



UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO



DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS

TRANSPORTE DE PARTÍCULAS DE ESPÍN
SEMIENTERO EN EL ESPACIO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS CON
ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS**

PRESENTA:

MELKISEDEC GARCÍA LÓPEZ

Director:

**DR. JORGE ALEJANDRO BERNAL
ARROYO**



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

07 de octubre de 2022

**LIC. MELKISEDEC GARCÍA LÓPEZ
PASANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS CON
ORIENTACIÓN EN NANOCIENCIAS
PRESENTE**

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacerle su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "TRANSPORTE DE PARTÍCULAS DE ESPÍN SEMIENTERO EN EL ESPACIO" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias con orientación en Nanociencias.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE



DIVISIÓN ACADÉMICA DE
CIENCIAS BÁSICAS

DRA. HERMICENDA PÉREZ VIDAL

DIRECTORA

C.c.p.- Archivo.

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.
Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto física como digitalmente la tesis de grado denominada "TRANSPORTE DE PARTÍCULAS DE ESPÍN SEMIENTERO EN EL ESPACIO", de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a la Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por lo antes manifestado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 24 días del mes de octubre de 2022.

Autoriza



Melkisedec García López

192A17003

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Dedicatoria

A mis padres y a mis hermanos

Por poner en mi camino ejemplo de trabajo y dedicación.

A mis amigos

Aquellos amigos que han sido mi inspiración durante el tiempo del trabajo y fuera del trabajo, gracias, los quiero mucho.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Agradecimientos

Al Dr. Jorge Alejandro Bernal Arroyo

por llevarme a este amplio campo de investigación y por su apoyo durante este largo trayecto del posgrado.

Al CONACYT

Por la oportunidad de crecer Profesionalmente.

A mi comité tutorial

Por sus comentarios y revisiones.

A los profesores de seminario de Tesis

En especial gracias al Dr. Richard Falconi Calderón por sus correcciones y sus consejos, muchas gracias.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Resumen

Estudiamos el comportamiento de un electrón sometido a un campo magnético uniforme bajo la ecuación de Schrödinger-Pauli y la ecuación de Dirac. Los estados propios y las energías en ambos casos son distintos, para el caso no relativista la energía solo existe para el caso de energía positiva, mientras que para el caso relativista existen dos tipos de energía, energía positiva y energía negativa. Consideramos el transporte de un electrón en presencia de un campo magnético y ortogonal a su plano, donde los estados propios y las energías propias del electrón se encuentran para el movimiento, en el que se rota a partir del operador de rotación espín $\frac{1}{2}$. Se muestra la posibilidad de diseñar corrientes controlando el momento angular orbital a través de transportar el electrón en la ecuación relativista. Las corrientes son de interés por la información que proporciona los números cuánticos en especial el número cuántico de espín s y el número cuántico de orientación m , que invierten la dirección del movimiento pasando de componentes pequeñas a componentes grandes. La teoría incluye la estructura del modelo espín y su interacción con el campo magnético a partir del cual se encuentran las soluciones al problema en términos radiales y luego se identifica cómo cambian sus direcciones con respecto a la energía y funciones de probabilidades. Los resultados se obtienen para la situación en el que modelo se prepara inicialmente en un estado ϕ y se caracteriza con las diferentes dinámicas, así como también en las funciones termodinámicas en la que participa la función de partición en términos del resultado no relativista.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuación de Schrödinger-Pauli	5
2.1. Descripción mecánico cuántico	5
2.2. Interacción espín Hamiltoniano	6
2.3. Formulación de Schrödinger-Pauli	7
2.4. Solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli para el Espectro de energía	9
2.5. Solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli para la función de onda .	11
2.6. Función de onda del estado fundamental	14
3. Efecto Stern-Gerlach	17
3.1. El experimento de Stern-Gerlach	17
3.2. El Hamiltoniano del electrón no relativista	18
3.3. Suma de momentos angulares	20
3.4. Evaluación del momento magnético	23
3.5. Valores promedio del oscilador armónico a temperatura finita	24
3.6. Evaluación del momento magnético en la teoría de perturbación	25
3.7. Energía cinética del momento angular orbital	26
4. Efecto Zeeman	31
4.1. Análisis del efecto Zeeman normal para la simetría esférica	31
4.2. Niveles de energía	33
4.3. Efecto Zeeman anómalo y el efecto espín órbita	34
4.4. Ecuación de Schrödinger-Pauli con un potencial escalar del oscilador armónico	35

5. Ecuación de Dirac	39
5.1. Electrón relativista	39
5.2. Nivel de energía del estado fundamental	41
6. Conservación del momento angular total en la ecuación de Dirac	43
6.1. Niveles de energía	46
7. Transporte de un electrón en una trayectoria cerrada	47
7.1. Distribuciones de probabilidades radiales relativistas	52
7.2. Espinores de Dirac	56
7.3. Puntos importantes que se deben de considerar en el transporte de un electrón relativista	59
8. Predicción de las probabilidades de proyección de espín para el traslado de un electrón por una trayectoria cerrada	61
8.1. Densidad de Probabilidad	61
8.2. Vórtices de electrones rotados	62
8.3. Órbitas y Probabilidades para el valor $\phi = \frac{2\pi}{3}$	64
8.4. Estados propios y estructuras de corrientes del transporte de un electrón para distintos valores de ϕ	68
8.5. Espectro y funciones de onda en la norma de Landau	69
9. Operador rotación y Aplicación de la Teoría de Cartan	73
9.1. Transporte completo del electrón	73
9.2. Transporte completo del electrón relativista	77
9.3. Aplicación de los espinores de Cartan	81
9.4. Puntos importantes que se deben de considerar en la velocidad de un electrón relativista en el transporte del espín semientero	84
10. Analogía con la paradoja del gato de Schrödinger	87
10.1. Velocidades de los electrones y tiempo mínimo del transporte del electrón	90
11. Discusión de los resultados	95
11.1. Partícula interaccionando con un oscilador armónico	95
11.2. Partícula interaccionando con un oscilador armónico relativista	98

11.3. Dinámica cuántica de una partícula cargada de espín $\frac{1}{2}$ con acoplamientos escalares y vectoriales	99
11.3.1. Límite exacto de simetría pseudoespín $S = -V$	101
11.3.2. Funciones de onda	102
11.3.3. Oscilador anarmónico	102
11.4. Límite exacto de Simetría $S=-V$	105
11.4.1. Función de onda $S = -V$	106
11.5. Interacción de dos electrones en un campo magnético uniforme en un potencial parabólico con la dinámica de la ecuación de Schrödinger-Pauli	107
11.6. Direcciones relativistas en el enfoque de estructura antiparalela al campo magnético	109
11.7. Dos anyones en un campo magnético uniforme con proyecciones semi-enteros	111
11.7.1. Caso relativo	113
11.7.2. Repulsión de Coulomb	115
11.7.3. Función de partición	120
12. Conclusiones	123
A. El Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli	125
B. Oscilador armónico bidimensional	129
C. Espectro de energía para la ecuación de Schrödinger-Pauli	133
D. Función de onda	139
Bibliografía	143

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica no relativista y la mecánica cuántica relativista pueden ser revisadas en diferentes textos. Cada una de las matemáticas es diferente a su contraparte y físicamente tienen resultados distintos con respecto a la cuantización de la energía para el sistema no relativista [1]. En esta tesis, tratamos con un electrón sometido a un campo magnético uniforme, en donde se encuentran soluciones analíticas, de acuerdo a las cantidades conservadas del oscilador armónico 2D. La ecuación de Schrödinger-Pauli se resuelve exactamente para sus espectros de energía y funciones de onda y se estudian las diferentes soluciones a partir de rotar el espín e introducirlo en la ecuación no relativista, es natural que los efectos para una partícula cargada bajo esta acción puedan volverse importante, en especial para los diferentes espectros. Aunque solo exista para condiciones en el que se obligue al electrón a conservar el momento angular total [2]. El objetivo del presente trabajo también es aplicarlo a la ecuación de Dirac e igual obtener los valores propios de la energía y las funciones de onda y conocer cómo es el transportar el electrón en diferentes valores de ϕ , discutiendo algunos casos especiales como son las estructuras de corrientes.

Esta solución se muestra detalladamente cuando se rota el electrón para cada uno de los valores ϕ y cada uno de ellos permite la posibilidad de concebir resultados diferentes, en el que el momento angular en el eje x y en el eje z , hacen posible el estudio en cada fracción de movimiento a partir de sus valores propios. El problema ha sido exitosamente resuelto por lo que el caso acoplado propone la estructura de sistemas fuera de lo común con respecto al intercambio de direcciones, que corresponde a los grados de libertad espaciales en su forma radial. Por otro lado, el sistema de intercambio de direcciones es por si mismo interesante y ha atraído considerablemente la atención en la electrodinámica cuántica. Teóricamente, diferentes modelos con respecto a los estados del electrón han sido explorados [3,4,5]. Aquí se muestra cómo se

puede definir y resolver el movimiento intrínseco para cada punto ϕ y modelarlos a las ecuaciones de movimiento, lo cual mantiene la solubilidad en su forma radial. Específicamente al considerar efectos no relativista como relativista, en el que cada uno de ellos se diferencia; número uno por un movimiento interno del electrón y número dos por el movimiento entorno a sus estados orbitales y sus efectos fraccionarios, resultados de la rotación.

Se muestra, entonces que el número de rotaciones es una cantidad conservada en el momento angular total del eje z . Usando como base este operador de rotación, el hamiltoniano es diferente al que se escribe originalmente antes de introducir las cantidades del movimiento intrínseco para cada punto ϕ . Cabe señalar que ambos modelos son interesantes debido a su resolución total con respecto a sus espectros de energía, en el que para casos relativista los diferentes puntos de ϕ son intercambiables en las componentes de normalización [6, 7]. Estos utilizan los resultados en su forma radial con respecto a la ecuación diferencial del polinomio de Laguerre, que resulta en un modo en el cual cumple con el número de estados posibles del electrón, esto se restringe a las probabilidades y valores medios en el que puede ser encontrado. Además, se muestra que nuestra modelo resulta ser un ejemplo claro de que para estudiar el movimiento interno desde la perspectiva del número cuántico del espín, es necesario entender esta combinación de resultados con la ecuación de movimiento, pues es un recurso necesario y fundamental para obtener la información en proporciones de probabilidades y energías propias.

La relación entre el operador de rotación y la ecuación de movimiento relativista nos da al acceso más simple para abordar el problema y conocer cómo es el intercambio de direcciones que tienen que ver con la aparición de la antipartícula. Se estudia el transporte del electrón usando la teoría de Schrödinger-Pauli y la teoría de Dirac cuando el electrón es sometido en un campo magnético uniforme [8]. Al analizar las soluciones analíticas exactas se encuentran que para cada punto en el transporte del electrón hay distintos espectros de energías, tanto de los casos relativista como no relativista, que se observa con mayor detalle en los capítulos 8, 9 y 10.

La tesis esta organizada de la siguiente manera; en el capítulo 2 se da una descripción mecánico cuántico de la ecuación de Schrödinger-Pauli y cómo interacciona con el espín Hamiltoniano utilizando coordenadas cilíndricas en donde se encuentra la solución para el espectro de energía, al igual que su función de onda. En el capítulo 3 se explica el modelo del experimento de Stern-Gerlach para la interacción en la suma de ambos momentos angulares. Se revisan los casos de los valores promedios de la

variable radial con el estado fundamental, se explica también la suma de momentos angulares a través de la suma de ambos números cuánticos, y se muestra después la evaluación del momento magnético del momento angular orbital de la energía cinética [9]. En el capítulo 4, se estudia el efecto Zeeman de una manera que simplifica y clarifica los resultados introducidos en el capítulo 2, obteniendo el desplazamiento radial no nulo, para cada uno de los valores en lo que puede ser construida la función de onda en lo que impone velocidades físicas en los límites de la velocidad cuántica [10].

En el capítulo 5, se presenta el modelo de la ecuación de Dirac-Pauli, en el que se desprenden resultados de energías relativistas y funciones de onda que infieren con el electrón en las medidas de los estados de energía positiva y negativa. En el capítulo 6, se evalúa la ecuación de Dirac, en la conservación del momento angular total, en el que solo conmuta con la componente z . En el capítulo 7, se estudia el transporte de un electrón en una trayectoria cerrada a través de su solución en su representación radial y sus niveles de energía en cada uno de estos estados. De este modo, se obtienen las direcciones del electrón en el sentido contrario a las manecillas del reloj y en el sentido a las manecillas del reloj, a través de las densidades de probabilidad en el conjunto de los espinores en términos del índice radial. Al determinar cada uno de sus valores también se presentan algunas distribuciones del momento angular orbital en el espinor de la ecuación de Dirac-Pauli, en la que no se preservan los valores del momento angular en promedio de r^2 .

En el capítulo 8, se discuten cómo se obtienen los diferentes espectros de energía con diferentes valores de ϕ , tanto de la ecuación radial, como de la misma en los valores medios y estados propios del electrón relativista y se presentan los resultados de estructura de corriente, así como su desarrollo en el espectro de energía y funciones de onda en la norma de Landau. En el capítulo 9, se plantea el caso no relativista y el caso relativista, en el que se estudia el transporte completo del electrón a partir del valor propio del espín, en el que se encuentra organizado por el operador de rotación, además, se obtienen cada valor del espinor de Cartan ζ que actúa sobre un valor complejo que lo convierte en su conjugado invirtiendo la dirección del electrón a través del número cuántico m . En el capítulo 10, se estudia la analogía con la paradoja del gato de Schrödinger para un gato relativista, estudiándolo a partir del método propuesto, todo a partir de las velocidades de los electrones y el tiempo mínimo, en el que el transporte se hace en los distintos desplazamientos radiales de cada valor ϕ . Finalmente, en el capítulo 11 se presentan los resultados y discusiones a través de las diferentes aplicaciones, con el fin de obtener una idea clara de los resultados, además, de proporcionar la entropía a partir de la función de partición, que aparece a partir de

la solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli, en donde se usa el espectro de energía incluyendo el número cuántico magnético m con orientaciones $m > 0$ y $m < 0$, lo cual revela una reorganización interna de la corriente azimutal en el momento angular orbital. De igual forma se presentan las conclusiones, así como también los apéndices para el desarrollo matemático.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 2

Ecuación de Schrödinger-Pauli

2.1. Descripción mecánico cuántico

En 1927 Wolfgang Pauli desarrolló un modelo cuántico para la inclusión del operador espín en la ecuación de Schrödinger [11]. El concepto del operador de espín introducido por Wolfgang Pauli, es estudiado en diferentes áreas en donde los beneficios no solo se observan teóricamente sino que también experimentalmente [12, 13]. Por otra parte, el incluir el espín en la ecuación de Schrödinger permite conocer el comportamiento del electrón con cualquier campo magnético externo y por lo tanto obtener una descripción detallada de su estructura, cuya forma radica en los dos posibles valores de los tres componentes angulares del espín, los efectos asociados resultan en niveles de Landau, efecto Hall cuántico y otros efectos agregados con el campo magnético. La convención de escribir $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ para cada una de las direcciones del espín se relaciona con las direcciones de los valores propios en los que la energía se separa en dos direcciones, así pues, su forma se puede aplicar a describir un sistema bidimensional [14].

Por otro lado, las representaciones del espín y del momento angular orbital actúan sobre espacios diferentes, por lo que resulta conveniente la introducción de un modelo circular cuántico que describa la variedad de estados, cuyos operadores de espín sean la acción de superposiciones en las direcciones del eje de la rotación, que podemos reescribir como el vector de estado del oscilador de Schrödinger-Pauli. Desde la perspectiva de la mecánica cuántica el Hamiltoniano de una partícula sometida en un campo magnético se expresa

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \phi(\vec{r}). \quad (2.1)$$

Esto indica la forma mas simple de acoplar el campo eléctrico al movimiento de la partícula, cuyo momento canónico es la suma cinética y el término $\frac{e}{c}\vec{A}$, determinado por el vector potencial \vec{A} . Con esta representación (2.1), se pueden estudiar una variedad de efectos que es útil para la dinámica de una partícula cargada sin espín en un campo magnético. Cuya forma en (2.1) contiene la información de la dinámica del electrón en su hamiltoniano, donde m_0 es la masa del electrón y $\phi(r)$ es el potencial escalar. Entonces, la dinámica cuántica de una partícula de espín 1/2 en un campo magnético escrita de la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 + \phi(\vec{r}), \quad (2.2)$$

actúa sobre el vector de estado total del oscilador no relativista y se denota como las direcciones entre los acoplamientos de los dos valores del espín 1/2 del vector de las matrices de Pauli, escrita en la forma $\vec{\sigma}$. En este sentido, el objetivo principal es determinar los niveles de energía y la función de onda de la ecuación (2.2), por lo tanto, se implementan los desarrollos matemáticos pertinentes que se extenderán a los capítulos 8, 9 y 10, para casos relativistas.

2.2. Interacción espín Hamiltoniano

En esta sección se describe la conexión que existe entre el oscilador de Schrödinger-Pauli y el momento magnético intrínseco, el cual, es muy conocido en el acoplamiento para las energías de dos niveles de interacción. En particular, se le atribuye un momento magnético propio; por consideraciones de simetría [15], esto quiere decir que el incorporar el espín a la teoría de Schrödinger comprueba que el hamiltoniano da lugar a un termino de interacción con el propio momento angular orbital. En primera instancia considere la interacción del momento magnético $\vec{\mu}$ que se conecta con el momento angular inherente, llamado espín

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m_0} \vec{S} \cdot \vec{B}. \quad (2.3)$$

Donde \vec{S} es el operador vectorial del espín y B es el campo magnético. Ignorando la fuerza externa y considerando la orientación del campo magnético en la dirección del eje z , se escribe el hamiltoniano \hat{H} como la descripción de un electrón en reposo en un campo magnético externo B_0

$$\hat{H} = \frac{e\hbar B_0}{2m_0 c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

cuyos niveles de energía resultan ser $E = \pm \frac{\hbar\omega}{2}$, donde $\omega = \frac{eB_0}{m_0c}$ es la frecuencia de precesión del dipolo magnético, \hbar la constante de Planck y c la velocidad de la luz [35]. Usando el Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli

$$\hat{H}_{x,y} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2}m_0\omega^2(x^2 + y^2), \quad (2.5)$$

uno puede apreciar la conexión entre la frecuencia de precesión y la frecuencia del oscilador armónico bidimensional cuando el vector potencial, es el vector potencial de la norma de Landau. De esta comparación, podemos concluir que el Hamiltoniano es exactamente el mismo que el del oscilador armónico 2D y que el término de interacción $\vec{\mu}$ establece una nueva forma para el movimiento que describe la curvatura del potencial parabólico. Por lo tanto, se pueden establecer soluciones y observar que ambos osciladores oscilan en direcciones perpendiculares entre si, que se reducen a un movimiento circular, estableciendo que los valores propios son de la forma cuyos números cuánticos n_1 y n_2 asumen valores $0, 1, 2, 3, \dots$

2.3. Formulación de Schrödinger-Pauli

En esta sección considere la simetría bidimensional, en el que se destaca la importancia de su estructura para el estudio del transporte del electrón, a partir de la ecuación de Pauli, tomando en cuenta el desarrollo matemático. A diferencia del caso anterior, el problema está representado en la forma en el que el resultado conserva la solución para el momento angular orbital y el hamiltoniano, ambos condicionan la forma de un oscilador armónico con un potencial de confinamiento parabólico. En primera instancia, considere al electrón colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$. Considerando que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, siendo \vec{A} el potencial vectorial magnético. Una forma de elegir \vec{A} es de la forma siguiente:

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y\hat{i} + x\hat{j}), \quad (2.6)$$

al usar la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (2.7)$$

y el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 + \phi(r), \quad (2.8)$$

junto con un espinor de dos componentes, la energía se divide en dos casos, uno en el que su dirección y valor están condicionados a las direcciones con respecto al campo magnético y otro en el que su valor es contraria con respecto al campo magnético

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

El Hamiltoniano toma en cuenta las matrices de Pauli y el hecho de que $\phi(r) = 0$; su desarrollo se escribe en términos del espín semientero y el campo magnético

$$\left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 = \left[\left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 - \frac{e\hbar}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}). \quad (2.10)$$

Para escribir la ecuación de Schrödinger-Pauli se usa la ecuación (2.10). La ecuación tiene la forma:

$$\hat{H}\Psi = \frac{\left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \Psi}{2m_0}, \quad (2.11)$$

a partir del desarrollo (2.10), se tiene que el término cuadrático en interacción con el grado de libertad intrínseco se escribe en la forma siguiente:

$$\left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \Psi = \left[\left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \Psi - \frac{e\hbar}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \Psi, \quad (2.12)$$

de acuerdo al apéndice A, el primer término tiene el siguiente resultado:

$$\left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = \left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi = -\hbar^2 \nabla^2 \Psi + 2i\hbar \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \nabla \Psi + \frac{e^2}{c^2} A^2 \Psi, \quad (2.13)$$

observando que el resultado del producto punto, es el vector potencial magnético que determina el momento angular orbital en la dirección del eje z

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = \frac{B_0}{2} (-y\hat{i} + x\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) = \frac{B_0}{2} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2.14)$$

sustituyendo la ecuación (2.14) en la ecuación (2.13), se obtiene:

$$\left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = -\hbar^2 \nabla^2 \Psi - \frac{eB_0}{c} L_z \Psi + \frac{e^2}{c^2} A^2 \Psi. \quad (2.15)$$

De acuerdo al cuadrado del vector potencial magnético y a la dirección en la dirección del eje z, se escribe en términos del movimiento perpendicular del movimiento

oscilatorio provocado por la partícula y el campo magnético. Por lo tanto, el hamiltoniano que se obtiene, tiene la forma:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{e}{2m_0 c} B_0 \hat{L}_z + \frac{e^2}{2m_0 c^2} \frac{B_0^2}{4} (x^2 + y^2) - \frac{e}{m_0 c} \hat{S}_z B_0, \quad (2.16)$$

en coordenadas cilíndricas, el Hamiltoniano adopta la forma siguiente:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{eB_0}{2m_0 c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} + 2\hat{S}_z \right] + \frac{e^2 B^2}{8m_0 c^2} r^2. \quad (2.17)$$

Entonces la ecuación de Schrödinger-Pauli a resolver en esta simetría, es de la siguiente manera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_{\pm} - \frac{eB_0}{2m_0 c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Psi_{\pm} + \frac{e^2 B^2}{8m_0 c^2} r^2 \Psi_{\pm} = E_{\pm} \Psi_{\pm}. \quad (2.18)$$

2.4. Solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli para el Espectro de energía

Se observa que la partícula se mueve libremente en la dirección z , por lo que su energía es $E_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0}$. Usando esto, la ecuación (2.18) se transforma en la solución de una parte bidimensional y la parte libre en la dirección z . El problema está representado en coordenadas cilíndricas, así que los niveles de energía se separan en una contribución tanto del número cuántico principal como del número cuántico angular

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Phi_{\pm} - \frac{eB_0}{2m_0 c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Phi_{\pm} + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2} r^2 \Phi_{\pm} = (E_{\pm} - E_z) \Phi_{\pm}, \quad (2.19)$$

donde $\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_z z} \Phi_{\pm}(r, \theta)$ cuya coordenada θ es cíclica e indica la evolución azimutal en uno de los números cuánticos, como es el caso del momento angular orbital

$$\Phi_{\pm} = e^{im\theta} \rho_{\pm}(r), \quad (2.20)$$

sustituyendo la ecuación (2.20) en la ecuación (2.19) se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \rho_{\pm}(r) + \left[\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1) \right] \rho_{\pm}(r) - \frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2} r^2 \rho_{\pm}(r) - \frac{m^2}{r^2} \rho_{\pm}(r) = 0. \quad (2.21)$$

Se define que

$$\gamma'_{\pm} \equiv \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1), \quad (2.22)$$

y

$$v^2 \equiv \frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2}, \quad (2.23)$$

con estos valores la ecuación radial de movimiento toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \rho_{\pm}(r) + (\gamma'_{\pm} - v^2 r^2) \rho_{\pm}(r) - \frac{m^2}{r^2} \rho_{\pm}(r) = 0. \quad (2.24)$$

La ecuación la escribimos en la forma de la ecuación del oscilador armónico bidimensional del apéndice B, esto es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) g_m(r) + (\gamma - r^2) g_m(r) - \frac{m^2}{r^2} g_m(r) = 0, \quad (2.25)$$

donde el cambio de variable $r \rightarrow \sqrt{v}r$ permite escribir

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) g_m(r) + (v\gamma - v^2 r^2) g_m(r) - \frac{m^2}{r^2} g_m(r) = 0. \quad (2.26)$$

Al comparar la ecuación (2.26) con la ecuación (2.25) se observa que se puede definir lo siguiente:

$$\gamma'_{\pm} \equiv v\gamma, \quad (2.27)$$

y el valor de k' del apéndice C, con $k' = \frac{1}{2}(\frac{\gamma'_{\pm}}{2} - v(m+1))$, resulta ser el término del índice radial. Esto quiere decir que los resultados del apéndice C se sustituyen en los valores de γ'_{\pm} y v

$$\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1) = \left| \frac{eB_0}{\hbar c} \right| (|m| + 2k + 1), \quad (2.28)$$

por lo que el espectro de energía en ambas divisiones permite escribir la energía como la suma de la interacción bidimensional y su relación libre en la dirección z [84],

$$(E_{\pm} - E_z) = -\frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e| |B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (2.29)$$

El número cuántico k es el índice radial que describe cada uno de los diferentes estados del electrón que contiene los valores del número cuántico principal y el número cuántico m , donde m , es el resultado del operador \hat{L}_z del momento angular en la dirección z . Si el momento angular puede asumir solo una orientación perpendicular al movimiento bidimensional, entonces el número cuántico de momento angular ℓ es idéntico al valor absoluto del número cuántico $|m|$, cuya orientación asume una orientación perpendicular a lo largo del eje z [87]. Por lo tanto, cada valores propios de energía $E_{k,m}$, es una función del número cuántico radial y del número cuántico angular, cuya importancia radica en el número cuántico principal $n = 2k + |m|$. Eso quiere decir, que de los valores propios de energía debe existir números pares representado por $2k$ y cuyo resultado pueden representarse como (2.29). Tanto las diferentes orientaciones de momentos angulares como las diferentes funciones de onda radiales son producto de estos números cuánticos, ambos equivalentes al caso del valor propio en coordenadas cartesianas, pero que se originan a partir de diferentes condiciones en el formalismo de Schrödinger. Entonces, la forma del número cuántico principal se escribe en la manera en el que enumera todas las posibles energías y cada nivel de electrón individual puede ser ocupado por dos electrones, de acuerdo al desdoblamiento de los espectros en el número cuántico de espín, que se reduce a los diferentes niveles de energía asociado a las diferentes funciones propias [27].

2.5. Solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli para la función de onda

La ecuación que se obtiene del apéndice C de la ecuación de Schrödinger-Pauli es

$$xy_{\pm}'' + (m + 1 - vx)y_{\pm}' + k'y_{\pm} = 0. \quad (2.30)$$

Al realizar el cambio de variable $x = \frac{u}{\sqrt{v^2}}$, las derivadas a sustituir son:

$$\frac{dy_{\pm}}{dx} = \sqrt{v^2} \frac{dy_{\pm}}{du}, \quad \frac{d^2y_{\pm}}{dx^2} = v^2 \frac{d^2y_{\pm}}{du^2}, \quad (2.31)$$

por lo que, al sustituir el cambio de variable y las derivadas correspondientes, se obtiene la forma de la nueva ecuación diferencial:

$$u \frac{d^2 y_{\pm}}{du^2} + (m + 1 - u) \frac{dy_{\pm}}{du} + \frac{k'}{v} y_{\pm} = 0. \quad (2.32)$$

Definiendo

$$\Gamma \equiv \frac{k'}{v}. \quad (2.33)$$

Por lo cual, la ecuación (2.32) se reescribe en la forma de la ecuación diferencial del polinomio de Laguerre [16]

$$u y_{\pm}'' + (m + 1 - u) y_{\pm}' + \Gamma y_{\pm} = 0, \quad (2.34)$$

con $m = 0$ la solución satisface la ecuación diferencial, para el cual, el índice de suma en términos de sus derivadas es

$$u y_{\pm}'' + (1 - u) y_{\pm}' + \Gamma y_{\pm} = 0. \quad (2.35)$$

Para obtener la ecuación (2.34), se deriva la ecuación (2.35) de forma sucesiva, de esta forma la derivada es

$$u y_{\pm}^{(3)} + y_{\pm}^{(2)} + (1 - u) y_{\pm}^{(2)} - y_{\pm}^{(1)} + y_{\pm}^{(1)} = 0 \Rightarrow u y_{\pm}^{(3)} + (2 - u) y_{\pm}^{(2)} + (\Gamma - 1) y_{\pm}^{(1)} = 0, \quad (2.36)$$

derivando nuevamente

$$u y_{\pm}^{(4)} + y_{\pm}^{(3)} + (2 - u) y_{\pm}^{(3)} - y_{\pm}^{(2)} + (\Gamma - 1) y_{\pm}^{(2)} = 0 \Rightarrow u y_{\pm}^{(4)} + (3 - u) y_{\pm}^{(3)} + (\Gamma - 2) y_{\pm}^{(2)} = 0, \quad (2.37)$$

entonces al derivar m veces

$$u y_{\pm}^{(m+2)} + (m + 1 - u) y_{\pm}^{(m+1)} + (\Gamma - m) y_{\pm}^m = 0. \quad (2.38)$$

Para obtener la ecuación original basta con hacer el intercambio de índices $\Gamma \rightarrow \Gamma + m$,

$$u y_{\pm}^{(m+2)} + (m + 1 - u) y_{\pm}^{(m+1)} + \Gamma y_{\pm}^m = 0. \quad (2.39)$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y_{\pm}(u) = L_{\Gamma+m}^m(u) = \frac{d^m}{du^m} L_{\Gamma+m}(u). \quad (2.40)$$

La solución radial de la ecuación de Schrödinger-Pauli de acuerdo a la ecuación (C.24) y al cambio de variable tiene la forma:

$$\rho_{\pm}(u) = Ae^{-\frac{1}{2}u} \frac{1}{v^{\frac{m}{2}}} u^{\frac{m}{2}} L_{\Gamma+m}^m(u), \quad (2.41)$$

donde A es la constante a normalizar. Recordando que

$$v = \frac{eB_0}{2\hbar c}. \quad (2.42)$$

Al aplicar el método de Schrödinger del apéndice D se encuentra la constante de normalización

$$A = \sqrt{v^m} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}}, \quad (2.43)$$

por lo tanto

$$\rho_{\pm}(u) = \sqrt{v^m} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u} \frac{1}{v^{\frac{m}{2}}} u^{\frac{m}{2}} L_{\Gamma+m}^m(u). \quad (2.44)$$

Ahora, la función de onda es encontrada por

$$\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_z z} \Phi_{\pm}(r, \theta), \quad (2.45)$$

donde

$$\Phi_{\pm}(r, \theta) = e^{im\theta} \rho_{\pm}(r), \quad (2.46)$$

esto es

$$\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_z z} e^{im\theta} \rho_{\pm}(r). \quad (2.47)$$

Por el cambio de variable $x = \frac{u}{\sqrt{v^2}}$, la función de onda que se obtiene es:

$$\Psi_{\pm}(u, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u} u^{\frac{m}{2}} e^{ik_z z} e^{im\theta} L_{\Gamma+m}^m(u). \quad (2.48)$$

La función de onda describe el marco de coordenadas cilíndricas que ha pasado del marco de coordenadas cartesianas. Esta función de onda describe la forma de una simetría bidimensional, donde z es la dirección perpendicular al movimiento.

2.6. Función de onda del estado fundamental

Para comprender la dinámica que da lugar a la relación de incertidumbre y la distribución de probabilidad Gaussiana, seguimos el movimiento del oscilador. El estudio representa la solución del movimiento en las coordenadas x e y en el formalismo del movimiento bidimensional. En primera instancia considere la función de onda de la cual, solo se toma la parte radial

$$\Psi(u) = \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u} u^{\frac{m}{2}} L_{\Gamma+m}^m(u). \quad (2.49)$$

Del cambio de variable $u = vr^2$, se obtiene la conexión con el oscilador armónico bidimensional a partir de la cantidad v , que se puede describir como $\frac{m\omega}{\hbar}$. Del índice Γ del Polinomio de Laguerre y de los niveles propios de Landau, los números cuánticos están etiquetados por (n_1, n_2) y (k, m) . Ambos niveles propios toman la forma:

$$n_1 + n_2 + 1 = 2k + |m| + 1. \quad (2.50)$$

Obteniendo de ello $k = \left(\frac{n-|m|}{2}\right)$, y si recordamos la relación $\Gamma = \frac{k'}{v}$ y la descripción detallada con el caso de la sección 2.4, entonces, $\Gamma = \left(\frac{n-|m|}{2}\right)$. En esta situación elegimos $\Psi(u)$, como $\Psi(r)$ de ambos números cuánticos n y m

$$\Psi_{n,m}(r) = \sqrt{\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\left[(|m| + \frac{n-|m|}{2})! \right]^3}} e^{-\frac{m_0\omega}{2\hbar}r^2} \left(\sqrt{\frac{m_0\omega}{\hbar}} \right)^m r^m L_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)}^{|m|}(vr^2). \quad (2.51)$$

Para $n = 0$ y $m = 0$, la función de onda normalizada se expresa como:

$$\Psi_{0,0} = \left(\frac{m_0\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_0\omega}{2\hbar}r^2}. \quad (2.52)$$

El hecho de resolver la teoría para el movimiento cuántico bidimensional, es conceptualmente atractivo, debido al efecto ocasionado por la formulación de Schrödinger-Pauli que transforma la solución de Schrödinger en una solución que contiene las ecuaciones de los movimiento circulares cuánticos

$$a_r = e^{-i\theta} \left[-i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{iB_0 e r}{2\hbar c} \right], \quad (2.53)$$

$$a_r^\dagger = e^{i\theta} \left[-i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{iB_0 e r}{2\hbar c} \right], \quad (2.54)$$

en la forma de la ecuación diferencial que eventualmente actúa sobre las funciones de onda asociadas con los estados propios $\hat{H}_{x,y}$ y \hat{L}_z . En particular, los números cuánticos arrojan diferentes estados electrónicos que conservan la estabilidad de la materia. Por lo que es necesario, observar que cumplen con el principio de Pauli, que se deriva de las propiedades de los operadores de espín que en representación de cada uno de los valores propios, el electrón en un campo magnético a lo largo del eje z forma estados de Landau, cuyos números cuánticos n y m son equivalentes con el cambio de las coordenadas cartesianas x e y , lo que implica un cambio del número cuántico n al número cuántico $n = 2k + |m|$, dentro de las soluciones bidimensionales de un oscilador armónico, por ello la energía $E_{k,m}$ se puede representar como:

$$E_{k,m} = \hbar\omega(2k + |m| + 1), \quad (2.55)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Siendo k el número cuántico radial que tiene al número cuántico principal y al número cuántico angular en la forma $k = \frac{n-|m|}{2}$. Así pues, para las energías posibles de E_n , se obtiene:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1) = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1), \quad (2.56)$$

por lo tanto, cada una de las posibles energías de las ecuaciones (2.55) y (2.56) son equivalentes y describen la variedad de estados cuánticos de un oscilador armónico bidimensional que es un buen modelo de estudio para diferentes aplicaciones en la nanoestructuras de los átomos confinados [87]. Por otra parte, enumerar cada uno de los estados propios permite conocer cada una de las funciones propias, que a su vez, son soluciones de la función de onda (2.48). En consecuencia, en cada dirección del movimiento circular cuántico, es posible obtener un conjunto de estructuras de corrientes que brinden una comprensión del espín a una extensión generada por un flujo de energía circulante en el campo de onda del electrón, siendo así, solamente una estructura de su campo de onda. Su importancia radica en la imagen física del espín como la existencia de este flujo en la densidad de corriente, consecuencia del movimiento del electrón en la estructura bidimensional [88].

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 3

Efecto Stern-Gerlach

3.1. El experimento de Stern-Gerlach

El experimento de Stern-Gerlach es importante en la mecánica cuántica debido a que se obtienen dos dipolos magnéticos bien definidos en la dirección z . El experimento consiste en enviar un haz de átomos de plata neutra a través de un campo magnético estático no homogéneo que al ser recogido en una pantalla, los átomos de plata muestra dos patrones de rayas bien definidas, demostrando la cuantificación del dipolo magnético μ_z .

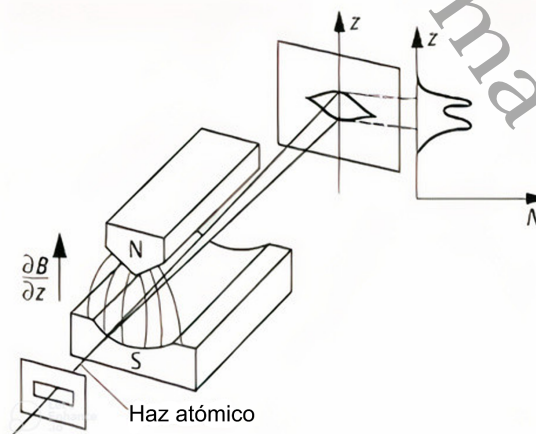


Figura 3.1: Experimento de Stern-Gerlach para la medición del espín [87]. Un haz atómico pasa a través de un campo magnético no uniforme y se divide en dos componentes, demostrando la cuantización del momento angular llamado espín.

Este experimento contrasta con lo esperado en la mecánica clásica, pero el hecho de que el momento angular de espín este cuantizado. Demuestra la existencia de una nueva naturaleza atribuido al electrón dentro del átomo, en el que el electrón puede orientarse dentro de un campo magnético B_z paralelo o antiparalelo al campo como se observa en la figura 3.1. De acuerdo a la teoría, el momento magnético de una partícula cargada está relacionada con el momento angular, en el caso del espín se introduce el factor de Lande g que conecta el momento magnético elemental con su momento angular llamado espín. Por otro lado, los resultados se han extendido no solamente a la solución de esos dos valores bien definidos, sino a la inclusión del espín en la ecuación de Schrödinger como se observa en las secciones siguientes.

3.2. El Hamiltoniano del electrón no relativista

En esta sección se presenta una extensión al oscilador armónico de Schrödinger-Pauli con la interacción de un campo magnético, modelado como la suma del efecto Stern-Gerlach que se escribe de la siguiente manera:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c} (x^2 + y^2) - \frac{eB_0}{2m_0 c} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z). \quad (3.1)$$

Los momentos magnéticos del momento angular orbital y del espín semientero forman parte de las funciones propias que dependen del acoplamiento del momento intrínseco, como la parte independiente de toda la ecuación, en este trabajo se usa la parte radial y angular de la función de onda de la ecuación (2.48) donde a partir del cambio de variable $u = (\eta r)^2$ se obtiene

$$\zeta_{+n,m}(r, \theta) = D_{+n} \eta (\eta r)^{|m|} L_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)}^{|m|} (\eta^2 r^2) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{im\theta}. \quad (3.2)$$

Considerando que la constante de normalización D_{+n} es obtenida de la ecuación (2.48) y que $\eta = \sqrt{v}$

$$D_{+n} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left[(|m| + \left(\frac{n-|m|}{2}\right))! \right]^3}}. \quad (3.3)$$

Se estudia el modo de Laguerre-Gaussiano que describe los vórtices de electrones que son característicos del momento angular orbital de la luz en coordenadas cilíndricas, para los estados n, m , en el estado fundamental y el estado $n = 1$ y $m = 1$

$$\zeta_{0,0}(r, \theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}, \quad (3.4)$$

$$\zeta_{1,1}(r, \theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}, \quad (3.5)$$

cuyas soluciones cumplen con el oscilador completo de Schrödinger-Pauli. De acuerdo a la energía cinética transversal

$$T_{\perp} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2 - \omega (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z). \quad (3.6)$$

El momento angular orbital \hat{L}_z no debe confundirse con el momento angular invariante de la norma de Landau $(\vec{r} \times \vec{\pi}) = \hat{L}_z + m_0 \omega r^2$ [17]. Es preciso notar que de la función de onda, se puede obtener el momento hiperbólico, el cual resulta ser el operador de un momento radial [18]. Este operador genera dilataciones en el momento lineal para las soluciones en los modos de Laguerre-Gaussianos

$$\hat{P}_H = -i\hbar \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right), \quad (3.7)$$

cuyo operador aumenta en los valores esperados en función de la propagación del momento angular. De aquí se procede a calcular los valores promedio del estado fundamental para cada una de las observables físicas.

valores promedio	Estado fundamental $\zeta_{0,0}$
$\langle r^2 \rangle$	$2\pi \int_0^{\infty} r dr \zeta_{0,0} ^2 r^2 = \frac{\hbar}{m_0 \omega}$
$\langle T_{\perp} \rangle$	$\frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m_0} + \frac{\langle p_y^2 \rangle}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \langle r^2 \rangle - \omega (\langle \hat{L}_z \rangle + 2 \langle \hat{S}_z \rangle) = 0$
$\langle \hat{P}_H \rangle$	$2\pi \int_0^{\infty} r \frac{\eta^2}{\pi} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} (-i\hbar) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} = 0$
$\langle (\vec{r} \times \vec{\pi}) \rangle$	$\langle L_z \rangle + m_0 \omega \langle r^2 \rangle = \hbar$

Tabla 3.1: Valores promedio de observables físicas.

El análisis del caso anterior ha permitido construir una generalización de los valores promedios de $\zeta_{0,0}$. La tabla 3.2 muestra cada valor del estado $\zeta_{1,1}$ en el que las 4 cantidades se expresan en términos de los valores propios.

valores promedio	Estado particular $\tilde{\xi}_{1,1}$
$\langle r^2 \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r dr \tilde{\xi}_{1,1} ^2 r^2 = \frac{2\hbar}{m_0\omega}$
$\langle T_\perp \rangle$	$\frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m_0} + \frac{\langle p_y^2 \rangle}{2m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega^2 \langle r^2 \rangle - \omega(\langle \hat{L}_z \rangle + 2\langle \hat{S}_z \rangle) = \frac{\hbar\omega}{2}$
$\langle \hat{P}_H \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \frac{\eta^2}{\pi} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} (-i\hbar) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} = 0$
$\langle (\vec{r} \times \vec{\pi}) \rangle$	$\langle L_z \rangle + m_0\omega \langle r^2 \rangle = 3\hbar$

Tabla 3.2: Valores promedio de observables físicas.

Se puede observar que a diferencia de la tabla 3.1, la tabla 3.2 muestra información del momento angular en la energía cinética transversal, a partir del número cuántico m , del estado superior al estado fundamental. De acuerdo a la función de onda del Hamiltoniano T_\perp , se obtiene como solución la fase $\phi(z) = \frac{\omega z}{v}(2k + |m| + 1) - \frac{\omega z}{v}(m \pm 1)$. Cuya solución viene de su aproximación paraxial [19] de la función de onda

$$\tilde{\xi}_{+n,m}(r, \theta) = D_{+n}\eta(\eta r)^{|m|} L_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)}^{|m|}(\eta^2 r^2) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{im\theta - i\phi}, \quad (3.8)$$

$$i\hbar v \frac{\partial \chi}{\partial z} = (T_\perp - \Delta E)\chi. \quad (3.9)$$

Siendo $v = \frac{\hbar k_z}{m_0}$, la velocidad del electrón a lo largo del eje z y $\Delta E = E_\pm - E_z$.

3.3. Suma de momentos angulares

En esta sección se analiza la dinámica de los momentos angulares en la dirección de su propagación. Para este propósito calculamos los promedios en sus diferentes números cuánticos radiales y orbitales usando la condiciones

$$n = n_1 + n_2, \quad m = n_1 - n_2, \quad (3.10)$$

así calcularemos cada uno de los valores particulares, como también los respectivos valores en el índice del polinomio de Laguerre. Por ejemplo de acuerdo al valor

$$\left(\frac{n - |m|}{2} + |m| \right), \quad (3.11)$$

se obtiene la suma de valores en n_1 y n_2

$$\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right) = \frac{2n_1 - m - |m|}{2} + |m|. \quad (3.12)$$

Así como valores en n_2 , de acuerdo al número de degeneración

$$\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right) = \frac{2n_2 + m - |m|}{2} + |m|, \quad (3.13)$$

n	m	$\zeta_{+n,m}(r, \theta)$
0	-2	$\zeta_{0,-2} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} (\eta r)^2 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-2i\theta}$
0	-1	$\zeta_{0,-1} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-i\theta}$
0	0	$\zeta_{0,0} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}$
0	1	$\zeta_{0,1} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} [2 - (\eta r)^2] (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}$
0	2	$\zeta_{0,2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [3 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$
1	-2	$\zeta_{1,-2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [3 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-2i\theta}$
1	-1	$\zeta_{1,-1} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-i\theta}$
1	0	$\zeta_{1,0} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} [1 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}$
1	1	$\zeta_{1,1} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}$
1	2	$\zeta_{1,2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [3 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$

Tabla 3.3: Funciones propias radiales del electrón en estados particulares.

el valor promedio para el estado $\zeta_{0,-2}$ en $\langle L_z \rangle$ es el siguiente:

$$\langle L_z \rangle = 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{0,-2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{0,-2} \right) dr = -2\hbar. \quad (3.14)$$

Con la elección en $n = 0$ y $m = -2$, se puede notar que el valor promedio indica también la dirección. Por lo tanto, la evolución se puede representar como el movimiento en sentido a las manecillas del reloj. Los valores vienen caracterizados por cada una de las direcciones del momento angular orbital [20].

valores promedio	Estados propios del electrón $\xi_{n,m}$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{0,-1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{0,-1} \right) dr = -\hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{0,0}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{0,0} \right) dr = 0$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{0,1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{0,1} \right) dr = \hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{0,2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{0,2} \right) dr = 2\hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{1,-2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{1,-2} \right) dr = -2\hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{1,-1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{1,-1} \right) dr = -\hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{1,0}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{1,0} \right) dr = 0$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{1,1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{1,1} \right) dr = \hbar$
$\langle L_z \rangle$	$2\pi \int_0^\infty r \xi_{1,2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_{1,2} \right) dr = 2\hbar$

Tabla 3.4: momentos orbitales con distribución radial.

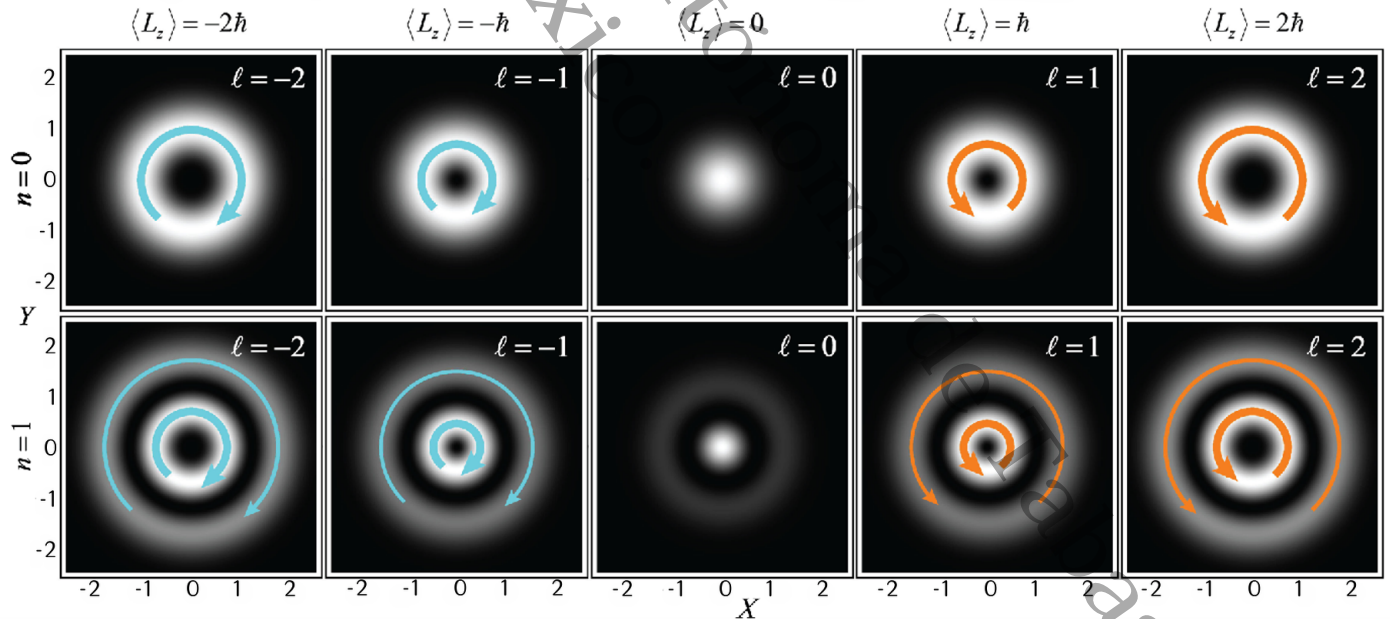


Figura 3.2: Densidad de probabilidad en la dirección azimutal del momento angular orbital [21].

3.4. Evaluación del momento magnético

La evaluación de los valores promedio para las variables del oscilador se hace para los diferentes estados con momento angular orbital que da lugar al momento magnético

$$M_z = -\frac{e}{2m_0c} L_z, \quad (3.15)$$

estableciendo la relación para cada una de sus direcciones. Para ser específico con la definición se introduce la tabla con los valores obtenidos

valores promedios	Estados propios del electrón $\zeta_{n,m}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{0,-1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{0,-1} \right) dr = \frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{0,0}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{0,0} \right) dr = 0$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{0,1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{0,1} \right) dr = -\frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{0,2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{0,2} \right) dr = -2\frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{1,-2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{1,-2} \right) dr = 2\frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{1,-1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{1,-1} \right) dr = \frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{1,0}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{1,0} \right) dr = 0$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{1,1}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{1,1} \right) dr = -\frac{e\hbar}{2m_0c}$
$-\frac{e}{2m_0c} \langle M_z \rangle$	$-\frac{e}{2m_0c} 2\pi \int_0^\infty r \zeta_{1,2}^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \zeta_{1,2} \right) dr = -2\frac{e\hbar}{2m_0c}$

Tabla 3.5: momentos magnéticos con distribución radial.

Los cálculos de la tabla 3.5 son resultado de las direcciones azimutales del momento angular orbital de la figura 3.2, lo que muestra que es una propiedad esencialmente fundamental entre el operador cuántico y los espines de los electrones para el movimiento rotacional, aunque solo ha sido para el caso orbital, la distinción entre ambos momentos angulares dependen de la separación matemática.

3.5. Valores promedio del oscilador armónico a temperatura finita

Debido a que estamos calculando los valores promedio entre los estados radiales y angulares, nos enfocamos en estudiar la dinámica en conjunto de sus valores de energía, en la que solo se toma la solución en términos de los niveles de Landau conociendo la función de partición, sujeto a un campo magnético. Ejemplificando las ventajas de utilizar los resultados anteriores, se infiere la existencia del movimiento para un oscilador armónico, que permite desarrollar, el marco de movimiento termodinámico para un sistema representativo que posee el valor propio y cuyo estado dinámico es una mezcla de estados de $E_{n,m}$, cada uno de ellos llenos con una probabilidad proporcional al factor $\exp(-\beta E_{n,m})$,

$$E_{n,m} = \hbar\omega(2n + m + 1). \quad (3.16)$$

El estudio de los sistemas termodinámicos con parámetros fijos (N, V, E) proporcionan una información muy valiosa, pero no es muy práctico debido a que la mayoría de los sistemas interactúan con el entorno, en este sentido, se considera un ensemble canónico, que es una colección de copias mentales del sistema que son consistente con el macroestado [89]. En este sentido, se añade un pequeño análisis de la información que se ha estudiado en las secciones anteriores usando $E_{n,m}$, de la ecuación (3.16). Aunque el propósito no es extenderse en este tema, sino solo proporcionar la información que se obtiene del caso no relativista y de los niveles de energía. Entonces, para cada número de miembros del ensemble se encuentra cada estado j , con energía E_j y para cada distribución, existe la probabilidad de hallar un miembro del ensemble en el estado j . Por ejemplo, de acuerdo al caso unidimensional del oscilador armónico [22], la cantidad de valores promedio se obtiene a partir de la información de probabilidad que depende de la energía del estado

$$\langle |x^{2j}| \rangle_T = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | x^{2j} | n \rangle \exp \left[-\frac{\hbar\omega(n + \frac{1}{2})}{kT} \right]. \quad (3.17)$$

Al definir $m' = m + n$, entonces el valor propio de energía en (3.16) se convierte en $E_{n,m} = \hbar\omega(n + m' + 1)$, que representa cada uno de los estados posibles en el sistema de estado. Por lo tanto la función de partición es:

$$Z = e^{-\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} \sum_{m'=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega m'} = \frac{1}{4 \sinh^2 \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right)}. \quad (3.18)$$

Considerando el estado fundamental, es posible obtener las soluciones en los valores promedio escritas en la tabla siguiente

valores promedio	observables físicas
$\langle r \rangle_T$	$\langle r \rangle_{T=0}$
$\langle P \rangle_T$	$\langle P \rangle_{T=0}$
$\langle r^2 \rangle_T$	$\langle r^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{m_0\omega} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$
$\langle P^2 \rangle_T$	$\langle P^2 \rangle_T = \hbar m_0\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$
$\langle rP \rangle_T$	$\langle rP \rangle_T = i\hbar$
$\langle r^4 \rangle_T$	$\langle r^4 \rangle_T = 2 \langle r^2 \rangle_T^2$

Tabla 3.6: valores promedios a temperatura finita.

La comparación refleja el comportamiento de un oscilador armónico 2D, en la que el orden de los valores promedio para las cantidades físicas concuerdan con las cantidades calculadas en la mecánica cuántica de efectos sin temperatura T de la tabla 3.1, esto siempre que los operadores cuánticos sean conservados por el hamiltoniano del sistema, para conjunto de estado propio de la ecuación (3.1). Así, por ejemplo, es posible encontrar el valor medio exacto de estas cantidades a todas las temperaturas para las estructura fina del operador cuántico. En particular, al involucrar la posición y momento para cada estado j , en el estado de probabilidad p_j .

3.6. Evaluación del momento magnético en la teoría de perturbación

Ahora hacemos mención del proceso del oscilador en el caso del término de perturbación. En este caso, lo ejemplificamos con un término adicional de frecuencia

$$H = \frac{P^2}{2m_0} - \frac{e}{m_0c} \vec{P} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2m_0c^2} \vec{A}^2 + \frac{1}{2} m_0\omega^2 r^2. \quad (3.19)$$

Cuyo vector potencial en los valores promedio esta dado por el estado fundamental que se escribe como:

$$\langle \left| \frac{e^2}{2m_0c^2} \vec{A} \right| \rangle = \frac{e^2 B_0^2}{8m_0c^2} \frac{\hbar}{m_0\omega} (n+1). \quad (3.20)$$

De acuerdo a la teoría de perturbación y la solución del nivel de energía se obtiene el nivel de energía bidimensional

$$\epsilon_{n_1, n_2} = \hbar\omega \left(1 + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2 \omega^2} \right) (n + 1), \quad (3.21)$$

que envuelve el valor de energía a valor promedio

$$\langle | \epsilon_{n_1, n_2} | \rangle_T = \hbar\omega \left(1 + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2 \omega^2} \right) \coth \left[\frac{\hbar\omega}{2kT} \left(1 + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2 \omega^2} \right) \right]. \quad (3.22)$$

El cambio de energía diamagnética aparece en segundo orden y su interpretación se encuentra en todos los estados excitados, que en presencia del campo magnético produce el comportamiento diamagnético. El valor promedio de energía se encuentra en el estado más bajo del oscilador armónico $|n_1, n_2\rangle$ y cada probabilidad de ocupación del estado está dada por el factor de Boltzmann [22].

3.7. Energía cinética del momento angular orbital

Reconsiderando el caso de los valores medios, se tienen dos valores posibles obtenidos por el anillo radial. De la ecuación (3.12) y (3.13) se obtienen las funciones propias del oscilador radial y angular. De acuerdo a la óptica cuántica [23] los valores medios en las direcciones en el haz del polinomio de Laguerre, son resultados de la siguiente ecuación:

$$\langle \mathcal{L}_z \rangle = \hbar \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \langle \eta^2 r^2 \rangle \right). \quad (3.23)$$

Como resultado de ello, se obtienen dos tipos de valores de energía en los modos de Laguerre Gaussianos

$$\langle \mathcal{L}_{z_1} \rangle = \hbar \left[2 \left(\frac{2n_1 - m - |m|}{2} + |m| \right) + |m| + 1 \right] + \hbar m, \quad (3.24)$$

$$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = \hbar \left[2 \left(\frac{2n_2 + m - |m|}{2} + |m| \right) + |m| + 1 \right] + \hbar m, \quad (3.25)$$

estos resultados son comparables por los obtenidos en el haz del polinomio de Laguerre en relación a los niveles de Landau [24].

$$\langle \eta^2 r^2 \rangle = \langle \frac{2r^2}{w^2} \rangle = (2N + |m| + 1). \quad (3.26)$$

El propósito de estos cálculos es encontrar la energía cinética del momento angular orbital para los valores promedio de las cantidades encontrada por [21], a partir de la suma de momentos angulares en los números cuánticos n y m , los resultados son los mismos y se muestran en la tabla 3.7, cada uno de ellos se asemejan a los resultados de la figura 3.3. El isomorfismo que existe con el número cuántico ℓ , es para los valores $|m|$ en los cuales solo asume una orientación perpendicular a lo largo del eje z .

n	m	$\xi_{+n,m}(r, \theta)$	$\langle \mathcal{L}_z \rangle$
0	-2	$\xi_{0,-2} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} (\eta r)^2 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-2i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = \hbar$
0	-1	$\xi_{0,-1} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = \hbar$
0	0	$\xi_{0,0} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = \hbar$
0	1	$\xi_{0,1} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_1} \rangle = 3\hbar$
0	2	$\xi_{0,2} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} (\eta r)^2 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_1} \rangle = 5\hbar$
1	-2	$\xi_{1,-2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [3 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-2i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = 3\hbar$
1	-1	$\xi_{1,-1} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} [2 - (\eta r)^2] (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{-i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = 3\hbar$
1	0	$\xi_{1,0} = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} [1 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}$	$\langle \mathcal{L}_{z_2} \rangle = 3\hbar$
1	1	$\xi_{1,1} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} [2 - (\eta r)^2] (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_1} \rangle = 5\hbar$
1	2	$\xi_{1,2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [3 - (\eta r)^2] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$	$\langle \mathcal{L}_{z_1} \rangle = 7\hbar$

Tabla 3.7: Función propias radiales del electrón en estados particulares.

Algunos valores son distintos a los valores de la tabla 3.3, pero esto, es debido a dos valores que son el producto del resultado en el índice del polinomio de Laguerre, esto en el promedio de la energía del momento angular orbital

$$\xi_{+n_1,m}(r, \theta) = D_{+n} \eta (\eta r)^{|m|} L_{\left(\frac{2n_1-m-|m|}{2} + |m|\right)}^{(|m|)} (\eta^2 r^2) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{im\theta}. \quad (3.27)$$

El siguiente valor es la suma del valor n_2 y m en el que el valor del índice también posee valores en los niveles de Landau en la función Gaussiana del polinomio de Laguerre

$$\xi_{+n_2,m}(r, \theta) = D_{+n} \eta (\eta r)^{|m|} L^{|m|}_{\left(\frac{2n_2+m-|m|}{2}+|m|\right)} (\eta^2 r^2) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{im\theta}. \quad (3.28)$$

De acuerdo a los resultados de la tabla 3.7 los valores del momento angular orbital en su promedio de energía cinética son mostrados en la figura 3.2, cada uno de ellos representa las distribuciones transversales de la densidad de probabilidad radial en los diferentes números cuánticos de n y m , estos valores son siempre positivos en independiente del signo del giro [21]. Es importante mencionar que el índice azimutal ℓ tiene el mismo significado físico que el momento angular axial del electrón, permitiendo establecer un isomorfismo con el comportamiento de la descripción mecánica cuántica de un electrón en un campo magnético uniforme y los modos de luz Laguerre-Gaussianos [25].

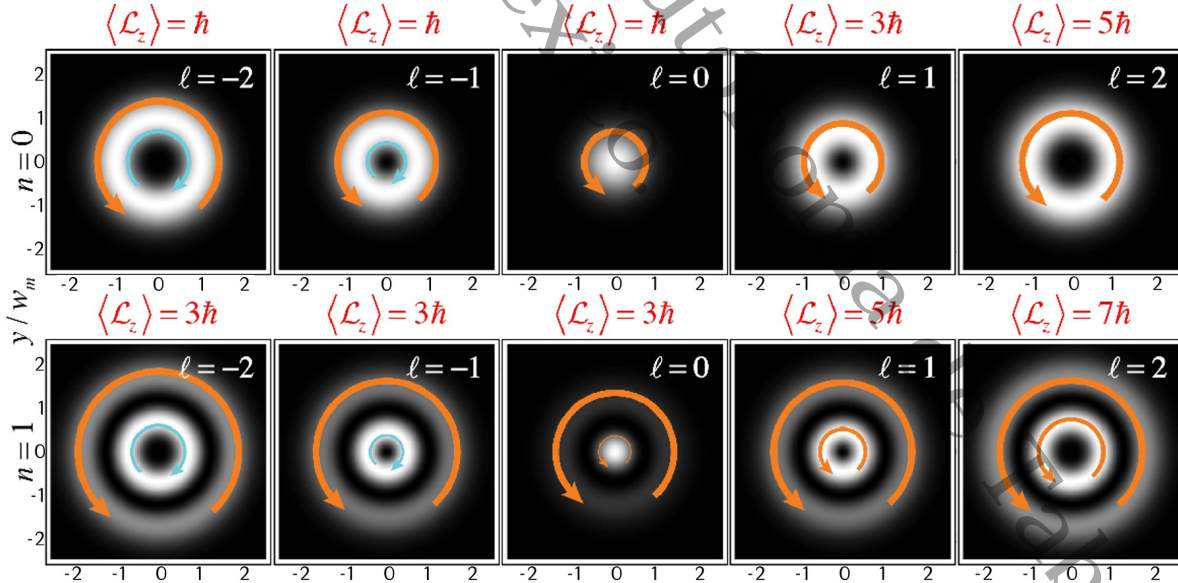


Figura 3.3: Confinamiento radial del electrón en los haces de Laguerre-Gaussiano (LG) del OAM [21].

El momento angular orbital (OAM), es importante en la óptica cuántica, debido a la información que proporciona cada una de las distribuciones transversales de densidad

de probabilidad. Esto indica que en un campo magnético pueden ser expresadas como corrientes azimutales de los estados propios. En comparación con [21], se resuelve para la formulación de Schrödinger-Pauli, en donde la suma de momentos angulares, son direcciones diferentes del número cuántico m . De acuerdo a las similitudes con la óptica de la luz, cada uno transportan una gran cantidad de momento angular y en resumen la dinámica rotacional depende del número cuántico m , que revela el comportamiento de los estados en relación a la soluciones radiales de la función de onda.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 4

Efecto Zeeman

El efecto Zeeman es la manifestación experimental del desdoblamiento y desplazamiento de las líneas espectrales por el efecto del campo magnético, que permite la determinación de los números cuánticos correspondiente a la línea espectral [90]. Este capítulo esta centrado en la teoría del efecto Zeeman y en la teoría de Schrödinger-Pauli con la interacción de un potencial escalar $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Dado que el objetivo principal es enunciar la teoría del efecto Zeeman y mostrar los resultados del efecto del potencial escalar, resulta conveniente considerar el procedimiento entorno a la sección 2.4 para obtener la solución radial de la función de onda y los valores propios.

4.1. Análisis del efecto Zeeman normal para la simetría esférica

La primera ecuación que expresa el efecto de una partícula cargada en un campo magnético externo, se escribe como la dinámica del estado inicial y el estado final, en el movimiento perpendicular al campo magnético

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{\vec{P}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}} \right)^2 + V(r), \quad (4.1)$$

bajo la influencia de un campo magnético uniforme $B\hat{z}$ y el Hamiltoniano de la ecuación (4.1), el efecto Zeeman normal se describe por la interacción bidimensional y la parte de $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ del potencial central

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{\vec{P}}^2 - \frac{e^2}{r} + \frac{e}{2\mu c} B \hat{L}_z + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2). \quad (4.2)$$

Sea $\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu} \hat{P}^2 - \frac{e^2}{r}$, el Hamiltoniano de un átomo en ausencia de un campo magnético que se transforma en la solución del problema e ignorando el término diamagnético debido a que el campo es fuerte, entonces resulta ser el término \hat{H} , la descripción de un electrón en la dirección del momento angular orbital [26]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2\mu c} B \hat{L}_z. \quad (4.3)$$

Escrita en coordenadas esféricas toma la forma conocida

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2 \hbar^2} \right] - \frac{e^2}{r} + \frac{B\mu_B}{\hbar} \hat{L}_z. \quad (4.4)$$

Debido a que H_0 conmuta con \hat{L}_z , implica que tanto \hat{H} como \hat{L}_z conmutan mutuamente [27]. Esto quiere decir, que se toman las mismas funciones propias simultáneas de \hat{L}^2 y \hat{L}_z , siendo el resultado de la ecuación diferencial radial en términos del Polinomio de Laguerre

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) R(r) - \frac{2\mu B \mu_B m_\ell}{\hbar^2} R(r) + \frac{2\mu E}{\hbar^2} R(r) = 0, \quad (4.5)$$

con los cambios de variables

$$\alpha = \frac{2}{\hbar} \sqrt{-2\mu E + 2\mu m_\ell \mu_B B}, \quad \rho = \alpha r, \quad \frac{d}{dr} = \alpha \frac{d}{d\rho}. \quad (4.6)$$

Se llega a una solución en la representación del número cuántico principal y el número cuántico azimutal ℓ

$$n + \ell + 1 = \lambda. \quad (4.7)$$

Permitiendo obtener el nivel de energía como la suma de ambos números cuánticos y la parte de la dirección del momento magnético en relación a su dirección de giro

$$E_{n\ell m} = E_{n\ell} + \mu_B m_\ell B. \quad (4.8)$$

Siguiendo los pasos de [27], se obtiene la función de onda, junto con la constante de normalización $G_{n,\ell}$

$$\Psi_{n\ell m}(\rho, \theta, \phi) = G_{n,\ell} \rho^\ell L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (4.9)$$

$$G_{n,\ell} = - \left(\frac{2}{na_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n [(n+\ell)!]^3}} \quad (4.10)$$

Por lo que la solución radial esta relacionada con los valores propios

$$R_{n\ell} = - \left(\frac{2}{na_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n [(n+\ell)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^\ell e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+\ell}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right). \quad (4.11)$$

Con esto vemos el comportamiento de cada uno de los valores sobre el comportamiento del efecto Zeeman, en los efectos orbitales en el que se puede alcanzar la dinámica, que surge de considerar la interacción del átomo con el campo magnético

$$R_{1,0}(r) = 2a_0^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad R_{2,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad (4.12)$$

$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{\sqrt{6a_0^3}} \frac{r}{2a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad R_{3,1}(r) = \frac{8}{9\sqrt{6a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{6a_0} \right) \left(\frac{r}{3a_0} \right) e^{-\frac{r}{3a_0}}. \quad (4.13)$$

El número de subniveles depende de los números cuánticos, es decir, que cada subnivel está determinado por cada una de las transiciones que corresponden a la emisión de los diferentes estados en término de la frecuencia armónica. De acuerdo a ello, aparecen diferentes líneas de frecuencia ω , el punto es que de acuerdo a los números cuánticos se pueden observar diferentes valores propios con energía $E_{n,\ell,m}$.

4.2. Niveles de energía

Para cada orbital (n, ℓ) no perturbado la corrección de primer orden se escribe como el promedio de los valores medios del momento angular en la dirección del campo magnético y el valor del vector potencial en la traslación del valor r^2

$$\Delta E_{n,\ell} = \langle n, \ell, m | \frac{eB_0}{2m_0c} \hat{L}_z | n, \ell, m \rangle + \langle n, \ell, m | \frac{e^2 B_0^2}{8m_0c^2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) | n, \ell, m \rangle. \quad (4.14)$$

Mientras que para la ecuación de Schrödinger-Pauli la relación en ambos números cuánticos evoluciona en la forma en como se observa la tabla 4.1

$$\Delta E_{n,m} = \langle n, m | \frac{eB_0}{2m_0c} \hat{L}_z | n, m \rangle + \langle n, m | \frac{e^2 B_0^2}{8m_0c^2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) | n, m \rangle. \quad (4.15)$$

Cada valor del desdoblamiento son términos del momento angular y de los desplazamientos en los niveles en cantidades proporcionales al valor esperado [28].

n	m	$\Delta E_{n,m}$
0	-1	$\Delta E_{0,-1} = 0$
0	0	$\Delta E_{0,0} = \frac{\hbar\omega}{2}$
0	1	$\Delta E_{0,1} = 2\hbar\omega$
0	2	$\Delta E_{0,2} = \frac{7}{2}\hbar\omega$
1	-2	$\Delta E_{1,-2} = \frac{\hbar\omega}{2}$
1	-1	$\Delta E_{1,-1} = \hbar\omega$
1	0	$\Delta E_{1,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega$
1	1	$\Delta E_{1,1} = 3\hbar\omega$
1	2	$\Delta E_{1,2} = \frac{9}{2}\hbar\omega$
2	1	$\Delta E_{2,1} = 6\hbar\omega$

Tabla 4.1: Valores esperados en la corrección de los niveles energía.

4.3. Efecto Zeeman anómalo y el efecto espín órbita

La identificación de las restricciones dadas en el efecto Zeeman normal en los espectros de energía, permiten identificar la acción del espín

$$\hat{H}_z = \frac{e}{2m_e c} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}, \quad (4.16)$$

en el que el efecto espín órbita pueden ser representados como \hat{H}_{SO} , lo cual tiene como consecuencia la inclusión de un producto entre el espín y la dirección del momento angular

$$\hat{H}_{SO} = \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r^3} \vec{S} \cdot \vec{L}. \quad (4.17)$$

Nótese que para una interacción, las soluciones en el Hamiltoniano están dadas por el término \hat{H}_0 y \hat{H}_{SO}

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2m_e^2 c^2 r^3} \vec{S} \cdot \vec{L}. \quad (4.18)$$

Los estados propios del átomo de hidrogeno llamado \hat{H}_0 conmutan con $[\vec{L}^2, \vec{S}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z]$.

Mientras que para el caso \hat{H}_{SO} esto no sucede, sino que conmuta con $\vec{L}^2, \vec{S}^2, \hat{J}^2$ y \hat{J}_z . Para que ambos posean el mismo conjunto de valores, ambos tienen que conmutar con las mismas observables y esto sucede con los estados propios de $|n, \ell, j, m\rangle$, de la siguiente manera

$$\left| \ell \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| \ell, \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| \ell, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4.19)$$

La partícula se mueve en un potencial central, y su función de onda consiste en la parte espacial y la parte del momento angular de espín, teniendo esto en cuenta la solución en relación a la suma permite escribir la función en la forma siguiente:

$$\Psi_{n,\ell,j=\ell\pm\frac{1}{2},m} = R_{n\ell}(r) \left[\sqrt{\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m+\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m-\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right]. \quad (4.20)$$

Es importante señalar que m sigue siendo un valor integral en acoplamiento de su suma total en el efecto Zeeman normal. También, los valores de energías se desdoblán en $2j + 1$ subniveles, para el cual están totalmente etiquetados con respecto al número cuántico azimutal [29].

4.4. Ecuación de Schrödinger-Pauli con un potencial escalar del oscilador armónico

Las expresiones para los valores propios de energía y las funciones de onda se determinan teniendo en cuenta ambos límites de la simetría. Así que las energías y las funciones de onda se modifican por el espín. Incluyendo un término $V(r) = ar^2$; la ecuación que se obtiene viene descrito por el valor en la traslación de un término multiplicado por la constante a ,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - \frac{eB_0}{2m_0c}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) + \frac{e^2}{2m_0c^2}\frac{B_0^2}{4}(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2). \quad (4.21)$$

A partir del cual se obtiene el oscilador armónico bidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m_0\omega^2b(x^2 + y^2)\Psi = E\Psi, \quad (4.22)$$

con la suma en los valores de $b = 1 + \frac{2a}{m_0\omega^2}$, y la frecuencia de ω , la ecuación (B.13) toma la forma siguiente:

$$4x\frac{d^2v_m(x)}{dx^2} + 4\frac{dv_m(x)}{dx} - \frac{m^2}{x}v_m(x) + (\beta - bx)v_m(x) = 0. \quad (4.23)$$

En el que la ecuación (4.23) se reescribe como la parte 2D del oscilador y la nueva frecuencia descrita por ω'

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m_0\omega'^2(x^2 + y^2)\Psi = E\Psi. \quad (4.24)$$

Siendo $\omega'^2 = \omega^2(1 + R)$ con $R = \frac{2a}{m_0\omega^2}$ y de esa manera la solución es similar a la forma de la ecuación (B.20)

$$4x\frac{d^2v_m(x)}{dx^2} + 4\frac{dv_m(x)}{dx} - \frac{m^2}{x}v_m(x) + (\beta - x)v_m(x) = 0, \quad (4.25)$$

cuya solución

$$v_m(x) = e^{-\frac{1}{2}x}x^{\frac{|m|}{2}}y(x), \quad (4.26)$$

satisface la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre. Así, el nivel de energía que se obtiene es

$$E = \hbar\omega\sqrt{1 + R}(2n + |m| + 1). \quad (4.27)$$

Esto de acuerdo

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} - m - 1\right), \quad \beta = \frac{2E}{\hbar\omega'}, \quad (4.28)$$

siendo el resultado de la ecuación de Schrödinger-Pauli en la simetría bidimensional, descrita en la forma de la ecuación diferencial radial

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \rho_{\pm}(r) - \frac{m^2}{r^2} \rho_{\pm} + (\beta'_{\pm} - \alpha^2 d^2 r^2) \rho_{\pm}(r) = 0, \quad (4.29)$$

cuyos valores poseen las energías y el valor del número cuántico m ,

$$\beta'_{\pm} = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1), \quad d = \sqrt{1 + R}. \quad (4.30)$$

La solución que satisface la ecuación de los polinomios de Laguerre tiene que ver con la solución en término de $\rho_m(x)$,

$$\rho_m(x) = e^{-\frac{1}{2}\alpha dx} x^{\frac{|m|}{2}} y(x), \quad (4.31)$$

que lleva a la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre

$$xy''_{\pm}(x) + (|m| + 1 - \alpha dx)y'_{\pm}(x) + k'' y_{\pm}(x) = 0, \quad (4.32)$$

con valores para k''

$$k'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta'_{\pm}}{2} - \alpha d (|m| + 1) \right). \quad (4.33)$$

Al proponer una serie de la forma $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, se llega a una serie que se corta para que esta no diverja

$$k'' = \alpha dk, \quad (4.34)$$

junto también con $\alpha = \frac{eB_0}{2\hbar c}$ y $d = \sqrt{1 + R}$, se obtiene β'_{\pm} , como el nuevo resultado de ambos valores

$$\beta'_{\pm} = \frac{eB_0}{\hbar c} \sqrt{1 + R} (2k + |m| + 1), \quad (4.35)$$

llegando a los valores de energía en función del término añadido por r^2 de la raíz cuadrada $\sqrt{1 + R}$,

$$E_{\pm} - E_z = -\frac{\hbar e B_0}{2mc} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2mc} |e||B_0| \sqrt{1 + R} (|m| + 2k + 1). \quad (4.36)$$

Con cambio de variable $t'' = \frac{k''}{\gamma}$ y $\gamma = \alpha d$, la solución de la función de onda se escribe de la forma siguiente:

$$\Xi = G_n \zeta (\zeta r)^{|m|} L_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)}^{(|m|)} (\zeta^2 r^2) e^{-\frac{\zeta^2 r^2}{2}} e^{im\theta}. \quad (4.37)$$

Donde $\zeta = \sqrt{\frac{eB_0}{2\hbar c}} (1 + R)^{\frac{1}{4}}$ y $(\zeta^2 r^2)$, es el argumento de la función polinomial de Laguerre. Aunque en este capítulo no hemos tomado en cuenta las direcciones del momento angular para un átomo bidimensional, hay que mencionar que en esta configuración, tomar valores negativos de m implican que el campo magnético sea antiparalelo. Aunque sin pérdida de generalidad, las atracciones producen una repulsión del electrón con el núcleo. Por lo tanto, el límite superior a $|m|$ ocasiona que el electrón se libere del núcleo, esto será el caso de un átomo bidimensional, así que los valores de m positivo son una atracción en dirección paralela del campo magnético [30]. Pasando a los valores obtenidos en el capítulo anterior, podemos obtener el desplazamiento radial no nulo del electrón, para cada uno de los valores en el que puede ser construido por Ξ . Note que deben ser construidos con los mismos números cuánticos de espín m_s y momento angular orbital m . No hay valores negativos de m , solamente valores positivos, en los valores de su máxima proyección.

Desplazamiento radial	Estados con los mismos números cuánticos m y m_s
$\langle 0, 0 r 2, 0 \rangle$	$2\pi \int_0^\infty \Xi_{0,0}^+ r \Xi_{2,0} r dr = \sqrt{\frac{\pi\hbar c}{8eB_0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{4ac}{eB_0}\right)^{\frac{1}{4}}}$
$\langle 1, 1 r 3, 1 \rangle$	$2\pi \int_0^\infty \Xi_{1,1}^+ r \Xi_{3,1} r dr = 3 \sqrt{\frac{\pi\hbar c}{4eB_0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{4ac}{eB_0}\right)^{\frac{1}{4}}}$
$\langle 2, 2 r 4, 2 \rangle$	$2\pi \int_0^\infty \Xi_{2,2}^+ r \Xi_{4,2} r dr = \frac{15}{16\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\pi\hbar c}{2eB_0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{4ac}{eB_0}\right)^{\frac{1}{4}}}$
$\langle 3, 3 r 5, 3 \rangle$	$2\pi \int_0^\infty \Xi_{2,2}^+ r \Xi_{4,2} r dr = \frac{35}{64} \sqrt{\frac{\pi\hbar c}{2eB_0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{4ac}{eB_0}\right)^{\frac{1}{4}}}$

Tabla 4.2: Desplazamientos radiales.

Todos los resultados de la tabla 4.2 son apropiados para cada uno de sus valores en los tiempos mínimos. Cada uno de esos tiempos serán expuestos en el capítulo 10 como cada uno de las dinámicas de la antipartícula en los espectros de energías imponiendo velocidades físicas en límites de la velocidad cuántica. En esta sección fueron expuestas como resultados de los valores propios en consideración del potencial escalar, para el cual son aplicables en problemas de cavidades cuánticas en la óptica cuántica, así como de información y computación cuántica [31 – 33].

Capítulo 5

Ecuación de Dirac

En este capítulo, se describe la dinámica de una partícula sometida a un campo magnético uniforme. La ecuación de estudio, es la ecuación de Dirac cuya dinámica es esencial para el transporte de un electrón relativista, cuya forma depende de sus componentes espín arriba y espín abajo.

5.1. Electrón relativista

Considere un electrón que interactúa con un campo magnético uniforme cuyas soluciones son expresadas en su forma espinorial. El electrón sigue una simetría cilíndrica donde la división del estado positivo y negativo están presentes para cada uno de los números cuánticos (n, m) . En el contexto de la ecuación de Dirac, describe la partícula de masa m y carga e

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_D \Psi, \quad (5.1)$$

donde el Hamiltoniano de Dirac en presencia de un campo magnético uniforme es obtenido por

$$\hat{H}_D = c\vec{\alpha} \cdot \vec{\Pi} + \beta m_0 c^2. \quad (5.2)$$

Aquí Π es la energía cinética del momento de la carga del fermión y de la ecuación (5.1), además se infiere los estados estacionarios que se pueden escribir

$$\Psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Donde ϕ y χ representan los primeros dos elementos de energía positiva y los otros dos elementos de energía negativa. Con esta notación podemos escribir la ecuación (5.1) como:

$$m_0c^2\phi + c\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})\chi = E\phi, \quad (5.4)$$

$$c\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})\phi - m_0c^2\chi = E\chi, \quad (5.5)$$

a partir de lo cual, se obtiene:

$$\phi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})}{E - m_0c^2}\chi, \quad (5.6)$$

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})}{E + m_0c^2}\phi. \quad (5.7)$$

Reemplazando χ por ϕ y viceversa, se obtiene una sola ecuación en función de ϕ

$$\frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{c^2}\phi = (-\hbar^2\nabla^2 + e^2A^2 - 2i\hbar e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B})\phi. \quad (5.8)$$

Como se ha mencionado, el campo magnético uniforme esta a lo largo del eje z por lo que

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(yB_0, xB_0, 0). \quad (5.9)$$

A partir de ello se llega a la ecuación de Dirac-Pauli [34, 35]

$$\left(\frac{E^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2}\right)\phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{e^2B_0^2}{8m_0}(x^2 + y^2) + \frac{eB_0}{2m_0}(\hat{L}_z + \hat{S}_z) - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi. \quad (5.10)$$

Con esta ecuación se observa el hamiltoniano del oscilador armónico bidimensional y los momentos angulares que se pueden expresar en términos de las funciones propias del oscilador armónico bidimensional, junto con los espinores y la onda plana de la partícula libre

$$\phi = G(x, y)e^{\frac{ip_z}{\hbar}}\chi_{\pm}, \quad (5.11)$$

estos dos primeros elementos están relacionados con el espinor de energía positiva. Estos elementos espinoriales positivos se escriben de la forma siguiente:

$$U_{\frac{1}{2}}^+ = \begin{pmatrix} G(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$$U_{-\frac{1}{2}}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ G(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Las componentes pequeñas comprenden los espinores que se originan por diferenciación de las componentes grandes. Cada componente contiene diferentes momentos angulares, y debido a la diferenciación de la base, el momento angular con mayor componente es la componente pequeña [91],

$$\hat{S}_z G_{m_s}^+(x, y) = \hbar m_s G_{m_s}^+(x, y), \quad (5.14)$$

donde m_s son cada una de las direcciones del espín. De acuerdo a las funciones propias se obtiene para el espín arriba

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 (x^2 + y^2) \right] G = \left[\frac{E^2 - m_0^2 c^2}{2m_0 c^2} - \frac{p_z^2}{2m_0} - \hbar \omega (m + 1) \right] G. \quad (5.15)$$

El término de la izquierda es el hamiltoniano del oscilador armónico bidimensional con frecuencia ω y $c = 1$,

$$\omega = \frac{eB_0}{2m_0}. \quad (5.16)$$

A partir de lo cual, la energía del oscilador es el término de la derecha, permiten conocer cómo evoluciona los estados en relación a la energía positiva y negativa para uno de los valores en m de la ecuación (5.15). Aunque los niveles de energía que se obtienen son niveles de Landau, se visualiza cómo estos niveles generan nuevas soluciones cuando el operador de rotación en el momento angular de espín obtiene grados de libertad fraccionarios, pero esto se discute en capítulos posteriores.

5.2. Nivel de energía del estado fundamental

La versión relativista se puede construir a partir de los niveles de Landau, cuando el espín $\frac{1}{2}$ se acopla al campo magnético. Pero antes de ello, se observa que los niveles de energía se desprenden de la ecuación (5.15),

$$\left[\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} - \hbar\omega(m \pm 1) \right] = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1). \quad (5.17)$$

Debido a que la energía total esta presente a la segunda potencia, cuando despejamos E , obtenemos dos signos para la energía total de la partícula, siendo el signo positivo relacionado con el electrón y el signo negativo con el positrón [36],

$$E_{n,m} = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 k_z^2 c^2 + eB_0 \hbar c^2 (n + m \pm 1 + 1)}. \quad (5.18)$$

Cuando se considera al electrón con momento lineal nulo, con la proyección de momento angular $m = -n$ y el campo magnético débil en relación con la masa electrón. Entonces la expresión de energía es

$$\begin{aligned} E &\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{eB_0 \hbar}{2m_0^2 c^2} (\pm 1 + 1) \right) \\ &= m_0 c^2 + \frac{eB_0 \hbar}{2m_0} (\pm 1 + 1). \end{aligned} \quad (5.19)$$

A partir de ello se obtienen los niveles de energía que existen entre la interacción del espín con el campo magnético [35]. Para ejemplificar este proceso, se calcula un caso particular para obtener el espinor de Dirac, para un electrón en un estado específico. Cuando se elige el estado fundamental del electrón con su orientación de espín positivo para $n = 1$ y $m = 1$, entonces la energía del electrón relativista es el siguiente:

$$E_{1,1} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 k_z^2 c^2 + 4eB_0 \hbar c^2}. \quad (5.20)$$

A diferencia de los niveles de energía que se obtienen de la ecuación de Schrödinger-Pauli, se observa que los niveles de Landau son soluciones de los estados de energía en las direcciones del espín semientero, de acuerdo a la solución para el estado de nivel energía fundamental. Al describir al electrón con la ecuación de Dirac, se considera los primeros dos elementos como las funciones propias radiales que al implementar la relación de la sección 5.1, tiene como resultado los cuatro elementos del espinor de Dirac, ambos presentan cuatro elementos pero con diferentes direcciones para los valores de m , esto se visualiza con mas detalle en los espinores de Cartan del capítulo 9.

Capítulo 6

Conservación del momento angular total en la ecuación de Dirac

De la sección 5.1, se ha observado el Hamiltoniano en relación a la energía relativista. El Hamiltoniano de la teoría es

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta m_0 c^2. \quad (6.1)$$

El momento angular se conserva en base a que el espín no depende de los grados espaciales, las componentes del operador espín conmuta con los operadores espaciales como el operador de momento [37]. Esto se repite para el momento angular orbital, mientras que en el caso del vector potencial magnético en la dirección axial solo conmuta con el momento angular en la componente z , así que el momento angular total solo se conserva en la componente z . Recordando la ecuación (5.15), se observa la interacción entre el fermión y el campo magnético, si se toma el lado izquierdo de la ecuación (5.15) se obtiene la forma de un oscilador armónico, cuya naturaleza presenta soluciones en la función de onda, funciones de ondas radiales para los números cuánticos n y m , por lo que se puede tomar la función de onda radial del estado fundamental mediante la ecuación (6.1) y obtener una base de estados propios para el operador \hat{H} y \hat{J}_3

$$\zeta_{0,0}(r, \theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}}. \quad (6.2)$$

Ahora escribiendo las soluciones en términos de los primeros elementos espinoriales de Dirac

$$U_{0,0}^+ = \begin{pmatrix} \zeta_{0,0}(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}. \quad (6.3)$$

De esta forma, el vector de potencial magnético es

$$\vec{A} = \frac{Br}{2} \hat{\theta}. \quad (6.4)$$

Con la matrices de Pauli en coordenadas cilíndricas y el operador nabla, se calculan los dos elementos de energía negativa del espinor, de la ecuación siguiente:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{eBr}{2} \hat{\theta})}{E + m_0 c^2} = \frac{1}{E + m_0 c^2} \left(\begin{array}{cc} -i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} & -i\hbar c e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{iceB}{2} r e^{-i\theta} \\ -i\hbar c e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{iceB}{2} r e^{i\theta} & i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right). \quad (6.5)$$

Escribiendo (6.5) como se escribe en [35], se obtienen los operadores circulares a_R

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{eBr}{2} \hat{\theta})}{E + m_0 c^2} = \frac{1}{E + m_0 c^2} \left(\begin{array}{cc} -i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} & -2i\hbar c \eta \hat{a}_R \\ 2i\hbar c \eta \hat{a}_R^\dagger & i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right), \quad (6.6)$$

donde

$$\hat{a}_R = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left[\eta r + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\eta r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \quad (6.7)$$

$$\hat{a}_R^\dagger = \frac{e^{i\theta}}{2} \left[\eta r - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\eta r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]. \quad (6.8)$$

De acuerdo a las ecuaciones anteriores, se puede obtener el espinor de Dirac del estado fundamental de la energía negativa, esto se visualiza de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} U_{0,0}^- &= \frac{1}{E + m_0 c^2} \left(\begin{array}{cc} -i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} & -2i\hbar c \eta \hat{a}_R \\ 2i\hbar c \eta \hat{a}_R^\dagger & i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi_{0,0}(r, \theta) \\ 0 \end{array} \right) e^{i \frac{p_z z}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{E + m_0 c^2} \left(\begin{array}{c} c p_z \xi_{0,0}(r, \theta) \\ 2i\hbar c \eta \xi_{1,1}(r, \theta) \end{array} \right) e^{i \frac{p_z z}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es necesario notar que se ha obtenido un operador de ascenso para el espinor en la energía negativa, es decir, que el espinor para el estado fundamental en dirección al campo \vec{B} es el siguiente:

$$U_{0,0}^\dagger = A_{0,0} \left(\begin{array}{c} \xi_{0,0}(r, \theta) \\ 0 \\ \frac{c p_z \xi_{0,0}(r, \theta)}{(E_{0,0} + m_0 c^2)} \\ \frac{2i\hbar c \eta \xi_{1,1}(r, \theta)}{(E_{0,0} + m_0 c^2)} \end{array} \right) e^{i \frac{p_z z}{\hbar}}, \quad (6.10)$$

donde la constante de normalización es

$$A_{0,0} = \left[1 + \frac{c^2 p_z^2}{(E_{0,0} + m_0 c^2)^2} + \frac{4\hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{0,0} + m_0 c^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.11)$$

siendo $\xi_{1,1}(r, \theta)$ una función propia radial común al oscilador armónico bidimensional de la ecuación de Schrödinger-Pauli. De la misma forma que para la ecuación de Dirac en la simetría cilíndrica

$$\xi_{1,1}(r, \theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} (\eta r) e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}. \quad (6.12)$$

Para el caso de la partícula en dirección contraria al campo magnético se tiene

$$U_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{0,0}(r, \theta) \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}. \quad (6.13)$$

Al realizar los mismos procedimientos que se hicieron con la ecuación (6.9), se obtiene

$$U_{0,0}^\downarrow = B_{0,0} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{0,0}(r, \theta) \\ 0 \\ -\frac{c p_z \xi_{0,0}(r, \theta)}{(E_{0,0} + m_0 c^2)} \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}, \quad (6.14)$$

donde la constante de normalización para este caso es:

$$B_{0,0} = \left[1 + \frac{c^2 p_z^2}{(E_{0,0} + m_0 c^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.15)$$

Para la energía negativa se ha obtenido un operador de descenso denotada por la ecuación (6.14), a diferencia de la ecuación (6.10). Si se continua haciendo las operaciones de la ecuación anterior, se obtienen cada una de las densidades de probabilidades para el caso de la ecuación de Schrödinger-Pauli, dichos cálculos se visualizan en los capítulos posteriores. El cuarto elemento del espinor con $m = 1$ y $n = 1$, adquiere importancia en la descripción del estado cuántico del electrón, siendo así que la densidad de probabilidad radial de electrones contenga más información que la ecuación de Schrödinger-Pauli [38].

6.1. Niveles de energía

De acuerdo a la ecuación (5.10), se tiene

$$\left(\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Psi_{\pm} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2} (x^2 + y^2) + \frac{eB_0}{2m_0 c} (\hat{L}_z + \hat{S}_z) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_{\pm}. \quad (6.16)$$

En coordenadas cilíndricas se observa la forma de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_{\pm} + \frac{eB_0}{2m_0 c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Psi_{\pm} \\ + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2} r^2 \Psi_{\pm} = \left(\frac{E_{\pm}^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Psi_{\pm}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

al observar que la partícula se mueve libremente en la dirección z , por lo que se observa que

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Psi_{\pm} + \frac{eB_0}{2m_0 c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Psi_{\pm} \\ + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0 c^2} r^2 \Psi_{\pm} = \left(\frac{E_{\pm}^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} - E_z \right) \Psi_{\pm}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

de acuerdo a los cálculos hechos por el capítulo 2 de la sección 2.4, se obtiene el nivel de energía relativista

$$\left(\frac{E_{\pm}^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} - E_z \right) = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e| |B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (6.19)$$

Aquí, se visualizan dos energías, uno para la partícula positiva y el otro para la antipartícula, como también las direcciones contraria al campo magnético. Obteniendo así

$$E_{\pm n, m} = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + p_z^2 c^2 + \hbar e B_0 c (m \pm 1) + \hbar |e| |B_0| c (|m| + 2k + 1)}. \quad (6.20)$$

Las soluciones pueden tener energía positivas o negativas. Para el caso de positrones que son soluciones de energía negativa, las componentes de espín arriba y abajo son contribuciones que invierten la dirección del movimiento del electrón en una superposición modificada de los espinos.

Capítulo 7

Transporte de un electrón en una trayectoria cerrada

De acuerdo a la ecuación (3.2), la función de onda se escribe en la forma de los valores (n, m) del desplazamiento perpendicular al campo magnético, y la dirección libre de la partícula en el eje z

$$\Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{v^m} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(|m| + \Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u_{\pm}} \frac{1}{v^{\frac{m}{2}}} u_{\pm}^{\frac{|m|}{2}} e^{ik_z z} e^{im\theta} L_{\Gamma+|m|}^{|m|}(u) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (7.1)$$

Al escribir la solución en términos de las soluciones radiales, y recordar la solución en términos del cambio de variable, entonces se obtienen las funciones de Laguerre-Gaussianas, presentadas por los valores en relación a sus estados de energía. La naturaleza de la función de onda y sus contribuciones son añadibles por la interacción del espín con el campo magnético y el oscilador armónico bidimensional [39]. En relación a ello se tienen las funciones propias que son un conjunto de valores propios a \hat{H}_{xy} y \hat{L}_z , por lo tanto la función de onda escrita en su forma $\Psi_{\pm}(r, \theta, z)$ es

$$\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(|m| + \Gamma)!]^3}} \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} (r\eta)^{|m|} e^{ik_z z} e^{im\theta} L_{\Gamma+|m|}^{|m|}(r^2 \eta^2) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (7.2)$$

Siendo $\frac{1}{\eta}$ la unidad de la distancia radial que se expresa inversamente a la fuerza del campo magnético, en la forma $\sqrt{\frac{2\hbar}{eB_0}}$, esto en términos de la frecuencia armónica. Mientras que el argumento de la función polinomial es $(r^2 \eta^2)$ y de acuerdo a la ecuación (D.8) del apéndice D, se obtiene que $\Gamma = \frac{k'_z}{v} = \left(\frac{n-|m|}{2} \right)$, por lo que la función de

onda asociada a los números cuánticos n y m , se escribe de la forma de la ecuación (3.2). Cada uno de los valores en los que se encuentran los estados perpendiculares del movimiento del electrón son funciones propias que describen el movimiento circular hacia la derecha e izquierda de la ecuación no relativista. En este sentido, existe un número agregado en los índices del Polinomio de Laguerre que son valores ajustables para algunos valores negativos. El valor correspondiente se escribe en la forma para n impar

$$I = (-1)^{\left(\frac{n-|m|}{2}+|m|\right)} = (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}+|m|\right)}, \quad (7.3)$$

y su densidad de probabilidad radial de la función de onda obtenida

$$J_{n,m}(r) = 2\pi r |\xi_{+n,m}(r,\theta)|^2. \quad (7.4)$$

En este caso se obtienen las funciones radiales comunes al oscilador armónico y a la observable \hat{L}_z como se muestra en la tabla 7.1

$\xi_{+n,m}(r, \theta)$
$\xi_{3,4} = \frac{\eta}{\sqrt{120\pi}} (\eta r)^4 [(\eta r)^2 - 5] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{4i\theta}$
$\xi_{2,3} = \frac{\eta}{\sqrt{24\pi}} (\eta r)^3 [\eta^2 r^2 - 4] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{3i\theta}$
$\xi_{3,2} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^2 [(\eta r)^2 - 3] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$
$\xi_{4,3} = \frac{\eta}{2\sqrt{60\pi}} (\eta r)^3 [(\eta r)^4 - 10(\eta r)^2 + 20] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{3i\theta}$
$\xi_{4,1} = \frac{\eta}{2\sqrt{3\pi}} (\eta r) [(\eta r)^4 - 6(\eta r)^2 + 6] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}$
$\xi_{5,2} = \frac{\eta}{2\sqrt{12\pi}} (\eta r)^2 [12 - 8(\eta r)^2 + (\eta r)^4] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{2i\theta}$
$\xi_{1,5} = \frac{\eta}{\sqrt{120\pi}} (\eta r)^5 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{5i\theta}$
$\xi_{2,4} = \frac{\eta}{\sqrt{120\pi}} (\eta r)^4 [(\eta r)^2 - 5] e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{4i\theta}$
$\xi_{1,4} = \frac{\eta}{\sqrt{24\pi}} (\eta r)^4 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{4i\theta}$
$\xi_{1,3} = \frac{\eta}{\sqrt{6\pi}} (\eta r)^3 e^{-\frac{\eta^2 r^2}{2}} e^{3i\theta}$

Tabla 7.1: Función propia radial del electrón.

También, en la forma n par, se obtiene

$$I = (-1)^{\binom{n}{2} + |m|}. \quad (7.5)$$

Del operador de rotación, se observan como las funciones de onda se transforman ante una rotación del eje y ,

$$\xi_{\pm n, m}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \xi_{+n, m}(r, \theta) - \text{sen} \frac{\theta}{2} \xi_{-n, m}(r, \theta) \\ \text{sen} \frac{\phi}{2} \xi_{+n, m}(r, \theta) + \cos \frac{\theta}{2} \xi_{-n, m}(r, \theta) \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Del mismo modo, el espinor genera resultados que corresponden al vector rotado en sus diferentes valores de ϕ . Cada uno de los eventos producen diferentes valores en los que las probabilidades y valores medios generan soluciones de haces, semejantes a los valores de Laguerre- Gaussianos, todos para cada uno de los números cuánticos radiales, en el índice del polinomio de Laguerre [40]. Así, como probabilidades dependiente de las direcciones angulares en m y en s del efecto Zeeman

$$\chi_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \chi_{+} - \text{sen} \frac{\phi}{2} \chi_{-} \\ \text{sen} \frac{\phi}{2} \chi_{+} + \cos \frac{\phi}{2} \chi_{-} \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

las probabilidades de obtener un determinado resultado de medición es dado por cada una de las direcciones elegidas

$$P_1 = \left| \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \chi_{+} \right\rangle \right|^2, \quad (7.8)$$

$$P_2 = \left| \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \chi_{+} \right\rangle \right|^2. \quad (7.9)$$

Esto quiere decir que se pueden dar predicciones para cada uno de los números cuánticos, expresados en términos de probabilidades con valores positivos y negativos en m , al considerar múltiples repeticiones en los estados con direcciones arbitrarias al espín semientero, también es posible medir propiedades alternativas del mismo estado, en las diferentes direcciones, esto para cada una de las observables del espín en el que se puede visualizar cada valor (n, m) junto con ϕ . Para cada valor ϕ , el estado con dirección hacia arriba va disminuyendo conforme se acerca a π y la probabilidad de encontrarlo nuevamente hacia arriba aumenta cuando el valor se acerca cada vez más a $\phi = \frac{7\pi}{6}$. Se está considerando solamente para soluciones radiales con interacción de espín semientero del oscilador armónico bidimensional. Para cada valor de energía es necesario mencionar que cada uno de sus resultados son parte de un conjunto de funciones propias, de acuerdo a su simetría y al movimiento, como es el caso de los operadores derecha e izquierda

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} + \hbar\omega(2k + |m| + m + 1 \pm 1). \quad (7.10)$$

Los niveles de energía obtenidos aquí son los niveles de Landau, esto para cada valor del índice radial $k = \left(\frac{n-|m|}{2}\right)$,

$$E_{+n,m} = \hbar\omega(n + m + 2). \quad (7.11)$$

Para cada uno de los valores correspondientes existen diferentes estados de energía degenerados, en este caso con la ecuación (7.11), el electrón con carga negativa se mueve en sentido a las agujas del reloj [41].

n	m	m_s	$E_{+n,m}$
0	0	$+\frac{1}{2}$	$E_{0,0} = 2\hbar\omega$
1	-1	$+\frac{1}{2}$	$E_{1,-1} = 2\hbar\omega$
2	-2	$+\frac{1}{2}$	$E_{2,-2} = 2\hbar\omega$
3	-3	$+\frac{1}{2}$	$E_{3,-3} = 2\hbar\omega$
4	-4	$+\frac{1}{2}$	$E_{4,-4} = 2\hbar\omega$
1	1	$+\frac{1}{2}$	$E_{1,1} = 4\hbar\omega$
2	0	$+\frac{1}{2}$	$E_{2,0} = 4\hbar\omega$
3	-1	$+\frac{1}{2}$	$E_{3,-1} = 4\hbar\omega$
4	-2	$+\frac{1}{2}$	$E_{4,-2} = 4\hbar\omega$
2	2	$+\frac{1}{2}$	$E_{2,2} = 6\hbar\omega$
3	1	$+\frac{1}{2}$	$E_{3,1} = 6\hbar\omega$
4	0	$+\frac{1}{2}$	$E_{4,0} = 6\hbar\omega$
3	3	$+\frac{1}{2}$	$E_{3,3} = 8\hbar\omega$
4	2	$+\frac{1}{2}$	$E_{4,2} = 8\hbar\omega$
4	4	$+\frac{1}{2}$	$E_{4,4} = 10\hbar\omega$

Tabla 7.2: Niveles de energía.

Mientras que los niveles de energía que surgen con el método teórico corresponden al signo de carga, en la forma escrita con signo menor

$$E_{\pm} - E_z = -\frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar e}{2m_0 c} |e||B_0| (|m| + 2k + 1), \quad (7.12)$$

estos niveles de energía también están degenerados, por lo cual los valores correspondientes en (n, m) toman valores nuevos en relación a sus valores integrales

$$E_{+n,m} - E_z = \hbar\omega(n - m). \quad (7.13)$$

A partir de lo cual, se puede obtener niveles de energía en dirección al campo magnético y viceversa

$$E_{+n,m} = -\hbar\omega(m + 1) + \hbar\omega(n + 1). \quad (7.14)$$

n	m_ℓ	E_{+n,m_ℓ}
0	0	$E_{0,0} = 0\hbar\omega$
1	1	$E_{1,1} = 0\hbar\omega$
2	2	$E_{2,2} = 0\hbar\omega$
3	3	$E_{3,3} = 0\hbar\omega$
4	4	$E_{4,4} = 0\hbar\omega$
2	0	$E_{2,0} = 2\hbar\omega$
3	1	$E_{3,1} = 2\hbar\omega$
4	2	$E_{4,2} = 2\hbar\omega$
1	-1	$E_{1,-1} = 2\hbar\omega$
4	0	$E_{4,0} = 4\hbar\omega$
3	-1	$E_{3,-1} = 4\hbar\omega$
2	-2	$E_{4,0} = 8\hbar\omega$
4	-2	$E_{4,-2} = 6\hbar\omega$
3	-3	$E_{4,2} = 6\hbar\omega$
4	-4	$E_{4,2} = 8\hbar\omega$

Tabla 7.3: Niveles de energía para el electrón que se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj.

Mientras que para el movimiento en dirección contraria, el nivel de energía correspondiente toma la forma de los niveles de energía de la ecuación (7.12)

$$E_{-n,m} = \hbar\omega(n - m + 2), \quad (7.15)$$

los cuales toman los mismos niveles de energía obtenidos en la dirección del espín arriba con carga $+e$, un claro ejemplo de ello son los niveles de energía que contienen los números cuánticos correspondientes en $E_{0,0}$, $E_{1,1}$, $E_{2,2}$, $E_{3,3}$ y $E_{4,4}$. Al realizar las mismas operaciones en la ecuación (7.14), los niveles de energía son cada uno de los mismos valores n y m que se caracterizan por las direcciones contraria al movimiento del electrón. Esto quiere decir, que los niveles de energía se comportan de tal manera

que invierten su dirección de espín arriba a espín abajo, a su vez que también cambian su forma en la ecuación. Lo interesante es que la forma de la constante de normalización como las de las ecuaciones (6.10) y (6.14) se ven obligada intercambiar de energía positiva a energía negativa.

n	m_ℓ	E_{-n,m_ℓ}
0	0	$E_{0,0} = 2\hbar\omega$
1	1	$E_{1,1} = 2\hbar\omega$
2	2	$E_{2,2} = 2\hbar\omega$
3	3	$E_{3,3} = 2\hbar\omega$
4	4	$E_{4,4} = 2\hbar\omega$
2	0	$E_{2,0} = 4\hbar\omega$
3	1	$E_{3,1} = 4\hbar\omega$
4	2	$E_{4,2} = 4\hbar\omega$
1	-1	$E_{1,-1} = 4\hbar\omega$
3	-1	$E_{3,-1} = 6\hbar\omega$
2	-2	$E_{2,-2} = 6\hbar\omega$
4	-2	$E_{4,-2} = 8\hbar\omega$
3	-3	$E_{3,-3} = 8\hbar\omega$
4	-4	$E_{4,-4} = 10\hbar\omega$

Tabla 7.4: Niveles de energía con proyección espín abajo.

Estos niveles de energía son interesantes debido a los lugares en los que el electrón puede ser localizado para una distribución de estructura de corriente azimutal, al igual que sus resultados con la estadística de Bose-Einstein y Fermi-Dirac [42].

7.1. Distribuciones de probabilidades radiales relativistas

El desarrollo analítico de la ecuación relativista es mucho más enriquecedora para los valores de la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre. Cada uno de los valores emitidos y modificados de energía positiva son de ascenso como descenso en solución de la suma total de la energía cuadrática, en los que los cada uno revelan anillos concéntricos denotados por el índice del Polinomio de Laguerre [43]. Aplicando la solución de la parte positiva, el espinor se escribe como la solución del espinor de Dirac, en los que los que el número cuántico m , toma dos direcciones de acuerdo a la

modificación de la ecuación de Dirac, cuyas soluciones para $m > 0$, se escriben en la forma siguiente:

$$\Psi_{1\uparrow} = \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right) \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1\downarrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ -\hbar c k_z \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta_+ \left(\sqrt{2}(\Omega_+ + |m|) i e^{-i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega_+}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

De acuerdo a las soluciones anteriores podemos observar el valor del índice del polinomio de Laguerre Ω_{\pm} y los valores de Δ_{\pm} , estos valores vienen de encontrar la solución de la ecuación diferencial radial de Dirac y las interacciones del electrón con el campo magnético. También $\bar{\rho}$ contiene el cambio de variable, que es igual a $\bar{\rho} = \eta r$.

$$\delta_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{2\hbar^2 c^2} - \frac{k_z^2}{2} + \frac{eB_0}{2\hbar c} (m - |m|) \right), \quad (7.18)$$

$$\Omega_+ = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m|)}{2}, \quad (7.19)$$

$$\delta_- = \frac{1}{2} \left(\frac{E_-^2 - m_0^2 c^4}{2\hbar^2 c^2} - \frac{k_z^2}{2} + \frac{eB_0}{2\hbar c} (m - |m| - 2) \right), \quad (7.20)$$

$$\Omega_- = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_-^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m| - 2)}{2}, \quad (7.21)$$

$$\Delta_+ = e^{i(k_z z - E_+ t + m\theta)} e^{-\frac{\bar{\rho}^2}{2}}. \quad (7.22)$$

El valor de α es uno de los valores obtenidos por la ecuación diferencial radial del capítulo 2 de la ecuación (2.42), escrito así es igual a ν . Los siguientes valores en el espinor son resueltos para valores $m < 0$, cuyos valores toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi'_{1\uparrow} = & \Delta'_- \left(\rho^{|m|} L_{\Omega'_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta'_- \left(\sqrt{2}(\Omega'_+ + 1) i e^{i\theta} \rho^{|m|-1} L_{\Omega'_+ + 1}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_{1\downarrow} = & \Delta'_- \left(\rho^{|m|} L_{\Omega'_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ -\hbar c k_z \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta'_- \left(\sqrt{2} i e^{-i\theta} \rho^{|m|+1} L_{\Omega'_+ - 1}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Los valores m negativos del momento angular hacen que el electrón comience a moverse en sentido de las agujas del reloj. Por lo tanto, a diferencia del caso anterior los siguientes valores en relación al índice del polinomio de Laguerre y las soluciones de la ecuación de Dirac, toman la forma en sentido contrario a las direcciones del espín del electrón para cada uno de sus valores de energía.

$$\delta_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{2\hbar^2 c^2} - \frac{k_z^2}{2} + \frac{eB_0}{2\hbar c} (m - |m| - 2) \right), \quad (7.25)$$

$$\Omega'_+ = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m| - 2)}{2}, \quad (7.26)$$

$$\delta_- = \frac{1}{2} \left(\frac{E_-^2 - m_0^2 c^4}{2\hbar^2 c^2} - \frac{k_z^2}{2} + \frac{eB_0}{2\hbar c} (m - |m|) \right), \quad (7.27)$$

$$\Omega'_- = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_-^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m|)}{2}, \quad (7.28)$$

$$\Delta'_- = e^{i(k_z z - E_+ t - m\theta)} e^{-\frac{\rho^2}{2}}. \quad (7.29)$$

A partir de los espinores anteriores, es posible obtener cada uno de los valores del flujo de corriente relativista en las densidades de probabilidad usando $j_\mu = \Psi_{1\uparrow}^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi_{1\uparrow}$ a como se usa en la literatura [44]. Primeramente para el caso de $m > 0$ con carga $(-e)$,

$$\begin{aligned} \int j_0 = & \pi \frac{(|m| + \Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ \right] \\ & + \pi \frac{(|m| + \Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[\hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{2B_0 e}{\hbar c} (|m| + \Omega_+ + 1) \right], \end{aligned} \quad (7.30)$$

y con la energía E_+ , la dinámica del electrón permite obtener los valores en términos de los niveles de Landua y la separación Zeeman

$$E_+^2 = \hbar c e B_0 (2k + |m| + 1) - \hbar c e B_0 (m + 1) + \hbar^2 c^2 k_z^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.31)$$

De acuerdo a la ecuación (7.31), y al usar $\hbar = c = 1$, se obtiene como solución el valor de la densidad de probabilidad de corriente de la ecuación (7.30),

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega_+)!}{(\Omega_+)!} [2E_+ (E_+ + m_0) + e B_0 (|m| + m + 2)]. \quad (7.32)$$

El valor Ω_\pm contiene los valores de los números cuánticos (n, m) contenidos por k . De la misma forma es obtenido la segunda cantidad de j_0 para $m > 0$, considerando la dirección antiparalela al campo magnético.

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega_-)!}{(\Omega_-)!} [2E_- (E_- + m_0) + e B_0 (|m| + m - 2)], \quad (7.33)$$

$$E_-^2 = \hbar c e B_0 (2k + |m| + 1) - \hbar c e B_0 (m - 1) + \hbar^2 c^2 k_z^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.34)$$

Para el caso $m < 0$, con carga $(+e)$; los valores en las densidades de probabilidad proporcionan trayectorias contrarias a los casos anteriores

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega'_+)!}{(\Omega'_+)!} [2E_+ (E_+ + m_0) + e B_0 (m - |m|)], \quad (7.35)$$

$$E_{\pm}^2 = \hbar ceB_0(2k + |m| + 1) + \hbar ceB_0(m + 1) + \hbar^2 c^2 k_z^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.36)$$

Para el último valor de energía con dirección espín hacia abajo, el resultado j_0 toma la forma siguiente:

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega'_-)!}{(\Omega'_-)!} [2E_+(E_+ + m_0) + eB_0(m - |m|)], \quad (7.37)$$

$$E_{\pm}^2 = \hbar ceB_0(2k + |m| + 1) + \hbar ceB_0(m - 1) + \hbar^2 c^2 k_z^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.38)$$

A diferencia de Ω_{\pm} que solo contiene el valor (n, m) en k , Ω'_{\pm} contiene los valores (n, m) en k mas un valor m del momento angular orbital, no habiendo diferencias en ello con respecto a j_0 .

7.2. Espinores de Dirac

En la sección 7.1 se representa el espinor con proyección espín semientero para la estructura de corriente, cada uno de los valores son diferentes para cada dirección del electrón, de acuerdo a la definición de partícula positiva y negativa. Al considerar los valores de la tabla 7.1, se representa la solución de la forma siguiente:

$$U_{n,m}^+ = \begin{pmatrix} \xi_{n,m}(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}, \quad U_{n,m}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{n,m}(r, \theta) \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}, \quad (7.39)$$

cabe destacar que estos operadores con movimiento hacia la derecha e izquierda son para el caso del movimiento de la antipartícula [45]. Un claro ejemplo de cómo se puede representar los espinores para las proyecciones $\xi_{1,1}(r, \theta)$ y $\xi_{2,0}(r, \theta)$, con los niveles de energías, y que sus soluciones se vean reducidas a un valor definido, son para casos donde B_0 es muy grande. En este sentido se estudian para cargas en sentido a las manecillas del reloj, y en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Iniciando con la forma

$$U_{1,1}^{\uparrow} = A_{1,1} \begin{pmatrix} \xi_{1,1}(r, \theta) \\ 0 \\ \frac{cp_z \xi_{1,1}(r, \theta)}{(E_{1,1} + m_0 c^2)} \\ \frac{2i\hbar c \eta \xi_{2,2}(r, \theta)}{(E_{1,1} + m_0 c^2)} \end{pmatrix} e^{i\frac{p_z z}{\hbar}}, \quad (7.40)$$

donde la constante de normalización es

$$A_{1,1} = \left[1 + \frac{c^2 p_z^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} + \frac{4\hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.41)$$

Con los valores B_0 distintos de un campo magnético muy grande y con carga $-e$, la constante de normalización se reescribe en la forma:

$$A_{1,1} = \frac{(E_{1,1} + m_0 c^2)}{\sqrt{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2 + \hbar^2 c^2 k_z^2 + 4\hbar^2 c^2 \eta^2}} = \frac{(E_{1,1} + m_0 c^2)}{\sqrt{2E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2) + 4\hbar^2 c^2 \eta^2}}. \quad (7.42)$$

El operador cinético del momento angular en el espinor de la ecuación (7.39) se muestra con su respectiva respuesta

$$\int U_{1,1}^{\dagger} r^2 U_{1,1} = \frac{2A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{2E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2) + 6\hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]. \quad (7.43)$$

Escrito de esta manera, los valores de energía y las proyecciones en el efecto Zeeman son positivos. Esto debido a que las soluciones de los números cuánticos son idénticos y los términos cuadráticos, en general se reducen solamente a valores de la dirección libre y energía relativista $m_0^2 c^4$. Ahora si el valor del campo magnético es intenso $B_0 \rightarrow \infty$, entonces se ignora $m_0 c^2$ de tal forma que las ecuaciones (7.41) y (7.42) se convierten en

$$\int U_{1,1}^{\dagger} r^2 U_{1,1} = \frac{2A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{2E_{1,1}^2 + 6\hbar^2 c^2 \eta^2}{E_{1,1}^2} \right], \quad (7.44)$$

$$A_{1,1} = \frac{E_{1,1}}{\sqrt{E_{1,1}^2 + \hbar^2 c^2 k_z^2 + 4\hbar^2 c^2 \eta^2}} = \frac{E_{1,1}}{\sqrt{2E_{1,1}^2 + 4\hbar^2 c^2 \eta^2}}. \quad (7.45)$$

En cuanto a la carga $+e$ no se preservan los valores del momento angular en promedio de r^2 , es decir, existe una superposición de los estados en los espinores, de tal modo que los valores en promedio del operador del momento angular y la constante de normalización se escribe como:

$$A_{1,1} = \frac{(E_{1,1} + m_0 c^2)}{\sqrt{2E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2)}}, \quad (7.46)$$

$$\int U_{1,1}^{\dagger} r^2 U_{1,1} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2) + \hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]. \quad (7.47)$$

Lo cual describe un estado con las misma información en que se define la energía relativista en suma de los valores $(n + m + 2)$. Para campos $B_0 \rightarrow \infty$, lo anterior se reduce a una separación de superposiciones de estados

$$A_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.48)$$

$$\int U_{1,1}^{\uparrow\uparrow} r^2 U_{1,1}^{\uparrow} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}^2 + \hbar^2 c^2 \eta^2}{E_{1,1}^2} \right]. \quad (7.49)$$

A diferencia de la sección anterior, los estados limitados del campo magnético solo tienen valores en relación a las cargas $\pm e$, ligados a la energía positiva y a los espectros de energías, esto sin incluir los valores de m positivos y negativos del momento angular orbital. Al realizar en sentido con espín abajo las soluciones se transforman en la forma siguiente:

$$U_{1,1}^{\downarrow} = B_{1,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\zeta}_{1,1}(r, \theta) \\ \frac{2i\hbar c \eta \tilde{\zeta}_{0,0}(r, \theta)}{(E_{1,1} + m_0 c^2)} \\ \frac{-c p_z \tilde{\zeta}_{1,1}(r, \theta)}{(E_{1,1} + m_0 c^2)} \end{pmatrix} e^{i \frac{p_z z}{\hbar}}. \quad (7.50)$$

Donde la constante de normalización se limita a los espectros energéticos pero en dirección Zeeman antiparalela al campo magnético

$$B_{1,1} = \left[1 + \frac{4\hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} + \frac{c^2 p_z^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.51)$$

En dirección en sentido contrario a las agujas del reloj, la carga es $-e$, por lo que la constante de normalización en esta configuración representa estados de energías menores a los estados de energía con espín arriba

$$A_{1,1} = \frac{(E_{1,1} + m_0 c^2)}{\sqrt{2E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2)}}, \quad (7.52)$$

$$\int U_{1,1}^{\uparrow\uparrow} r^2 U_{1,1}^{\uparrow} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2) - \hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]. \quad (7.53)$$

Lo cual describe un estado con las misma información en que se define la energía relativista en suma de los valores $(n - m + 2)$. Para campos $B_0 \rightarrow \infty$, lo anterior se reduce a una separación de superposiciones de estados

$$A_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.54)$$

$$\int U_{1,1}^{\dagger\dagger} r^2 U_{1,1}^{\dagger} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}^2 - \hbar^2 c^2 \eta^2}{E_{1,1}^2} \right], \quad (7.55)$$

continuando con el mismo procedimiento, se toma para la carga $+e$ los resultados $A_{1,1}$ y la probabilidad media del operador del momento angular

$$A_{1,1} = \frac{(E_{1,1} + m_0 c^2)}{\sqrt{2E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2)}}, \quad (7.56)$$

$$\int U_{1,1}^{\dagger\dagger} r^2 U_{1,1}^{\dagger} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}(E_{1,1} + m_0 c^2) - \hbar^2 c^2 \eta^2}{(E_{1,1} + m_0 c^2)^2} \right]. \quad (7.57)$$

Siendo un estado con las misma información que define la energía relativista en suma de los valores $(n + m)$ de la ecuación (6.19). Para campos $B_0 \rightarrow \infty$, lo anterior se reduce a una separación de superposiciones de estados

$$A_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.58)$$

$$\int U_{1,1}^{\dagger\dagger} r^2 U_{1,1}^{\dagger} = \frac{4A_{1,1}^2}{\eta^2} \left[\frac{E_{1,1}^2 - \hbar^2 c^2 \eta^2}{E_{1,1}^2} \right], \quad (7.59)$$

resultan ser los mismos, pero esto solo para valores en los que $n = m$ en los números cuánticos [46]. Todo esto se aplica en los capítulos siguientes, así que hay que tener presente que durante la rotaciones sobre los grados del libertad del espín, estas direcciones de cargas aparecen y por lo cual, sus valores tanto en la constante de normalización como en los valores de estructuras de corrientes son distintas.

7.3. Puntos importantes que se deben de considerar en el transporte de un electrón relativista

Para el transporte de un electrón relativista primero se deben de considerar las matrices de Pauli en coordenadas polares

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \hat{r} + \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \hat{\theta} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{z}. \quad (7.60)$$

El siguiente paso es rotarlo con respecto al operador de rotación del espín semientero, en torno al eje z

$$e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\vec{\sigma}e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z} = \left(e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\hat{\sigma}_xe^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\right)\hat{x} + \left(e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\hat{\sigma}_ye^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\right)\hat{y} + \left(e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\hat{\sigma}_ze^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}\right)\hat{z}. \quad (7.61)$$

Los siguiente es tomar el valor propio que conserva el momento angular total, es decir, la forma de la solución del problema cuántico, sin que la ecuación diferencial quede alterada

$$\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} 0 & Ge^{-i\theta} \\ Ge^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \hat{r} + \begin{pmatrix} 0 & -iGe^{-i\theta} \\ iGe^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \hat{\theta} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{z}. \quad (7.62)$$

El valor G es solamente el valor obtenido por el operador de rotación, después lo que se hace es resolver la ecuación diferencial que da la forma de la ecuación relativista de un electrón en un campo magnético uniforme. Lo que produce que el movimiento del electrón invierta su dirección de acuerdo al número cuántico azimutal m , en el que solo pueden ocurrir valores de m positivo o negativos, por ejemplo, para el caso de m positivo son paralelas, y eso hace que el movimiento del electrón se vea afectada y que sus soluciones en la normalización de los espinores se inviertan de una partícula con energía positiva a una partícula con energía negativa, todo ello a partir de la rotación del espín y la conservación del momento angular total. Por lo tanto, el límite superior de $|m|$ se ve afectado por el movimiento del electrón en el número cuántico de espín. Esto no quiere decir que se rompa alguna regla física, simplemente, hace que el electrón cambie su forma de componentes pequeñas a componentes grandes o también inversamente, dependiendo de con que dirección se inicie el transporte del electrón.

Capítulo 8

Predicción de las probabilidades de proyección de espín para el traslado de un electrón por una trayectoria cerrada

Se ha visto que el sistema relativista, estudiado en el capítulo 7 es representado por los vórtices de electrones. De esta forma la estructura del movimiento de la carga es de interés para el transporte completo del electrón. Usando el operador de rotación en el sentido del movimiento interno del espín semientero, la información se refleja en toda la ecuación del movimiento radial. En este capítulo, se cambia la perspectiva para encontrar vórtices de electrones en relación a sus estructuras de corrientes, como también en sus valores propios, en detalle a cada uno de los valores ϕ del espín semientero. El estudio se extienden para casos relativistas, aunque en detalle a su conservación de momento angular total, también para el caso unidimensional no relativista.

8.1. Densidad de Probabilidad

El modelo que se utiliza describe la densidad de probabilidad para la energía cinética del momento angular y la estructura de corriente a un modo de los valores en los índices del polinomio de Laguerre. Es importante mencionar que el concepto del espín debe ser tratado como un concepto abstracto del momento angular que vive en su propio espacio de Hilbert [47]. Al considerar los resultados de los estados cuando es rotado en el eje y , la información total de la ecuación relativista radica en la comparación de las diferentes direcciones en superposiciones de los ángulos medios

$$|\chi_{+}\rangle = \cos\frac{\phi}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (8.1)$$

$$|\chi_{-}\rangle = \cos\frac{\phi}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (8.2)$$

en el que las dos primeras ecuaciones corresponden a los espinores del electrón y a las energías del sistema, es decir, los estados referidos a cada una de las observables y a cada uno de los valores posibles hasta llegar al valor total de $\phi = 4\pi$. En cuanto al valor propio referido se distingue por el que describe el valor propio del operador semientero, como también un valor ligado a esa misma solución [48].

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{k} |\chi_{\pm}\rangle = \pm |\chi_{\pm}\rangle. \quad (8.3)$$

8.2. Vórtices de electrones rotados

El operador de rotación afecta a toda la ecuación de Dirac para un electrón sometido en un campo magnético. En esta sección, se incluye la interacción entre el operador de rotación y la forma de la matriz de Pauli escrito en coordenadas cilíndricas. Para el primer caso $\phi = \frac{\pi}{6}$, el movimiento radial es el valor propio de la ecuación en el que la ecuación total se conserva, esto en la dirección axial z .

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & A' e^{-i\theta} \\ A' e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -iA' e^{-i\theta} \\ iA' e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

donde A' corresponde al valor propio de ϕ , siendo $A' = \frac{\sqrt{3}}{2} \equiv a$ y de acuerdo al operador de helicidad la ecuación de movimiento radial tiene la forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{B_0 e}{\hbar c a} (m+1) - \frac{B_0^2 e^2 \rho^2}{4\hbar^2 c^2 a^2} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{a^2 \hbar^2 c^2} \right] \Psi = 0. \quad (8.5)$$

Siguiendo los procedimientos de la sección 2.4, se obtiene:

$$\Omega_{+} = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2 a^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m|)}{2}, \quad (8.6)$$

donde el valor en $\alpha = \frac{B_0 e}{2\hbar c a}$, cambia para cada uno de los valores distintos en ϕ , en el que el operador de rotación $e^{i\sigma_z \frac{\phi}{2}}$ y $e^{-i\sigma_z \frac{\phi}{2}}$ cambian las direcciones para σ_x y σ_y . De

acuerdo a ello, las soluciones proporcionadas forman valores distintos para cada uno de los vórtices de electrones

$$\Psi_{1\uparrow} = \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} + (3)^{\frac{1}{4}} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right) \quad (8.7)$$

Con el cambio en su estructura de corriente se obtiene como resultado:

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3} B_0 e}{\hbar c} (|m| + \Omega_+ + 1) \right], \quad (8.8)$$

mientras que la energía cinética del momento angular viene a ser el valor promedio en r^2 en relación al índice del polinomio de Laguerre y al valor absoluto del número cuántico $|m|$,

$$\int \Psi_{1\uparrow}^\dagger r^2 \Psi_{1\uparrow} = D_+ \left[((E_+ + m_0 c^2)^2 + k_z^2) (2\Omega_+ + |m| + 1) \right] + D_+ \left[\frac{\sqrt{3} B_0 e}{\hbar c} (\Omega_+ + |m| + 1) (2\Omega_+ + |m| + 2) \right], \quad (8.9)$$

siendo el valor D_+ el valor obtenido al integrar el primer valor rotado en $\phi = \frac{\pi}{6}$, por lo tanto $D_+ = \frac{\pi \sqrt{3} \hbar c}{B_0 e} \frac{(|m| + \Omega_+)!}{(\Omega_+)!}$. Así vemos la estrecha relación con la pureza de rotación definida por el transporte del electrón en toda la ecuación relativista [49]. De la misma forma, el valor obtenido para $m < 0$ se ve afectado en conjunto de la superposición del espinor

$$\Psi'_{1\uparrow} = \Delta'_- \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega'_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \Delta'_- \left((3)^{\frac{1}{4}} (\Omega'_+ + 1) i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega'_++1}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right). \quad (8.10)$$

En donde los valores Ω'_+ vienen del valor del índice que contiene el valor propio del valor a

$$\Omega'_+ = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{E_+^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2 a^2} - k_z^2 \right] + \frac{(m - |m| - 2)}{2}, \quad (8.11)$$

como resultado la estructura de corriente resulta ser el valor anterior; visto por la diferencia de la ecuación (7.19), de acuerdo al polinomio de Laguerre

$$\int j_0 = \pi \frac{(|m| + \Omega'_+)!}{(\Omega'_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3} B_0 e}{\hbar c} (\Omega'_+ + 1) \right], \quad (8.12)$$

mientras que la energía cinética del momento angular en r^2 es el valor

$$\begin{aligned} \int \Psi_{1\uparrow}' r^2 \Psi_{1\uparrow}' = D'_+ & \left[((E_+ + m_0 c^2)^2 + k_z^2) (2\Omega'_+ + |m| + 1) \right] \\ & + D'_+ \left[\frac{\sqrt{3} B_0 e}{\hbar c} (\Omega'_+ + 1) (2\Omega'_+ + |m| + 2) \right], \end{aligned} \quad (8.13)$$

siendo $D'_+ = \frac{\pi \sqrt{3} \hbar c}{B_0 e} \frac{(|m| + \Omega'_+)!}{(\Omega'_+)!}$ con valor contenido en $m < 0$. Es necesario mencionar que se ha transportado el electrón en la ecuación diferencial relativista, para conocer con mayor detalle la estructura de su solución espectral, a partir del movimiento interno propio del número cuántico de espín. Lo que resulta en niveles de energía diferentes a lo que se obtienen en el capítulo 6 de la sección 6.1, son valores más pequeños y de acuerdo al movimiento del electrón se aproximan al valor de la ecuación (6.20) conforme se acercan a 2π .

8.3. Órbitas y Probabilidades para el valor $\phi = \frac{2\pi}{3}$

El hecho de elegir este valor en ϕ es debido a que la dirección del electrón en sentido contrario a las manecillas del reloj, ha cambiado su dirección en sentido a las manecillas, haciendo entre ver que tanto su ecuación de movimiento radial como sus operadores de la ecuación (8.4) cambian también de direcciones, el valor propio para $\phi = \frac{2\pi}{3}$, es $a = -\frac{1}{2}$, por lo que la ecuación de movimiento radial toma la forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{d\bar{\rho}} - \frac{2B_0 e}{\hbar c} (m+1) - \frac{B_0^2 e^2 \bar{\rho}^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2}{\bar{\rho}^2} + \frac{4(E_+^2 - m_0^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} \right] \Psi = 0. \quad (8.14)$$

De acuerdo a los procedimientos de la sección 2.4, el valor que contiene el polinomio de Laguerre es uno de los índices que puede factorizar a $\Gamma = \left(\frac{n-|m|}{2}\right)$, aunque su forma aquí, se ve afectada en los diferentes puntos de rotación del espín semientero, es de interés debido a que se puede observar el cambio de dirección de un caso de energía positiva a otro de energía negativa. Por lo que las superposiciones son distintas de las ecuaciones (7.16) y (7.17), en comparación a (8.16) y (8.17), esto también se refleja en los operadores de creación y destrucción de partículas, porque afecta toda la ecuación de movimiento relativista, siendo así, resultados diferentes para cada punto ϕ del operador de rotación del espín $\frac{1}{2}$, en la ecuación de Dirac

$$\Omega_+ = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{2(E_+^2 - m_0^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] - \frac{(m + |m| + 2)}{2}, \quad (8.15)$$

donde α para este caso viene a ser $\alpha = \frac{B_0 e}{\hbar c}$. De acuerdo a ello las soluciones proporcionadas forman valores distintos solo que en dirección contraria a la sección 7.1.

$$\begin{aligned} \Psi_{1\uparrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta_+ \left(i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1\downarrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ -\hbar c k_z \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta_+ \left((\Omega_+ + |m|) i e^{-i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega_+}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

La solución siguiente es obtenida para valores $m < 0$, en que se invierten las direcciones con el modelo de valores propios negativos, con los cuales se estudian las estructuras de corriente y energía cinética.

$$\begin{aligned} \Psi'_{1\uparrow} = & \Delta'_- \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega'_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta'_- \left((\Omega'_+ + 1) i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega'_++1}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_{1\downarrow} = & \Delta'_- \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega'_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ -\hbar c k_z \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta'_- \left(-i\theta \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega'_+-1}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\Omega'_+ = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{2(E_+^2 - m_0^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - k_z^2 \right] - \frac{(m + |m|)}{2}. \quad (8.20)$$

Algunas características interesantes son inferidas por las direcciones del electrón cuando alcanza la primera cuarta parte del camino, con la elección de los primeros casos en el que el movimiento se conserva siempre con el signo positivo en el efecto Zeeman, y negativo cuando bajo la influencia del operador de rotación alcanza el punto $\phi = \frac{2\pi}{3}$ y termina en $\phi = \frac{4\pi}{3}$. Así que la conservación del signo positivo regresa cuando $\phi > \frac{4\pi}{3}$ y finaliza en el punto $\phi = 2\pi$.

Ecuación de Dirac y espinores

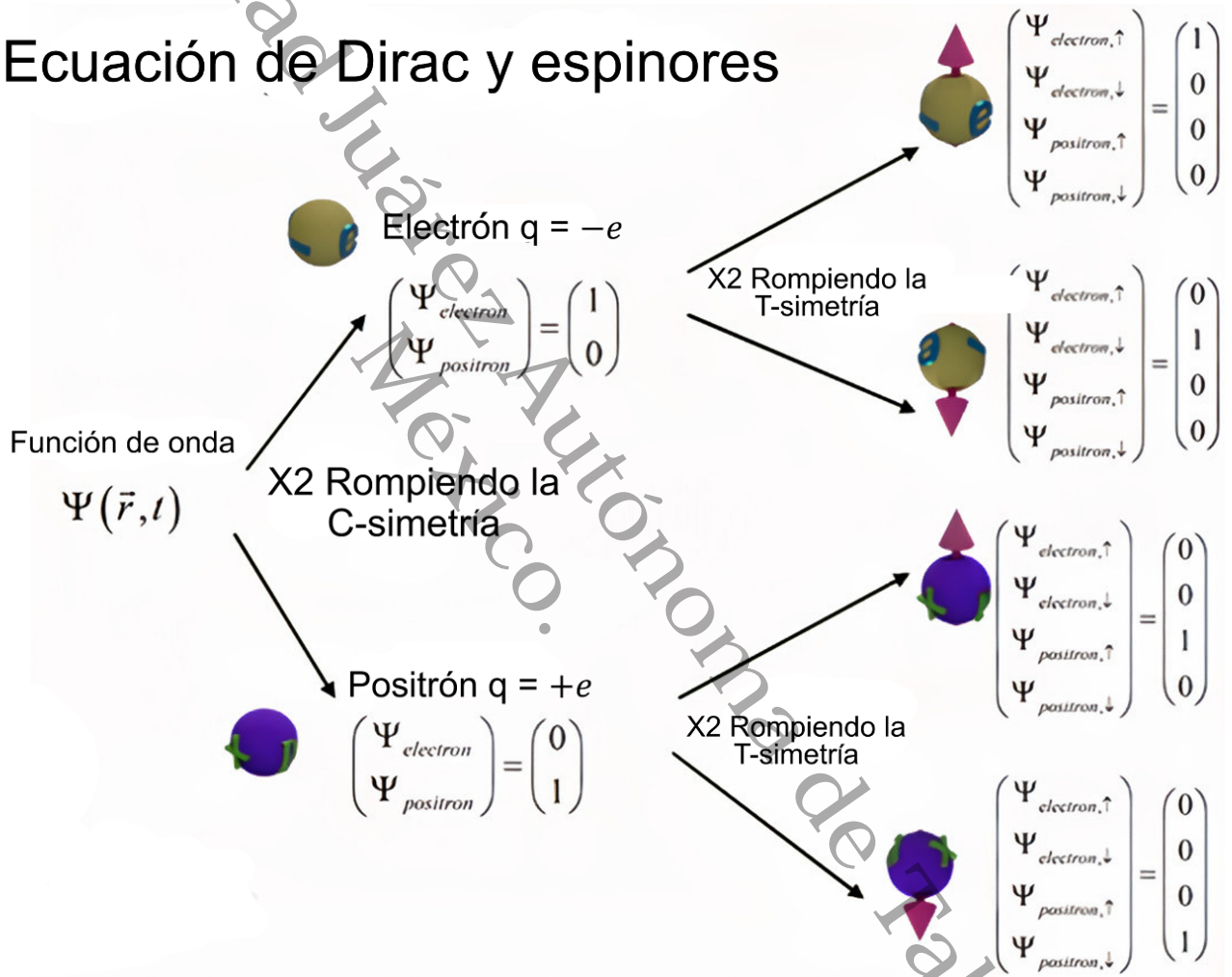


Figura 8.1: Espinores de Dirac y sus cambios de direcciones [92]. Refleja el cómo las componentes se mueven de acuerdo al transporte del electrón.

8.4. Estados propios y estructuras de corrientes del transporte de un electrón para distintos valores de ϕ

Ahora se considera el caso completo del transporte del electrón relativista en las estructuras de corrientes, como también de su primera vuelta en el espacio interno del espín del electrón. La tabla 8.1 muestra los estados de energías y frecuencias magnéticas armónica desde $\phi = 0$ hasta $\phi = 2\pi$.

ϕ	$E_{+n,m}$	α	valores propios
0	$E_+^2 = \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{2\hbar c}$	$a = 1$
$\frac{\pi}{6}$	$E_+^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$E_+^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$	$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$E_+^2 = \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$	$a = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	X	X	X
$\frac{2\pi}{3}$	$E_+^2 = \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$	$a = -\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$E_+^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$	$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$E_+^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$	$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	$E_+^2 = \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{2\hbar c}$	$a = -1$
$\frac{7\pi}{6}$	$E_+^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$	$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$E_+^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$	$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{4\pi}{3}$	$E_+^2 = \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) + \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$	$a = -\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	X	X	X
$\frac{5\pi}{3}$	$E_+^2 = \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{1}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$	$a = \frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$E_+^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$	$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{11\pi}{6}$	$E_+^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	$E_+^2 = \hbar c B_0 e (2k + m + 1) - \hbar c B_0 e (m + 1) + m_0^2 c^4$	$\frac{B_0 e}{2\hbar c}$	$a = 1$

Tabla 8.1: Estados propios del electrón relativista generados por el operador de rotación espín $\frac{1}{2}$, en el eje z. Al igual que sus diferentes valores de α que contiene la frecuencia armónica.

A continuación se muestra la tabla 8.2 que contiene la estructura de corriente del

primer espínor, para diferentes valores que integra toda la componente del eje z en el operador de rotación, esto usando $j_\mu = \Psi_{1\uparrow}^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi_{1\uparrow}$.

ϕ	j_0	α
0	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{2B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{2\hbar c}$
$\frac{\pi}{6}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{2}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$
$\frac{\pi}{2}$	X	X
$\frac{2\pi}{3}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{2}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$
π	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{2B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{2}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$
$\frac{3\pi}{2}$	X	X
$\frac{5\pi}{3}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{2}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\pi \frac{(m +\Omega_+)!}{(\Omega_+)!} \left[m_0^2 c^4 + E_+^2 + 2m_0 c^2 E_+ + \hbar^2 c^2 k_z^2 + \frac{\sqrt{3}B_0 e}{\hbar c} (m + \Omega_+ + 1) \right]$	$\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}$

Tabla 8.2: Estructuras de corrientes relativista generados por el operador de rotación espín $\frac{1}{2}$ en el eje z . Al igual que sus diferentes valores de α que contiene la frecuencia armónica.

8.5. Espectro y funciones de onda en la norma de Landau

El movimiento del electrón no solo se ve afectado por el vector potencial magnético, sino también por la dirección del electrón en el campo $B_0 \hat{k}$, si el electrón posee un

signo $-$, la ecuación de movimiento radial es contraria al movimiento radial con signo positivo [50]. El estudio de estos dos tipos de movimiento son reflejados en los niveles de energía, por lo que es importante mencionar que la estructura de sus soluciones radiales y polinomiales son reflejados a través de las transformaciones en su simetría cilíndrica. Por el momento, si uno simplifica el problema para los valores propios de la observable en x , por simplicidad se usa la simetría en la norma de Landau y se transforma en un solo eje y con la siguiente definición

$$A_x = B_0 y. \quad (8.21)$$

En lugar de analizar el Hamiltoniano como sucede con el caso bidimensional, se analiza el movimiento en un plano entre el operador de rotación y la observable σ_x

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left(\hat{p}_x + \frac{eB_0}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m_0} \hat{p}_y^2. \quad (8.22)$$

El operador \hat{p}_x conmuta con el Hamiltoniano y por lo tanto la componente en esa dirección se conserva. En este caso las funciones de onda propias del Hamiltoniano y del operador \hat{p}_x forman un sistema completo de observables compatibles, esto de la forma de los operadores de escaleras para $\hbar\omega$, siendo los operadores de ascenso y descenso los siguientes:

$$a = i\sqrt{\frac{m_0\omega_c}{2\hbar}} \left(y + \frac{i}{m_0\omega_c} (p_y - ip_x) \right), \quad (8.23)$$

$$a^\dagger = -i\sqrt{\frac{m_0\omega_c}{2\hbar}} \left(y - \frac{i}{m_0\omega_c} (p_y + ip_x) \right), \quad (8.24)$$

cumpliendo así con el siguiente Hamiltoniano, a partir del cual, se encuentran los niveles de energía

$$H = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (8.25)$$

$$E_{np_x} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (8.26)$$

El modelo esta íntimamente relacionado con el caso anterior, pero sin el momento angular orbital. Esto se debe a que cada nivel de Landau es independiente de p_x , que también se debe a su conjunto de degeneración infinita [51]. En el contexto de información cuántica, la función de onda del estado fundamental, es solución de la ecuación

diferencial en uno de los operadores de escaleras, los casos radiales relativistas no son tomados en cuenta, pero si sus soluciones no relativistas

$$\frac{1}{\sqrt{2b_c}} \left(y + b_c^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \phi_{0p_x}(x, y) = 0. \quad (8.27)$$

En cuanto a $b_c^2 = \frac{\hbar}{m_0 \omega_c}$ se escribe como la longitud magnética de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω_c [52]. Y utilizando la ecuación diferencial en y se obtiene la solución de la función de onda, cuya función de onda esta normalizada

$$\Phi_{nh_1}(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^{n+1} \pi b_c n!}} e^{ih_1 x} H_n \left(\frac{y + h_1 b_c^2}{b_c} \right) e^{-\frac{1}{2b_c^2} (y + h_1 b_c^2)^2}. \quad (8.28)$$

Los términos que corresponden al conjunto de valores en relación a la longitud y dirección magnética son proporcionadas por la dirección en el plano (x, y)

$$H_{h_1} = \hbar \omega_c \left(a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2} \right), \quad (8.29)$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2b_c}} \left((y + h_1 b_c^2) + b_c^2 \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (8.30)$$

$$a_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2b_c}} \left((y + h_1 b_c^2) - b_c^2 \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (8.31)$$

Las ecuaciones (8.30) y (8.31) corresponden a los estados propios del Hamiltoniano del operador momento p_x , con autovalor $p_x = \hbar h_1$ en el que cada nivel degenerado viene dado por h_1 en los estados no propios de \hat{f}_z [53]. Este resultado servirá para estudiar los efectos del transporte del electrón en la siguientes secciones 9.1 y 9.2 donde se estudiara el operador de rotación para la observable z y sus diferentes valores de ϕ , contenido en la información del movimiento del electrón en la norma de Landau simétrico y en la norma de Landau del movimiento relativista.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 9

Operador rotación y Aplicación de la Teoría de Cartan

En cuanto al operador que contienen los espinores de Cartan, corresponden a la información que proporciona las matrices de Pauli, cada una de las bases representan los niveles en los que la dirección del electrón se propaga en el espacio-tiempo en su proporcionalidad de Helicidad [54]. En este sentido, la razón de introducir los espinores de Cartan, es para demostrar cómo las soluciones invierten la dirección del electrón a través del número cuántico m , que se expresa en las componentes de espín arriba y abajo. Pero antes de ello, se analiza las soluciones en relación al operador de rotación del eje y del espín semientero, que explícitamente se expresa en la ecuación no relativista, como también en la ecuación relativista de un plano en el eje x .

9.1. Transporte completo del electrón

Para estudiar la dinámica del electrón rotado, es necesario rotar completamente el grado de libertad intrínseco y sustituirlo en las ecuaciones correspondientes. Para tal fin, los valores en ϕ , que completa una vuelta 2π , están en relación a la separación del nivel energético en z , como en el eje x , usando la interacción para el operador de rotación en el eje y , se observa que el valor en $\phi = 0$, corresponde al espacio del movimiento del electrón, del cual es posible conocer valores fraccionarios, en este caso el nivel fraccionario es la unidad del punto inicial del eje rotado

$$e^{i\frac{0}{2}\sigma_z} \sigma_z e^{-i\frac{0}{2}\sigma_z} = \sigma'_z. \quad (9.1)$$

Al sustituirlo en la ecuación (2.17) se obtienen el mismo valor que el caso no rotado, pero asociado al valor elegido en ϕ y propio de z

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left[\left(\hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2} \sigma'_z B_0 \right], \quad (9.2)$$

los niveles de energía son producto de la separación del eje rotado, como también de la conservación total perpendicular al eje z del plano bidimensional [55],

$$E_{\pm} - E_z = -\frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e| |B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (9.3)$$

Ahora si se representa la carga en dirección contraria, el movimiento produce como resultado un nivel de energía distinto a la ecuación (9.3)

$$E_{\pm} - E_z = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e| |B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (9.4)$$

Para $\phi = \frac{\pi}{6}$, el valor se reduce a dos cantidades fraccionarias de dos matrices de Pauli, siendo la observable z el valor que resta la observable x . Ambas matrices son valores distintos que resuelven diferentes tipos de ecuaciones

$$e^{i\frac{\pi}{12}\sigma_y}\sigma_z e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_x. \quad (9.5)$$

Se esta trabajando con las rotaciones de la observable σ_z porque la dirección del campo magnético es dado por el producto vectorial del vector potencial magnético, a partir del cual se obtienen dos sistemas que son separados en dos casos, uno en el caso de la simetría cilíndrica y el otro en un caso unidimensional de la ecuación en la norma de Landau [56]. Al comenzar con el caso unidimensional, el producto de rotación ha hecho que el vector potencial cambie de simétrico a uno en la dirección de $\vec{A} = B_0 y \hat{i}$, es decir, $A_x = B_0 y$, en el que $\nabla \times \vec{A} = -B_0 \hat{k}$. Con todo ello, el resultado que se obtiene es el siguiente:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} \left(\hat{P}_x + \frac{eB_0}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m_0} \hat{P}_y^2 + \frac{eB_0}{2m_0 c} \hat{S}_x, \quad (9.6)$$

siendo este un hecho interesante porque tiene una solución común para la observable \hat{H} que incluye \hat{S}_x , esto a partir de la suma de conmutación para \hat{S}_x y \hat{P}_x . De acuerdo a la sección 8.5, la solución que se obtiene es la función de onda que esta normalizada

$$\Phi_{nh_1}(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^{n+1} \pi b_c n!}} e^{ih_1 x} H_n \left(\frac{y + h_1 b_c^2}{b_c} \right) e^{-\frac{1}{2b_c^2} (y + h_1 b_c^2)^2} \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (9.7)$$

En donde cada una de sus proyecciones de espín arriba y abajo son las direcciones del grado de libertad en x a partir del cual las direcciones no son soluciones propias de S_z [57]. Esto quiere decir que el resultado ± 1 , resulta conveniente para el resultado unidimensional, pero no para un caso tridimensional. Por lo que el nivel de energía es la suma de la dirección espín en x y el valor de energía en n_x

$$E = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2}), \quad (9.8)$$

$$\hat{S}_x |\psi_{x+}\rangle = \frac{\hbar}{2} |\psi_{x+}\rangle, \quad (9.9)$$

$$\hat{S}_x |\psi_{x-}\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\psi_{x-}\rangle. \quad (9.10)$$

Esto es para un caso no relativista, mientras que en la sección 9.2 se tienen los resultados para el caso relativista. Notemos que solo se ha trabajado con el caso unidimensional en el que existe una relación entre P_x y S_x esto a partir de la rotación hecha por σ_z , que provoca que el resultado se divida en dos casos, el primero en unidimensional, en el cual el vector potencial esta en la dirección x y el segundo en sus direcciones en z , a partir del producto vectorial, también como niveles de energía distinto al caso anterior, hay que notar que solo se toma $-\frac{1}{2}\sigma_x$. No se ha tomado con σ_z , porque se desea una conservación total del sistema en el eje de la observable S_x . Para el caso de la dirección $\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_z$, la conservación del momento angular total en la dirección z y el vector potencial magnético es el cambio del mismo en z , lo único diferente al primer caso en S_x , es que los niveles de energía son fraccionarios de acuerdo al valor propio en S_z

$$E_{\pm} - E_z = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e||B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (9.11)$$

En términos de los números cuánticos n y m se tiene

$$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e||B_0| (n + 1). \quad (9.12)$$

Esto quiere decir que transportar un electrón en movimiento en el sistema de la rotación, implica un cambio en los niveles de energía, en efectos fraccionarios Zeeman, como también en la simetría gauge en cada uno de los niveles de Landau que tienen una separación definida de acuerdo al grado de libertad del electrón. De acuerdo a los resultados de las ecuaciones (9.4) y (9.12), se realiza la siguiente tabla, en la que hay diferentes valores de energía de acuerdo al operador de rotación para los distintos

valores de ϕ . Estos niveles se caracterizan por la separación de la simetría cilíndricas y unidimensionales, en donde las X representan valores nulos de los niveles de energía en el eje z y eje x .

ϕ	$E_{\pm n, m} - E_z$	$E_{\pm n, m_{\mp \frac{1}{2}}}$
0	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	X (Valores nulos)
$\frac{\pi}{6}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{\pi}{4}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{\pi}{3}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{1}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{\pi}{2}$	X (Valores nulos)	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{2\pi}{3}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{1}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{3\pi}{4}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{5\pi}{6}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
π	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	X (Valores nulos)
$\frac{7\pi}{6}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{5\pi}{4}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{4\pi}{3}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \mp \frac{1}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{3\pi}{2}$	X (Valores nulos)	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} - m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{5\pi}{3}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{1}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{7\pi}{4}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} m_{\mp \frac{1}{2}})$
$\frac{11\pi}{6}$	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	$E_{\pm} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_{\mp \frac{1}{2}})$
2π	$E_{\pm n, m} = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} e B_0 (n + 1)$	X (Valores nulos)

Tabla 9.1: Estados propios del oscilador de Schrödinger-Pauli rotados por el operador espín $\frac{1}{2}$, etiquetados por cada uno de los números fraccionarios del efecto Zeeman y el operador rotado a un plano x .

Es necesario notar que los valores de ϕ , son resultados de la ecuación siguiente

$$e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_y}\sigma_z e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_y}, \quad (9.13)$$

cuyos resultados quedan en términos de las observables σ_z y σ_x , en donde las σ_x se extiende a los casos de los polinomios de Hermite de los operadores de escaleras y los

σ_z de los polinomio de Laguerre. El siguiente caso es estudiar el caso unidimensional relativista para el espinor.

9.2. Transporte completo del electrón relativista

De acuerdo a la tabla 9.1, el electrón con espín semientero se mueve bajo un campo magnético uniforme, en relación a su conservación total del momento P_x y \hat{S}_x , como también por el vector potencial magnético en la dirección $A_x = B_0 y$ [58]. Cuya representación en su forma matricial se escribe como:

$$H = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & G \\ G^\dagger & -m_0 c^2 \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

La forma matricial de la ecuación (9.14), es la forma radial de la ecuación de Dirac, cuyos valores se encuentran en G y G^\dagger

$$G = cP_y + i(cP_x + eB_0 y), \quad (9.15)$$

$$G^\dagger = cP_y - i(cP_x + eB_0 y), \quad (9.16)$$

a partir del cual se obtiene:

$$[G^\dagger, G] = 2ceB_0 \hbar. \quad (9.17)$$

En donde los operadores de aniquilación y creación forman parte del operador Helicidad y dirección magnética [59]

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}b_c} \left[b_c^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) + y \right], \quad (9.18)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}b_c} \left[-b_c^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) + y \right], \quad (9.19)$$

cumpliendo así con la relación proporcionada en ambas direcciones

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (9.20)$$

Esto quiere decir que las ecuaciones (9.18) y (9.19) cumplen con las ecuaciones (8.30) y (8.31) del capítulo 8 en los vórtices de electrones

$$G = -\sqrt{2ceB_0 \hbar} a^\dagger, \quad (9.21)$$

$$G^\dagger = -\sqrt{2ceB_0\hbar a}. \quad (9.22)$$

Al saber que existe un conjunto completo de funciones propias para el Hamiltoniano, se obtienen las funciones de onda propias a las direcciones fraccionarias en S_x ,

$$\Phi_{n,p_x,m_s} = \frac{1}{\sqrt{L_1}} e^{i\frac{p_x}{\hbar}x} \phi_{n,p_x}(y) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (9.23)$$

$$\phi_{n,p_x,m_s}(y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n!}} H_n \left[\frac{y + \frac{p_x}{\hbar} b_c^2}{b_c} \right] e^{-\frac{1}{2b_c^2} \left(y + \frac{p_x}{\hbar} b_c^2 \right)^2} \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (9.24)$$

En donde el centro de la órbita está encerrado en un rectángulo de área $A = L_1 L_2$ y m_s , con las proyecciones del espín. Estas soluciones vienen de considerar la siguiente ecuación, cuando $\phi = \frac{\pi}{6}$,

$$\left(\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Phi = \left[\frac{1}{2m_0} \left(\hat{p}_x + \frac{eB_0}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m_0} \hat{p}_y^2 + \frac{eB_0}{2m_0 c} \hat{S}_x \right] \Phi, \quad (9.25)$$

y de esa manera junto con \hat{S}_x de las ecuaciones (9.9) y (9.10) se obtiene:

$$\left(\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} - \frac{1}{2m_0} p_y^2 - \frac{1}{2} \hbar \omega_c m_{s\mp} \right) = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (9.26)$$

por lo que

$$E_{\pm n, m_s} = \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4 + c^2 p_y^2}. \quad (9.27)$$

Ahora al representar las soluciones a partir de sus correspondientes espinores, hay que considerar primeramente la ecuación siguiente:

$$\chi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A} \right)}{E + m_0 c^2} \phi, \quad (9.28)$$

a partir de la cual, se obtiene la constante de normalización

$$N = \sqrt{\frac{E_n \pm m_0 c^2}{2E_n}}, \quad (9.29)$$

y partiendo de los operadores de escaleras de la ecuación (9.18) y (9.19), se tiene que la solución proporcionada forma

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}b_c} \left[b_c^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) + y \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega_c}} \frac{\partial}{\partial y} - i \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega_c}} \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\frac{m_0\omega_c}{\hbar}} y \right], \quad (9.30)$$

donde la ecuación (9.30), se aplica a la solución de la ecuación (9.25),

$$H_n \left[\frac{y + \frac{p_x}{\hbar} b_c^2}{b_c} \right] e^{-\frac{1}{2b_c^2} \left(y + \frac{p_x}{\hbar} b_c^2 \right)^2}, \quad (9.31)$$

donde el siguiente cambio de variable transforma la derivada en y a una derivada en u

$$u = \sqrt{\frac{m_0\omega_c}{\hbar}} \left(y + \frac{p_x}{m_0\omega_c} \right), \quad (9.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{\frac{m_0\omega_c}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial u'}, \quad (9.33)$$

a partir de lo cual, se convierte en un operador de helicidad de una solución asintótica radial

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega_c}} \sqrt{\frac{m_0\omega_c}{\hbar}} \left(u + \frac{d}{du} \right), \quad (9.34)$$

con lo cual, el polinomio de Hermite se escribe en la forma siguiente

$$H_n(u) e^{-\frac{1}{2}u^2}, \quad (9.35)$$

donde $n = 1, 2, \dots$, si $n = 1$ se obtiene que $H_1(u) = 2u$ en donde al realizar las operaciones correspondientes se obtiene

$$\left(u + \frac{d}{du} \right) H_1(u) e^{-\frac{1}{2}u^2} = 2H_0(u), \quad (9.36)$$

por lo cual, los polinomio de Hermite forman el número de solución en valor del número real

$$\left(u + \frac{d}{du} \right) H_n(u) e^{-\frac{1}{2}u^2} = 2nH_{n-1}(u). \quad (9.37)$$

Es decir, que de acuerdo a la ecuación (9.28), (9.29) y (9.30), en relación a (9.22) se obtiene el correspondiente espinor

$$\psi_{\pm n, p_x, m_s} = \sqrt{\frac{E_{n, m_s} \pm m_0 c^2}{2E_{n, m_s}}} \begin{pmatrix} \Phi_{n, p_x, m_s} \\ -E_{n, m_s}^0 \\ \pm E_{n, m_s} + m_0 c^2 \Phi_{n-1, p_x, m_s} \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

Cada nivel de energía está degenerado y los valores propios de P_x caracterizan la degeneración, también aparecen infinitos niveles de energía y el espectro muestra una asimetría espectral con el estado fundamental [52]. Al realizar la siguiente tabla, se observa los valores de energía en los valores ϕ de las direcciones en x .

ϕ	$E_{\pm n, m_{\mp \frac{1}{2}}}$
0	X (Valores nulos)
$\frac{\pi}{6}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{\pi}{4}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \frac{2}{\sqrt{2}} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{\pi}{3}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \sqrt{3} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{\pi}{2}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + 2 \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{2\pi}{3}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \sqrt{3} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{3\pi}{4}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \frac{2}{\sqrt{2}} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{5\pi}{6}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
π	X (Valores nulos)
$\frac{7\pi}{6}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{5\pi}{4}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{2 \hbar e B_0 c (2n + 1) + \frac{2}{\sqrt{2}} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{4\pi}{3}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \sqrt{3} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) - 2 \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{5\pi}{3}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \sqrt{3} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{7\pi}{4}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \frac{2}{\sqrt{2}} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
$\frac{11\pi}{6}$	$E_{\pm n, m_s} = \pm \sqrt{\hbar e B_0 c (2n + 1) + \sqrt{3} \hbar e B_0 c m_{s\mp} + m_0^2 c^4}$
2π	X (Valores nulos)

Tabla 9.2: Estados propios rotados por el operador de rotación etiquetados por cada uno de los números fraccionarios del efecto Zeeman del plano en x .

Estos son los niveles de energía, que son cada uno de los valores en ϕ , para el transporte completo relativista de los valores obtenidos en la dirección del eje x del espín semientero, a su vez que el vector potencial en la norma de Landau es distinto al simétrico.

9.3. Aplicación de los espinores de Cartan

Cartan define a los espinores como un vector isotrópico que contiene componentes que satisfacen el producto vectorial de su igualdad en el valor nulo [60],

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (9.39)$$

las componentes ζ_0 y ζ_1 , asociados con x_1 , x_2 y x_3 , son

$$x_1 = \zeta_0^2 - \zeta_1^2, \quad (9.40)$$

$$x_2 = i(\zeta_0^2 + \zeta_1^2), \quad (9.41)$$

$$x_3 = -2\zeta_0\zeta_1. \quad (9.42)$$

Al considerar el espacio bidimensional para el espacio S del espín, las ecuaciones para las direcciones isotropicas con el espinor ζ , se escriben como:

$$\zeta_0 x_3 + \zeta_1(x_1 - ix_2) = 0, \quad \zeta_0(x_1 + ix_2) - \zeta_1 x_3, \quad (9.43)$$

cuya forma matricial se escribe en sus componentes del vector isotrópico

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad (9.44)$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las componentes del vector \vec{x} , cuyas bases de vectores

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.45)$$

son las matrices de Pauli que se escriben como un producto escalar

$$X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x}. \quad (9.46)$$

Ahora, al extender el estudio de los espinores a la teoría de la relatividad especial, la ecuación de Dirac en términos del espacio de Minkowski, se escribe en términos de las coordenadas del espacio tiempo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & x^{2'} & -x^{1'} \\ x^{1'} & x^2 & 0 & 0 \\ x^{2'} & -x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

Las coordenadas ortogonales asociadas con el vector son:

$$x^1 = x^1 + ix^2, \quad x^{1'} = x^1 - ix^2, \quad x^2 = x^3 + ix^4, \quad x^{2'} = x^3 - ix^4, \quad (9.48)$$

escribiéndose el vector de la forma siguiente:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 + ix^2 & x^3 + ix^4 \\ 0 & 0 & x^3 - ix^4 & -x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^3 + ix^4 & 0 & 0 \\ x^3 - ix^4 & -x^1 - ix^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.49)$$

la derivada parcial del vector covariante se escribe de la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} & -\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^4} & -\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

Al introducir la función de onda en sus 4 componentes de un espinor ζ y al considerar una matriz asociada con el el vector potencial y una matriz K , la ecuación de Dirac se escribe como:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A - m_0 c K \right) \zeta = 0, \quad (9.51)$$

donde K es

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

Al reemplazar ζ_0 por $\Psi_2 - \Psi_4$, ζ_1 por $\Psi_1 + \Psi_3$, ζ_2 por $-\Psi_2 - \Psi_4$ y ζ_{12} por $\Psi_1 - \Psi_3$ y al realizar las operaciones de [61] y al ignorar el vector potencial se obtiene las ecuaciones de Dirac

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial x^1} - i \frac{\partial \Psi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x^3} \right) = -m_0 c \Psi_1, \quad (9.53)$$

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x^1} + i \frac{\partial \Psi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x^3} \right) = -m_0 c \Psi_2, \quad (9.54)$$

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x^1} - i \frac{\partial \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x^3} \right) = m_0 c \Psi_3, \quad (9.55)$$

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x^1} + i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x^3} \right) = m_0 c \Psi_4. \quad (9.56)$$

Al considerar el espinor de Cartan en su forma de las funciones de onda es posible obtener la ecuación de movimiento radial, como también las soluciones en los vórtices de electrones. De igual forma, se cumple que cada valor del espinor ζ que actúa sobre un valor complejo, lo convierte en su conjugado. Que de acuerdo a las soluciones en su forma del espinor de Cartan, los valores de helicidad positiva y negativa se escriben en la forma siguiente:

$$a_{\bar{\rho}}^{\dagger} \zeta = e^{i\theta} \left[i \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{i B_0 \bar{\rho} e}{2 \hbar c} \zeta \right] = \nabla_{1\uparrow}, \quad (9.57)$$

$$a_{\bar{\rho}} \zeta = e^{-i\theta} \left[i \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \frac{i B_0 \bar{\rho} e}{2 \hbar c} \zeta \right] = \nabla_{1\downarrow}. \quad (9.58)$$

Como el espinor de Cartan convierte un número complejo en su conjugado [60]. Entonces, se invierte la dirección del electrón a través del número cuántico m , en donde los vortices de electrones que se obtienen son para valores $m < 0$,

$$\begin{aligned} \nabla_{1\uparrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|} (\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ \hbar c k_z \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta_+ \left(\sqrt{2} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+ - 1}^{|m|+1} (\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{e B_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (9.59)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{1\downarrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ -\hbar c k_z \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta_+ \left(\sqrt{2}(\Omega_+ + 1) i e^{-i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega_++1}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (9.60)$$

Donde $\Delta_+ = e^{i(k_z z - Et - m\theta)} e^{-\frac{\bar{\rho}^2}{2}}$, contiene la información de las energía y la solución radial como su parte azimutal del número cuántico m . La solución efectiva en todo el problema no solo viene por ese intercambio de dirección en su movimiento radial, sino también por las soluciones permitidas de las direcciones del electrón. También proporciona información por el fuerte vínculo entre los valores del electrón libre y sus energías en relación a cada uno de sus componentes de Helicidad.

9.4. Puntos importantes que se deben de considerar en la velocidad de un electrón relativista en el transporte del espín semientero

Estos procedimientos se consideran en 10.1.

- Primero se consideran todos los resultados obtenidos por la tabla 8.1, y cada uno de los valores α en los que las direcciones de energía son soluciones en términos de los espinores.
- Cuando los valores de la energía de la tabla 8.1 son una suma del valor bidimensional y el valor de la dirección espín, la relación de su solución se refleja por las direcciones del espín hacia arriba.
- Cuando los valores de la energía de la tabla 8.1 son una resta del valor bidimensional y el valor de la dirección espín, la relación de su solución se refleja por las direcciones del espín hacia abajo.
- Calcular cada uno de las probabilidades en el desplazamiento radial de acuerdo a la dirección de la energía, y el tiempo mínimo de la literatura [65].

- Obtener la velocidad de desplazamiento de acuerdo a cada valor de η en unidades de la distancia radial.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 10

Analogía con la paradoja del gato de Schrödinger

La paradoja del gato de Schrödinger es utilizada para explicar propiedades fundamentales de la mecánica cuántica en el enfoque de las probabilidades y estados superpuestos [62]. El estudio aquí se centra en un gato relativista que se mueve con respecto a un sistema en reposo. El cual, actúa sobre niveles de energía con respecto a los estados obtenidos que son dependientes de operadores de ascenso y descenso para cada uno de los valores $\hbar\omega$,

$$E_{\pm}^2 = \hbar ceB_0(2k + |m| + 1) + \hbar ceB_0(m + 1) + m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 k_z^2. \quad (10.1)$$

Al considerar un sistema inercial S' , que se mueve a lo largo de la dirección z con velocidad constante $v_z = \frac{p_z}{m}$, con respecto a marco de referencia en reposo S . El Hamiltoniano H_D , que se obtiene es el sistema en reposo del caso 2D

$$H_D = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 & 0 & a_r \\ 0 & m_0 c^2 & a_r^\dagger & 0 \\ 0 & a_r & m_0 c^2 & 0 \\ a_r^\dagger & 0 & 0 & m_0 c^2 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Donde a_r y a_r^\dagger son los operadores de Helicidad positiva y negativa que transforman el sistema de soluciones en el espinor. Las funciones de onda del electrón con estos operadores de Helicidad se construyen a partir de nuestros espinores de Dirac. Cuyas soluciones son de la forma siguiente:

$$\Psi_{1\uparrow} = \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right) \quad (10.3)$$

$$\Psi_{2\uparrow} = \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 c^2 - E_+ \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|m|+1} L_{\Omega_+}^{|m|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2\downarrow} = & \Delta_+ \left(\bar{\rho}^{|m|} L_{\Omega_+}^{|m|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_0 c^2 - E_+ \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta_+ \left(\sqrt{2}(\Omega_+ + |m|) i e^{-i\theta} \bar{\rho}^{|m|-1} L_{\Omega_+}^{|m|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

En donde $\Psi_{1\downarrow}$, es el mismo que en la ecuación (7.17). Las soluciones de energías positivas y negativas se transforman por separados en las transformaciones de Lorentz, por lo que las soluciones de energías se unen bajo estas transformaciones [63]. El espinor se transformara bajo el cambio de la siguiente ecuación:

$$\hat{S}_{L_z} = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^{12}}. \quad (10.6)$$

Al elegir la velocidad paralela a z , se tiene:

$$\tanh \vartheta = \frac{v_z}{c} = \frac{p_z c}{E}, \quad (10.7)$$

siendo E la energía de la ecuación (10.1). De acuerdo a ello, el Boost de Lorentz del espinor de Dirac, se escribe en relación a la transformación de rotación

$$\Psi(x^\mu) = S_{L_z}^{-1} \Psi'(x'^\mu). \quad (10.8)$$

De la ecuación (10.6), se obtiene la solución con respecto al movimiento libre en la dirección del eje z

$$S_{L_z}^{-1} = \cosh \frac{\vartheta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tanh \frac{\vartheta}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\tanh \frac{\vartheta}{2} \\ \tanh \frac{\vartheta}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\tanh \frac{\vartheta}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

De acuerdo a nuestra descripción $\frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - p_z^2$ y usando las identidades de $\tanh \frac{\vartheta}{2}$ y $\cosh \frac{\vartheta}{2}$, cada uno de los valores están contenidos por las ecuaciones de Lorentz

$$\tanh \frac{\vartheta}{2} = \frac{\cosh \vartheta - 1}{\sqrt{\cosh^2 \vartheta - 1}} = \frac{\tanh \vartheta}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \vartheta}}, \quad (10.10)$$

$$\cosh \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\tanh^2 \vartheta}{(1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \vartheta})^2} \right]}}. \quad (10.11)$$

No hay que olvidar la ecuación de la energía del caso 3D

$$E^2 = E'^2 + p_z^2 c^2. \quad (10.12)$$

De la ecuación (10.7) y (10.8) se obtiene:

$$\tanh \frac{\vartheta}{2} = \frac{p_z c}{E_n + E'_n}, \quad \cosh \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{E_n + E'_n}{2E'_n}}, \quad (10.13)$$

donde E'_n no contiene a p'_z . Ahora, a partir de los diferentes estados de energía que contienen tanto la parte bidimensional como la parte tridimensional, el espinor contiene los estados ascendentes y descendentes expresados en soluciones del Boost [64],

$$|E_n, 1\rangle = \Delta_{\pm} \left(\cosh \frac{\vartheta}{2} Y_{1\uparrow} + \sinh \frac{\vartheta}{2} Y_{2\uparrow} \right) |n\rangle \pm i \Delta_{\pm} \left(\sinh \frac{\vartheta}{2} Y_{1\downarrow} - \cosh \frac{\vartheta}{2} Y_{2\downarrow} \right) |n+1\rangle, \quad (10.14)$$

$$|E_n, 2\rangle = \Delta_{\pm} \left(\cosh \frac{\vartheta}{2} Y_{1\downarrow} - \sinh \frac{\vartheta}{2} Y_{2\downarrow} \right) |n+1\rangle \mp i \Delta_{\pm} \left(\sinh \frac{\vartheta}{2} Y_{1\uparrow} + \cosh \frac{\vartheta}{2} Y_{2\uparrow} \right) |n\rangle, \quad (10.15)$$

donde Δ_{\pm} es la constante de normalización obtenida por los dos valores de energías, uno positivo y otro negativo

$$\Delta_{\pm} = \sqrt{\frac{E'_n \pm mc^2}{2E'_n}}, \quad (10.16)$$

siendo $|E_n, 1\rangle$ y $|E_n, 2\rangle$, los estados de energía en superposición de la partícula y anti partícula que conllevan los niveles de energía que son transportados en las soluciones de los estados que conllevan una permanencia del electrón a un salto de un estado mayor

$$Y_{1\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{2\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{2\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Cada uno de los espinores de la ecuación (10.17), son contenidos por el número cuántico radial de $|n\rangle$ y $|n+1\rangle$.

10.1. Velocidades de los electrones y tiempo mínimo del transporte del electrón

Como resultado del capítulo 8, los estados propios de la estructura son velocidades diferentes con respecto a las soluciones de los estados de energía que cambian de acuerdo a los valores en α . Al considerar los siguientes dos espinores

$$U_{2,2,1\uparrow} = N_{2,2} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{2,2}(r, \theta) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{3}\hbar c \eta \bar{\xi}_{3,3}}{E_{2,2} + m_0 c^2} \end{pmatrix}, \quad U_{4,2,1\uparrow} = N_{4,2} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{4,2}(r, \theta) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4i\hbar c \eta \bar{\xi}_{5,3}}{E_{4,2} + m_0 c^2} \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

El valor de energía aceptable radica en la ecuación (10.1), donde el campo magnético B_0 es intenso y por lo cual la energía en reposo $m_0 c^2$ se desprecia, siendo así la descripción del movimiento 2D sin esa influencia y por lo tanto, el nivel de energía relativista toma la forma siguiente:

$$E_{\pm}^2 = \hbar c e B_0 (2k + |m| + 1) + \hbar c e B_0 (m + 1). \quad (10.19)$$

El promedio del desplazamiento radial es obtenido para $\phi = \pi$,

$$\Delta r = 2 | \langle U_{2,2\uparrow} | r | U_{4,2\uparrow} \rangle |. \quad (10.20)$$

Con resultados en donde $B_0 \rightarrow \infty$, y por lo cual, los valores de la constante de normalización son $N_{2,2} = N_{4,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, siendo $\eta = \sqrt{\frac{eB_0}{2\hbar c}}$,

$$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{15}{\sqrt{12}} + \frac{105}{24} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}. \quad (10.21)$$

Y de la diferencia de los dos niveles de energía relativista se obtiene el tiempo mínimo, así como también su relación a través del valor contenido en la solución del polinomial Laguerre. A través del valor promedio en el Hamiltoniano de la solución bidimensional [65],

$$T_{min} = \frac{\pi}{(4 - 2\sqrt{3})c\eta}. \quad (10.22)$$

Por lo tanto, la velocidad promedio en la dirección radial en este tiempo mínimo esta dado por v ,

$$v = \frac{1}{16} \left(\frac{15}{\sqrt{12}} + \frac{105}{24} \right) \frac{(4 - 2\sqrt{3})c}{\sqrt{\pi}}. \quad (10.23)$$

De acuerdo a las soluciones de la ecuación (10.18), y al espectro de energía de la ecuación (10.19), se realiza la siguiente tabla para los valores de $\phi = \frac{2\pi}{3}$, hasta $\phi = \frac{5\pi}{4}$.

ϕ	Δr	η	$N_{2,2} = N_{4,2}$	T_{min}	v
$\frac{2\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(2-\sqrt{3})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(2-\sqrt{3})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{12}-\sqrt{9})c\eta}$	$v = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{9})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{12}-\sqrt{9})c\eta}$	$v = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{9})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$

Tabla 10.1: Velocidades propias radiales del desplazamiento radial y el tiempo mínimo de $\phi = \frac{2\pi}{3}$, hasta $\phi = \frac{5\pi}{4}$.

Lo siguiente que se tiene que encontrar son los resultados de la combinación de la energía positiva y energía negativa de las superposiciones de estados

$$U_{2,2,2\uparrow} = N_{2,2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{3}i\hbar c\eta \xi_{3,3}}{E_{2,2} - m_0 c^2} \\ \xi_{2,2}(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

Obteniendo como resultado un tiempo más corto que en el caso de la tabla 10.1

ϕ	Δr	η	$N_{2,2} = N_{4,2}$	T_{min}	v
$\frac{2\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(2+\sqrt{3})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(2+\sqrt{3})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{12}+\sqrt{9})c\eta}$	$v = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(\sqrt{12}+\sqrt{9})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{12}+\sqrt{9})c\eta}$	$v = \frac{5}{112} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 7 \right) \frac{(\sqrt{12}+\sqrt{9})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{35}{12} \right) \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$

Tabla 10.2: Velocidades propias del desplazamiento radial y el tiempo mínimo del estado cuántico $\xi_{2,2}$ y $\xi_{4,2}$.

A partir de la sección 10.1, las velocidades del electrón para la tabla 8.1 en los números cuánticos $(n = 2, m = 0)$ y $(n = 4, m = 0)$ se resuelve para dos tipos de espinores, uno para el caso del espín hacia arriba y el otro para el espín hacia abajo. Para el caso del espín hacia arriba, se toma en consideración el resultado en la suma de energía $(n + 1) + (m + 1)$, mientras que en el caso de espín hacia abajo, la energía es la resta en $(n + 1) - (m + 1)$ cuya suma o resta depende del valor ϕ ,

$$U_{2,0,1\uparrow} = N_{2,0} \begin{pmatrix} \xi_{2,0}(r, \theta) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{2}i\hbar c\eta \xi_{3,1}}{E_{2,0} + m_0 c^2} \end{pmatrix}, \quad U_{4,0,1\uparrow} = N_{4,0} \begin{pmatrix} \xi_{4,0}(r, \theta) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{3}i\hbar c\eta \xi_{5,1}}{E_{4,0} + m_0 c^2} \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

En este caso, espín hacia arriba, los valores sobre los cuales se aplican son en los resultados de $\phi = \frac{2\pi}{3}$ hasta $\phi = \frac{4\pi}{3}$ de la tabla 10.3, así como la energía es el resultado de (10.19) en $\phi = \pi$.

$$U_{2,0,1\downarrow} = N_{2,0} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{2,0}(r, \theta) \\ \frac{-2i\hbar c \eta \xi_{1,-1}}{E_{2,0} + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{4,0,1\downarrow} = N_{4,0} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{4,0}(r, \theta) \\ \frac{-2\sqrt{2}i\hbar c \eta \xi_{3,-1}}{E_{4,0} + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$

Con los espinores de la ecuación (10.26), los valores son $\phi = 0$ hasta $\phi = \frac{\pi}{3}$, para los valores de $\phi = \frac{5\pi}{3}$ hasta $\phi = 2\pi$, se observan en la tabla siguiente:

ϕ	Δr	η	$N_{2,0} = N_{4,0}$	T_{min}	v
0	$\Delta r = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{2\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{(2\sqrt{2}-2)c\eta}$	$v = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(2\sqrt{2}-2)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{1}{7} \left(\frac{33}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})c\eta}$	$v = \frac{1}{7} \left(\frac{33}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{12} \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(2-\sqrt{2})c\eta}$	$v = \frac{1}{12} \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{(2-\sqrt{2})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{5} \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{2}-1)c\eta}$	$v = \frac{1}{5} \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(\sqrt{2}-1)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{5} \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{2}-1)c\eta}$	$v = \frac{1}{5} \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(\sqrt{2}-1)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{12} \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(2-\sqrt{2})c\eta}$	$v = \frac{1}{12} \left(\frac{11}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{(2-\sqrt{2})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{1}{7} \left(\frac{33}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})c\eta}$	$v = \frac{1}{7} \left(\frac{33}{16} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})c}{\sqrt{\pi}}$
2π	$\Delta r = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{2\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{(2\sqrt{2}-2)c\eta}$	$v = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{(2\sqrt{2}-2)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{40} \left(\frac{11}{2} + \frac{57}{\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})c\eta}$	$v = \frac{1}{40} \left(\frac{11}{2} + \frac{57}{\sqrt{6}} \right) \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{6} \left(\frac{11}{16} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{6}-2)c\eta}$	$v = \frac{1}{6} \left(\frac{11}{16} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \frac{(\sqrt{6}-2)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{1}{8} \left(\frac{33}{14} + \frac{57}{7\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{\pi}{(3-\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{8} \left(\frac{33}{14} + \frac{57}{7\sqrt{6}} \right) \frac{(3-\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\Delta r = \frac{1}{8} \left(\frac{33}{14} + \frac{57}{7\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{\pi}{(3-\sqrt{6})c\eta}$	$v = \frac{1}{8} \left(\frac{33}{14} + \frac{57}{7\sqrt{6}} \right) \frac{(3-\sqrt{6})c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\Delta r = \frac{1}{6} \left(\frac{11}{16} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c \sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{6}-2)c\eta}$	$v = \frac{1}{6} \left(\frac{11}{16} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \frac{(\sqrt{6}-2)c}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\Delta r = \frac{1}{40} \left(\frac{11}{2} + \frac{57}{\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$	$\sqrt{\frac{B_0 e}{\hbar c}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})c\eta}$	$v = \frac{1}{40} \left(\frac{11}{2} + \frac{57}{\sqrt{6}} \right) \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})c}{\sqrt{\pi}}$

Tabla 10.3: velocidades propias del desplazamiento radial y el tiempo mínimo relativista.

Las operaciones en cada uno de los valores ha sido gracias a los espinores y su relación con cada una de sus energías. Como ejemplo en el ángulo ϕ , el operador de rotación esta en $\phi = \pi$, cuyo valor de energía es la suma del número cuántico principal más el número cuántico magnético m . El resultado de ambas conexiones permite que las constantes de normalización sean $N_{2,0} = N_{4,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, esto quiere decir, que la información proporcionada por la función de onda en el promedio del desplazamiento radial y el tiempo es:

$$\Delta r = \frac{1}{32} \left(11 + \frac{57}{2\sqrt{6}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}, \quad T_{min} = \frac{\pi}{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})c\eta}. \quad (10.27)$$

Cuyas direcciones en la suma de energía $(n + 1) + (m + 1)$, con $\eta = \sqrt{\frac{B_0 e}{2\hbar c}}$, son velocidades que contienen cada uno de los posibles resultados internos de la operación de rotación de su primera vuelta, así como su cambio de direcciones en o en contra de las manecillas del reloj

$$v = \frac{1}{32} \left(11 + \frac{57}{2\sqrt{6}} \right) \frac{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})c}{\sqrt{\pi}}. \quad (10.28)$$

La paradoja del gato de Schrödinger demuestra que existen diferentes resultados de superposición, así como también diferentes resultados de frecuencias para cada una de las direcciones en ϕ , como también longitudes magnéticas del oscilador armónico bidimensional, cada uno de esos resultados refleja direcciones que se acoplan tanto al espín arriba como al espín abajo pero con diferentes tipos de energía reflejados en el tiempo mínimo, como se indica en la tabla 10.3, esto visto también por lo resultados de la constante de normalización y los resultados de los espinores de la ecuación (10.26).

Capítulo 11

Discusión de los resultados

La aplicación de la teoría de Schrödinger-Pauli y la estructura de la ecuación de Dirac son de interés para la comprensión del movimiento a través del momento angular total conservado. En este sentido, la simplicidad de los efectos son valores semienteros que ocasionan la extensión de diferentes direcciones en la creación de la antipartícula en la interacción del campo magnético. Es así, que resulta ideal para el estudio de diferentes efectos, además de la teoría mencionada, efectos no relativistas en las cantidades termodinámicas entorno al movimiento azimutal [66]. En donde la cantidad de la entropía es obtenida.

11.1. Partícula interaccionando con un oscilador armónico

El estudio de este tema se trata en el capítulo 4 de la sección 4.4, cuyo potencial incluye $V(r) = ar^2$. Cada uno de los valores propios son funciones de onda que se modifican a partir del potencial y de la interacción espín semientero. Al analizar los valores de la función de onda y la representación radial, se obtiene la información total en superposición

$$\Xi = G_n \zeta(\zeta r)^{|m|} L^{|m|}_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)} (\zeta^2 r^2) e^{-\frac{\zeta^2 r^2}{2}} e^{im\theta}, \quad (11.1)$$

obteniendo el caso de un estado $\Xi_{1,1}(r, \theta)$, que en su representación del espín

$$\Xi_{1,1}(r, \theta) = \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} (\zeta r) e^{-\frac{\zeta^2 r^2}{2}} e^{i\theta}, \quad (11.2)$$

se transporta en relación al giro completo 2π , transformándolo en su negativo. Por lo tanto, se usa para describir las direcciones en sentido a las manecillas del reloj y en sentido contrario a la manecillas, en el que la dirección del eje y , sucede cuando el efecto es hecho en cada valor de ϕ hasta llegar hasta a 2π . Aún cuando las expresiones son relativamente simples

$$\Xi(r, \theta)_+ = \begin{pmatrix} A \cos \frac{\phi}{2} \Xi_{1,1}(r, \theta) \\ A \sin \frac{\phi}{2} \Xi_{1,1}(r, \theta) \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

donde A es la constante de normalización. La dirección en la que apunta el estado superpuesto, es la dirección del campo magnético, cuya variación dependerá de los valores ϕ . Siendo la misma densidad de probabilidad radial $J_{n,m}$, que en nuestro caso de la ecuación (7.4). La probabilidad de encontrar al electrón espín hacia arriba y espín hacia abajo en algunos valores θ y r es de la forma en el que la evolución de las probabilidades están en diferentes direcciones, entonces los diferentes ángulos ϕ , son puntos cercanos, cuando se aproximan al valor determinado de la segunda vuelta, como se muestra en la siguiente tabla:

ϕ	P_+	P_-	ϕ	P_+	P_-
0	1	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	2π	1	0
π	0	1	X (Valores nulos)	X (Valores nulos)	X (Valores nulos)

Tabla 11.1: Predicción de probabilidad para los estados del espín arriba y espín abajo en el viaje a través de un espacio cerrado en la primera vuelta del electrón, siendo X los valores nulos de ϕ y probabilidades P_+ y P_- .

Esto muestra que no todos los caminos cerrados son los mismos, dar una vuelta no es quedarse en el mismo lugar, pero dos vueltas si lo es. Pero, qué implica un cambio de signo en el espinor cuando es rotado por 2π , la respuesta tiene que ver con

la estadística de Fermi y el principio de exclusión de Pauli [67]. Esto quiere decir que el signo menos es un intercambio de direcciones en contra de las manecillas del reloj.

ϕ	$\langle E_{\uparrow 0,0} \rangle$	$\langle E_{\downarrow 0,0} \rangle$	ϕ	$\langle E_{\uparrow 0,0} \rangle$	$\langle E_{\downarrow 0,0} \rangle$
0	$\hbar\omega$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$(\frac{2-\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	$(\frac{2+\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$
$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{2+\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	$(\frac{2-\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	$\frac{5\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\hbar\omega$	$\frac{3}{4}\hbar\omega$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\hbar\omega$	$\frac{1}{4}\hbar\omega$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$\frac{1}{2}\hbar\omega$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\hbar\omega$	$\frac{1}{4}\hbar\omega$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\hbar\omega$	$\frac{3}{4}\hbar\omega$	$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$
$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})\hbar\omega$	$\frac{11\pi}{6}$	$(\frac{2+\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	$(\frac{2-\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$
$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{2-\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	$(\frac{2+\sqrt{3}}{4})\hbar\omega$	2π	$\hbar\omega$	0
π	0	$\hbar\omega$	X (Valores nulos)	X (Valores nulos)	X (Valores nulos)

Tabla 11.2: Predicción de probabilidad para los estados del espín arriba y espín abajo en los valores superpuestos de energía.

Cuando el electrón vuelve apuntar en la misma configuración con la que inició, entonces existe una superposición que se diferencia del caso en el que el electrón apunta en dirección contraria, la superposición de estado es mas definida que para el caso del espinor con dirección hacia abajo, en esta configuración los valores de las probabilidades se intercambian

$$\Xi(r, \theta)_- = \begin{pmatrix} -A \sin \frac{\phi}{2} \Xi_{1,1}(r, \theta) \\ A \cos \frac{\phi}{2} \Xi_{1,1}(r, \theta) \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

Los valores en la primera vuelta van cambiando de arriba hacia abajo de acuerdo a los valores elegidos por ϕ , pero estos no sucede en la segunda vuelta en donde la probabilidad máxima sera para la configuración con la que se inicia. Los caminos iguales son conocidos como caminos homotópicos, estos caminos son un camino homotópicos si se puede convertir en el otro con pequeñas alteraciones y si es una pequeña alteración del otro. Por ejemplo, los diferentes valores de ϕ alrededor del eje y es homotópico alrededor de cualquier eje [68]. En concreto, se debe tener en cuenta que durante el transporte, el electrón apunta en dirección contraria desde la perspectiva de cada ángulo. Esto implicando un intercambio de dos partículas obedeciendo así el principio de exclusión de Pauli. Es importante señalar que el signo menos es inobservable puesto que la probabilidad no cambia por el signo menos, pero es importante

señalarlo a partir de la información que esta lleva a partir de los diferentes puntos de estados.

11.2. Partícula interaccionando con un oscilador armónico relativista

Trabajar en esta línea permite estudiar la relación que existe con las rotaciones 2π para los cambios de signo. De acuerdo a la sección 4.4 y la sección 6,1

$$\left(\frac{E_{\pm}^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} - E_z \right) = \frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e| |B_0| \sqrt{1 + R} (|m| + 2k + 1), \quad (11.5)$$

en donde los niveles de energía abordan el término $\sqrt{1 + R}$. La diferencia entre este enfoque y el primero, es la interacción del oscilador armónico para un potencial escalar cuadrático

$$E_{\pm n, m} = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + p_z^2 c^2 + \hbar e B_0 c (m \pm 1) + \hbar |e| |B_0| c \sqrt{1 + R} (|m| + 2k + 1)}. \quad (11.6)$$

Dado que se ha considerando la presencia de este término, no puede despreciarse la ecuación de movimiento que tiene implicaciones en la cantidades físicas de interés, como son la existencia de acoplamientos mínimos, escalares y vectoriales [69]. El estudio de las variedades de efectos y sus correspondientes espinores tienen mucho que ver en el análisis del principio de exclusión de Pauli. Esto implicando un intercambio de partículas en el que el signo menos introducido por el operador de rotación provoca cambio de signo. Esa diferencia de signo es donde aparece el principio de exclusión y la estadística de Fermi. Así, como los efectos relativistas en el que la inversión de tiempo doble es lo mismo que una rotación de 2π . En la sección anterior se ha estudiado que la probabilidad de hacer una medición de giro a lo largo del eje z y a lo largo del nuevo eje es el ángulo medio

$$P = \cos^2 \frac{\phi}{2}. \quad (11.7)$$

La misma fórmula de medio ángulo se obtiene con una modificación relativista. Si consideramos un caso simple, que satisface la ecuación siguiente:

$$E^2 - p^2 = m_0^2. \quad (11.8)$$

Al utilizar funciones hiperbólicas para parametrizar E y p , en términos de una sola variable, entonces satisface la ecuación (10.12), siendo

$$\cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E + m_0}{2m_0}}. \quad (11.9)$$

Utilizando la estadística de Fermi, se tiene una contribución positiva a la probabilidad y al intercambio de lugares en los electrones y su diferentes soluciones de los casos relativistas desde diferentes puntos dinámicos [70]. Es por ello que sobre la función de onda, el efecto de rotar 2π con respecto al marco del otro, provoca un intercambio de dos partículas. Es por esto que ahora se procede a estudiar la ecuación de Dirac en el acoplamiento mínimo escalar y vectorial a partir de la masa dependiente de la posición en el campo de Coulomb.

11.3. Dinámica cuántica de una partícula cargada de espín $\frac{1}{2}$ con acoplamientos escalares y vectoriales

El acoplamiento escalar y vectorial son efectos que estudian la dinámica de un electrón con efectos magnéticos, del cual el gauge simétrico incluye las direcciones del operador intrínseco del espín $\frac{1}{2}$. Esto es debido al vector potencial magnético incluido en la ecuación de Dirac. A partir de las 3 sustituciones que incluyen, el acoplamiento mínimo, vectorial y escalar, representado en la referencia [69]:

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (11.10)$$

$$E \rightarrow E - V(r), \quad (11.11)$$

$$Mc^2 \rightarrow Mc^2 + S(r). \quad (11.12)$$

Utilizando el modelo del acoplamiento mínimo, los niveles de Landau y el efecto cuántico Hall son efectos asociados con el campo magnético [71]. Sucede que en la ecuación (11.12), el término de masa de la ecuación de Dirac se interpreta como una masa efectiva dependiente de la posición, en el que actúa por igual sobre partículas y antipartículas [69]. De acuerdo a los tres acoplamientos, la ecuación de Dirac se escribe de la forma:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta(Mc^2 + S(r))\Psi(\vec{r}) = [E - V(r)] \Psi(\vec{r}). \quad (11.13)$$

De acuerdo a los capítulos 8,9 y 10, la forma cuadrática de la ecuación, queda en la forma en la que la solución, es igual a los dos valores de energía

$$\left[\left(c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right)^2 + (Mc^2 + S)^2 \right] \Psi = (E - V)^2 \Psi. \quad (11.14)$$

Al utilizar el límite exacto de simetría espín $S = V$ se obtiene:

$$\left[\left(c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right)^2 + 2(E + Mc^2)V(r) \right] \Psi = (E^2 - M^2c^4) \Psi. \quad (11.15)$$

Los resultados de los dos valores de energía, obtenidos por la introducción de las siguientes descomposiciones, son valores del número cuántico magnético orbital

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_m f_m(r) e^{im\theta} \\ \sum_m g_m(r) e^{i(m+1)\theta} \end{pmatrix}. \quad (11.16)$$

Por lo que, es de interés mencionar que las funciones de onda, son funciones de onda con proyección hacia arriba . Antes de realizar las sustituciones correspondiente, es necesario escribir la ecuación (11.15) en coordenadas cilíndricas que comienza con un $V(r) = ar^2$ donde $S = V$, para la simetría cilíndrica el término exacto del pseudo-espín se encuentra en relación a las degeneraciones de los orbitales en los espectros de una sola partícula [72]. De acuerdo a Ψ_1 y similar al procedimiento de los apéndices se llega a la ecuación radial de movimiento .

$$\frac{d^2 f_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_m(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} f_m(r) + \lambda_{\pm} f_m(r) - b^2 r^2 f_m(r) = 0, \quad (11.17)$$

donde

$$b = \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2} + \frac{2(E + Mc^2)a}{\hbar^2 c^2}}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1), \quad (11.18)$$

son relaciones del espectro de energía reflejado en la interacción campo del magnético-electrón, obtenidos por capítulos 7 y 8

$$bn = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{\pm}}{2} - b(|m| + 1) \right), \quad (11.19)$$

esto es igual a una parte del nivel de Landau, cuya ecuación se completa por el efecto 2D dinámico del oscilador armónico [15],

$$\lambda_{\pm} = (2n + |m| + 1) \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4c^2} + \frac{2(E + Mc^2)a}{c^2}}, \quad (11.20)$$

y con el valor de λ_{\pm} de la ecuación (11.19), queda de la forma siguiente:

$$E^2 - M^2 c^4 = 2\hbar c \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E + Mc^2)(2n + |m| + 1) - \hbar e B_0 c (m \pm 1)}. \quad (11.21)$$

El efecto de energía, es el resultado de la interacción efecto bidimensional y efecto de las separaciones de los valores semienteros multiplicado por el valor de raíz cuadrada tanto del resultado vibracional como del resultado de energía y el acoplamiento escalar.

11.3.1. Límite exacto de simetría pseudoespín $S = -V$

El componente descendente del espinor de la ecuación (11.20), produce la ecuación de movimiento radial de la forma siguiente:

$$\frac{d^2 g_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_m(r)}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} g_m(r) + \lambda'_{\pm} g_m(r) - b'^2 r^2 g_m(r) = 0, \quad (11.22)$$

donde

$$b' = \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2} + \frac{2(E - Mc^2)a}{\hbar^2 c^2}}, \quad \lambda'_{\pm} = \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{eB_0}{\hbar c} (m + 1 \pm 1), \quad (11.23)$$

son relaciones del espectro de energía reflejado en la interacción del campo magnético y el electrón, obtenidos por la interacción del efecto inverso de la energía y el caso vibracional

$$E^2 - M^2 c^4 = 2\hbar c \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E - Mc^2)(2n + |m| + 1 + 1) - \hbar e B_0 c (m + 1 \pm 1)}. \quad (11.24)$$

A diferencia de la ecuación (11.21), el valor de energía aumenta a un valor de más 1.

11.3.2. Funciones de onda

La función de onda ligado del espinor con espín superior $S = V$, es el valor contenido por los valores radiales de energía en el polinomio de Laguerre

$$f_{n,m}(r, \theta) = C_n b (br)^{|m|} L_{\left(\frac{n'-|m|}{2} + |m|\right)}^{|m|} (b^2 r^2) e^{-b^2 \frac{r^2}{2}} e^{im\theta}, \quad (11.25)$$

donde

$$C_n = (-1)^{\left(\frac{n'-|m|}{2} + |m|\right)} \sqrt{\frac{\left(\frac{n'-|m|}{2}\right)!}{\pi \left[\left(|m| + \frac{n'-|m|}{2}\right)! \right]^3}}. \quad (11.26)$$

De la misma forma, se obtiene la función de onda de la ecuación (11.22) de la función de onda inferior de $S = -V$ [69],

$$g_{n,m}(r, \theta) = C_n b' (b' r)^{|m|} L_{\left(\frac{n'-|m|}{2} + |m|\right)}^{|m|} (b'^2 r^2) e^{-b'^2 \frac{r^2}{2}} e^{i(m+1)\theta}, \quad (11.27)$$

donde los valores de $\frac{n'-|m|}{2}$, vienen de considerar la suma de energía cuadrática del valor de energía en k . Esto quiere decir, que se puede obtener diferentes valores de estructuras de corrientes.

11.3.3. Oscilador anarmónico

El potencial $V(r)$ y el oscilador enunciado, es un modelo que estudia el efecto Aharonov-Bohm y la cuantización de Landau, siendo así $V(r)$ igual a un valor cuadrático multiplicado por un constante más un término de $\frac{b}{r^2}$, cuyo valor es igual a $V(r) = ar^2 + \frac{b}{r^2}$. La dinámica en este caso es para $E \neq \pm M$ donde el límite $S=V$ con espín superior igual a la forma en que su solución describe el valor

$$\Psi_1 = \sum_m f_m(r) e^{im\theta}. \quad (11.28)$$

Por lo que su solución de movimiento radial, resulta ser igual a:

$$\frac{d^2 f_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_m(r)}{dr} - \frac{v^2}{r^2} f_m(r) + \Lambda_{\pm} f_m(r) - \eta^2 r^2 f_m(r) = 0, \quad (11.29)$$

en donde los procedimientos del apéndice C nos lleva a una ecuación diferencial de la forma en que su solución depende de la ecuación diferencial de Laguerre

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df_m(x)}{dx} - \frac{\nu^2}{4x^2} f_m(x) + \frac{1}{4x} (\Lambda_{\pm} - \eta^2 x) f_m(x) = 0. \quad (11.30)$$

Con ello la solución resulta ser de la forma siguiente:

$$f_m(x) = e^{-\frac{1}{2}\eta x} x^{\frac{\nu}{2}} y(x). \quad (11.31)$$

Cuya ecuación diferencial resulta de introducir la ecuación (11.31) en la ecuación (11.30),

$$xy''(x) + [\nu + 1 - \eta x] y'(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{\pm}}{2} - \eta(\nu + 1) \right] y(x) = 0, \quad (11.32)$$

siendo ν , Λ_{\pm} y η , cada uno de los valores que contiene la energía, la frecuencia angular y el momento angular orbital

$$\nu = \sqrt{m^2 + \frac{2b(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}, \quad (11.33)$$

$$\Lambda_{\pm} = \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{eB_0}{\hbar c} (m \pm 1), \quad (11.34)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2} + \frac{2a(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}, \quad (11.35)$$

donde k es igual a uno de los índices del polinomio de Laguerre

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{\pm}}{2} - \eta(\nu + 1) \right), \quad (11.36)$$

y con los mismos procedimientos de la sección 11.3.1 se llega al valor de energía de un sistema bidimensional

$$\Lambda_{\pm} = \frac{2}{\hbar c} \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E + Mc^2)(2k + 1 + \nu)}, \quad (11.37)$$

y con ello, a los niveles de energía con espinor superior en la simetría $S = V$; se escribe de la forma siguiente:

$$E^2 - M^2 c^4 = 2\hbar c \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E + Mc^2)} \left(2k + 1 + \sqrt{m^2 + \frac{2b(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}} \right) - \hbar e B_0 c (m \pm 1). \quad (11.38)$$

Si $\hbar = 1$ y $c = 1$, se obtiene un caso similar al nivel de energía [69], con la diferencia de que el sistema es un caso de vector potencial magnético simétrico, contrario al efecto de Aharanov-Bohm

$$E^2 - M^2 = 2\sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E + M)} \left(2k + 1 + \sqrt{m^2 + 2b(E + M)} \right) - eB_0(m \pm 1). \quad (11.39)$$

Estos niveles de energía con $\hbar = 1$ y $c = 1$, en $S = V$ tienen como ilustración la siguiente figura, cuyos valores están en función del campo magnético B_0 y las proyecciones del espín.

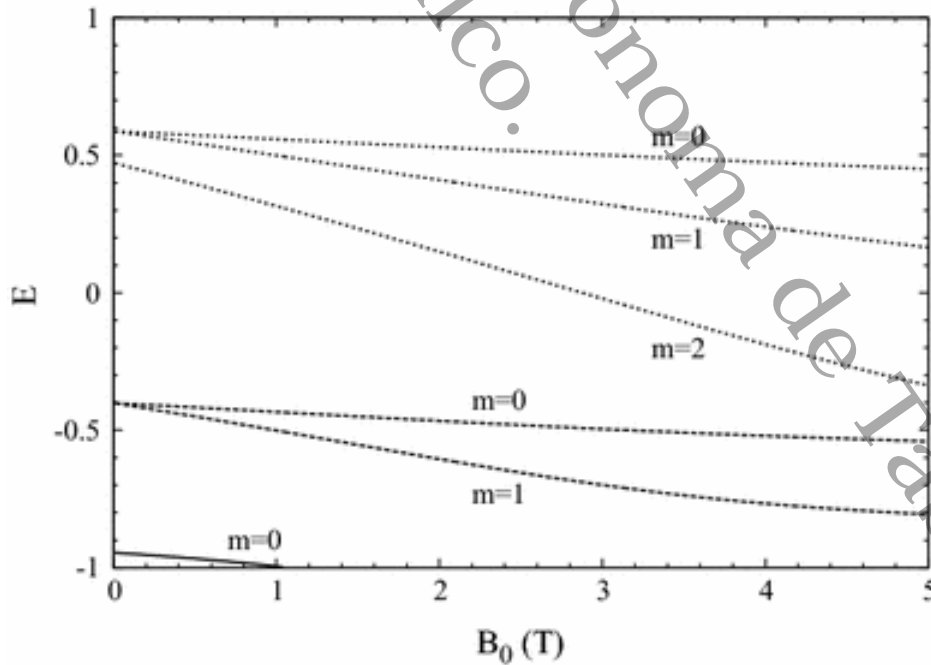


Figura 11.1: Diferentes valores de m en los diferentes valores de energía E , de la ecuación (11.39) [69].

En la figura 11.1 con $s = 1$, la partícula se mueve en un presencia de un campo magnético con el efecto Aharonov-Bohm [73]. Su descripción esta dada por la ecuación [69],

$$E^2 - M^2 = 2\sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E + M)} \left(2k + 1 \pm \sqrt{(m - e\phi)^2 + 2b(E + M)} \right) - eB_0(m \pm 1) + e^2 B_0 \phi. \quad (11.40)$$

En este caso es diferente a la ecuación (11.38), por la introducción del parámetro de flujo ϕ , por ello se usan \pm para el caso de la suma de los números cuánticos en los niveles de Landau. La función de onda correspondiente a la solución con relación a la ecuación (11.32), es escrita en términos de los polinomios de Laguerre [74],

$$F_{n,\eta}(r) = D_n \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{2a(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}} \left[\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{2a(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} \right]^{\frac{1}{4} \sqrt{m^2 + \frac{2b(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}} r^{\sqrt{m^2 + \frac{2b(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{2a(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2}} r^2} L_{(k+\eta)}^\eta(\eta^2 r^2). \quad (11.41)$$

Siendo D_n la constante de normalización y k el valor del indice radial que contiene el número cuántico n y ν del oscilador armónico bidimensional.

11.4. Límite exacto de Simetría S=-V

Para este caso, el componente descendente del espinor en la ecuación es la operación en suma del valor semientero positivo

$$g_m = \sum_m g_m(r) e^{i(m+1)\theta}, \quad (11.42)$$

cuya solución en los valores de energía son sumados por las direcciones del espín en cuyo caso se acopla a las mismas direcciones de la componente \hat{S}_z

$$E^2 - M^2 c^4 = 2\hbar c \left(2k + 1 + \sqrt{(m + 1)^2 + \frac{2b(E - Mc^2)}{\hbar^2 c^2}} \right) - \hbar c e B_0 (m + 1 \pm 1), \quad (11.43)$$

donde

$$I = \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4} + 2a(E - Mc^2)}. \quad (11.44)$$

Con los acoplamientos escalares y vectoriales, su dependencia en la intensidad del campo magnético y la influencia del caso relativista, tiene un acoplamiento de carga gracias a los acoplamientos vectoriales, la solución presenta una solución exacta de la ecuación de Dirac con masa dependientes de la posición en el campo de Coulomb, así como la división exacta de la órbita de espín, como también en sus casos con $S = V$ y $S = -V$, en la simetría de pseudoespín en el espectro de núcleos [75].

11.4.1. Función de onda $S = -V$

Se ha visto que la solución de la ecuación sin potenciales escalares ha servido para estudiar diferentes aplicaciones, gracias al desarrollo matemático del sistema y a los procedimientos de los apéndices. La información del oscilador relativista que incluye los acoplamientos escalares y vectoriales, como sucede en las ecuaciones (11.11) y (11.12), se observan en la función de onda

$$F_{n,\Theta}(r) = A_n \Theta \left[\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{2a(E - Mc^2)}{\hbar^2 c^2} \right]^{\frac{1}{4} \sqrt{(m+1)^2 + \frac{2b(E - Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}} r^{\sqrt{(m+1)^2 + \frac{2b(E - Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}} e^{-\frac{\Theta}{2} r^2} L_{(k+\Theta)}^{\Theta}(\Theta^2 r^2), \quad (11.45)$$

donde

$$\Theta = \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} + \frac{2a(E - Mc^2)}{\hbar^2 c^2}}. \quad (11.46)$$

Cabe señalar que las soluciones dependen de la parte radial como se ha estudiado en la dinámica de los acoplamientos mencionados. En este sentido, la ecuación de Dirac resuelve la forma cuadrática involucrando la corrección del elemento de giro en los acoplamientos de las cargas y la evolución en la simetría de norma, estudiando así, los límites de simetría y pseudoespín. Las soluciones analíticas son las funciones de onda, como también, la evolución de cada uno de los valores de energía, que introducen correcciones en los estados en su valor k , del índice radial, conteniendo el número cuántico n y Θ , del oscilador armónico bidimensional.

11.5. Interacción de dos electrones en un campo magnético uniforme en un potencial parabólico con la dinámica de la ecuación de Schrödinger-Pauli

Se estudia la ecuación bidimensional de dos electrones en un campo magnético uniforme, confinado al potencial parabólico. El marco matemático se basa en la solución rigurosa de 3 términos de recursividad, por lo que la solución, es una solución para la ecuación diferencial de Heun [76]. De acuerdo a la referencia [77], esto sucede cuando está presente la fuerza de repulsión de Coulomb, por lo que, cada solución analítica de la ecuación de BHE se reduce a la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre. En este sentido, se resuelve un sistema de dos electrones con el potencial parabólico externo, dado por:

$$H = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}(\vec{r}_j) + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_j) \right) \right]^2 + U(|\vec{r}_j|) \right\} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (11.47)$$

siendo $U(|\vec{r}_j|) = \frac{1}{2} m \omega^2 r_j^2$ el potencial de confinamiento de la partícula y $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ las coordenadas relativas, junto con las coordenadas del centro de masa $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$, se puede desacoplar como la suma de dos Hamiltonianos en donde una sola partícula esta presente, uno con masa $M = 2m_0$ y carga $Q = 2e$ y otro con masa $M = \frac{m_0}{2}$ y carga $q = \frac{e}{2}$ [77]. El primer Hamiltoniano representa el movimiento del centro de masa $H_{2D}(M, \omega)$, cuyo oscilador es un oscilador armónico isotrópico, en cuanto al segundo Hamiltoniano es un Hamiltoniano relativo $H_{2D}(\mu, \omega)$, cuya ecuación de valor propio se estudia en coordenadas cilíndricas

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Phi_{\pm} + \frac{eB_0}{2\mu c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Phi_{\pm} + \frac{1}{2} \omega'^2 \mu^2 r^2 \Phi_{\pm} + \frac{e^2}{r} \Phi_{\pm} = E_{\pm} \Phi_{\pm}, \quad (11.48)$$

donde $\omega' = \sqrt{\omega_d^2 + \omega^2}$ y $\omega_d = \frac{eB_0}{2\mu c}$ y con $\Phi_{\pm}(r, \theta) = e^{im\theta} R_{\pm}(r)$, se obtiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2 R_{\pm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{\pm}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_{\pm}(r) \right] + \frac{eB_0 \hbar}{2\mu c} [m \pm 1] R_{\pm}(r) + \frac{1}{2} \omega'^2 \mu^2 r^2 R_{\pm}(r) + \frac{e^2}{r} R_{\pm}(r) = E_{\pm} R_{\pm}(r). \quad (11.49)$$

Haciendo el cambio de variable $\rho = \sqrt{\frac{\mu \omega'}{\hbar}} r$, la ecuación se reduce a la ecuación de movimiento relativa

$$\frac{d^2 R_{\pm}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_{\pm}}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} R_{\pm} + (\lambda_{\pm} - \rho^2) R_{\pm} - \frac{u}{\rho} R_{\pm} = 0, \quad (11.50)$$

siendo $u = \frac{2e^2}{\hbar\omega'} \sqrt{\frac{\mu\omega'}{\hbar}}$ y $\lambda_{\pm} = \frac{2}{\hbar\omega'} \left[E_{\pm} - \frac{eB_0\hbar}{2\mu c} (m \pm 1) \right]$. El desarrollo asintótico sugiere una solución de la forma $R_{\pm}(\rho) = \rho^{|m|} e^{-\frac{\rho^2}{2}} F_{\pm}(\rho)$ cuya solución satisface la ecuación diferencial

$$\rho F_{\pm}'' + (a - 2\rho^2) F_{\pm}' + (d\rho - u) F_{\pm} = 0, \quad (11.51)$$

en el cual, $a = 2|m| + 1$ y $d = \lambda_{\pm} - 2(|m| + 1)$. La ecuación diferencial (11.51) es llamada ecuación de Heun biconfluente [76]. La solución de la ecuación (11.51) se obtiene a partir de la expansión

$$F_{\pm}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \rho^k, \quad (11.52)$$

cuya ecuación satisface la relación de recurrencia de tres términos:

$$(k+2)(k+1+a)A_{k+2} = uA_{k+1} - (d-2k)A_k. \quad (11.53)$$

Esta se convierte en un polinomio si las condiciones $A_{n+1} = 0$ y $d = 2n$ se cumplen simultáneamente. Con ello se tiene

$$\lambda_{\pm} = 2(|m| + n + 1), \quad (11.54)$$

y con $\lambda_{\pm} = \frac{2}{\hbar\omega'} \left[E_{\pm} - \frac{eB_0\hbar}{2\mu c} (m \pm 1) \right]$ se obtiene:

$$E_{\pm} = \hbar\omega' (|m| + n + 1) + \hbar\omega_d (m \pm 1), \quad (11.55)$$

donde la solución que satisface la ecuación (11.55) con el valor de energía $n = 1$ es

$$F_{1|m|\pm} = 1 + \frac{\frac{2e^2}{\hbar\omega'} \sqrt{\frac{\mu\omega'}{\hbar}}}{2|m| + 1}, \quad (11.56)$$

mientras que si $d = 4n$, se obtienen los niveles

$$E_{\pm} = \hbar\omega' (|m| + 2n + 1) + \hbar\omega_d (m \pm 1). \quad (11.57)$$

Al tomar en cuenta que no hay interacción de fuerza de repulsión de Coulomb, entonces, la solución depende de los polinomios de Laguerre, de la forma siguiente:

$$F_{n,|m|}(r, \theta) = C_n \kappa (\kappa r)^{|m|} L^{|m|}_{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)} (\kappa^2 r^2) e^{-\kappa^2 \frac{r^2}{2}} e^{im\theta}, \quad (11.58)$$

donde

$$G_n = (-1)^{\left(\frac{n-|m|}{2} + |m|\right)} \sqrt{\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left[\left(|m| + \frac{n-|m|}{2}\right)!\right]^3}}, \quad (11.59)$$

donde $\kappa = \sqrt{\frac{\mu\omega'}{\hbar}}$. La función de onda de dos electrones sin la fuerza de repulsión de Coulomb se escribe

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \Psi(R, \gamma) \Psi(r, \theta). \quad (11.60)$$

Mientras que la construcción explícita de dos electrones con fuerza de Coulomb, en un campo magnético uniforme, nos lleva a soluciones de los polinomios de Heun, pudiéndose extender para el caso de muchos electrones.

11.6. Direcciones relativistas en el enfoque de estructura antiparalela al campo magnético

En relación al capítulo 10, los resultados de esta sección son enfocados solamente a la solución con espín hacia abajo, cumpliendo así con lo obtenido en el capítulo 10, pero con resultados diferentes en el número cuántico m , notándose no solo la diferencia de direcciones de corrientes, sino también en los valores propios de niveles de energía. Ante todo, considere las siguientes solución cuyo valor radica en el sentido contrario en el conjunto completo de la solución radial en el polinomio de Laguerre

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(\bar{\rho}) e^{im\theta} \\ R_2(\bar{\rho}) e^{i(m-1)\theta} \end{pmatrix}, \quad (11.61)$$

cuya ecuación diferencial toma la forma siguiente:

$$\left[\frac{d^2}{d\bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{d\bar{\rho}} - \frac{B_0 e}{\hbar c} (m) - \frac{B_0^2 e^2 \bar{\rho}^2}{4\hbar^2 c^2} - \frac{(m-1)^2}{\bar{\rho}^2} + \frac{(E^2 - m_0^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} \right] R_1 = 0, \quad (11.62)$$

tomando el hecho de que M contiene el número cuántico m , se define que $M = m - 1$, de tal forma que la ecuación diferencial se escribe de la forma siguiente:

$$\left[\frac{d^2}{d\bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{d\bar{\rho}} + (\lambda_- - \alpha^2 \bar{\rho}^2) - \frac{M^2}{\bar{\rho}^2} \right] R_1 = 0, \quad (11.63)$$

donde $\lambda_- = \frac{(E_-^2 - m_0^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - \frac{B_0 e}{\hbar c} (M + 1)$ y $\alpha = \frac{B_0 e}{2\hbar c}$; cuya forma de la solución esta presente en relación al valor $e^{iM\theta}$, siendo la forma de la estructura, cuyos espinores contienen el número cuántico magnético m en relación al giro del momento angular orbital

$$\begin{aligned} \Psi_{1\uparrow} = & \Delta_- \left(\bar{\rho}^{|M|} L_{\Omega_-}^{|M|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & + \Delta_- \left(\sqrt{2} i e^{i\theta} \bar{\rho}^{|M|+1} L_{\Omega_-}^{|M|+1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (11.64)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1\downarrow} = & \Delta_- \left(\bar{\rho}^{|M|} L_{\Omega_-}^{|M|}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 c^2 + E_- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ & - \Delta_- \left(\sqrt{2} (\Omega_- + |M|) i e^{-i\theta} \bar{\rho}^{|M|-1} L_{\Omega_-}^{|M|-1}(\bar{\rho}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}} \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (11.65)$$

El índice del polinomio de Laguerre contiene el valor numérico de $|M|$ y M en los que la suma de valores de energía provoca una resta debido al contenido de M , esto al parecer por el movimiento en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir que Ω_- es una resta de la energía cuadrática en su suma total

$$\Omega_- = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{E_-^2 - m_0^2 c^4}{2\hbar^2 c^2} \right] - \frac{(M + |M| + 2)}{2}, \quad (11.66)$$

siendo la energía la suma total en relación a la parte contenida radial que contiene el cambio de variable y su valor en relación a la parte angular θ . También, se observa un

$\Delta_- = e^{-\frac{\bar{\rho}^2}{2}} e^{iM\theta}$, que contiene la solución exponencial radial

$$E_-^2 - m_0^2 c^4 = \hbar c e B_0 (2k + |M| + M + 2), \quad (11.67)$$

ahora, en el caso de que $|M| < 0$, se obtiene como resultado que la energía es

$$E_-^2 - m_0^2 c^4 = \hbar c e B_0 (n - |m| + 2). \quad (11.68)$$

Esto debido a que k , contiene el número cuántico $\frac{n-|m|}{2}$ y la relación en $|M|$ se ve simplificada, también en las divisiones de los valores propios en el ajuste antiparalelo al campo magnético [78].

11.7. Dos anyones en un campo magnético uniforme con proyecciones semienteros

Considere dos anyones idénticos no relativistas con espín semientero, con carga $-e$ y masa μ , la partícula se mueve en un espacio de bidimensional $x - y$ bajo la influencia del campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. El campo provoca un movimiento perpendicular en relación al plano bidimensional en donde la transición del espectro se encuentra dado por los niveles de Landau. El efecto bosón a fermión aparece tanto en ausencia, como en presencia de la repulsión de Coulomb, siendo esta nueva estadística, la estadística fraccionaria [79]. Un hecho interesante es cuando los anyones se intercambian entre sí, apareciendo una fase que se denota por θ

$$\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = e^{i\theta} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (11.69)$$

Si $\theta = 0$ las partículas son bosones y si $\theta = \pi$ las partículas son fermiones. Para estudiar la interpolación entre los anyones, suponga la ausencia de la repulsión de Coulomb. Por lo que el Hamiltoniano de los anyones sin esta interacción se escribe en la forma siguiente:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}_1 + \frac{e}{c} \vec{A}_1 \right) \right]^2 + \frac{1}{2\mu} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}_2 + \frac{e}{c} \vec{A}_2 \right) \right]^2. \quad (11.70)$$

Al separar el Hamiltoniano para los casos de la posición del centro de masa \vec{R} y la posición relativa \vec{r} dadas por:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (11.71)$$

el Hamiltoniano se separa con respecto al movimiento relativo y al movimiento del centro de masa, por lo que habrán dos tipos de niveles de energía y dos tipos de funciones de onda:

$$\hat{H} = \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{rel} = \frac{1}{4\mu} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}_{cm} + \frac{2e}{c} \vec{A}_{cm} \right) \right]^2 + \frac{1}{\mu} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}_{rel} + \frac{e}{2c} \vec{A}_{rel} \right) \right]^2. \quad (11.72)$$

Esto quiere decir, que el vector potencial magnético es el resultado de ambas separaciones

$$\vec{A}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{R}), \quad \vec{A}_{rel} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}), \quad (11.73)$$

donde la masa es igual a $\mu_R = 2\mu$, junto con carga $q_R = -2e$ y la masa relativa es igual $\mu_r = \frac{1}{2}\mu$, junto con la carga $q_r = -\frac{1}{2}e$, ambos resultados proporcionan resultados donde la suma y producto son las funciones de onda en información de ambas trayectorias [80],

$$(\hat{H}_{cm} + \hat{H}_{rel})\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E\Psi(\vec{R}, \vec{r}). \quad (11.74)$$

Por lo que su descripción en coordenadas radiales y angulares, son descritas en la forma siguiente:

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \Psi(R, \gamma)\Psi(r, \phi), \quad E_R + E_r = E. \quad (11.75)$$

De acuerdo a lo resuelto por los capítulos 2, 7 y 8, se obtiene para \hat{H}_{cm}

$$\lambda_{\pm R} = \frac{2m_0}{\hbar^2}(E_{\pm R} - E_z) - \frac{2eB_0}{\hbar c}(m \pm 1), \quad (11.76)$$

$$\lambda_{\pm R} = \frac{2eB_0}{\hbar c}(2k_R + |m| + 1). \quad (11.77)$$

Igualando la ecuación (11.76) y (11.77) y despejando $(E_{\pm R} - E_z)$ para los valores de energía, se obtiene la suma de sus valores en relación a la separación de los valores semienteros, ambos valores del momento angular orbital, escrito como $\frac{\hbar e B_0}{m_0 c}$, tanto en la forma de la frecuencia angular, como también sin ella

$$E_{\pm R} - E_z = \frac{\hbar e B_0}{m_0 c}(2k_R + |m| + m + 1 \pm 1), \quad (11.78)$$

$$E_{\pm R} - E_z = \frac{1}{2}\hbar\omega(2k_R + |m| + m + 1 \pm 1). \quad (11.79)$$

Siendo la ecuación de movimiento radial la que posee la información en relación a su solución con respecto a la función de onda

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \right) \rho_{\pm R}(R) + (\lambda_{\pm R} - \alpha_R^2 R^2) \rho_{\pm R}(R) - \frac{m^2}{R^2} \rho_{\pm R}(R) = 0, \quad (11.80)$$

siendo $\alpha_R = \frac{eB_0}{\hbar c}$ la longitud magnética y la función de onda $\Psi_{\pm}(R, \gamma)$ que se escribe en la forma de su solución de la ecuación diferencial (11.63)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} \right) \rho_{\pm R}(R) + (\lambda_R - R^2) \rho_{\pm R}(R) - \frac{m^2}{R^2} \rho_{\pm R}(R) = 0, \quad (11.81)$$

la función de onda se escribe en la forma siguiente:

$$\Psi(R, \gamma) = C_R \eta_R (\eta_R R)^{|m|} L_{\left(\frac{n_R - |m|}{2} + |m|\right)}^{|m|} (\eta_R^2 R^2) e^{-\frac{\eta_R^2 R^2}{2}} e^{im\gamma}, \quad (11.82)$$

siendo $\eta_R = \sqrt{\frac{eB_0}{\hbar c}}$, la longitud del oscilador armónico y C_R , la constante de normalización

$$C_R = (-1)^{\left(\frac{n_R - |m|}{2} + |m|\right)} \sqrt{\frac{\left(\frac{n_R - |m|}{2}\right)!}{\pi \left[\left(|m| + \frac{n_R - |m|}{2}\right)! \right]^3}}. \quad (11.83)$$

Con la ecuación (11.79), se obtiene el nivel de energía en separaciones de las direcciones del espín $\frac{1}{2}$ en $k_R = \frac{1}{2}(n_R - |m|)$

$$E_{\pm R} - E_z = \frac{1}{2} \hbar \omega (n_R + m + 1 \pm 1). \quad (11.84)$$

11.7.1. Caso relativo

De acuerdo a las ecuaciones (11.76) y (11.81), el Hamiltoniano relativo y la información contenida por $\lambda_{\pm r}$ se escribe en la forma siguiente:

$$\hat{H}_{rel} = \frac{1}{2\mu_r} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P}_{rel} - \frac{q_r}{c} \vec{A}_{rel} \right) \right]^2, \quad (11.85)$$

$$\lambda_{\pm r} = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm r} - E_z) - \frac{eB_0}{2\hbar c} (m \pm 1). \quad (11.86)$$

Siguiendo los pasos de la sección 4.4, el otro valor de $\lambda_{\pm r}$, es el valor de la longitud magnética multiplicado por el nivel de energía bidimensional

$$\lambda_{\pm r} = 2\alpha_r(2k_r + |m| + 1), \quad (11.87)$$

siendo $\alpha_r = \frac{eB_0}{4\hbar c}$, el valor de la longitud magnética relativo al movimiento del electrón. La igualdad de ambas ecuaciones (11.78) y (11.88) permite escribir la energía como la suma de la interacción bidimensional junto con las separaciones del espín semientero en las direcciones axiales

$$E_{\pm r} - E_z = \frac{\hbar e B_0}{4m_0 c} (2k_r + |m| + m + 1 \pm 1), \quad (11.88)$$

Con $m_0 = \mu_r = \frac{1}{2}\mu$, los valores de energía son semejantes a la ecuación (11.79)

$$E_{\pm r} - E_z = \frac{\hbar\omega}{2} (2k_r + |m| + m + 1 \pm 1). \quad (11.89)$$

La ecuación de movimiento radial tiene la misma forma que la ecuación (11.80)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \rho_{\pm r}(r) + (\lambda_{\pm r} - \alpha_r^2 r^2) \rho_{\pm r}(r) - \frac{m^2}{r^2} \rho_{\pm r}(r) = 0. \quad (11.90)$$

Cuya forma de la función de onda $\Psi(r, \phi)$ queda en términos de los polinomio de Laguerre

$$\Psi(r, \phi) = C_r \eta_r (\eta_r r)^{|m|} L_{\left(\frac{n_r - |m|}{2} + |m|\right)}^{|m|} (\eta_r^2 r^2) e^{-\frac{\eta_r^2 r^2}{2}} e^{im\phi}, \quad (11.91)$$

siendo C_r , la constante de normalización y $\eta_r = \sqrt{\frac{eB_0}{4\hbar c}}$, la longitud del oscilador armónico

$$C_r = (-1)^{\left(\frac{n_r - |m|}{2} + |m|\right)} \sqrt{\frac{\left(\frac{n_r - |m|}{2}\right)!}{\pi \left[\left(|m| + \frac{n_r - |m|}{2}\right)! \right]^3}}. \quad (11.92)$$

Con la ecuación (11.89) el valor de k_r permite escribir los niveles de energía en la forma siguiente:

$$E_{\pm r} - E_z = \frac{1}{2} \hbar\omega (n_r + m + 1 \pm 1). \quad (11.93)$$

Por lo tanto, la función de onda de dos partículas que están sometidas a un campo magnético uniforme, es la multiplicación del movimiento relativo por el movimiento en el centro de masa; que se escribe en la forma siguiente:

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \left(C_R \eta_R (\eta_R R)^{|m|} L_{\left(\frac{n_R - |m|}{2} + |m|\right)}^{(|m|)} (\eta_R^2 R^2) e^{-\frac{\eta_R^2 R^2}{2}} e^{im\gamma} \right) \left(C_r \eta_r (\eta_r r)^{|m|} L_{\left(\frac{n_r - |m|}{2} + |m|\right)}^{(|m|)} (\eta_r^2 r^2) e^{-\frac{\eta_r^2 r^2}{2}} e^{im\phi} \right). \quad (11.94)$$

Mientras que los niveles de energía es la suma de la ecuación (11.79) y (11.89),

$$E_{\pm R} + E_{\pm r} = \frac{1}{2} \hbar \omega (n_R + m + 1 \pm 1) + \frac{1}{2} \hbar \omega (n_r + m + 1 \pm 1), \quad n_R, n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.95)$$

note que los valores de $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, para el número cuántico azimutal m , se obtienen por la relación siguiente:

$$m = \frac{\theta}{\pi} + 2j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.96)$$

Por lo tanto, el nivel de energía relativa en términos de los números cuánticos para $j \geq 1$, se convierte en la suma del número cuántico principal más el número cuántico fraccionario [79],

$$\frac{2E_{\pm r}}{\hbar \omega} = n_r + 2j + \frac{\theta}{\pi} + 1 \pm 1, \quad (11.97)$$

de acuerdo a la ecuación (11.97), se tienen bosones con $\theta = 0$ y fermiones con $\theta = \pi$, todos estos espectros están infinitamente degenerados y el intercambio que existe entre cada uno de ellos en el transporte de dos electrones, tienen estados comunes infinitamente degenerados para cada valor de θ [79, 81].

11.7.2. Repulsión de Coulomb

La ecuación de movimiento radial con repulsión de coulomb, en la simetría cilíndrica, tiene la forma de la solución que es independiente de la forma diferencial de Laguerre

$$\frac{d^2 v_{\pm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{\pm}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} v_{\pm} - \frac{eB_0}{2\hbar c} (m \pm 1) v_{\pm} - \frac{e^2 B_0^2}{16\hbar^2 c^2} r^2 v_{\pm} - \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 r} v_{\pm} = -\frac{2\mu_r}{\hbar^2} (E_{\pm r} - E_z) v_{\pm}. \quad (11.98)$$

Al hacer el cambio de variable $\rho = \sqrt{\alpha_r} r$, se obtiene como solución una forma en la que puede ser simplificada

$$\frac{d^2 v_{\pm}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv_{\pm}}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} v_{\pm} - 2(m \pm 1) v_{\pm} - \rho^2 v_{\pm} - \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 \alpha_r^{\frac{1}{2}} \rho} v_{\pm} = -\frac{2\mu_r}{\alpha_r \hbar^2} (E_{\pm r} - E_z) v_{\pm}. \quad (11.99)$$

Definiendo $\lambda_{\pm} = \frac{2\mu_r}{\alpha_r \hbar^2} (E_{\pm r} - E_z) - 2(m \pm 1)$ y $u = \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 \alpha_r^{\frac{1}{2}}}$, como la ecuación que se simplifica a través del cambio de variable, se obtiene la ecuación diferencial en la forma siguiente:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \rho^2 - \frac{u}{\rho} + \lambda_{\pm} \right) v_{\pm} = 0. \quad (11.100)$$

El desarrollo asintótico sugiere una solución de la forma $v_{\pm} = \rho^{|m|} e^{-\frac{\rho^2}{2}} F_{\pm}(\rho)$, cuya solución satisface la ecuación diferencial

$$\rho F_{\pm}'' + (a - 2\rho^2) F_{\pm}' + (d\rho - u) F_{\pm} = 0, \quad (11.101)$$

en el cual, $a = 2|m| + 1$ y $d = \lambda_{\pm} - 2(|m| + 1)$. Cuando $F = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \rho^k$, posee una solución de la forma en que depende de los tres términos de relación de recurrencia [79],

$$A_{k+2} = \frac{b}{(k+2)(k+a+1)} A_{k+1} - \frac{d-2k}{(k+2)(k+a+1)} A_k, \quad (11.102)$$

Con los coeficientes A_k de la tabla 11.3 se tienen los valores de k incluidos hasta $k = 4$, cuyos valores son los mismos encontrados por los símbolos de Pochhammer a_k [82]. La solución determina un valor finito de k por lo que se debe de cumplir dos condiciones

$$d = 2n, \quad A_{n_r+1} = 0, \quad (11.103)$$

de acuerdo a ello, se obtiene el nivel de energía de un oscilador armónico con repulsión de Coulomb en el movimiento relativo

$$E_{\pm r} = \frac{1}{2} \hbar \omega (n_r + |m| + m + 1 \pm 1). \quad (11.104)$$

A_k	Resultados
A_1	$1!a_1A_1 = u$
A_2	$2!a_2A_2 = u^2 - ad$
A_3	$3!a_3A_3 = u [u^2 - ad - 2(a+1)(d-2)]$
A_4	$4!a_4A_4 = u^4 - u^2 [ad + 2(a+1)(d-2) + 3(a+2)(d-4)] + 3ad(a+2)(d-4)$

 Tabla 11.3: Coeficientes de A_k hasta $k = 4$.

La frecuencia sigue siendo $\omega = \frac{eB_0}{\mu c}$, al igual que en los casos de los Hamiltonianos anteriores con las condiciones de un valor finito en k que cumple con $\frac{n_r}{2}$ para n_r par y $\frac{n_r-1}{2}$ para n_r impar, en términos de $x = u^2$. Recordemos que $u = \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 \alpha_r^{\frac{1}{2}}}$, por lo tanto, para u^2 , se simplifica a $\hbar \omega$

$$\hbar \omega = 4\alpha^2 \mu c^2 g_m^{-1}, \quad (11.105)$$

donde g_m , es una función m del número cuántico y $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, es la constante de la estructura fina. Con ello la energía de la ecuación (11.104) se convierte en la forma en que su estructura de energía es multiplicada por el factor de estructura fina

$$E_{\pm n_r, m} = 2\alpha^2 \mu c^2 g_m^{-1} (n_r + |m| + m + 1 \pm 1), \quad n_r = 1, 2, \dots, \quad (11.106)$$

Los valores de n_r , se estudian para valores $n_r = 1, 2$. Iniciando con $n_r = 1$, la ecuación (11.103) se escribe como:

$$d = 2, \quad \lambda_{\pm} = 2(|m| + 2), \quad (11.107)$$

y con el valor de $\lambda_{\pm} = \frac{2\mu_r}{\alpha_r \hbar^2} (E_{\pm r} - E_z) - 2(m \pm 1)$, el valor de la energía se escribe de la forma:

$$E_{\pm 1, m} = \frac{1}{2} \hbar \omega (|m| + m + 2 \pm 1). \quad (11.108)$$

Con el valor de la tabla (11.3) para A_2 , el valor de $u^2 = ad$, siendo $a = 2|m| + 1$ y con $u^2 = \frac{4\alpha^2 \mu c^2}{\hbar \omega}$, se obtiene:

$$d = \frac{4\alpha^2\mu c^2}{\hbar\omega} \frac{1}{2|m|+1}, \quad (11.109)$$

y con el valor de $d = 2$; $\hbar\omega$ se convierte en el producto de $2\alpha^2\mu c^2$ por el valor de a ,

$$\hbar\omega = 2\alpha^2\mu c^2 \frac{1}{2|m|+1}. \quad (11.110)$$

Al sustituir la ecuación (11.110) en la ecuación (11.108), se obtienen ambos niveles tanto en dirección al campo magnético como también antiparalelo al campo magnético

$$E_{\pm 1,m} = \alpha^2\mu c^2 \frac{|m|+m+2 \pm 1}{1+2|m|}. \quad (11.111)$$

Son dos valores de energía uno para el espín hacia arriba y otro con dirección contraria

$$E_{+1,m} = \alpha^2\mu c^2 \frac{|m|+m+3}{1+2|m|}, \quad E_{-1,m} = \alpha^2\mu c^2 \frac{|m|+m+1}{1+2|m|}. \quad (11.112)$$

La solución que satisface la ecuación diferencial (11.101) en el valor $F_{\pm 1,m}$, tiene la forma de la solución en términos radiales como el caso contenido por el nivel de energía fraccionario

$$F_{\pm 1,m} = 1 + \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2(2|m|+1)} r. \quad (11.113)$$

Entonces, la parte de la función de onda sin normalizar es de la forma en que depende de la forma diferencial de Heun [76],

$$\Phi_{\pm}(r, \theta) = \eta_r^{|m|} r^{|m|} e^{-\frac{\eta_r^2 r^2}{2}} F_{\pm 1,m}(\eta_r r) e^{im\theta}, \quad (11.114)$$

donde η_r , es el mismo que el de la sección (11.7.1). Los valores de energía son expresados en términos del número cuántico azimutal m ,

$$m = \frac{\theta}{\pi} + 2j, \quad (11.115)$$

$$\begin{aligned} E_{+1,m} &= \alpha^2\mu c^2 \left[\frac{|\frac{\theta}{\pi} + 2j| + \frac{\theta}{\pi} + 2j + 3}{1 + 2|\frac{\theta}{\pi} + 2j|} \right] \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2\mu c^2 \left(1 + \frac{2j + \frac{\theta}{\pi} + \frac{5}{2}}{|2j + \frac{\theta}{\pi}| + \frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (11.116)$$

$$\begin{aligned}
 E_{-1,m} &= \alpha^2 \mu c^2 \left[\frac{|\frac{\theta}{\pi} + 2j| + \frac{\theta}{\pi} + 2j + 1}{1 + 2|\frac{\theta}{\pi} + 2j|} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \alpha^2 \mu c^2 \left(1 + \frac{2j + \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2}}{|2j + \frac{\theta}{\pi}| + \frac{1}{2}} \right). \quad (11.117)
 \end{aligned}$$

Los valores de energía y función de onda son los valores de $n_r = 1$, si el nivel aumenta a $n_r = 2$ entonces $d = 4$, y $E_{+2,m}$ y $E_{-2,m}$, se convierte en:

$$E_{+2,m} = \frac{1}{2} \hbar \omega (|m| + m + 4), \quad E_{-2,m} = \frac{1}{2} \hbar \omega (|m| + m + 2), \quad (11.118)$$

usando

$$u^2 = ad + 2(a+1)(d-2), \quad a = 2|m| + 1, \quad (11.119)$$

y no olvidando $u^2 = ad$, el valor de $\hbar \omega$ se encuentra como:

$$\hbar \omega = \alpha^2 \mu c^2 \frac{1}{3 + 4|m|}, \quad (11.120)$$

esto permite escribir

$$E_{+2,m} = \frac{\alpha^2 \mu c^2}{2} \left(\frac{4 + |m| + m}{3 + 4|m|} \right), \quad E_{-2,m} = \frac{\alpha^2 \mu c^2}{2} \left(\frac{2 + |m| + m}{3 + 4|m|} \right), \quad (11.121)$$

y con el número cuántico azimutal m , se obtiene:

$$E_{+2,m} = \frac{1}{8} \alpha^2 \mu c^2 \left(1 + \frac{2j + \frac{\theta}{\pi} + \frac{13}{4}}{|2j + \frac{\theta}{\pi}| + \frac{3}{4}} \right), \quad (11.122)$$

$$E_{-2,m} = \frac{1}{8} \alpha^2 \mu c^2 \left(1 + \frac{2j + \frac{\theta}{\pi} + \frac{5}{4}}{|2j + \frac{\theta}{\pi}| + \frac{3}{4}} \right). \quad (11.123)$$

La solución que satisface la ecuación diferencial (11.101) en el valor $F_{\pm 2,m}$, tiene la forma:

$$F_{\pm 2,m} = 1 + \frac{u}{a} \rho + \frac{u^2 - 4a}{2! a_{(2)}} \rho^2, \quad (11.124)$$

donde $a_{(2)}$ es el símbolo de Pochhammer del factorial ascendente [82],

$$a_{(2)} = a(a + 1). \quad (11.125)$$

De acuerdo al cambio de variable $\rho = \alpha_r^{\frac{1}{2}} r = \eta_r r$ y a los valores en los cuales se hace el cambio de variable

$$u = \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 \alpha_r^{\frac{1}{2}}}, \quad a = 2|m| + 1. \quad (11.126)$$

El valor $F_{\pm 2, m}$, se convierte en la solución que satisface la ecuación diferencial de Heun, de tal forma que su forma radial queda en término de la solución siguiente:

$$F_{\pm 2, m} = 1 + \frac{2\mu_r e^2}{\hbar^2 (2|m| + 1)} r + \frac{2\mu_r^2 e^4}{(2|m| + 1)(2|m| + 2)\hbar^4} r^2 - \frac{\eta_r^2 r^2}{|m| + 1}. \quad (11.127)$$

Por lo tanto, la función de onda no normalizada, contiene la información del electrón con repulsión de Coulomb, la cual queda de la forma en que la ecuación diferencial no depende de la solución de los polinomios de Laguerre, pero si de la información contenida en la forma radial y angular, tanto del número cuántico principal como del número cuántico angular

$$\Phi_{\pm}(r, \theta) = \eta_r^{|m|} r^{|m|} e^{-\frac{\eta_r^2 r^2}{2}} F_{\pm 2, m}(\eta_r r) e^{im\theta}. \quad (11.128)$$

11.7.3. Función de partición

La función de partición, es una función que determina las propiedades del sistema a partir de las funciones termodinámicas. Es importante debido a la información que proporciona del magnetismo, en el que las variables cuánticas se presentan a través de los números cuánticos. Es por ello, que a partir de su estructura obtenida por la información del sistema bidimensional no relativista, se obtiene la función de partición que valida su importancia en el estudio de la mecánica estadística cuántica

$$E = -\frac{\hbar e B_0}{2m_0 c} (m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c} |e||B_0| (|m| + 2k + 1). \quad (11.129)$$

Al considerar el sistema bidimensional no relativista sujeto a un campo magnético uniforme, la función de partición se escribe para este caso en términos de la suma del k contenido por $\left(\frac{n-|m|}{2}\right)$ y el número cuántico magnético, en el que por supuesto, el

número cuántico magnético no es despreciable como sucede en diferentes referencias [83],

$$Z = \sum_m \sum_k \exp(-\beta E_{m,k}). \quad (11.130)$$

El número cuántico m puede tomar valores en sentido a las manecillas del reloj y en sentido contrario a las manecillas del reloj. De esta forma, se conocen las probabilidades y energías en los diferentes valores del sentido radial de acuerdo a lo obtenido por los capítulos 7-10. Por supuesto, también la información del sistema termodinámico se obtiene de la forma siguiente:

$$Z = \sum_{m \geq 0} \sum_k \exp(-\beta E_{m,k}) + \sum_{m < 0} \sum_k \exp(-\beta E_{m,k}), \quad (11.131)$$

y de acuerdo a la referencia [84], se obtiene como resultado la siguiente función de partición a partir del cual se puede obtener el momento magnético medio de la magnetización del sistema

$$Z = \exp\left(\frac{\alpha_1}{2} \left(1 \pm 1 + \frac{n}{2}\right) \beta\right) \left(\frac{\sinh\left(\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right) \alpha_1 \beta\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_1}{2} \beta\right)} \right) \left(\frac{\exp\left(\frac{\alpha_1}{2} n \beta\right) \sinh\left(\left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha_1 \beta\right) + \frac{n}{2} \sinh\left(\alpha_1 \beta\right)}{\sinh\left(\alpha_1 \beta\right)} \right), \quad (11.132)$$

donde $\alpha_1 = -\frac{\hbar e B_0}{m_0 c}$ y β , es la cantidad que contiene la inversa de la temperatura. A partir de la función de partición se encuentra la entropía que expresa la incertidumbre del sistema, esta información es la transportada por el estado de cada nivel informativo de energía, en la que el nivel de información es más importante que la recibida y que tiene un nivel menos de incertidumbre, siendo la entropía denotada por S [85].

$$S = k_B \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad (11.133)$$

$$S = k_B \ln Z - \frac{k_B \beta \alpha_1}{2} D - \frac{k_B \beta \alpha_1}{2} G, \quad (11.134)$$

donde D y G , contienen los valores de los números cuánticos y la suma en relación a la parte de información cuántica y la temperatura inversa

$$D = \left[\left(1 \pm 1 + \frac{n}{2} \right) + 2 \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \alpha_1 \beta \right) \right) - \coth \left(\frac{\alpha_1 \beta}{2} \right) - 2 \coth (\alpha_1 \beta) \right], \quad (11.135)$$

$$G = \frac{\exp \left(\frac{\alpha_1}{2} n \beta \right) \left(2 \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \cosh \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha_1 \beta \right) + n \sinh \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha_1 \beta \right) \right) + n \cosh (\alpha_1 \beta)}{\exp \left(\frac{\alpha_1 n \beta}{2} \right) \sinh \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha_1 \beta \right) + \frac{n}{2} \sinh \left(\frac{\alpha_1 \beta}{2} \right)}, \quad (11.136)$$

siendo la función de partición que contiene la parte de la energía de Helmholtz F ,

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \quad (11.137)$$

Una consecuencia interesante en estos casos es que pueden ser extendido a casos relativistas y estudiarlo para cada punto ϕ , en las variables intrínsecas del electrón, en la operación del operador de rotación. Así como la presencia de quiralidad fraccional para cada punto ϕ , esto como se vio en los capítulos 8 y 10. El efecto de quiralidad es estudiado en la referencia [86], para conocer el comportamiento de las transiciones de fases cuánticas dentro de la estadísticas de Maxwell-Boltzman. Al igual que la magnetización en valores finitos de la temperatura. Aquí no es el caso, simplemente es mencionar los resultados de las cantidades termodinámicas a partir de la función de partición. Esto con los efecto de las transiciones de una cantidad a otra a partir de su derivación. El espectro del sistema es caracterizado por cada uno de los números cuánticos $n = 0, 1, 2, \dots$, y el número cuántico $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, donde son etiquetados por cada valor en k del índice radial del polinomio de Laguerre. Estos niveles son distintos para cada valor en n y k , de acuerdo a los valores elegidos por m . De la misma forma que cada efecto de las cantidades termodinámicas son diferentes. La susceptibilidad magnética se obtiene a partir de la ecuación (11.132), esto quiere decir que existe un nuevo resultado que es una cantidad de Curie $C_{nE} = \frac{N_0 \hbar^2 e^2 \beta}{2 m_0 c^2 K_B} \mu' \frac{n}{24} \frac{(n+2)}{(n+1)^2} [5n(n+2) + 8]$, mayor a la cantidad obtenida por Landau

$C_n = \frac{N_0 \hbar^2 e^2}{2 m_0 c^2 K_B} \mu' \frac{n}{24} (n+4)$, es decir, que la susceptibilidad magnética a partir de la función de partición del nivel de energía (11.129), aumenta conforme los niveles de energía crecen, esto se puede observar a partir de la susceptibilidad dada por [84], escrita de la forma en que contiene la corrección de Curie C_{nE} y la susceptibilidad χ_{nE} ,

$$\chi_{nE} = \frac{N_0 \hbar^2 e^2 \beta}{2 m_0 c^2} \mu' \frac{n}{24} \frac{(n+2)}{(n+1)^2} [5n(n+2) + 8] + \frac{N_0 \hbar^2 e^2 \beta}{2 m_0 c^2} \frac{n}{24} (n+4). \quad (11.138)$$

Capítulo 12

Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un estudio del transporte del electrón a través del espacio intrínseco. El hecho de estudiar el transporte, es para conocer el comportamiento interno del electrón llamado espín, así como los estados cuánticos en el que puede ser encontrado. Se estudió su solución radial y bidimensional en el que el mismo electrón presenta simetría 2D en su conservación total de momento angular, de acuerdo al conocimiento de haber explorado y determinado las condiciones del electrón sometido en un campo magnético uniforme. La manera en que se ha realizado ayuda a extender los resultados en efectos experimentales, como el efecto de Stern-Gerlach en la interacción radial. Así también, con el campo magnético en casos de dimensiones bidimensionales y tridimensionales. Por otro lado, este fue un primer intento, para estudiar el comportamiento tanto no relativista como relativista, usando como medida el operador de rotación del espín semientero, encontrando el comportamiento oscilatorio en el intercambio de partículas de espín semientero en niveles fraccionarios. Finalmente, note que los sistemas obtenidos en 2D y 3D son dimensiones equivalentes a un sistema de dos electrones interaccionando con el campo magnético uniforme, en el que la analogía del sistema explora el intercambio de lugares a través de su fase en el momento angular orbital, tomando en cuenta las soluciones del capítulo 2 para el sistema no relativista. Desde esta perspectiva, el estudio del transporte en niveles relativista cobra una mayor relevancia, porque el tiempo y el intercambio de lugares están en función del operador de rotación en el espacio interno del mismo electrón, definiendo su propio espacio en relevancia a lo que son los operadores de ascenso y de descenso en la aparición de partículas y antipartículas. Todo esto permite hacer un estudio donde se logra caracterizar la dinámica a través de las probabilidades y los valores medio, como es la energía cinética del electrón en el momento angular orbital. Así, se ha caracterizado el comportamiento en ambos planos de la mecánica cuántica en donde se restringe a conocer el giro propio del electrón en su soluciones

radiales. Esto por supuesto, es aplicable a la teoría de Cartan entre el efecto y sus dirección, de acuerdo al intercambio de las direcciones intrínsecas. Esto permite a futuro buscar otro tipo de caracterización en temas mas amplios como el caso de la mecánica cuántica estadística relativista. El modelo tiene muchas variables de estudios en que su extensión dependerá de las cantidades a tratar. Lo más importante es que, se tiene como soluciones efectos relacionados con la conservación total del momento angular que se puede estudiar para sistema relativista. Finalmente, construir funciones de partición para sistemas de más de dos electrones y conservar la información a partir de diferentes modelos facilitará la complementación eficiente de diferentes cantidades termodinámicas.

Apéndice A

El Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli

Para escribir la ecuación de Schrödinger-Pauli, el Hamiltoniano que se propone es el siguiente:

$$\hat{H} = \frac{[\vec{\sigma} \cdot (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})]^2}{2m_0}, \quad (\text{A.1})$$

donde \vec{A} es el vector potencial magnético que describe la interacción bidimensional y su relación con el oscilador armónico. Por lo tanto, la ecuación tiene la forma:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \quad (\text{A.2})$$

La dinámica total del sistema puede ser separado en dos soluciones que corresponden a los niveles de energía, para la energía en dirección paralela al campo magnético y la energía en contra del campo magnético que describe la interacción del espín semientero

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Desarrollando el término del Hamiltoniano (A.1) se puede notar que el término de interacción espín y momento angular orbital contiene la información en dirección al campo magnético axial

$$\left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 \Psi = \sigma_i \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i \right) \sigma_j \left(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j \right) \Psi \quad (\text{A.4})$$

$$= \sigma_i \sigma_j \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i \right) \left(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j \right) \Psi \quad (\text{A.5})$$

$$= (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j)\Psi, \quad (\text{A.6})$$

donde $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, por lo tanto;

$$\begin{aligned} & \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 \Psi = \delta_{ij}(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j)\Psi \\ & + i\epsilon_{ijk}\sigma_k(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j)\Psi = \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi + i\epsilon_{ijk}\sigma_k(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j)\Psi, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

de la ecuación (A.7) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} i\epsilon_{ijk}\sigma_k(\hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i)(\hat{p}_j - \frac{e}{c}A_j)\Psi &= i\sigma_k \left[(\hat{p} \times \hat{p})_k \Psi - \frac{e}{c}\epsilon_{ijk}(\hat{p}_i A_j \Psi) \right] \\ &- i\sigma_k \left[\frac{e}{c}\epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) - \frac{e}{c}\epsilon_{ijk}A_i(\hat{p}_j \Psi) + \frac{e^2}{c^2}(0)_k \Psi \right], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

de la expresión se observa que:

$$\epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) + \epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) = \epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) + \epsilon_{jik}A_j(\hat{p}_i \Psi), \quad (\text{A.9})$$

$$\epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) + \epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) = \epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) - \epsilon_{ijk}A_j(\hat{p}_i \Psi) = 0, \quad (\text{A.10})$$

sustituyendo estos resultados, se obtiene la transformación en relación a la ecuación de Schrödinger-Pauli

$$\begin{aligned} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 \Psi &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi + i\sigma_k \left[-\frac{e}{c}\epsilon_{ijk}(-i\hbar\partial_i A_j)\Psi \right] \\ &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi - \sigma_k \frac{e}{c}\hbar(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \Psi \\ &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\Psi = \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi - \frac{e\hbar}{c}\sigma_z B_0 \Psi, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

el primer término tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi &= \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \cdot \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \Psi \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \Psi + 2i\hbar \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \frac{e^2}{c^2} A^2 \Psi. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Se observa que el momento angular orbital es el resultado del producto punto con respecto al vector potencial magnético el cual depende de la dirección axial

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = \frac{iB_0}{2\hbar} \hat{L}_z. \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano del sistema tiene la forma siguiente:

$$\hat{H} = \frac{[\vec{\sigma} \cdot (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})]^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{eB_0}{2m_0c} \hat{L}_z + \frac{e^2}{2m_0c^2} A^2 - \frac{e\hbar}{2m_0c} \sigma_z B_0. \quad (\text{A.14})$$

El operador del espín se define como:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad (\text{A.15})$$

en particular, la componente z ahora depende de la interacción del Hamiltoniano

$$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z, \quad (\text{A.16})$$

usando esto, el Hamiltoniano se reescribe como sigue:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{eB_0}{2m_0c} \hat{L}_z + \frac{e^2}{2m_0c^2} A^2 - \frac{e\hbar}{2m_0c} \frac{2}{\hbar} \hat{s}_z B_0, \quad (\text{A.17})$$

esto es, igual a lo siguiente:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{eB_0}{2m_0c} \hat{L}_z + \frac{e^2}{2m_0c^2} A^2 - \frac{eB_0}{m_0c} \hat{s}_z. \quad (\text{A.18})$$

Por lo tanto, en el Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli se aprecia la suma de momentos angulares, cuya conservación es en la componente z

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{eB_0}{2m_0c} (\hat{L}_z + 2\hat{s}_z) + \frac{e^2}{2m_0c^2} A^2. \quad (\text{A.19})$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice B

Oscilador armónico bidimensional

La ecuación de Schrödinger para el oscilador de dos dimensiones tiene la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 (x^2 + y^2) \Psi = E \Psi. \quad (\text{B.1})$$

Para hacer que las coordenadas sean de magnitud adimensional, se realiza el siguiente cambio de variable

$$\xi = \sqrt{\nu} x, \quad (\text{B.2})$$

y

$$\eta = \sqrt{\nu} y, \quad (\text{B.3})$$

donde $\nu = \frac{m_0 \omega}{\hbar}$, de esta forma se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\nu} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (\text{B.5})$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - (\xi^2 + \eta^2) \Psi = -\frac{2E}{\hbar \omega} \Psi, \quad (\text{B.6})$$

se define $\gamma = \frac{2E}{\hbar \omega}$, por lo tanto, la ecuación toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + (\gamma - \xi^2 - \eta^2) \Psi = 0. \quad (\text{B.7})$$

Como siguiente paso, se escribirá en coordenadas polares

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad (\text{B.8})$$

la ecuación queda:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + (\gamma - r^2) \Psi = 0. \quad (\text{B.9})$$

Se aprecia que la variable θ es cíclica, por lo que la solución angular debe tener la forma $e^{im\theta}$. La solución de la ecuación tiene la forma:

$$\Psi(r, \theta) = e^{im\theta} g_m(r), \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d^2 g_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg_m(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} g_m(r) + (\gamma - r^2) g_m(r) = 0, \quad (\text{B.11})$$

se hace el cambio de variable

$$x = r^2, \quad (\text{B.12})$$

y se obtiene:

$$\frac{d^2 g_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dg_m(x)}{dx} - \frac{m^2}{4x^2} g_m(x) + \frac{1}{4x} (\gamma - x) g_m(x) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Para hallar una solución soluble por el método de series, es necesario hallar las soluciones para $x \gg 1$ y cuando x tendiendo aproximadamente a cero. Para el primer caso se tiene:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{4} f = 0, \quad (\text{B.14})$$

donde $f(x) \approx v_m(x)$, con $x \gg 1$, la solución de esta ecuación es:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{4} f, \quad f(x) = e^{\pm \frac{1}{2}x}, \quad (\text{B.15})$$

la solución con sentido físico es $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, puesto que permite que el comportamiento no sea divergente para $x \rightarrow \infty$, por otra parte, si $h(x)$ es el comportamiento de $g_m(x)$ cuando $x \approx 0$, entonces se tiene:

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dh}{dx} - \frac{m^2}{4x^2} h = 0. \quad (\text{B.16})$$

Se propone una serie de la forma siguiente:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (\text{B.17})$$

Derivando y sustituyendo se obtiene:

$$n = \pm \frac{|m|}{2}, \quad (\text{B.18})$$

las soluciones son del tipo siguiente:

$$h(x) = x^{\pm \frac{|m|}{2}}. \quad (\text{B.19})$$

Para evitar un comportamiento divergente en $x = 0$, se elige al signo positivo, por lo tanto $h(x) = x^{\frac{|m|}{2}}$. La solución de la ecuación diferencial original es de la forma:

$$g_m(x) = e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{|m|}{2}} y(x), \quad (\text{B.20})$$

donde la ecuación (B.20) satisface la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre

$$xy'' + (m+1-x)y' + ky = 0, \quad (\text{B.21})$$

siendo k el número del índice radial del polinomio de Laguerre

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2} - m - 1 \right). \quad (\text{B.22})$$

Recordando que $\gamma = \frac{2E}{\hbar\omega}$. También hay que considerar que m es el número cuántico magnético del momento angular orbital. Por lo tanto, el nivel de energía bidimensional, es el siguiente:

$$E_1 + E_2 = \hbar\omega \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.23})$$

con la suma de número cuántico principal en el comportamiento bidimensional $n = n_1 + n_2$.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Apéndice C

Espectro de energía para la ecuación de Schrödinger-Pauli

La ecuación de Schrödinger-Pauli escrita y desarrollada en coordenadas cilíndricas es de la forma siguiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_{\pm} - \frac{eB_0}{2m_0c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Psi_{\pm} + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0c^2} r^2 \Psi_{\pm} = E_{\pm} \Psi_{\pm}. \quad (\text{C.1})$$

Se observa que la partícula se mueve libremente en la dirección z , por lo que su energía se escribe de la forma siguiente:

$$E_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0}, \quad (\text{C.2})$$

usando esto, la ecuación se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Phi_{\pm} - \frac{eB_0}{2m_0c} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \hbar \right] \Phi_{\pm} + \frac{e^2 B_0^2}{8m_0c^2} r^2 \Phi_{\pm} = (E_{\pm} - E_z) \Phi_{\pm}, \quad (\text{C.3})$$

donde $\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_z z} \Phi_{\pm}(r, \theta)$, la coordenada θ es cíclica por lo cual $\Phi_{\pm}(r, \theta) = e^{im\theta} g_m(r)$. Ahora despejamos la ecuación (C.3), de la cual se obtiene:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Phi_{\pm} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) \Phi_{\pm} + \left(\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} \right) r^2 \Phi_{\pm} - \left(\frac{eB_0}{\hbar c} \right) \left[-i \frac{\partial}{\partial \theta} \pm 1 \right] \Phi_{\pm}, \quad (\text{C.4})$$

el número cuántico magnético, como la suma de momentos angulares en relación a la separación del espín semientero

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Phi_{\pm} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) \Phi_{\pm} + \left(\frac{e^2 B_0^2}{4c^2 \hbar^2} \right) r^2 \Phi_{\pm} - \left(\frac{e B_0}{\hbar c} \right) [m \pm 1] \Phi_{\pm}. \quad (\text{C.5})$$

Definiendo

$$\gamma'_{\pm} = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{\pm} - E_z) + \frac{e B_0}{\hbar c} (m \pm 1), \quad (\text{C.6})$$

y

$$\nu^2 = \frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2}. \quad (\text{C.7})$$

Ahora usando la ecuación para la coordenada θ cíclica $\Phi_{\pm} = e^{im\theta} \rho_{\pm}(r)$ en la ecuación (C.3). La ecuación radial que nos queda es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \rho_{\pm}(r) + (\gamma'_{\pm} - \nu^2 r^2) \rho_{\pm}(r) - \frac{m^2}{r^2} \rho_{\pm}(r) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Recordando que la ecuación del oscilador armónico de dos dimensiones del apéndice B es de la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) g_m(r) + [\gamma - r^2] g_m(r) - \frac{m^2}{r^2} g_m(r) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Comparando con (C.8) y haciendo el cambio de variable para (C.9), $r \rightarrow \sqrt{\nu} r$ y multiplicamos por ν

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) g_m(r) + [\nu \gamma - \nu^2 r^2] g_m(r) - \frac{m^2}{r^2} g_m(r) = 0, \quad (\text{C.10})$$

si se compara con (C.8), se obtiene:

$$\gamma'_{\pm} \equiv \nu \gamma. \quad (\text{C.11})$$

Para encontrar el espectro de energía, es necesario resolver la ecuación radial de la ecuación (C.8). Haciendo el cambio de variable $x = r^2$; juntamente con las derivadas, el resultado es escrito en la forma diferencial del polinomio de Laguerre

$$\frac{d}{dr} = 2\sqrt{x} \frac{d}{dx}, \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = 4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx}, \quad (\text{C.13})$$

al sustituir el cambio de variable, juntamente con sus derivadas en (C.8), se obtiene:

$$\frac{d^2 \rho_{\pm}(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\rho_{\pm}(x)}{dx} - \frac{m^2}{4x^2} \rho_{\pm}(x) + \frac{1}{4x} (\gamma'_{\pm} - v^2 x) \rho_{\pm}(x) = 0. \quad (\text{C.14})$$

Para hallar una ecuación soluble por el método de series es necesario hallar las soluciones para $x \gg 1$ y $x \approx 0$. Para el primer caso se tiene que:

$$\frac{d^2 f_{\pm}}{dx^2} - \frac{v^2}{4} f_{\pm} = 0, \quad (\text{C.15})$$

donde $f_{\pm}(x) \approx \rho_{\pm}(x)$, con $x \gg 1$ las soluciones de esta ecuaciones son:

$$f_{\pm}(x) = e^{\pm \frac{v}{2} x}. \quad (\text{C.16})$$

La solución con sentido físico es $f_{\pm} = e^{-\frac{1}{2} \alpha}$, puesto que permite que el comportamiento no sea divergente para $x \rightarrow \infty$, por otra parte, si $h(x)$ es el comportamiento $\rho_{\pm}(x)$, para cuando $x \approx 0$, entonces se tiene:

$$\frac{d^2 h_{\pm}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dh_{\pm}}{dx} - \frac{m^2}{4x^2} h_{\pm} = 0. \quad (\text{C.17})$$

Se propone una serie de la forma:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (\text{C.18})$$

donde sus derivadas son:

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad (\text{C.19})$$

$$h''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}, \quad (\text{C.20})$$

al sustituir (C.18), (C.19) y (C.20) en (C.17) obtenemos el valor para n

$$n = \pm \frac{|m|}{2}. \quad (\text{C.21})$$

Por lo tanto, las soluciones son del tipo en que se asimila a la forma del oscilador bidimensional

$$h_{\pm}(x) = x^{\pm \frac{|m|}{2}}. \quad (C.22)$$

Para evitar un comportamiento divergente en $x = 0$ se elige un signo positivo. Por lo tanto:

$$h_{\pm}(x) = x^{\frac{|m|}{2}}. \quad (C.23)$$

La solución de la ecuación diferencial original es de la forma siguiente:

$$\rho_{\pm}(x) = e^{-\frac{1}{2}vx} x^{\frac{|m|}{2}} y_{\pm}(x), \quad (C.24)$$

ahora lo que se procede hacer es sustituir la solución $\rho_{\pm}(x)$ en la ecuación diferencial (C.14), a partir de lo cual se obtiene:

$$xy_{\pm}'' + [|m| + 1 - vx]y_{\pm}' + \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{\pm}}{2} - v(m+1) \right] y_{\pm} = 0, \quad (C.25)$$

siendo

$$k' \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{\pm}}{2} - v(m+1) \right), \quad (C.26)$$

obteniendo así, la forma de la ecuación diferencial de Laguerre

$$xy_{\pm}'' + (m+1 - vx)y_{\pm}' + k'y_{\pm} = 0, \quad (C.27)$$

Para estudiar este problema se propone una serie en el que sus derivadas se escriben de la forma siguiente:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (C.28)$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \quad (C.29)$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2}, \quad (C.30)$$

sustituyendo (C.28), (C.29) y (C.30) en (C.27) se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + (m+1) \sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^{k-1} - \nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^k + k' \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0, \quad (\text{C.31})$$

renumerando y agrupando los términos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)kc_{k+1} + (m+1)(k+1)c_{k+1} - \nu kc_k + k'c_k \right] x^k = 0, \quad (\text{C.32})$$

haciendo cero el corchete

$$c_{k+1} = \frac{\nu k - k'}{(k+1)(k+m+1)} c_k, \quad (\text{C.33})$$

se obtiene así la relación de recurrencia. Esto implica que para $x \gg 1$, la solución tiene la forma:

$$\rho_{\pm} \approx e^{-\frac{1}{2}\nu x} x^{\frac{|m|}{2}} e^{\nu x}, \quad (\text{C.34})$$

$$\rho_{\pm} = e^{\frac{1}{2}\nu x} x^{\frac{|m|}{2}}. \quad (\text{C.35})$$

Esta expresión nos lleva a una densidad de probabilidad divergente. La única forma de evitar esto es cortar la serie, por lo tanto, se debe satisfacer que:

$$k' = \nu k. \quad (\text{C.36})$$

A partir de la ecuación (C.36), se obtiene los espectros de energía. Se sabe que la estructura del vector potencial contiene la información de la frecuencia, así como también la de la longitud magnética

$$\nu^2 \equiv \frac{e^2 B_0^2}{4\hbar^2 c^2}, \quad (\text{C.37})$$

partiendo de ello se obtiene:

$$\nu \equiv \frac{eB_0}{2\hbar c}. \quad (\text{C.38})$$

Por lo tanto, de la ecuación (C.36), se obtiene:

$$\frac{eB_0}{2\hbar c} k = k' = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'_{\pm}}{2} - \nu(m+1) \right), \quad (\text{C.39})$$

resolviendo para γ'_{\pm} , se busca obtener el espectro de energía

$$\left(\frac{eB_0}{2\hbar c}k\right)(2) + \nu(m+1) = \frac{\gamma'_{\pm}}{2}, \quad (\text{C.40})$$

sustituyendo (C.38) en (C.40), tenemos

$$\frac{eB_0}{\hbar c}k + \frac{eB_0}{2\hbar c}(m+1) = \frac{\gamma'_{\pm}}{2}, \quad (\text{C.41})$$

obteniendo así, la suma del espectro de energía sin la interacción del espín

$$\gamma'_{\pm} = \frac{eB_0}{\hbar c}(2k+m+1), \quad (\text{C.42})$$

sabemos que

$$\gamma'_{\pm} = \frac{2m_0}{\hbar^2}(E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c}(m \pm 1), \quad (\text{C.43})$$

igualando (C.42) con (C.43), se obtiene:

$$\frac{2m_0}{\hbar^2}(E_{\pm} - E_z) + \frac{eB_0}{\hbar c}(m \pm 1) = \left|\frac{eB_0}{\hbar c}\right|(|m| + 2k + 1), \quad (\text{C.44})$$

a partir de esa ecuación se obtiene el espectro de energía

$$(E_{\pm} - E_z) = -\frac{\hbar eB_0}{2m_0 c}(m \pm 1) + \frac{\hbar}{2m_0 c}|e||B_0|(|m| + 2k + 1). \quad (\text{C.45})$$

Apéndice D

Función de onda

Usando la ecuación (C.25) del apéndice C, se demuestra que la ecuación diferencial (C.27), es solución de los polinomios de Laguerre

$$xy_{\pm}'' + (m + 1 - vx)y_{\pm}' + k'y_{\pm} = 0, \quad (\text{D.1})$$

realizando el siguiente cambio de variable

$$x = \frac{u}{\sqrt{v^2}}, \quad (\text{D.2})$$

y considerando que:

$$y_{\pm}' = \frac{dy_{\pm}}{dx}, \quad (\text{D.3})$$

entonces

$$\frac{dy_{\pm}}{dx} = \frac{dy_{\pm}}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dy_{\pm}}{du} \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \sqrt{v^2} \frac{dy_{\pm}}{du}, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{d^2y_{\pm}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{v^2} \frac{dy_{\pm}}{du} \right), \quad (\text{D.5})$$

sea

$$w = \frac{dy_{\pm}}{du}, \quad (\text{D.6})$$

partiendo de ahí se obtiene:

$$\frac{d^2y_{\pm}}{dx^2} = \sqrt{v^2} \frac{dw}{dx} = \sqrt{v^2} \frac{dw}{du} \frac{du}{dx} = \sqrt{v^2} \frac{dw}{du} \frac{1}{\frac{dx}{du}} = v^2 \frac{dw}{du} = v^2 \frac{d^2y_{\pm}}{du^2}, \quad (\text{D.7})$$

Al sustituir (D.4) y (D.7) en (D.1), se tiene:

$$u \frac{d^2 y_{\pm}}{du^2} + (m+1-u) \frac{dy_{\pm}}{du} + \frac{k'}{v} y_{\pm} = 0. \quad (\text{D.8})$$

Definiendo

$$\Gamma \equiv \frac{k'}{v}. \quad (\text{D.9})$$

Obteniendo así;

$$u y_{\pm}'' + (m+1-u) y_{\pm}' + \Gamma y_{\pm} = 0, \quad (\text{D.10})$$

con $m = 0$, la ecuación que se obtiene es la ecuación de los polinomios de Laguerre en la forma siguiente:

$$u y_{\pm}'' + (1-u) y_{\pm}' + \Gamma y_{\pm} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Para volver a obtener la ecuación se deriva m veces, siendo el resultado

$$u y_{\pm}^{(m+2)} + (m+1-u) y_{\pm}^{(m+1)} + (\Gamma - m) y_{\pm}^m = 0, \quad (\text{D.12})$$

al intercambiar los índices $\Gamma \rightarrow \Gamma + m$ se obtiene:

$$u y_{\pm}^{(m+2)} + (m+1-u) y_{\pm}^{(m+1)} + \Gamma y_{\pm}^m = 0, \quad (\text{D.13})$$

por lo tanto, la solución es:

$$y_{\pm}(u) = L_{\Gamma+m}^m(u) = \frac{d^m}{du^m} L_{\Gamma+m}(u), \quad (\text{D.14})$$

Recordando que la solución radial de la ecuación (C.24) es:

$$\rho_{\pm}(x) = e^{-\frac{1}{2}vx} x^{\frac{|m|}{2}} y_{\pm}(x), \quad (\text{D.15})$$

y de acuerdo al cambio de variable

$$x = \frac{u}{\sqrt{v^2}}, \quad (\text{D.16})$$

se tiene entonces que la solución radial (D.15) con la constante de normalización y el cambio de variable es:

$$\rho_{\pm}(u) = A e^{-\frac{1}{2}u} \frac{1}{v^{\frac{m}{2}}} L_{\Gamma+m}^m(u), \quad (\text{D.17})$$

Donde A es la constante a normalizar. Para hallar la constante de normalización se aplicara el método de Schrödinger y con este propósito se encuentra la función generatriz para los polinomios de Laguerre. Así que la función generatriz para los polinomios $L_\Gamma(u)$ es:

$$f(u, z) = \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{L_\Gamma(u)}{\Gamma!} z^\Gamma = \frac{e^{-\frac{uz}{1-z}}}{1-z}, \quad (\text{D.18})$$

derivando m veces

$$\sum_{\Gamma=m}^{\infty} \frac{L_\Gamma^m(u)}{\Gamma!} z^\Gamma = (-1)^m \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} e^{-\frac{uz}{1-z}}, \quad (\text{D.19})$$

hace que el índice Γ comience a contar con $\Gamma = m$. Al hacer el cambio de variable $\Gamma \rightarrow \Gamma + m$ se obtiene:

$$\sum_{\Gamma+m=m}^{\infty} \frac{L_{\Gamma+m}^m(u)}{(\Gamma+m)!} z^{\Gamma+m} = (-1)^m \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} e^{-\frac{uz}{1-z}}, \quad (\text{D.20})$$

por lo tanto,

$$\sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{L_{\Gamma+m}^m(u)}{(\Gamma+m)!} z^\Gamma = \frac{(-1)^m}{(1-z)^{m+1}} e^{-\frac{uz}{1-z}}. \quad (\text{D.21})$$

Para hallar la constante de normalización se debe cumplir que:

$$\int_0^\infty \rho_{mt} \rho_{mt'} du = \frac{1}{v^m} A^2 \int_0^\infty e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma'+m}^m du = \delta_{\Gamma\Gamma'}. \quad (\text{D.22})$$

El método de Schrödinger consiste en calcular la integral observando que:

$$\begin{aligned} & \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \sum_{\Gamma'=0}^{\infty} \frac{z^\Gamma}{(\Gamma+m)!} \frac{w^{\Gamma'}}{(\Gamma'+m)!} \int_0^\infty e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma'+m}^m du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^m \frac{(-1)^m}{(1-z)^{m+1}} e^{-\frac{uz}{1-z}} \frac{(-1)^m}{(1-w)^{m+1}} e^{-\frac{uw}{1-w}} du. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Ahora veamos lo que sucede cuando $w = z$ y $w \neq z$. Si $w = z$, se tiene que la integral cumple con lo siguiente:

$$\int_0^\infty e^{-u} u^m e^{-\frac{uz}{1-z}} e^{-\frac{uz}{1-z}} du = \int_0^\infty u^m e^{-\frac{u(1+z)}{1-z}} du. \quad (\text{D.24})$$

Ahora si $w \neq z$, entonces se observa lo siguiente:

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} \frac{1}{(1-w)^{(m+1)}} \int_0^\infty e^{-u} u^m e^{-\frac{uz}{1-z}} e^{-\frac{uw}{1-w}} du, \quad (D.25)$$

a partir de ahí se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-u} u^m e^{-\frac{uz}{1-z}} e^{-\frac{uw}{1-w}} du = \int_0^\infty u^m e^{-u \left[\frac{1-wz}{(1-z)(1-w)} \right]} du, \quad (D.26)$$

sea

$$q = \frac{1-wz}{(1-z)(1-w)}, \quad (D.27)$$

por lo tanto, la integral a calcular es la siguiente:

$$\int_0^\infty u^m e^{-qu} du, \quad (D.28)$$

al integrar por partes se obtiene:

$$\int_0^\infty u^m e^{-qu} du = \frac{m!}{q^{m+1}}. \quad (D.29)$$

De acuerdo al método integral se tendrá

$$\sum_{\Gamma=0}^{\infty} \sum_{\Gamma'=0}^{\infty} \frac{z^\Gamma}{(\Gamma+m)!} \frac{w^{\Gamma'}}{(\Gamma'+m)} \int_0^\infty e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma'+m}^m du = \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \frac{1}{(1-w)^{(m+1)}} \left[\frac{m!}{q^{m+1}} \right], \quad (D.30)$$

a partir de la ecuación (D.30) y (D.27) se obtiene:

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} \frac{1}{(1-w)^{(m+1)}} \left[\frac{m!}{q^{m+1}} \right] = \frac{(1-z)^{m+1} (1-w)^{m+1}}{(1-z)^{m+1} (1-w)^{m+1}} \left[\frac{m!}{(1-wz)^{m+1}} \right]. \quad (D.31)$$

Utilizando el binomio de Newton

$$1 + \frac{(m+1)}{1!} (wz) + \frac{(m+1)(m+2)}{2!} (wz)^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!} (wz)^3 = \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{(m+\Gamma)!}{m!\Gamma!} (wz)^\Gamma. \quad (D.32)$$

Por consiguiente:

$$\sum_{\Gamma=0}^{\infty} \sum_{\Gamma'=0}^{\infty} \frac{z^{\Gamma} w^{\Gamma'}}{(\Gamma+m)! (\Gamma'+m)!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma'+m}^m du = \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{(m+\Gamma)!}{m! \Gamma!} (wz)^{\Gamma}, \quad (\text{D.33})$$

de lado izquierdo si $\Gamma = \Gamma'$, se tendrá que se cumple lo siguiente:

$$\sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{(wz)^{\Gamma}}{[(\Gamma+m)!]^2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma+m}^m du = \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \frac{(m+\Gamma)!}{m! \Gamma!} (wz)^{\Gamma}, \quad (\text{D.34})$$

quitando \sum , entonces se llega al resultado buscado

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^m L_{\Gamma+m}^m L_{\Gamma+m}^m du = \frac{[(m+\Gamma)!]^3}{\Gamma!}. \quad (\text{D.35})$$

Y de acuerdo al resultado (D.17) y al resultado (D.35), se obtiene el valor de la constante de normalización

$$A = \sqrt{\nu^m} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}}, \quad (\text{D.36})$$

por lo tanto,

$$\rho_{\pm}(u) = \sqrt{\nu^m} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u} \frac{1}{\nu^{\frac{m}{2}}} u^{\frac{m}{2}} L_{\Gamma+m}^m(u), \quad (\text{D.37})$$

es la función de onda que de acuerdo a (C.24), los resultados vienen de la forma siguiente:

$$\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_{zz}} \Phi_{\pm}(r, \theta), \quad (\text{D.38})$$

$$\Phi_{\pm}(r, \theta) = e^{im\theta} \rho_{\pm}(r), \quad (\text{D.39})$$

$$\Psi_{\pm}(r, \theta, z) = e^{ik_{zz}} e^{im\theta} \rho_{\pm}. \quad (\text{D.40})$$

La solución radial de la función de onda, en la forma de sus diferentes cambios de variables es la siguiente

$$\Psi_{\pm}(u, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma!}{[(m+\Gamma)!]^3}} e^{-\frac{1}{2}u} u^{\frac{m}{2}} e^{ik_{zz}} e^{im\theta} L_{\Gamma+m}^m(u). \quad (\text{D.41})$$

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Bibliografía

- [1] Sucher J 1982, Relativistic effects in atoms, molecules and solids , ed GL Malli, (New York, Plenum).
- [2] Schweber SS 1961. An introduction to relativistic field theory (New york; Harper and Row).
- [3] Jauch JM, Rohrlich F, The theory of photons and electrons: the relativistic quantum field theory of charged particles with spin one- half. Texts and monographs in physics, 2nd edn, springer, new york.
- [4] S. Gasiorowicz, Quantum physics, 3rd ed. (John Wiley and Sons, 2003).
- [5] Wenjian Liu, Handbook of relativistic quantum chemistry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2017).
- [6] Jwei-Jun Chang, Phys. Rev. Lett. 57, (1998).
- [7] Anzor A. Khelashvili y Teimuraz P. Nadareishvili, AM. J. Phys, 79, (2011).
- [8] R. Gurtler and D. Hestenes, J. Math. Phys, 16, (1975).
- [9] F. Flossman, U. T. Schwarz y Max Maier (Elsevier 2005).
- [10] Xiangyi Meng, Chengjun Wu y Hong Guo, Sci. Rep 5, (2015).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, y F. Lalo, Quantum mechanics (Wiley, New York,1991), vol 1.
- [12] S. Deffner y E. Lutz, Phys. Rev. Lett. 105, 170402 (2010).

- [13] T. Caneva, M. Murphy, T. Calarco, R. Fazio, S. Montangero, V. Giovannetti, y G. E. Santoro, *Phys. Rev. Lett.* 103, 240501 (2009).
- [14] E. Sadurni, J. M. Torres, T.H. Seligman. Dynamics of a dirac oscillator coupled to an external field: a new class of soluble problems *Journal of Physics A: Mathematical and theoretical*, 43, 285204 (2010).
- [15] Landau and Liftshitz, *Teoría cuántica no relativista*, Reverte, S.A. España, (1983).
- [16] K.F. Riley, M.P. Hobson, and S. J. Bence, *Mathematical Methods for physics and engineering*, 3rd ed, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006).
- [17] Y. Kitadono, M. Wakamatsu, L.. Zou, and P. Zhang, Role of guiding center in Landau level system and mechanical and pseudo orbital angular momenta, *Inertial Journal of Modern Physics A* 35, 2050096 (2020).
- [18] William N. Plick and Mario Krenn, Physical meaning of the radial index of Laguerre- Gauss beams, *Phys. Rev. A* 92, 063841, (2015).
- [19] Abhijeet Melkani y S. J. Van Enk, Electron Vortex beams in nonuniform magnetic fields, *Phys. Rev.* 3, 033060, (2021).
- [20] G.M. Gallatin y B. McMorran, Propagation of Vortex electron wave Functions in a magnetic fields , *Phys. Rev.* A86, 012701 (2012).
- [21] Konstantin Y. Bliokh, Peter Schattschneider, J. Verbeeck, and Franco Nori, Electron Vortex Beams in a magnetic field: A new twist on Landau level and Aharonov- Bohm states, *Phys. Rev*, X2, 041011 (2012).
- [22] Timothy H. Boyer, General Connection between random electrodynamics and quantum electrodynamics for free electromagnetic fields and for dipole oscillator systems, *Phys. Rev.* D11, 809 (1975).
- [23] K.Y. Bliokh, Geometrical optics of beams with vortices Berry phase and

orbital angular momentum Hall effect, *Phys. Rev. Lett.* 97, 043901 (2006).

[24] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: relativistic theory* (Burlington, Massachusetts, 1981).

[25] Ole Steuernagel, *Am. J. Phys.* 73, 625 (2005).

[26] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Quantum mechanics*, (Prentice Hall, New Jersey, 2000), 2nd edition.

[27] Ashok Das, *Lectures on quantum mechanics* (World Scientific, New Jersey, 2012), 2nd edition.

[28] Maria Carolina Spinel Gómez, *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica no relativista*, (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009) 1nd edición.

[29] Luis de la peña, *Introducción a la mecánica cuántica*, (Ediciones científicas, Unam, 2012) 1nd edition.

[30] M. G. Naber, Two dimensional hydrogen-like atom in a constant magnetic field, *J. Math. Phys.* 60, 102101 (2019).

[31] A. D. Cimmarusti, Z. Yan, B.D. Patterson, L.P. Corcos, L.A. Orozco and S. Deffner, *Phys. Rev. Lett.* 114, 233602 (2015).

[32] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. Lett.* 46, 623, (1981).

[33] S. Lloyd, *Nature (London)* 406, 1047 (2000); *Phys. Rev. Lett.* 88, 237901 (2002).

[34] S. Ikhdaïr, Exact Solution of Dirac equation with charged harmonic oscillator in electric field: bound states, *Journal of Modern Physics*, 3, No.2, (2012).

[35] D.V. Villamizar and B. Rusell, *Phys. Rev. Ensino.* 40, e5404 (2018).

[36] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, (springer, Berlin, 2000), 3rd edition.

- [37] B. R. Desai, Quantum mechanics with basic field theory (Cambridge University press, 2010) 1rd edition.
- [38] Alexander J. Silenko, Pengming Zhang, and Liping Zou, Relativistic quantum dynamics of twisted electron beams in arbitrary electric and magnetic fields, Phys. Rev. Lett. 121, 043202 (2018).
- [39] D.G.W. Parfitt y M.E. Portnoi, J. Math. Phys. 43(10), 4681-4691 (2002).
- [40] S. M. Mohammadi, L. K. S. Daldorff, K. Forozash, B.Thidé, J. E. S. Bergman, B. Isham, R. Karlsson, y T.D. Carozzi, Radio sei. 45, R54007 (2010).
- [41] M. G. Naber. J. Math. Phys. 60, 102101 (2019).
- [42] S. Viefers, F. Ravndal, y T. Haugset, Amer. J. Phys. 63 (1995) 369.
- [43] Koen Van Kruining, Armen G. Hayrapetyan and Jorge B. Gotte, Phys . Rev. Lett. 119.030401 (2017).
- [44] Konstantin Y. Bliok, Mark R. Dennis and Franco Nori, Phys. Rev. Lett. 107.174802 (2011).
- [45] M. E. Rose, Relativistic electron theory, Wiley, New york (1961).
- [46] K. Wang, Y. F. Zhang, S. J. Liu, Z. W. Long y J. Jing, quantum speed limit for a relativistic electron in the nonommutative phase space, High Energy Physics- Theory, Vol. 32, 23n24, (2017).
- [47] A. Messiah: Quantum mechanics (North-Holland, Amsterdam 1966).
- [48] A. Wachter: Relativistic quantum mechanics (Springer,2011).
- [49] Kenneth G. Dyall y Knot Faegri, Jr; Introduction to relativistic quantum chemistry (Oxford University Press, New york 2007).
- [50] John David Jackson, Classical electrodynamics (Wiley, New York,1962).

- [51] Madelung, O. Introduction to solid-state theory,(Springer-Verlag 1978).
- [52] Electrodinámica cuántica bidimensional: Sobre la teoría del efecto Hall cuántico (Marina de la Torre Mayado),(Tesis para obtener el doctorado), Universidad de Salamanca.
- [53] Ariel Ederly y Yann Audin, J. Phys. Commun.3. 025013, (2019).
- [54] David Hestenes, Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory, Journal of Mathematical Physics 16, 556-572 (1975).
- [55] Radoslaw Szmytkowski, Relativistic two dimensional hydrogen-like atom in a weak magnetic field. Eur. Phys. J. Plus 133, 311 (2018).
- [56] R. M. White, quantum theory of magnetism: Magnetic properties of materials, (Springer Berlin Heidelberg, 2013).
- [57] A. Kumar, Fundamentals of quantum mechanics (Cambridge University Press, United Kingdom, 2018).
- [58] Niemi, A. J. Fractional Fermion Number. Preprint, (1985).
- [59] Francisco J. Yndurain, Relativistic quantum mechanics and introduction to field theory , Springer, (1996).
- [60] Élie Cartan, The theory of Spinor, Dover Publications, Inc. New York, (1966).
- [61] B.L. Van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der quantenmechanik, Springer-Verlag Berlin, (1932).
- [62] Ourjoumtsev, A, Tualle- Brouri, R. Laurat, J, and Grangier, P. Generating optical Schrödinger Kittens for quantum information processing. Science 312, 83-86 (2006).
- [63] Harmut M. Pilkuhn, Relativistic quantum mechanics (Springer, Berlin Heidelberg 2005), second edition.

[64] A. Bermudez, M. A. Martin Delgado, y E. Solano, Mesoscopic superposition state in relativistic Landau levels, *Phys. Rev.* 99, 123602, (2007).

[65] Kang Wang, Yu-Fei Zhang, Qing Wang, Zheng-Win long y Jian Jing, Quantum speed limit for relativistic spin 0 and spin 1 bosons on commutative and noncommutative places, *Hindawi*, 4739596, (2017).

[66] R. K. Pathria y Paul D. Beale, *Statistical Mechanics*, Elsevier, (2011).

[67] L.P. Kadanoff y G. Baym, *Quantum statistical mechanics* (Benjamin, New York, 1962).

[68] Stefan Heusler, Paul Schlummer y Malte S. Ubben, A Knot theoretic extension of the Bloch sphere representation for qubits in Hilbert space and its application to contextuality and many worlds theories, *symmetry* 12, (2020).

[69] Luis B. Castro y Edilberto O. Silva, Quantum dynamics of a spin $\frac{1}{2}$ charged particle in the presence of a magnetic field with scalar and vector coupling, *Eur. Phys. J.* (2015).

[70] C. R. Hagen, *Int. J. Mod. Phys. A* 6, 3119 (1991).

[71] Giulio Ferrari, Andrea Bertoni, Guido Goldini y Elisa Molinari, Cylindrical two dimensional electron gas in a transverse magnetic field, *Phys. Rev* 78, 115326, (2008).

[72] J. N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.* 78, 436 (1997).

[73] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* 115 (3), 485 (1959).

[74] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1966).

[75] A. I. Blokhin, T. Beuschel, J. P. Dranger, C. Bahri, *Nucl. Phys. A* 612, 163 (1997).

[76] Heun *Differential equations*, edited by A. Ronveaux (Oxford University Press, New York, 1995).

- [77] B.S. Kandemir, Two interacting electrons in a uniform magnetic field and a parabolic potential : The general closed-form solution, J. Math. Phys. 46, 032110 (2005).
- [78] I.I. Rabi, Das Freie Elektro im homogenen magnetfeld nach der Diracschen theorie, Zeitschrift fur physik, (1928).
- [79] A. Vercin, Phys. Lett (1991).
- [80] Wilczek F. Phys. Rev. Lett. 48, (1982) 1144.
- [81] B. Rosenow I, O. Levkivskiy, B.I. Halperin , Phys. Rev. Lett. 116, 156802 (2016).
- [82] M. Taut , J. Phys, A 27, 1045 (1994).
- [83] Sen D, Spectrum of three anyons in a harmonic potential and the third virial coefficient, Phys. Rev. Lett. 68 (1996), 1846.
- [84] Juan Carlos García Euán y Román Almeida Trinidad (2000), Electrodinámica 2+1 para partículas no relativista con espín $\frac{1}{2}$ (Tesis de licenciatura en Física), (Universidad Juárez Autónoma de Tabasco).
- [85] M. Ohya D. Petz, Quantum entropy and its use (Springer-Verlag) (1993).
- [86] A. M. Frassiono, D. Marinelli, O. Panella and P.Roy, J.Phys. A. Math. Theor.53 (2020), 185204.
- [87] Hans Lüth, Quantum Physics in the Nanoworld (Springer, Germany, 2009), 2nd edition.
- [88] Hans C. Ohanian, what is spin?, Am. J. Phys. 54 (6), (1986).
- [89] Ivo Sachs, Siddhartha Sen and James Sexton, Elements of statistical mechanics with an introduction to quantum field theory and numerical simulation, (Cambridge university press, 2006).

[90] Carlos Sánchez del Río, Física cuántica, (Pirámide, España, 2015), 5ª edición.

[91] Markus Reiher, Alexander Wolf, Relativistic quantum chemistry, (Wiley-Vch, 2009), 1ª edición.

[92] Staff. aist. go. jp/v.zayets/spin3-51- WhatIsSpin.html.

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.