fueron los esperados ya que en el circuito de una etapa, la metodología por ubicación de polos tuvo mejor desempeño que el basado en modos deslizantes. Esto en el sentido que con ubicación de polos se pudo eliminar las oscilaciones minimizando el sobrepaso con una señal continua. Se estimaba que esto mismo ocurriera para el sistema en orden superior. Sin embargo esto no ocurrió.

4.6.1. Control por Ubicación de Polos

Lamentablemente para el sistema en cascada, no se puede garantizar la estabilidad global con la función de Lyapunov propuesta, ya que la matriz asociada a la forma cuadrática de \dot{V}

$$\mathbf{L} = -(\mathbf{J}^T \mathbf{Q} + \mathbf{QJ}),$$

no cumple condición de definida positiva. Esto se puede ver con los primeros tres menores.

$$M_{3 \times 3}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 2\alpha_1/R_f & \alpha_1 - \alpha_2(1 - k_1x_3) & -\alpha_2k_1x_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2(1 - k_1x_3) & 2\alpha_2k_2x_3 & -\alpha_2(k_2x_2 - k_3x_3) \\ -\alpha_2k_1x_2 & -\alpha_2(k_2x_2 - k_3x_3) & -\alpha_2k_3x_2 \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de Sylvester, los determinantes de los menores principales de \mathbf{L} deben ser positivos. Como α_i , x_i y R_f son positivos, el determinante del menor de tamaño uno es positivo de manera inmediata.

Ahora, suponga que el determinante del menor de dimensión dos es igual a un parámetro positivo β , es decir

$$|M_{2 \times 2}(\mathbf{L})| = \frac{4\alpha_1\alpha_2k_2x_3}{R_f} - (\alpha_2 - \alpha_2(1 - k_1x_3))^2 = \beta.$$

Después, resuelva para algún parámetro lineal, en este caso

$$k_2 = \frac{R_f((\alpha_2 - \alpha_2(1 - k_1x_3))^2 + \beta)}{4\alpha_1\alpha_2x_3}$$

y sustituya en $|M_{3 \times 3}(\mathbf{L})|$. De nueva cuenta iguale este determinante a un parámetro positivo $|M_{3 \times 3}(\mathbf{L})| = \gamma$ y resuelva para β . De aquí se tiene que $\beta = -p \pm q$ donde

$$p = \frac{4\alpha_1\alpha_2k_3x_3^2 + R_fx_2(\alpha_2^2k_1^2x_3^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2)}{R_fx_2},$$

$$q = \frac{2\sqrt{R_fx_3}\sqrt{\alpha_2x_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(4\alpha_1k_3 + R_f\alpha_2x_2k_1^2) - 2\alpha_1\gamma}}{R_fx_2}.$$

Sin embargo, para que β sea positivo se requiere que $p^2 - q^2 < 0$. Pero esta cantidad es

$$p^2 - q^2 = [R_fx_2(\alpha_1 - \alpha_2(1 - k_1x_3))(\alpha_1 - \alpha_2(1 + k_1x_3)) - 4\alpha_1\alpha_2k_3x_3^2]^2 + 8R_f\gamma\alpha_1x_3^2,$$

la cual es estrictamente positiva. Por lo tanto sólo se puede garantizar estabilidad local.

4.6.2. Control Basado en Modos Deslizantes

El control por ubicación de polos no fue suficiente para garantizar la estabilidad global del sistema en cascada. Sin embargo, si es posible implementar una función por modos deslizantes.

Usando el proceso desarrollado en la sección 3.4 se tiene que

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{R_f}\tilde{x}_1^2 - \frac{1}{R}\tilde{x}_7^2 + h(\tilde{\mathbf{x}})[\tilde{x}_2\tilde{x}_3 - \tilde{x}_3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_4\tilde{x}_5 - \tilde{x}_5\tilde{x}_4 + \tilde{x}_6\tilde{x}_7 - \tilde{x}_7\tilde{x}_6].$$

La cual se puede hacer negativa tomando $h(\tilde{\mathbf{x}}) = -\alpha \text{sgn}(S)$, donde $\alpha > 0$ y

$$S = \bar{x}_2\tilde{x}_3 - \bar{x}_3\tilde{x}_2 + \bar{x}_4\tilde{x}_5 - \bar{x}_5\tilde{x}_4 + \bar{x}_6\tilde{x}_7 - \bar{x}_7\tilde{x}_6.$$

Por consiguiente se tomó en la siguiente simulación la función de control como $u(\mathbf{x}) = \bar{u} - \alpha \text{sgn}(S)$. Escogiendo nuevamente la α de la ecuación (4.2) como en el caso de una etapa, se obtuvieron las gráficas para el voltaje del capacitor de entrada, la corriente del primer inductor y el voltaje del último capacitor.

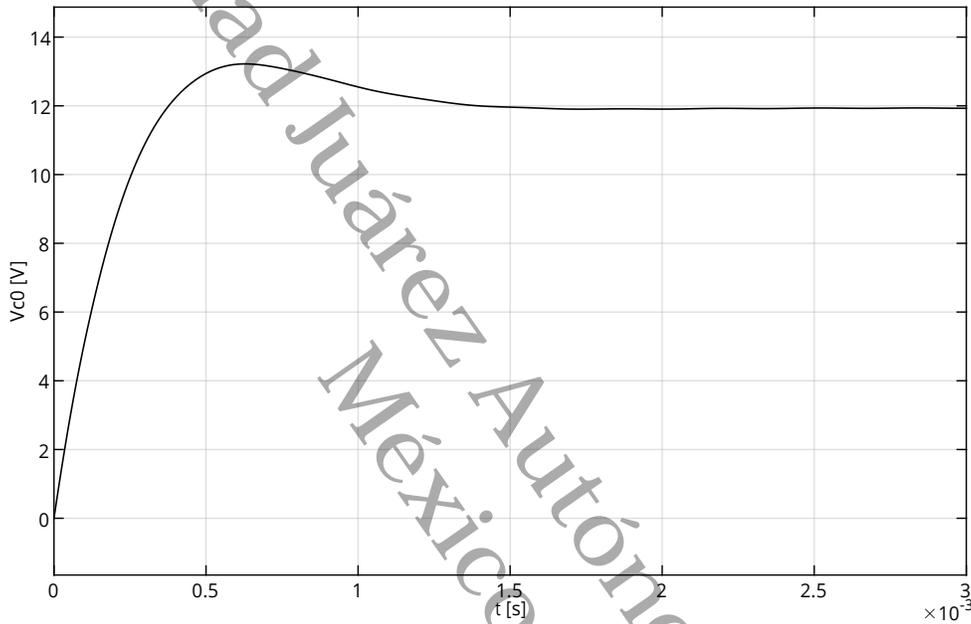


Figura 4.17: V_{C_0} en Cascada con Control Deslizante.

Observe como el sistema presenta mejoría inmediatamente después de implementarse el control. Primero la respuesta de V_{C_0} , presentada en la figura 4.14, se acerca con mayor velocidad al valor en estado estacionario, tocando ese valor alrededor de $0.3ms$. De igual forma, presenta un sobre impulso de un voltio alrededor de los $0.7ms$, pero esto es aceptable hoy en día, ya que se encuentra dentro de los parámetros usuales de operación de los dispositivos. Por otra parte, las oscilaciones del inductor de entrada y el capacitor de salida fueron amortiguadas considerablemente. Se puede observar en las figuras 4.18 y 4.19, como convergen a la referencia un poco por arriba del valor deseado. Igual se presente una mejoría en el rizado, ya que la amplitud de la corriente del inductor se redujo a $60mA$ y el del capacitor a $2V$. Algo no esperado es la modificación de la forma del rizo, ya que ahora se presenta una respuesta triangular separada por pedazos constantes. Nuevamente esto indica que los inductores y capacitores se descargan antes de terminar el periodo de conmutación lo cual se suele resolver en la práctica incrementando el valor de estos elementos reactivos.

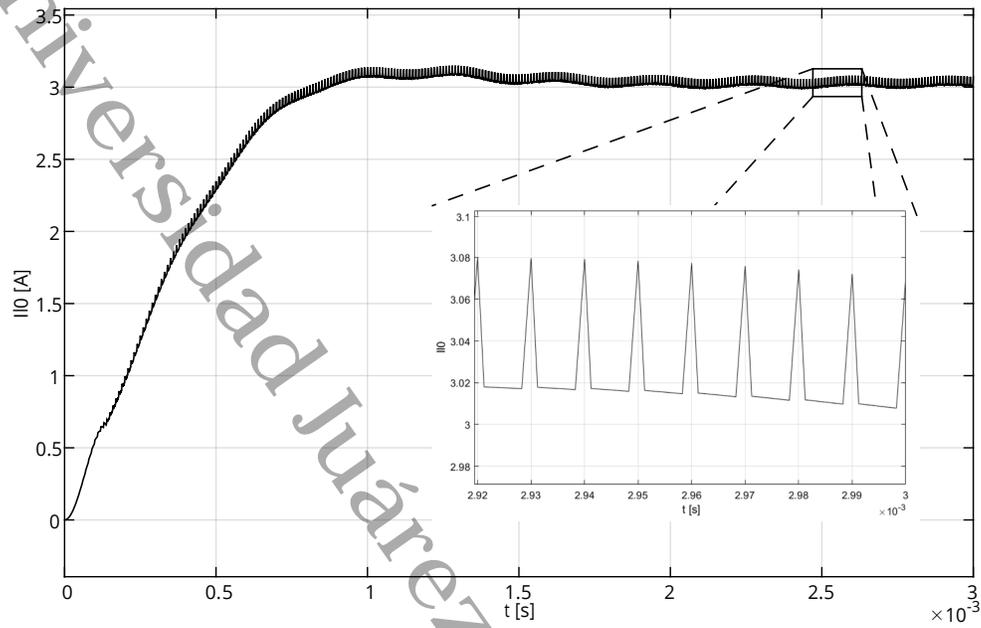


Figura 4.18: I_{L_0} en Cascada con Control Deslizante.

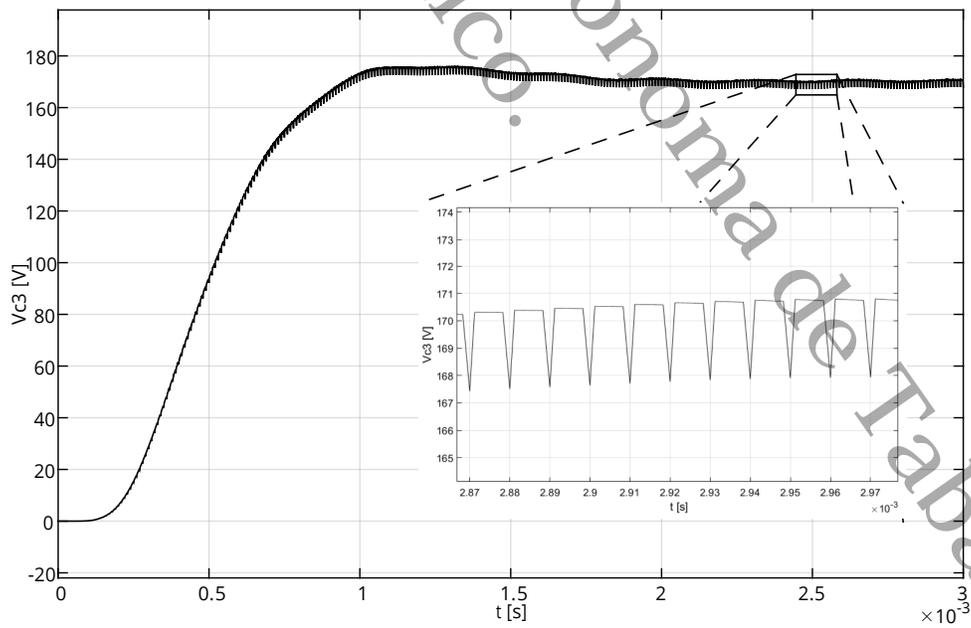


Figura 4.19: V_{C_3} en Cascada con Control Deslizante.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 5

Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales al implementar un convertidor elevador de una etapa con la celda fotovoltaica. Se muestran las respuestas de las dos leyes de control y su comparativa con el lazo abierto. También se discuten aspectos prácticos de los componentes utilizados y sugerencias para mejorar los experimentos.

5.1. Aspectos Físicos del Circuito

Para dar validez al modelado, se ha implementado físicamente el sistema de potencia al igual que el control. El diagrama de bloques del sistema físico se puede observar en la figura 5.1

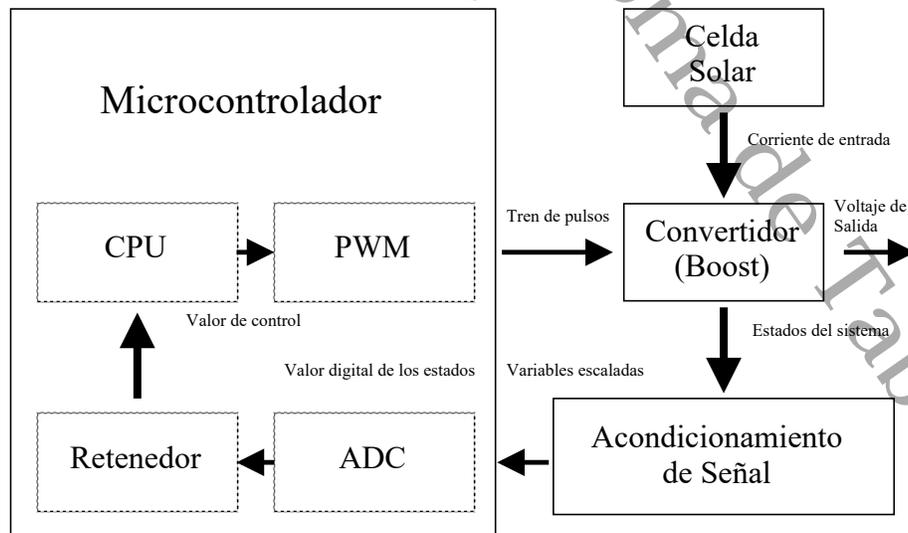


Figura 5.1: Diagrama de Bloques del Circuito Construido.

La celda solar empleada es una celda solar Solarex, la cual entrega un voltaje en circuito abierto de $17.7V$. Los parámetros como la corriente en corto circuito I_{SC} y la resistencia fotovoltaica R_f , se ajustaron experimentalmente. El valor para esta resistencia se ajustó a aproximadamente $R_f = 1\Omega$.

El convertidor Boost fue implementado usando como interruptor un transistor MOSFET IXTP50N25T. Este transistor cuenta con una resistencia de encendido menor a $60m\Omega$, lo cual hace que su comportamiento sea muy parecido al del interruptor ideal y las pérdidas por calentamiento sean mínimas. Para el diodo de conmutación, se utilizó el diodo schottky MBR10100, por su recuperación rápida y pocas pérdidas, y para el diodo de acople para la celda D_S el MUR20200. El capacitor de acople C_f tiene un valor de $4700\mu F$, el inductor L de $0.4mH$ y el capacitor de salida C de $74.4\mu F$. La carga utilizada para las pruebas fue una resistencia de 330Ω a $10W$.

En el acondicionamiento de señal, se escalaron todas las señales de entrada a un nivel a las que pudieran ser manejadas por el microcontrolador. Para esto se utilizaron arreglos de divisor de voltaje y amplificadores operacionales en configuración de amplificador no inversor, esto último con el fin de igualar la impedancia de entrada del convertidor analógico digital (ADC por sus siglas en inglés) del microcontrolador. El amplificador operacional utilizado fue el TLC2264. Se escogió este dispositivo ya que cuenta con características *Rail-to-rail*, lo cual permite trabajar en todo el rango una fuente simple de cinco volts. La medición de la corriente del inductor fue realizada mediante el HLSR 10-P; este es un sensor de efecto hall que permite medir la corriente sin introducir resistencias no modeladas al circuito.

El microcontrolador utilizado fue el ATmega32 de ATMEL con una velocidad de reloj es de $8MHz$. La frecuencia del tren de pulsos se ajustó a $80KHz$. El algoritmo de control implementado, se puede simplificar en el siguiente pseudocódigo:

- Medir los estados y cantidades para calcular la potencia de entrada y salida V_{C_f}, I_L, V_C, I_R y V_{OC} . R_f debe estar guardado en la memoria interna.
- Pedir el valor deseado a la salida V_{C-SP} .
- Calcular $G = V_{C_f}/V_{C-SP}$.
- Calcular $R = V_C/I_R$.
- Si $1 - 4R_f/G^2R < 0$ mandar mensaje «Amplificación de voltaje excede potencia entregable» y hacer $G = 2\sqrt{R_f/R} + \epsilon$.
- Calcular $u_{ss} = G[1 + \sqrt{1 - 4R_f/G^2R}]/2$
- Calcular $u(\mathbf{x})$ de alguna ley de control.
- Convertir $u(\mathbf{x})$ al valor requerido del registro del ciclo de trabajo.
- Regresar al primer paso.

Al final se implementó en el algoritmo utilizar V_{C_f} en vez de V_{OC} en el cálculo de G , ya que el valor real de V_{OC} y R_f fueron difíciles de medir durante la operación, ya que estos parámetros variaban constantemente, pero se notó que V_{OC} , se aproximaba mucho a V_{C_f} , por lo que se decidió utilizar esta nueva definición para G . Al mismo tiempo, esta implementación, permitió reducir el error en estado estacionario.

5.2. Comparativas entre Respuestas

En la figura 5.2, se pueden observar las mediciones del voltaje del capacitor entrada (izquierda) y el capacitor de salida (derecha) para el sistema en lazo abierto (a y b), control por ubicación de polos (c y d) y modos deslizantes (e y f). En los tres experimentos se colocó como voltaje de salida deseado 30V.

En los tres casos, se presenta un pequeño escalonamiento en el voltaje de entrada al inicio de cada respuesta, esto se debe al retraso que le toma al microcontrolador medir el voltaje del capacitor para calcular el ciclo de trabajo y modificar el tren de pulsos. Por lo general, esto se acepta ya que esto permite que se cargue el capacitor de entrada para que exista suficiente voltaje en la entrada para que el convertidor pueda realizar su acción elevadora.

Observe también que en los tres casos, existe una pequeña curva al arranque en el voltaje de salida, mas pronunciada que la prevista en las simulaciones numéricas. Esto indica que hay características no modeladas que afectan en mayor medida al comportamiento. Comparando estas pruebas con las del convertidor y una fuente fija*, ambos en lazo abierto, muestran que el comportamiento del convertidor si es conforme a lo previsto analíticamente. Esto sugiere a que los errores de modelado, se deben principalmente a la caracterización de la celda mediante la ecuación diferencial lineal. También hay que resaltar que la dinámica de la celda fotovoltaica en lazo abierto es mucho más lenta de lo previsto inicialmente. Se esperaba que en la respuesta en lazo abierto existiesen sobrepicos, pero estos no se presentaron. A pesar de esto, la respuesta analítica y experimental fueron lo suficientemente parecidas al realizar el experimento.

En cuanto a las señales del control por ubicación de polos y modos deslizantes, sus respuestas son bastante parecidas pero hay pequeñas sutilezas que hay que resaltar. Primero que nada, ambas respuestas, elevan la tensión mas cerca del valor en estado estacionario que en circuito abierto. Sin embargo, al control por modos deslizantes le toma aproximadamente el mismo tiempo que el sistema en lazo abierto, llegar al valor deseado de voltaje. En contraste, el control por ubicación de polos, llega antes al valor deseado, pero este no es su valor en estado estable, sino unos milivolts mas alto. También cabe resaltar, que las señales con control muestran ruido en cambio la señal en lazo abierto no. Esto se debe a que las señales de control varían de forma no

*Para comparar las respuestas de la celda solar como fuente de energía en vez de una fuente de laboratorio, se puede observar la respuesta de esta última en las figura 5.3.

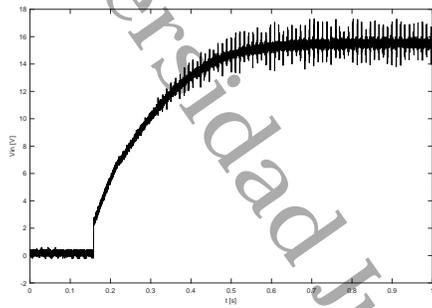
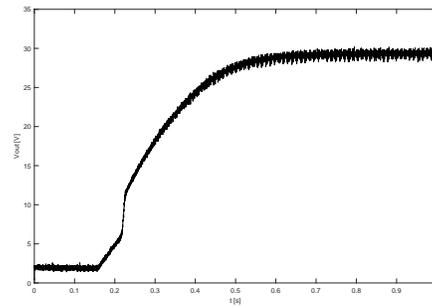
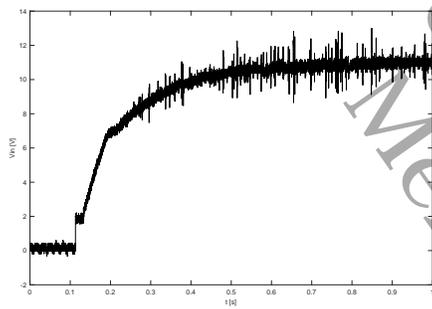
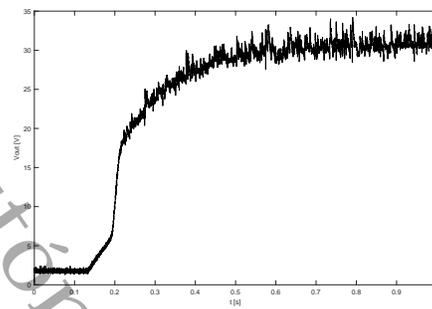
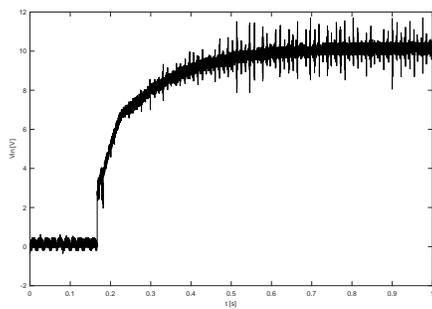
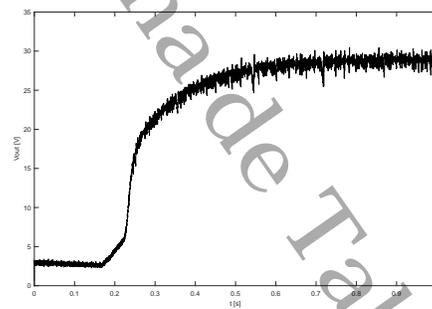
(a) V_{in} Lazo Abierto.(b) V_{out} Lazo Abierto.(c) V_{in} Ubicación de Polos.(d) V_{out} Ubicación de Polos.(e) V_{in} Modos Deslizantes.(f) V_{out} Modos Deslizantes.

Figura 5.2: Mediciones Experimentales bajo Diferentes Tipos de Control.

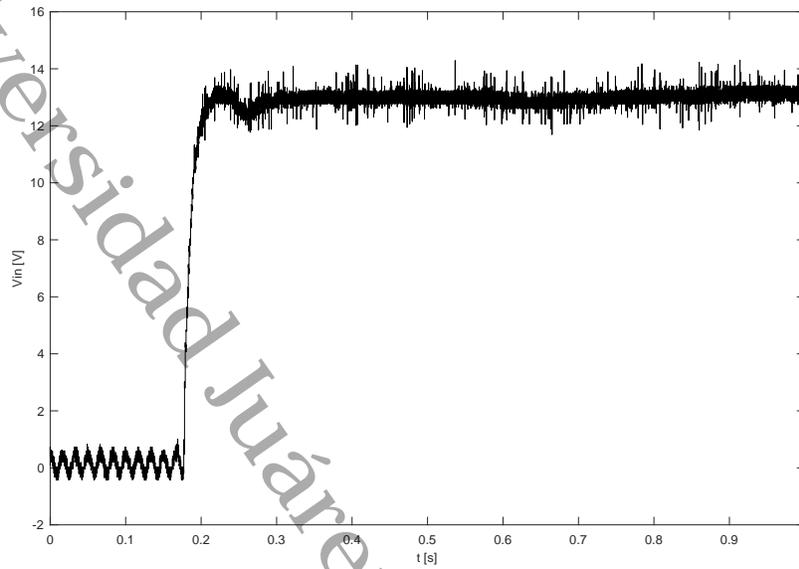
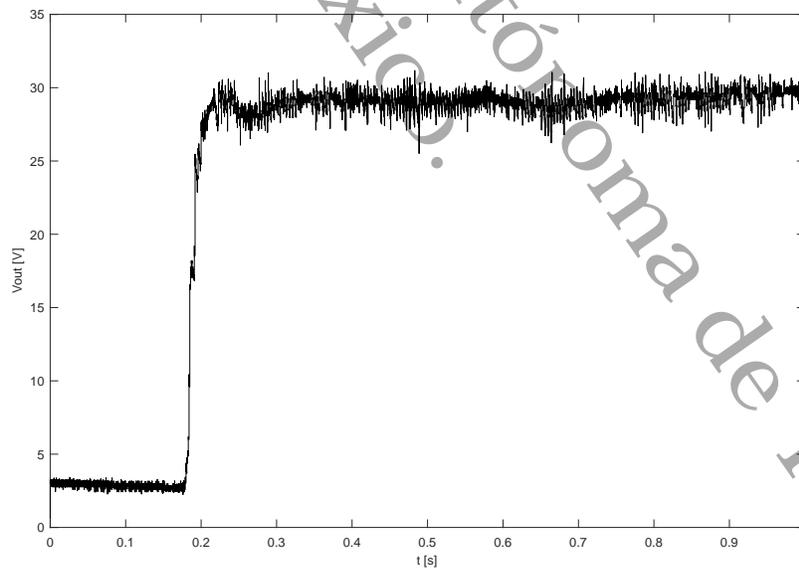
(a) V_{in} .(b) V_{out} .

Figura 5.3: Respuesta de Convertidor Boost con Fuente de Alimentación a 12V en Lazo Abierto.

continua. Por un lado el control por modos deslizantes, se encuentra alternando entre dos ciclos de trabajo cerca del valor deseado, lo cual agrega esta componente alterna al voltaje de salida del convertidor. Por otro lado, el control por ubicación de polos varia el ciclo de trabajo constantemente con respecto a las mediciones; así que, si se existen ruidos en la medición debido a interferencia o truncamientos por la conversión analógica a digital, estos se verán reflejados en el voltaje de salida.

También se hicieron mediciones de la corriente del inductor en estado estacionario para estudiar el rizo dependiendo de la señal de control a la fuese sometido. Las gráficas del sistema en lazo abierto a), control con ubicación de polos b), y modos deslizantes c), se pueden consultar en la figura 5.2. El rizo en lazo abierto y en modos deslizantes es prácticamente el mismo. Sin embargo, el control por ubicación de polos refleja una disminución de $500mA$ en el rizo. Esto se debe a que, como se vio en el capítulo 3, el control de por ubicación de polos modifica la jacobiana del sistema, lo cual hace que incremente de manera virtual el valor de los capacitores e inductores del sistema. Dicho de otra manera, parte de la aportación del control por ubicación de polos a la jacobiana de este sistema es equivalente a agregar capacitores en paralelo e inductores en serie a los componentes reactivos correspondientes del circuito.

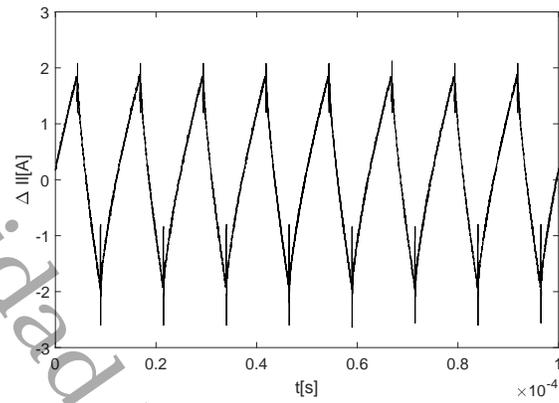
5.3. Propuestas

Durante el experimento, no se lograron apreciar los picos de corriente que se muestran en la simulación numérica, esto se debe al modelado de la celda solar, la caracterización de los parámetros pero principalmente al hecho de que la celda no entregaba tanta corriente como se esperaba. Se propone, volver a realizar el experimento con mas celdas fotovoltaicas en paralelo y comparar los resultados.

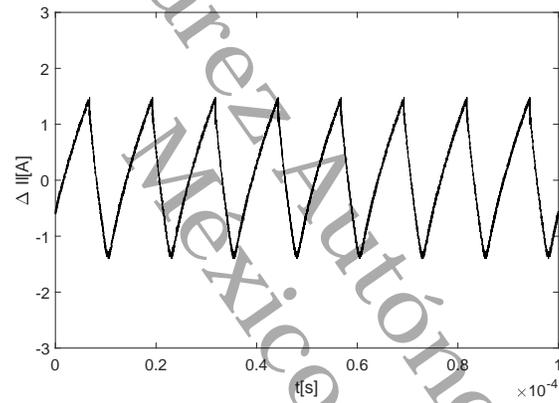
Otro hecho importante es que estas pruebas se realizaron con la celda expuesta al sol alrededor de las dos de la tarde, por lo que la variación de corriente era mínima. Sin embargo, si se desea estudiar la robustez del control ante la variación de la radiación solar, se sugiere realizar pruebas a diferentes horas del día y medir el error en los valores.

También se propone modificar el modelo de la celda fotovoltaica por un sistema no autónomo. Para esto se sugiere utilizar de nueva cuenta el modelo lineal de la celda suponiendo que la corriente en corto circuito y la resistencia fotovoltaica dependientes del tiempo. Así, se espera que $I_{SC}(t)$, y $R_f(t)$, describan las variaciones de potencia a lo largo del día dependiendo de la radiación solar.

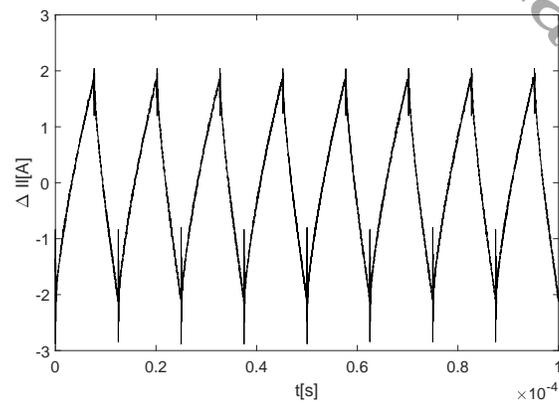
Finalmente, un hecho recurrente con la celda solar es que existía un error en estado estacionario al modificar el voltaje deseado a la salida. Es decir, el voltaje obtenido era cercano al calculado, pero no precisamente el buscado. Esto es consecuencia de la dependencia del control en los parámetros y los errores en la medición de los mismos. Para solventar esto, se propone utilizar una ley de control que contenga una parte integral, con el fin de disminuir estos errores e incrementar la precisión en la convergencia del circuito.



(a) Rizo de Corriente con Lazo Abierto.



(b) Rizo de Corriente con Ubicación de Polos.



(c) Rizo de Corriente con Modos Deslizantes.

Figura 5.4: Corrientes del Inductor en Estado Estacionario ante Diferentes Tipos de Control.

En cuanto al aspecto matemático, quedaron dos posibilidades abiertas al estudio que no se analizaron debido a estar fuera del alcance de esta tesis, pero que puede ser de interés. Una de ellas consiste en seguir el estudio de las funciones de Lyapunov para estos sistemas, buscando de matrices \mathbf{Q} definidas positivas tales que \mathbf{QB} sean antisimétricas. Esto se debe a que en el teorema 1.2.2, se utilizó la hipótesis complementaria de que \mathbf{Q} fuera simétrica. Por lo que no se descarta la posibilidad de que exista tal matriz que no sea simétrica.

Otra dirección de estudio consiste en encontrar condiciones tales que la derivada de la función de Lyapunov sea independiente de un subconjunto de parámetros.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de esta tesis, se obtuvieron diversos resultados los cuales pueden ser aplicados a sistemas de potencia de la misma topología. En el aspecto del modelado, se logró obtener una metodología para modelos de fuentes energéticas simplificadas a fuentes de corrientes y su resistencia de pérdidas. Esto puede ser útil inicialmente ya que permite caracterizar gran parte de la dinámica con un modelo más accesible matemáticamente. Lamentablemente, en este proceso, se introducen parámetros que, aunque sean fáciles de medir, hay que ajustar en la práctica. Una propuesta para mejorar este aspecto es caracterizar la celda fotovoltaica bajo diversas cargas y graficar la respuesta voltaje corriente. Obteniendo esta característica, se puede interpolar y utilizar, desde un inicio, un modelo polinomial para la dinámica de la celda.

Por otra parte, el modelado permitió realizar un análisis equivalente al estudio de un convertidor acoplado a una fuente de energía no ideal. Así, estos resultados pueden utilizarse con otras fuentes de generación de energía con comportamiento equivalente.

En el aspecto matemático de las leyes de control, se realizó un avance en dos direcciones.

La primera es en la forma en la que se aborda el problema del regulador*. Tradicionalmente, el regulador se suele construir utilizando acciones integrales para que un estado del sistema converja a un valor deseado. Sin embargo, la metodología propuesta en el capítulo 3, indica que bajo la hipótesis de que el modelo sea lo suficientemente bueno, se puede separar la función de control en dos partes $u = \bar{u} + \tilde{u}$. La acción de \bar{u} es fijar el punto de equilibrio en el punto deseado, ya que cumple que $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mu, \bar{u}) = \mathbf{0}$, donde \mathbf{f} es el campo vectorial de estudio, $\bar{\mathbf{x}}$ es el equilibrio deseado, μ los parámetros y \bar{u} el valor del control fijo. Así, el problema de estabilidad se puede analizar como un problema de perturbación, estudiando la dinámica al variar \tilde{u} al rededor del nuevo punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$.

La segunda dirección es en la obtención de la función de Lyapunov para garantizar la estabilidad global del sistema que se estudió.

*El problema del regulador consiste en fijar un punto de equilibrio el cual sea atractor para todos los estados a los que pueda acceder un sistema.

Existen otras topologías de convertidores que se pueden modelar en promedio de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}u + \mathbf{C}$, donde \mathbf{B} tiene valores propios cero o imaginarios puros, a los que se les puede construir una función de Lyapunov con la misma metodología utilizada en los teoremas 1.2.2 y 3.2.1. Algunas de estas topologías son la reductora (Buck) y la elevadora-reductora (Buck-Boost), entre otras. Se propone, en un futuro, poder verificar experimentalmente los cambios de estabilidad al aplicar esta metodología para estos convertidores.

En esta tesis, se lograron obtener algunas caracterizaciones de las funciones de Lyapunov cuando el campo vectorial está multiplicado por una matriz diagonal y hacer que la derivada de la función de Lyapunov no dependan de los parámetros de esta matriz, como es el caso de algunos circuitos eléctricos. Sin embargo, existen otros modelos, como los mecánicos, donde estas matrices no son diagonales, por lo que se puede investigar como proponer la función de Lyapunov en este caso.

El sistema en cascada, fue útil para ilustrar la generalización de los métodos construidos. Sin embargo, no se logró garantizar la estabilidad global utilizando el control por ubicación de polos y la función de Lyapunov construida. Realizando un estudio más meticuloso, se observó que la parte lineal del sistema en cascada no es completamente controlable, a diferencia del sistema de una etapa. Esto sugiere, que la condición de controlabilidad completa es necesaria para poder implementar el control por ubicación de polos en orden superior.

Finalmente, se concluye con que el proceso de modelado y simulación numérica realizados en esta tesis fueron de gran soporte para el diseño de circuitos de potencia. Se espera que estos resultados puedan ser expandidos en un futuro, ya que ofrecen una mejor comprensión de la disciplina y una herramienta útil para la innovación y el progreso de las energías renovables.

Bibliografía

- [1] J. Tao y V. Xue, Grid-Connected Micro Solar Inverter Implement Using a C2000 MCU, 2013.
- [2] M. Bhardwaj y B. Subharmanya. PV Inverter Design Using Solar Explorer Kit, 2013.
- [3] J. Leyva-Ramos; J. M. López-Cruz; M. G. Ortiz-López; L. Humberto Diaz-Saldierna. *Switching regulator using a high step-up voltage converter for fuel-cell modules*. IET Power Electronics, 6, pp. 1626-1633, 2013.
- [4] A. Tobías-González, R. Peña-Gallardo, J. Morales-Saldaña y G. Gutiérrez-Urueta. *Modeling of a wind turbine with a permanent magnet synchronous generator for real time simulations*. IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC), pp.1-6, 2015.
- [5] A. Krama, L. Zellouma y B. Rabhi. *Improved control of shunt active power filter connected to a photovoltaic system using technique of direct power control*. International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC), pp.880-885, 2016.
- [6] H. K. Khalil. Nonlinear systems. Prentice Hall, 3rd. edn., 2001.
- [7] A. Isidori. Nonlinear Control Systems II. London, U.K.: Springer Verlag, 1999.
- [8] R.W. Erickson. Fundamental of Power Electronic. Springer, 1st edn. 1997.
- [9] L. Perko, (2006); *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, New York.
- [10] M. W. Hirsh y S. Smale, (1974); *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice A

Herramientas de Modelado

A.1. Modelo Promediado

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales discontinuas periódicas.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1, & nT \leq t < nT + DT, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2, & nT + DT \leq t < (n+1)T,\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se quiere obtener sólo un sistema de ecuaciones diferenciales que describa el comportamiento de los dos sistemas. Para ello defina como nuevo estado del sistema el promedio de los estados en durante un periodo, es decir

$$\langle \mathbf{x} \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\mathbf{x}} \rangle(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \left[\int_0^{DT} \dot{\mathbf{x}}(t) dt + \int_{DT}^T \dot{\mathbf{x}}(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left[\int_0^{DT} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1) dt + \int_{DT}^T (\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left[\mathbf{A}_1 \int_0^{DT} \mathbf{x}(t) dt + \mathbf{A}_2 \int_{DT}^T \mathbf{x}(t) dt + \mathbf{B}_1 \int_0^{DT} dt + \mathbf{B}_2 \int_{DT}^T dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left[D\mathbf{A}_1 \int_0^T \mathbf{x}(\tau) d\tau + (1-D)\mathbf{A}_2 \int_0^T \mathbf{x}(\tau) d\tau + DT\mathbf{B}_1 + (1-D)T\mathbf{B}_2 \right] \\
&= [D\mathbf{A}_1 + (1-D)\mathbf{A}_2] \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(\tau) d\tau + D\mathbf{B}_1 + (1-D)\mathbf{B}_2 \\
&= \langle \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{x} \rangle(t) + \langle \mathbf{B} \rangle, \tag{A.1}
\end{aligned}$$

donde se uso el cambio de variables $t = D\tau$ para el intervalo $(0, DT)$ y $t = (1-D)\tau + DT$ para el intervalo (DT, T) . Así para obtener un sistema promediado, sólo se requiere calcular

$$\langle \mathbf{A} \rangle = D\mathbf{A}_1 + (1-D)\mathbf{A}_2 \quad y \quad \langle \mathbf{B} \rangle = D\mathbf{B}_1 + (1-D)\mathbf{B}_2.$$

A.2. Producto Tensorial Computacional

En computación los elementos de una matriz ocupan un lugar en la memoria los cuales para acceder a estos, se requieren contadores los cuales se hacen variar por medio de ciclos `for`. La ventaja de la representación abstracta de las matrices en computación es que permiten definir tensores de orden superior y generalizar el producto matricial muy fácilmente. Para entender esto con facilidad, se ejemplificarán los primeros elementos y los demás se construyen de manera inductiva. Para ello considere un tensor de segundo orden que se denotará en los sucesivos como $\mathbf{x}[\][\]$. Este al igual que una matriz, requiere dos índices para conocer el elemento que se encuentra dentro de este. Ahora considere un tensor de primer orden $\mathbf{y}[\]$. Este representa a su vez un vector. Suponiendo que se hace variar un contador j va de 1 a n , se define el producto de estos dos tensores como

$$\mathbf{xy}[i] = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}[j] \mathbf{x}[i][j],$$

el cual es el producto usual de una matriz con un vector siendo su resultado es un vector. Ahora, considere un tensor de tercer orden $\mathbf{x}[\cdot][\cdot][\cdot]$, nuevamente suponiendo que las dimensiones son apropiadas, se puede definir el producto como

$$\mathbf{xy}[i][j] = \sum_{k=1}^n \mathbf{y}[k] \mathbf{x}[i][j][k],$$

cuyo resultado es una matriz. Esto es útil ya que con este producto, se puede definir funciones que vayan de \mathbb{R}^{n^m} a $\mathbb{R}^{n^{m-1}}$, lo cual permite evaluar los términos de orden superior en la serie de Taylor para campos vectoriales. Ahora se procede a definir la derivada computacionalmente, para campos vectoriales.

Se sabe que la derivada de campos vectoriales son funciones que van de \mathbb{R}^n a $\mathbb{R}^{n \times n}$. Así, se puede representar la derivada como un tensor de segundo orden y viene dada por la ecuación

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[i][j] = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j},$$

de la misma forma se puede definir la segunda derivada como

$$D^2\mathbf{f}[i][j][k] = \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}$$

y en general la m-ésima derivada se puede expresar, como

$$D^m \mathbf{f}[i_0][i_1] \dots [i_m] = \frac{\partial^m \mathbf{f}_{i_0}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}.$$

Ahora para calcular los elementos de la serie de Taylor sólo basta realizar el producto tensorial definido de esta derivada con un vector $\mathbf{x}[\cdot]$. Por ejemplo, los términos lineales son

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x}[i] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j} \mathbf{x}[j].$$

Luego, los términos bilineales, se pueden obtener multiplicando el tensor de segundo orden dos veces por el vector $\mathbf{x}[\cdot]$, la primera multiplicación es

$$D^2\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x}[i][j] = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}[k] \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Multiplicando nuevamente por el vector, se tiene que

$$D^2\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x}^2[i] = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}[j] \sum_{k=1}^n \mathbf{x}[k] \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}.$$

En general el m-ésimo término de la serie de Taylor del campo vectorial se puede obtener mediante

$$D^m \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x}^m[i_0] = \sum_{i_1=1}^n \mathbf{x}[i_1] \sum_{i_2=1}^n \mathbf{x}[i_2] \dots \sum_{i_m=1}^n \mathbf{x}[i_m] \frac{\partial^m \mathbf{f}_{i_0}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}.$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice B

Cálculo de Parámetros

B.1. Análisis en DC

Para estudiar el comportamiento de un convertidor, inicialmente se requiere hacer un análisis en DC. Esto con el fin de obtener la respuesta en estado estable y obtener los esfuerzos a los que estarán sometidos los dispositivos. Primero se definen las siguientes cantidades.

Periodo de conmutación (T_s) Es el tiempo que le toma al convertidor hacer un ciclo de conmutación completo. Es decir es cuanto tarda desde que se enciende, se apaga hasta que se vuelve a encender.

Frecuencia de conmutación (f_s) Es la cantidad de ciclos de conmutación que pasan en un segundo. Se calcula por $f_s = 1/T_s$.

Tiempo de encendido(apagado) $t_{on}(t_{off})$ Es el tiempo que se mantiene cerrado(abierto) el conmutador.

Ciclo de trabajo (D) Es la relación del tiempo de encendido con periodo de conmutación. $D = t_{on}/T_s$.

Complemento del ciclo de trabajo (D') Es la relación del tiempo de apagado con el periodo de conmutación $D' = t_{off}/T_s$. Por la construcción del convertidor el periodo de conmutación es la suma del tiempo de encendido y el tiempo de apagado así se tiene la relación

$$T_s = t_{on} + t_{off} = DT_s + D'T_s = T_s(D + D') \Rightarrow D' = 1 - D.$$

También para el análisis en corriente directa se toman estos hechos:

- *Volt-Second Balance.* La corriente promedio en estado estacionario de un inductor durante un ciclo de conmutación es cero.
- *Capacitor Charge Balance.* El voltaje promedio en estado estacionario de un capacitor durante un ciclo de conmutación es cero.

Estos principios se pueden consultar en la referencia [8].

El circuito a analizar es el convertidor elevador (tipo Boost) ideal que se puede observar en la figura B.1.

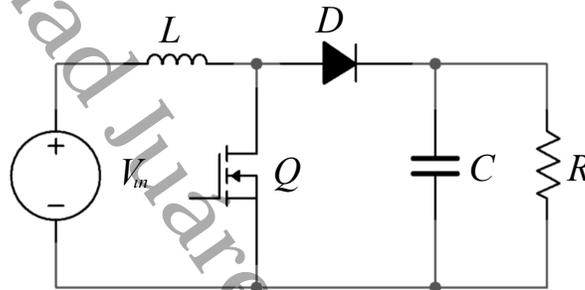
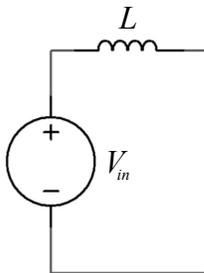


Figura B.1: Convertidor Boost Ideal.

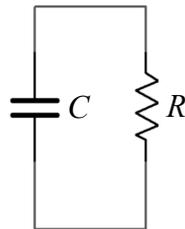
Como se mencionó anteriormente, el interruptor Q se encuentra constantemente encendiendo y apagado; formando los circuitos equivalentes que se muestran en la figura B.2. En el siguiente desarrollo se supondrá que el voltaje del capacitor y la corriente del inductor han llegado a su valor en estado estacionario, es decir, son constantes.

Durante el tiempo de encendido, el circuito cumple

$$\begin{aligned} v_L &= V_{in}, \\ i_C &= -\frac{V_C}{R}. \end{aligned}$$



(a) Interruptor Cerrado.



(b) Interruptor Abierto.

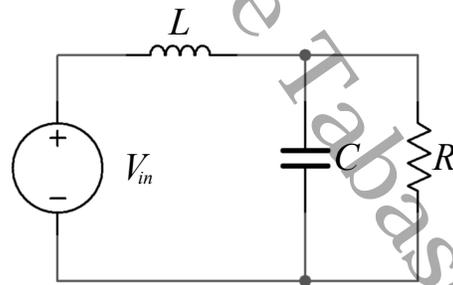


Figura B.2: Circuitos Equivalentes del Convertidor Boost Ideal.

Durante el tiempo de apagado el circuito satisface

$$\begin{aligned}v_L &= V_{in} - V_C, \\i_C &= I_L - \frac{V_C}{R}.\end{aligned}$$

Así usando los hechos anteriores se tiene para el inductor

$$\begin{aligned}I_{L_{prom}} &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{di_L(t)}{dt} dt \\&= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{v_L(t)}{L} dt \\&= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} v_L(t) dt \\&= \frac{1}{T_s} \left(\int_0^{DT_s} V_{in} dt + \int_{DT_s}^{T_s} (V_{in} - V_C) dt \right) \\&= DV_{in} + D'(V_{in} - V_C) \\&= (D + D')V_{in} - D'V_C \\&= V_{in} - D'V_C.\end{aligned}$$

Luego, por el *Volt-Second Balance*, se tiene que la corriente promedio del inductor es cero, por lo tanto

$$V_C = \frac{V_{in}}{D'}. \quad (B.1)$$

Análogamente, para el capacitor

$$\begin{aligned}V_{C_{prom}} &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{dv_C(t)}{dt} dt \\&= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{i_C(t)}{C} dt \\&= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_C(t) dt \\&= \frac{1}{T_s} \left(\int_0^{DT_s} -\frac{V_C}{R} dt + \int_{DT_s}^{T_s} \left(I_L - \frac{V_C}{R} \right) dt \right) \\&= -D\frac{V_C}{R} + D' \left(I_L - \frac{V_C}{R} \right) \\&= -(D + D')\frac{V_C}{R} + D'I_L \\&= -\frac{V_C}{R} + D'I_L.\end{aligned}$$

Ahora por el *Capacitor Charge Balance*, el voltaje promedio de un capacitor es cero, así se tiene que

$$D'I_L = \frac{V_C}{R}. \quad (\text{B.2})$$

Finalmente haciendo uso de (B.1) y (B.2) se llega a

$$P_{out} = \frac{V_{out}^2}{R} = \frac{V_C^2}{R} = V_{in}I_L = V_{in}I_{in} = P_{in}, \quad (\text{B.3})$$

lo cual muestra como la gran eficiencia en el convertidor. En la practica, esta eficiencia es menor a uno. Esto último no se ve en estas ecuaciones debido a que se omitieron todas las pérdidas al momento de modelar el circuito.

B.2. Ecuaciones de Diseño del Convertidor

B.2.1. Cálculo del Inductor

El valor del inductor está ligado directamente con el rizado de corriente que se desea permitir en la entrada del circuito e influye en los esfuerzos (pico) sobre los dispositivos semiconductores.

Su valor puede obtenerse a partir de las ecuaciones durante el tiempo de encendido (véase la figura B.2a). Para este tiempo, se puede integrar la corriente del inductor de cero a DT_s . Como

$$V_{in} = v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (\text{B.4})$$

se tiene que

$$\Delta I_L = \int_{i_L(0)}^{i_L(DT_s)} di_L = \frac{V_{in}}{L} \int_0^{DT_s} dt = \frac{V_{in}DT_s}{L}, \quad (\text{B.5})$$

del cual usando la definición $DT_s = D/f_s$ se despeja L obteniendo así la relación

$$L = \frac{V_{in}D}{\Delta I_L f_s} = \frac{V_{in}D}{(rip\%)I_L f_s}, \quad (\text{B.6})$$

donde I_L es el valor en estado estacionario del inductor y $rip\%$ es el porcentaje permisible de rizo.

B.2.2. Cálculo del Capacitor

El valor de capacitor determina el rizado de tensión en la carga. Es necesario considerar la frecuencia de operación del convertidor. Recuerde que se requieren capacitores para alta frecuencia con baja resistencia serie equivalente (esr). Usualmente esta resistencia es muy pequeña y despreciable en el análisis en CD.

Resolviendo de la ecuación diferencial del capacitor suponiendo que su corriente es constante se tiene que

$$\Delta V_C = \int_{V_C(0)}^{V_C(DT_s)} dv_c = \frac{I_C}{C} \int_0^{DT_s} dt = \frac{DT_s I_C}{C} = \frac{DI_C}{C f_s}.$$

Como en el intervalo de cero a DT_s el capacitor y la carga están en una malla aislada se tiene que $I_C = I_{out}$. Así despejando para C se tiene

$$C = \frac{DI_{out}}{\Delta V_C f_s} = \frac{DI_{out}}{(rip\%)V_C f_s}. \quad (B.7)$$

Como el capacitor está en paralelo con la resistencia de salida se concluye que $V_C = V_{out}$. Utilizando el hecho que la carga es meramente resistiva, se puede reescribir la ecuación anterior usando la ley de Ohm como

$$C = \frac{D}{(rip\%)R f_s}. \quad (B.8)$$

B.2.3. Elección del Transistor

El tipo de transistores se elige dependiendo de la frecuencia de conmutación. Generalmente se utilizan MOSFETs para aplicaciones donde la frecuencia sea mayor a 100Khz e IGBT para menores de a esta. Para elegir el transistor a utilizar se requieren los valores máximos y promedios que soportará el dispositivo.

El transistor que se utilice conducirá la corriente del inductor durante el tiempo de encendido

Para la selección del transistor es necesario conocer a que esfuerzos está sometido, corriente promedio, valor pico de corriente y valor máximo de tensión que debe soportar.

Para calcular la corriente promedio del transistor observe que esta corriente es la misma que la del inductor durante el tiempo de encendido y cero cuando está apagado. También note que la corriente del inductor es la misma que la corriente de entrada entregada por la fuente de voltaje, donde esta última se considera en promedio constante. Así se puede escribir que

$$I_{Q_{prom}} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_Q(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} i_L(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{DT_s} I_{in} dt = DI_{in}.$$

Luego, bajo el supuesto que la eficiencia es del 100% y del hecho que el voltaje de salida cumple que $V_{out} = V_{in}/D'$ se tiene

$$V_{in} I_{in} = V_{out} I_{out} = \frac{V_{in} I_{out}}{D'} \Rightarrow I_{in} = \frac{I_{out}}{D'}.$$

Por consiguiente, se pueden concluir de estas ecuaciones que

$$I_{Q_{prom}} = \frac{DI_{out}}{D'} = \frac{DP_{out}}{D'V_{out}}, \quad (B.9)$$

donde se usa la definición de potencia en la salida para obtener esta igualdad.

Otra cantidad importante a calcular es la corriente pico del transistor. Esta cantidad indica el valor máximo de corriente que pasa por el dispositivo durante operación..

En particular sólo pasa corriente por el transistor en el primer intervalo de tiempo y, cómo este se encuentra en serie con el inductor, soporta la corriente promedio de entrada mas el rizo generado por el inductor. Ya que la bobina se encuentra constantemente en carga y descarga. Esto se puede ver en la figura B.3. La pendiente de la recta ascendente se puede calcular directamente de la definición de la corriente del inductor. Es decir

$$m = \frac{\Delta i_L}{\Delta t} = \frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_{in}}{L} = \frac{D'V_{out}}{L},$$

donde se usa el hecho de que el inductor y la fuente de entrada se encuentran en paralelo y también que el convertidor está manejando una eficiencia igual a la unidad.

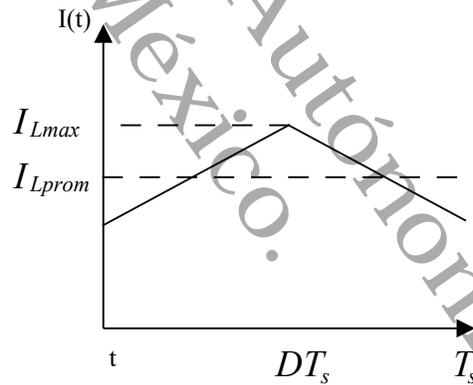


Figura B.3: Forma de Onda de la Corriente del Inductor.

Por consiguiente gráficamente se observa que

$$i_{pkQ} = \max_{t \in T_s} i_L = I_{in} + m \left(\frac{DT_s}{2} \right) = \frac{I_{out}}{D'} + \frac{DD'V_{out}}{2Lf_s}. \quad (B.10)$$

Por último, la tensión máxima que debe soportar el transistor es durante el tiempo de apagado y como en este tiempo el transistor se encuentra en paralelo con la carga se concluye que

$$V_Q = V_{out}. \quad (B.11)$$

B.2.4. Elección del Diodo

Debido a la alta frecuencia de operación, es necesario utilizar diodos de conmutación rápida (*fast recovery* o *ultra-fast recovery*). Del sistema equivalente se concluye que el diodo conduce la corriente del inductor durante el tiempo de apagado.

Para la selección del diodo es necesario conocer los esfuerzos a los que está sometido: valor promedio, pico de corriente y tensión máxima inversa.

La corriente promedio se calcula a partir de la definición y del hecho que esta es la misma que la corriente del inductor durante $D'T_s$ así

$$I_D = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_D(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} i_L(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_{DT_s}^{T_s} I_{in} dt = D'I_{in} = I_{out}. \quad (\text{B.12})$$

Por otra parte cuando se hace el cambio de conmutación donde el transistor se apaga y el diodo empieza a conducir, la corriente máxima que pasa por diodo es la misma que la que pasó por el transistor. Por lo tanto

$$i_{pkD} = i_{pkQ} = \frac{I_{out}}{D'} + \frac{DD'V_{out}}{2Lf_s}. \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, el esfuerzo máximo de tensión en el diodo durante el instante en que se encuentra apagado se observa de la diferencia de voltaje durante DT_s . Es decir

$$V_D = V_{out}. \quad (\text{B.14})$$

B.3. Diseño del Inductor

Asuma la siguiente geometría del inductor

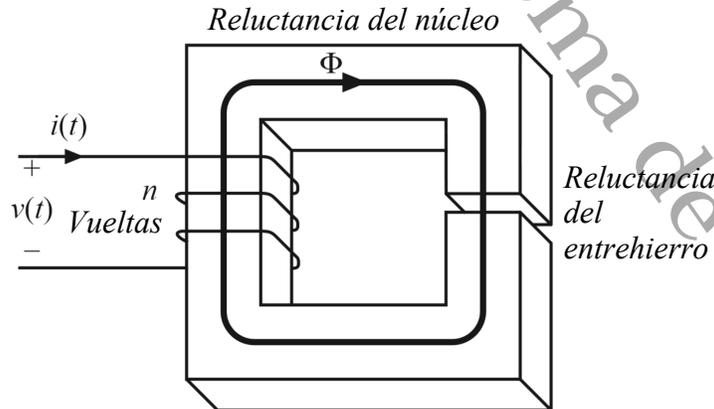


Figura B.4: Geometría del Núcleo.

Así se tiene que

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_c A_c} \quad \mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_c}.$$

Resuelve el circuito magnético

$$ni = \Phi(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g),$$

donde \mathcal{R}_c es la reluctancia del núcleo y \mathcal{R}_g es la reluctancia del entrehierro. Usualmente $\mathcal{R}_c \ll \mathcal{R}_g$ y entonces $ni \approx \Phi\mathcal{R}_g$

Dado una corriente pico del embobinado I_{max} , es deseado operar con una densidad de flujo magnético del núcleo pico de valor B_{max} . El valor de B_{max} se escoge para ser menor que, en el peor de los casos, la densidad de flujo de saturación B_{sat} del material con el que esta hecho el núcleo.

De la solución del circuito magnético

$$ni = BA_C\mathcal{R}_g. \quad (\text{B.15})$$

Sea $I = I_{max}$ y $B = B_{max}$, así

$$nI_{max} = B_{max}A_C\mathcal{R}_g = B_{max}\frac{l_g}{\mu_0}. \quad (\text{B.16})$$

Esta es la primera restricción. El número de vueltas n y la longitud del gap de aire l_g son desconocidos.

Se debe poder obtener la inductancia deseada L . Se sabe que la inductancia cumple

$$L = \frac{n^2}{\mathcal{R}_g} = \frac{\mu_0 A_C n^2}{l_g}. \quad (\text{B.17})$$

Esta es la segunda restricción. El número de vueltas n , el área del núcleo A_C y la longitud del gap de aire l_g son desconocidas.

Luego, el alambre debe entrar en la ventana del núcleo (i.e., el agujero en el centro del núcleo).

El área total cubierta de la ventana es nA_w donde A_w es el área transversal del alambre de cobre.

El área disponible para embobinar el alambre conductor es $K_u W_a$ donde W_a es el área de la ventana. así se obtiene la tercera restricción

$$K_u W_a \geq nA_w. \quad (\text{B.18})$$

K_u es el porcentaje del área de la ventana del núcleo que es llenada por cobre.

Algunas causas por las cuales K_u es menor que uno son:

- El alambre redondeada no se compacta perfectamente, lo cual reduce K_u por un factor de 0.7 a 0.55 dependiendo de la técnica de embobinando.
- El aislante reduce K_u por un factor de 0.95 a 0.65, dependiendo del calibre del alambre y del aislante.

- Puede ser requerido aislamiento adicional en el devanado.

Valores típicos de K_u son

0.5 para un inductor sencillo de bajo voltaje.

0.25 a 0.3 para un transformador fuera de línea

0.05 a 0.2 para un transformador de alto voltaje (varios kV)

0.65 para un inductor de bobina plana de baja tensión.

La resistencia del devanado es

$$R = \rho \frac{l_b}{A_w},$$

donde ρ es la resistividad del material conductor, l_b es la longitud del alambre, A_w es el área transversal del alambre. La resistividad del cobre a temperatura ambiente es aproximadamente $1.724 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$. La longitud del cable que abarca n – vueltas de devanado puede expresarse como

$$l_b = n(MLT),$$

donde (MLT) es la longitud por vuelta promedio del embobinado (mean-length-per-turn en inglés). El (MLT) es una función de la geometría del núcleo. Las ecuaciones anteriores pueden combinarse y obtener la cuarta restricción

$$R = \rho \frac{n(MLT)}{A_w}. \quad (\text{B.19})$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice C

Aspectos Computacionales

C.1. Código Implementado en Matlab

A continuación se muestra el código dentro del bloque de la función `s`, con el que se hicieron las simulaciones.

```
1 function [sys,x0,str,ts] = BoostCeldaLineal(t,x,u,flag)
2
3 %PARAMETERS
4 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
5 Isc=6; Voc=24; Rf=Voc/Isc; Pin=Isc*Voc;
6 Cf=100e-06; L=0.65e-03; C=1.42e-6;
7 Pout=Pin/4; Vout=64;
8 R=Vout^2/Pout;
9
10 %CONTROL GAINS
11 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
12 k1=0.000252549;
13 k2=0.414126;
14 k3=-0.0159656;
15 k=[k1,k2,k3];
16 k0=0.5*(Voc/Vout)*(1+sqrt(1-4*Pout/Pin));
17
18 %SWITCHING FREQ
19 ////////////////////////////////////////////////////////////////////
20 fs=100e03;
21
22 %MATRICES//////////////////////////////////////////////////////////////////
23 Ap=[-1/(Rf*Cf), -1/Cf, 0;
24      1/L, 0, 0;
25      0, 0, -1/(R*C)];
```

```

23
24 Bp=[0, 0, 0;
25     0, 0, -1/L;
26     0, 1/C, 0];
27
28 Cp=[Isc/Cf; 0; 0];
29
30 Xbar=linsolve(Ap+k0*Bp,-Cp);
31
32
33 %=====
34 switch flag
35     case 0
36         [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(fs,Isc,Rf,Cf,L,C,R,k0,k
37             ); % Initialization
38     case 1
39         sys = mdlDerivatives(t,x,u,fs,Isc,Rf,Cf,L,C,R,k0,k); %
40             Calculate derivatives
39     case 3
40         sys = mdlOutputs(t,x,u,fs,Isc,Rf,Cf,L,C,R,k0,k); %
41             Calculate outputs
41     case { 2, 4, 9 } % Unused flags
42         sys = [];
43     otherwise
44         error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]); % Error
45             handling
45 end
46 %=====
47 function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes(fs,Isc,Rf,Cf,L,
48     C,R,Vcf,I1,Vc,k0,k);
49 sizes = simsizes;
50 sizes.NumContStates = 3;
51 sizes.NumDiscStates = 0;
52 sizes.NumOutputs = 5;
53 sizes.NumInputs = 0;
54 sizes.DirFeedthrough = 0; % Matrix D is nonempty.
55 sizes.NumSampleTimes = 1;
56 sys = simsizes(sizes);
57 % Initialize the initial conditions.
58 x0=[0 0 0]';
59 % str is an empty matrix.

```

```

60 str = [];
61 % Initialize the array of sample times; in this example the
    % sample
62 % time is continuous, so set ts to 0 and its offset to 0.
63
64 ts = [0 0];
65 %=====
66 function sys = mdlDerivatives(t,x,u,fs,Isc,Rf,Cf,L,C,R,k0,k);
67 % Sawtooth function definition
68 saw=fs*mod(t,1/fs);
69 % Control law definition
70 % ref=k0; % Open Loop
71 % s=R*k0*x(2)-x(3);
72 % ref=k0+((1/2)*(1-abs(1-2*k0))-eps)*sign(s); % Sliding mode
    % based control
73 ref=k0+k(1)*x(1)+k(2)*x(2)+k(3)*x(3); % Pole placement based
    % control
74 % Comparison between sawtooth and control function
75 ui=(sign(saw-ref)+1)/2;
76 % Differential equations definition
77 sys(1)=(Isc-x(2)-x(1)/Rf)/Cf;
78 sys(2)=(x(1)-x(3)*(1-ui))/L;
79 sys(3)=(x(2)*(1-ui)-x(3)/R)/C;
80 %=====
81 function sys = mdlOutputs(t,x,u,fs,Isc,Rf,Cf,L,C,R,k0,k);
82 % Sawtooth function definition
83 saw=fs*mod(t,1/fs);
84 % Control law definition
85 % ref=k0; % Open Loop
86 % s=R*k0*x(2)-x(3);
87 % ref=k0+((1/2)*(1-abs(1-2*k0))-eps)*sign(s); % Sliding mode
    % based control
88 ref=k0+k(1)*x(1)+k(2)*x(2)+k(3)*x(3); % Pole placement based
    % control
89 % Comparison between sawtooth and control function
90 ui=(sign(saw-ref)+1)/2;
91 % Simulink outputs
92 sys = [x;ref;saw];
93
94 %           END           %

```