UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

C-NORMALIDAD, NORMALIDAD RELATIVA Y OTRAS PROPIEDADES RELATIVAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

IRVIN ENRIQUE SOBERANO GONZÁLEZ

DIRECTORES

DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN

DR. REYNALDO ROJAS HERNÁNDEZ

Cunduacán, Tab. Octubre 2021

DIRECCIÓN

25 de junio de 2021

LIC.IRVIN ENRIQUE SOBERANO GONZÁLEZ
ESTUDIANTE DE LA MAESTRIA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
P R E S E N T E.

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado **"C-normalidad, normalidad relativa y otras propiedades relativas"** en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemátias.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR

DR'GDP/M´NLBA/csj.

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "**C-normalidad, normalidad relativa y otras propiedades relativas**", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa mas no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los

31 días del mes de agosto del año 2021.

AUTORIZÓ

Irvin Enrique Soberano González
192A21001

Agradecimientos

- A Dios por darme la vida y porque me permite alcanzar mis metas.

- A mis padres y mis hermanos quienes sin escatimar esfuerzo alguno, han sacrificado gran parte de su vida para formarme y educarme.

- A mis maestros y amigos de la UJAT por estos años de aprendizaje. Especialmente a los doctores Reynaldo Rojas Hernández y Gerardo Delgadillo Piñón por dirigirme en este trabajo.

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por apoyarme con la beca número 1003228 para cursar la maestría.

Índice general

Introducción

Como es sabido, la teoría de los axiomas de separación constituye una parte muy interesante y compleja en Topología General. La normalidad es uno de los axiomas de separación. Dicho axioma fue introducido por Tietze en 1923 y por Alexandroff y Urysohn en 1924. La palabra normal podría sugerir que es algo usual o ordinario. Sin embargo, la normalidad como propiedad topológica no es un propiedad ordinaria. Este axioma de separación posee ciertas características muy fuertes, aunque también tiene sus limitaciones, las cuales abren paso a otras propiedades. Como indica la definición de normalidad es posible separar cerrados ajenos por abiertos ajenos; esta es una característica muy importante y tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo en Topología Algebraica, podemos usar escisión para determinar la homología del complemento de la unión de dos conjuntos cerrados ajenos usando la homología de cada uno de ellos. Otra característica de gran relevancia de la normalidad es el Lema de Urysohn que nos dice que en un espacio normal dos cerrados ajenos pueden ser separados por una función continua que toma valores en $[0,1]$ tomando como valor 0 en un cerrado y 1 en el otro. Este resultado tiene muchas aplicaciones; una de ellas permite mostrar que todo espacio conexo normal tiene cardinalidad menor o igual que el continuo. Pero el más poderoso resultado que implica la normalidad es el Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn, el cual permite extender continuamente funciones continuas con valores reales definidas sobre cerrados. Este resultado es crucial para demostrar que los CW-complejos son normales: usando que el circulo unitario es un subespacio cerrado.

El objetivo de este trabajo es mostrar un análisis de la C-normalidad y de las propiedades relativas de los axiomas de separación y de las propiedades tipo compacidad. El presente trabajo se divide en tres capítulos.

En el primer capítulo hacemos un análisis general de los espacios C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica. Mostramos algunas operaciones que preservan los espacios C-$\mathcal{P}$ (epi-$\mathcal{P}$) cuando $\mathcal{P}$ se preserva bajo dichas operaciones tales como productos, sumas ajenas, etc. También se hace un análisis de ciertas propiedades topológicas donde la C-normalidad está presente, como lo son los productos de espacios localmente compactos y los espacios regulares localmente Lindelöf. Mediante el ejemplo obtenido por Saeed de un espacio Tychonoff no C-normal [1] demostramos que la C-normalidad no se preserva bajo subespacios cerrados, imágenes continuas y cerradas, productos, etc. Finalizamos este primer capítulo mostrando algunos resultados acerca de la epi-normalidad como la extensión continua de funciones continuas con valores reales sobre compactos.

En el segundo capítulo se hace un breve recuento de algunas de las propiedades relativas asociadas a los axiomas de Hausdorff, de la regularidad y de Tychonoff. Posteriormente hacemos un análisis de algunas propiedades relativas de la normalidad detallando la relación que existe entre ellas, para ello el plano de Moore-Niemytzki y un espacio proporcionado por Mysior nos serán útiles. Además mostramos las relaciones entre la normalidad relativa y las propiedades relativas de los otros axiomas. También en este capítulo introducimos el concepto de subespacio débilmente C-encajado que nos pondrá en contexto con extensiones de funciones continuas sobre subespacios. Mas aún, mostramos que todo subespacio abierto es débilmente C-encajado pero no necesariamente lo son los subespacios cerrados, probando así la diferencia entre esta noción y la noción de subespacio C-encajado. Finalmente se mostrarán versiones relativas del Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn y su relación con la normalidad relativa.

En el tercer capítulo estudiamos algunas propiedades relativas asociadas a las propiedades de tipo compacidad; la compacidad, la propiedad de Lindelöf, la compacidad numerable y la pseudocompacidad. Hacemos un análisis del comportamiento de estas propiedades relativas y la relación que tienen con las propiedades relativas de los axiomas de separación, particularmente con la normalidad relativa. Además, en este capítulo se muestran algunos resultados importantes tales como que el producto de dos espacios compactos relativos es un espacio compacto relativo y la existencia de un espacio denso normal en un producto arbitrario de espacios.

Preliminares

En esta breve sección introduciremos varias nociones básicas en Topología que estaremos usando con frecuencia, al mismo tiempo que estableceremos la notación que usaremos en el desarrollo del texto.

Como es usual denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales y por $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales. Al intervalo unitario lo denotaremos como I.

Sea $X = \prod_{s \in S} X_s$ un producto de espacios topológicos. A los elementos de X los denotaremos como $\{x_s\}_{s \in S}$. Si $S = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito, denotaremos a X como $X_1 \times \cdots \times X_n$ y a sus elementos como $(x_1, \ldots, x_n)$. La función $\pi_t : X \to X_t$ dada por $\pi_t(\{x_s\}_{s \in S}) = x_t$ es llamada la proyección de X sobre la t-ésima coordenada. Consideremos la familia $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U = \prod_{s \in S} U_s$ donde U_s es un abierto en X_s, $U_s = X_s$ para cada $s \in S \setminus F$ y $F \subset S$ es un conjunto finito de S. Notemos que en este caso $U = \bigcap_{s \in F} \pi_s^{-1}(U_s)$, al conjunto finito F lo llamaremos el *soporte* de U. La mínima topología en X que contiene a la familia $\mathcal{B}$ y de la cual $\mathcal{B}$ es base, es conocida como la topología producto en X.

Un conjunto G_δ en X es un conjunto A que es igual a la intersección numerable de conjuntos abiertos de X y un conjunto F_σ en X es un conjunto A que es igual a la unión numerable de conjuntos cerrados de X.

Si X es un espacio topológico, Y es un conjunto y $f : X \to Y$ es sobreyectiva, entonces la familia $\{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en X }\}$ es llamada la topología cociente en el conjunto Y inducida por f.

Si X, Y son espacios topológicos y existe una función $f : X \to Y$ diremos que f es continua, si para cada U subconjunto abierto de Y se tiene que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X. Si f es biyectiva y con inversa continua, entonces f es un homeomorfismo. Una función continua $f : X \to Y$ es cerrada (abierta), si para todo subconjunto cerrado (abierto) $A \subset X$ la imagen $f(A)$ es cerrada (abierta) en Y. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ sobreyectiva. Decimos que f es una función cociente, si $f^{-1}(U)$ es abierto en X si y sólo si U lo es en Y.

Dado X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita, si cada $x \in X$ posee una vecindad que interseca a lo más a una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de subconjuntos de un espacio X. Una cubierta $\mathcal{U}'$ de subconjuntos de X es un refinamiento de $\mathcal{U}$, si para cada $U' \in \mathcal{U}'$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U' \subset U$. Si todos los elementos de $\mathcal{U}'$ son abiertos decimos que es un refinamiento abierto.

Se dice que $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-productiva, si para cada $\{X_s\}_{s\in S}$ donde X_s tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $|S| \leq \kappa$ se tiene que $\prod_{s\in S} X_s$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Decimos que $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-aditiva, si para cada $\{X_s\}_{s\in S}$ donde X_s tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $|S| \leq \kappa$ se tiene que $\bigoplus_{s\in S} X_s$ tiene $\mathcal{P}$.

Un espacio X es un *k-espacio* si es imagen de un espacio localmente compacto bajo una función cociente. Dado X un espacio topológico, tomemos $X' = X \times \{1\}$ y definamos $A(X) = X \cup X'$. Por simplicidad para cada elemento $x \in X$ denotaremos al elemento $(x, 1) \in X'$ por x' y para $B \subset X$, sea $B' = \{x' : x \in B\} = B \times \{1\} \subset X'$. Para cada $x' \in X'$, sea $\mathcal{B}(x') = \{\{x'\}\}$. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}(x) = \{U \cup (U' \setminus \{x'\}) : U$ es abierto en X con $x \in U\}$. Denotaremos por τ a la topología generada por los siguientes abiertos $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x) \cup \bigcup_{x'\in X'} \mathcal{B}(x')$. El espacio $(A(X), \tau)$ se conoce como el *Duplicado de Alexandroff* de X.

A cada conjunto X se le asigna un número cardinal, llamado la cardinalidad de X y es denotada por $|X|$. La igualdad $|X| = |Y|$ es cierta si y sólo si existe una función biyectiva de X en Y. Para un conjunto finito X, la cardinalidad de X es igual al número de elementos de X. El número cardinal asignado a $\mathbb{N}$ es denotado por el símbolo $\aleph_0$, y el número cardinal asignado a $\mathbb{R}$ es $\mathfrak{c}$.

Dados $|X| = \kappa$ y $|Y| = \lambda$, decimos que $\kappa \leq \lambda$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva. Para cualquier conjunto X y un cardinal infinito κ, $[X]^{\leq\kappa}$ denota la colección de todos los subconjuntos de X con cardinalidad menor o igual a κ; $[X]^{<\kappa}$ y $[X]^{\kappa}$ son definidos análogamente.

Fijemos dos números cardinales κ, λ donde $|X| = \kappa$, $|Y| = \lambda$. Se define la suma de los cardinales $\kappa + \lambda$ como la cardinalidad de $X \cup Y$, cuando $X \cap Y = \emptyset$. El producto de los mismos cardinales $\kappa \cdot \lambda$ se define como la cardinalidad de $X \times Y$. Definamos también la potencia de los cardinales κ^λ como la cardinalidad del conjunto de funciones de Y en X.

Se sabe que si X tiene cardinalidad κ entonces el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ de X tiene cardinalidad 2^κ, mas aún, se tiene que $\kappa < 2^\kappa$. Las reglas básicas de la aritmética cardinal son las siguientes:

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \kappa^\mu, \qquad (\kappa\gamma)^\lambda = \kappa^\lambda \gamma^\lambda, \qquad (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}.$$

Además

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

En general seguiremos la notación que se usa en [2], algunas propiedades básicas de los conceptos que definimos con anterioridad son presentadas sin ser desarrolladas a detalle pero usualmente se cubren en un curso básico de Licenciatura y también pueden consultarse en [3], [4], [5], [6], [7] y [8].

0.1 Resultados preliminares de la normalidad

En esta breve sección introduciremos algunos lemas y teoremas acerca de la normalidad que nos serán de ayuda en el texto. Para empezar recordemos la definición de espacio normal, que fue introducida por Tietze en 1923 y por Alexandroff y Urysohn en 1924, la cuál es la siguiente.

DEFINICIÓN 0.1.1. Un espacio topológico X es llamado *normal* o T_4, si X es T_1 y para cada par de conjuntos cerrados ajenos $F, G \subset X$ existen U, V abiertos de X tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Dicha propiedad topológica es una de las más fuertes pues casi la mayoría de los espacios topológicos conocidos la posee. Sabemos que la normalidad se preserva bajo subespacios cerrados, sumas topológicas ajenas, imágenes continuas y cerradas, preimágenes de funciones perfectas, productos con compactos y duplicados de Alexandroff, pero no es una propiedad que se preserve bajo productos.

Seguidamente recordaremos los resultados más importantes asociados a la normalidad.

Uno de ellos es el siguiente lema el cuál es un criterio que nos permite identificar a un espacio que no es normal bajo ciertas condiciones.

LEMA 0.1.2 (Lema de Jones). *Si X es normal y separable entonces todo cerrado discreto en X tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$.*

Como hemos mencionado, una de las propiedades más importantes de los espacios normales es la extensión de funciones continuas sobre subespacios cerrados que enunciamos a continuación.

LEMA 0.1.3 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal y sean F, G cerrados ajenos en X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, entonces existe una función continua*

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$, para cada $x \in F$; $f(y) = b$, para cada $y \in G$.

TEOREMA 0.1.4 (Teorema de extensión de Tietze-Urysohn). *Sea X un espacio normal y F un subconjunto cerrado de X, entonces cualquier función continua $f : F \to \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Un resultado que nos será muy útil es el Teorema de Categoría de Baire.

TEOREMA 0.1.5. *Si un espacio métrico completo es igual a la unión numerable de conjuntos cerrados, entonces al menos un cerrado tiene interior no vacío.*

Capítulo 1

C-Normalidad

1.1 Antecedentes

En el año 2012 A. V. Arhangel'skii sugirió el estudio en Topología General de dos variantes de la normalidad; la C-normalidad y la epi-normalidad. Años más tarde AlZahrani y Kalantan publicaron un estudio sistemático de estas dos propiedades (véase [9],[10]) destacando ciertas clases completas de espacios que son C-normales, así como ejemplos muy particulares.

En este capítulo presentamos un estudio sistemático de las clases más generales de espacios C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica arbitraria y que se definen de manera similar al caso en que $\mathcal{P}$ es la normalidad (ver [11]). Mostramos, en particular, que las clases C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ son hereditarias, aditivas o productivas cuando $\mathcal{P}$ es hereditaria, aditiva o productiva, respectivamente. Aplicamos después estos resultados para estudiar los espacios C-normales; extendemos las clases de espacios C-normales conocidas probando que incluyen a los productos de espacios localmente compactos, a los espacios localmente Lindelöf; brindando también algunos ejemplos específicos. En [1] Saeed mostró la existencia de un espacio Tychonoff no C-normal, nosotros explotaremos los espacios asociados con el ejemplo obtenido por Saeed para probar que la C-normalidad no se preserva bajo subespacios cerrados, uniones de subespacios, imágenes continuas y cerradas, y preimágenes de funciones perfectas; lo cual muestra que el comportamiento categórico de esta propiedad es muy distinto al de la normalidad y así responderemos algunas cuestiones planteadas en [9].

A lo largo de este capítulo trabajaremos con la generalización de las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.1.1 (Arhangel'skii,2012). Un espacio topológico X es llamado *C-normal* si existen un espacio normal Y y una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que la restricción $f|_C : C \to f(C)$ es un homeomorfismo para cada subespacio compacto $C \subset X$.

Definición 1.1.2 (Arhangel'skii,2012). Un espacio topológico X es llamado *epi-normal* si existe una función continua y biyectiva $f : X \to Y$ para algún espacio normal Y.

1.2 Las clases de espacios *epi-$\mathcal{P}$ y C-$\mathcal{P}$*

En esta sección analizaremos la generalización de la C-normalidad y de la epi-normalidad presentando la clase de espacios C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica. Más aún, mostraremos algunos resultados de estas clases que se infieren a través de las operaciones que preservan la propiedad $\mathcal{P}$.

Las siguientes definiciones son las versiones generales de la C-normalidad y de la epi-normalidad.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.

- Un espacio X es C-$\mathcal{P}$ si existe una función $f : X \to Y$ biyectiva, donde Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$, y $f|_C : C \to f(C)$ es homeomorfismo para cada compacto $C \subset X$.

- Un espacio topológico X es llamado *epi-$\mathcal{P}$* si existe una función continua y biyectiva $f : X \to Y$ para algún espacio Y con la propiedad $\mathcal{P}$.

Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$, como toda función continua y biyectiva definida en un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es un homeomorfismo sobre su imagen, todo espacio epi-$\mathcal{P}$ es C-$\mathcal{P}$. La otra implicación no siempre es cierta, por ejemplo cuando $\mathcal{P}$ es la normalidad (ver [10, Ejemplo 1.10]). El siguiente resultado nos proporciona una condición bajo la cual las dos nociones anteriores son equivalentes. La prueba se sigue inmediatamente de [2, Teorema 3.3.21].

Proposición 1.2.2. *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica y X es un k-espacio, entonces X es C-$\mathcal{P}$ si y sólo si X es epi-$\mathcal{P}$.*

Si una propiedad topológica $\mathcal{P}$ implica otra propiedad topológica $\mathcal{Q}$, entonces todo espacio X que es epi-$\mathcal{P}$ es también epi-$\mathcal{Q}$ y todo espacio que es C-$\mathcal{P}$ es C-$\mathcal{Q}$. Obsérvese que, si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son propiedades distintas, las clases de espacios epi-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{Q}$ pueden coincidir, por ejemplo cuando $\mathcal{Q}$ es la clase de espacios epi-$\mathcal{P}$ se tiene que epi-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{Q}$ son la misma clase. De forma similar, C-$\mathcal{P}$ y C-$\mathcal{Q}$ pueden coincidir, como veremos a continuación con los espacios C-$\mathcal{P}$ y C-$(C$-$\mathcal{P})$, donde a esta última clase pertenecen los espacios X que admiten una función biyectiva f sobre un espacio Y tal que f es homeomorfismo sobre los compactos y Y tiene C-$\mathcal{P}$.

PROPOSICIÓN 1.2.3. *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica, las clases de espacios C-$\mathcal{P}$ y C-(C-$\mathcal{P}$) coinciden.*

Demostración. Es suficiente probar que todo espacio C-(C-$\mathcal{P}$) es C-$\mathcal{P}$. Supongamos que existe $f : X \to Y$ biyectiva, donde Y es C-$\mathcal{P}$ y $f|_C : C \to f(C)$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $C \subset X$, probaremos que X es C-$\mathcal{P}$. Como Y es C-$\mathcal{P}$, existen un espacio Z con la propiedad $\mathcal{P}$ y una función biyectiva $g : Y \to Z$ tal que $g|_D : D \to g(D)$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $D \subset Y$. Afirmamos que $g \circ f$ atestigua que X es C-$\mathcal{P}$. En efecto, sea $C \subset X$ compacto. Como $f|_C : C \to f(C)$ es homeomorfismo, entonces $D = f(C)$ es compacto. Se sigue que $g|_D : D \to g(D)$ es homeomorfismo. Por lo tanto $(g \circ f)|_C = (g|_D) \circ (f|_C) : C \to g \circ f(C)$ es homeomorfismo y dado que Z tiene $\mathcal{P}$ se concluye que X es C-$\mathcal{P}$. □

A continuación analizaremos algunas propiedades que las clases *epi*-$\mathcal{P}$ y C-$\mathcal{P}$ adquieren cuando la clase de los espacios que satisfacen $\mathcal{P}$ poseen ciertas características.

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad hereditaria, entonces las clases C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ son hereditarias.*

Demostración. Mostraremos el caso de los espacios C-$\mathcal{P}$, la demostración para los espacios epi-$\mathcal{P}$ es similar. Sea A un subconjunto de X. Como X es un espacio C-$\mathcal{P}$ entonces existe $f : X \to Y$ biyectiva, donde Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$, tal que $f|_C : C \to f(C)$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $C \subset X$. Dado que la propiedad $\mathcal{P}$ es hereditaria, se tiene que $f(A)$ posee la propiedad $\mathcal{P}$. Es claro que $f|_A : A \to f(A)$ es biyectiva. Ya que cualquier subespacio compacto de A es compacto en X, se tiene que $(f|_A)|_C = f|_C$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $C \subset A$. Por lo tanto A es C-$\mathcal{P}$. □

PROPOSICIÓN 1.2.5. *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-productiva, entonces las clases C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ son cerradas bajo productos de κ factores.*

Demostración. Probaremos solamente el caso de C-$\mathcal{P}$, el caso de epi-$\mathcal{P}$ es similar. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios C-$\mathcal{P}$ donde S tiene cardinalidad κ. Para cada $s \in S$, sea $f_s : X_s \to Y_s$ una función biyectiva para algún espacio Y_s con la propiedad $\mathcal{P}$ tal que $f_s|_{C_s} : C_s \to f_s(C_s)$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $C_s \subset X_s$. Nótese que $f = \prod_{s\in S} f_s : \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S} Y_s$ es biyectiva. Además, como $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-productiva se sigue que $\prod_{s\in S} Y_s$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Dado $C \subset \prod_{s\in S} X_s$ compacto obsérvese que, si $D = \prod_{s\in S} \pi_s(C)$, la función $f|_D = \prod_{s\in S} f_s|_{\pi_s(C)} = D \to f(D)$ es un homeomorfismo y como consecuencia $f|_C : C \to f(C)$ también es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\prod_{s\in S} X_s$ es C-$\mathcal{P}$. □

PROPOSICIÓN 1.2.6. *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-aditiva, entonces las clases C-$\mathcal{P}$ y epi-$\mathcal{P}$ son cerradas bajo sumas de κ factores.*

Demostración. Consideraremos el caso C-$\mathcal{P}$, el caso de epi-$\mathcal{P}$ es similar. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios C-$\mathcal{P}$ donde $|S| = \kappa$. Para cada $s \in S$, sea $f_s : X_s \to Y_s$ una función biyectiva para algún espacio Y_s con la propiedad $\mathcal{P}$ tal que $f_s|_{C_s} : C_s \to f_s(C_s)$ es homeomorfismo para cada subespacio compacto $C_s \subset X_s$. Como $\mathcal{P}$ es una propiedad κ-aditiva se sigue que $\bigoplus_{s\in S} Y_s$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Además la función $\bigoplus_{s\in S} f_s : \bigoplus_{s\in S} X_s \to \bigoplus_{s\in S} Y_s$ es biyectiva. Ahora sea $C \subset \bigoplus_{s\in S} X_S$ compacto, entonces el conjunto $S_0 = \{s \in S : C \cap X_s \neq \emptyset\}$ es finito y $C_s = C \cap X_s$ es compacto para cada $s \in S_0$. Entonces $(\bigoplus_{s\in S} f_s)|_C = \bigoplus_{s\in S_0} f_s|_{C_s}$ es un homeomorfismo porque $f_s|_{C_s}$ es un homeomorfismo para cada $s \in S_0$. Por lo tanto, $\bigoplus_{s\in S} X_s$ es C-$\mathcal{P}$.

PROPOSICIÓN 1.2.7. *Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ propiedades tales que $X \times Y$ tiene $\mathcal{P}$ siempre que X tiene $\mathcal{P}$ y Y tiene $\mathcal{Q}$. Entonces $X \times Y$ es C-$\mathcal{P}$ siempre que X es C-$\mathcal{P}$ y Y es C-$\mathcal{Q}$.*

Demostración. Dado que X es C-$\mathcal{P}$ existe $f : X \to X_0$ biyectiva, donde X_0 tiene $\mathcal{P}$, tal que $f|_C : C \to f(C)$ es un homeomorfismo para cada subespacio compacto C de X. De forma similar, como Y es C-$\mathcal{Q}$ existe $g : Y \to Y_0$ biyectiva, para algún espacio Y_0 que satisface $\mathcal{Q}$, tal que $g|_C : C \to f(C)$ es un homeomorfismo para cada subespacio compacto C de Y. Es fácil verificar que la función $h = f \times g : X \times Y \to X_0 \times Y_0$ es biyectiva y que $(f \times g)|_C : C \to (f \times g)(C)$ es un homeomorfismo para cada subespacio compacto C de $X \times Y$. Además, por hipótesis $X_0 \times Y_0$ satisface $\mathcal{P}$. Por lo tanto, $X \times Y$ es C-$\mathcal{P}$. □

TEOREMA 1.2.8. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad que se preserva bajo duplicados de Alexandroff, entonces $A(X)$ es C-$\mathcal{P}$ (epi-$\mathcal{P}$) siempre que X es C-$\mathcal{P}$ (epi-$\mathcal{P}$).*

Demostración. Mostraremos el caso de los espacios C-$\mathcal{P}$, el caso epi-$\mathcal{P}$ es similar. Sea X un espacio C-$\mathcal{P}$, entonces existe un espacio Y que tiene $\mathcal{P}$ y una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que $f|_C : C \to f(C)$ es un homeomorfismo para cada subespacio compacto $C \subset X$. Consideremos los espacios duplicados de Alexandroff $A(X)$ y $A(Y)$ de X y Y, respectivamente. Dado que Y tiene $\mathcal{P}$ se sigue que $A(Y)$ tiene $\mathcal{P}$. Definamos $F : A(X) \to A(Y)$ por $F(x) = f(x)$ y $F(x') = f(x)'$ para cada $x \in X$, la función natural inducida por f. Notemos que F es una función biyectiva. Sea $C \subset A(X)$ un subespacio compacto. Mostraremos que $F|_C : C \to F(C)$ es un homeomorfismo. Sea $p : A(X) \to X$ la función dada por $p(x) = x = p(x')$, para cada $x \in X$. Notemos que p es continua. Consideremos el compacto $D = p(C)$ y notemos que $g = f|_D$ es una función continua y biyectiva. Es fácil verificar que la función natural $G : A(D) \to A(g(D))$ inducida por g, dada por $G(x) = g(x)$ y

$G(x') = g(x)'$ para cada $x \in X$, también es continua y biyectiva. Como $A(D)$ es compacto se sigue que G es un homeomorfismo. Por lo tanto $F|_C = G|_C$ también es un homeomorfismo. □

Consideremos ahora la siguiente construcción. Sea X un espacio. Tomemos $kX = X$. Defínase una topología sobre kX como sigue: un subconjunto de kX es abierto si y sólo si su intersección con cualquier subespacio compacto C de X es abierto en C. El espacio kX con esta topología es un k-espacio y tiene los mismos subespacios compactos y la misma topología sobre estos subespacios que X. De estas observaciones se concluye lo siguiente.

PROPOSICIÓN 1.2.9. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica. Dado cualquier espacio X, se cumple que X es C-$\mathcal{P}$ si y sólo si kX es C-$\mathcal{P}$.*

1.3 Espacios C-normales

En esta sección nos enfocaremos particularmente en la C-normalidad y algunas propiedades con las que guarda relación. Obsérvese que los espacios epi-normales, los espacios C-compactos y los espacios C-metrizables son C-normales. De este modo, los siguientes resultados muestran ejemplos de espacios C-normales.

En el Ejercicio 3.3.D de [2] se prueba que todo espacio localmente compacto es epi-compacto, así se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 1.3.1. *Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios localmente compactos, entonces el producto $\prod_{s\in S} X_s$ es epi-compacto.*

EJEMPLO 1.3.2. Dado que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es localmente compacto, como consecuencia del Corolario 1.3.1 se tiene que $\mathbb{R}^S$ es C-normal, para cualquier conjunto S. Además, si $\mathbb{S}$ es la recta de Sorgenfrey, es claro que $\mathbb{S}^S$ admite una función continua y biyectiva sobre $\mathbb{R}^S$, así podemos aplicar la Proposición 1.2.3 para ver que $\mathbb{S}^S$ es C-normal. Sin embargo, $\mathbb{R}^S$ no es normal cuando el conjunto S es no numerable (véase [2, Ejercicio 2.3.E]) y $\mathbb{S}^S$ no es normal cuando S tiene al menos dos elementos (véase [2, Ejemplo 2.3.12]).

Trabajaremos ahora con una noción más general que la compacidad local, la propiedad de Lindelöf local, con la finalidad de obtener más ejemplos de espacios C-normales.

PROPOSICIÓN 1.3.3. *Si X es regular y localmente Lindelöf, entonces X es epi-Lindelöf.*

Demostración. Debemos mostrar que X admite una función biyectiva y continua en un espacio Lindelöf. Sea $Y = X \cup \{y\}$ donde $y \notin X$. Definamos una topología en Y de la siguiente manera. La topología de Y es la mínima topología en Y que satisface las siguientes condiciones:

1. Contiene a la topología de X.
2. Contiene a cada conjunto $U \subset Y$ tal que $y \in U$ y cuyo complemento $Y \setminus U$ es cerrado en X y posee una vecindad en X cuya cerradura en X tiene la propiedad de Lindelöf.

Como X es regular y localmente Lindelöf, entonces el espacio Y es T_1. Verificaremos ahora que Y es regular. Tomemos un punto $x \in Y$ y una vecindad abierta U de x. Si $x \neq y$ podemos suponer que $U \subset X$ y que U es Lindelöf. Por la regularidad de X existe una vecindad abierta V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Obsérvese que $\overline{V}$ es cerrado en Y. Si $x = y$ podemos suponer que $F = Y \setminus U$ es cerrado en X y posee una vecindad V en X cuya cerradura $\overline{V}$ en X tiene la propiedad de Lindelöf. Como $\overline{V}$ es normal, existe W abierto en X tal que $F \subset W \subset \overline{W} \subset V \subset \overline{V}$. Se sigue que $\overline{W}$ es cerrado en Y y si $O = Y \setminus \overline{W}$ entonces $y \in O \subset \overline{O} \subset Y \setminus W \subset Y \setminus F = U$. Por lo tanto, el espacio Y es regular.

Es fácil verificar que Y es Lindelöf. Fijemos $x \in X$ y consideremos el espacio Z que resulta de Y al identificar a los puntos x y y, y sea $q : Y \to Z$ la función cociente asociada con esta identificación. Como Y es normal y q solamente identifica a un subconjunto cerrado, el espacio Z es regular. Como q es continua, se tiene que Z es Lindelöf. Finalmente, es claro que la función $q|_X : X \to Z$ es biyectiva y por lo tanto dicha función atestigua que el espacio X es epi-Lindelöf. □

Mostraremos ahora algunos ejemplos de espacios localmente Lindelöf, y por lo tanto C-normales, que no son localmente compactos y tampoco son normales.

EJEMPLO 1.3.4. Sea X un espacio localmente compacto no normal y Y un espacio Lindelöf no localmente compacto. Consideremos el espacio $X \times Y$ y notemos que $X \times Y$ no es normal, ya que contiene a un subespacio cerrado homeomorfo a X que no es normal, y no es localmente compacto, ya que contiene a un subespacio cerrado homeomorfo a Y que no es localmente compacto. Sin embargo, el producto $X \times Y$ si es localmente Lindelöf. Por lo tanto, la Proposición 1.3.3 implica que $X \times Y$ es C-normal. Como un caso particular podríamos tomar X como la plancha Tychonoff sin un punto y Y como la recta de Sorgenfrey.

EJEMPLO 1.3.5. Consideremos la siguiente variante de los Ψ-espacios. Sea $\mathcal{A}$ una familia maximal de subconjuntos no numerables de ω_1 tales que $A \cap B$

es numerable para cada $A, B \in \mathcal{A}$. Es fácil verificar que la maximalidad de $\mathcal{A}$ implica que $|\mathcal{A}| \geq \omega_2$. Consideremos el espacio $\Psi(\mathcal{A}) = \omega_1 \cup \mathcal{A}$, donde cada punto en ω_1 es aislado y cada $A \in \mathcal{A}$ tiene como base de vecindades abiertas a la familia $\{A \setminus C : C \in [\omega_1]^{\leq\omega}\}$. Se observa de la definición que $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente Lindelöf y no localmente compacto.

Probaremos ahora que $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal. Supongamos por el contrario que $\Psi(\mathcal{A})$ es normal. Sea $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una partición de $\mathcal{A}$ en subconjuntos no vacíos y fijemos $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Dado $\alpha < \omega_1$ por la normalidad de $\Psi(\mathcal{A})$ podemos encontrar un subconjunto no numerable B_α de ω_1 tal que los conjuntos $\mathcal{A}_\alpha \cup B_\alpha$ y $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_\alpha) \cup (\omega_1 \setminus B_\alpha)$ forman una partición de $\Psi(\mathcal{A})$ en conjuntos abiertos. Construiremos un subconjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de ω_1 recursivamente como sigue. Fijemos $x_0 \in A_0$ y si se tiene definido $\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ para algún $\beta < \omega_1$, fijemos $x_\beta \in A_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta}(\{x_\alpha\} \cup B_\alpha)$. Consideremos el conjunto no numerable $B = \{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, luego la maximalidad de $\mathcal{A}$ implica que $A \cap B$ es no numerable para algún $A \in \mathcal{A}$. Sabemos que $A \in \mathcal{A}_\gamma$ para algún $\gamma < \omega_1$. Como $\{A\} \cup B_\gamma$ es abierto, entonces $(A \cap B) \setminus B_\gamma \subset A \setminus B_\gamma$ es numerable, así $(A \cap B) \setminus B_\gamma \subset \{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ para algún $\gamma < \beta < \omega_1$. Ya que $A \cap B$ es no numerable podemos suponer que β es tal que $x_\beta \in A \cap B$. Sin embargo, por construcción $x_\beta \notin B_\gamma$, lo cual no es posible. Por lo tanto, el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

PROPOSICIÓN 1.3.6. *Si cualquier subespacio numerable de X es discreto entonces X es C-normal.*

Demostración. A causa de [9, Corolario 1.4] es suficiente mostrar que los únicos subconjuntos compactos de X son los finitos. Sea $A \subset X$ infinito. Tomemos $B \subset A$ infinito y numerable. Notemos que B es cerrado en X pues $B \cup \{x\}$ es discreto para cada $x \in X$. Como B es discreto, se sigue que A no es compacto. □

Describimos ahora un ejemplo de un espacio para el cual todo subconjunto numerable es discreto, y por lo tanto C-normal, pero que no es normal. Tal ejemplo fue obtenido por Shakhmatov.

EJEMPLO 1.3.7. Sea $I^{\mathfrak{c}}$ el cubo de Tychonoff de peso $\mathfrak{c}$. Sea

$$\Sigma I^{\mathfrak{c}} = \{x \in I^{\mathfrak{c}} : |\{\alpha < \mathfrak{c} : \pi_\alpha(x) \neq 0\}| \leq \omega\} \subset I^{\mathfrak{c}},$$

el Σ-producto de $\mathfrak{c}$ copias del intervalo unitario con centro en 0. Nótese que $|\Sigma I^{\mathfrak{c}}| = \mathfrak{c}$, tomemos una enumeración $\{x_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de los elementos de $\Sigma I^{\mathfrak{c}}$ donde cada elemento se repite $\mathfrak{c}$ veces. Tomemos además una enumeración $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de los elementos de $[\mathfrak{c}]^{\leq\omega}$ donde cada elemento aparece $\mathfrak{c}$ veces. Para cada

$\alpha < \mathfrak{c}$ se determinará un punto $y_\alpha \in I^{\mathfrak{c}}$ por:

$$\pi_\beta(y_\alpha) = \begin{cases} \pi_\beta(x_\alpha) & \text{si } \beta \leq \alpha; \\ 1 & \text{si } \beta > \alpha, \beta \in A_\alpha; \\ 0 & \text{si } \beta > \alpha, \beta \notin A_\alpha. \end{cases}$$

Como se prueba en [12, Ejemplo 1.2.5], el espacio $Y = \{y_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}} \subset I^{\mathfrak{c}}$ es pseudocompacto y cualquiera de sus subconjuntos numerables es discreto. Como Y es pseudocompacto y no numerablemente compacto, se concluye de [2, Teorema 3.10.21] que Y no puede ser normal.

1.4 Operaciones con espacios C-normales

En esta sección mostraremos ciertas propiedades que preservan la C-normalidad, así como también ejemplos donde la C-normalidad no es preservada.

En [1] M. M. Saeed mostró la existencia de un espacio Tychonoff que no es C-normal. Tal ejemplo se construye de la siguiente manera: sea 2^{ω_1} el producto topológico de ω_1 copias del espacio discreto de dos puntos. Ahora considérese el subespacio

$$\Sigma 2^{\omega_1} = \{x \in 2^{\omega_1} : x^{-1}(1) \text{ es numerable}\},$$

entonces el producto $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ no es C-normal (véase [1, Ejemplo 8]).

El ejemplo que acabamos de mencionar nos provee además de un ejemplo de un espacio compacto y un espacio normal tales que su producto no es C-normal, de lo cual concluimos que la C-normalidad no es una propiedad productiva.

Sabemos que la normalidad se preserva bajo subespacios cerrados y funciones continuas y cerradas. En las siguientes lineas aprovecharemos el ejemplo antes mencionado para mostrar que la C-normalidad no necesariamente se preserva en estos casos.

Ejemplo 1.4.1. Existe un espacio epi-compacto que contiene un subespacio cerrado que no es C-normal.

Demostración. Consideremos el producto cartesiano $Y = 2^{\omega_1} \times 2^{\omega_1}$ con la topología producto y el producto cartesiano $X = 2^{\omega_1} \times 2^{\omega_1}$ con la topología que se obtiene de la topología producto al agregar como abiertos a $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ y a su complemento. Notemos que X es epi-normal, en efecto, la función identidad $id : X \to Y$ es continua y Y es compacto. Es claro que $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ es cerrado en X, además la topología que hereda $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ de

X coincide con la topología que hereda de Y. Por lo tanto, $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ es un subespacio cerrado de X que no es C-normal. $\square$

EJEMPLO 1.4.2. Existe un espacio que no es C-normal, pero que es imagen continua y cerrada de un espacio epi-compacto.

Demostración. Tomemos X y Y como en el Ejemplo 1.4.1. Ahora consideremos la función $f : X \to Y$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} id(x) & \text{si } x \in 2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que f es continua y $f(X) = 2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$. Observemos que si F es cerrado en X, entonces $f(F) = F \cap (2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1})$ o $f(F) = (F \cap (2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1})) \cup \{0\}$, de lo cual se deduce que f es una función cerrada. Solo nos resta recordar que X es epi-compacto y que $f(X)$ no es C-normal. $\square$

Como toda función continua y cerrada es cociente, del resultado anterior concluimos que, en particular, la C-normalidad no se preserva bajo funciones cocientes. Sucede que tampoco se preserva bajo imágenes inversas de funciones que son perfectas y abiertas. En efecto, tomemos la proyección $\pi : 2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1} \to \Sigma 2^{\omega_1}$ sobre el segundo factor. Como 2^{ω_1} es compacto, se sigue de [2, Teorema 3.7.1.] que la función π además de abierta es perfecta. Sin embargo, $\Sigma 2^{\omega_1}$ es C-normal, mientras que $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1} = \pi^{-1}(\Sigma 2^{\omega_1})$ no es C-normal. $\square$

Abordaremos ahora el caso de las uniones, para ver que la C-normalidad no se preserva bajo la unión de dos subespacios arbitrarios, recurriremos a otro ejemplo obtenido en [13].

EJEMPLO 1.4.3. Existe un espacio no C-normal que es unión de un subespacio compacto y un subespacio localmente compacto.

Demostración. Consideremos el producto $(\omega_1 + 1) \times [0,1]$, el subespacio $R = \{\omega_1\} \times (0,1)$, el espacio $X = \big((\omega_1 + 1) \times [0,1]\big) \setminus R$, y el espacio $Y = X \times (\omega_1 + 1)$. Entonces el espacio Y no es C-normal (ver [13]). Ahora, tomemos $A = (\omega_1 + 1) \times \{0,1\} \times (\omega_1 + 1)$ y $B = (\omega_1 + 1) \times (0,1) \times (\omega_1 + 1)$. Claramente A es compacto, B es localmente compacto y $Y = A \cup B$. $\square$

Responderemos ahora de manera afirmativa la siguiente pregunta que, como se menciona en [14], fue planteada por A. V. Arhangel'skii: ¿Existe un espacio normal que no es C-paracompacto?

EJEMPLO 1.4.4. Existe un espacio normal que no es C-paracompacto.

Demostración. Consideremos el espacio normal $\Sigma 2^{\omega_1}$. Supongamos que el espacio $\Sigma 2^{\omega_1}$ es C-paracompacto. Dado que 2^{ω_1} es C-compacto, de la Proposición 1.2.7 y el hecho de que el producto de un espacio compacto y un espacio paracompacto siempre es paracompacto (ver [2, Teorema 5.1.36]), se sigue que $2^{\omega_1} \times \Sigma 2^{\omega_1}$ es C-paracompacto y por lo tanto C-normal; lo cual sabemos no es cierto. Por lo tanto, el espacio $\Sigma 2^{\omega_1}$ no es C-paracompacto. □

Obsérvese que usando el espacio descrito en los Ejemplos 1.4.1 y 1.4.4 se deduce que la C-paracompacidad no se hereda a subespacios cerrados. Cabe mencionar que el Ejemplo 1.4.4 también proporciona un ejemplo de un espacio epi-normal que no es C-paracompacto, lo cual responde otra pregunta de [14].

1.5 Espacios epi-normales

En esta sección nos enfocaremos en los espacios epi-normales mostrando algunos resultados que poseen.

Se sigue de los Ejemplos 1.4.1, 1.4.2 y 1.5.4 que la epi-normalidad no se preserva bajo subespacios cerrados, uniones, productos, imágenes continuas y cerradas, o bajo preimágenes de funciones perfectas.

Analizaremos ahora aquellas propiedades de los espacios epi-normales que se asemejan a aquellas correspondientes de los espacios normales.

PROPOSICIÓN 1.5.1. *Sea X un espacio epi-normal; si $g : C \to \mathbb{R}$ es una función continua, donde $C \subset X$ es compacto, entonces existe $\hat{g} : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{g}|_C = g$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua y biyectiva, para algún espacio normal Y. Notemos que $f|_C : C \to f(C)$ es un homeomorfismo. Como Y es normal, la función $h = g \circ (f|_C)^{-1} : f(C) \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua $\hat{h} : Y \to \mathbb{R}$. Consideremos la función continua $\hat{g} = \hat{h} \circ f : X \to \mathbb{R}$. Obsérvese que

$$\hat{g}|_C = (\hat{h} \circ f)|_C = (\hat{h}|_{f(C)}) \circ (f|_C) = g \circ (f|_C)^{-1} \circ f|_C = g.$$

Así $\hat{g}$ es la extensión buscada. □

COROLARIO 1.5.2. *Si X es epi-normal, entonces X es Urysohn.*

Demostración. Dados $x, y \in X$ distintos, por la Proposición 1.5.1 podemos tomar una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2$ y $f(y) = 5$. Entonces los abiertos $U = f^{-1}((1,3))$ y $V = f^{-1}((4,6))$ tienen cerraduras ajenas y contienen a x y y, respectivamente. □

El siguiente ejemplo muestra que, en general, los espacios epi-normales no necesariamente son regulares.

Ejemplo 1.5.3. Sea $X = \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión $A = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Defínase la topología τ' en X como la familia de conjuntos de la forma $U \setminus B$ donde $B \subset A$ y U es un abierto en la topología usual τ de $\mathbb{R}$. Claramente (X, τ') es epi-normal ya que su topología es más fina que la topología usual. Por otro lado (X, τ') no es regular ya que $\{0\}$ y A no pueden ser separados por abiertos ajenos (cualquier conjunto abierto de (X, τ') que contenga a A contiene a 0).

Ejemplo 1.5.4. Existe un espacio que no es C-normal y tampoco Urysohn que es unión de dos subespacios cerrados C-normales.

Demostración. Sea $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0'\}$ donde $0'$ no pertenece a $\mathbb{R}^2$. Definamos la topología en X de la siguiente manera: las vecindades de los puntos distintos a 0 y $0'$ son las mismas que en $\mathbb{R}^2$, las vecindades básicas para 0 y $0'$ son $V_n(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1/n^2, y > 0\} \cup \{0\}$ y $V_n(0') = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1/n^2, y < 0\} \cup \{0'\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que 0 y $0'$ no tienen vecindades con cerraduras ajenas por lo tanto se tiene que X no es Urysohn. Como una aplicación del Corolario 1.5.2 se sigue que X no es epi-normal, y del hecho de que X es un espacio Fréchet-Urysohn utilizando la Proposición 1.2.2 se concluye que X no es C-normal. Sean $A = \{(x, y) : y \geq 0\}$ y $B = (\{(x, y) : y \leq 0\} \cup \{0'\}) \setminus \{0\}$. No es muy difícil ver que A y B son cerrados en X, además A es epi-normal ya que la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$ es más gruesa que la que hereda de X. Por otro lado, como B es homeomorfo a A se sigue que también B es epi-normal. Se concluye que $X = A \cup B$ es unión dos subespacios cerrados que son C-normales. $\square$

En el caso de los espacios C-normales, estos no necesariamente son Urysohn, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.5. Consideremos el espacio ω_1 con la topología discreta. Sea $L = \omega_1 + 1$ con la siguiente topología. El espacio ω_1 es abierto en L y ω_1 tiene como base de vecindades abiertas a todos los conjuntos de la forma $(\alpha, \omega_1]$ donde $\alpha < \omega_1$. Consideremos el subespacio abierto $O = (\omega_1 + 1) \times \omega_1$ de $L \times L$. Sea $\{A_1, A_2\}$ una partición de ω_1 en conjuntos no numerables. Consideremos el espacio $X = O \cup \{x_1, x_2\}$, el espacio que resulta de O al agregar dos puntos distintos que no están en $L \times L$, con la topología definida como sigue. El espacio O es abierto en X y las vecindades abiertas de x_i son los conjuntos de la forma $(U \cap (A_i \times \omega_1)) \cup \{x_i\}$ donde U es una vecindad abierta de (ω_1, ω_1) en $L \times L$, para $i = 1, 2$. Observemos que el espacio X es Hausdorff. Además, X no es Urysohn porque x_1 y x_2 no se pueden separar por conjuntos abiertos en X con cerraduras ajenas. Sin embargo, si tomamos

$Y = \mathcal{O} \oplus \{x_1\} \oplus \{x_2\}$, entonces Y es normal y cada restricción de la función identidad de X en Y a cada subconjunto compacto es un homeomorfismo, es decir, X es C-normal.

Capítulo 2

Axiomas de separación relativos

En este capítulo analizaremos algunas propiedades relativas asociadas a los axiomas de separación, poniendo énfasis en las propiedades relativas de la normalidad.

Propiedades topológicas relativas

Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$ en algunos casos hay varias maneras de generar una propiedad nueva a partir de ella ya sea fortaleciéndola (como hemos visto con la C-normalidad) o debilitándola; una manera de hacer esto último es asociarle su versión relativa lo cual consiste en estudiar la propiedad en un subespacio relacionando la propiedad en el subespacio con los elementos del espacio donde este se encuentra inmerso. Las propiedades topológicas relativas han sido estudiadas de manera intrínseca en topología; por ejemplo, la compacidad numerable relativa aparece en el trabajo de A. Grothendieck en [15], V. V. Tkachuk consideró las dimensiones relativas en [16] y [17], A. Chigogidze incluyó en sus textos algunas versiones de regularidad y normalidad relativas (véase [18]). El estudio sistemático de las propiedades topológicas relativas lo propuso Arhangel'skii; para algunas propiedades es intuitivo como determinar su versión relativa, sin embargo para otras resulta algo no trivial pues a algunas propiedades globales les corresponde no una, si no varias variantes naturales de la misma, tan naturales que es difícil tener preferencia por alguna de ellas. La importancia radica en investigar cuál de las variantes relativas permite probar los análogos relativos de teoremas clásicos acerca de tal propiedad global. Sin conocer de antemano los resultados de tal investigación es necesario determinar el comportamiento de cada una de ellas. Por supuesto, en este caso surge el problema de comparar cada una de tales variantes, lo que no siempre resulta trivial.

Axiomas de separación

La definición de espacio topológico es muy general que no permite probar muchos teoremas interesantes. Los axiomas de separación son de lo más comunes, importantes e interesantes conceptos en Topología. Ellos pueden usarse para definir clases más restringidas de espacios topológicos. Los axiomas de separación son usualmente denotados con la Letra T que proviene de la palabra alemana "Trennung" que significa separación. Varios de los axiomas de separación son definidos en términos de subconjuntos cerrados y sus definiciones son engañosamente simples. Sin embargo, la estructura y las propiedades de estos espacios no siempre son fáciles de comprender. Los axiomas de separación que fueron estudiados de esta manera fueron los axiomas de Hausdorff, la regularidad y la normalidad. En este capítulo no trataremos de definir una propiedad relativa en general si no que nos limitaremos a definir y a estudiar algunas versiones relativas de los axiomas de separación como: la propiedad de Hausdorff relativa, la regularidad relativa, la propiedad de Tychonoff relativa y la normalidad relativa.

2.1 Propiedad de Hausdorff relativa y regularidad relativa

Iniciaremos el estudio de las propiedades relativas considerando la propiedad de Hausdorff relativa, que como mencionamos antes presenta más de una versión relativa.

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea $Y \subset X$. Diremos que Y es *Hausdorff en* X, si para cualesquiera dos puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$ se pueden encontrar dos abiertos ajenos U_1, U_2 en X tales que $y_1 \in U_1$ y $y_2 \in U_2$. También se dice en este caso que X es *Hausdorff relativo a* Y.

Notemos que Y Hausdorff en X implica que Y es Hausdorff.

DEFINICIÓN 2.1.2. Se dice que un subespacio Y de X es *fuertemente Hausdorff en* X, si para cualquiera dos puntos diferentes $y \in Y$ y $x \in X$ existen dos abiertos ajenos U, V en el espacio X tales que $y \in U$ y $x \in V$.

De la definición 2.1.2 se sigue que si Y es fuertemente Hausdorff en X entonces Y es Hausdorff en X.

Ahora veremos un ejemplo de un subespacio Hausdorff pero no fuertemente Hausdorff.

EJEMPLO 2.1.3. Sea Y un conjunto infinito y sean p y q dos puntos que no pertenecen a Y. Consideremos $X = Y \cup \{p, q\}$ y definamos una topología sobre X como sigue.

- Los conjuntos $\emptyset$ y X son abiertos.
- Para cada $x \in Y$, $\{x\}$ es abierto.
- Para $x \in \{p, q\}$, las vecindades son de la forma $\{x\} \cup (Y \setminus Z)$; donde $Z \in [Y]^{<\omega}$.

Tomemos $Y' = Y \cup \{p\}$. Para probar que Y' es Hausdorff en X, sean $x, y \in Y'$ tales que $x \neq y$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \neq p$. Luego $U = \{x\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ son abiertos ajenos en X que separan a x e y respectivamente. Por lo tanto Y' es Hausdorff en X. Consideremos ahora abiertos básicos para p y q, es decir, $U = \{p\} \cup (Y \setminus Z_1)$ y $V = \{q\} \cup (Y \setminus Z_2)$ donde $Z_1, Z_2 \in [Y]^{<\omega}$. Notemos que

$$U \cap V = [\{p\} \cup (Y \setminus Z_1)] \cap [\{q\} \cup (Y \setminus Z_2)] = Y \setminus (Z_1 \cup Z_2).$$

Como Z_1 y Z_2 son finitos su unión lo es también. Por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$. Se concluye que Y' no es fuertemente Hausdorff en X.

En el siguiente diagrama (ver Figura 2.1) se muestran las relaciones de la propiedad de Hausdorff y sus versiones relativas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Fuertemente Hausdorff} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Relativamente Hausdorff} \arrow[r] & \text{Hausdorff}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 2.1: Propiedades de Hausdorff relativas.

De manera similar a como se obtienen las versiones relativas de la propiedad de Hausdorff tenemos algunas versiones relativas de la regularidad.

DEFINICIÓN 2.1.4. Diremos que $Y \subset X$ es *regular (fuertemente regular) en* X, si para cada $y \in Y$ y para cualquier conjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$ existen abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subset V$ ($y \in U$ y $F \subset V$, respectivamente).

Se sigue de la definición, que todo $Y \subset X$ fuertemente regular en X es regular en X y fuertemente Hausdorff en X. Enseguida probaremos que Y regular en X implica Y regular y que si Y es regular entonces no necesariamente Y es regular en X.

OBSERVACIÓN 2.1.5. Si Y es regular en X entonces Y es regular. En efecto, sea $y \in Y$ y F un conjunto cerrado en Y tal que $y \notin F$. Se sigue que existe F_1 cerrado en X tal que $F = F_1 \cap Y$. Como $y \notin F$ se tiene que $y \notin F_1$ y dado que

Y es regular en X se tiene que existen U y V abiertos ajenos en X tales que $y \in U$ y $F = F_1 \cap Y \subset V$. Lo que implica que $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son los abiertos ajenos en Y que separan a y y F respectivamente.

EJEMPLO 2.1.6. Sean X y τ' como en el Ejemplo 1.5.3. Sabemos que (X, τ') no es regular. Ahora tomemos $Y = \{0\} \cup A$. Note que Y es un subespacio cerrado por ser unión de dos cerrados, además es un subespacio discreto de (X, τ'), así se tiene que Y es regular. Sin embargo, como se mostró 0 y el conjunto A, el cual es cerrado en (X, τ') no se pueden separar por abiertos ajenos en (X, τ'). Se concluye que Y no es regular en (X, τ').

PROPOSICIÓN 2.1.7. *Si $Z \subset Y \subset X$ y Y es regular (fuertemente regular) en X, entonces Z también es regular (fuertemente regular) en X.*

Demostración. Haremos la prueba para el caso regular, el otro caso es similar. Sea $z \in Z$ y F cerrado en X tal que $z \notin F$. Como $z \in Y$ y Y es regular en X se tiene que existen U, V abiertos ajenos en X tales que $z \in U$ y $F \cap Y \subset V$, lo que implica $z \in U$ y $F \cap Z \subset F \cap Y \subset V$. Por lo tanto Z es regular en X. □

PROPOSICIÓN 2.1.8. *Si $Y \subset X_1 \subset X$ y Y es regular (fuertemente regular) en X, entonces Y es regular (fuertemente regular) en X_1.*

Demostración. Haremos la prueba para el caso regular, el otro caso es similar. Sea $y \in Y$ y $F \subset X_1$ cerrado en X_1 tal que $y \notin F$. Como F es cerrado en X_1 entonces existe F_1 cerrado en X tal que $F = F_1 \cap X_1$. Dado que $y \notin F$ entonces $y \notin F_1$ y como Y es regular en X entonces existen U, V abiertos ajenos en X tales que $y \in U$ y $F_1 \cap Y \subset V$, así $y \in U$ y $F \cap Y \subset F_1 \cap Y \subset V$. Se concluye que $U \cap X_1$ y $V \cap X_1$ son los abiertos ajenos en X_1 que separan a y y $F \cap Y$ respectivamente. Por lo tanto Y es regular en X_1. □

Ahora mostraremos que la regularidad relativa y la fuertemente regularidad se pueden caracterizar de manera similar a la regularidad local.

PROPOSICIÓN 2.1.9. *El subespacio Y es regular en X si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto cerrado $F \subset Y$ tal que $y \notin F$, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $y \in U$ y $\overline{U} \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que Y es regular en X. Sea $y \in Y$ y $F \subset Y$ cerrado tal que $y \notin F$. Como $F \subset Y$ es cerrado en Y existe $F_1 \subset X$ cerrado tal que $F = F_1 \cap Y$ y como $y \notin F$ se sigue que $y \notin F_1$. Dada la regularidad de Y en X se sigue que existen U, V abiertos ajenos en X tales que $y \in U$ y $F = F_1 \cap Y \subset V$. Ahora si tomamos $x \in F$ es claro que V es un abierto de x en X tal que $U \cap V = \emptyset$ y por lo tanto $x \notin \overline{U}$. Así $y \in U$ y $\overline{U} \cap F = \emptyset$.
Supongamos que para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto cerrado $F \subset Y$ tal que $y \notin F$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $y \in U$ y $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Sea $y \in Y$ y $F_1 \subset X$ cerrado en X tal que $y \notin F_1$. Se sigue que $F = F_1 \cap Y$

es cerrado en Y y $y \notin F$. Por hipótesis existe U abierto en X tal que $y \in U$ y $\overline{U} \cap F = \emptyset$, tomando $V = X \setminus \overline{U}$ el cual es abierto en X se tiene que $y \in U$, $F = F_1 \cap Y \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

PROPOSICIÓN 2.1.10. *El subespacio Y es fuertemente regular en X si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ tal que $y \in U$ existe un conjunto abierto $V \subset X$ tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración. Supongamos que Y es fuertemente regular en X. Sea $y \in Y$ y $U \subset X$ abierto tal que $y \in U$. Luego $F = X \setminus U$ es cerrado en X y $y \notin F$. Dada la fuertemente regularidad de Y en X existen V, W abiertos ajenos en X tales que $y \in V$ y $F \subset W$. Ahora si tomamos $x \in F$ entonces W es un abierto de x en X tal que $W \cap V = \emptyset$ y por lo tanto $x \notin \overline{V}$. Así $y \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus F = U$.
Supongamos que para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ tal que $y \in U$ existe un conjunto abierto $V \subset X$ tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sean $y \in Y$ y $F \subset X$ cerrado tal que $y \notin F$. Se sigue que $y \in U = X \setminus F$, así por hipótesis existe $V \subset X$ abierto tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset U$. Tomando $W = X \setminus \overline{V}$ el cual es abierto en X se tiene que $y \in V$, $F \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. □

Concluimos esta sección con otra definición de regularidad relativa.

DEFINICIÓN 2.1.11. Diremos que el subespacio Y es *superregular en X*, si para cada $x \in X$ y para cada conjunto cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen conjuntos abiertos ajenos U, V en X tales que $x \in U$ y $F \cap Y \subset V$.

El siguiente ejemplo muestra un espacio Y fuertemente regular en X que no es superregular en X y también un espacio Y superregular en X que no es fuertemente regular en X.

EJEMPLO 2.1.12. Tomemos (X, τ') como en el Ejemplo 1.5.3. Sea $Y = A$. Notemos que Y es fuertemente regular en (X, τ'). Pero ya que el conjunto cerrado A no puede ser separado del punto 0 por abiertos ajenos en (X, τ') se tiene que Y no es superregular en (X, τ').
Por otro lado, tomemos $Y_1 = \{x | x \leq 0\} \cup \{1/3, 1/2\} \subset (X, \tau')$. Observemos que Y_1 es superregular en (X, τ'). Pero ya que el conjunto cerrado A y $0 \in Y_1$ no se pueden separar por abiertos ajenos en (X, τ') se tiene que Y_1 no es fuertemente regular en (X, τ').

Como hemos observado la regularidad fuerte y la superregularidad no tienen relación entre ellas. El siguiente diagrama (ver Figura 2.2) resume las relaciones entre la regularidad y sus propiedades relativas.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente Regular} \arrow[d] & \\
\text{Superregular} \arrow[r] & \text{Regular relativo} \arrow[r] & \text{Regular}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 2.2: Propiedades de regularidad relativas.

2.2 Regularidad completa relativa

Abordaremos el siguiente axioma de separación relativo, la regularidad completa relativa.

DEFINICIÓN 2.2.1. Diremos que Y es *Tychonoff (fuertemente Tychonoff) en* X, si para cada $y \in Y$ y cada cerrado $F \subset X$, el cual no contiene a y, $y \notin F$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = 0$ y $f(F \cap Y) \subset \{1\}$ ($f(y) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$, respectivamente).

DEFINICIÓN 2.2.2. Se dice que Y es *casi Tychonoff en* X, si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto cerrado $F \subset Y$, tal que $y \notin F$ existe una función real $f : X \to \mathbb{R}$ la cual es continua en todos los puntos de Y y $f(y) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$.

Es fácil ver que Y fuertemente Tychonoff en X implica que Y es Tychonoff en X y que Y Tychonoff en X implica que Y es casi Tychonoff en X. Más aún Y fuertemente Tychonoff en X implica que Y es fuertemente regular en X. Además Y casi Tychonoff en X implica que Y es Tychonoff.

Los siguientes ejemplos describen un espacio Y que es casi Tychonoff en X pero que no es Tychonoff en X y un espacio Y que es Tychonoff en X que no es fuertemente Tychonoff en X.

EJEMPLO 2.2.3. Sean S el semiplano superior, es decir, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y $p = (0, -1)$ un punto que no está en S. Para cada número real x, definamos $V_x = \{(x, y) \in S : 0 \leq y \leq 2\}$, $D_x = \{(s, s - x) \in S : x \leq s \leq x + 2\}$ y $O_x = V_x \cup D_x$. Definamos la topología en $T = S \cup \{p\}$ generada de la siguiente manera:

- Cada punto $(x, y) \in S$ con $y > 0$ es aislado.
- Para cada punto $(x, 0) \in S$, los abiertos básicos son de la forma $O_x \setminus F$ donde $(x, 0) \notin F$ y F es un subconjunto finito de O_x.
- Un conjunto abierto básico en el punto p es de la forma $\{p\} \cup U_n$, donde n es un entero positivo y $U_n = \{(x, y) \in S : x \geq n\}$.

Se prueba en [19] que T es un espacio regular no completamente regular ya que 0 y el conjunto cerrado $[0,1] \times \{0\}$ no se pueden separar por una función continua en T. Sea $Y = \{(x,y)|y > 0\} \cup \{p\}$. Notemos que Y es normal. Supongamos que Y es Tychonoff en T. Sea $A = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 2\}$. Es claro que A es cerrado en T y $p \notin A$. Como Y es Tychonoff en T entonces existe una función continua $f : T \to \mathbb{R}$ tal que $f(A \cap Y) = 0$ y $f(p) = 1$, de la continuidad de f en T se sigue que $f([0,1] \times \{0\}) = 0$ y $f(p) = 1$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto Y no es Tychonoff en T.

Probaremos ahora que Y es casi Tychonoff en T. Sea $y \in Y$ y F cerrado en Y tal que $y \notin F$. Como Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 existe una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = 0$ y $f(F) = 1$. Definamos $\hat{f} : T \to \mathbb{R}$ como $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in Y$ y $\hat{f}(x) = f(p)$ en otro caso. Note que $\hat{f}$ es extensión de f y que es continua en cada punto de Y. Por lo tanto Y es casi Tychonoff en T.

Ejemplo 2.2.4. Sea T como en el Ejemplo 2.2.3. Sea $Y = \{(x,y)|2 \leq y\} \cup \{p\}$. Tomemos $y \in Y$ y F cerrado en T tal que $y \notin F$. Como Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 existe una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = 0$ y $f(F \cap Y) = 1$. Tomando $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in Y$ y $\hat{f}(x) = f(p)$ en otro caso, obtenemos una función continua en T tal que $\hat{f}(y) = 0$ y $\hat{f}(F \cap Y) = 1$. Por lo tanto Y es Tychonoff en T.
Del hecho de que p y el conjunto cerrado $[0,1] \times \{0\}$ no se pueden separar por una función continua en T se concluye que Y no es fuertemente Tychonoff en T.

En el siguiente diagrama (ver Figura 2.3) se muestran las relaciones de la propiedad de Tychonoff y sus versiones relativas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Fuertemente Tychonoff} \arrow[d] & & \\
\text{Tychonoff Relativo} \arrow[r] & \text{Casi Tychonoff} \arrow[r] & \text{Tychonoff}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.3: Propiedades de Tychonoff relativas.

Caracterizaremos de manera local la propiedad de Tychonoff relativa.

Proposición 2.2.5. *El subespacio Y es casi Tychonoff en el espacio X si y sólo si para cada punto $y_0 \in Y$ y cada conjunto abierto U en Y con $y_0 \in U$ existe una función real $g : X \to \mathbb{R}$ tal que g es continua en cada punto de Y para la cual se cumple que $g(y_0) = 0$ y $g(x) = 1$ para $x \in Y \setminus U$.*

Demostración. Supongamos que Y es un subespacio casi Tychonoff en el espacio X. Sea $y_0 \in Y$ y U abierto de Y con $y_0 \in U$. Se tiene que $F = Y \setminus U$ es cerrado en Y. Como Y es un subespacio casi Tychonoff en X existe una función real $f : X \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en cada punto de Y, $f(y_0) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$.
Supongamos que para cada punto $y_0 \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subset Y$ con $y_0 \in U$ existe una función real $g : X \to \mathbb{R}$ tal que g es continua en los puntos de Y, $g(y_0) = 0$ y $g(x) = 1$ para $x \in Y \setminus U$. Sean $y \in Y$ y $F \subset Y$ cerrado tal que $y \notin F$, como F es cerrado en Y entonces $y \in U = Y \setminus F$ el cual es abierto en Y. Por hipótesis existe una función real $g : X \to \mathbb{R}$ tal que g es continua en los puntos de Y para la cual se cumple que $g(y) = 0$ y $g(x) = 1$ para $x \in Y \setminus U$, lo que implica que $g(y) = 0$ y $g(F) \subset \{1\}$. □

2.3 Normalidad relativa

Trabajaremos ahora con las versiones relativas de la normalidad.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea $Y \subset X$. Diremos que Y es *normal (débilmente normal) en* X, si para cada pareja de conjuntos cerrados y ajenos F y G en X existen U, V conjuntos abiertos y ajenos en X (abiertos ajenos en Y correspondientemente) tales que $F \cap Y \subset U$ y $G \cap Y \subset V$.

DEFINICIÓN 2.3.2. Sea $Y \subset X$. Se dice que Y es *fuertemente normal en* X, si para cada pareja de conjuntos cerrados ajenos F y G en Y, existen conjuntos abiertos ajenos $U, V \subset X$ tales que $F \subset U$ y $G \subset V$.

Obsérvese que todo espacio Y fuertemente normal en X es normal en X y que todo espacio Y normal en X es débilmente normal en X.

Los siguientes resultados nos muestran la relación entre las versiones relativas de la normalidad y los subespacios.

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Si $Y \subset Y_1 \subset X_1 \subset X$ y Y_1 es débilmente normal en X_1 entonces Y es débilmente normal en X. En particular, si $Y \subset Z \subset X$ y Z es normal entonces Y es débilmente normal en X.*

Demostración. Sean $F, G \subset X$ cerrados y ajenos en X. Luego $F \cap X_1$ y $G \cap X_1$ son cerrados y ajenos en X_1. Dado que Y_1 es débilmente normal en X_1 existen U, V abiertos ajenos en Y_1 tales que $F \cap Y_1 \subset U$ y $G \cap Y_1 \subset V$, lo que implica que $F \cap Y \subset U \cap Y$ y $G \cap Y \subset V \cap Y$. Donde $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos ajenos en Y. Por lo tanto Y es débilmente normal en X.
Supongamos que $Y \subset Z \subset X$ y Z es normal, luego Z es débilmente normal en sí mismo y por el resultado anterior se concluye que Y es débilmente normal en X. □

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Si $Y \subset Y_1 \subset X$ y Y_1 es normal en X, entonces Y es normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Como Y_1 es normal en X existen U, V abiertos ajenos en X tales que $F \cap Y_1 \subset U$ y $G \cap Y_1 \subset V$. Como $Y \subset Y_1$ se tiene que $F \cap Y \subset U$ y $G \cap Y \subset V$. Por lo tanto, Y es normal en X. □

Ahora veamos como se relacionan la normalidad absoluta y la relativa. Para la normalidad fuerte relativa se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Si Y es fuertemente normal en X, entonces Y es normal.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en Y. Dado que Y es fuertemente normal en X existen abiertos ajenos U, V en X tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Se sigue que $U_1 = U \cap Y$ y $V_1 = V \cap Y$ son los abiertos ajenos en Y que separan a F y G respectivamente. Por lo tanto Y es normal. □

Notemos que por la Proposición 2.3.3 si el espacio Y es normal, entonces Y es débilmente normal en X. Pero de la normalidad del subespacio Y no se sigue que Y sea normal en X incluso cuando X es un espacio Tychonoff y Y es cerrado en X; para ello veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3.6. [El plano de Moore-Niemytzki] Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ el semiplano superior en $\mathbb{R}^2$; denotaremos por L_1 al conjunto de puntos de L donde se da la igualdad, i.e., $L_1 = \{(x, y) \in L : y = 0\}$; y sea $L_2 = L \setminus L_1$. Para cada $(x, y) \in L$ y $r > 0$, sea $B_r(x, y)$ la bola en L de radio r con centro en (x, y) con la métrica usual. Para cada $(x, 0) \in L_1$ y $r > 0$, sea $U_r(x, 0) = \{(x, 0)\} \cup B_r(x, r)$ la unión de $\{(x, 0)\}$ con el conjunto de todos los puntos de L que están dentro del círculo en L de radio r tangente a L_1 en $(x, 0)$; asimismo para cada $(x, y) \in L_2$ y $r > 0$ tomemos $U_r(x, y) = B_r(x, y)$. La colección $\mathcal{B} = \{U_r(x, y) : (x, y) \in L \text{ y } r > 0\}$ satisface las propiedades de base y, como consecuencia, genera una topología en L. Al conjunto L con esta topología se le conoce como *plano de Moore-Niemytzki*. Sabemos que el plano de Moore-Niemytzki no es normal (ver [19]). Tenemos que L_1 la recta discreta es normal y cerrado en L pero L_1 no es normal en L, ya que $F = \{(x, 0) | x \in \mathbb{Q}\}$ y $G = \{(x, 0) | x \in \mathbb{I}\}$ los cuales son cerrados y ajenos en L no pueden ser separados por abiertos ajenos en L. En efecto, supongamos que U y V son abiertos ajenos en L tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Sea $B_n = \{x \in \mathbb{I} : U_{1/n}(x, 0) \subset V\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}$. Por el Teorema de Categoría de Baire 0.1.5 existe $n \in \mathbb{N}$ y un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tales que $(a, b) \subset \overline{B}_n$. Sea $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \in \overline{B}_n$ y fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_{1/m}(q, 0) \subset U$. Sea $x \in B_n$ tal que $|q - x| < \delta = \text{mín}\{1/n, 1/m\}$ entonces $\emptyset \neq U_{1/m}(q, 0) \cap U_{1/n}(x, 0) \subset U \cap V$, lo que es una contradicción. Por lo tanto L_1 no es normal en L.

Mostraremos ahora que de la normalidad de Y en X no se sigue que Y sea normal, basta tomar a X e Y cualquier pareja donde X sea compacto y Y un subespacio no normal como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3.7. [La plancha de Tychonoff sin un punto] La plancha de Tychonoff es el espacio $X = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1)$. Notemos que X es compacto por ser un producto de espacios compactos y por lo tanto es normal, de lo que se sigue que el subespacio $Y = X \setminus \{(\omega, \omega_1)\}$ es normal en X. Sin embargo sabemos que Y no es normal (ver [19]). Además X es fuertemente normal en si mismo pero Y no es fuertemente normal en X puesto que Y no es normal. Es decir, la normalidad fuerte relativa no se hereda a subespacios abiertos y densos.

Los siguientes resultados muestran algunas condiciones sobre un subespacio Y de X bajo las cuales Y es normal o fuertemente normal en X.

PROPOSICIÓN 2.3.8. *Si Y es cerrado en X y Y es normal en X, entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en Y. Luego por ser Y cerrado en X se sigue que F y G son cerrados ajenos en X. Como Y es normal en X se tiene que existen U, V abiertos ajenos de X tales $F \subset U$ y $G \subset V$. Así Y es fuertemente normal en X. $\square$

COROLARIO 2.3.9. *Si Y es normal en X y cualesquiera subconjuntos F y G cerrados ajenos en Y tienen cerraduras que no se intersectan en X. Entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en Y. Por hipótesis $\overline{F} \cap \overline{G} = \emptyset$. Como Y es normal en X existen U y V abiertos ajenos en X tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Por lo tanto Y es fuertemente normal en X. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.10. *Si $\overline{Y} = X$ y Y es débilmente normal en X, entonces Y es normal en X.*

Demostración. Sean F, G subconjuntos cerrados ajenos de X. Como Y es débilmente normal en X existen U, V abiertos ajenos en Y tales que $F \cap Y \subset U$ y $G \cap Y \subset V$. Como U y V son abiertos en Y se sigue que $U = U_1 \cap Y$ y $V = V_1 \cap Y$ donde U_1 y V_1 son abiertos en X. Dado que $\overline{Y} = X$ se concluye que U_1 y V_1 son ajenos en X (si $x \in U_1 \cap V_1$ por la densidad de Y se tiene que existe $y \in U_1 \cap V_1$ lo que implica que $y \in U \cap V$) tales que $F \cap Y \subset U_1$ y $G \cap Y \subset V_1$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.11. *Si $\overline{Y} = X$ y Y es normal en sí mismo, entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en Y. Como Y es normal existen U, V abiertos ajenos en Y tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Se sigue que existen U_1, V_1 abiertos en X tales que $U = U_1 \cap Y$ y $V = V_1 \cap Y$. Dado que Y es denso en X se tiene que U_1 y V_1 son ajenos, además separan a F y G respectivamente. De lo que se concluye que Y es fuertemente normal en X. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.12. *Si Y es un subespacio abierto en X, entonces Y es normal si y sólo si Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Supongamos que Y es normal. Sea F, G cerrados ajenos en Y. Dado que Y es normal existen U, V abiertos ajenos en Y tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Como Y es un subespacio abierto de X se tiene que U y V son abiertos ajenos en X que separan a F y G. Por lo tanto Y es fuertemente normal.
De la Proposición 2.3.5 se tiene que si Y es fuertemente normal entonces Y es normal. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.13. *Sea $Y \subset X$ con Y normal en X, si X_1 es un conjunto cerrado en X y $Y_1 \subset Y \cap X_1$. Entonces Y_1 es normal en X_1.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en X_1. Notemos que F y G son cerrados ajenos en X por ser X_1 cerrado en X. Como Y es normal en X por la Proposición 2.3.4 se sigue que Y_1 es normal en X, así existen U y V abiertos ajenos en X tales que $F \cap Y_1 \subset U$ y $G \cap Y_1 \subset V$. Se sigue que $U_1 = U \cap X_1$ y $V_1 = V \cap X_1$ son abiertos ajenos en X_1 tales que $F \cap Y_1 \subset U_1$ y $G \cap Y_1 \subset V_1$. Por lo tanto Y_1 es normal en X_1. $\square$

La generalización del teorema clásico sobre la normalidad de un espacio regular y Lindelöf [2, Teorema 3.8.2] es el siguiente.

TEOREMA 2.3.14. *Sea $Y \subset X$. Si Y es un subespacio regular en X y además es Lindelöf, entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos de Y. Para cada $x \in F$ tómese una vecindad U_x de x en X tal que $\overline{U_x} \cap G = \emptyset$ (ver Proposición 2.1.9). De manera análoga para cada $y \in G$ tómese una vecindad V_y de y en X tal que $\overline{V_y} \cap F = \emptyset$. Como Y es Lindelöf, existen conjuntos numerables $F_1 \subset F$ y $G_1 \subset G$ tales que $F \subset \bigcup_{x \in F_1} U_x$ y $G \subset \bigcup_{y \in G_1} V_y$. Como F_1 y G_1 son numerables podemos escribir $F_1 = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $G_1 = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.
Tomemos $U'_{x_n} = U_{x_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}$ y $V'_{y_n} = V_{y_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Claramente U'_{x_n} y V'_{y_n} son abiertos en X, $F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_{x_n}$ y $G \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_{y_n}$. Además

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_{x_n} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V'_{y_m} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U'_{x_n} \cap V'_{y_m} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

Por lo tanto, Y es fuertemente normal en X. $\square$

COROLARIO 2.3.15. *Si $Y \subset X$, X es regular y Y es Lindelöf, entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Como X es regular se tiene que Y es regular en X. Así de la Proposición 2.3.14 se concluye que Y es fuertemente normal en X. $\square$

Vamos a concluir esta sección con la noción de perfectamente localizado y su relación con la normalidad relativa.

DEFINICIÓN 2.3.16. Un subespacio Y del espacio X se dice que es *perfectamente localizado en X*, si para cada conjunto abierto U en X, el cual contiene a Y existe una familia de conjuntos cerrados $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $Y \subset \bigcup_{n\in N} B_n \subset U$.

TEOREMA 2.3.17. *Si Y es débilmente normal en X y Y es perfectamente localizado en X entonces Y es normal.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en Y. Consideremos la intersección de las cerraduras en X, es decir, $P = \overline{F} \cap \overline{G}$ el cual es cerrado en X; así el conjunto $U = X \setminus P$ es abierto en X. Además $P \cap Y = (\overline{F} \cap \overline{G}) \cap Y = (\overline{F} \cap Y) \cap (\overline{G} \cap Y) = F \cap G = \emptyset$ y por lo tanto $Y \subset U$. Como Y es perfectamente localizado en X existe una familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados en X tales que $Y \subset \bigcup_{n\in N} B_n \subset U$. Sea $G_n = G \cap B_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{F} \cap \overline{G_n} \subset \overline{F} \cap \overline{G} \cap B_n \subset P \cap B_n = \emptyset$. Puesto que Y es débilmente normal en X los conjuntos cerrados $\overline{F}$ y $\overline{G_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pueden ser separados por dos conjuntos abiertos y ajenos en Y. Notemos que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ ya que si $y \in G$ como $Y \subset \bigcup_{n\in N} B_n$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in B_n$. Sean $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los conjuntos abiertos en Y tales que $G_n \subset W_n$ y $\overline{W_n} \cap F = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Como F es cerrado en Y se sigue que $W = Y \setminus F$ es abierto en Y tal que $G \subset W$, además $\overline{W_n} \subset W$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que del [2, Lema 1.5.15] se concluye que Y es normal. $\square$

En el siguiente diagrama (ver Figura 3.1) se muestran las relaciones de la normalidad y sus versiones relativas.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Fuertemente Normal} & \longrightarrow & \text{Normal} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Normal Relativo} & \longrightarrow & \text{Débilmente Normal}
\end{array}
$$

FIGURA 2.4: Propiedades de normalidad relativas.

2.4 Realnormalidad relativa

En esta sección trabajaremos con algunas versiones relativas de la normalidad asociadas con las funciones continuas con la finalidad de obtener versiones relativas del Teorema de Urysohn y del Teorema de extensión de Tietze-Urysohn.

Subespacios débilmente C-encajados

Definición 2.4.1. Decimos que Y es *débilmente C-encajado en X*, si toda función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ admite una extensión $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ la cual es continua en cada punto de Y.

Notemos que todo subespacio C-encajado en un espacio X es débilmente C-encajado en X. Sabemos que en un espacio normal todo subespacio cerrado es C-encajado. Sin embargo, los subespacios abiertos no necesariamente son C-encajados. Por esta razón la siguiente proposición muestra ejemplos de espacios débilmente C-encajados que no son C-encajados.

Proposición 2.4.2. *Si Y es un espacio abierto en un espacio X, entonces Y es débilmente C-encajado en X.*

Demostración. Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ continua. Como Y es abierto solo falta definir la función en los puntos que pertenecen a $X \setminus Y$ el cual es cerrado. Para cada $x \in X$ definamos $\hat{f}(x) = 1$, si $x \in X \setminus Y$; y $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \in Y$. Es claro que $\hat{f}$ es una extensión de f y dado que Y es abierto se tiene que $\hat{f}$ es continua en cada punto de Y. □

La Proposición 2.4.2 no puede extenderse a cerrados y discretos.

Ejemplo 2.4.3. Sean L y L_1 como en el Ejemplo 2.3.6. Veamos que L_1 no es débilmente C-encajado en L. Como se ha observado $F = \{(x,0)|x \in \mathbb{Q}\}$ y $G = \{(x,0)|x \in \mathbb{I}\}$ son cerrados ajenos en L_1 y por lo tanto en L. Tomemos $f : L_1 \to \mathbb{R}$ definida como $f((x,0)) = 0$ si $(x,0) \in F$ y $f((x,0)) = 1$ si $(x,0) \in G$. Dado que L_1 tiene la topología discreta se sigue que f es continua. Supongamos que existe $\hat{f} : L \to \mathbb{R}$ extensión de f y que $\hat{f}$ es continua en cada punto de L_1. Se sigue que $F \subset int\hat{f}^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $G \subset int\hat{f}^{-1}((3/4, \infty))$, donde $int\hat{f}^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $int\hat{f}^{-1}((3/4, \infty))$ son abiertos ajenos en L. Lo cual es una contradicción ya que F y G no pueden ser separados por abiertos ajenos en L como se probó en el Ejemplo 2.3.6.

Como observamos antes todo subespacio cerrado de un espacio normal es C-encajado y por lo tanto débilmente C-encajado. La siguiente proposición muestra que la otra implicación es cierta y caracteriza la normalidad en términos de subconjuntos débilmente C-encajados.

PROPOSICIÓN 2.4.4. *Un espacio X es normal si y sólo si todo subespacio cerrado del espacio X es débilmente C-encajado en X.*

Demostración. Supongamos que todo subespacio cerrado de el espacio X es débilmente C-encajado en X. Sean F, G subconjuntos cerrados ajenos de X. Como F y G son cerrados entonces $F \cup G$ lo es también. Tomemos $f : F \cup G \to \mathbb{R}$ como $f(x) = 0$ si $x \in F$ y $f(x) = 1$ si $x \in G$, es claro que dicha función es continua, de la hipótesis se sigue que podemos encontrar $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ que extiende a f y que es continua en cada punto de $F \cup G$. Se concluye que $int \hat{f}^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $int \hat{f}^{-1}((3/4, \infty))$ separan a F y G respectivamente. Por lo tanto X es normal. $\square$

El siguiente resultado caracteriza la normalidad fuerte relativa en términos de subconjuntos débilmente C-encajados.

TEOREMA 2.4.5. *Un subespacio Y de X es fuertemente normal en X si y sólo si Y es normal en sí mismo y débilmente C-encajado en X.*

Demostración. Supongamos que Y es fuertemente normal en X. Por la Proposición 2.3.5 se tiene que Y es normal en sí mismo. Ahora sea τ la topología del espacio X y definamos como τ' a la topología en X que tiene como subbase a los elementos de la forma $\{A : A \subset X \setminus Y\} \cup \tau$. Llamemos X_Y a (X, τ') y nótese que al ser Y fuertemente normal en X se tiene que el espacio X_Y es normal. Además Y es cerrado en X_Y, y también X y X_Y generan la misma topología sobre Y. Por el Teorema de Tietze-Urysohn 0.1.4 toda función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ se puede extender a una función continua $\hat{f} : X_Y \to \mathbb{R}$. Dado cualquier $y \in Y$, como la familia $\{U \in \tau | y \in U\}$ es una base de vecindades en X_Y, se concluye que $\hat{f}$ es una extensión de f que es continua en cada uno de los puntos de Y.
Recíprocamente, supongamos que Y es normal en sí mismo y débilmente C-encajado en X. Sean F, G dos subconjuntos cerrados ajenos de Y. Dado que Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 podemos tomar una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(G) = \{1\}$. Por hipótesis podemos encontrar una función $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ que extiende a f y que es continua en cada punto de Y. Se sigue que $int \hat{f}^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $int \hat{f}^{-1}((3/4, \infty))$ separan a F y G respectivamente. Por lo tanto, Y es fuertemente normal en X. $\square$

Realnormalidad

La normalidad de los espacios, entendiéndose como la separación de conjuntos cerrados a través de vecindades es equivalente a la separación de conjuntos cerrados a través de una función continua.

DEFINICIÓN 2.4.6. Diremos que Y es *realnormal en* X, si para cada par de conjuntos cerrados y ajenos $F, G \subset X$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$.

Notemos que si X es normal entonces todo subespacio Y de X es realnormal en X.

La siguiente proposición muestra la relación entre la realnormalidad y la normalidad relativa.

PROPOSICIÓN 2.4.7. *Si Y es realnormal en X, entonces Y es normal en X. Mas aún, si X es T_1, entonces Y es Tychonoff en X.*

Demostración. Supongamos que Y es realnormal en X. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Como Y es realnormal en X existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$, lo que implica que $F \cap Y \subset f^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $G \cap Y \subset f^{-1}((3/4, \infty))$. Del hecho que $f^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $f^{-1}((3/4, \infty))$ son abiertos ajenos en X se concluye que Y es normal en X.
Sea X un espacio T_1 y Y realnormal en X. Tomemos $y \in Y$ y $F \subset X$ cerrado, el cual no contiene a y. Por ser X un espacio T_1 se tiene que $\{y\}$ es cerrado en X y dado que Y es realnormal en X existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(\{y\}) \subset \{0\}$ y $f(F \cap Y) \subset \{1\}$. Lo que implica que $f(y) = 0$ y $f(F \cap Y) \subset \{1\}$. Por lo tanto Y es Tychonoff en X. □

En contraposición con la Proposición anterior un espacio Y Tychonoff en X no necesariamente es realnormal en X. Para ello veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.4.8. Sean L y L_1 como en el Ejemplo 2.3.6. Notemos que L es un espacio Tychonoff, así L_1 es Tychonoff en L. Sin embargo, sabemos del Ejemplo 2.3.6 que L_1 no es normal en L. De la Proposición 2.4.7 se concluye que L_1 no es realnormal en L.

El siguiente ejemplo muestra que la realnormalidad relativa no implica la normalidad fuerte.

EJEMPLO 2.4.9. El subespacio Y, la plancha de Tychonoff sin un punto, del Ejemplo 2.3.7 es realnormal en X puesto que X es normal. Observemos que en este caso Y no es normal en sí mismo. Esto nos permite concluir que de la realnormalidad de Y en X no se obtiene la normalidad fuerte de Y.

Realnormalidad débil

Abordaremos ahora una versión débil de la realnormalidad.

DEFINICIÓN 2.4.10. Diremos que Y es *débilmente realnormal en* X, si para cualesquiera conjuntos cerrados y ajenos F, G en X se encuentra una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$.

Notemos que todo subespacio Y realnormal en X es débilmente realnormal en X. Ahora probraremos que todo espacio normal es débilmente realnormal en cualquier espacio que lo contenga.

PROPOSICIÓN 2.4.11. *Si el espacio Y es normal, entonces Y es débilmente realnormal en cualquier espacio X que lo contenga.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Luego $F \cap Y$ y $G \cap Y$ son cerrados y ajenos en Y. Como Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 existe $f : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(F \cap Y) = \{0\}$ y $f(G \cap Y) = \{1\}$. Así Y es débilmente realnormal en X. □

La siguiente proposición muestra la relación entre la realnormalidad débil y los subespacios.

PROPOSICIÓN 2.4.12. *Sea $Y \subset Y_1 \subset X_1 \subset X$ con Y_1 débilmente realnormal en X_1. Entonces Y es débilmente realnormal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Se tiene que $F \cap X_1$ y $G \cap X_1$ son cerrados y ajenos en X_1. Dado que Y_1 es débilmente realnormal en X_1 entonces existe una función $f : Y_1 \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(F \cap Y_1) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y_1) \subset \{1\}$. Se concluye que $g = f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $g(G \cap Y) \subset \{1\}$. Así Y es débilmente realnormal en X. □

COROLARIO 2.4.13. *Si Y es débilmente realnormal en X, entonces cada subespacio $Z \subset Y$ es débilmente realnormal en X.*

La siguiente proposición muestra la relacion entre la realnormalidad débil y la propiedad de Tychonoff.

PROPOSICIÓN 2.4.14. *Si Y es débilmente realnormal en un espacio X que es T_1, entonces el espacio Y es Tychonoff.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y F cerrado en Y tal que $y \notin F$. Como X es T_1 entonces $\{y\}$ es cerrado en X. Además existe F_1 cerrado en X tal que $F = F_1 \cap Y$. Como $y \notin F_1$ se sigue que $\{y\}$ y F_1 son cerrados ajenos en X. Dado que Y es débilmente realnormal en X entonces existe una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(\{y\}) \subset \{0\}$ y $f(F_1 \cap Y) \subset \{1\}$, lo que implica que $f(y) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$. Por lo tanto Y es Tychonoff. □

La normalidad débil relativa no implica la propiedad de Tychonoff relativa.

Ejemplo 2.4.15. Sean T y Y como en el Ejemplo 2.2.3. Como Y es normal por la Proposición 2.4.11 se tiene que Y es débilmente realnormal en T. Sin embargo, se mostró en el Ejemplo 2.2.3 que Y no es Tychonoff en T.

Casi realnormalidad

Trabajaremos con una versión más de la realnormalidad.

Definición 2.4.16. El subespacio Y se dice que es *casi realnormal en* X, si para cualesquiera conjuntos cerrados y ajenos F, G en X existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$.

Se sigue de la definición que todo espacio Y realnormal en X es casi realnormal en X y que todo espacio Y casi realnormal en X es débilmente realnormal en X.

La siguiente proposición generaliza a la Proposición 2.4.7.

Proposición 2.4.17. *Si Y es casi realnormal en X, entonces Y es normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Como Y es casi realnormal en X entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$. Notemos que $int f^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $int f^{-1}((3/4, \infty))$ separan a $F \cap Y$ y $G \cap Y$. Por lo tanto Y es normal en X. □

Proposición 2.4.18. *Si Y es casi realnormal en un espacio X que es T_1, entonces Y es casi Tychonoff en X.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $F \subset Y$ cerrado en Y tal que $y \notin F$. Como X es T_1 se tiene que $\{y\}$ es cerrado en X, además existe F_1 cerrado en X tal que $F = F_1 \cap Y$. Note que $y \notin F_1$ lo que implica que $\{y\}$ y F_1 son cerrados y ajenos en X. Dado que Y es casi realnormal en X existe una función real $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f(\{y\}) \subset \{0\}$ y $f(F_1 \cap Y) \subset \{1\}$. Así $f(y) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$. Por lo tanto Y es casi Tychonoff en X. □

Observemos que la realnormalidad débil de Y en un espacio X no es equivalente a la casi realnormalidad de Y en X, es decir, existe un espacio Y débilmente realnormal en X que no es casi realnormal en X.

EJEMPLO 2.4.19. Sean L y L_1 como en el Ejemplo 2.3.6. Como L_1 es normal por la Proposición 2.4.11 se tiene que L_1 es débilmente realnormal en L. Por otro lado, de la Proposición 2.4.17 y del hecho que L_1 no es normal en L se concluye que L_1 no es casi realnormal en L.

Sin embargo, las dos nociones son equivalentes cuando el subespacio es abierto.

PROPOSICIÓN 2.4.20. *Si Y es abierto en X y Y es débilmente realnormal en X, entonces Y es casi realnormal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en X. Como Y es débilmente realnormal en X existe una función real continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$. Como Y es abierto por la Proposición 2.4.2 existe una función $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos del conjunto Y que es extensión de f. Se concluye que $\hat{f}(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $\hat{f}(G \cap Y) \subset \{1\}$. Por lo tanto Y es casi realnormal en X. □

TEOREMA 2.4.21. *Si Y es abierto y Y es fuertemente normal en X, entonces Y es casi realnormal en X.*

Demostración. Como Y es fuertemente normal en X de la Proposición 2.3.5 se obtiene que Y es normal, así por la Proposición 2.4.11 se tiene que Y es débilmente realnormal en X. Se concluye de la Proposición 2.4.20 que Y es casi realnormal en X. □

El siguiente ejemplo muestra un subespacio casi realnormal que no es realnormal. Dicho ejemplo utiliza las relaciones entre las propiedades relativas de Tychonoff y la realnormalidad que hemos establecido.

EJEMPLO 2.4.22. Sean Y y T como en el Ejemplo 2.2.3. Probaremos ahora que Y es casi realnormal en T. Sea F y G cerrados ajenos en T. Como Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 existe una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $f(G \cap Y) \subset \{1\}$. Definamos $\hat{f} : T \to \mathbb{R}$ como $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in Y$ y $\hat{f}(x) = f(p)$ en otro caso. Note que $\hat{f}$ es extensión de f y que es continua en cada punto de Y. Por lo tanto Y es casi realnormal en T. Como se probó en el Ejemplo 2.2.3 el subespacio Y no es Tychonoff en T, se concluye por la Proposición 2.4.7 que Y no es realnormal en T.

Algunas versiones más de la normalidad relativa

En esta sección analizaremos algunas versiones más de la normalidad relativa, las cuales complementan el estudio de la normalidad.

DEFINICIÓN 2.4.23. Diremos que el subespacio Y es *fuertemente realnormal en* X, si para cualesquiera conjuntos cerrados y ajenos F, G en Y existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$.

DEFINICIÓN 2.4.24. Diremos que el subespacio Y es *ρ-normal en* X, si para cualesquiera conjuntos cerrados y ajenos $F, G \subset Y$, existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$.

Es claro que de la realnormalidad fuerte de Y en X se sigue la realnormalidad de Y en X y la ρ-normalidad de Y en X. Además de la ρ-normalidad de Y en X se tiene la casi realnormalidad de Y en X. El siguiente ejemplo muestra que la ρ-normalidad no implica la realnormalidad fuerte.

EJEMPLO 2.4.25. Tomemos el subespacio Y y el espacio T descritos en el Ejemplo 2.2.3. Un razonamiento análogo al que se usó para mostrar que Y es casi realnormal en T muestra que Y es ρ-normal en T. Sabemos del Ejemplo 2.2.3 que Y no es Tychonoff, así por la Proposición 2.4.7 se tiene que Y no es realnormal en T. Por lo tanto Y no es fuertemente realnormal en T.

El siguiente diagrama (ver Figura 2.5) muestra las relaciones de las distintas versiones de la realnormalidad.

$$\begin{tikzcd}
\text{Fuertemente Realnormal} \arrow[d] & & \\
\text{Realnormal} \arrow[r] & \text{Casi Realnormal} \arrow[r] & \text{Realnormal Débil}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 2.5: Propiedades de Realnormalidad.

PROPOSICIÓN 2.4.26. *Si Y es un subconjunto abierto normal en sí mismo del espacio X entonces Y es ρ-normal en X.*

Demostración. Sean $F, G \subset Y$ cerrados ajenos en Y. Como Y es normal por el Lema de Urysohn 0.1.3 existe una función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$. Como todo subespacio abierto es débilmente C-encajado por la Proposición 2.4.2 se sigue que existe $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ extensión de f, además es continua en todos los puntos del conjunto Y y $\hat{f}(F) \subset \{0\}$ y $\hat{f}(G) \subset \{1\}$. Se concluye que Y es ρ-normal en X. $\square$

COROLARIO 2.4.27. *Si $Y \subset X$ es abierto y Lindelöf, entonces el espacio Y es ρ-normal en X.*

El ejemplo siguiente muestra que un subconjunto Lindelöf no necesariamente es fuertemente realnormal en el espacio más grande.

EJEMPLO 2.4.28. Sea X la plancha de Tychonoff como en el Ejemplo 2.3.7. Tomemos $Y = [0, \omega) \times \{\omega_1\}$ el cual es Lindelöf . Notemos que los conjuntos $F = \{(n, \omega_1) : n \text{ es par}\}$ y $G = \{(n, \omega_1) : n \text{ es impar}\}$ son cerrados ajenos en Y. Supongamos que Y es fuertemente realnormal en X entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(G) = \{1\}$. Sin embargo, $(\omega, \omega_1) \in \overline{F} \cap \overline{G}$, por lo que de la continuidad de f obtenemos que $f((\omega, \omega_1)) \in \overline{f(F)} = \{0\}$ y $f((\omega, \omega_1)) \in \overline{f(G)} = \{1\}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el espacio Y no es fuertemente realnormal en X.

La siguiente proposición muestra la relación entre la ρ-normalidad y la normalidad fuerte.

PROPOSICIÓN 2.4.29. *Si Y es ρ-normal en X, entonces Y es fuertemente normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos en Y. Como Y es ρ-normal en X entonces existe una función real $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$. Dado que f es continua en los puntos de Y se concluye que $F \subset int f^{-1}((-\infty, 1/4))$ y $G \subset int f^{-1}((3/4, \infty))$. Por lo tanto Y es fuertemente normal en X. □

DEFINICIÓN 2.4.30. Diremos que Y es *α-normal (β-normal) en X*, si para cada subconjunto $P \subset Y$, cerrado en X y para cada función continua $f : P \to \mathbb{R}$ existe una extensión continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ de f (existe una extensión continua $\hat{f} : Y \to \mathbb{R}$ de f respectivamente).

Notemos que todo subespacio α-normal es β-normal pero el inverso no se cumple.

EJEMPLO 2.4.31. Sean L y L_1 como en el plano de Moore-Niemytzki (Ejemplo 2.3.6). Notemos que L_1 por ser discreto es β-normal en L. Sin embargo, Dado que $F = \{(x, 0) | x \in \mathbb{Q}\}$ y $G = \{(x, 0) | x \in \mathbb{I}\}$ subconjuntos de L_1 son cerrados ajenos en L y no pueden ser separados por abiertos ajenos en L se sigue que L_1 no es α-normal en L.

DEFINICIÓN 2.4.32. Sea $Y \subset X$. Se dice que Y es *fuertemente α-normal (fuertemente β-normal)* en X, si para cada conjunto cerrado $P \subset X$ y para cada función continua $f : P \to \mathbb{R}$ existe una función continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ (una función continua $\hat{f} : Y \to \mathbb{R}$ respectivamente) tal que $\hat{f}|_{P \cap Y} = f|_{P \cap Y}$.

Notemos que todo subespacio fuertemente α-normal es fuertemente β-normal. Además fuertemente α-normal implica α-normal y fuertemente β-normal implica β-normal.

Para encontrar un ejemplo de un subespacio fuertemente β-normal que no sea fuertemente α-normal necesitaremos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.4.33. *Si Y es fuertemente α-normal en X, entonces Y es realnormal en X.*

Demostración. Sean F, G subconjuntos cerrados y ajenos de X. Notemos que $P = F \cup G$ es cerrado en X. Definamos $f : P \to \mathbb{R}$ como $f(x) = 0$ si $x \in F$ y $f(x) = 1$ si $x \in G$. Dado que F y G son cerrados ajenos se sigue que f es continua. Ya que Y es fuertemente α-normal en X existe una función continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}|_{P\cap Y} = f|_{P\cap Y}$. Notemos que $\hat{f}(F \cap Y) = f(F \cap Y) \subset \{0\}$ y $\hat{f}(G \cap Y) = f(G \cap Y) \subset \{1\}$. Por lo tanto Y es realnormal en X. $\square$

Notemos que si Y es un subespacio normal de X entonces por el Teorema de extensión Tietze-Urysohn se tiene que Y es fuertemente β-normal en X.

EJEMPLO 2.4.34. Tomemos Y y T como en el Ejemplo 2.2.3. Como hemos observado Y no es realnormal en T, de lo que se sigue por la Proposición 2.4.33 que Y no es fuertemente α-normal en T. Sin embargo, dado que Y es normal se tiene que Y es fuertemente β-normal en T.

En el siguiente diagrama (ver Figura 2.6) se resume las relaciones de la α-normalidad y la β-normalidad relativas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Fuertemente } \alpha\text{-normal} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Fuertemente } \beta\text{-normal} \arrow[d] \\
\alpha\text{-normal} \arrow[r] & \beta\text{-normal}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 2.6: Otras propiedades de normalidad relativas.

Capítulo 3

Propiedades de tipo compacidad relativas

En muchas áreas de las matemáticas nos gusta dotar a nuestros objetos con ciertas estructuras tales como una topología, una métrica, una operación algebraica, etc. Una vez que hacemos eso sería fantástico que algunos objetos exhiban propiedades similares a los conjuntos finitos aunque técnicamente sean conjuntos infinitos. En la categoría de espacios topológicos y espacios métricos, estos objetos casi finitos son conocidos como espacios compactos.

El concepto de compacidad fue introducido primeramente por Vietoris en 1921.

La compacidad es una de las más poderosas propiedades de espacios, y es usada de muchas formas en diferentes áreas de las Matemáticas. Una de las formas permite pasar propiedades locales a globales: sea X un espacio compacto y $\mathcal{P}$ una propiedad que conjuntos abiertos pueden o no tener, tal que si U, V poseen $\mathcal{P}$ luego $U \cup V$ también la posee. Luego si X tiene la propiedad localmente, i.e., todo punto tiene una vecindad con la propiedad $\mathcal{P}$ entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Esto es muy bueno, ya que nos permite tener ejemplos como que todas las funciones continuas (localmente acotadas) en un compacto con valores reales son acotadas. Otra forma de usar la compacidad permite localizar los máximos y mínimos de una función lo cuál es muy útil en el cálculo de variaciones. Una tercer forma de usar la compacidad nos permite parcialmente recuperar la noción de límites cuando se trabaja con sucesiones no convergentes, usando subsucesiones de la sucesión original (notemos sin embargo que diferentes subsucesiones podrían converger a diferentes límites; la compacidad garantiza la existencia de un punto límite, aunque no único). La compacidad de un objeto tiende a heredarse a otros objetos; por ejemplo, la imagen de un compacto es compacto, y el producto de finitos o infinitos conjuntos compactos es compacto (este último resultado es conocido como el Teorema de Tychonoff). Además los espacios compactos surgen como una generalización de todos los subconjuntos cerrados y acotados de lo espacios Euclideanos.

De la compacidad se introdujeron versiones débiles las cuales son la propiedad de Lindelöf, la compacidad numerable y la pseudocompacidad. Dichas propiedades usan fuertemente la noción de cubiertas abiertas y refinamientos.

La propiedad de Lindelöf fue introducida en 1929 por Alexandroff y Urysohn mientras que Lindelöf un año más tarde probó que todo familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ contiene una subfamilia numerable con la misma unión. Los espacios numerablemente compactos fueron introducidos por Fréchet en 1906. Los espacio pseudocompactos fueron definidos por Hewitt en 1946.

Así, es natural preguntarse acerca de las relativizaciones asociadas a las propiedades de tipo compacidad y que relación tienen con las propiedades relativas de la normalidad estudiadas en el capítulo anterior.

3.1 Compacidad relativa

La primera propiedad que abordaremos será la compacidad relativa.

DEFINICIÓN 3.1.1. Sea Y un subespacio del espacio X. Diremos que Y es *compacto en* X si para cualquier cubierta abierta γ del espacio X se puede extraer una subfamilia finita $\mu \subset \gamma$ tal que $Y \subset \bigcup \mu$.

Nótese que si $Y \subset X$ y X es compacto entonces Y es compacto en X. En seguida se establecerá la relación que tiene la compacidad relativa con los subespacios.

PROPOSICIÓN 3.1.2. *Si $Y \subset Y_1 \subset X_1 \subset X$ y Y_1 es compacto en X_1, entonces Y es compacto en X.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta del espacio X. Se sigue que γ es cubierta abierta de X_1 y como Y_1 es compacto en X_1 existe una subfamilia finita $\mu \subset \gamma$ tal que $Y_1 \subset \bigcup \mu$. Se concluye que $Y \subset \bigcup \mu$ y por lo tanto Y es compacto en X. □

PROPOSICIÓN 3.1.3. *Sea Y compacto en X, X_1 cerrado en X y $Y_1 \subset Y \cap X_1$, entonces Y_1 es compacto en X_1.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta del espacio X_1. Como X_1 es cerrado se tiene que $\gamma \cup \{X \setminus X_1\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que Y es compacto en X existe una subfamilia finita $\mu \subset \gamma \cup \{X \setminus X_1\}$ tal que $Y \subset \bigcup \mu$. Como $Y_1 \subset Y \cap X_1$ tomando $\mu' = \mu \setminus \{X \setminus X_1\}$, la cual es una subfamilia finita de γ se tiene que $Y_1 \subset \bigcup \mu'$. Por lo tanto Y_1 es compacto en X_1. □

PROPOSICIÓN 3.1.4. *Si $Y \subset \overline{Y} \subset X_1 \subset X$, entonces Y es compacto en X_1 si y sólo si Y es compacto en X. En particular, si Y es cerrado en X, entonces Y es compacto en X si y sólo si Y es compacto en sí mismo.*

Demostración. De la Proposición 3.1.2 se tiene que si Y es compacto en X_1 entonces Y es compacto en X.

Supongamos que Y es compacto en X. De la Proposición 3.1.3 se sigue que Y es compacto en $\overline{Y}$. Como $\overline{Y} \subset X_1$ por la Proposición 3.1.2 se concluye Y es compacto en X_1.

Si Y es cerrado en X tomando $Y = X_1$ obtenemos de lo anterior que Y es compacto en X si y sólo si Y es compacto. □

Sabemos que todo espacio compacto es Lindelöf, y en particular, normal, Tychonoff, Hausdorff y T_1. Las siguientes proposiciones muestran la relación entre la compacidad relativa y los axiomas de separación relativos.

PROPOSICIÓN 3.1.5. *Sea X un espacio de Hausdorff y Y compacto en X. Entonces Y es superregular en X.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $F \subset X$ cerrado de X. Sea $G = Y \cap F$. Para cada $x \in F$ tómense U_x y V_x abiertos ajenos en X tales que $x_0 \in U_x$ y $x \in V_x$. Como G es compacto en F por la Proposición 3.1.3 y $F \subset \bigcup_{x \in F} V_x$, existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $G \subset V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Como $x_0 \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y $U \cap V = \emptyset$, se concluye que Y es superregular en X. □

PROPOSICIÓN 3.1.6. *Si Y es fuertemente Hausdorff en X y Y es compacto en X, entonces Y es regular en X.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y F cerrado en X tal que $y \notin F$. Sea $G = Y \cap F$. Como Y es fuertemente Hausdorff para cada $x \in F$ existen U_x y V_x abiertos ajenos en X tales que $y \in U_x$ y $x \in V_x$. Como G es compacto en F por la Proposición 3.1.3 y $F \subset \bigcup_{x \in F} V_x$, existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $G \subset V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Como $y \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y $U \cap V = \emptyset$, se concluye que Y es regular en X. □

El siguiente ejemplo demuestra que si Y es Hausdorff en X y compacto en X, entonces no necesariamente se sigue que Y sea regular en X.

EJEMPLO 3.1.7. Tomemos Y un espacio Hausdorff que no sea regular y pongamos $X = Y \cup \{\xi\}$, donde $\xi \notin Y$. Consideremos como abiertos en X todos los abiertos del espacio Y y todos los conjuntos de X que contienen el punto ξ y que su complemento es finito. Dado que para cualquier cubierta abierta γ de X existe $U \in \gamma$ tal que $\xi \in U$ y que para el complemento finito restante de U podemos tomar un número finito de abiertos en γ que los contengan se tiene que X es compacto. Como Y es abierto en X y Y es Hausdorff entonces

Y es Hausdorff en X. Dado que Y no es regular de la Observación 2.1.5 se tiene que Y no es regular en X.

En la Proposición 3.1.5 no se puede concluir que Y sea fuertemente regular en X.

EJEMPLO 3.1.8. Sean $X = [0,1]$, $Q = \{x \in [0,1] | x \in \mathbb{Q}\}$ y $J = \{x \in [0,1] | x \in \mathbb{I}\}$. La familia P de todos los conjuntos abiertos con la topología usual τ del intervalo $[0,1]$ y de todos los conjuntos de la forma $Q \cup A$, donde A es cualquier subconjunto del conjunto J de números irracionales es una base de alguna topología τ' en X. Como $\tau \subset \tau'$, el espacio $X' = (X, \tau')$ es Hausdorff. Pongamos $Y = Q$. Sea γ una cubierta abierta de X'. Si existe $V \in \gamma \setminus \tau$ entonces $V = Q \cup A$ y así $\{V\}$ es una subcubierta de γ para Y. Si $\gamma \subset \tau$ entonces como X es compacto existe una subcubierta finita μ de γ tal que $Y \subset X' \subset \bigcup \mu$. Por lo tanto Y es compacto en X'. Para ver que Y no es fuertemente regular en X', tomemos $0 \in Y$ y $J \subset X'$ cerrado. Supongamos que U y V son vecindades abiertas ajenas de 0 y J en X'. Notemos que $U \notin \tau$ puesto que todo abierto de la topología τ contiene irracionales, así $U \in \tau' \setminus \tau$ y $U = Q \cup A$. Además $U = Q$ pues A debe ser vacío. Si $V \in \tau$ entonces $V \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $V = Q \cup B$. Lo que es una contradicción.

TEOREMA 3.1.9. *Si X es un espacio Hausdorff y Y es compacto en X, entonces Y es normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados ajenos en X. De la Proposición 3.1.5 se tiene que Y es superregular en X, así para cada $x \in F$ tómense U_x y V_x abiertos ajenos en X tales que $x \in U_x$ y $G \cap Y \subset V_x$. Como $F_1 = F \cap Y$ es compacto en F y $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$ existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $F_1 \subset U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Como $G \cap Y \subset V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ y $U \cap V = \emptyset$, se concluye que Y es normal en X. □

El espacio X' construido en el Ejemplo 3.1.8 no es compacto puesto que contiene a J como subconjunto cerrado, discreto y no numerable; más aún tampoco es un espacio Lindelöf. Al mismo tiempo $\overline{Y} = X$. Concluimos que de la compacidad de Y en un espacio Hausdorff X no se sigue que la cerradura de Y en X sea un espacio compacto.

TEOREMA 3.1.10. *Sea X regular. Si $\overline{Y} = X$ y Y es compacto en X entonces X es compacto.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta de X. Como X es regular existe una cubierta abierta β de X tal que para cada $O \in \beta$ existe $U \in \gamma$ tal que $\overline{O} \subset U$. Como el subespacio Y es compacto en X entonces existe una subcubierta finita $\beta' \subset \beta$ que cubre a Y. Luego existe una subcubierta finita γ' de γ tal que

$$\bigcup_{O \in \beta'} \overline{O} \subset \bigcup \gamma'$$

Ahora $X = \overline{Y} \subset \overline{\bigcup_{O\in\beta'} O} \subset \bigcup_{O\in\beta'} \overline{O} \subset \bigcup \gamma'$. Por lo tanto X es compacto. $\square$

Ahora trabajaremos con operaciones topológicas asociadas a la compacidad relativa.

TEOREMA 3.1.11. *Sea Y subespacio del espacio X y Z' subespacio del espacio Z. Si Y es compacto en X y Z' es compacto en Z, entonces $Y \times Z'$ es compacto en $X \times Z$.*

Demostración. Tomemos cualquier cubierta abierta γ del espacio $X \times Z$. Como para todo $x \in X$, el espacio $\{x\} \times Z'$ es compacto en $\{x\} \times Z$, existe una subcubierta finita γ_x de la cubierta γ tal que $\{x\} \times Z' \subset \bigcup \gamma_x$. Pongamos $U_x = \bigcap\{U | U \times V \in \gamma_x$ para algún $V \subset Z\}$. Es claro que $U_x \times Z' \subset \bigcup \gamma_x$. La familia $\{U_x | x \in X\}$ es una cubierta abierta del espacio X. Puesto que Y es compacto en X, existe un conjunto finito $x_1, \ldots, x_n$ tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Es claro que, la familia $\gamma' = \bigcup_{i=1}^n \gamma_{x_i} \subset \gamma$ es finita y cubre a $Y \times Z'$. Por lo tanto $Y \times Z'$ es compacto en $X \times Z$. $\square$

DEFINICIÓN 3.1.12. A la función $f : X \to Z$ se le llama *casi perfecta*, si es continua, cerrada y las imágenes inversas de todos los puntos son compactos en X.

Puesto que para los conjuntos cerrados la compacidad relativa es equivalente a la compacidad en ellos mismos, se tiene; si Z es un espacio T_1 y $f : X \to Z$ es una función casi perfecta, entonces las imágenes inversas de todos los puntos $z \in Z$ son compactos. Así, si X es Hausdorff y $f : X \to Z$ es una función perfecta entonces f es casi perfecta.

TEOREMA 3.1.13. *Si $f : X \to Z$ es una función casi perfecta, $Y \subset Z$ y Y compacto en Z entonces $f^{-1}(Y)$ es compacto en X.*

Demostración. Sea γ cubierta abierta de X. Como $f^{-1}(z)$ es compacto en X para cada $z \in Z$ existe una subfamilia finita $\beta_z \subset \gamma$ tal que β_z cubre a $f^{-1}(z)$. Tomemos U_z como la unión de todos los conjuntos abiertos de β_z. Luego $X \setminus U_z$ es cerrado en X y como f es cerrada $f(X \setminus U_z)$ es cerrado en Z. Además $f^{-1}(z) \in U_z$ lo que implica que $z \notin f(X \setminus U_z)$, así la familia $\{Z \setminus f(X \setminus U_z) : z \in Z\}$ es una cubierta abierta de Z. Dado que Y es compacto en Z existen $z_1, \ldots, z_n$ tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n Z \setminus f(X \setminus U_{z_i})$. Ya que $f^{-1}(Z \setminus f(X \setminus U_{z_i})) \subset U_{z_i}$ se tiene que $U_{z_1}, \ldots, U_{z_n}$ cubre a $f^{-1}(Y)$ y por lo tanto la subfamilia finita $\bigcup_{i=1}^n \beta_{z_i}$ de γ cubre a $f^{-1}(Y)$. Por lo tanto $f^{-1}(Y)$ es compacto en X. $\square$

TEOREMA 3.1.14. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y sobreyectiva, $Y \subset X$ y Y compacto en X. Entonces $f(Y)$ es compacto en Z.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta de Z. Como f es continua se sigue que $\gamma' = \{f^{-1}(U) : U \in \gamma\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que Y es compacto en X se sigue que existe una subcubierta finita $\mu \subset \gamma$ tal que

$Y \subset \bigcup_{U \in \mu} f^{-1}(U)$ así se tiene $f(Y) \subset \bigcup_{U \in \mu} U$. Por lo que $f(Y)$ es compacto en Z. $\square$

Otras nociones de la compacidad relativa

Existen diferentes caracterizaciones de subespacios compactos por ejemplo a través de cubiertas abiertas, de familias de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita y de puntos de acumulación completa.

PROPOSICIÓN 3.1.15. *Un subespacio Y es compacto en X si y sólo si para cada familia γ de subconjuntos de Y con la propiedad de la intersección finita existe un punto $x \in X$ tal que $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \gamma$ (A tal punto x es natural llamarlo punto de contacto de la familia γ en X).*

Demostración. Supongamos que Y es compacto en X. Tomemos una familia γ de subconjuntos de Y con la propiedad de la intersección finita. Entonces $\overline{\gamma} = \{\overline{A} : A \in \gamma\}$ es una familia de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita ya que $A \subset \overline{A}$ para todo $A \in \gamma$. Si $\bigcap_{A \in \gamma} \overline{A} = \emptyset$ entonces $\bigcup_{A \in \gamma} X \setminus \overline{A} = X$. Así $\{X \setminus \overline{A} : A \in \gamma\}$ es una cubierta abierta de X y como Y es compacto en X existen $A_1, \ldots, A_n \in \gamma$ tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n X \setminus \overline{A_i}$. Por otro lado, como γ posee la propiedad de la intersección finita existe $y \in Y$ tal que $y \in \bigcap_{i=1}^n A_i \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$. Lo que implica que $y \notin \bigcup_{i=1}^n X \setminus \overline{A_i}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \gamma$.
Supongamos que para cada familia γ de subconjuntos de Y con la propiedad de la intersección finita existe un punto $x \in X$ tal que $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \gamma$. Sea γ cubierta abierta de X entonces $\bigcap\{X \setminus U | U \in \gamma\} = \emptyset$. Supongamos que para cada subconjunto finito $U_1, \ldots, U_n \in \gamma$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^n U_i \neq Y$. En particular, $\bigcap_{i=1}^n Y \setminus U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto la colección $\{Y \setminus U | U \in \gamma\}$ es una familia de subconjuntos de Y con la propiedad de la intersección finita. Por hipótesis se tiene que existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{Y \setminus U} \subset X \setminus U$ para cada $U \in \gamma$, así $x \in \bigcap_{U \in \gamma} X \setminus U = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe un subconjunto finito $U_1, \ldots, U_n \in \gamma$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y Y es compacto en X. $\square$

DEFINICIÓN 3.1.16. Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación completo* de $A \subset X$ si para cada vecindad V de x, $V \cap A$ y A tienen la misma cardinalidad.

PROPOSICIÓN 3.1.17. *Sea X un espacio de Hausdorff y $Y \subset X$. Si Y es compacto en X entonces para cada conjunto infinito $A \subset Y$ existe un punto $x_0 \in X$ que es punto de acumulación completo para A.*

Demostración. Supongamos que Y es compacto en X. Sea A un subconjunto infinito de Y tal que para cada $x \in X$ existe U_x vecindad de x en X tal que

$|U_x \cap A| < |A|$. Notemos que $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y como Y es compacto en X entonces existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Luego $A = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cap A$. Lo cual es una contradicción pues $|A| \leq \sum_{i=1}^{n} |U_{x_i} \cap A| < |A|$. Por lo tanto existe un punto $x_0 \in X$ que es punto de acumulación completa para A.

□

Es conocido que cada función biyectiva y continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo. Probaremos ahora una versión de este resultado para la compacidad relativa.

TEOREMA 3.1.18. *Sean τ, τ' dos topologías en el conjunto X con $\tau \subset \tau'$. Entonces si $Y \subset X$, Y es compacto en (X, τ') y Y es fuertemente Hausdorff en (X, τ) (en particular, si (X, τ) es un espacio Hausdorff) entonces $\tau'|_Y = \tau|_Y$, es decir, la restricción de las topologías τ y τ' coinciden.*

Demostración. Sea $F \subset Y$ cerrado en la topología $\tau'|_Y$. Probaremos que es cerrado en $\tau|_Y$. Sea $y \in Y \setminus F$. Para cada punto $x \in X \setminus \{y\}$ en el espacio (X, τ) podemos encontrar abiertos ajenos $U_{x,y}$ y $V_{x,y}$ en (X, τ) de los puntos x e y respectivamente. Sea A la cerradura de F en (X, τ'). Entonces $\{X \setminus A\} \cup \{U_{x,y} | x \in X \setminus \{y\}\}$ es una cubierta abierta del espacio (X, τ'). Como Y es compacto en (X, τ') existe un conjunto finito $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus \{y\}$, tal que $Y \subset (X \setminus A) \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i,y}$. Por lo tanto el abierto $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i,y}$ del punto $y \in (X, \tau)$ está contenida en $X \setminus A$ y por lo tanto no intersecta a F. Lo que implica que F es cerrado en $\tau|_Y$. Por lo tanto la restricción de las topologías τ y τ' coinciden. □

COROLARIO 3.1.19. *Sea $Y \subset X$, Y compacto en X y $f : X \to Z$ una función biyectiva y continua, donde Z es un espacio de Hausdorff. Entonces $f|_Y : Y \to f(Y)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Tomemos τ' la topología de X. Como f es biyectiva y continua podemos pensar a Z como (X, τ) donde $\tau \subset \tau'$. Dado que Y es compacto en (X, τ') y Y es fuertemente Hausdorff en (X, τ) se sigue por la Proposición 3.1.18 que $\tau'|_Y = \tau|_Y$ lo que implica que $f|_Y : Y \to f(Y)$ es un homeomorfismo. □

3.1.1 Propiedad de Lindelöf relativa

Trabajaremos ahora con la propiedad de Lindelöf relativa.

DEFINICIÓN 3.1.20. Sea Y un subespacio del espacio X. Diremos que Y *es Lindelöf en X*, si de cualquier cubierta abierta γ del espacio X se puede extraer una subfamilia numerable $\mu \subset \gamma$ tal que $Y \subset \bigcup \mu$.

Analizaremos la propiedad de Lindelöf relativa y su relación con los subespacios mostrando que hay una relación muy parecida a la compacidad relativa.

PROPOSICIÓN 3.1.21. *Si $Y \subset Y_1 \subset X_1 \subset X$ y Y_1 es Lindelöf en X_1, entonces Y es Lindelöf en X.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta del espacio X. Se sigue que γ es cubierta abierta de X_1 y como Y_1 es Lindelöf en X_1 existe una subfamilia numerable $\mu \subset \gamma$ tal que $Y_1 \subset \bigcup \mu$. Se concluye que $Y \subset \bigcup \mu$ y por lo tanto Y es Lindelöf en X. □

PROPOSICIÓN 3.1.22. *Sea Y Lindelöf en X, X_1 cerrado en X y $Y_1 \subset Y \cap X_1$, entonces Y_1 es Lindelöf en X_1.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta del espacio X_1. Como X_1 es cerrado se tiene que $\gamma \cup \{X \setminus X_1\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que Y es Lindelöf en X existe una subfamilia numerable $\mu \subset \gamma \cup \{X \setminus X_1\}$ tal que $Y \subset \bigcup \mu$. Como $Y_1 \subset Y \cap X_1$ tomando $\mu' = \mu \setminus \{X \setminus Y\}$, la cual es una subfamilia numerable de γ se tiene que $Y_1 \subset \bigcup \mu'$. Por lo tanto Y_1 es Lindelöf en X_1. □

PROPOSICIÓN 3.1.23. *Si $Y \subset \overline{Y} \subset X_1 \subset X$, entonces Y es Lindelöf en X_1 si y sólo si Y es Lindelöf en X.*

Demostración. De la proposición 3.1.21 se tiene que si Y es Lindelöf en X_1 entonces Y es Lindelöf en X.
Supongamos que Y es Lindelöf en X. De la Proposición 3.1.22 se sigue que Y es Lindelöf en $\overline{Y}$. Como $\overline{Y} \subset X_1$ por la Proposición 3.1.21 se concluye que Y es Lindelöf en X_1. □

COROLARIO 3.1.24. *Si Y es cerrado en X, entonces Y es Lindelöf en X si y sólo si el espacio Y es Lindelöf.*

Demostración. Si Y es cerrado en X, tomando $Y = X_1$ obtenemos de la Proposición 3.1.23 que Y es Lindelöf en X si y sólo si Y es Lindelöf. □

De la Proposición 3.1.21 se sigue que si $Y \subset Z \subset X$ y Z es un espacio de Lindelöf, entonces Y es Lindelöf en X.

La siguiente proposición nos muestra que la unión numerable de subespacios Lindelöf relativos es un subespacio Lindelöf relativo.

PROPOSICIÓN 3.1.25. *Si $\theta = \{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subespacios del espacio X, de los cuales cada Y_n es un espacio de Lindelöf en X, entonces el subespacio $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ es Lindelöf en X.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta de X. Como Y_n es Lindelöf en X para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una subfamilia numerable $\gamma_n \subset \gamma$ tal que $Y_n \subset \bigcup \gamma_n$. Como la unión de conjuntos numerables es numerable y $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$, se concluye que Y es Lindelöf en X. $\square$

Veamos en el siguiente ejemplo que el producto de subespacios Lindelöf relativos no necesariamente es un subespacio Lindelöf relativo.

Ejemplo 3.1.26. Sea $X_1 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ el plano de Sorgenfrey. Como se describe en [19] X_1 es un espacio no normal. Consideremos $Y_1 = (-\infty, 0]$ y $Y_2 = [0, \infty)$, subconjuntos cerrados de $\mathbb{S}$. Como $\mathbb{S}$ es Lindelöf se tiene que Y_1 y Y_2 son Lindelöf. Supongamos que $Y_1 \times Y_2$ es Lindelöf en X_1. Como $Y_1 \times Y_2$ es cerrado en X_1 se sigue que $Y_1 \times Y_2$ es Lindelöf y por lo tanto normal. Lo que es una contradicción con el Lema de Jones 0.1.2, ya que $Y_1 \times Y_2$ es separable, el conjunto $A = \{(x, -x) | x \in Y_1\}$ es cerrado discreto en $Y_1 \times Y_2$ y $|A| = \mathfrak{c}$.

Por otro lado, sí podemos garantizar la existencia de un subespacio Lindelöf dentro de un producto de subespacios arbitrarios como lo veremos en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.27. *Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios separables, entonces existe un subespacio denso Lindelöf en $\prod_{s\in S} X_s$.*

Demostración. Sea $Y_s \subset X_s$ denso y numerable. Es suficiente probar que el producto $Y = \prod_{s\in S} Y_s$ tiene un subconjunto denso Lindelöf. Notemos que para cada $s \in S$ existe una función $f_s : \mathbb{N} \to Y_s$ biyectiva y continua, así $f = \prod_{s\in S} f_s : \mathbb{N}^S \to Y$ es biyectiva y continua. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ sea

$$\sigma_{n,m} = \{x \in \{0, \ldots, m\}^S : |\{s \in S : x_s \neq 0\}| \leq n\}.$$

Sea $x = (x_s)_{s\in S} \in \{0, \ldots, m\}^S \setminus \sigma_{n,m}$. Tomemos s_i con $i = 1, \ldots, n+1$ tal que $x_{s_i} \neq 0$ para $i \notin \{1, \ldots, n+1\}$. Consideremos $U = \bigcap_{i=1}^{n+1} \pi_{s_i}^{-1}(\{x_{s_i}\})$ el cual es abierto en $\{0, \ldots, m\}^{\mathbb{S}}$. Es claro que $x \in U$. Si $y = (y_s)_{s\in S} \in U$ entonces $y_{s_i} = x_{s_i} \neq 0$ para $i \notin \{1, \ldots, n+1\}$. Por lo tanto $\sigma_{n,m}$ es cerrado y como $\{0, \ldots, m\}^S$ es compacto entonces $\sigma_{n,m}$ es compacto.

Ahora veremos que $\sigma = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \sigma_{n,m}$ es denso en $\mathbb{N}^S$. Sea $y = (y_s)_{s\in S} \in \mathbb{N}^S$ y $U \subset \mathbb{N}^S$ abierto que contenga a y. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(\{m_i\})$ con $\{m_i\}$ abierto básico en $\mathbb{N}$. Sea $m = \text{máx}\{m_1, \ldots, m_n\}$. Definamos $x = (x_s)_{s\in S}$ como $x_s = 0$ si $s \neq s_i$ y $x_s = m_i$ si $s = s_i$. Se tiene que $x \in U \cap \sigma_{n,m}$. Por lo tanto σ es denso $\mathbb{N}^S$.

Como f es continua, la imagen continua de compactos es compacta, la unión numerable de compactos es Lindelöf y la imagen continua de un denso es denso en la imagen entonces $f(\sigma) = f(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \sigma_{n,m}) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} f(\sigma_{n,m})$

es un subespacio Lindelöf denso en Y. Por lo tanto $f(\sigma)$ es denso en $\prod_{s \in S} X_s$. $\square$

Observación 3.1.28. Tomemos como Z un espacio discreto infinito no numerable, el cual es normal no Lindelöf y $X = Z$, en calidad de Y cualquier subespacio finito de Z. De las observaciones arriba hechas se sigue que si $Y \subset Z \subset X$ y Y es Lindelöf en X, entonces no obtenemos aún, que Z es Lindelöf en X.

Ahora estudiaremos la relación entre la propiedad de Lindelöf relativa y la normalidad relativa.

Teorema 3.1.29. *Si Y es Lindelöf en X y el espacio X es regular, entonces Y es normal en X.*

Demostración. Sean F, G cerrados y ajenos de X. Para cada $x \in F$, tómese una vecindad U_x de x en X tal que $\overline{U_x} \cap G = \emptyset$ (ver Proposición 2.1.9). De manera análoga para cada $y \in G$ tómese una vecindad V_y de y en X tal que $\overline{V_y} \cap F = \emptyset$. Como $F \cap Y$ y $G \cap Y$ son Lindelöf en F y G respectivamente por la Proposición 3.1.22, existen conjuntos numerables $F_1 \subset F$ y $G_1 \subset G$ tales que $F \cap Y \subset \bigcup_{x \in F_1} U_y$ y $G \cap Y \subset \bigcup_{y \in G_1} V_y$. Como F_1 y G_1 son numerables podemos escribir $F_1 = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $G_1 = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.
Tomemos $U'_{x_n} = U_{x_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}$ y $V'_{y_n} = V_{y_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Claramente U'_{x_n} y V'_{y_n} son abiertos en X, $F \cap Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_{x_n}$ y $G \cap Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_{y_n}$. Además

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_{x_n} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V'_{y_m} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U'_{x_n} \cap V'_{y_m} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset.$$

Por lo tanto Y es normal en X. $\square$

Si el espacio X solo posee la propiedad de Hausdorff no necesariamente se concluye que Y es normal como en la proposición anterior.

Ejemplo 3.1.30. Tomemos los mismos espacios (X, τ') e Y del Ejemplo 2.1.6. Como vimos (X, τ') es un espacio de Hausdorff, Y un subespacio discreto, cerrado y numerable; especialmente Y es Lindelöf y por lo tanto Lindelöf en (X, τ'). Pero, como se ha señalado en el Ejemplo 2.1.6, Y no solo no es normal en (X, τ') sino tampoco es regular en (X, τ').

Se sabe que todo espacio Lindelöf es realcompacto. Ahora estudiaremos la relación entre la propiedad de Lindelöf relativa y la realcompacidad.

Definición 3.1.31. Un espacio Z es *realcompacto* si existe una compactación $\beta(Z)$ del espacio Z tal que para cada punto $z \in \beta(Z) \setminus Z$, existe un conjunto P de tipo G_δ en $\beta(Z)$ para el cual $z \in P \subset \beta(Z) \setminus Z$.

TEOREMA 3.1.32. *Un subespacio Y de un espacio de Tychonoff X es Lindelöf en X si y sólo si para cualquier compactación $\beta(X)$ del espacio X se cumple la siguiente condición: para cualquier punto $z \in \beta(X) \setminus X$, existe un conjunto P de tipo G_δ en $\beta(X)$ para el cual $z \in P \subset \beta(X) \setminus Y$.*

Demostración. Supongamos que Y es Lindelöf en X. Tomemos $\beta(X)$ una compactación de X. Sea $z \in \beta(X) \setminus X$. Para cada punto $x \in X$ fijemos una vecindad U_x del punto x en el espacio $\beta(X)$ tal que $z \notin \overline{U_x}$. Como Y es Lindelöf en X, existe un conjunto numerable $A \subset X$ tal que $Y \subset \bigcup_{x \in A} U_x$. Notemos que $P = \bigcap_{x \in A} \beta(X) \setminus \overline{U_x}$ es de tipo de G_δ en $\beta(X)$, contiene al punto z y no interseca a Y.
Supongamos que para cada compactación $\beta(X)$ del espacio X se cumple la siguiente condición: para cualquier punto $z \in \beta(X) \setminus X$, existe un conjunto P de tipo G_δ en $\beta(X)$ para el cual $z \in P \subset \beta(X) \setminus Y$. Consideremos cualquier cubierta abierta γ del espacio X. Para cada $U \in \gamma$ fijemos un conjunto abierto $\hat{U}$ en $\beta(X)$ tal que $\hat{U} \cap X = U$. Tomemos $\hat{\gamma} = \{\hat{U} : U \in \gamma\}$ y $F = \beta(X) \setminus \bigcup \hat{\gamma}$. El conjunto F es cerrado en $\beta(X)$ y esta contenido en $\beta(X) \setminus X$. Si identificamos el conjunto F en el punto $\{F\}$, entonces obtenemos de $\beta(X)$ una nueva compactación $\beta_1(X)$ del espacio X. Por hipótesis el punto $\{F\}$ está contenido en un conjunto P_1 de tipo G_δ en $\beta_1(X)$, que no se interseca con Y. Pasando de nuevo con $\beta(X)$, concluimos, que el conjunto F está contenido en algún conjunto P (la imagen inversa de P_1 bajo la identificación) de tipo G_δ en $\beta(X)$, que no se interseca con Y. Entonces $Y \subset \beta(X) \setminus P \subset \bigcup \hat{\gamma}$ y el conjunto $\beta(X) \setminus P$ es de tipo F_σ en $\beta(X)$, lo que implica que $\beta(X) \setminus P$ es σ-compacto y finalmente Lindelöf (ver [2, Ejercicio 3.8.C]). Por lo que existe una familia numerable $\hat{\lambda}$ de la familia $\hat{\gamma}$ tal que $Y \subset \beta(X) \setminus P \subset \bigcup \hat{\lambda}$. De lo anterior se concluye que $Y \subset \bigcup \lambda$, donde $\lambda = \{\hat{U} \cap Y : \hat{U} \in \hat{\lambda}\} \subset \gamma$ es numerable. Por lo tanto Y es Lindelöf en X. □

TEOREMA 3.1.33. *Si Y es un espacio de Lindelöf en un espacio de Tychonoff X, entonces existe un espacio realcompacto Z tal que $Y \subset Z \subset X$.*

Demostración. Podemos considerar que Y es denso en X. Tomemos cualquier compactación $\beta(X)$ del espacio X. Por el Teorema 3.1.32 para cada punto $z \in \beta(X) \setminus X$ se puede fijar el conjunto P_z de tipo G_δ en $\beta(X)$ tal que $z \in P_z \subset \beta(X) \setminus Y$. Pongamos $Z = \beta(X) \setminus \cup\{P_z : z \in \beta(X) \setminus X\}$. Entonces $Y \subset Z \subset X$ y $\beta(X)$ es una compactación del espacio Z puesto que Y es denso en X. Cada punto del conjunto $\beta(X) \setminus Z$ se contiene en un conjunto de tipo G_δ en $\beta(X)$ el cual no se interseca con Z. Por lo tanto el espacio Z es realcompacto. □

El Teorema 3.1.33 nos permite dar una prueba del hecho de que si el espacio Y es pseudocompacto y Lindelöf en un espacio Tychonoff más grande X, entonces $\overline{Y}$ es compacto. En efecto, podemos considerar, que $\overline{Y} = X$; en este caso, el espacio realcompacto Z tal que $Y \subset Z \subset X$ también resulta ser pseudocompacto puesto que Y es denso en Z. Dado que todo espacio realcompacto y pseudocompacto es compacto, se tiene que Z es compacto. Como Z es compacto y denso en X entonces $X = Z$ es compacto.

El Teorema 3.1.32 y el Teorema 3.1.33 fueron obtenidos independientemente por V. V. Tkachuk.

El siguiente resultado muestra que la propiedad de Lindelöf relativa se preserva bajo producto con compactos relativos.

TEOREMA 3.1.34. *Sea Y subespacio del espacio X y Z' subespacio del espacio Z. Si Y es Lindelöf en X y Z' es compacto en Z, entonces $Y \times Z'$ es Lindelöf en $X \times Z$.*

Demostración. Tomemos cualquier cubierta abierta γ del espacio $X \times Z$. Como para todo $x \in X$, el espacio $\{x\} \times Z'$ es compacto en $\{x\} \times Z$, existe una subcubierta finita γ_x de la cubierta γ tal que $\{x\} \times Z' \subset \bigcup \gamma_x$. Pongamos $U_x = \bigcap\{U | U \times V \in \gamma_x$ para algún $V \subset Z\}$. Es claro que $U_x \times Z' \subset \bigcup \gamma_x$. La familia $\{U_x | x \in X\}$ es una cubierta abierta del espacio X. Puesto que Y es Lindelöf en X, existe un conjunto numerable $A \subset X$ tal que $Y \subset \bigcup_{x \in A} U_x$. Es claro que, la familia $\gamma' = \bigcup_{x \in A} \gamma_x \subset \gamma$ es numerable y cubre a $Y \times Z'$. Por lo tanto $Y \times Z'$ es Lindelöf en $X \times Z$. □

COROLARIO 3.1.35. *Si Y es Lindelöf en X y Z es un espacio compacto, entonces $Y \times Z$ es Lindelöf en $X \times Z$.*

Los siguientes resultados muestran que la propiedad de Lindelöf relativa se preserva bajo imágenes inversas e imágenes directas de ciertas funciones.

TEOREMA 3.1.36. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y cerrada y $Y \subset Z$ con Y Lindelöf en Z. Supongamos además que para cada punto $z \in Z$ el subespacio $f^{-1}(z)$ es Lindelöf en X. Entonces $f^{-1}(Y)$ es Lindelöf en X.*

Demostración. Sea γ cubierta abierta de X. Como $f^{-1}(z)$ es Lindelöf en X para cada $z \in Z$ existe una subfamilia numerable $\beta_z \subset \gamma$ tal que β_z cubre a $f^{-1}(z)$. Tomemos U_z como la unión de todos los conjuntos abiertos de β_z. Luego $X \setminus U_z$ es cerrado en X y como f es cerrada $f(X \setminus U_z)$ es cerrado en Z. Además $f^{-1}(z) \in U_z$ lo que implica que $z \notin f(X \setminus U_z)$, así la familia $\{Z \setminus f(X \setminus U_z) : z \in Z\}$ es una cubierta abierta de Z. Dado que Y es Lindelöf en Z existe un conjunto numerable $\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Z \setminus f(X \setminus U_{z_i})$. Ya que $f^{-1}(Z \setminus f(X \setminus U_{z_i})) \subset U_{z_i}$ se tiene que el conjunto numerable $\{U_{z_i} : i \in \mathbb{N}\}$ cubre a $f^{-1}(Y)$ y por lo tanto la subfamilia numerable $\bigcup_{i=1}^{\infty} \beta_{z_i}$ de γ cubre a $f^{-1}(Y)$. Por lo tanto $f^{-1}(Y)$ es Lindelöf en X. □

TEOREMA 3.1.37. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y sobreyectiva, $Y \subset X$ y Y Lindelöf en X. Entonces $f(Y)$ es Lindelöf en Z.*

Demostración. Sea γ una cubierta abierta de Z. Como f es continua se sigue que $\gamma' = \{f^{-1}(U) : U \in \gamma\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que Y es Lindelöf en X se sigue que existe una subcubierta numerable $\mu \subset \gamma$ tal que $Y \subset \bigcup_{U \in \mu} f^{-1}(U)$ así se tiene $f(Y) \subset \bigcup_{U \in \mu} U$. Por lo que $f(Y)$ es Lindelöf en Z. □

Por último, el siguiente teorema caracteriza la propiedad de Lindelöf en términos de la propiedad de Lindelöf relativa.

Teorema 3.1.38. *Sea $Y \subset X$ fuertemente regular en X. Entones las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) El espacio Y es Lindelöf.*
- *b) El espacio Y es Lindelöf en X y es perfectamente localizado en X.*

Demostración. Supongamos que el espacio Y es Lindelöf. Luego Y es Lindelöf en X. Sea U abierto en X tal que $Y \subset U$. Notemos que $G = X \setminus U$ es cerrado en X. Como Y es fuertemente regular en X para cada $y \in Y$ existen abiertos W_y, V_y en X tales que $y \in W_y$ y $G \subset V_y$. Como Y es Lindelöf entonces existe un conjunto numerable $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \subset Y$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{y_i}$. Se sigue que $F_i = X \setminus V_{y_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ son cerrados tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset U$. Por lo tanto Y es perfectamente localizado en X.
Supongamos que Y es Lindelöf en X y es perfectamente localizado en X. Sea γ cualquier cubierta abierta de Y. Para cada $U \in \gamma$, fijemos un conjunto abierto V_U de X tal que $V_U \cap Y = U$. Es claro que $Y \subset W = \bigcup_{U \in \gamma} V_U$. Dado que Y es perfectamente localizado en X existe una familia de conjuntos cerrados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tales que $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset W$. La familia $\mu_n = \{V_U : U \in \gamma\} \cup \{X \setminus F_n\}$ es una cubierta abierta de X. Como $F_n \cap Y$ es Lindelöf en X existe una subcubierta numerable λ_n de la familia γ tal que $F_n \cap Y \subset \bigcup \{V_U : U \in \lambda_n\}$, así la subcubierta numerable $\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$ de γ es tal que $Y \subset \bigcup \lambda$. Por lo tanto Y es Lindelöf. □

3.1.2 Compacidad numerable y pseudocompacidad relativas

Ahora trabajaremos con las versiones relativas de otras propiedades de tipo compacidad que son la compacidad numerable y la pseudocompacidad.

Definición 3.1.39. Diremos que un conjunto Y es *numerablemente compacto en X*, si para cada conjunto infinito $A \subset Y$ existe punto de acumulación de A en X.

Proposición 3.1.40. *Si Y es cerrado en X, entonces Y es numerablemente compacto en X si y sólo si, Y es numerablemente compacto en sí mismo.*

Demostración. Supongamos que Y es numerablemente compacto en X. Sea $A \subset Y$ infinito. Por hipótesis existe $x \in X$ tal que x es punto de acumulación de A. Se sigue que x es punto de acumulación de Y y dado que Y es cerrado entonces $x \in Y$. Así Y es numerablemente compacto en sí mismo.
Como Y es numerablemente compacto en sí mismo se sigue que Y es numerablemente compacto en X. □

Las siguientes proposiciones muestran la relación entre la compacidad numerable relativa y los subespacios.

PROPOSICIÓN 3.1.41. *Si $Y \subset Y_1 \subset X_1 \subset X$ y Y_1 es numerablemente compacto en X_1, entonces Y es numerablemente compacto en X.*

Demostración. Sea $A \subset Y$ infinito. Como $Y \subset Y_1$ y Y_1 es numerablemente compacto en X_1 existe $x \in X_1$ que es punto de acumulación de A. Como $X_1 \subset X$ se concluye que Y es numerablemente compacto en X. □

En particular, si $Y \subset Z \subset X$ y Z es numerablemente compacto, entonces Y es numerablemente compacto en X. Pero la compacidad numerable de Y en X no siempre se logra por la existencia de un espacio intermedio numerablemente compacto. Por ejemplo considerando los espacios Y y (X, τ') como en el Ejemplo 2.1.6.

PROPOSICIÓN 3.1.42. *Sea Y numerablemente compacto en X, X_1 cerrado en X y $Y_1 \subset Y \cap X_1$, entonces Y_1 es numerablemente compacto en X_1.*

Demostración. Sea $A \subset Y_1$ un conjunto infinito. Como $Y_1 \subset Y$ y Y es numerablemente compacto en X entonces existe $x \in X$ punto de acumulación de A. Dado que x es punto de acumulación de Y_1 y $Y_1 \subset Y \cap X_1$ entonces x es punto de acumulación de X_1 y dado que X_1 es cerrado luego $x \in X_1$. Por lo tanto Y_1 es numerablemente compacto en X_1. □

PROPOSICIÓN 3.1.43. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y Y numerablemente compacto en X, entonces $f(Y)$ es numerablemente compacto en $f(X)$.*

Demostración. Sea $B \subset f(Y)$ infinito luego existe $A \subset Y$ infinito tal que $f(A) = B$. Como Y es numerablemente compacto en X existe $x \in X$ que es punto de acumulación de A. Luego de la continuidad de f se sigue que $f(x)$ es punto de acumulación de B. Por lo tanto $f(Y)$ es numerablemente compacto en $f(X)$. □

PROPOSICIÓN 3.1.44. *Sea X un espacio Lindelöf. Si Y es numerablemente compacto en X entonces Y es compacto en X.*

Demostración. Supongamos que Y no es compacto en X. Sea γ una cubierta abierta de X que no admite subcubiertas finitas para Y. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $\gamma = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como Y no es compacto en X existe $y_n \in Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_n$. Luego $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ es infinito. Del hecho de que γ es una cubierta abierta de X y que X es un espacio T_1 se sigue que A no tiene punto de acumulación. Lo cual es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 3.1.45. *Si Y es numerablemente compacto en X y $\overline{Y} = X$ entonces X es pseudocompacto.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Como Y es numerablemente compacto y denso en X entonces $f(Y)$ es numerablemente compacto y denso en $f(X)$ en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es Lindelöf entonces por la Proposición 3.1.44 se tiene que $f(Y)$ es compacto en $f(X)$. Dado que $f(Y)$ es compacto y denso en $f(X)$ se concluye por la Proposición 3.1.10 que $f(X)$ es compacto y por lo tanto acotado. □

Sin embargo, existen espacios Tychonoff, pseudocompactos e infinitos en los cuales cada subespacio numerable es cerrado y discreto (ver Ejemplo 1.3.7). Por lo tanto, no en cada espacio de Tychonoff pseudocompacto existe un subespacio denso y numerablemente compacto en X.

Por último veremos las versiones relativas asociadas a la pseudocompacidad.

DEFINICIÓN 3.1.46. Un subespacio $Y \subset X$ se llama *pseudocompacto en X*, si cada familia localmente finita γ de conjuntos abiertos de X que se intersecan con Y es finita.

Sabemos que todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto. Verificaremos que la relación entre espacios numerablemente compactos y pseudocompactos se conserva para las correspondientes propiedades relativas.

PROPOSICIÓN 3.1.47. *Si Y es numerablemente compacto en X, entonces Y es pseudocompacto en X.*

Demostración. De la Proposición 3.1.45 se sigue que $\overline{Y}$ es pseudocompacto, lo que implica que Y es pseudocompacto en X. □

DEFINICIÓN 3.1.48. El subespacio Y se llama *fuertemente pseudocompacto en X* si cada familia γ localmente finita en los puntos de Y de conjuntos abiertos en X que se intersecan con Y es finita.

Notemos que todo subespacio fuertemente pseudocompacto es pseudocompacto. El siguiente diagrama (ver Figura 3.1) establece las relaciones de las propiedades de compacidad numerable y pseudocompacidad relativas.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente Pseudocompacto} \arrow[d] \\
\text{Compacto Numerable relativo} \arrow[r] & \text{Pseudocompacto}
\end{tikzcd}$$

FIGURA 3.1: Propiedades de tipo compacidad relativas.

Probaremos enseguida una caracterización de los subespacios relativamente pseudocompactos en términos de funciones acotadas.

PROPOSICIÓN 3.1.49. *Sea Y Tychonoff en X. Entonces Y es fuertemente pseudocompacto en X si y sólo si cada función $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos del conjunto Y es acotada en Y.*

Demostración. Supongamos que existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y no acotada en Y. Tomemos $G_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $U_n = intG_n$. De la continuidad de f en los puntos de Y y del no acotamiento en Y se sigue que $U_n \cap Y \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además la familia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita en todos los puntos de Y e infinita. Lo cual implica que Y no es fuertemente pseudocompacto en X.

Sea Y un subespacio que no es fuertemente pseudocompacto en X. Tomemos γ una familia localmente finita en los puntos de Y de conjuntos abiertos en X que se intersectan con Y que no sea finita. Consideremos un subconjunto numerable $\mu = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \gamma$. Reduciendo, sí es necesario, los conjuntos U_n puede lograrse que $U_n \cap U_m = \emptyset$ con $n \neq m$. Asumiremos que esta condición ya se cumple. Fijemos $y_n \in U_n \cap Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como Y es Tychonoff en X, existe una función $f_n : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y tal que $f_n(y_n) = n$, $f(X \setminus U_n) \subset \{0\}$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma: $f(x) = f_n(x)$, si $x \in U_n$ y $f(x) = 0$, si $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Es claro que la función f es continua en todos los puntos de Y y no es acotada en Y. $\square$

El siguiente ejemplo muestra un subespacio relativamente numerablemente compacto pero que no es relativamente fuertemente pseudocompacto.

EJEMPLO 3.1.50. Sean $X = [0,1]$ y $Y = (0,1)$. El subespacio Y es numerablemente compacto en X puesto que $\overline{Y} = [0,1]$ es numerablemente compacto. Pero Y no es fuertemente pseudocompacto en X ya que $f(x) = 1/x$ para $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$ para $x = 0$, es una función continua en cada punto de Y pero no acotada en Y.

Las siguientes proposiciones muestran la relación que existe entre la pseudocompacidad y la pseudocompacidad fuerte relativa en espacios Tychonoff.

PROPOSICIÓN 3.1.51. *Sea X Tychonoff. Si Y es abierto y Y es fuertemente pseudocompacto en X, entonces Y es pseudocompacto en el mismo.*

Demostración. Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ continua. Por ser Y abierto de la Proposición 2.4.2 existe $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ que es extensión de f y que es continua en cada punto de Y. Como Y es fuertemente pseudocompacto en X se sigue por la Proposición 3.1.49 que $\hat{f}$ es acotada sobre Y. Lo que implica que f es acotada. $\square$

PROPOSICIÓN 3.1.52. *Sea X Tychonoff. Si el espacio Y es pseudocompacto, entonces Y es fuertemente pseudocompacto en cada espacio X que contenga a Y.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos del conjunto Y. Luego $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua en Y. Dado que Y es pseudocompacto en sí mismo $f|_Y$ es acotada, así f es acotada en los puntos de Y y por la Proposición 3.1.49 se concluye que Y es fuertemente pseudocompacto en X. $\square$

PROPOSICIÓN 3.1.53. *Sea X Tychonoff. Si Y es fuertemente pseudocompacto en X, entonces $\overline{Y}$ es fuertemente pseudocompacto en X.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos del conjunto $\overline{Y}$. Se sigue que f es continua en todos los puntos de Y y por lo tanto acotada sobre Y. Como $f(Y)$ es acotado y dado que por continuidad $f(Y)$ es denso en $f(\overline{Y})$ se concluye que $f(\overline{Y})$ es acotada. De la Proposición 3.1.49 se concluye que $\overline{Y}$ es fuertemente pseudocompacto en X. $\square$

COROLARIO 3.1.54. *Sea X Tychonoff. Si $\overline{Y} = X$ y Y es fuertemente pseudocompacto en X, entonces el espacio X es pseudocompacto.*

Es conocido, que si un espacio Tychonoff es pseudocompacto y Lindelöf, entonces el espacio es compacto. El concepto de fuertemente pseudocompacto de Y en X permite relativizar el resultado anterior.

TEOREMA 3.1.55. *Sea Y un subespacio del espacio regular X, Y Lindelöf y fuertemente pseudocompacto en X. Entonces Y es compacto en X y $\overline{Y}$ es un espacio compacto.*

Demostración. Sea γ cubierta abierta de X. Como X es regular existe un refinamiento abierto λ de γ, para el cual cada elemento de λ está contenido junto con su cerradura en un elemento de la cubierta γ. Como Y es Lindelöf en X podemos seleccionar una subcubierta numerable $\mu = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$

de λ. Ahora supongamos que ninguna familia finita de la cubierta γ cubre al conjunto Y. Entonces $Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \neq \emptyset$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $U_n = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$. Así obtenemos una familia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos en X que se intersectan con Y, localmente finita en todos los puntos de Y. Lo que es una contradicción con la pseudocompacidad fuerte de Y en X. Así Y es compacto en X y por la Proposición 3.1.10 se concluye que $\overline{Y}$ es compacto. □

COROLARIO 3.1.56. *Sea X un espacio regular. Si Y es pseudocompacto en el mismo y Y es Lindelöf en X. Entonces $\overline{Y}$ es un espacio compacto.*

Demostración. Como Y es pseudocompacto en sí mismo entonces Y es pseudocompacto en X. De la Proposición 3.1.55 se concluye que $\overline{Y}$ es compacto. □

Cada espacio Tychonoff se puede realizar como un subespacio de un compacto y como subespacio cerrado de un espacio Tychonoff pseudocompacto. De lo cual surge la siguiente pregunta: ¿Puede cada espacio de Tychonoff Y sumergirse en un espacio de Tychonoff X tal que Y resultara fuertemente pseudocompacto en este último?. En relación a esta pregunta, probaremos que si Y es fuertemente pseudocompacto en X entonces existe X' denso en X de tal manera que Y es cerrado en X' y Y es fuertemente pseudocompacto en X'.

PROPOSICIÓN 3.1.57. *Si $Y \subset X' \subset X$ y Y es fuertemente pseudocompacto en X', entonces Y es fuertemente pseudcompacto en X.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua en todos los puntos de Y. Luego $f \restriction_{X'}$ es continua en todos los puntos de Y y dado que Y es fuertemente pseudocompacto en X', entonces $f|_{X'}$ es acotada en Y. Por lo tanto f es acotada en Y y así Y es fuertemente pseudocompacto en X. □

PROPOSICIÓN 3.1.58. *Si $Y \subset X' \subset X$ y $\overline{X'} = X$, entonces Y es fuertemente pseudocompacto en X si y sólo si Y es fuertemente pseudocompacto en X'.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.57 si Y es fuertemente pseudocompacto en X', entonces Y es fuertemente pseudocompacto en X.

Supongamos que Y es fuertemente pseudocompacto en X. Sea γ' una familia localmente finita de conjuntos abiertos de X' que se intersecan con Y. Para cada $V \in \gamma'$ consideremos un abierto único U_V en X tal que $U_V \cap X' = V$. Luego $\gamma = \{U_V : V \in \gamma\}$ es una familia de conjuntos abiertos de X. Fijemos $y \in Y$, como γ' es localmente finita en Y existe V_y vecindad de y en X' que intersecta a un número finito de elementos γ'_y de γ'. Tomemos $\gamma_y = \{U_V : V \in \gamma'_y\}$ y sea U_y abierto en X tal que $U_y \cap X' = V_y$. Supongamos que existe $U_V \in \gamma$ tal que $U_V \notin \gamma_y$ y $U_V \cap U_y \neq \emptyset$. Luego existe $x \in U_V \cap U_y$

y como $\overline{X'} = X$ entonces $\emptyset \neq (U_V \cap U_y) \cap X' = V \cap V_y = \emptyset$, pues $V \notin \gamma'_y$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto γ es una familia de abiertos en X localmente finita en los puntos de Y, así por hipótesis γ es finita y por lo tanto γ' es finita. Se concluye que Y es fuertemente pseudocompacto en X'. □

PROPOSICIÓN 3.1.59. *Si Y es fuertemente pseudocompacto en X, entonces existe un subespacio X' del espacio X, denso en X tal que $Y \subset X'$, Y es cerrado en X' y Y es fuertemente pseudocompacto en X'.*

Demostración. Pongamos $X' = X \setminus (\overline{Y} \setminus Y)$. El subespacio X' es denso en X, $Y \subset X'$ y Y es cerrado en X'. Por la Proposición 3.1.58 se concluye que Y es fuertemente pseudocompacto en X'. □

El siguiente resultado permite detectar espacios que no se pueden ver como subespacios cerrados y relativamente fuertemente pseudocompactos en un espacio más grande.

TEOREMA 3.1.60. *Sea X un espacio regular. Si el espacio $Y \subset X$ es Lindelöf en sí mismo y es fuertemente pseudocompacto en X entonces Y es un espacio compacto.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.59 existe un espacio regular X' tal que $Y \subset X'$, Y es cerrado en X' y Y es fuertemente pseudocompacto en X'. Como Y es Lindelöf entonces Y es Lindelöf en X'. Por el Teorema 3.1.55 la cerradura de Y en X' es un espacio compacto. Pero Y es cerrado en X'. Por lo tanto Y es compacto. □

COROLARIO 3.1.61. *El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no puede ser inmerso en algún espacio regular X de tal forma que $\mathbb{Q}$ sea fuertemente pseudocompacto en X.*

Demostración. Se deduce del Teorema 3.1.60 ya que $\mathbb{Q}$ no es compacto. □

El siguiente resultado muestra una condición bajo la cual la pseudocompacidad fuerte relativa implica la compacidad numerable relativa.

TEOREMA 3.1.62. *Si Y es fuertemente pseudocompacto en un espacio de Tychonoff X y Y es α-normal en X, entonces Y es numerablemente compacto en X.*

Demostración. Supongamos que Y no es numerablemente compacto en X. Sea $A \subset Y$ infinito que no tenga puntos de acumulación en X. Sin pérdida de generalidad podemos pensar $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Entonces A es cerrado en X y discreto. Se sigue que $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_i) = i$ con $i \in \mathbb{N}$ es continua. Como Y es α-normal en X existe una extensión continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ de f. Luego $\hat{f}$ no es acotada en Y. Lo cual es una contradicción con el hecho de que Y es fuertemente pseudocompacto en X. □

PROPOSICIÓN 3.1.63. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y Y pseudocompacto (fuertemente pseudocompacto) en X, entonces $f(Y)$ es pseudocompacto (fuertemente pseudocompacto) en $f(X)$.*

Demostración. Mostraremos el caso pseudocompacto, el otro caso es similar. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que f es sobreyectiva. Sea γ una familia localmente finita de conjuntos abiertos en Z que se intersectan con $f(Y)$. Luego $f^{-1}(\gamma) = \{f^{-1}(U) : U \in \gamma\}$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos en X que se intersecan con Y. Dado que Y es pseudocompacto en X se tiene que $f^{-1}(\gamma)$ es finita lo que implica que γ es finita. Por lo tanto $f(Y)$ es pseudocompacto en $f(X)$. $\square$

3.2 Conclusiones

Como resultado de este trabajo se comprendió el comportamiento general de la C-normalidad y de la epi-normalidad bajo funciones continuas y cerradas, subespacios cerrados y uniones de subespacios localmente compactos; lo que nos permitió mostrar las diferencias de estas variantes topológicas con respecto a la normalidad. Mas aún, usando el ejemplo dado por M. M. Saeed mostramos la existencia de un espacio normal que no es C-paracompacto. Por otra parte, desarrollamos un análisis de algunas propiedades relativas de los axiomas de separación mostrando las relaciones que existen entre ellas, además de probar resultados análogos a los teoremas clásicos en Topología. Finalmente se mostraron algunas propiedades relativas de tipo compacidad y su relación con las propiedades relativas de los axiomas de separación. Además, se mostró la existencia de un subespacio denso Lindelöf en un producto arbitrario de espacios. El estudio de ambas generalizaciones de la normalidad nos ha permitido enriquecer nuestros conocimientos de Topología.

Bibliografía

[1] Saeed M. M. «Countable Normality». En: *Journal of Mathematical Analysis* 9.1 (2018), págs. 116-123.

[2] Ryszard Engelking. *General Topology*. Berlín: Heldermann Verlag, 1989.

[3] J.R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice-Hall, 1975.

[4] Armstrong. M. A. *Topología Básica*. Reverté, 1987.

[5] Dugundji. J. *Topology*. Allyn y Bacon, 1968.

[6] Young G. S. Hocking. J. G. *Topology*. 1961, Dover.

[7] Seebach A. J. Jr. Steen A. L. *Counterexamples in Topology, Second Edition*. New York: Springer-Verlag, 1978.

[8] Tamariz M. A. *Curso de Topología General*. Facultad de Ciencias UNAM, 1990.

[9] Kalantan L. AlZahrani S. «C-Normal Topological Property». En: *Filomat* 31.2 (2017), págs. 407-4011. DOI: 10.2298/FIL1702407A.

[10] Kalantan L. AlZahrani S. «Epinormality». En: *J Nonlinear Sci Appl* 9 (2016), págs. 5398-5402.

[11] Delgadillo Piñón G. Soberano González I. E. y Rojas Hernández R. «Some topological properties of C-normality». En: *Rev. Int. temas mat* 38.2 (2020), págs. 93-102. DOI: 10.18273/revint.v38n2-2020002.

[12] Arhangel'skii. A. V. «Topological Function Spaces». En: *Mathematics and its Applications (Soviet Series)* 78 (1992).

[13] Buzkayova R.Z.. «On the product of two normal spaces». En: *Mathematics bulletin* 49.5 (1994), págs. 52-53.

[14] Alzumi H. Kalantan L. y Saeed M. M. H. «C-Paracompactness and C_2-Paracompactness». En: 43.1 (2019), págs. 9-20.

[15] Grothendieck A. «Critéres de compacité dans les espaces fonctionnels généraux». En: *Amer. J. Math* 74 (1952), págs. 175-185.

[16] Tkachuk V. V. «On relative small inductive dimension». En: *Vestnik Mosk. Univ. Ser. I, Mat. Mekh* 5 (1982), págs. 22-25.

[17] Ткачук В. В. «О раЗмерности полпространств». En: Вестн.МГУ 38.2 (1981), págs. 21-25.

[18] Chigogidze A. Ch. «On relative dimensions, in: General Topology. Spaces of Fuctions and Dimension». En: *(MGU, Moscow)* 5 (1985), págs. 67-117.

[19] Soberano G. I. E. *Sobre la normalidad y la C-normalidad*. Tesis de licenciatura. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2019.