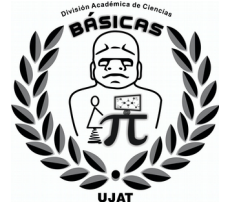




UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



ÍNDICE DE CONLEY Y SISTEMAS HAMILTONIANOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

YESENIA ZAPATA GÓMEZ

DIRECTORES

DR. JAIR REMIGIO JUÁREZ

DR. MIGUEL ÁNGEL DE LA ROSA CASTILLO

Cunduacán, Tab.

Marzo 2021



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

18 de marzo de 2021

**LIC. YESENIA ZAPATA GÓMEZ
PASANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
P R E S E N T E.**

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**ÍNDICE DE CONLEY Y SISTEMAS HAMILTONIANOS**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR**



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DR'GDP/M'NLBA

C.c.p.- Archivo.

Miembro CUMEX desde 2008



UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.

Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "INDICE DE CONLEY Y SISTEMAS HAMILTONIANOS", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 20 días del mes de Marzo de 2021.

Autorizó



Yesenia Zapata Gómez
182A21001

Agradecimientos

Agradezco a mis asesores de tesis, el Dr. Jair Remigio Juárez y el Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo, por su invaluable apoyo, sus consejos y el tiempo dedicado para hacer posible este trabajo. Agradezco también la amistad que me han brindado durante estos años.

De igual manera le agradezco al comité de revisores por el tiempo dedicado a la revisión para mejorar este trabajo.

A la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y a todos mis profesores por la formación académica que me han brindado. También agradezco el apoyo económico recibido por CONACYT durante estos años.

A mi compañero y amigo Jorge, agradezco tu contribución al inicio de este trabajo y por tu apoyo incondicional.

Por último doy las gracias a mi querido esposo, por ser mi motivación de todos los días. Tienes mi admiración y todo mi amor.

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. Resultados básicos de dinámica	3
Dinámica no lineal	3
Teorema de la variedad estable	8
Teorema de Hartman-Grobman	10
1.2. Sistemas Hamiltonianos y gradientes	11
Sistemas Hamiltonianos	12
Sistemas Gradiente	13
1.3. Resultados básicos de topología	14
1.4. Teoría de Morse	16
Variedades suaves	17
Funciones de Morse	18
2. Homología cúbica	23
2.1. Homología cúbica	23
Conjuntos cúbicos	23
Cadenas cúbicas	25
Operador frontera	27
Homología de conjuntos cúbicos	29
2.2. Homología relativa	30
2.3. Sucesiones exactas	31
3. Índice de Conley y sistemas dinámicos continuos	34
3.1. Principio de Ważewski	34
3.2. Índice de Conley	38

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
4. Índice de Conley y aplicaciones	42
4.1. Índice de Conley y descomposición de Morse	42
4.2. Índice de Conley y Sistemas Hamiltonianos	43
4.3. Aplicaciones a la dinámica continua	45
Bibliografía	49

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Introducción

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una de las ramas antiguas de las matemáticas, su estudio se remonta a los tiempos de la creación del cálculo diferencial, justo en los tiempos de Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Por otro lado, la topología algebraica es otra rama de las matemáticas que surge a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, principalmente impulsada por Henry Poincaré.

En este trabajo se pretende ver cómo ambas áreas de las matemáticas pueden interactuar, mediante una aplicación de la teoría de la homología, específicamente del índice de Conley, a sistemas Hamiltonianos.

Nos enfocaremos a los sistemas dinámicos continuos, en particular en flujos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en dichos sistemas, vamos a analizar bajo qué condiciones existen soluciones contenidas (para todo tiempo positivo) en regiones no necesariamente invariantes.

Con este fin, iniciaremos este estudio en el capítulo 1, donde abordaremos conceptos preliminares sobre dinámica continua y resultados básicos de topología.

Luego, en el capítulo 2, la teoría de homología será el objeto de estudio, la cuál consiste principalmente en analizar la relación de estructuras topológicas de espacios, a través de conjuntos llamados cubos que son el análogo a los simplejos usados en homología simplicial; las técnicas que se usan son paralelas a las conocidas en topología algebraica tradicional, usaremos la homología cúbica para proporcionar, en los siguientes capítulos, resultados de interés en el área de sistemas dinámicos, describiremos dos invariantes topológicos con los que podemos garantizar la existencia de soluciones contenidas en un conjunto no necesariamente invariante, asociadas a un flujo continuo definido sobre un espacio topológico.

Una vez desarrollada la homología, en el capítulo 3, daremos lugar a la noción de conjunto de Ważewski, y con ello el principio del mismo

nombre. Este tipo de conjuntos no necesariamente son invariantes, y sin embargo, podemos bajo ciertas condiciones, garantizar en ellos la existencia de soluciones no triviales y para probar dicha existencia haremos uso de las herramientas topológicas mencionadas anteriormente. El teorema de Ważewski es el primer invariante topológico a describir.

El segundo invariante de carácter topológico es el índice de Conley de un conjunto invariante aislado de un sistema dinámico, será también ilustrado en el capítulo 3 y que a diferencia del principio de Ważewski éste se comporta bien bajo deformaciones. En tal capítulo precisaremos algunas ideas, y los resultados principales se ilustran a base de ejemplos en ecuaciones diferenciales ordinarias. Este concepto fue introducido por Charles Conley alrededor de 1978.

Finalmente, en el capítulo 4, mostraremos cómo se comporta el índice de Conley en funciones de Morse y en conjuntos invariantes aislados. Además se probará que en el caso de los sistemas Hamiltonianos, el hecho de que para un punto crítico aislado no degenerado exista un valor de bifurcación, implica la existencia de una vecindad que contiene otro punto de equilibrio.

A lo largo de este capítulo se verán conceptos sobre dos ramas de las matemáticas, iniciaremos con resultados de sistemas dinámicos asociados a flujos continuos desde lo que es un sistema de ecuaciones diferenciales hasta el teorema de Hartman-Grobman. Luego, en la sección que sigue definiremos lo que es un sistema Hamiltoniano y un sistema gradiente así como también se verán propiedades relacionadas con estos dos sistemas. En las últimas dos secciones ya no se hablará de dinámica, sino de topología empezando con variedades y funciones de Morse y con resultados básicos de topología.

Todos estos preliminares nos serán de gran ayuda, tanto para definir el índice de Conley, como para mostrar algunas de sus aplicaciones.

1.1. Resultados básicos de dinámica

Dinámica no lineal

Es bien sabido que cualquier sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax$$

tiene una única solución. En esta sección estudiaremos las ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Veremos que bajo ciertas condiciones de la función f , el sistema no lineal tiene una única solución. Esta sección está basada en [4] y [8].

Definición 1.1.1. Sea $f \in \mathcal{C}(E)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $C(E)$ es el conjunto de funciones continuamente diferenciables. Decimos que $x(t)$ es **una solución de la ecuación diferencial** $\dot{x} = f(x)$ sobre un intervalo I , si para todo $t \in I$, $x(t) \in E$, $x(t)$ es diferenciable sobre I y

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Dado $x_0 \in E$, decimos que $x(t)$ es **una solución del problema de valor inicial**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

sobre un intervalo I , si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ y $x(t_0)$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ sobre el intervalo I .

El siguiente teorema garantiza la existencia y solución de una ecuación diferencial para sistemas no lineales.

Teorema 1.1.2. (Teorema fundamental de existencia y unicidad). Sea $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Entonces existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución $x(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$.

Teorema 1.1.3. (Dependencia a condiciones iniciales). Sea $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Entonces existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= y \end{aligned}$$

tiene una única solución $u(t, y)$ con $u \in \mathcal{C}^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; más aún, para cada $y \in N_\delta(x_0)$, $u(t, y)$ es una función de t dos veces continuamente diferenciable para $t \in [-a, a]$.

Teorema 1.1.4. (Dependencia sobre parámetros). Sea $(x_0, \mu_0) \in E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$; y $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Entonces existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ y $\mu \in N_\delta(\mu_0)$, el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \mu) \\ x(0) &= y\end{aligned}$$

tiene una única solución $u(t, y, \mu)$ con $u \in \mathcal{C}^1(G)$, donde $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$.

Definición 1.1.5. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

definido sobre su intervalo maximal de existencia $I(x_0)$. Entonces para $t \in I(x_0)$, el conjunto de funciones definidas por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

es llamado **el flujo definido por la ecuación diferencial** $\dot{x} = f(x)$.

Definición 1.1.6. El **retrato fase** de un sistema de ecuaciones diferenciales es el conjunto de todas las curvas solución del sistema.

Las siguientes definiciones tienen que ver con el flujo de una ecuación diferencial y se usarán en el capítulo 3.

Definición 1.1.7. Sea $x \in X$. Se tienen los conjuntos (para x bajo φ):
 α -límite:

$$\alpha(x, \varphi) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{(\varphi(-\infty, t), x)};$$

ω -límite:

$$\omega(x, \varphi) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(\varphi[t, \infty), x)}.$$

Proposición 1.1.8. Si X es un conjunto compacto, entonces para cualquier $x \in X$ los conjuntos $\alpha(x, \varphi)$ y $\omega(x, \varphi)$ son no-vacíos, compactos e invariantes.

Teorema 1.1.9. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Sea $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\phi_t(x_0))$. Entonces para todo $x_0 \in E$ se sigue que $s+t \in I(x_0)$ y

$$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0)).$$

Definición 1.1.10. Consideremos un subconjunto abierto E de \mathbb{R}^n , una función $f \in \mathcal{C}^1(E)$ y el flujo $\phi_t : E \rightarrow E$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Un conjunto $S \subset E$ es **invariante** con respecto al flujo ϕ_t , si $\phi_t(S) \subset S, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.11. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de equilibrio** del sistema $\dot{x} = f(x)$, si $f(x) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es un punto de equilibrio **hiperbólico** del sistema $\dot{x} = f(x)$, si ninguno de los eigenvalores de la matriz $Df(x)$ tienen parte real cero. El sistema lineal $\dot{x} = Ax$ con la matriz $A = Df(x_0)$ es la **linealización** de $\dot{x} = f(x)$ en x_0 .

Ahora bien, si tenemos un punto de equilibrio x_0 de $\dot{x} = f(x)$ y $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo de dicha ecuación diferencial, entonces $\phi_t(x_0) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ y decimos que x_0 es un **punto de equilibrio** del flujo ϕ_t .

Ejemplo 1.1.12. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^3 - \alpha y, \quad \alpha \neq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En este sistema, $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio. La linealización en el punto de equilibrio es

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

que como podemos observar se trata de un punto de equilibrio hiperbólico cuando $\alpha \neq 0$ (Ver figura 1.1).

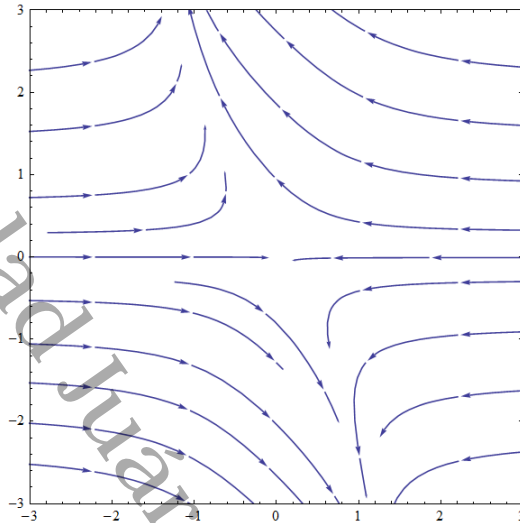


Figura 1.1: Retrato fase del sistema 1.1

En la siguiente definición daremos la clasificación de los puntos de equilibrio.

Definición 1.1.13. Un punto de equilibrio x_0 del sistema $\dot{x} = f(x)$ es llamado un **pozo**, si todos los eigenvalores de $Df(x_0)$ tienen parte real negativa; es llamado una **fuelle**, si todos los eigenvalores de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva; y es llamado una **silla**, si es un punto de equilibrio hiperbólico y $Df(x)$ tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.

Ejemplo 1.1.14. A continuación clasificaremos todos los puntos de equilibrio del sistema no lineal siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Los únicos puntos de equilibrio del sistema son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

La derivada

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ -2x_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Df(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, Df(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es una fuente, mientras que $(1,1)$ y $(-1,1)$ son silla (Ver figura 1.2).

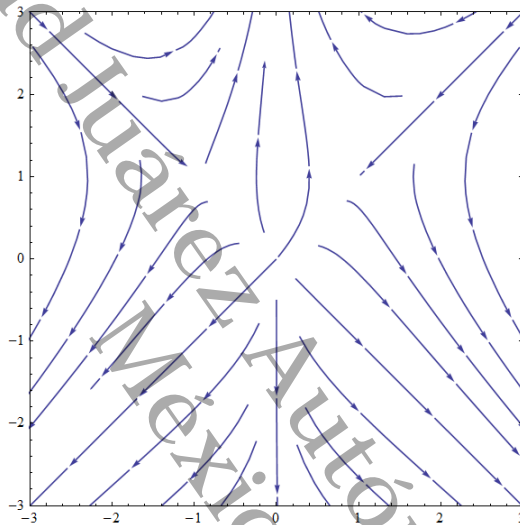


Figura 1.2: Retrato fase del sistema 4.2

Teorema de la variedad estable

En esta sección veremos uno de los resultados más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Antes de enunciar dicho teorema consideremos lo siguiente.

Sea A una matriz de $n \times n$ que tiene k eigenvalores negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y $n-k$ eigenvalores positivos $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ y que estos eigenvalores son distintos. Sean v_1, \dots, v_n el correspondiente conjunto de eigenvectores. Entonces los subespacio estable e inestable del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, E^s y E^u , son los subespacios lineales generados por v_1, \dots, v_k y v_{k+1}, \dots, v_n respectivamente (Ver figura 1.3), es decir,

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}, \\ E^u &= \text{Span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.15. (Teorema de la variedad estable) Consideremos a E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, y ϕ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Supongamos que $f(0) = 0$ y $Df(x)$ tiene k eigenvalores con parte real negativa y $n - k$ con parte real positiva. Entonces existe una k -variedad diferenciable S tangente al subespacio estable E^s del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

y además existe una $n - k$ -variedad diferenciable U que es tangente al subespacio inestable E^u de $\dot{x} = Ax$ en 0 para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$ tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

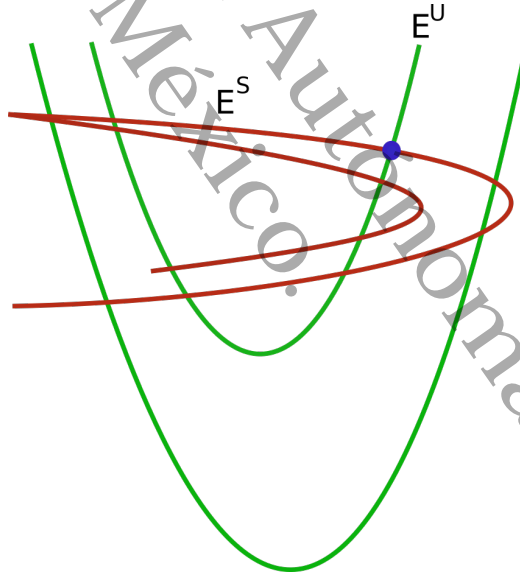


Figura 1.3: Ejemplo de un subespacio estable e inestable.

Teorema 1.1.16. (Teorema de la variedad central) Sea $f \in \mathcal{C}^r(E)$ con E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen y $r \geq 1$. Supongamos que $f(0) = 0$ y $Df(0)$ tiene k eigenvalores con parte real negativa, j eigenvalores con parte real positiva, y $m = n - k - j$ eigenvalores con parte real cero.

Entonces existe una variedad central de dimensión m denotada $W^c(0)$, que es tangente al subespacio central E^c de $\dot{x} = Ax$ en 0 , existe una variedad $W^s(0)$ de dimensión k , tangente al subespacio estable E^s de $\dot{x} = Ax$ en 0 y existe una variedad $W^u(0)$ de dimensión j , tangente al subespacio inestable E^u de $\dot{x} = Ax$ en 0 . Más aún, $W^c(0)$, $W^s(0)$ y W^u son invariantes bajo el flujo ϕ_t de $\dot{x} = f(x)$.

Teorema de Hartman-Grobman

Otro teorema de gran importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales es el teorema de Hartman-Grobman el cual nos dice, en resumen, que alrededor de un punto hiperbólico x_0 , el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ tiene la misma estructura que el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, es decir que dichos sistemas son topológicamente conjugados. Esta sección está dedicada a enunciar este teorema.

Para ello, iniciaremos definiendo cuando dos sistemas son topológicamente equivalentes

Definición 1.1.17. Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{y} = g(y)$ son **topológicamente equivalentes** en una vecindad del origen, si existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, donde U y V son abiertos que contienen al origen. Este homeomorfismo H mapea trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ en U a trayectorias de $\dot{y} = g(y)$ en V y preserva la orientación, es decir, si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U , entonces su imagen bajo H se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si H preserva la orientación con respecto al tiempo se dice que $\dot{x} = f(x)$ es **topológicamente conjugado** a $\dot{y} = g(y)$ en una vecindad del origen, es decir,

$$\varphi_t(H(x)) = H(\phi_t(x)).$$

Ahora estamos listos para enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.18. (De Hartman-Grobman)

Consideremos un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, $f \in \mathcal{C}^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene eigenvalores con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ donde U y V son abiertos y ambos contienen al origen, tales que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$ se tiene que

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

Lo anterior significa que el homeomorfismo H manda trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ a trayectorias de $\dot{x} = Ax$ ambas cerca del origen y además preserva parametrización con respecto al tiempo. Es decir, el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ es topológicamente conjugado al sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde $A = Df(x)$ (Ver figura 1.4).

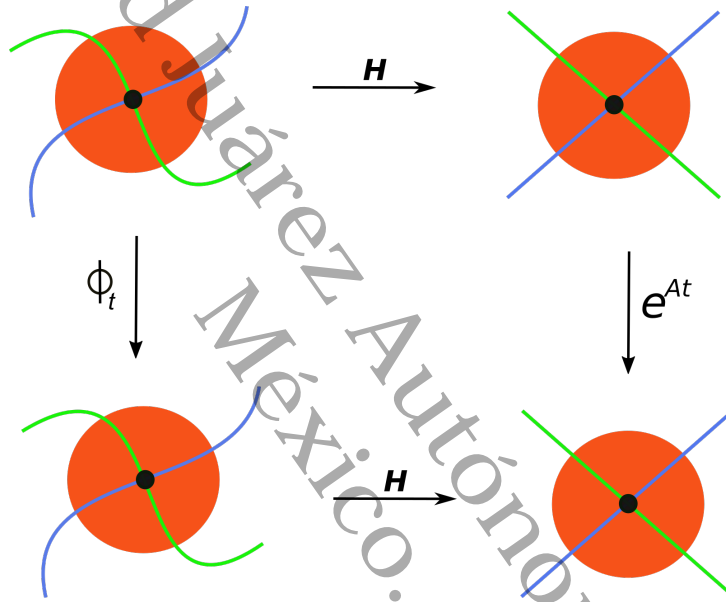


Figura 1.4: $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$.

1.2. Sistemas Hamiltonianos y gradientes

En dinámica, con frecuencia se requiere analizar las propiedades de los puntos singulares de un Hamiltoniano que depende de algunos parámetros.

Sistemas Hamiltonianos

Definición 1.2.1. Dado un abierto $E \subset \mathbb{R}^{2n}$, un **sistema Hamiltoniano** es el sistema dinámico asociado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, y $H \in C^2(E)$

El siguiente es un ejemplo de un sistema Hamiltoniano

Ejemplo 1.2.2. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 2\alpha x - 4x^3,\end{aligned}$$

donde $\alpha \in [-1, 1]$.

Un Hamiltoniano para este sistema es la función

$$H(x, y, \alpha) = -\alpha x^2 + x^4 + y^2$$

En la figura 1.5 se muestra el retrato fase del sistema cuando $\alpha = 1$.

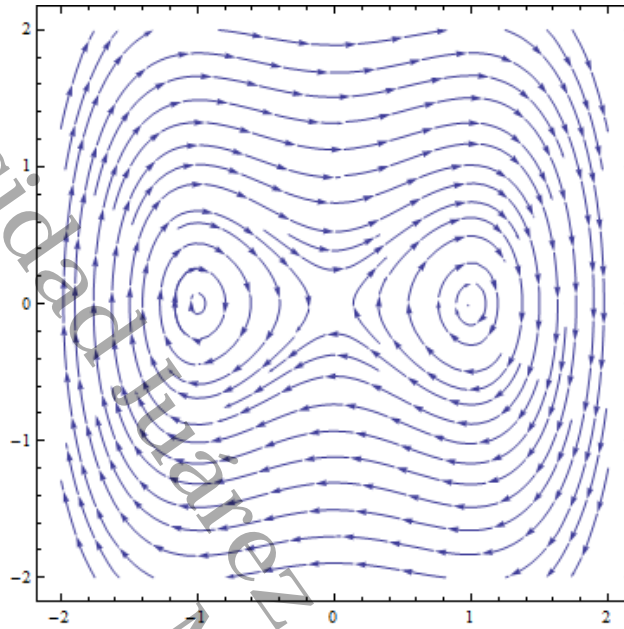


Figura 1.5: Retrato fase para $\dot{x} = 2y$, $\dot{y} = 2\alpha x - 4x^3$.

En este tipo de sistemas los puntos de equilibrio, corresponden a los puntos críticos de la función $H(x, y)$.

Sistemas Gradiente

Definición 1.2.3. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $V \in C^2(E)$. Un **sistema gradiente** es el sistema dinámico asociado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

Ejemplo 1.2.4. Consideremos la función

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2.$$

En este ejemplo, el sistema gradiente es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x(x - 1)(2x - 1) \\ \dot{y} &= -2y, \end{aligned}$$

El retrato fase del sistema se muestra en la figura 1.6.

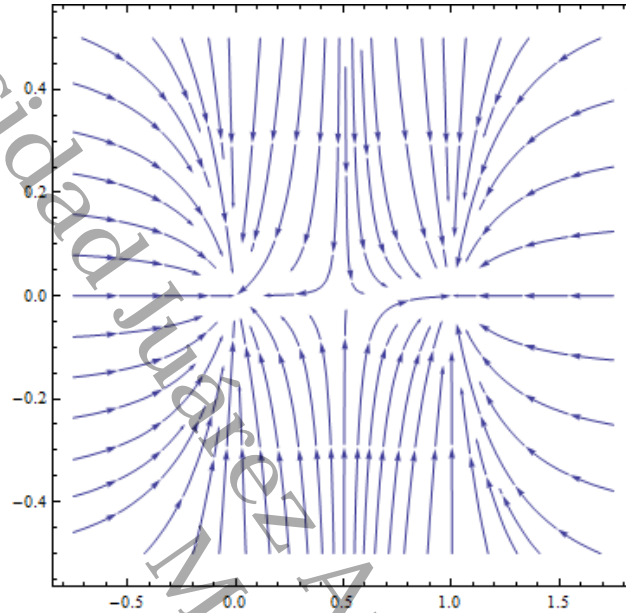


Figura 1.6: Retrato fase para $\dot{x} = -2x(x-1)(2x-1)$, $\dot{y} = -2y$.

Este sistema tiene tres puntos de equilibrio que son: $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(1,0)$; y la linealización del sistema da como resultados las siguientes matrices: $Df(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $Df(\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $Df(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En este caso, los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ son puntos de equilibrio tipo pozo y $(\frac{1}{2},0)$ es tipo silla. El eje x y el eje y ambos son invariantes, así como las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$.

Los puntos de equilibrio del sistema gradiente, corresponden a los puntos críticos de la función $V(x)$.

1.3. Resultados básicos de topología

Para definir el índice de Conley necesitamos los siguientes conceptos de topología.

Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Tenemos una relación de equivalencia que está dada por $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ o $x, y \in Y$. El **espacio**

cociente se define como

$$X/Y = \{[x] | x \in X\}.$$

El **mapeo cociente** está dado por

$$\begin{aligned} p : X &\rightarrow X/Y. \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

El espacio $\frac{X}{Y}$ tiene la topología inducida por p , en particular, p es continua.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos $X = [0, 1], Y = \{0\} \cup \{1\}$, entonces X/Y es homeomorfo a S^1 (ver figura 1.7).

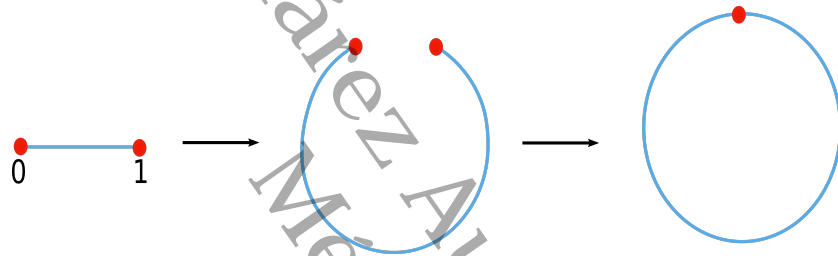


Figura 1.7: Ejemplo de un espacio X/Y

Ejemplo 1.3.2. Ahora, consideremos a X como el disco cerrado y a Y como la frontera de este disco, es decir, $Y = S^1, X = D^2$, entonces X/Y es homeomorfo a S^2 (ver figura 1.8).

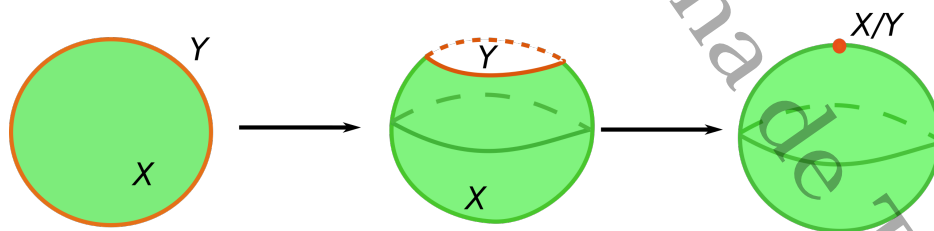


Figura 1.8: Ejemplo de un espacio X/Y

Dos espacios topológicos X_1 y X_2 son llamados **homotópicamente equivalentes**, denotado $X_1 \sim X_2$, si existen dos mapeos $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $g : X_2 \rightarrow X_1$, tales que $f \circ g : X_2 \rightarrow X_2$ es homotópico a la función identidad Id_{X_2} y $g \circ f : X_1 \rightarrow X_1$ es homotópico a la función identidad Id_{X_1} .

Que dos espacios topológicos X_1 y X_2 sean homotópicamente equivalentes, puede ser interpretado como que podemos deformar uno en el otro.

Ejemplo 1.3.3. Una bola es homotópicamente equivalente a un punto $p \in \mathbb{R}^n$ (Ver figura 1.9).

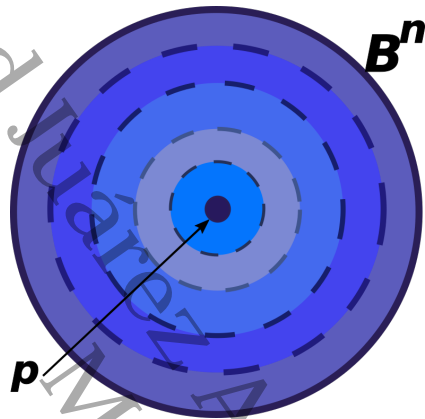


Figura 1.9: Ejemplo equivalencia homotópica

Definición 1.3.4. Un subconjunto A de un espacio topológico es un **retracto** de X si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = Id_A$, donde $i : A \rightarrow X$ es la función inclusión. La función r es llamada una retracción .

Definición 1.3.5. Decimos que $A \subset X$ es un **retracto fuerte por deformación** si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq Id_X$ (rel A).

1.4. Teoría de Morse

En esta sección presentaremos lo que se conoce como el índice de Morse ya que se pretende conectar la topología y los sistemas dinámicos de las cuáles se ha hecho mención en secciones anteriores. Omitimos las pruebas en varios resultados pero éstas pueden ser consultadas en [2] y [7].

Variedades suaves

Definición 1.4.1. Una m -variedad suave es un conjunto M junto con una colección $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}$, donde cada $U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y se satisfacen las siguientes condiciones

1. $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) := V_\alpha$ es un homeomorfismo, $\forall \alpha \in J$.
2. Si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces

$$\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \phi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

es una función suave. Por simplicidad, escribimos $\Theta_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$.

3. $M = \bigcup_{\alpha \in J} \phi(U_\alpha)$.

A los conjuntos U_α le llamamos cartas y a la función $\Theta_{\alpha\beta}$ le llamamos mapeo de transición (Ver figura 1.10 y 1.11).

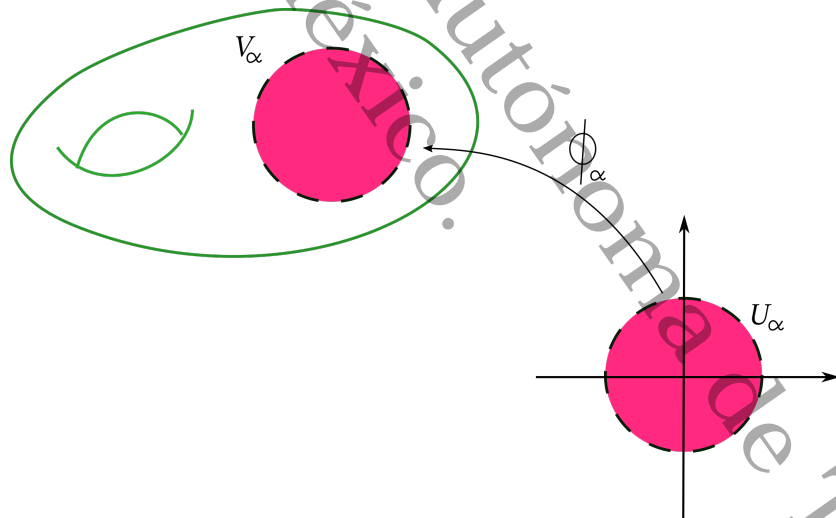


Figura 1.10: Cartas coordenadas

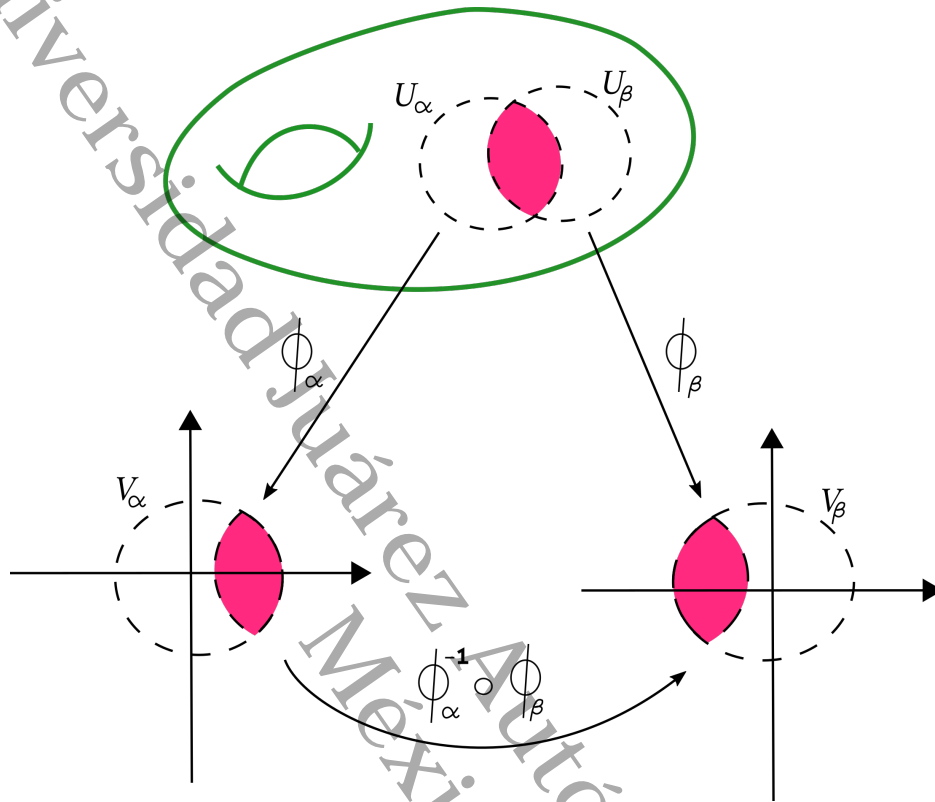


Figura 1.11: Mapeo de cambio de coordenadas

Definición 1.4.2. Sea $f : M \rightarrow N$ una función, donde M es m -variedad y N es n -variedad. Decimos que f es **diferenciable** si para cada $p \in M$ existe una parametrización local $\phi : U \rightarrow V$ para M con $p \in V$ y una parametrización local $\psi : U' \rightarrow V'$ para N con $f(p) \in V'$, tales que $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ es diferenciable en $\phi^{-1}(p)$.

Decimos que f es C^k -diferenciable si $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ es C^k -diferenciable para cualquier elección de ψ y ϕ , f es C^∞ -diferenciable (o **suave**) si $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ es C^∞ -diferenciable (como función con dominio en \mathbb{R}^m e imagen en \mathbb{R}^n).

Funciones de Morse

Definición 1.4.3. Un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ es un **difeomorfismo** si ambas $h : M \rightarrow N$ y $h^{-1} : N \rightarrow M$ son suaves.

A continuación, consideremos M una m -variedad, N una n -variedad y una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.4.4. La **derivada** de f en un punto $p \in M$ es la función $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definido por

$$(df)_p\left(\frac{dc}{dt}(0)\right) := \frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$$

donde c es una curva suave en M on $c(0) = p$.

Notemos que $\frac{dc}{dt}(0)$ es el vector tangente a M en $p = c(0)$, y $\frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$ es el vector tangente a N en $f(p)$, ya que $f \circ c$ es una curva suave en N con $(f \circ c)(0) = f(p)$.

Definición 1.4.5. Un punto p_0 de M es un **punto crítico** de f si la derivada $(df)_{p_0} : T_{p_0} M \rightarrow T_{f(p_0)} N$ no es sobreyectiva.

Definición 1.4.6. Sea p_0 un punto crítico de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la **matriz Hessiana** de la función f en el punto crítico p_0 , denotada $H_f(p_0)$ como

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p_0) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Observemos que $H_f(p_0)$ es una matriz cuadrada de $m \times m$.

Definición 1.4.7. Decimos que un punto crítico p_0 es **no degenerado**, si el determinante de la matriz Hessiana de f en p_0 , $\det H_f(p_0)$, es distinto de cero.

Definición 1.4.8. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es una **función de Morse** si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Lema 1.4.9. (Lema de Morse). Sea p un punto crítico no degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces en alguna vecindad de p existen coordenadas locales (x_1, \dots, x_m) con $x_i(p) = 0$ para todo i , tal que, en esas coordenadas, la función f toma la siguiente forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

El número λ de signos menos en la forma estándar, es el número de entradas negativas diagonales de la matriz Hessiana $H_f(p_0)$ después de la diagonalización.

Definición 1.4.10. Al número λ lo llamaremos el **índice de Morse** del punto crítico p_0 de f y escribimos $Ind_f(p_0)$.

Consideremos los siguientes ejemplos que muestran como cambia el índice de Morse:

Ejemplo 1.4.11. Sea $f(x, y, \alpha) = \alpha(x^2 + y^2)$

Calcularemos el índice de Morse en el punto crítico $(0, 0)$ y valores de $\alpha \in [-1, 1]$. Aquí, el gradiente de f es $\nabla f = (2\alpha x, 2\alpha y)$. La matriz Hessiana de f es $\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$. Notemos que cuando $\alpha = -1$ Tenemos que la matriz Hessiana de H es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo índice de Morse es 2 (Ver figura 1.12).

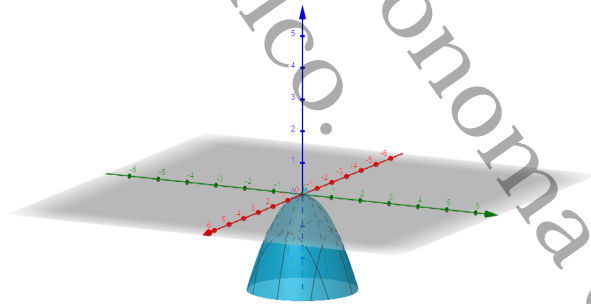
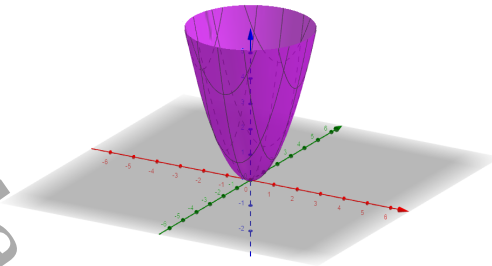


Figura 1.12: Gráfica de la función f cuando $\alpha = -1$

Cuando $\alpha = 0$, la matriz Hessiana es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y aquí el índice de Morse no está definido.

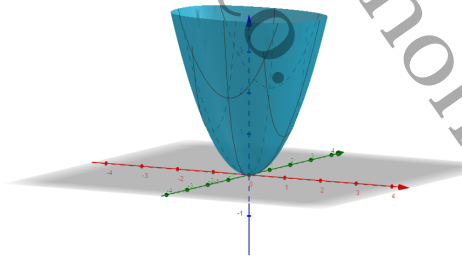
Finalmente, cuando $\alpha = 1$ la matriz Hessiana $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene índice de Morse igual a 0 (Ver figura 1.13).

Figura 1.13: Gráfica de la función f cuando $\alpha = 1$

Ejemplo 1.4.12. Sea $g(x, y, \alpha) = y^2 - \alpha x^2 + x^4$. Haremos el cálculo del índice de Morse alrededor del $(0, 0)$ con valores de $\alpha \in [-1, 1]$.

Calculamos el gradiente $\nabla g = (-2\alpha x + 4x^3, 2y)$.

Luego, la matriz Hessiana de g es $\begin{pmatrix} -2\alpha + 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notemos que cuando $\alpha = -1$ tenemos $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que en este caso el índice de Morse es 0 (Ver figura 1.14).

Figura 1.14: Gráfica de la función g cuando $\alpha = -1$

Ahora, cuando $\alpha = 0$ tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que en este caso el índice de Morse no está definido.

Por último, cuando $\alpha = 1$ tenemos $Hess_g(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que en este caso el índice de Morse es 1 (Ver figura 1.15).

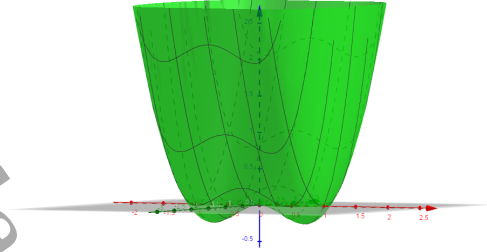


Figura 1.15: Gráfica de la función g cuando $\alpha = 1$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

A lo largo de este capítulo se irán desarrollando conceptos sobre homología cúbica y sistemas dinámicos con la finalidad de que se muestre una relación entre estas dos áreas de estudio, además dichos conceptos nos serán de gran interés en el siguiente capítulo. Los resultados que veremos en este capítulo están basados en [5].

2.1. Homología cúbica

Conjuntos cúbicos

En esta sección veremos conceptos básicos que necesitamos para empezar a construir la homología cúbica. Iniciaremos con la definición de intervalo elemental y posteriormente definiremos nuestro principal objeto de estudio, los conjuntos cúbicos.

Definición 2.1.1. Un **intervalo elemental** es un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ de la forma $I = [\ell, \ell + 1]$ o $I = [\ell, \ell] = \{\ell\}$, con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Los intervalos de la forma $\{\ell\}$ se llaman intervalos singulares

Definición 2.1.2. Un **cubo elemental** Q es un producto finito de intervalos elementales, es decir $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$, donde cada I_k es un intervalo elemental.

Ejemplo 2.1.3. Los conjuntos $[1, 2] \times \{0\}$, $[1, 2] \times \{3\}$, $\{3\} \times [1, 2]$, $[1, 2] \times [1, 2]$ son cubos elementales (*Ver figura 2.1*).

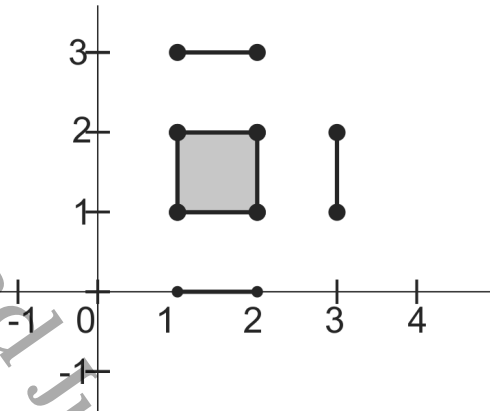


Figura 2.1: Cubos elementales en \mathbb{R}^2

Tenemos los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de cubos elementales en \mathbb{R}^d es

$$K^d = \{Q : Q \text{ es un cubo elemental en } \mathbb{R}^d\}.$$
2. El conjunto de cubos elementales es $K = \bigcup_{d=1}^{\infty} K^d$.

Las siguientes son definiciones que nos permitirán entender mejor a los cubos elementales.

Definición 2.1.4. Si $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ es un cubo elemental, decimos que d es el **número de encaje** de Q , y escribimos $\text{emb } Q = d$.

Definición 2.1.5. La **dimensión** de Q es el número de intervalos no singulares de Q y lo denotamos por $\text{dim } Q$.

Observemos que si $\text{emb } Q = d$, entonces $Q \in K^d$. Tenemos también $K_k = \{Q \in K : \text{dim } Q = k\}$ y $K_k^d = K_k \cap K^d$.

Proposición 2.1.6. Sean $Q \in K_k^d, P \in K_{k'}^{d'}$ entonces $(Q \times P) \in K_{k+k'}^{d+d'}$.

Definición 2.1.7. Sea $P, Q \in K$. Si $Q \subset P$, decimos que Q es una **cara** de P y lo denotamos por $Q \preceq P$.

1. Si $Q \preceq P$ y $Q \subsetneq P$, decimos que Q es una cara propia de P y escribimos $Q \prec P$.

2. Q es una cara primaria de P , si $Q \preceq P$ y $\dim Q = \dim P - 1$.

Definición 2.1.8. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ es **cúbico**, si es unión finita de cubos elementales.

Ejemplo 2.1.9. Consideremos el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^d$, X es un cubo elemental, y luego, es un conjunto cúbico.

Ejemplo 2.1.10. El conjunto $X = ([0, 1] \times [0]) \cup ([1] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1]) \cup ([0] \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto cúbico.

Definición 2.1.11. Si X es un conjunto cúbico contenido en \mathbb{R}^d , el **conjunto de cubos contenido en X** es $K(X) = \{Q \in K : Q \subset X\}$

Notemos que

1. $X = \bigcup_{Q \in K(X)} Q$
2. Si $Q \in K(X)$, entonces $\text{emb } Q = d$.
3. $K(X)$ es finito.

De la definición de conjunto cúbico sigue que

Teorema 2.1.12. SI X es cúbico, entonces X es cerrado y acotado.

Cadenas cúbicas

A cada k -cubo elemental $Q \in K_k^d$ le asociamos un símbolo algebraico \hat{Q} , llamado **k -cadena elemental** de \mathbb{R}^d . El conjunto de todas las k -cadenas elementales de \mathbb{R}^d es denotado por

$$\hat{K}_k^d = \{\hat{Q} \mid Q \in K_k^d\}$$

y el conjunto de todas las **cadenas elementales** de \mathbb{R}^d está dado por

$$\hat{K}^d := \bigcup_{k=0}^{\infty} \hat{K}_k^d$$

Dada una colección finita $\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_m\} \subset \hat{K}_k^d$ de cadenas elementales, consideramos sumas de la forma:

$$c = \alpha_1 \hat{Q}_1 + \alpha_2 \hat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \hat{Q}_m, \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

A estas sumas les llamamos k -cadenas en \mathbb{R}^d . La cadena cero es la que obtenemos al considerar $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$.

Al conjunto de k -cadenas en \mathbb{R}^d lo denotamos por

$$C_k^d = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \hat{Q}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}, \hat{Q}_i \in K_k^d, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 2.1.13. Sea $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico. Sea $\hat{K}_k(X) = \{\hat{Q} \mid Q \in K_k(X)\}$. El conjunto de las k -cadenas de X denotado $C_k(X)$ es el subgrupo de C_k^d generado por los elementos de $\hat{K}_k(X)$.

Sean $c_1, c_2 \in C_k^d$, donde $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \hat{Q}_i$ y $c_2 = \sum_{i=1}^m \beta_i \hat{Q}_i$. El **producto escalar** de las cadenas c_1 y c_2 es definido como

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i.$$

Definición 2.1.14. Dados dos cubos elementales $P \in K_k^d$ y $Q \in K_{k'}^d$, definimos

$$\hat{P} \diamond \hat{Q} := \widehat{P \times Q}$$

Esta definición se extiende linealmente a cadenas arbitrarias $c_1 \in C_k^d$ y $c_2 \in C_{k'}^d$:

$$c_1 \diamond c_2 := \sum_{P \in K_k, Q \in K_{k'}} \langle c_1, \hat{P} \rangle \langle c_2, \hat{Q} \rangle \widehat{P \times Q}$$

La cadena $c_1 \diamond c_2 \in C_{k+k'}^{d+d'}$ se llama el **producto cúbico** de c_1 y c_2 .

Proposición 2.1.15. Sea Q una cadena cúbica elemental de \mathbb{R}^d con $d > 1$. Entonces existe una única cadena cúbica elemental \hat{I} y \hat{P} con $\text{emb} \hat{I} = 1$ y $\text{emb} \hat{P} = d - 1$ tal que

$$\hat{Q} = \hat{I} \diamond \hat{P}.$$

Operador frontera

En esta sección definiremos un homomorfismo de grupos abelianos con el cual podremos definir homología.

Definición 2.1.16. El **operador frontera** de un conjunto cúbico X

$$\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1},$$

es un operador que está definido por inducción sobre el número de encaje d .

Cuando $d = 1$, Q es un intervalo de la forma $[\ell]$ o $[\ell, \ell + 1]$. Entonces se define

$$\partial_k \widehat{Q} := \begin{cases} 0, & \text{si } Q = [\ell] \\ \widehat{[\ell + 1]} - \widehat{[\ell]}, & \text{si } Q = [\ell, \ell + 1] \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $d > 1$. Sea $Q = I \times P$ tal que $\dim I + \dim P = \dim Q$. Entonces $\widehat{Q} = \widehat{I} \times \widehat{P}$ y definimos $\partial_k(\widehat{Q}) := \partial_{k_1}(\widehat{I}) \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P}$, donde $k_1 = \dim I$ y $k_2 = \dim P$. Extendemos esta definición para todas las cadenas por linealidad, si $c = \alpha_1 \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \widehat{Q}_m$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, entonces $\partial_k c = \alpha_1 \partial_k \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \partial_k \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \partial_k \widehat{Q}_m$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

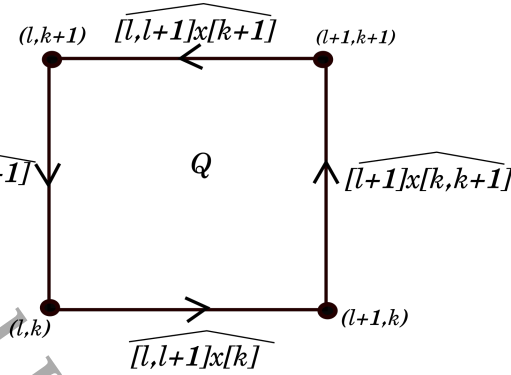
Cuando no haya riesgo de confusión, escribimos simplemente ∂ en vez de ∂_k . A continuación veremos ejemplos donde calcularemos la frontera a algunos cubos elementales

Ejemplo 2.1.17. Consideremos el cubo elemental $Q = [\ell] \times [k]$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_0(\widehat{Q}) &= \partial_0(\widehat{[\ell]}) \diamond \widehat{[k]} + (-1)^{\dim \widehat{[\ell]}} \widehat{[\ell]} \diamond \partial_0 \widehat{[k]} \\ &= 0 \diamond \widehat{[k]} + \widehat{[\ell]} \diamond 0 \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.18. La frontera de $Q = [\ell, \ell + 1] \times [k, k + 1]$ es calculada a continuación y es mostrada en la figura 2.2.

$$\begin{aligned} \partial_2(\widehat{Q}) &= \partial_1(\widehat{[\ell, \ell + 1]}) \diamond \widehat{[k, k + 1]} + (-1)^{\dim \widehat{[\ell, \ell + 1]}} \widehat{[\ell, \ell + 1]} \diamond \partial_1 \widehat{[k, k + 1]} \\ &= (\widehat{[\ell + 1]} - \widehat{[\ell]}) \diamond \widehat{[k, k + 1]} - \widehat{[\ell, \ell + 1]} \diamond (\widehat{[k + 1]} - \widehat{[k]}) \\ &= \widehat{[\ell + 1]} \diamond \widehat{[k, k + 1]} - \widehat{[\ell]} \diamond \widehat{[k, k + 1]} - \widehat{[\ell, \ell + 1]} \diamond \widehat{[k + 1]} + \widehat{[\ell, \ell + 1]} \diamond \widehat{[k]} \\ &= [\ell + 1] \times [k, k + 1] - [\ell] \times [k, k + 1] + [\ell, \ell + 1] \times [k] - [\ell, \ell + 1] \times [k + 1] \end{aligned}$$


 Figura 2.2: Frontera de $Q = [\ell, \ell + 1] \times [k, k + 1]$

Proposición 2.1.19. Sean c y c' cadenas cúbicas, entonces

$$\partial(c \diamond c') = \partial c \diamond c' + (-1)^{\dim c} c \diamond \partial(c').$$

La siguiente proposición muestra una propiedad que cumple el operador frontera.

Proposición 2.1.20. El resultado de componer el operador frontera consigo mismo es cero, es decir,

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

Demostración. Como ∂ es un operador lineal, es suficiente probar esta propiedad para las cadenas cúbicas elementales. Haremos la prueba por inducción sobre el número de encaje, para ello consideremos primero un cubo elemental Q .

Si $Q = [\ell]$, por definición $\partial \widehat{Q} = 0$ y entonces $\partial_0(\partial_1 \widehat{Q}) = 0$.

Ahora, si $Q = [\ell, \ell + 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_0(\partial_1(\widehat{Q})) &= \partial_0(\partial_1([\ell, \ell + 1])) \\ &= \partial_0([\ell + 1] - [\ell]) \\ &= \partial_0[\ell + 1] - \partial_0[\ell] \\ &= 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, supongamos que $Q \in K^d$ con $d > 1$. Entonces $Q = I \times P$, donde $I = I_1$ y $P = I_2 \times \cdots \times I_d$. Así, por la proposición 2.1.15 tenemos

$$\begin{aligned}
 \partial_{k-1}(\partial_k(\widehat{Q})) &= \partial_{k-1}(\partial_k(\widehat{I \times P})) \\
 &= \partial_{k-1}(\partial_k(\widehat{I \diamond P})) \\
 &= \partial \left(\partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} \right) \\
 &= \partial \left(\partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} \right) + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial \left(\widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} \right) \\
 &= \partial \partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial \left(\widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} \right) \\
 &= (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \left(\partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial \partial \widehat{P} \right) \\
 &= (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P}.
 \end{aligned}$$

En el último paso se usa la hipótesis de inducción.

Observemos que si $\dim \widehat{I} = 0$, entonces $\partial \widehat{I} = 0$ en cuyo caso tendríamos que cada término de la suma es cero y por lo tanto $\partial_{k-1} \partial_k \widehat{Q} = 0$. Por otro lado, si $\dim \widehat{I} = 1$, entonces $\dim \partial \widehat{I} = 0$ y por lo tanto los dos términos en la suma se cancelan, obteniendo el resultado deseado. \square

Observemos que dado $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico, entonces por definición tenemos que

$$\partial_k(C_k(X)) \subset C_{k-1}(X).$$

El operador frontera para un conjunto cúbico se define por

$$\partial_k^X : C_k \longrightarrow C_{k-1}(X)$$

restringiendo la función $\partial_k : C_k^d \longrightarrow C_{k-1}^{d-1}$ a $C_k(X)$.

Definición 2.1.21. El complejo de cadenas cúbico para el conjunto cúbico $X \subset \mathbb{R}^d$ es

$$C(X) := \{C_k(X), \partial_k^X\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

donde $C_k(X)$ son los grupos de las k -cadenas cúbicas generadas por $K_k(X)$ y ∂_k^X es el operador frontera cúbico restringido a X .

Homología de conjuntos cúbicos

Consideremos a $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico. Una k -cadena $z \in C_k(X)$ es llamada un **ciclo** en X , si $\partial z = 0$. Denotaremos al conjunto de todos los k -ciclos en X por $Z_k(X)$, es decir,

$$Z_k(X) := \ker \partial_k^X = C_k(X) \cap \ker \partial_k \subset C_k(X).$$

Una k -cadena $z \in C_k(X)$ es llamada una **frontera** en X , si existe $c \in C_{k+1}(X)$ tal que $\partial c = z$. El conjunto de fronteras elementales en $C_k(X)$ es la imagen de ∂_{k+1}^X y es denotado por $B_k(X)$. Además como ∂_{k+1}^X es un homomorfismo, $B_k(X)$ es un subgrupo de $C_k(X)$. Estos comentarios pueden ser resumidos por:

$$B_k(X) := \text{im} \partial_{k+1}^X = \partial_{k+1}(C_{k+1}(X)) \subset C_k(X).$$

Por la proposición 2.1.20, si tenemos que $z = \partial c$, entonces $\partial z = \partial^2 c = 0$. Esto nos dice que cada frontera es un ciclo, y con esto $B_k(X)$ es subgrupo de $Z_k(X)$. Decimos que dos ciclos $z_1, z_2 \in Z_k(X)$ son **homólogos**, si $z_1 - z_2 \in B_k(X)$ y escribimos $z_1 \sim z_2$.

Definición 2.1.22. El k -ésimo grupo de homología cúbica de X , denotado $H_k(X)$ es el grupo cociente

$$H_k(X) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}.$$

La homología de X es la colección de todos los grupos de homología de X y será denotada de la siguiente manera:

$$H_*(X) := \{H_k(X)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

2.2. Homología relativa

En esta sección definiremos los grupos de homología relativa $H_*(X, A)$. Un par cúbico es una pareja (X, A) donde A y X son conjuntos cúbicos tales que $A \subset X$. En lo sucesivo (X, A) será un par cúbico, es decir, A y X son conjuntos cúbicos tales que $A \subset X$.

Las **cadenas relativas** de X módulo A son los elementos del cociente de grupos

$$C_k(X, A) := \frac{C_k(X)}{C_k(A)}.$$

Como en la sección anterior, los grupos $C_k(X, A)$ son grupos libres abelianos y podemos introducir los siguientes conceptos.

El **complejo de cadenas relativas** de X módulo A está dado por

$$\{C_k(X, A), \partial_k^{(X, A)}\},$$

donde el operador $\partial_k^{(X,A)}$

$$\partial_k^{(X,A)} : C_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A)}} C_{k-1}(X, A)$$

se define como $\partial_k^{(X,A)}([c]) = [\partial c]$. Al igual que ∂_k , este operador $\partial_k^{(X,A)}$ cumple que $\partial_{k+1}^{(X,A)} \circ \partial_k^{(X,A)} = 0$.

Se define el k -ésimo grupo de homología relativa a A como

$$H_k(X, A) = \frac{\text{Ker} \partial_k^{(X,A)}}{\text{Im} \partial_{k+1}^{(X,A)}}.$$

Las siguientes dos proposiciones nos dan información acerca del cálculo del 0-ésimo grupo de homología cúbica de pares cúbicos, de acuerdo al número de componentes conexas del conjunto cúbico X .

Proposición 2.2.1. Sea X un conjunto cúbico conexo y sea A un subconjunto cúbico no vacío de X . Entonces

$$H_0(X, A) = 0.$$

Proposición 2.2.2. Sea (X, A) un par cúbico. Entonces el número de componentes conexas de X que no intersecan a A es la dimensión de $H_0(X, A)$.

2.3. Sucesiones exactas

Como hemos visto en secciones anteriores, la homología inicia con un complejo de cadenas $\{C_k, \partial_k\}$, donde C_k es un grupo abeliano.

Entonces se tiene

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} C_k \xrightarrow{\partial_k^X} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}^X} C_{k-2} \cdots \xrightarrow{\partial_2^X} C_1 \xrightarrow{\partial_1^X} C_0 \xrightarrow{\partial_0^X} 0$$

y dado que $\partial_k^X \circ \partial_{k+1}^X = 0$ se tiene que $\text{Im} \partial_{k+1}^X \subset \text{Ker} \partial_k^X$. Más generalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Dada una sucesión de grupos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow \cdots$$

decimos que es **exacta** en G_2 si

$$\text{Im } \psi_3 = \text{Ker } \psi_2.$$

Una sucesión es **exacta** cuando es exacta en cada grupo.

Definición 2.3.2. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 2.3.3. Sea (X, A) un par cúbico, para cada k consideremos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow C_k(A) \xrightarrow{i_k} C_k(X) \xrightarrow{p_k} C_k(X, A) \longrightarrow 0$$

donde i_k es la función inclusión y p_k es el mapeo cociente.

Definición 2.3.4. Sea $\mathcal{A} = \{A_k, \partial_k^A\}$, $\mathcal{B} = \{B_k, \partial_k^B\}$, $\mathcal{C} = \{C_k, \partial_k^C\}$ complejos de cadenas. Sea $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ mapeos de cadenas. La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es una **sucesión exacta corta de complejos de cadenas** si para cada k

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{\varphi_k} B_k \xrightarrow{\psi_k} C_k \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, donde 0 denota el complejo de cadenas trivial, es decir el complejo de cadenas en el cuál cada grupo es el grupo trivial.

El siguiente lema es muy conocido en topología algebraica y se omite su prueba debido a que rebasa los objetivos de este trabajo, pero dicha prueba puede ser consultada en [3] y [6].

Teorema 2.3.5. (Lema de la serpiente)

Sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Entonces para cada k existe un homomorfismo

$$\partial_* : H_{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow H_k(\mathcal{A})$$

tal que

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi_*} H_{k+1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi_*} H_{k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_k(\mathcal{A}) \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga.

El homomorfismo ∂_* es llamado el homomorfismo de conexión.

Para el caso de pares cúbicos, el ejemplo 2.3.3 y el lema de la serpiente implican el siguiente corolario.

Corolario 2.3.6. (La sucesión exacta de la homología de un par) Sea (X, A) un par cúbico. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k+1}(X) \xrightarrow{p_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \rightarrow \cdots,$$

donde $i_* : C(A) \hookrightarrow C(X)$ es la función inducida por la función inclusión, $p_* : C(X) \rightarrow C(X, A)$ es el mapeo inducido por el mapeo cociente y ∂_* es el homomorfismo de conexión.

La homología relativa nos da un criterio necesario para que A sea un retracto fuerte por deformación de X .

Proposición 2.3.7. Si (X, A) es un par cúbico y A es un retracto fuerte por deformación de X , entonces $H_*(X, A) = 0$.

Ejemplo 2.3.8. Consideremos $X = [-a, a] \times [-a, a]$ y $A = ([-a, a] \times a) \cup ([-a, a] \times -a)$. Queremos calcular $H_*(X, A)$. La sucesión exacta larga para este par es

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_2(A) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(X, A) \rightarrow H_1(A) \rightarrow H_1(X) \\ \rightarrow H_1(X, A) \rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo $H_1(X, A) = \mathbb{Z}$, $H_0(X, A) = 0$, $H_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Más aún, por la proposición 2.2.1, tenemos que $H_0(X, A) = 0$. Así que podemos reescribir la sucesión exacta larga como

$$0 \rightarrow H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} H_0(X, A) \rightarrow 0.$$

Por exactitud, $H_k(X, A) = 0$, $\forall k \geq 2$. Como i_* es sobre, $Im i_* = \mathbb{Z} = Ker p_*$ lo que implica que $p_* = 0$ y por lo tanto $Imp_* = H_0(X, A) = 0$. Por otro lado, como ∂_* es uno a uno, $Ker i_* = \mathbb{Z}$. Entonces $H_1(X, A) = \mathbb{Z}$.

Índice de Conley y sistemas dinámicos continuos

El objetivo de este capítulo es definir el Índice de Conley que es un índice puramente topológico, describiendo antes el principio de Ważewski, de estos dos invariantes topológicos se mostrarán sus propiedades y ejemplos. Este capítulo está basado en [1] y [5].

3.1. Principio de Ważewski

En sistemas dinámicos continuos, en particular aquellos que corresponden a flujos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es de interés analizar bajo qué condiciones existen soluciones contenidas (para todo tiempo positivo) en regiones no necesariamente invariantes. El principio de Ważewski es un teorema de carácter topológico. Una de sus aplicaciones consiste en garantizar la existencia de dichas soluciones asociadas a un flujo continuo definido sobre un espacio topológico. En esta sección describiremos este principio y se darán algunos ejemplos que lo ilustren.

Definición 3.1.1. Dado $N \subset X$ el **conjunto invariante maximal** de N está definido por

$$\text{Inv}(N, \varphi) := \{x \in N : \phi_t(x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sea X un espacio topológico y sea $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ el flujo definido en 1.1.5. Consideremos $W \subset X$. Entonces tenemos los siguientes conjuntos.

Definición 3.1.2. El conjunto de puntos en W que salen **eventualmente** es:

$$W^0 = \{x \in W : \exists t > 0, \varphi(t, x) \notin W\}.$$

Definición 3.1.3. El conjunto de puntos en W que salen **inmediatamente** es:

$$W^- = \{x \in W : \text{para todo } t > 0, \varphi([0, t], x) \not\subset W\}.$$

Notemos que por definición se satisface que $W^- \subset W^0 \subset W$.

Definición 3.1.4. Un conjunto W es de **Ważewski** si se satisface lo siguiente:

1. Si $x \in W$ y $\varphi([0, t], x) \subset \bar{W}$ entonces $\varphi([0, t], x) \subset W$;
2. W^- es cerrado relativo a W^0 .

Teorema 3.1.5. Sea W un conjunto de Ważewski. Entonces, W^- es un retracto fuerte por deformación de W^0 .

Demostración. Consideremos la función

$$\tau : W^0 \rightarrow [0, \infty),$$

$$\tau(x) := \sup\{t \geq 0 \mid \varphi([0, t], x) \subset W\},$$

la cual es continua (esto se deduce de la continuidad del flujo y que W es Ważewski).

Además, para cada $x \in W^0$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau(x), x) &\in W^-, \\ \tau(x) = 0 &\text{ si y sólo si } x \in W^-. \end{aligned}$$

Por lo tanto, definimos

$$X := W^0 \rightarrow A := W^-, \quad x \mapsto r(x) = \varphi(\tau(x), x).$$

De lo anterior, podemos considerar una homotopía determinada por el flujo, la cual está definida de la siguiente manera

$$h : W^0 \times [0, 1] \rightarrow W^0, \quad h(x, s) = \varphi(s\tau(x), x).$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \varphi(0\tau(x), x) = \varphi(0, x) = x = Id_X(x), \quad \forall x \in W^0; \\ h(a, s) &= \varphi(s\tau(a), a) = \varphi(0, a) = a = Id_A(a), \quad \forall a \in W^-, \quad s \in I; \\ h(x, 1) &= \varphi(\tau(x), x) \in W^-, \quad x \in W^0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$i_A \circ r \simeq Id_X, \quad \text{rel } A.$$

□

El siguiente teorema nos dice que existen soluciones que se mantienen en W para todo tiempo positivo.

Teorema 3.1.6. (Principio de Ważewski) Si W es un conjunto de Ważewski y W^- no es un retracto fuerte por deformación de W entonces $W \setminus W^0 \neq \emptyset$.

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $W \setminus W^0 = \emptyset$, entonces $W = W^0$. Por hipótesis W es de Ważewski pero sabemos que $W^- \subset W^0 = W$, por lo tanto W^- también es de Ważewski que usando el teorema 3.1.5 nos contradice el supuesto que W^- no es un retracto fuerte por deformación.

□

En cuestión de dinámica, el siguiente resultado garantiza la existencia de soluciones contenidas en W para tiempos positivos.

Corolario 3.1.7. Si W es un conjunto de Ważewski y W^- no es un retracto fuerte por deformación de W , entonces $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.

Demostración. Por el teorema 3.1.6 existe un punto $x \in W$ tal que $\varphi([0, \infty), x) \subset W$. Por la proposición 1.1.8 $\omega(x, \varphi) \subset Inv(W, \varphi)$ es un subconjunto no vacío, compacto e invariante de W .

□

Proposición 3.1.8. Si A es un retracto fuerte por deformación de X , entonces $H_n(A, X) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La siguiente proposición nos dice que existen soluciones que se mantienen en W para todo tiempo positivo.

Proposición 3.1.9. Sea W un conjunto de Wazewski. Supongamos que W y W^- son conjuntos cúbicos. Si $H_*(W, W^-) \neq 0$, entonces $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.

Demostración. Si $H_*(W, W^-) \neq 0$, entonces por la proposición 3.1.8 tenemos que W^- no es un retracto fuerte por deformación de W y entonces haciendo uso del corolario 3.1.7 se tiene lo que se quería probar. \square

Ejemplo 3.1.10. Considérese el sistema lineal de EDO:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Donde dada una condición inicial arbitraria (x, y) , la solución asociada está dada por:

$$\varphi(t, (x, y)) = (e^{-t}x, e^ty).$$

En este caso consideramos los siguientes conjuntos (Ver figura 3.1).

$$\begin{aligned} W &= [-a, a] \times [-a, a], \quad \bar{W} = W, \quad W \setminus W^0 \neq \emptyset; \\ W^- &= ([-a, a] \times \{a\}) \cup ([-a, a] \times \{-a\}); \\ W^0 &= ([-a, a] \times (0, a]) \cup ([-a, a] \times [-a, 0)). \end{aligned}$$

Por el ejemplo 2.3.8 se tiene que $H_1(W, W^-) \cong \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.

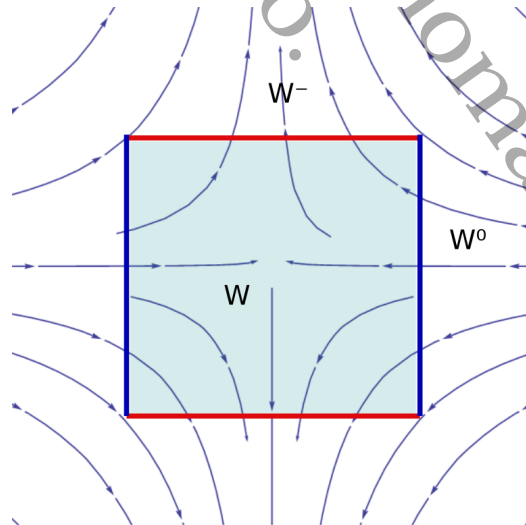


Figura 3.1: Conjunto de Wazewski

3.2. Índice de Conley

Ahora daremos algunas definiciones que nos ayudarán a introducir el índice de Conley y para ello consideremos el sistema dinámico $\phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ definido sobre una variedad diferencial X . Dichos resultados aparecen en [1].

Definición 3.2.1. Un conjunto compacto $N \subset X$ es una **vecindad aislante** si

$$\text{Inv}(N, \varphi) := \{x \in N : \varphi_t(x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \text{int}(N).$$

Definición 3.2.2. Un conjunto invariante S es un **conjunto invariante aislante** si $S = \text{Inv}(N, \varphi)$ para alguna vecindad aislante N .

Ahora definiremos el Índice de Conley asignado a S , para ello consideremos algunas definiciones.

Definición 3.2.3. Sea S un conjunto invariante aislado. Un par de conjuntos compactos (N, L) donde $L \subset N$ es llamado un **buen par** para S si:

1. $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$ y $N \setminus L$ es una vecindad de S .
2. L es positivamente invariante en N , lo cual quiere decir que dado $x \in L$ y $\phi([0, t], x) \subset N$, entonces $\phi([0, t], x) \subset L$.
3. L es un conjunto de salida: dado $x \in N$ y $t_1 > 0$ tal que $\phi(t_1, x) \notin N$, entonces existe $t_0 \in [0, t_1]$ para el cual $\phi([0, t_0], x) \subset N$ y $\phi(t_0, x) \in L$.

En la mayoría de los casos, la vecindad aislante N se puede tomar como la vecindad más natural (compacta) del conjunto invariante y para el subconjunto $L \subset N$ se suele considerar el conjunto de salida usual que está sobre la frontera de N . (Ver figura 3.2).

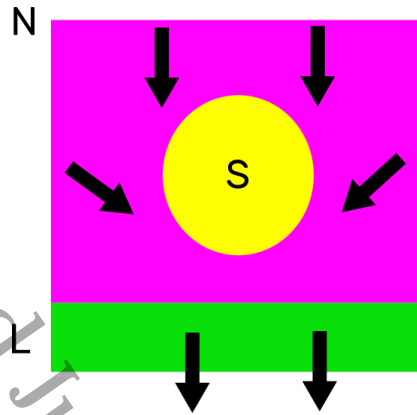


Figura 3.2: Conjuntos N y L usuales

Teorema 3.2.4. Sea S un conjunto invariante aislado, entonces existe un buen par.

El siguiente teorema nos dirá que el índice de Conley está bien definido.

Teorema 3.2.5. Sea (N, L) y (N', L') buenos pares para un conjunto invariante aislado S . Entonces $(N/L, [L]) \sim (N'/L', [L'])$.

Definición 3.2.6. El **índice de Conley** $Ind_C(S, \phi)$ de un conjunto invariante S bajo el flujo ϕ_t es el tipo de homotopía del espacio punteado $(N/L, [L])$.

En general, trabajar con el tipo de homotopía de un espacio es complicado y por ello es mejor analizar su grupo de homología, siempre que esta esté definida o tenga sentido y es lo que se conoce como la homología de Conley y que es definida como sigue:

$$CH_*(S) := H_*(N/L, [L]).$$

Ejemplo 3.2.7. La figura 3.3 muestra un ejemplo del índice de Conley. En este caso, un disco que tiene como centro un punto de equilibrio es tomado como N y el conjunto de salida L consiste de dos arcos. Si los dos arcos son identificados en un punto, obtenemos un espacio el cual es homotópicamente equivalente a un círculo. El índice de Conley en este caso donde tenemos un punto silla, es el tipo de homotopía del círculo. Por lo tanto,

$$Ind_C(S, \phi) = \mathbb{Z}.$$

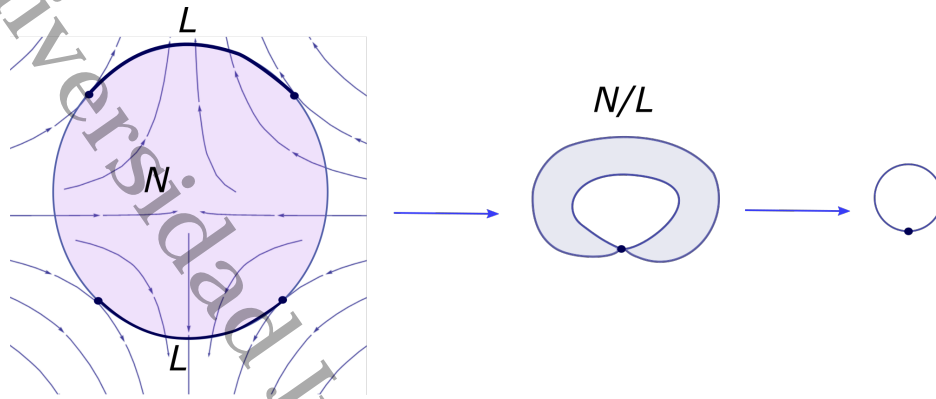


Figura 3.3: Índice de Conley de un punto silla

En lo que sigue, daremos algunas propiedades que satisface el índice de Conley, las cuales codificamos en una proposición y dos teoremas, cuyos resultados engloban lo que en la literatura se conoce como el Teorema de Conley. Aquí lo separamos para una mejora en la comprensión.

Consideremos una familia de sistemas dinámicos

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : \mathbb{R} \times X &\rightarrow X, \\ \lambda &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

Proposición 3.2.8. Sea N una vecindad aislante para el flujo φ_0 . Entonces, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, N es una vecindad aislante para todo φ_λ , $|\lambda| < \delta$.

Definición 3.2.9. Sea $N \subset X$ un conjunto compacto. Sea $S_\lambda = \text{Inv}(N; \varphi_\lambda)$. Decimos que dos conjuntos invariantes aislados S_{λ_0} y S_{λ_1} están **relacionados por continuidad** si N es una vecindad aislante para todo φ_λ , $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Teorema 3.2.10. (Propiedad de continuidad)

Sea S_{λ_0} y S_{λ_1} conjuntos invariantes aislantes que están relacionados por continuidad, entonces

$$CH_*(S_{\lambda_0}) = CH_*(S_{\lambda_1}).$$

A continuación veremos el ejemplo más sencillo del cálculo de la homología de Conley

Ejemplo 3.2.11. Sea N una vecindad aislante tal que $\text{Inv}(N) = \emptyset$ y sea $S = \emptyset$. Entonces S es un conjunto invariante aislante y se tiene que

$$CH_*(S) = CH_*(\text{inv}(N)) = CH_*(\emptyset) = 0.$$

La contrapositiva de este ejemplo, nos da como resultado el siguiente teorema.

Teorema 3.2.12. (Propiedad de Wazewski)

Sea N una vecindad aislada y suponga que $CH_*(\text{Inv}N) \neq 0$. Entonces, $\text{Inv} N \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\text{Inv}(N) = \emptyset$, el ejemplo anterior implica que $CH_*(S) = 0$, lo cuál es una contradicción. \square

Índice de Conley y aplicaciones

En este capítulo se muestran algunos teoremas que ayudarán a comprender como nos es de utilidad el índice de Conley.

4.1. Índice de Conley y descomposición de Morse

Recordando un poco el capítulo 1 sección 4, vamos a considerar el flujo gradiente de una función de Morse con un punto crítico no degenerado de índice k .

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

El conjunto N es una vecindad esférica del punto singular y el conjunto de salida L está sobre la frontera de la bola de dimensión $n - k$, N es el producto directo de la esfera de dimensión $k - 1$ y el disco de dimensión $n - k$

Entonces, en estos casos se tiene:

$$N = B^k \times B^{n-k},$$

$$L = S^{k-1} \times B^{n-k}$$

Ejemplo 4.1.1. Cuando $n = 2$ y $k = 1$, tenemos $N = \mathbf{B}^1 \times \mathbf{B}^1$ y $L = \mathbf{S}^0 \times \mathbf{B}^1$ (Ver figura 4.1).

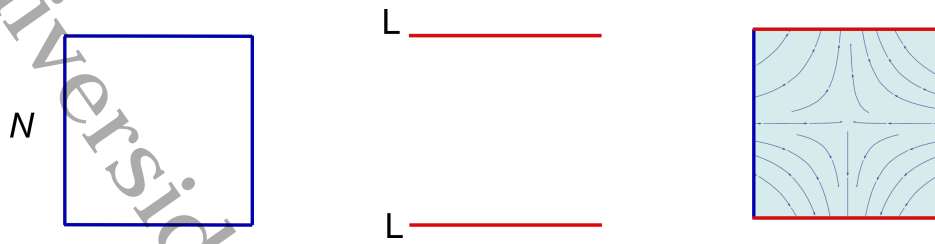


Figura 4.1: Ejemplo de los conjuntos N y L

Teorema 4.1.2. El índice de Conley de un punto singular del flujo gradiente de una función de Morse de índice k es del tipo de homotopía de la esfera de dimensión k (Ver figura 4.2).

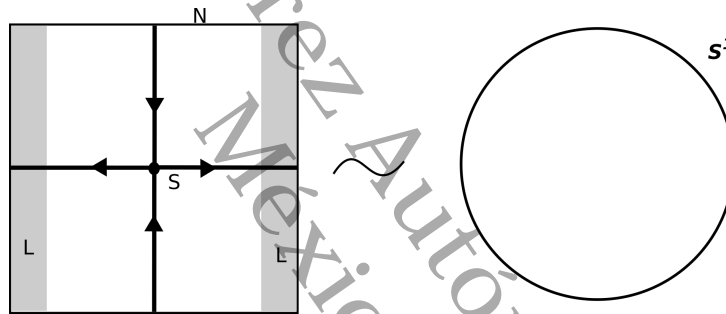


Figura 4.2: Ejemplo de índice de Conley

4.2. Índice de Conley y Sistemas Hamiltonianos

En esta sección se trabajará con sistemas Hamiltonianos con el objetivo de probar la existencia de nuevos puntos de equilibrio, para lo cual se hará uso del índice de Conley.

El siguiente teorema veremos que si el índice de Morse cambia, entonces en una pequeña vecindad arbitraria de una familia de puntos singulares entonces debe existir otros puntos singulares.

Teorema 4.2.1. Sea H sistema cuyo Hamiltoniano $H(x, \alpha)$ es una función suave sobre \mathbb{R}^n que depende de un parámetro $\alpha \in [-1, 1]$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un

punto de equilibrio aislado no degenerado de $H(x, \alpha)$ para cada α tal que su índice de Morse cambia cuando α pasa por 0. Entonces en una pequeña vecindad arbitraria de x_0 existe otro punto de equilibrio para algunos valores de α .

Probaremos el teorema anterior en partes, lo primero que haremos será probar el siguiente lema

Lema 4.2.2. Sea $H(x, \alpha)$ una función suave que depende de $\alpha \in [-1, 1]$ y sea x_0 un punto singular aislado de $H(x, \alpha)$, $\forall \alpha \in [-1, 1]$. Entonces existe una vecindad aislante N de x_0 tal que N es aislante para el flujo gradiente de $H(x, 1)$ y también para el flujo gradiente de $H(x, -1)$.

Demostración. Dado que x_0 es aislado, $\forall \alpha \in [-1, 1]$ existe una vecindad $U_{-1} = B(x_0, \varepsilon_{-1})$ alrededor de x_0 y existe una vecindad $U_1 = B(x_0, \varepsilon_1)$ alrededor de x_0 , tales que U_{-1} no contiene otros puntos críticos de $H(x, -1)$ y U_1 no contiene otros puntos críticos de $H(x, 1)$ más que el punto crítico x_0 .

Consideremos $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1\}$ □

La siguiente demostración es del teorema 4.2.1.

Demostración. Ahora, por hipótesis, los índices de Morse y por lo tanto los índices de Conley son diferentes para $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$. Como el índice de Conley se mantiene invariante bajo deformaciones continuas del flujo (Ver proposición 3.2.10), pero esta situación es sólo posible cuando para un valor de α la vecindad U_ε deja de ser aislante.

Así que, ya sea que la frontera de esta vecindad exista un punto singular del flujo gradiente (lo cual prueba el teorema) o existe una trayectoria $\gamma(t)$ que pasa a través de algún punto singular de ∂U_ε el cual está completamente contenido en esta vecindad. Sea x_\pm los puntos límite de la trayectoria $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Ya que tratamos con un flujo gradiente, los puntos x_+ y x_- son diferentes y singulares de la función H . Así, dentro de la vecindad existen al menos dos puntos singulares distintos, teniendo así el teorema establece. □

Ejemplo 4.2.3. Tenemos el siguiente ejemplo

$$H(x, y, \alpha) = x^4 - \alpha x^2 + y^2$$

En el ejemplo 1.4.12 se calculó el índice de Morse de $H(x, y, \alpha) = x^4 - \alpha x^2 + y^2$ alrededor de $(0, 0)$ con valores de $\alpha \in [-1, 1]$ y se concluyó que

cuando α pasa alrededor de 0 el índice del punto singular $(0, 0)$ cambia de 0 a 1. Entonces se tienen las hipótesis de teorema 4.2.1.

Cuando $\alpha = 0$ tenemos un único punto singular es $x_0(\alpha) = (0, 0)$ que es un punto singular aislado sin importar el valor del parámetro, pero cuando $\alpha > 0$ tenemos dos puntos singulares los cuales son $x_1(\alpha) = (0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}})$, $x_2(\alpha) = (0, -\sqrt{\frac{\alpha}{2}})$. Por lo que podemos observar que si el índice cambia, entonces en una pequeña vecindad arbitraria de $x_0(\alpha)$ debe existir otros puntos singulares, lo cual verifica el teorema 4.2.1.

4.3. Aplicaciones a la dinámica continua

El siguiente ejemplo muestra un conjunto invariante aislado que son los puntos fijos hiperbólicos, a tal conjunto se le calculará la homología de Conley.

Teorema 4.3.1. Sea S un punto fijo hiperbólico con una variedad inestable de dimensión n_u , entonces

$$CH_k(S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = n_u \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria, para la cual S es un punto fijo hiperbólico

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, usando el teorema de Hartman-Grobman, tenemos que el flujo en una vecindad de S es topológicamente equivalente al flujo en una vecindad del origen de

$$\dot{y} = Df(S)y, \tag{4.1}$$

donde la dimensión de la variedad inestable en S es n_u y la dimensión de la variedad estable es n_s , por lo tanto $n_u + n_s = n$.

Por esta razón es suficiente hacer el cálculo de la homología de Conley en el origen en el sistema lineal. Reescribimos el sistema (4.1) como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Donde A es una matriz de $n_s \times n_s$ en la cual la parte real de todos sus eigenvalores son menores que cero y B es de $n_u \times n_u$ en la cual la parte real de los eigenvalores son más grandes que cero.

Una vecindad aislante en el origen está dada por $N = [-1, 1]^{n_s} \times [-1, 1]^{n_u}$ y el conjunto de salida por $L = [-1, 1]^{n_s} \times \partial([-1, 1]^{n_u})$.

Homotópicamente el primer factor $[-1, 1]^{n_s}$ en estos productos es trivial y no juega ningún papel, por lo tanto, por contracción de L a un punto, obtenemos un espacio homotópico a la esfera de dimensión n_u .

Es decir, $H_{n_u}([-1, 1]^{n_s} \times [-1, 1]^{n_u}, [-1, 1]^{n_s} \times \partial([-1, 1]^{n_u})) = \mathbb{Z}$. \square

Ejemplo 4.3.2. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= cy + (1 - x^2), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para este sistema existen dos puntos de equilibrio los cuales son $(\pm 1, 0)$.

Linealizando el sistema tenemos que

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x & c \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores de la matriz anterior está dados por

$$\lambda = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 8x}}{2}$$

Por lo que $(\pm 1, 0)$ son puntos de equilibrio hiperbólicos.

Analizando el punto de equilibrio $(-1, 0)$, cuyos valores propios son $\lambda = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 8}}{2}$, para $c > 0$ tenemos que existe un eigenvalor con parte real negativa y uno con parte real positiva entonces es un punto silla y por lo tanto

$$\dim W_{(-1,0)}^u \leq 1$$

Para el segundo punto de equilibrio $(1, 0)$, tenemos $\lambda = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 8}}{2}$ son los eigenvalores y para $c \in (0, 2\sqrt{2})$ las partes reales de estos eigenvalores son positivas y concluimos que

$$\dim W_{(-1,0)}^u = 2$$

Contando el número de eigenvalores con parte real positiva podemos checar que para $c > 0$ y por el teorema 4.3.1

$$CH_k((-1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 1 \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$CH_k((1,0)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un invariante topológico conocido como el índice de Conley, el cual se comporta bien bajo perturbaciones de un sistema o flujo.

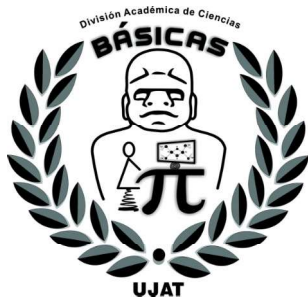
Además se usó dicho índice para garantizar la existencia de regiones invariantes de puntos de equilibrio en sistemas Hamiltonianos, y así garantizar la aparición bajo perturbación de nuevos puntos de equilibrio en un sistema dinámico Hamiltoniano, a través del índice de Morse.

Por otra parte, describimos cómo usar homología cúbica para garantizar la existencia de soluciones contenidas en conjuntos invariantes.

Bibliografía

- [1] A. Bolsinov, Alexey Borisov, and Ivan Mamaev. Bifurcation analysis and the conley index in mechanics. *Regular and Chaotic Dynamics*, 17, 09 2012.
- [2] K. Burns and M. Gidea. *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 2005.
- [3] A. Hatcher, Cambridge University Press, and Cornell University. Dept. of Mathematics. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [4] M.W. Hirsch, R.L. Devaney, and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1974.
- [5] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. *Computational Homology*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2004.
- [6] W.S. Massey, J.H. Ewing, F.W. Gerhing, and P.R. Halmos. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [7] Y. Matsumoto, K. Hudson, American Mathematical Society, and M. Saito. *An Introduction to Morse Theory*. Europe and Central Asia Poverty Reduction and Economic Manag. American Mathematical Society, 2002.
- [8] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2008.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.



"Donde hacer ciencia, es Básico"