



UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS



ÍNDICE DE CONLEY Y DINÁMICA DISCRETA

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

JORGE LUIS RAMOS CASTELLANO

DIRECTORES

DR. MIGUEL ÁNGEL DE LA ROSA CASTILLO,

DR. JAIR REMIGIO JUÁREZ

CUNDUACÁN, TAB.

FEBRERO 2022



**UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO**

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



División
Académica
de Ciencias
Básicas



DIRECCIÓN

10 de diciembre de 2021

**LIC. JORGE LUIS RAMOS CASTELLANO
ESTUDIANTE DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
P R E S E N T E.**

Por medio de la presente y de la manera más atenta, me dirijo a Usted para hacer de su conocimiento que proceda a la impresión del trabajo titulado "**ÍNDICE DE CONLEY Y DINÁMICA DISCRETA**" en virtud de que reúne los requisitos para el EXAMEN PROFESIONAL para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

**DR. GERARDO DELGADILLO PIÑÓN
DIRECTOR**

DR'GDP/M'NLBA/csj.

Miembro CUMEX desde 2008

**Consortio de
Universidades
Mexicanas**

UNA ALIANZA DE CALIDAD POR LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Km.1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab., México.

Tel/Fax: (993) 3581500 Ext. 6702,6701 E-Mail: direccion.dacb@ujat.mx

www.ujat.mx

CARTA DE AUTORIZACIÓN

El que suscribe, autoriza por medio del presente escrito a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para que utilice tanto como física como digitalmente la tesis de grado denominada “ÍNDICE DE CONLEY Y DINÁMICA DISCRETA” de la cual soy autor y titular de los Derechos de Autor.

La finalidad del uso por parte de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de la tesis antes mencionada, será única y exclusivamente para difusión, educación y sin fines de lucro; autorización que se hace de manera enunciativa más no limitativa para subirla a Red Abierta de Bibliotecas Digitales (RABID) y a cualquier otra red académica con las que la Universidad tenga relación institucional.

Por la antes mencionado, libero a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco de cualquier reclamación legal que pudiera ejercer respecto al uso y manipulación de la tesis mencionada y para los fines estipulados en este documento.

Se firma la presente autorización en la ciudad de Cunduacán, Tabasco a los 24 días del mes de Enero de 2022.

Autorizó



Jorge Luis Ramos Castellano
182A21002

Agradecimientos

A Dios, por haberme dado la vida, haber permitido concluir una etapa más de mi vida profesional. A mis profesores que sin su ayuda no hubiera concluido este trabajo, en particular a mis asesores de tesis, a el Dr. Miguel Ángel de la Rosa Castillo y el Dr. Jair Remigio Juárez, por todo su apoyo y tiempo que me dedicaron para la realización de este trabajo. A CONACYT por haberme otorgado el apoyo como becario durante todo el proyecto de tesis. Finalmente, estoy profundamente agradecido con mi familia por el apoyo a lo largo de este periodo, entusiasmo que me brindaron y la comprensión para las tantas veces que no pude estar en las situaciones que me necesitaban.

Índice general

Agradecimientos	4
1. Preliminares	3
1.1. Noción de sistema dinámico discreto	3
1.1.1. Discretización con el método de Euler	3
1.1.2. Aplicación de Poincaré	5
1.2. Noción de estabilidad para mapeos	7
1.2.1. Retratos fase	10
1.3. Aspectos topológicos que definen caoticidad	16
1.3.1. Dinámica simbólica	17
1.3.2. Noción de caos en el sentido de Devaney	18
1.3.3. Transitividad	18
1.3.4. Densidad del conjunto de puntos periódicos	19
1.3.5. Dependencia sensible a condiciones iniciales	19
1.3.6. Construcción de un conjunto de Cantor	20
1.3.7. Conjugaciones Topológicas	22
1.3.8. Caos en dos dimensiones	24
2. Homología Cúbica	29
2.1. Conjuntos cúbicos	29
2.2. Aritmética de conjuntos cúbicos	31
2.2.1. Cadenas cúbicas	31
2.3. Operador frontera	33
2.3.1. Homología de conjuntos cúbicos	36
2.3.2. Componentes conexas y $H_0(X)$	38
2.4. Colapsos elementales	42
2.5. Homología de Complejo de Cadenas	43
2.6. Homología Reducida	44
2.7. Homología relativa	45
2.8. Sucesiones exactas	48
2.9. Homomorfismo de conexión	50
2.10. Sucesión de Mayer-Vietoris	52

ÍNDICE GENERAL	1
<hr/>	
2.11. Índice de punto fijo	52
3. Índice de Conley	57
3.1. Algunas definiciones de topología	57
3.2. Definición del Índice de Conley	58
3.3. Reducción de Leray asociada a un buen par	60
3.3.1. Índice de Conley y Órbitas Periódicas	66
3.4. Índice de Conley y Dinámica Simbólica	72
3.4.1. Ejemplos	73
4. Caos de mapeos tipo herradura	78
4.1. Aplicación del índice de punto fijo	78
4.2. Mapeos de tipo herradura topológica	82
4.3. Semiconjugación con el mapeo corrimiento: Condiciones suficientes	83
5. Conclusiones	85
Bibliografía	86

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
 México.

Introducción

El análisis de un sistema dinámico discreto o continuo está soportado sobre técnicas topológicas y geométricas, las cuáles en particular, permiten apreciar una interacción entre topología y dinámica. En el caso discreto, es de interés proveer demostraciones rigurosas que sustenten cuándo un mapeo presenta comportamiento caótico, [R]. Analizar la caoticidad de un sistema dinámico discreto es una tarea sumamente difícil y de gran interés, considerando el caos en el sentido de Devaney.

Para el análisis de la dinámica caótica de mapeos en el plano existen demostraciones clásicas que usan la teoría de dinámica simbólica, [D, E, R]. Recientemente, se ha estudiado la caoticidad de un mapeo a través de técnicas que involucran teoría de homología cúbica y dinámica simbólica. Dichas técnicas consisten en introducir el índice de Conley (que es en cierto sentido una generalización del índice de Morse para sistemas dinámicos continuos), [KKM]. Este enfoque es de carácter topológico-algebraico y se especializa en demostrar rigurosamente que un mapeo es caótico.

En este proyecto, nos enfocaremos tanto en el análisis de los aspectos que definen el índice de Conley para sistemas dinámicos discretos (ver [RS]), como en su aplicación para comprender algunas posibles obstrucciones que determinan si un mapeo en el plano es caótico (ver [Z]). Para este fin hemos estructurado el presente trabajo como se expone a continuación.

En el capítulo 1 se presentan temas básicos sobre sistemas dinámicos discretos. Empezamos con algunas definiciones concernientes a sistemas dinámicos, también se abordan temas de estabilidad, y la noción de retrato fase. Por otra parte, se estudian algunos ejemplos de sistemas dinámicos que presentan caos sobre el espacio de símbolos tanto en una dimensión como en dos dimensiones.

En el capítulo 2 se aborda toda la teoría referente a homología cúbica, partiendo de las definiciones básicas de intervalo elemental, cubo elemental y conjunto cúbico. Se definen conceptos importantes como el operador frontera, los grupos de homología y sus propiedades. Por último, como una aplicación se define el índice de punto fijo y se dan algunas de sus propiedades.

En el capítulo 3 se define lo que es un buen par, el mapeo de índices, la reducción de Leray y sus propiedades más importantes lo cual es necesario para definir el índice de Conley homológico discreto. Por otra parte, se presentan ejemplos de aplicación del índice de Conley homológico, entre los que se contemplan en especial los teoremas 3.20 y 3.21 que relacionan la homología cúbica y dinámica discreta de homeomorfismos, vía órbitas periódicas. También se analizan aspectos homológicos referentes a la herradura de Smale.

Por último, en el capítulo 4 se aborda el índice de punto fijo en mapeos tipo herradura inyectivos para analizar caoticidad mediante semiconjugaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos la notación y resultados básicos que serán el sustento de la presente tesis. Principalmente los relacionados con dinámica discreta de mapeos definidos en un espacio métrico; de manera precisa se enunciarán resultados sobre estabilidad y caoticidad para sistemas dinámicos discretos. Así mismo se abordan algunos conceptos que corresponden a la topología, necesarios para el desarrollo de los capítulos subsecuentes. El propósito del mismo es dar referencias básicas para la comprensión de los temas presentados más adelante. Para una mayor explicación de los temas expuestos en este capítulo se puede consultar [D, R, E, HSD, Do].

1.1. Noción de sistema dinámico discreto

Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Una forma de generar un sistema dinámico discreto es iterar la función f . En este sentido al espacio X se le conoce como el *espacio fase*. Dado $x \in X$, la *órbita* de x , $\mathcal{O}(x)$, se define como

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\},$$

donde $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

Decimos que el punto x es un *punto periódico* de periodo n para f , si $f^n(x) = x$ y $f^j(x) \neq x$ para $0 < j < n$. Si x tiene periodo 1, entonces es llamado un *punto de equilibrio* de f . Si x es un punto fijo n , entonces la órbita (hacia adelante) de x se llama órbita periódica.

1.1.1. Discretización con el método de Euler

Las ecuaciones diferenciales son usadas como modelos matemáticos para una gran variedad de fenómenos físicos. Dichos modelos describen poblaciones u objetos que evolucionan continuamente, en el cual el tiempo es un subconjunto de los números reales.

Por otro lado, las ecuaciones en diferencias describen poblaciones u objetos que evolucionan discretamente en el que el tiempo se toma como un subconjunto de los números enteros. Sin embargo, para muchas ecuaciones diferenciales como

$$x'(t) = g(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad a \leq t \leq b, \quad (1.1)$$

donde g es de clase \mathcal{C}^1 en U subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , puede no ser posible encontrar una solución de forma cerrada. En este caso se suele recurrir a los métodos numéricos para aproximar su solución. Los métodos numéricos permiten la construcción de una ecuación en diferencias asociada que sea más factible de encontrar su solución. Uno de los métodos más utilizados para tal propósito es el método de Euler.

El método de Euler comienza en dividir el intervalo $[a, b]$ en un conjunto discreto de puntos $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$, con $h = t_{n+1} - t_n$ como el *tamaño de paso*. Luego, para $t_n < t_{n+1}$ aproximamos $x(t)$ por $x(t_n)$ y $x'(t_n)$ por $\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$. Así tenemos la ecuación en diferencias

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hg(x(t_n)); \quad (1.2)$$

la cual se puede escribir de la forma

$$x(n+1) = x(n) + hg(x(n)); \quad (1.3)$$

donde $x(n) = x(t_n)$.

De esta manera obtenemos un sistema discreto de ecuaciones en diferencias de primer orden

$$x(n+1) = f(x(n))$$

determinado por la función

$$f(x) = x + hg(x),$$

la cual es de clase $\mathcal{C}^1(U)$. Notamos que los puntos de equilibrios de $g(x)$ son precisamente los puntos fijos de $f(x)$.

Por otra parte, dada una condición inicial $x(0) = x_0 \in U$ se tiene una sucesión $x_n = f^n(x_0)$ que aproxima la solución de la ecuación diferencial (1.1) en los puntos t_0, t_1, t_2, \dots , siempre que h sea suficientemente pequeño.

Ejemplo 1.1. *Considérese la ecuación diferencial*

$$x'(t) = 0.7x^2(t) + 0.7, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Usando el método de separación de variables, se obtiene

$$\frac{1}{0.7} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int dt.$$

Por lo tanto

$$\tan^{-1}(x(t)) = 0.7t + c.$$

Haciendo $x(0) = 1$, obtenemos $c = \frac{\pi}{4}$. Así la solución exacta de la ecuación está dada por

$$x(t) = \tan\left(0.7t + \frac{\pi}{4}\right).$$

La ecuación en diferencias usando el método de Euler es

$$x(n + 1) = x(n) + 0.7h(x^2(n) + 1), \quad x(0) = 1.$$

En la tabla 1.1 se dan las aproximaciones para $h = 0.1$ y 0.2 y los valores exactos de las soluciones, y en la gráfica 1.1 se comparan dichas aproximaciones.

n	t	Euler $x(n); h = 0.2$	Euler $x(n); h = 0.1$	Valor exacto $x(t)$
0	0	1	1	1
1	0.1		1.14	1.150
2	0.2	1.28	1.301	1.328
3	0.3		1.489	1.542
4	0.4	1.649	1.715	1.807
5	0.5		1.991	2.150

Cuadro 1.1: Aproximaciones de Euler.

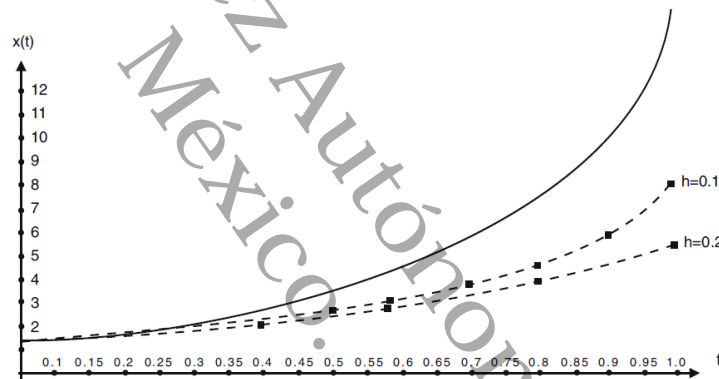


Figura 1.1: Diagrama $(n, x(n))$.

1.1.2. Aplicación de Poincaré

Si \mathbf{p} es un punto periódico de periodo t , entonces el conjunto de puntos $\mathbf{O}(\mathbf{p}) = \{\varphi^{\mathbf{T}}(\mathbf{p}) : 0 \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{t}\}$ es una *órbita periódica* u *órbita cerrada*.

Una de las herramientas que es útil para el estudio de la estabilidad y bifurcación de órbitas periódicas que nos dirige al análisis de un mapeo lineal es la *aplicación de Poincaré*. La construcción de la aplicación de Poincaré involucra la eliminación de al menos una variable del problema en cuestión; esto consecuentemente resulta en el estudio de un problema de dimensión menor. Así el problema se ve reducido al análisis de estabilidad de puntos fijos del mapeo.

La idea es la siguiente:

Sea Γ una órbita cerrada del sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

que pasa por el punto x_0 y Σ un hiperplano perpendicular a Γ en x_0 entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca a x_0 , la solución del sistema que pasa por x en $t = 0$ regresará a Σ de nuevo en el punto $P(x)$ cerca de x_0 . La aplicación resultante $x \mapsto P(x)$ es llamada la *aplicación de Poincaré*.

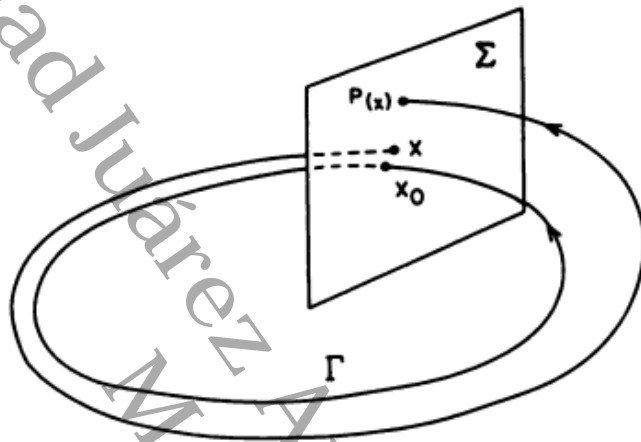


Figura 1.2: Aplicación de Poincaré.

Ejemplo 1.2. Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

En coordenadas polares, tenemos

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta} = 1. \quad (1.5)$$

Elegimos la recta L como el eje x positivo. Sea r_0 un punto inicial en L . La ecuación (1.5) nos da $\theta(t) = t$. Por lo que, $\theta(2\pi) = 2\pi$, y para este valor $t = 2\pi$ la curva solución regresa a L . Denotemos por P a la aplicación de Poincaré, entonces $P(r_0) = r_1$, donde r_1 satisface

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Usando fracciones parciales, tenemos

$$\frac{r_1^2}{1-r_1^2} = \frac{r_0^2}{1-r_0^2} e^{4\pi}.$$

Luego

$$r_1 = [1 + (r_0^{-2} - 1) e^{-4\pi}]^{-1/2}.$$

En este ejemplo, el sistema dinámico discreto que se obtiene al iterar el mapeo de Poincaré P , corresponde a la ecuación en diferencias de primer orden:

$$r_{n+1} = [1 + (r_n^{-2} - 1) e^{-4\pi}]^{-1/2}.$$

Conclusión: $|P'(1)| = |e^{-4\pi}| < 1$, lo que implica que $r_0 = 1$ es un punto fijo atractor, y por lo tanto, la circunferencia es un ciclo límite atractor.

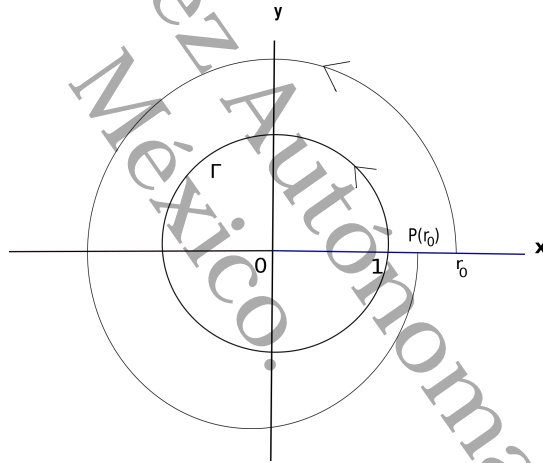


Figura 1.3: Aplicación de Poincaré para el ejemplo 1.2 con $\Gamma = \mathbb{S}^1$ y sección $L = \text{Eje } x$.

1.2. Noción de estabilidad para mapeos

Los resultados aquí presentados se pueden consultar en [C].

Considérese la ecuación en diferencias no homogénea

$$x(n+1) = Px(n) + g(n), \quad (1.6)$$

donde P es una matriz de $m \times m$ de números reales. Dada una sucesión $g : I[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $I(J) := \mathbb{Z} \cap J$, donde J es un intervalo, se define una *solución hacia adelante* como una

sucesión $x : I[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface (1.6) para todo $t \in I[0, +\infty)$. Para una sucesión dada $g : I(-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una *solución hacia atrás* es una sucesión $x : I(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface (1.6) para todo $t \in I(-\infty, -1]$. Para una sucesión $x : I[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define lo siguiente:

$$\|x\|_+ = \sup_{t \in I[0, +\infty)} |x(t)|.$$

Y los conjuntos

$$\begin{aligned} BS^+ &= \{x : I[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m : \|x\|_+ < +\infty\}, \\ BS_0^+ &= \{x \in BS^+ : \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0\}, \end{aligned}$$

que son espacios de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_+$.

Análogamente, para una sucesión $x : I(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define lo siguiente

$$\|x\|_- = \sup_{t \in I(-\infty, 0]} |x(t)|,$$

y los conjuntos

$$\begin{aligned} BS^- &= \{x : I(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m : \|x\|_- < +\infty\}, \\ BS_0^- &= \{x \in BS^- : \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0\}, \end{aligned}$$

que son espacios de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_-$.

Ahora consideremos el sistema en diferencias no lineal

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in I[0, +\infty). \quad (1.7)$$

Para $r > 0$ y $x_e \in \mathbb{R}^m$ denótese

$$B(r, x_e) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_e| < r\}.$$

Definición 1.3. Suponga que $f : B(r_0, x_e) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^2 , para algún $r_0 > 0$ y que

$$f(x_e) = x_e. \quad (1.8)$$

Diremos que x_e es un **punto de fijo** de f , si (1.8) se tiene y se dirá que es **estable**, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|x(0) - x_e| < \delta$ implica que $|x(t) - x_e| < \epsilon$ para todo $t \in [0, \infty)$. De lo contrario, se dirá que es **inestable**, si no es estable. Además será **atractor**, si existe un $\delta > 0$ tal que $|x(0) - x_e| < \delta$ implica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_e| = 0$. Si x_e es estable y atractor diremos que x_e es (localmente) **asintóticamente estable**.

Por el teorema de Taylor podemos expresar (1.7) como

$$x(t+1) = Ax(t) + h(x(t)),$$

donde $x(t)$ ha sido reemplazado por $x(t) - x_e$, $A = J_x f(x_e)$ es el Jacobiano de f evaluado en x_e , y $h : B(r_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es dos veces diferenciable con $h(0) = 0$, $J_x h(0) = 0$.

El sistema lineal asociado de (1.7) está dado por

$$z(t+1) = Az(t),$$

de donde, diremos que x_e es punto fijo *hiperbólico* si ningún valor propio de $A = J_x f(x_e)$ satisface $|\lambda| = 1$.

Por otra parte, se define el *radio espectral* de A por

$$s(A) = \{\max |\lambda| : \lambda \text{ es un valor propio de } A\}.$$

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental de Estabilidad). *Supóngase que $f(x_e) = x_e$. Si se tiene que $s(J_x f(x_e)) < 1$, entonces el equilibrio $x = x_e$ de (1.7) es asintóticamente estable.*

Cuando $s(J_x f(x_e)) > 1$, entonces se tiene el teorema de la variedad estable. Para esto definimos los subespacios generados E^s y E^u de los vectores propios generalizados asociados con los valores propios λ de A que satisfacen $|\lambda| < 1$ y $|\lambda| > 1$, respectivamente.

E^s denota el subespacio estable de la linealización; esto es, del sistema lineal homogéneo

$$x(t+1) = Ax(t), \quad A = J_x g(x_e). \quad (1.9)$$

E^u denota el subespacio inestable de la ecuación (1.9). Además definimos los siguientes conjuntos como las bolas cerradas de radio δ y centro x como

$$\begin{aligned} \Sigma^\pm(\delta) &:= \{x \in BS^\pm : \|x\|_\pm \leq \delta\}, \\ \Sigma_0^\pm(\delta) &:= \{x \in BS_0^\pm : \|x\|_\pm \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5 (Teorema de la variedad estable). *Sean x_e un punto fijo hiperbólico de f y $x(t, x_0)$ la solución de (1.7). En una vecindad suficientemente pequeña del punto de equilibrio x_e existe*

1. *Una variedad W^s de dimensión $\dim E^s$ que pasa a través de x_e tangente a E^s tal que $x_0 \in W^s$ implica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = x_e$, y*
2. *Una variedad W^u de dimensión $\dim E^u$ que pasa a través de x_e tangente a E^u tal que $x_0 \in W^u$ implica la existencia de al menos una solución hacia atrás $x(t, x_0)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t, x_0) - x_e\| = 0.$$

Si se consideran condiciones iniciales fuera de estas variedades W^s, W^u , el teorema de Hartman-Grobman es un resultado que nos permite dar información acerca del comportamiento de las soluciones del sistema al rededor de un punto fijo, en particular aquellas con respecto a dichas condiciones

iniciales. Sin embargo, este teorema requiere adicionalmente que el mapeo de estudio f sea un difeomorfismo como lo señaló Cushing al demostrar que este resultado no se tiene para mapeos que no son invertibles.

Cushing extendió el teorema de Hartman-Grobman a mapeos no invertibles, conocido como Teorema de Hartman-Grobman-Cushing. Dicho resultado está basado en el siguiente lema.

Lema 1.6. *Suponga que X, Y son espacios de Banach y $L : X \rightarrow Y$ es un operador lineal. Suponga además que existe un subespacio S de X tal que la restricción de L a S , denotado por L_S es inyectiva y sobre Y . Supóngase que $h : X \rightarrow Y, h(0) = 0$, satisface $\|h(x) - h(y)\|_Y \leq \epsilon \|x - y\|_X$ para toda $x, y \in \Sigma(\delta) = \{x \in X : \|x\| < \delta\}$ y constantes $\epsilon, \delta > 0$. Si $\epsilon \|L_S^{-1}\| < 1$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que existe una función bicontinua entre todas las soluciones de $Lx = 0$ en $\Sigma(c\delta)$ y todas las soluciones de $Lx = h(x)$ en $\Sigma(\delta)$.*

Teorema 1.7 (Hartman-Grobman-Cushing). *Supóngase que (1.8) se tiene y que además x_e es hiperbólico, existen constantes $c, \delta > 0$ tales que lo siguiente se tiene:*

1. *Existe una función bicontinua uno a uno entre soluciones acotadas hacia atrás de (1.7) que caen en $\Sigma^-(\delta)$ y soluciones hacia atrás de su linealización (1.9) que caen en $\Sigma^-(c\delta)$.*
2. *Existe una función bicontinua inyectiva entre las soluciones hacia adelante de (1.7) que están en $\Sigma_0^+(\delta)$ y las soluciones hacia adelante de su linealización (1.9) que están en $\Sigma_0^+(c\delta)$.*

1.2.1. Retratos fase

En esta sección se estudia la estabilidad de sistemas lineales (ver [E]). Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n), \\x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n),\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{1.10}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que x_e es un punto de equilibrio de (1.10) si satisface $Ax_e = x_e$ o lo que es igual $(A - I)x_e = 0$. Así, si $(A - I)$ es no singular, entonces $x_e = 0$ es el único punto de equilibrio del sistema (1.10). Por otra parte, si $(A - I)$ es singular, entonces existe una familia de puntos de equilibrio. En este caso hacemos

$$y(n) = x(n) + x_e$$

en (1.10) para obtener el sistema

$$y(n+1) = Ay(n)$$

el cual es idéntico a (1.10).

Por lo cual las propiedades de estabilidad de cualquier punto $x_e \neq 0$ son los mismos que para $x_e = 0$.

Para resolver un sistema lineal, lo mejor es llevar la matriz A a su forma canónica. En el caso de dimensión 2 tenemos las siguientes: Sea $J = P^{-1}AP$ la forma de Jordan de A entonces podemos tener:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\ \text{Eigenvalores} & \text{Eigenvalores} & \text{Eigenvalores} \\ \text{distintos} & \text{repetidos} & \text{complejos} \\ \lambda_1, \lambda_2 & \lambda & \lambda = \alpha + i\beta \end{array} \quad (1.11)$$

Si hacemos

$$y(n) = P^{-1}x(n),$$

o equivalentemente

$$x(n) = Py(n), \quad (1.12)$$

el sistema (1.10) se convierte en

$$y(n+1) = Jy(n). \quad (1.13)$$

Si $x(0) = x_0$ es una condición inicial para el sistema (1.10), entonces $y(0) = y_0 = P^{-1}x_0$ será la condición inicial para el sistema (1.13). Por lo que las propiedades cualitativas de los sistemas (1.10) y (1.13) son idénticas. Ahora se pretende bosquejar el retrato fase para (1.13) para los casos (a), (b), (c), con la condición inicial

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}.$$

Caso (a). En este caso el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n), \\ y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix},$$

y así

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$; si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|y_2(n)|}{|y_1(n)|} = \infty$.

Por lo tanto los retratos fases en este caso se pueden observar en las figuras 1.4, 1.5, 1.6, y 1.7, respectivamente. Hacemos notar que las curvas continuas que se muestran en las figuras no son puntos que pertenezcan al retrato fase necesariamente, solo nos ayudan a distinguir las diferentes órbitas que se pueden tener las cuales están dadas por los puntos que se muestran en dichas figuras.

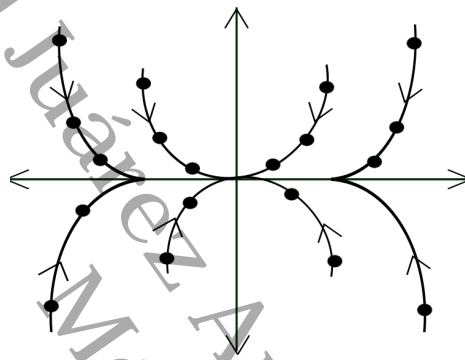


Figura 1.4: $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, nodo asintóticamente estable.

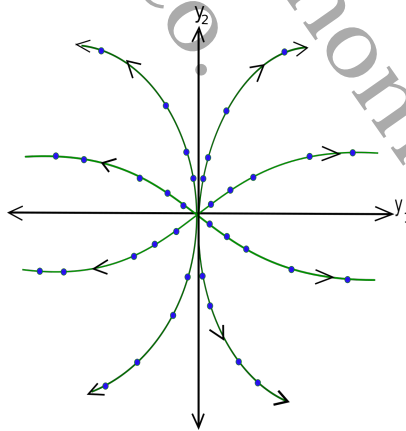


Figura 1.5: $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$, nodo inestable.

Caso (b). En este caso

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix},$$

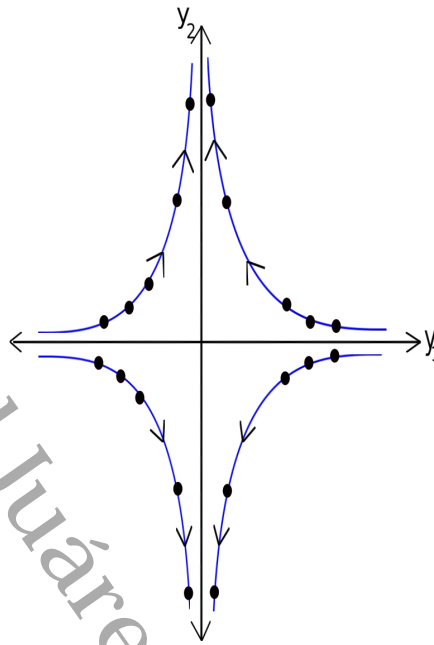


Figura 1.6: $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$, silla (inestable).

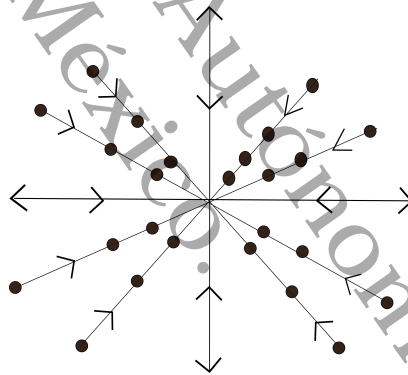


Figura 1.7: $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$, nodo asintóticamente estable.

o

$$y_1(n) = \lambda^n y_{10} + n \lambda^{n-1} y_{20}, y_2(n) = \lambda^n y_{20}.$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0.$$

Véase las figuras 1.9, y 1.10.

Caso (c). En este caso, la matriz A tiene valores propios complejos conjugados,

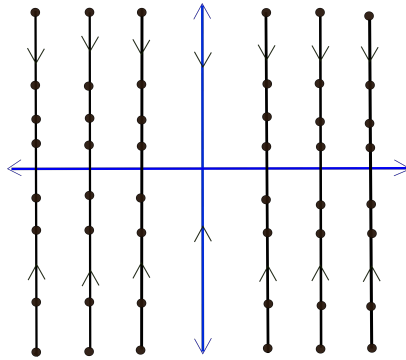


Figura 1.8: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 < \lambda_1$, nodo degenerado.

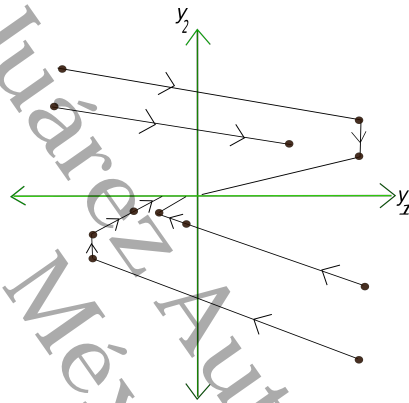


Figura 1.9: $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$, asintóticamente estable.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

El vector propio correspondiente a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ está dado por $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, y la solución está dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |\lambda_1|^n (\cos n\omega + i \text{senn}\omega) \\ &= |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos n\omega \\ -\text{senn}\omega \end{pmatrix} + i |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \text{senn}\omega \\ \cos n\omega \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\omega = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$.

La solución general está dada por

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos n\omega + c_2 \text{senn}\omega \\ -c_1 \text{senn}\omega + c_2 \cos n\omega \end{pmatrix}.$$

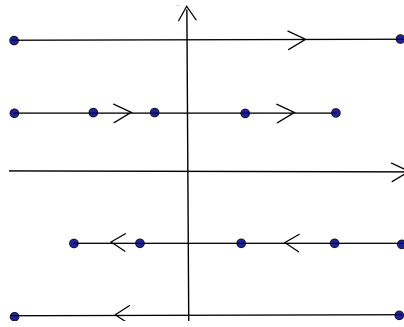


Figura 1.10: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, caso degenerado (inestable). Todos los punto en el eje y_1 son puntos de equilibrio.

Dada la condición inicial $y_1(0) = y_{10}$ y $y_2(0) = y_{20}$, obtenemos $c_1 = y_{10}$ y $c_2 = y_{20}$. La solución está dada por

$$\begin{aligned} y_1(n) &= |\lambda_1|^n (y_{10} \cos n\omega + y_{20} \text{sen} n\omega), \\ y_2(n) &= |\lambda_1|^n (-y_{10} \text{sen} n\omega + y_{20} \cos n\omega). \end{aligned}$$

Si hacemos $\cos \gamma = y_{10}/r_0$ y $\text{sen} \gamma = y_{20}/r_0$, donde $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} y_1(n) &= |\lambda_1|^n r_0 \cos(n\omega - \gamma), \\ y_2(n) &= -|\lambda_1|^n r_0 \text{sen}(n\omega - \gamma). \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares la solución se puede escribir como

$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n, \quad \theta(n) = -(n\omega - \gamma).$$

Si $|\lambda_1| < 1$, tenemos un *foco* asintóticamente estable (ver figura 1.11).

Si $|\lambda_1| > 1$, tenemos un foco inestable (figura 1.12).

Por otra parte, si $|\lambda_1| = 1$, tenemos un centro donde las órbitas son círculos (figura 1.13).

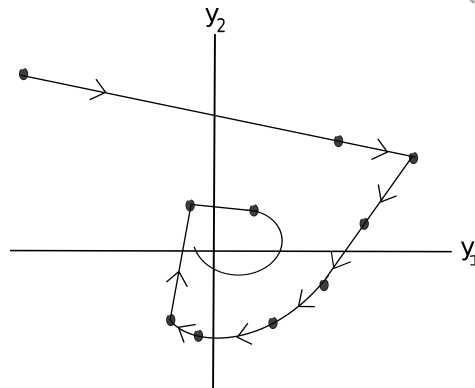
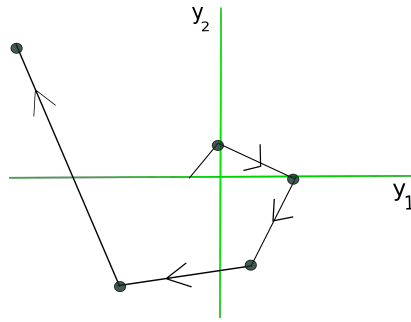
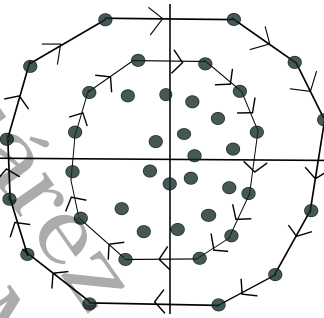


Figura 1.11: $|\lambda| < 1$, foco asintóticamente estable.

Figura 1.12: $|\lambda| > 1$, foco inestable.Figura 1.13: $|\lambda| = 1$, centro (estable).

1.3. Aspectos topológicos que definen caoticidad

Definición 1.8. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **localmente compacto**, si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad compacta, es decir, existe un conjunto abierto U y un conjunto compacto K , tal que $x \in U \subset K$.

Ahora damos la definición de un conjunto de Cantor.

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico y $S \subset X$.

- Un punto $x \in X$ es **punto límite** de S , si para toda bola abierta $B_r(x)$, se tiene

$$B_r(x) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

S es **perfecto**, si todo punto en S es un punto límite de S .

- S es **conexo**, si no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X .

S es **totalmente desconexo**, si los únicos subconjuntos no vacíos de S son los conjuntos de un punto.

- S es un **conjunto de Cantor**, si es totalmente desconexo, perfecto y compacto.

1.3.1. Dinámica simbólica

Existen varias definiciones para el concepto de caos, tales como la de Li Yorke, Devaney, Liapunov, Knudsen. Aquí se abordará la dada por Devaney. Una manera útil de analizar sistemas dinámicos caóticos es la dinámica simbólica.

Uno de los objetivos de la dinámica simbólica es comprender la existencia y estructura de conjuntos invariantes. En general, este es un problema difícil debido a la gran variedad de órbitas y combinaciones de órbitas que pueden ocurrir.

Ahora introducimos el *espacio de sucesiones o símbolos*, (\sum_n, \mathbf{d}) , de todas las sucesiones a dos lados (o bi-infinitas) en n símbolos.

Definición 1.10. *El espacio de sucesiones bi-infinitas en n símbolos, es el espacio métrico (\sum_n, \mathbf{d}) dado por:*

$$\begin{aligned} \sum_n &= \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} \\ &= \{\mathbf{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \mid a_j \in \{1, \dots, n\} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(a_j, b_j)}{4^{|j|}},$$

donde

$$\delta(a_j, b_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_j = b_j; \\ 1, & \text{si } a_j \neq b_j, \end{cases}$$

donde el punto decimal separa ambos lados de las sucesiones.

El siguiente teorema nos dice que dos puntos están muy cerca si sus $2k$ primeras entradas coinciden.

Teorema 1.11. (Teorema de proximidad). *Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \sum_n$. Si $a_j = b_j$, para todo $|j| \leq k$, entonces*

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \frac{2}{3} 4^{-k}.$$

Ahora definimos una de las funciones importantes en dinámica simbólica, dicha función es conocida como *función corrimiento*.

Definición 1.12. *La función corrimiento en n símbolos está definida por*

$$\begin{aligned} \sigma : \sum_n &\rightarrow \sum_n; \\ \mathbf{a} &\mapsto \sigma(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

de tal manera que

$$(\sigma(\mathbf{a}))_k = a_{k+1}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, si $\mathbf{a} = (\dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, entonces

$$\sigma(\mathbf{a}) = (\dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0; a_1, a_2, a_3, \dots);$$

esto es, σ mueve el punto y coma un lugar a la derecha.

La siguiente proposición se sigue aplicando el teorema 1.11 y de la definición de Σ_n .

Proposición 1.13. *La función corrimiento $\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ es una función uniformemente continua. Además es un homeomorfismo.*

Al trabajar con σ a veces es útil restringirnos al espacio. Así, consideremos

$$\Sigma_n^+ := \{\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \mid a_j \in \{1, \dots, n\} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\},$$

con métrica

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(a_j, b_j)}{4^{|j|}},$$

donde

$$\sigma(\mathbf{a}) = \sigma(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Teorema 1.14. *El espacio Σ_n es homeomorfo a Σ_n^+ . Además ambos son compactos.*

Demostración. Ver [KKM]. ◀

1.3.2. Noción de caos en el sentido de Devaney

Nuestros objetos de estudio serán ejemplos de sistemas dinámicos discretos (X, f) que están formados por una función continua $f : X \rightarrow X$ definida sobre un espacio métrico compacto X , que presenta caos. Como se mencionó antes existen distintas maneras de definir el caos. La definición dada por Devaney está conformada por tres elementos: transitividad, densidad de puntos periódicos y sensibilidad a condiciones iniciales.

1.3.3. Transitividad

Definición 1.15. *Un sistema dinámico (X, f) es **topológicamente transitivo**, si para cualquier par de conjuntos abiertos y no vacíos U y V , existe un entero positivo k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Intuitivamente, un punto $x \in X$ recorre todo X y su órbita se acerca tanto como deseemos a cualquier otro punto en X .

Observación 1.16. *Algunos autores eligen la siguiente condición como definición de transitividad topológica: Existe un punto $x \in X$ tal que la órbita de x es densa en X .*

Ejemplo 1.17. *La función corrimiento, σ , es transitiva.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $n = 2$, con $a_i = 0$ o 1 . Así, para probar que σ es transitivo, por la observación 1.16, necesitamos construir una órbita densa en Σ_2 . Para este propósito seleccionamos la sucesión a dos lados \tilde{x} , que tiene la forma

$$\dots 0011 0010 0001 0000 11 10 01 00.0 1 000 001 010 011 100 101 110 111 \dots$$

Entonces, para cualquier $s \in \Sigma_2$ y $k \in \mathbb{N}$ existe n tal que $\sigma^n(\tilde{x})$ y s coinciden en los k primeros términos. Así la $d(\sigma^n(\tilde{x}), s) < \frac{2}{3}4^{-k}$. Dado que k y s son arbitrarios, la órbita de \tilde{x} es densa en Σ_2 . ◀

1.3.4. Densidad del conjunto de puntos periódicos

Ejemplo 1.18. La función corrimiento, σ , tiene conjunto de puntos periódicos denso.

Demostración. Para mostrar que el conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ_n , sea $\mathbf{a} = \dots, a_{-1} \cdot a_0, a_1 \dots$ una sucesión arbitraria en Σ_n . Entonces para cada entero positivo n , la sucesión $\hat{\mathbf{a}}$ dada por

$$a_{-n} \dots a_{-2} a_{-1} \underbrace{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}_{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} a_{-n} \dots a_{-2} a_{-1} \cdot \underbrace{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}_{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} a_{-n} \dots$$

es de periodo $2n + 1$, cuyos $2n + 1$ de \mathbf{a} y $\hat{\mathbf{a}}$ términos coinciden, así por el teorema 1.11 se sigue que $d(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) < \frac{2}{3}4^{-k}$, lo que implica que el conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ_n . ◀

1.3.5. Dependencia sensible a condiciones iniciales

Definición 1.19. Sea X un espacio métrico y f una función continua. El sistema dinámico (X, f) posee **dependencia sensible a condiciones iniciales**, si existe $\delta > 0$ tal que para algún $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \epsilon$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

En otras palabras, un pequeño error en los datos iniciales será significativamente grande mediante las iteraciones. Esto hace imposible la predicción de un comportamiento futuro del sistema. El número δ se llama *constante de sensibilidad* de f .

Ejemplo 1.20. El sistema dinámico (Σ_n, σ) posee dependencia sensible a condiciones iniciales.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in \Sigma_n$. Tomemos n tal que $\frac{2}{3}4^{-n} < \epsilon$. Sea $y \in \Sigma_n$ con $y \neq x$, tal que los $n + 1$ primeros términos coinciden con los de x . Por el teorema 1.11 se tiene que $d(x, y) < \frac{2}{3}4^{-j}$. Pero dado que $x \neq y$ se sigue que existe $k > n$ tal que $x_k \neq y_k$. Por otro lado, notemos que los puntos $\sigma^k(x)$ y $\sigma^k(y)$ tiene como primer término x_k y $y_k \neq x_k$. Por lo que tenemos que

$$d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta(x_{n+k}, y_{n+k})}{4^{|n|}} > \frac{\delta(x_k, y_k)}{4^0} = 1.$$

Por lo tanto si hacemos $\beta = 1$, como la constante de sensibilidad de σ , el resultado se sigue al notar que

$$d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) > \beta = 1,$$

para algún k .

Sin embargo, en [BCDS] se prueba que la condición de sensibilidad a condiciones iniciales es innecesaria, demostrando que cualquier mapeo que sea transitivo y tenga conjunto de puntos periódicos denso posee dependencia sensible a condiciones iniciales.

Definición 1.21 (Caos en el sentido de Devaney). *Un sistema dinámico (X, f) es caótico, si cumple:*

1. *El conjunto de puntos periódicos, $Per(f)$, es denso en X ;*
2. *f es topológicamente transitiva;*
3. *f tiene dependencia sensible a condiciones iniciales.*

Una definición análoga de caos aplica para mapeos definidos en espacios topológicos, como se verá más adelante.

Ejemplo 1.22. *De los ejemplos 1.17, 1.20 y 1.18 se sigue que (\sum_n, σ) es un sistema dinámico caótico.*

1.3.6. Construcción de un conjunto de Cantor

Los conjuntos de Cantor ocurren a menudo con dinámica caótica. En esta sección se presenta una de las funciones más conocidas en sistemas dinámicos: *la función logística*, F_μ . Se verá que para elecciones de parámetros adecuados, la dinámica complicada de F_μ no se extiende a toda la recta si no que está contenida en un conjunto de Cantor invariante. Además, en la sección 1.3.7, se probará que el sistema dinámico que se obtiene al restringir F_μ a este conjunto de Cantor presenta caos.

Consideremos la función logística

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x),$$

sobre $I = [0, 1]$, donde $\mu > 4$. Notemos que en este caso $F_\mu(\frac{1}{2}) > 1$. Dado que $F_\mu(0) = 0$, se sigue del teorema del valor intermedio, que existe $\alpha_0 \in (0, \frac{1}{2})$, tal que $F_\mu(\alpha_0) = 1$. Dado que F_μ es monótona en $[0, \frac{1}{2}]$, el intervalo $I_0 = [0, \alpha_0]$ consiste de todos los puntos x a la izquierda de $\frac{1}{2}$

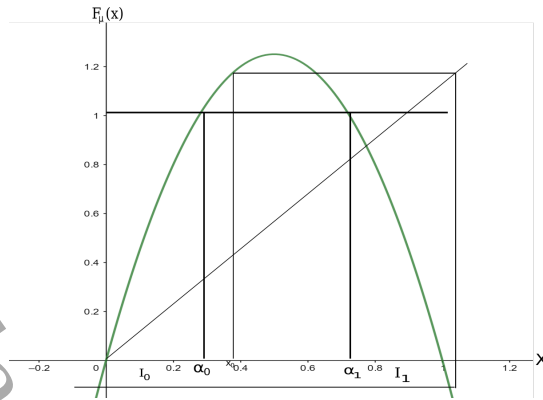
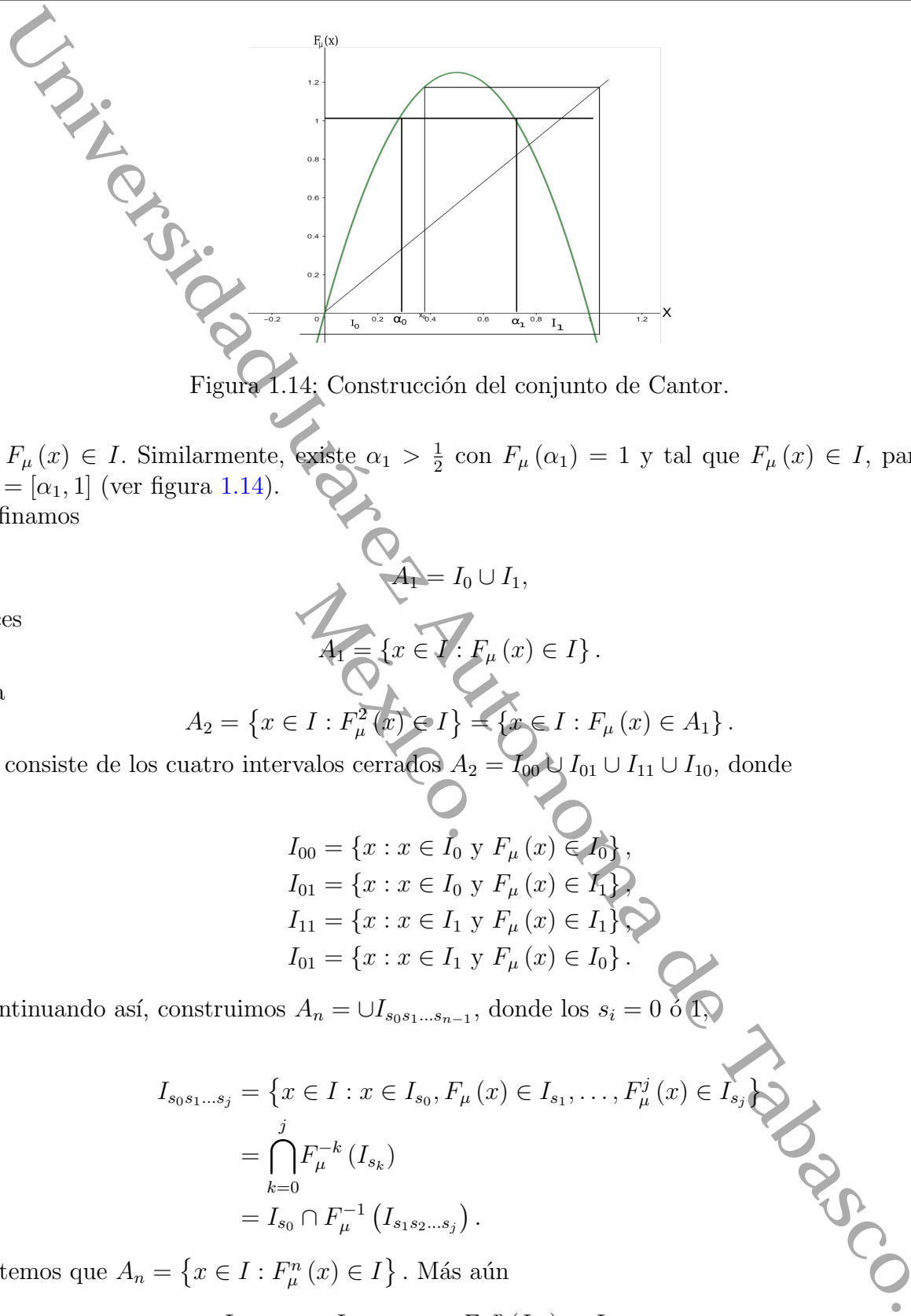


Figura 1.14: Construcción del conjunto de Cantor.

donde $F_\mu(x) \in I$. Similarmente, existe $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ con $F_\mu(\alpha_1) = 1$ y tal que $F_\mu(x) \in I$, para todo $x \in I_1 = [\alpha_1, 1]$ (ver figura 1.14).

Definamos

$$A_1 = I_0 \cup I_1,$$

entonces

$$A_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \in I\}.$$

Sea

$$A_2 = \{x \in I : F_\mu^2(x) \in I\} = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_1\}.$$

A_2 consiste de los cuatro intervalos cerrados $A_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{11} \cup I_{10}$, donde

$$\begin{aligned} I_{00} &= \{x : x \in I_0 \text{ y } F_\mu(x) \in I_0\}, \\ I_{01} &= \{x : x \in I_0 \text{ y } F_\mu(x) \in I_1\}, \\ I_{11} &= \{x : x \in I_1 \text{ y } F_\mu(x) \in I_1\}, \\ I_{10} &= \{x : x \in I_1 \text{ y } F_\mu(x) \in I_0\}. \end{aligned}$$

Continuando así, construimos $A_n = \cup I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$, donde los $s_i = 0$ ó 1 ,

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_j} &= \{x \in I : x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^j(x) \in I_{s_j}\} \\ &= \bigcap_{k=0}^j F_\mu^{-k}(I_{s_k}) \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_j}). \end{aligned}$$

Notemos que $A_n = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in I\}$. Más aún

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}.$$

Por lo tanto $A_{n+1} \subset A_n$. Definimos el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Lema 1.23. Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $|F'_\mu(x)| > 1 + \epsilon$, para todo $x \in A_1$. Además, la longitud de cada subintervalo en A_n es menor que $\frac{1}{(1+\epsilon)^n}$.

Teorema 1.24. El conjunto Λ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Consultar [R].

Definición 1.25. Sea $x \in \Lambda$. El **itinerario** de x es la sucesión de ceros y unos dada por

$$h(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

donde $s_j = 0$, si $F_\mu^j(x) \in I_0$ y $s_j = 1$, si $F_\mu^j(x) \in I_1$.

1.3.7. Conjugaciones Topológicas

Una forma de decir que dos espacios son topológicamente idénticos es exhibiendo un homeomorfismo entre ellos, y se dice que estos espacios son homeomorfos. Desde un punto de vista cualitativo podemos decir que los espacios son en esencia lo mismo. Un concepto de especial interés que está ligado a los homeomorfismos es la *conjugación topológica*.

En esta sección se verá que si dos funciones son conjugadas, entonces deben tener propiedades topológicas idénticas.

Definición 1.26. Dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son **conjugados**, denotado $f \sim g$, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$; es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h \simeq & & \downarrow \simeq h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Ejemplo 1.27. Consideremos el mapeo logístico

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad 0 < \mu \leq 4,$$

y el mapeo cuadrático

$$G(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{donde } a \neq 0.$$

Los sistemas dinámicos correspondientes son conjugados vía el homeomorfismo

$$h : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{-\mu - b}{2a}, \frac{\mu - b}{2a} \right],$$

$$h(x) = -\frac{\mu}{a}x + \frac{\mu - b}{2a}$$

para el valor de

$$c = \frac{b^2 - \mu^2 + 2\mu - 2b}{4a}.$$

El siguiente teorema nos dice que la conjugación preserva caos; es decir, que bajo conjugaciones las dinámicas de dos sistemas dinámicos son similares.

Teorema 1.28. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos conjugados. Entonces (X, f) es caótico si y sólo si (Y, g) lo es.

Demostración. Suponga que (X, f) presenta caos. Para mostrar que (Y, g) posee caos, primero mostramos que g es transitiva. Sean U y V dos conjuntos abiertos en Y y suponga que g es conjugada a f . Entonces $h(U)$ y $h(V)$ son conjuntos abiertos en X . Dado que (X, f) presenta caos, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^k(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $h(g^k(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto g es transitiva.

Ahora se muestra que el conjunto P de conjuntos periódicos en Y es denso en Y . Para este fin, sea U un subconjunto abierto de Y . Entonces, $h^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X y así debe contener un punto $x \in X$ de período k . Dado que $x = f^k(x)$, se sigue que $h(x) = h(f^k(x)) = g^k(h(x))$. Así $h(x)$ es un punto periódico de período k de g . Más aún, $h(x) \in h(h^{-1}(U)) = U$ y consecuentemente, el conjunto P es denso en Y . ◀

En el siguiente ejemplo mostramos que el mapeo logístico presenta caos, estableciendo una conjugación entre (Λ, F_μ) y (Σ_2, σ) .

Teorema 1.29. Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, el sistema dinámico (Λ, F_μ) es caótico.

Demostración. Por el teorema 1.14, podemos considerar el espacio Σ_n^+ en lugar de Σ_n , con $n = 2$ y $a_i = 0$ ó 1 . Con esto, se establece una conjugación entre F_μ y la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ la cual está definida por la función $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2^+$ dada en la definición 1.25.

Mostraremos que h es biyectiva, para lo cual se debe mostrar que si $a = (a_0 a_1 a_2 \dots) \in \Sigma_2^+$, entonces $h^{-1}(a)$ es exactamente un punto. Observe que si $x \in h^{-1}(a)$, entonces $x \in I_{a_0 a_1 \dots a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$h^{-1}(a) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Notemos además que

$$I_{a_0} \supset I_{a_0 a_1} \supset I_{a_0 a_1 a_2} \dots \supset I_{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} \supset \dots,$$

y por el lema 1.23, la longitud de $I_{a_0 a_1 \dots a_n}$ tiende a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $h^{-1}(a)$ consta de un solo punto de Λ .

Para probar que h es continua en $x \in \Lambda$, sea $\epsilon > 0$ y n tal que $\frac{2}{3}4^{-n} < \epsilon$. Sea $h(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$, $s_i \in \{0, 1\}$ el itinerario de x . Entonces, el conjunto A_{n+1} consta de todos los subintervalos

cerrados de la forma $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$, uno de los cuales contiene a x . Así $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset A_{n+1}$. Sean V el interior de $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ y δ la longitud del intervalo abierto V . Si p y q son dos puntos cualesquiera en V , entonces $|p - q| < \delta$ y además

$$\begin{aligned} h(p) &= s_0 s_1 \dots s_n p_1 p_2 \dots \\ h(q) &= s_0 s_1 \dots s_n q_1 q_2 \dots \end{aligned}$$

Por lo que, por el teorema de proximidad, tenemos que

$$d(h(p), h(q)) < \frac{2}{3} 4^{-n} < \epsilon.$$

Del mismo modo se prueba que h^{-1} es continua. Finalmente, veamos que h conjuga a F_μ y σ , ya que si x es un punto cualquiera de Λ , entonces $h(x) = s_0 s_1 \dots$, $s_i \in \{0, 1\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} h(F_\mu(x)) &= s_1 s_2 s_3 \dots \\ \sigma(h(x)) &= \sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = s_1 s_2 s_3 \dots \end{aligned}$$

Ya que (Σ_n, σ) es caótica, se sigue del teorema 1.28 que (Λ, F_μ) es caótica para $\mu > 2 + \sqrt{5}$. ◀

1.3.8. Caos en dos dimensiones

La Herradura de Smale

La teoría de dinámica simbólica también es útil para demostrar que un mapeo en el plano es caótico. A continuación se presenta un ejemplo muy famoso en un subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Sea $S = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario. Sea H_j para $j = 1, 2$ dos bandas horizontales, $H_j = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y_1^j \leq y \leq y_2^j\}$ con $0 \leq y_1^1 < y_2^1 < y_1^2 < y_2^2 \leq 1$. Similarmente, sea V_j para $j = 1, 2$ dos bandas verticales, $V_j = \{(x, y) : x_1^j \leq x \leq x_2^j, 0 \leq y \leq 1\}$ con $0 \leq x_1^1 < x_2^1 < x_1^2 < x_2^2 \leq 1$. Asuma que f es un difeomorfismo tal que $f(H_j) = V_j$ para $j = 1, 2$, $S \cap F^{-1}(S) = H_1 \cup H_2$, para $p \in H_1 \cup H_2$

$$Df_p = \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & b_p \end{pmatrix},$$

con $|a_p| = \mu < 1/2$ y $|b_p| = \lambda > 2$.

Sea A un semidisco de radio $\frac{1}{2}$ en la parte inferior de S , B el semidisco de radio $\frac{1}{2}$ en la parte superior de S , y $N = S \cup A \cup B$ el disco topológico formado por la unión de estas tres regiones.

Sea G la brecha entre H_1 y H_2 , H_3 la banda horizontal en la parte superior de S sobre H_2 y H_0 la banda horizontal en la parte inferior de S debajo de H_1 . f toma a G tal que $f(G) \subset B$ haciendo que la imagen se arquee de la parte superior de V_1 a la parte superior de V_2 y lleva a $H_0 \cup H_3$ sobre el semicírculo A . Por otra parte f es tal que $f(A)$ y $f(B)$ están contenidos en A (véase figura 1.15).

Podemos pensar a f como la composición de tres funciones g, h y s , esto es, $f = g \circ h \circ s$; donde s contrae a la región N en la dirección horizontal, h expande la región en la dirección vertical y g toma esta región más larga y delgada y la dobla en el medio y la coloca sobre N para cruzar a S dos veces como se muestra en la figura 1.15. La imagen de N bajo f así definida se le conoce con el nombre de herradura de Smale.

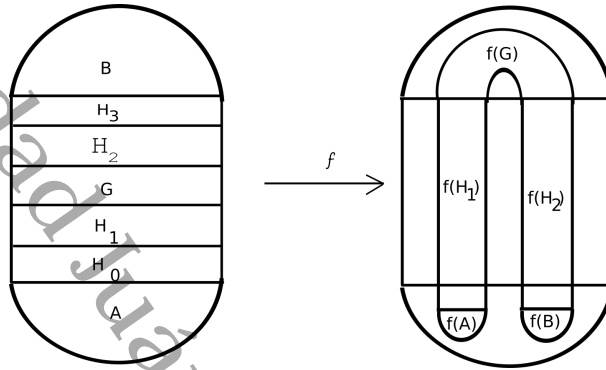


Figura 1.15: La imagen de N bajo f .

Dado que $f(N) \subset N$ se tiene que $f^2(N) \subset f(N) \subset N$. Entonces $f^2(N) = (g \circ h \circ s \circ f)(N)$ tiene su imagen dentro de $f(N)$ y consta de 4 bandas que cruzan a S , esto es la parte de la imagen en S , $f^2(N) \cap S$, es cuatro bandas verticales de ancho μ^2 (véase figura 1.16).

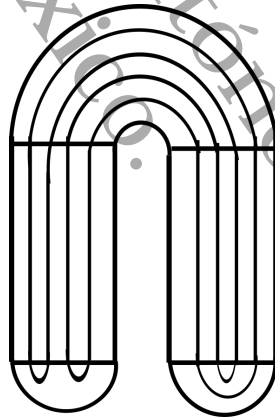


Figura 1.16: La imagen de N bajo f^2 .

Ahora definamos

$$\mathcal{S}_m^n = \bigcap_{j=m}^n f^j(S).$$

Por la descripción anterior, \mathcal{S}_0^1 es la unión de las dos bandas verticales V_1 y V_2 de ancho μ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^n &= f(\mathcal{S}_0^{n-1}) \cap S \\ &= [f(\mathcal{S}_0^{n-1}) \cap V_1] \cup [f(\mathcal{S}_0^{n-1}) \cap V_2] \\ &= f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_1) \cup f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_2). \end{aligned}$$

En particular para $n = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^2 &= [f(\mathcal{S}_0^1) \cap V_1] \cup [f(\mathcal{S}_0^1) \cap V_2] \\ &= f([V_1 \cup V_2] \cap H_1) \cup f([V_1 \cup V_2] \cap H_2). \end{aligned}$$

Entonces para $k = 1$ ó 2 , $f(\mathcal{S}_0^1) \cap V_k = f([V_1 \cap V_2] \cap H_k)$ es la unión de 2 bandas verticales de ancho μ^2 . Por inducción

$$\mathcal{S}_0^n = f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_1) \cup f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_2)$$

es la unión de 2^n bandas verticales de ancho μ^n . Tomando la intersección infinita

$$\mathcal{S}_0^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_0^n = C_1 \times [0, 1]$$

es un conjunto de Cantor de segmentos de rectas verticales. Notemos que si $q \in \mathcal{S}_0^\infty$ entonces $q \in f^j(S)$ y $f^{-j}(q) \in S$ para todo $j \geq 0$. Así \mathcal{S}_0^∞ es el conjunto de puntos cuyas iteradas hacia atrás permanecen en S .

Consideremos los siguientes conjuntos $\mathcal{S}_{-1}^0 = H_1 \cup H_2$ es la unión de dos bandas horizontales de altura $1/\lambda$, \mathcal{S}_{-2}^0 es la unión de cuatro bandas horizontales de altura $1/\lambda^2$ como se muestra en la figura 1.17.

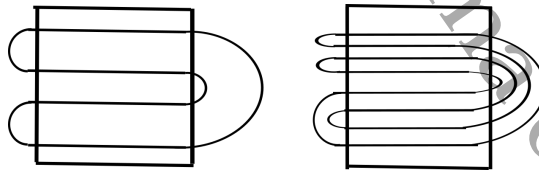


Figura 1.17: La imagen de N bajo f^{-1} y f^{-2} , respectivamente.

Por inducción, \mathcal{S}_{-m}^0 es la unión de 2^m bandas horizontales de altura $1/\lambda^m$, y

$$\mathcal{S}_{-\infty}^0 = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{-m}^0 = [0, 1] \times C_2,$$

es un conjunto de Cantor de segmentos de rectas horizontales. Ahora si $q \in \mathcal{S}_{-\infty}^0$, entonces para todo $j \geq 0$, $q \in f^{-j}(S)$ y $f^j(q) \in S$. Así $\mathcal{S}_{-\infty}^0$ es el conjunto de puntos cuyas iteradas hacia adelante están en S .

Al intersecar estos dos conjuntos obtenemos

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mathcal{S}_{-\infty}^{\infty} \\ &= \mathcal{S}_0^{\infty} \cap \mathcal{S}_{-\infty}^0 \\ &= C_1 \cap C_2,\end{aligned}$$

es la intersección de dos conjuntos de Cantor (ver figura 1.18); por lo que Λ es el conjunto de puntos cuyas iteradas hacia atrás y hacia adelante permanecen en S .

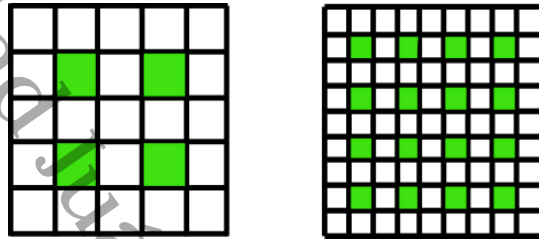


Figura 1.18: Conjuntos \mathcal{S}_{-1}^1 y \mathcal{S}_{-2}^2 , respectivamente.

Por otro lado, notemos que si $x \in \mathcal{S}_0^{\infty}$ podemos asociar la secuencia hacia adelante $x_0x_1x_2 \dots$, donde

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } f^n(x) \in H_1, \\ 2, & \text{si } f^n(x) \in H_2. \end{cases}$$

Similarmente, asignamos una sucesión hacia atrás $\dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}$ a cada $x \in \mathcal{S}_{-\infty}^0$ donde

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } f^{-n}(x) \in V_1; \\ 2, & \text{si } f^{-n}(x) \in V_2. \end{cases}$$

Combinando las secuencias hacia adelante y hacia atrás obtenemos la secuencia a dos lados $\dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2x_3 \dots$ en Σ_2 . Con esto hemos definido una conjugación $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ que nos ayudará a probar que la herradura de Smale es caótica.

El siguiente teorema prueba que $f|_{\Lambda}$ es topológicamente conjugada a σ en Σ_2 .

Teorema 1.30. *Sea Σ_2 el espacio de secuencias a dos lados con la función corrimiento σ . Defina $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ por $h(\mathbf{q}) = \mathbf{s}$ donde $f^j(\mathbf{q}) \in H_{s_j}$ para todo j . Entonces h es una conjugación topológica de $f|_{\Lambda}$ a σ en Σ_2 , es decir $f|_{\Lambda}$ presenta caos.*

Demostración. Sea $h(\mathbf{q}) = \mathbf{s}$ y $h(f(\mathbf{q})) = \mathbf{t}$. Entonces $f^{j+1}(\mathbf{q}) \in H_{s_{j+1}}$ pero también $f^{j+1}(\mathbf{q}) = f^j \circ f(\mathbf{q}) \in H_{t_j}$. Por lo tanto $s_{j+1} = t_j$, y $\sigma(\mathbf{q}) = \mathbf{t}$ ó $\sigma(h(\mathbf{q})) = h(f(\mathbf{q}))$. Esto prueba la primera propiedad de conjugación.

Mostraremos que h es un homeomorfismo. Para esto primero probamos que h es continua. Sea $h(\mathbf{q}) = \mathbf{s}$. Una vecindad para s está dada por

$$\mathcal{N} = \{t : t_j = s_j \text{ para } -\eta_0 \leq j \leq \eta_0\}.$$

Sea η_0 fijo, la continuidad de f asegura que existe $\delta > 0$ tal que para $\mathbf{p} \in \Lambda$ y $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq \delta$, $f^j(\mathbf{p}) \in H_{s_j}$ para $-\eta \leq j \leq \eta_0$. Así, si $\mathbf{t} = h(\mathbf{p})$ y $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq \delta$ entonces $\mathbf{t} \in \mathcal{N}$. Esto prueba la continuidad de h .

Ahora mostraremos que h es biyectiva. Entonces asumamos que $h(\mathbf{p}) = h(\mathbf{q}) = \mathbf{s}$. Entonces para todo j , tanto $f^{-j}(\mathbf{p})$ y $f^{-j}(\mathbf{q})$ están sobre la misma banda horizontal, $H_{s_{-j}}$, y así \mathbf{p}, \mathbf{q} están sobre la misma banda vertical, $f^j(H_{s_{-j}})$. Haciendo correr j de 1 a ∞ , tenemos que $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}})$ y así deben de estar en el mismo segmento de recta vertical. Ahora, haciendo correr a j de cero a menos infinito, tenemos que $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s_{-j}})$ y están en el mismo segmento de recta horizontal. Haciendo correr j de menos infinito a infinito tenemos que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Por lo que h es inyectiva.

Finalmente verificamos que h es sobre. Para esto aplicamos inducción en n para mostrar que $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}})$ es una banda vertical de ancho μ^n para todas las cadenas de símbolos $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. Sea $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. Para $n = 1$, este conjunto es solo $f(H_{s_{-1}}) = V_{s_{-1}}$ el cual es una banda vertical de ancho μ . Entonces

$$\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}}) = f\left(\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}(H_{s_{-j}})\right) \cap f(H_{s_{-1}}),$$

es una banda vertical de ancho μ^n ya que $\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}f(H_{s_{-j}})$ es una banda vertical de ancho μ^{n-1} . Haciendo tender n a infinito tenemos que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}}),$$

es un segmento de recta vertical. Similarmente, $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s_{-j}})$ es un segmento de recta horizontal, y por tanto $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}})$ es un solo punto \mathbf{q} . En particular, la intersección no es vacía. Para este \mathbf{q} , $h(\mathbf{q}) = \mathbf{s}$, y así h es sobreyectiva. Esto completa la prueba que h es una conjugación.

Por último dado que σ en Σ_2 es caótico, se sigue del teorema 1.28 que $f|_{\Lambda}$ es caótica. ◀

En este capítulo se presenta la teoría referente a conjuntos cúbicos. Lo expuesto aquí puede ser consultado en [KKM]

2.1. Conjuntos cúbicos

Definición 2.1. Un *intervalo elemental* es un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ de la forma

$$I = [\ell, \ell + 1] \text{ o } I = [\ell, \ell],$$

para algún $\ell \in \mathbb{Z}$. Cuando no haya confusión, para simplificar la notación, escribimos

$$[\ell] = [\ell, \ell],$$

si el intervalo contiene un único punto. Los intervalos elementales que consisten de un único punto se llaman degenerados, mientras que aquellos de longitud 1 son no degenerados.

Definición 2.2. Un *cubo elemental* Q es un producto finito de intervalos elementales, es decir,

$$Q := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d,$$

donde cada I_i es un intervalo elemental. El conjunto de todos los cubos elementales en \mathbb{R}^d es denotado por \mathcal{K}^d . El conjunto de todos los cubos elementales se denota por \mathcal{K} , y está definido como

$$\mathcal{K} := \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{K}^d.$$

Ejemplo 2.3. Los siguientes conjuntos son cubos elementales:

- a) $Q_1 := [1, 2] \times [0, 1] \times [-2, -1] \subset \mathbb{R}^3$.
- b) $Q_2 := [1] \times [1, 2] \times [0, 1] = [1] \times [1, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

Dado $Q := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ un cubo elemental, a d se le llama el *número de encaje* de Q , y se denota por $\text{emb}Q$.

I_i denotará la i -ésima componente de Q y se escribe como $I_i(Q)$.

La dimensión de Q es el número de componentes no degenerados de Q y se denota por $\text{dim}Q$. Un k -cubo es un cubo elemental de dimensión k .

El conjunto de cubos elementales de dimensión k (o k -cubo) se denota por

$$\mathcal{K}_k := \{Q \in \mathcal{K} \mid \text{dim}Q = k\}.$$

Además, escribimos

$$\mathcal{K}_k^d := \mathcal{K}_k \cap \mathcal{K}^d.$$

Proposición 2.4. Sean $Q \in \mathcal{K}_k^d$ y $P \in \mathcal{K}_{k'}^{d'}$. Entonces $Q \times P \in \mathcal{K}_{k+k'}^{d+d'}$.

Demostración. Dado que $Q \in \mathcal{K}_k^d$ entonces $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$, donde k de estos intervalos son no degenerados. Además, $P \in \mathcal{K}_{k'}^{d'} \Rightarrow P = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_{d'}$, donde k' de estos intervalos son no degenerados. Por lo tanto:

$$Q \times P = (I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d) \times (J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_{d'}).$$

Así $Q \times P \in \mathcal{K}$ (pues es el producto de $d + d'$ intervalos elementales) y

$$\text{emb}(Q \times P) = d + d' \text{ y } \text{dim}(Q \times P) = k + k'.$$

Por lo tanto, $Q \times P \in \mathcal{K}_{k+k'}^{d+d'}$.

La siguiente definición permite descomponer cubos elementales en objetos de menor dimensión.

Definición 2.5. Sean $P, Q \in \mathcal{K}$. Si $Q \subset P$, decimos que Q es una **cara** de P , denotado $Q \preceq P$. Si $Q \preceq P$ y $Q \neq P$, entonces Q es una **cara propia** de P , escrito como $Q \prec P$. Además, decimos que Q es una **cara primaria** de P , si Q es una cara de P y $\text{dim}Q = \text{dim}P - 1$.

Los cubos elementales constituyen los bloques básicos para el desarrollo de la teoría de homología a estudiar, por lo cual damos la siguiente definición.

Definición 2.6. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ es **cúbico**, si X se puede escribir como una unión finita de cubos elementales. Se definen

$$\mathcal{K}(X) := \{Q \in \mathcal{K} \mid Q \subset X\} \text{ y } \mathcal{K}_k(X) := \{Q \in \mathcal{K}(X) \mid \text{dim}Q = k\}.$$

Definición 2.7. Sea I un intervalo elemental. La celda elemental asociada a I es

$$\dot{I} := \begin{cases} (\ell, \ell + 1), & \text{si } I = [\ell, \ell + 1], \\ [\ell], & \text{si } I = [\ell, \ell]. \end{cases}$$

Además, si $Q \in \mathcal{K}$. Definimos $\dot{Q} := \dot{I}_1 \times \dot{I}_2 \times \cdots \times \dot{I}_d$.

2.2. Aritmética de conjuntos cúbicos

En esta sección se presentan las herramientas que se usan para pasar de la topología de un conjunto cúbico al álgebra de homología cúbica.

2.2.1. Cadenas cúbicas

A cada k -cubo elemental $Q \in \mathcal{K}_k^d$ le asociamos un símbolo algebraico \hat{Q} , llamado una k -cadena elemental de \mathbb{R}^d . Denotamos el conjunto de todas las k -cadenas elementales de \mathbb{R}^d por:

$$\hat{\mathcal{K}}_k^d := \{ \hat{Q} \mid Q \in \mathcal{K}_k^d \},$$

y el conjunto de todas las cadenas elementales de \mathbb{R}^d por:

$$\hat{\mathcal{K}}^d = \bigcup_{k=0}^{\infty} \hat{\mathcal{K}}_k^d.$$

Dada una colección finita $\{ \hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_m \} \in \hat{\mathcal{K}}_k^d$ de cadenas elementales de dimensión k , consideramos una k -cadena como la suma de la forma:

$$c = \alpha_1 \hat{Q}_1 + \alpha_2 \hat{Q}_2 + \dots + \alpha_m \hat{Q}_m,$$

donde las α_i son enteros arbitrarios. Si $\alpha_i = 0$, entonces $c = 0$. El conjunto de k -cadenas se denota por C_k^d . Definimos la suma de k -cadenas como:

$$\sum \alpha_i \hat{Q}_i + \sum \beta_i \hat{Q}_i := \sum (\alpha_i + \beta_i) \hat{Q}_i.$$

Además, dada una k -cadena $c = \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{Q}_i$, denotaremos a su inverso como $-c = \sum_{i=0}^m (-\alpha_i) \hat{Q}_i$.

Definición 2.8. El conjunto de k -cadenas, o cadenas de dimensión k en \mathbb{R}^d se denota por C_k^d .

Notemos que C_k^d es un grupo abeliano libre generado por las cadenas elementales de \mathcal{K}_k^d . En particular $\hat{\mathcal{K}}_k^d$ es la base de C_k^d .

La siguiente definición da una fórmula simple que describe c en términos de los elementos de \mathcal{K}_k^d ; esta fórmula es análoga al producto punto en un espacio vectorial.

Definición 2.9. Sean $c_1, c_2 \in C_k^d$, donde $c_1 = \sum \alpha_i \hat{Q}_i$ y $c_2 = \sum \beta_i \hat{Q}_i$, el **producto escalar** de las cadenas c_1 y c_2 se define como:

$$\langle c_1, c_2 \rangle := \sum \alpha_i \beta_i$$

Definición 2.10. Dados dos cubos elementales $P \in \mathcal{K}_k^d$ y $Q \in \mathcal{K}_{k'}^{d'}$, se define la **operación diamante**

$$\widehat{P} \diamond \widehat{Q} := \widehat{P \times Q}.$$

El **producto cúbico** de las cadenas $c_1 \in C_k^d$ y $c_2 \in C_{k'}^{d'}$, se define por

$$c_1 \diamond c_2 := \sum_{P \in \mathcal{K}_k, Q \in \mathcal{K}_{k'}} \langle c_1, \widehat{P} \rangle \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \widehat{P \times Q} \in C_{k+k'}^{d+d'}$$

La demostración de la siguiente proposición se sigue directamente de las definiciones anteriores.

Proposición 2.11. Sean c_1, c_2, c_3 cadenas

- $c_1 \diamond 0 = 0$.
- $c_1 \diamond (c_2 + c_3) = c_1 \diamond c_2 + c_1 \diamond c_3$, siempre que $c_1, c_2 \in C_k^d$.
- $(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 = c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3)$
- Si $c_1 \diamond c_2 = 0$ entonces $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$.

Proposición 2.12. Sea \widehat{Q} una cadena cúbica elemental de \mathbb{R}^d con $d > 1$. Entonces existen cadenas cúbicas elementales \widehat{I} y \widehat{P} con $\text{emb} \widehat{I} = 1$ y $\text{emb} \widehat{P} = d - 1$ tales que

$$\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}.$$

Más aún, esta descomposición de \widehat{Q} es única.

Demostración. Ya que \widehat{Q} es una cadena elemental, entonces Q es un cubo elemental. Sea

$$Q := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d.$$

Haciendo $I := I_1$ y $P := I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d$; entonces $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$.

Ahora si $\widehat{Q} = \widehat{J} \times \widehat{P}'$, para algún $J \in \mathcal{K}^1$ y $P' \in \mathcal{K}^{d-1}$, entonces $\widehat{I_1} \times \widehat{P} = \widehat{J} \times \widehat{P}'$, de lo cual obtenemos que $I_1 \times P = J \times P'$. Dado que $I_1, J \subset \mathbb{R}$, se sigue que $I_1 = J$ y $P = P'$. Esto prueba que la descomposición es única. ◀

Hasta aquí hemos discutido las cadenas cúbicas en general, ahora consideremos un conjunto cúbico $X \in \mathbb{R}^d$ y definamos el conjunto $\widehat{\mathcal{K}}_k(X) := \{ \widehat{Q} \mid Q \in \mathcal{K}_k(X) \}$.

Definición 2.13. Sea $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico. Sea $\widehat{\mathcal{K}}_k(X) := \{ \widehat{Q} \mid Q \in \mathcal{K}_k \}$. El **conjunto de k -cadenas** de X , $C_k(X)$, es el subgrupo de C_k^d generado por los elementos de $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$.

Notemos que $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ es una base de $C_k(X)$. Por otro lado dado, que para cualquier conjunto cúbico X la familia $\mathcal{K}_k(X)$ es finita, se tiene que $C_k(X)$ es un grupo abeliano de dimensión finita.

2.3. Operador frontera

La noción de frontera de una región se puede algebrizar dando origen a los complejos de cadenas y a sus fronteras. A continuación se presenta la noción de frontera y sus propiedades. Lo presentado en esta sección puede ser consultado en [KKM].

Consideramos un cubo Q con $d = \dim Q = 1$. Esto es, Q es un intervalo elemental de la forma

$$Q = [\ell] \in \mathcal{K}_0^1 \quad \text{ó} \quad Q = [\ell, \ell + 1], \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Definamos

$$\partial_k \widehat{Q} := \begin{cases} 0, & \text{si } Q = [\ell], \\ \widehat{[\ell + 1]} - \widehat{[\ell]}, & \text{si } Q = [\ell, \ell + 1]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si $d > 1$ también es posible descomponer a Q como producto de cubos elementales, esto es, haciendo $Q = I \times P$, donde

$$I = I_1, \quad P = I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d.$$

Por la proposición 2.12, tenemos que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$, y esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.14. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el **operador o aplicación frontera cúbica** es el homomorfismo $\partial_k : C_k^d \rightarrow C_{k-1}^d$ dado por

$$\partial_k(\widehat{Q}) := \partial_{k_1}(\widehat{I}) \diamond \widehat{P} + (-1)^{k_1} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P},$$

donde $k_1 = \dim I$ y $k_2 = \dim P$.

Podemos extender esta definición a todas las cadenas por linealidad; es decir, si $c = \alpha_1 \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \widehat{Q}_m$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\partial_k c = \alpha_1 \partial_k \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \partial_k \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \partial_k \widehat{Q}_m, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

En caso de no haber confusión, preferimos escribir ∂ en vez de ∂_k para simplificar la notación.

Proposición 2.15. Sean c y c' cadenas cúbicas, entonces

$$\partial(c \diamond c') = \partial c \diamond c' + (-1)^{\dim c} c \diamond \partial(c').$$

Demostración. Asumamos, por un momento, que para $Q, Q' \in \mathcal{K}$,

$$\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') = \partial \widehat{Q} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim Q} \widehat{Q} \diamond \partial(\widehat{Q}'). \quad (2.2)$$

Sean $c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i$ y $c' = \sum_{j=1}^{m'} \alpha'_j \widehat{Q}'_j$. Notemos que $\dim c = \dim Q_i$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\partial(c \diamond c') &= \partial \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \diamond \sum_{j=1}^{m'} \alpha'_j \widehat{Q}'_j \right) \\
&= \partial \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \widehat{Q}_i \diamond \widehat{Q}'_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \partial \left(\widehat{Q}_i \diamond \widehat{Q}'_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \left(\partial(\widehat{Q}_i \diamond \widehat{Q}'_j) + (-1)^{\dim Q_i} \widehat{Q}_i \diamond \partial(\widehat{Q}'_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \left(\partial(\widehat{Q}_i \diamond \widehat{Q}'_j) + (-1)^{\dim c} \widehat{Q}_i \diamond \partial(\widehat{Q}'_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \partial \widehat{Q}_i \diamond \alpha'_j \widehat{Q}'_j + (-1)^{\dim c} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \widehat{Q}_i \diamond \alpha'_j \partial(\widehat{Q}'_j) \\
&= \partial c \diamond c' + (-1)^{\dim c} c \diamond \partial(c').
\end{aligned}$$

Por lo cual, para probar la proposición es necesario verificar (2.2). La prueba se hará por inducción en $d := \text{emb}Q$.

Si $d = 1$ entonces el resultado se sigue de (2.1). Supongamos por inducción que (2.2) es válido para cadenas de dimensión menor que $d > 1$.

Para el caso $d > 1$, por 2.12, $Q = I \times P$, donde $\text{emb}I = 1$ y $\text{emb}P = d - 1$. Así, por la definición de ∂ tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') &= \partial(\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}') \\
&= \partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \partial(\widehat{P} \diamond \widehat{Q}').
\end{aligned}$$

Dado que $\widehat{P} \diamond \widehat{Q}'$ satisface la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') &= \partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \left(\partial \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim P} \widehat{P} \diamond \partial \widehat{Q}' \right) \\
&= \partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim I + \dim P} \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \partial \widehat{Q}' \\
&= \left(\partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} \right) \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim Q} \widehat{Q} \diamond \partial \widehat{Q}' \\
&= \partial \widehat{Q} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim Q} \widehat{Q} \diamond \partial \widehat{Q}',
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la definición del operador frontera. ◀

Una vez más, con el fin de simplificar la notación, escribimos $\partial \circ \partial$ en vez de $\partial_k \circ \partial_{k+1}$. La siguiente proposición enuncia una de las propiedades fundamentales del operador frontera.

Proposición 2.16.

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Demostración. Dado que ∂ es un operador lineal, es suficiente probar esta propiedad para las cadenas cúbicas elementales. Nuevamente la demostración se hace por inducción sobre el número de encaje.

Sea Q un intervalo elemental. Si $Q = [\ell]$, entonces por definición $\partial \widehat{Q} = 0$ y así $\partial(\partial \widehat{Q}) = 0$. Si $Q = [\ell, \ell + 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \partial(\partial \widehat{Q}) &= \partial(\partial[\widehat{\ell, \ell + 1}]) \\ &= \partial([\widehat{\ell + 1}] - [\widehat{\ell}]) \\ &= \partial[\widehat{\ell + 1}] - \partial[\widehat{\ell}] \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ahora asumamos que $Q \in \mathcal{K}^d, d > 1$. Entonces $Q = I \times P$, donde

$$I = I_1, \quad P = I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d.$$

Por la proposición 2.12

$$\begin{aligned} \partial(\partial \widehat{Q}) &= \partial(\partial(\widehat{I \times P})) \\ &= \partial(\partial(\widehat{I \diamond P})) \\ &= \partial(\partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P}) \\ &= \partial(\partial \widehat{I} \diamond \widehat{P}) + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial(\widehat{I} \diamond \partial \widehat{P}) \\ &= \partial \partial \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial(\widehat{I} \diamond \partial \widehat{P}) \\ &= (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} (\partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial \partial \widehat{P}) \\ &= (-1)^{\dim \partial \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial \widehat{I} \diamond \partial \widehat{P}. \end{aligned}$$

El último paso usa la hipótesis de inducción que es válida si el número de encaje es menor que d .

Observe que si $\dim \widehat{I} = 0$, entonces $\partial \widehat{I} = 0$, por lo cual tenemos que los términos en la suma son 0 y por lo tanto $\partial \widehat{Q} = 0$. Por otra parte si $\dim Q = 1$, entonces $\dim \partial \widehat{I} = 0$ y por lo tanto los términos de la suma se cancelan unos a otros, obteniendo el resultado deseado. ◀

Ahora consideremos cadenas cúbicas de un conjunto cúbico fijo X . Una observación que se tiene es: el operador frontera lleva cadenas en X a cadenas en X , es decir, $\partial_k(C_k(X)) \subset C_{k-1}(X)$.

Como consecuencia de esto, la restricción del operador ∂ a cadenas en X ,

$$\partial_k^X : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$$

dada por

$$\partial_k^X(c) := \partial_k(c)$$

tiene sentido y la siguiente definición se justifica.

Definición 2.17. *El operador frontera para un conjunto cúbico X se define por*

$$\partial_k^X : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$$

que se obtiene por la restricción de $\partial_k : C_k^d \rightarrow C_{k-1}^d$ a $C_k(X)$.

Notemos que ∂_k^X también satisface que $\partial_k^X \circ \partial_{k+1}^X = 0$.

Una definición importante que se da a continuación es la de complejo de cadenas cúbicas.

Definición 2.18. *El **complejo de cadenas cúbicas** para un conjunto cúbico X es*

$$\mathcal{C} = \{C_k(X), \partial_k^X\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

donde C_k son los subgrupos de k -cadenas cúbicas generados por $\mathcal{K}_k(X)$ y ∂_k^X es el operador frontera cúbico restringido a X .

2.3.1. Homología de conjuntos cúbicos

Consideremos un conjunto cúbico $X \in \mathbb{R}^d$. Una k -cadena $z \in C_k(X)$ se llama un *ciclo* en X , si $\partial z = 0$. Definimos el conjunto de todos los k -ciclos en X como

$$Z_k(X) := \ker \partial_k^X = C_k(X) \cap \ker \partial_k \subset C_k(X).$$

Por otra parte, una k -cadena $z \in C_k(X)$ es llamada una *frontera* en X , si existe $c \in C_{k+1}(X)$ tal que $\partial c = z$. El conjunto de todos los elementos frontera se define por

$$B_k(X) := \text{im } \partial_{k+1}^X = \partial_{k+1}(C_{k+1}(X)) \subset C_k(X)$$

Notemos que $\partial c = z$ implica $\partial z = \partial^2 c = 0$, luego toda frontera es un ciclo, así $B_k(X)$ es un subgrupo de $Z_k(X)$.

Para dar a los ciclos no triviales una estructura algebraica, se introduce la siguiente relación de equivalencia:

$$z_1 \sim z_2 \text{ si } z_1 - z_2 \text{ es una frontera en } X, \text{ es decir, } z_1 - z_2 \in B_k(X).$$

Si $z_1 \sim z_2$ decimos que son *homólogos*.

Las clases de equivalencia son elementos del grupo cociente $Z_k(X)/B_k(X)$. De esta forma tenemos la siguiente definición.

Dado $z \in Z_k(X)$, $[z]_X \in H_k(X)$ es la clase de z en X , y simplemente se escribirá $[z]$.

Definición 2.19. *El k -ésimo grupo de homología cúbica, o simplemente el k -ésimo grupo de homología de X , es el grupo cociente*

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X).$$

A la colección de todos los grupos de homología de X

$$H_*(X) := \{H_k(X)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

se le llama *homología de X* .

Ejemplo 2.20. *Sea $X = \emptyset$. Entonces $C_k(X) = 0$, para todo k , y por lo tanto*

$$H_k(X) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ejemplo 2.21. *Sea $X = \{x_0\} \subset \mathbb{R}^d$, el conjunto cúbico que consiste de un solo punto. Entonces $x_0 = [l_1] \times [l_2] \times \dots \times [l_d]$*

Por ser X un punto, las únicas k -cadenas que se tienen es cuando $k = 0$. Entonces

$$C_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además $Z_0(X) \cong C_0(X) = \mathbb{Z}$. Dado que $C_1(X) = 0, B_0(X) = 0$ por lo que, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. También, $C_k(X) = 0, k \geq 1, H_k(X) = 0, k \geq 1$. Por lo tanto

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Terminamos esta parte enunciando una proposición importante de los grupos de homología.

Proposición 2.22. Si $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$, donde $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$, entonces

$$H(X) := \bigoplus_{i=0}^n H(X_i).$$

2.3.2. Componentes conexas y $H_0(X)$

En esta sección se explora lo que implican los grupos de homología sobre la topología del conjunto, entre otras cosas se muestra que el 0-ésimo grupo de homología mide el número de componentes conexas del conjunto cúbico.

Recordemos que para cualquier espacio topológico X y para cualquier punto $x \in X$, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x es un subconjunto conexo de X llamado *componente conexa* de x en X , denotado por $cc_X(x)$.

Teorema 2.23. Para cualquier $x, y \in X$ se tiene $cc_X(x) = cc_X(y)$ o $cc_X(x) \cap cc_X(y) = \emptyset$.

Demostración. Asumamos que $cc_X(x) \cap cc_X(y) \neq \emptyset$. Entonces $cc_X(x) \cup cc_X(y)$ es conexo. Dado que contiene a x y a y se debe tener que $cc_X(x) \cup cc_X(y) \subset cc_X(x)$ y $cc_X(x) \cup cc_X(y) \subset cc_X(y)$. Se sigue que

$$cc_X(x) = cc_X(x) \cup cc_X(y) = cc_X(y).$$

Proposición 2.24. Sea X un conjunto cúbico. Para cualquier $x \in X$, existe un vértice $V \in \mathcal{K}_0(X)$ tal que $cc_X(x) = cc_X(V)$.

Demostración. Si x es un vértice, el resultado es inmediato. Supongamos que x no es un vértice. Entonces existe un cubo elemental Q tal que $x \in \overset{\circ}{Q}$. Por lo tanto, $\overset{\circ}{Q} \cap X \neq \emptyset$, y se sigue que $Q \subset X$. Sea V cualquier vértice de Q . Dado que Q es un cubo, es conexo, $Q \subset cc_X(x)$ y consecuentemente $V \in cc_X(x)$. Por lo tanto $cc_X(V) \cap cc_X(x) \neq \emptyset$, y por el teorema anterior, $cc_X(V) = cc_X(x)$.

Corolario 2.25. Un conjunto cúbico puede tener solamente un número finito de componentes conexas.

Demostración. Por la proposición 2.24, toda componente conexa de un conjunto cúbico es una componente conexa de uno de sus vértices, y un conjunto cúbico tiene solamente un número finito de vértices.

Definición 2.26. Una sucesión de vértices $V_0, V_1, \dots, V_n \in \mathcal{K}_0(X)$ es un **camino por aristas** en X , si existen aristas $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{K}_1(X)$ tales que V_{i-1}, V_i son dos caras de E_i para $i = 1, 2, \dots, n$. Para $V, V' \in \mathcal{K}_0(X)$ escribimos $V \sim_X V'$ si existe un camino por arista $V_0, V_1, \dots, V_n \in \mathcal{K}_0(X)$ en X tal que $V = V_0$ y $V' = V_n$. Decimos que X es **conexo por aristas**, si $V \sim_X V'$ para cualquier $V, V' \in \mathcal{K}_0(X)$.

Proposición 2.27.

- Todo cubo elemental es conexo por aristas.
- Si X y Y son conjuntos cúbicos conexos por aristas y $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es conexo por aristas.

Definición 2.28. Sea $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_d^k$. El **soporte** de la cadena c es el conjunto cúbico

$$|c| := \bigcup_{i=1}^n Q_i.$$

Proposición 2.29. Asuma que $V \sim_X V'$ para algún $V, V' \in \mathcal{K}_0(X)$. Entonces existe una cadena $c \in C_i(X)$ tal que $|c|$ es conexo y $\partial c = V - V'$.

Demostración. Sea $V_0, V_1, \dots, V_n \in \mathcal{K}_0(X)$ un camino por aristas de $V = V_0$ a $V' = V_n$ y sean $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{K}_1(X)$ las aristas correspondientes. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el camino por aristas es mínimo. Entonces cualesquiera dos aristas, así como también cualesquiera dos vértices en el camino son diferentes. Se mostrará que para algunos coeficientes $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ la cadena

$$c := \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{E}_i$$

satisface la conclusión de la proposición. Procediendo por inducción en n .

$n = 1$, entonces $\partial E_1 = \pm (\widehat{V}_1 - \widehat{V}_0)$. Tomando $c = \alpha_1 \widehat{E}_1$ con un coeficiente apropiado $\alpha_1 \in \{-1, 1\}$, obtenemos $\partial(c) = \widehat{V}_1 - \widehat{V}_0$. Dado que $|c| = |\alpha_1 E_1| = E_1$, es conexo. Consideremos ahora el segundo paso de inducción. Sea

$$c := \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \widehat{E}_i$$

con coeficientes elegidos para que $\partial(c) = \widehat{V}_{n-1} - \widehat{V}_0$ y $|c|$ sea conexo. Elegimos α_n para que $\partial(\alpha_n E_n) = \widehat{V}_n - \widehat{V}_{n-1}$. Entonces obviamente $\partial c = \widehat{V}_n - \widehat{V}_0$. Dado que $|c| = |c' \cup E_n|$ y $|c' \cup E_n| \neq \emptyset$, se sigue del teorema 2.23 que $|c|$ es conexo. ◀

Ahora para $x \in X$ definimos la *componente conexa por arista de $x \in X$* , como la unión de los subconjuntos conexos por aristas de X que contienen a x , denotado por $ecc_X(x)$. Puesto que el número de subconjuntos cúbicos de X es finito, se puede usar inducción como en la proposición 2.27 para probar la siguiente proposición.

Proposición 2.30. *Para cualquier $x \in X$, $ecc_X(x)$ es conexo por arista.*

Aplicando el mismo argumento que el de las componentes conexas se puede mostrar que se tiene la siguiente contraparte del teorema 2.23.

Proposición 2.31. *Para cualesquiera $x, y \in X$ o bien $ecc_X(x) = ecc_X(y)$ o $ecc_X(x) \cap ecc_X(y) = \emptyset$.*

Teorema 2.32. *Un conjunto cúbico X es conexo si y solo si es conexo por aristas.*

Proposición 2.33. *Si X es cúbico, entonces para cada $x \in X$ su componente conexa $cc_X(x)$ es un conjunto cúbico.*

El siguiente corolario nos dice que para un vértice, la componente conexa y la componente conexa por arista son lo mismo. Este se sigue del teorema 2.32 y la proposición 2.33.

Corolario 2.34. *Si X es un conjunto cúbico, entonces para cada $x \in X$ sus componente conexa y componente conexa por arista coinciden.*

El siguiente lema es útil para demostrar el teorema principal de esta sección.

Lema 2.35. *Sea X un conjunto cúbico y X_1, X_2, \dots, X_n sus componentes conexas. Si $c_i \in C_k(X_i)$ son cadenas de dimensión k , entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \right| = \bigcup_{i=1}^n |c_i|.$$

Teorema 2.36. *Sea X un conjunto cúbico. Entonces $H_0(X)$ es un grupo libre abeliano. Más aún, si $\{P_i \mid i = 1, \dots, n\}$ es una colección de vértices en X que consiste de un vértice de cada componente conexa de X , entonces*

$$\left\{ \left[\widehat{P}_i \right] \in H_0(X) \mid i = 1, \dots, n \right\}$$

forma una base para $H_0(X)$.

Demostración. Sea $X_i := cc_X(P_i)$ y sea $c \in Z_0(X)$. Se tiene que de la proposición 2.29, $[c] = [\widehat{P}_i]$ para algún $P \in \mathcal{K}_0(X_i)$. Dado que $Z_0(X) = C_0(X)$, existen enteros α_P tal que

$$[c] = \sum_{P \in \mathcal{K}_0(X)} \alpha_P [\widehat{P}] = \sum_{i=0}^n \sum_{P \in \mathcal{K}_0(X_i)} \alpha_P [\widehat{P}] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{P \sim_X P_i} \alpha_P \right) [\widehat{P}_i].$$

Esto muestra que las clases $[\widehat{P}_i]$ generan a $H_0(X)$. Falta mostrar que los generadores son libres, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i [\widehat{P}_i] = 0,$$

implica que todo $\alpha_i = 0$. Haciendo $c := \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{P}_i = 0$. Dado que $[c] = 0$, podemos seleccionar $a, b \in C_1(X)$ tal que $c = \partial b$. Definamos $b = \sum_{E \in K_1(X)} \beta_E \widehat{E}$. Sea

$$b_i = \sum_{E \in K_1(X_i)} \beta_{E_P} \widehat{E}.$$

Tenemos

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{P}_i = c = \partial b = \sum_{i=1}^n \partial b_i.$$

Así

$$0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \widehat{P}_i - \partial b_i)$$

Luego, como

$$|\alpha_i \widehat{P}_i - \partial b_i| \subset X_i$$

obtenemos que

$$\emptyset = |\mathbf{0}| = \bigcup_{i=1}^n |\alpha_i \widehat{P}_i - \partial b_i|,$$

lo cual prueba que $|\alpha_i \widehat{P}_i - \partial b_i| = \emptyset$; esto es, $\alpha_i \widehat{P}_i = \partial b_i$.

Ahora sea $\epsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo de grupo definido por $\epsilon(\widehat{P}) = 1$, para todo vértice $P \in X$. Sea E una arista elemental. Entonces $\partial \widehat{E} = \widehat{V}_1 - \widehat{V}_0$, donde V_0 y V_1 son vértices de E . Observe que

$$\begin{aligned} \epsilon(\partial \widehat{E}) &= \epsilon(\widehat{V}_1 - \widehat{V}_0) \\ &= \epsilon(\widehat{V}_1) - \epsilon(\widehat{V}_0) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\epsilon(\partial b_i) = 0$ y por lo tanto

$$0 = \epsilon(\partial b_i) = \epsilon(\alpha_i \widehat{P}_i) = \alpha_i \epsilon(\widehat{P}_i) = \alpha_i.$$

2.4. Colapsos elementales

Los conjuntos cúbicos muy simples contienen un gran número de cubos elementales. En esta sección se discute un método que permite reducir el número de cubos elementales necesarios para calcular la homología de un conjunto cúbico. Para poder hacer esto necesitamos introducir los siguientes conceptos.

Definición 2.37. Sea X un conjunto cúbico y sea $Q \in \mathcal{K}(X)$. Si Q no es una cara propia de algún $P \in \mathcal{K}(X)$, decimos que Q es una **cara maximal** en X . El conjunto $\mathcal{K}_{max}(X)$ es el conjunto de caras maximales en X . Una **cara libre** en X es una cara propia de exactamente un cubo elemental en X .

Ejemplo 2.38. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Entonces $\mathcal{K}_0(X) \cup \mathcal{K}_1(X) \cup \mathcal{K}_2(X)$ es el conjunto de caras propias. El conjunto de caras libres está dado por $\mathcal{K}_2(X)$. Para este caso, $\mathcal{K}_{max}(X) = \{X\}$.

Ejemplo 2.39. En la figura 2.1, los siguientes cubos elementales son caras libres:

$$[-1] \times [2], [0, 1] \times [0], [0, 1] \times [1], [0] \times [0, 1], [1] \times [0, 1].$$

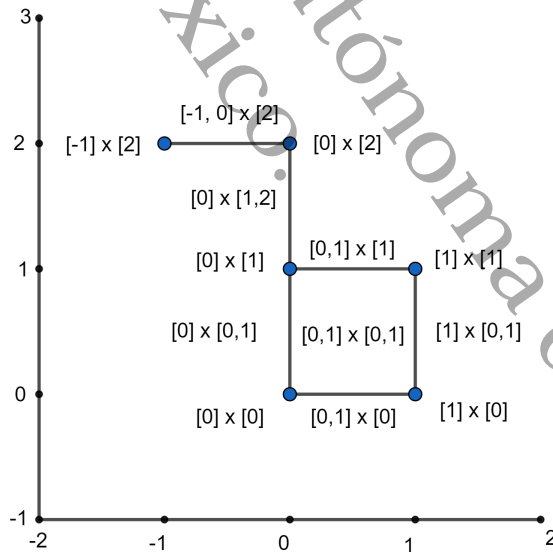


Figura 2.1: Figura del ejemplo 2.39.

Lema 2.40. Sea X un conjunto cúbico. Sea $Q \in \mathcal{K}(X)$ una cara libre en X y supóngase $Q \prec P \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $P \in \mathcal{K}_{max}(X)$ y $\dim Q = \dim P - 1$.

Demostración. Asumamos que $P \prec R$. Entonces $Q \prec R$, contradiciendo la unicidad de P . Asíumase que $\dim Q < \dim P - 1$. Entonces existe $R \in \mathcal{K}(X)$ distinto de Q y P tal que $Q \prec R \prec P$, lo cual una vez más conduce una contradicción. ◀

Definición 2.41. Sea Q una cara libre en X y sea P el único cubo en $\mathcal{K}(X)$ tal que Q es una cara propia de P . Sea $\mathcal{K}'(X) := \mathcal{K}(X) \setminus \{Q, P\}$. Definamos

$$X' = \bigcup_{R \in \mathcal{K}'(X)} R.$$

Decimos que X' es el espacio cúbico obtenido de X vía un colapso elemental de P por Q .

Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden consultarse en [KKM].

Proposición 2.42. Si X' es un espacio cúbico obtenido de X vía un colapso elemental de P por Q , entonces $\mathcal{K}(X') = \mathcal{K}'(X)$.

Lema 2.43. Sea X un conjunto cúbico y X' obtenido de X vía un **colapso elemental** de $P_0 \in \mathcal{K}_k(X)$ por $Q_0 \in \mathcal{K}_{k-1}(X)$. Entonces

- $\{c \in C_k(X) \mid \partial c \in C_{k-1}(X')\} \subset C_k(X')$;
- Para todo $c \in C_{k-1}(X)$, existe $c' \in C_{k-1}(X')$ tal que $c - c' \in B_{k-1}(X)$.

Teorema 2.44. Sea X un conjunto cúbico y supongamos que X' se obtiene de X vía un colapso elemental de $P_0 \in \mathcal{K}_k(X)$ por $Q_0 \in \mathcal{K}_{k-1}(X)$. Entonces

$$H_*(X') \cong H_*(X).$$

Corolario 2.45. Sea $Y \subset X$ conjuntos cúbicos. Aún más asíumase que Y se puede obtener de X por una serie de colapsos elementales. Entonces

$$H_*(Y) \cong H_*(X).$$

2.5. Homología de Complejo de Cadenas

A continuación presentamos una descripción algebraica de la homología.

Definición 2.46. Un complejo de cadenas $\mathcal{C} = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ consiste de grupos abelianos C_k , llamados cadenas, y homomorfismos $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$, llamados operadores frontera, tal que

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0.$$

Decimos que \mathcal{C} es un **complejo de cadenas libres**, si es libre para todo $k \in \mathbb{Z}$. Los ciclos de \mathcal{C} son los subgrupos

$$Z_k := \ker \partial_k,$$

y las fronteras son los subgrupos

$$B_k := \text{im} \partial_{k+1}.$$

Notemos que $Z_k := \ker \partial_k$ implica que $\text{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$, por lo que la siguiente definición tiene sentido.

Definición 2.47. El k -ésimo grupo de homología del complejo de cadenas \mathcal{C} es

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X).$$

La homología de \mathcal{C} es la sucesión

$$H_* := \{H_k(\mathcal{C})\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

2.6. Homología Reducida

Sabemos que el 0-ésimo grupo de homología de un conjunto cúbico es isomorfo a \mathbb{Z} .

Definimos el homomorfismo de grupos $\epsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía a cada vértice a 1. Este homomorfismo satisface que $\epsilon \circ \partial_1 = 0$, lo cual significa que

$$\text{im} \partial_1 \subset \ker \epsilon.$$

Esto nos permite definir lo siguiente.

Definición 2.48. Sea X un conjunto cúbico. El **complejo de cadena cúbica aumentada** de X está dada por $\{\tilde{C}_k, \tilde{\partial}_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1\}}$, donde

$$\tilde{C}_k = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = -1, \\ C_k(X), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\tilde{\partial}_k := \begin{cases} \epsilon, & \text{si } k = 0; \\ \partial_k, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que todas las 0-cadenas son 0-ciclos de $C_0(X)$, mientras los 0-ciclos de $\tilde{C}_0(X)$ están solamente en $\ker \epsilon$. Esto motiva la definición de homología reducida.

Definición 2.49. Los grupos de homología $H(\tilde{C}(X))$ son las **homología reducida** de X y se denotan por

$$\tilde{H}_k(X).$$

Una cadena $z \in C_k(X)$ que es un ciclo en \tilde{Z}_k es un ciclo reducido en $\mathcal{C}(X)$. La clase de homología de un ciclo reducido z con respecto a la homología reducida es denotada por $[z]_{\sim}$.

El siguiente teorema relaciona los dos tipos de homología que se tienen hasta ahora.

Teorema 2.50. Sea X un conjunto cúbico. Entonces $\tilde{H}_0(X)$ es un grupo abeliano y

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & \text{para } k = 0; \\ \tilde{H}_k(X), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, si $\{P_i \mid i = 0, \dots, n\}$ es una colección de vértices en X que consiste de un vértice para cada componente conexa de X , entonces

$$\left\{ [P_i - P_0]_{\sim} \in \tilde{H}_0(X) \mid i = 0, \dots, n \right\},$$

forman una base para $\tilde{H}_0(X)$.

2.7. Homología relativa

En esta sección dado un par de conjuntos cúbicos $A \subset X$, definimos los grupos de homología relativas $H_*(X, A)$. Estos grupos se pueden usar para medir como difieren los grupos de homología de X y A . Empezamos con la siguiente definición.

Definición 2.51. Un **par cúbico** es un par de conjuntos cúbicos X y A con la propiedad que $A \subset X$. Un par cúbico es denotado por (X, A) .

En un sentido, queremos omitir A y todo lo que esté unido a él. Ir de la topología al álgebra requiere considerar las cadenas de homología $C_0(A)$ y $C_0(X)$. En este nivel, omitir un subconjunto $A \subset X$ se puede ver en términos de la operación cociente

$$C_0(X) / C_0(A).$$

En este espacio cociente, la clase de equivalencia de cualquier vértice dual de A es cero. Sin embargo, dado que queremos ignorar todo lo que está conectado a A , puede existir un vértice P en X que no está en A pero que es conexo por aristas a él. Para tal P , la clase de equivalencia de \widehat{P} en el espacio cociente $C_0(X) / C_0(A)$ no es trivial.

Ejemplo 2.52. Sean $X = [0, 2] \cup \{3\}$ y $A = [0, 1]$. El vértice $[3]$ es la única componente conexa disjunta de A . El grupo cociente $C_0(X) / C_0(A)$ es generado por las clases de equivalencia de $\widehat{[2]}$ y $\widehat{[3]}$. Pero $\widehat{[2]}$ es homólogo a $\widehat{[1]} \in C_0(A)$. En efecto,

$$\partial[\widehat{1, 2}] = \widehat{[2]} - \widehat{[1]}.$$

Esto nos sugiere que deberíamos solo contar los vértices que no son homólogos a un vértice de A . Así queremos una teoría de homología en la que los vértices duales homólogos a aquellos de A son contados como los “homólogos a 0 relativo a A ”. Por esto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.53. Sea (X, A) un par cúbico. Las **cadena relativa de X módulo A** son los elementos de los grupos cociente

$$C_k(X, A) := C_k(X) / C_k(A).$$

La clase de equivalencia de una cadena $c \in \mathcal{C}(X)$ relativa a $\mathcal{C}(A)$ es denotado por $[c]_A$. Dado que $C_k(X, A)$ es un grupo abeliano libre, tiene sentido lo siguiente.

Definición 2.54. La **cadena compleja relativa de X módulo A** está dado por

$$\{C_k(X, A), \partial_k^{(X, A)}\},$$

donde $\partial_k^{(X, A)} : C_k(X, A) \rightarrow C_{k-1}(X, A)$ está definido por

$$\partial_k^{(X, A)}([c]_A) := [\partial_k c]_A.$$

El complejo de cadenas da lugar a los ciclos k -relativos,

$$Z_k(X, A) := \ker \partial_k^{(X, A)},$$

las k -fronteras relativas

$$B_k(X, A) := \operatorname{im} \partial_{k+1}^{(X, A)},$$

y finalmente los grupos de homología

$$H_k(X, A) = Z_k(X, A) / B_k(X, A).$$

Proposición 2.55. Sean X un conjunto cúbico conexo y A un subconjunto cúbico no vacío de X . Entonces

$$H_0(X, A) = 0.$$

Demostración. Necesitamos mostrar que todo elemento del grupo

$$Z_0(X, A) = C_0(X, A) = C_0(X) / C_0(A)$$

es una frontera relativa. Notemos que $Z_0(X, A)$ está generado por el conjunto

$$\left\{ \left[\widehat{P} \right]_A \mid P \in \mathcal{K}_0(X) \setminus \mathcal{K}_0(A) \right\}.$$

Tomemos cualquier $Q \in \mathcal{K}_0(A)$. Entonces $[\widehat{Q}]_A = 0$. Tomemos cualquier $P \in \mathcal{K}_0(X) \setminus \mathcal{K}_0(A)$. Dado que X es conexo, por el teorema 2.36 $[\widehat{Q}]_A = 0$ implica que todos los vértices duales son homólogos en X y así existe $c \in C_1(X)$ tal que $\partial_1 c = \widehat{P} - \widehat{Q}$. Luego

$$\partial_k^{(X,A)}([c]_A) := [\widehat{P} - \widehat{Q}]_A = [\widehat{P}]_A - [\widehat{Q}]_A = [\widehat{P}]_A.$$

Por lo tanto $[\widehat{P}]_A \in B_0(X, A)$. ◀

Proposición 2.56. *Sea (X, A) un par cúbico. Entonces el número de componentes conexas de X que no intersecan a A es la dimensión de $H_0(X, A)$.*

El siguiente teorema indica que la homología relativa también nos da una nueva comprensión de la homología reducida $\tilde{H}_0(X)$.

Teorema 2.57. *Sean X un conjunto cúbico y $P \in \mathcal{K}_0(X)$ un vértice elegido de X . Entonces*

$$H_*(X, P) \cong \tilde{H}_*(X).$$

Más precisamente, tenemos las siguientes identidades

$$\tilde{H}_k(X) = H_k(X) = H_k(X, P), \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

El isomorfismo

$$H_0(X, P) \cong \tilde{H}_0(X)$$

es inducido por el isomorfismo $\phi : \tilde{Z}_0(X) \rightarrow Z_0(X, P)$ dado sobre los elementos de la base

$$\{\widehat{Q} - \widehat{P} \mid Q \in \mathcal{K}_0(X) \setminus \{P\}\}$$

de $\tilde{Z}_0(X)$ por

$$\phi(\widehat{Q} - \widehat{P}) := [Q]_P.$$

Terminamos esta sección con unos ejemplos.

Ejemplo 2.58. *Sean $X = [0, 1]^2$ y $A = bd[0, 1]^2$, la frontera topológica de $[0, 1]^2$. Se puede verificar que $C_k(X) = C_k(A)$, para todo $k \neq 2$. Así $C_k(X, A) = 0$ para todo $k \neq 2$. Por otro lado, $\widehat{[0, 1]^2}$ es una base para $C_2(X)$ mientras que $C_2(A) = 0$. Por lo que $\widehat{[0, 1]^2}$ es una base para $C_2(X, A)$. Dado que $C_1(X, A) = 0$, tenemos que $\widehat{[0, 1]^2}$ es una base para $Z_2(X, A)$ y así $H_2([0, 1]^2, bd[0, 1]^2) = \mathbb{Z}$. Por lo tanto,*

$$H_2([0, 1]^2, bd[0, 1]^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este ejemplo también notemos que X/A es homeomorfo a \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 2.59. Sea (Y, D) el par cúbico, donde $Y = [-3, 3]$ y $D = [-3, -1] \cup [2, 3]$. Calculemos $H_*(Y, D)$. Dado que $C_k(Y) = 0$ para $k \geq 2$, $H_k(Y, D) = 0$, $k \geq 2$. Por la proposición 2.55, $H_0(Y, D) = 0$. Por lo que solo falta determinar $H_1(Y, D)$. Dado que $C_2(Y, D) = 0$, entonces $H_1(Y, D) = Z_1(Y, D)$.

Sea $z := \widehat{[-1, 0]} + \widehat{[0, 1]} + \widehat{[1, 2]}$ y $\eta := [z]_D$. No es difícil ver que $\partial z = \widehat{[2]} - \widehat{[-1]}$ lo cual está en $C_0(D)$, entonces $\partial^{(Y,D)} \eta = 0$. Así $\eta \in Z_1(Y, D)$. Ahora se mostrará que η genera a $Z_1(Y, D)$, con lo cual concluiremos que $H_1(Y, D) = Z_1(Y, D) \cong \mathbb{Z}$. Primero, sea $c \in C_1(Y)$ una cadena con $\partial^{(Y,D)} [c]_D = 0$. Podemos escribir c como

$$c = c_1 + c_2 + c_3,$$

donde $c_1 \in [-3, -1]$, $c_2 \in [-1, 2]$ y $c_3 \in [2, 3]$. Entonces $[c_1]_D = [c_3]_D = 0$, así sus fronteras son también cero. Consecuentemente, $\partial^{(Y,D)} [c_1]_D = \partial^{(Y,D)} [c_2]_D = 0$. Ahora,

$$c_2 = \alpha_1 \widehat{[-1, 0]} + \alpha_2 \widehat{[0, 1]} + \alpha_3 \widehat{[1, 2]}.$$

La condición $\partial c_2 \in C_0(D)$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, por lo que $c_2 = \alpha_1 z$. Finalmente, $[c]_D = [c_2]_D = \alpha_1 \eta$.

Por último, enunciemos una propiedad fundamental de los grupos de homología, la propiedad de escisión, que describe cuando los grupos relativos $H_n(X, A)$ no se ven afectados al cortar o remover un subconjunto $Z \subset A$. Esta propiedad se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.60. Sea (X, A) un par y sea $W \subset A$ tal que $\bar{W} \subset \mathring{A}$. Entonces el mapeo inclusión $i : (X - W, A - W) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo $i_* : H_n(X - W, A - W) \rightarrow H_n(X, A)$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

2.8. Sucesiones exactas

Dado un par de conjuntos cúbicos (X, A) , en esta sección vemos que se tiene un teorema que relaciona $H_*(X, A)$, a $H_*(X)$ y $H_*(A)$. Para poder enunciarlo necesitamos utilizar herramientas de álgebra homológica.

Desde el punto de vista algebraico, la homología comienza con un complejo de cadenas $\{C_k, \partial_k\}$, esto es una sucesión de grupos abelianos y mapeos

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

con la propiedad de que

$$\text{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k.$$

Tenemos el siguiente caso especial.

Definición 2.61. Una sucesión (finita o infinita) de grupos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow$$

es **exacta** en G_2 , si

$$\text{im}\psi_3 = \text{ker}\psi_2.$$

Además, diremos que una sucesión es exacta, si es exacta en cada grupo. Si la sucesión tiene un primer o último elemento, entonces es automáticamente exacta en ese grupo.

Se presentan algunos lemas concernientes a sucesiones exactas.

Lema 2.62. $G_1 \xrightarrow{\psi_0} G_0 \xrightarrow{\phi} 0$ es una sucesión exacta si y solo si ψ_1 es un epimorfismo, esto es, es un homomorfismo sobreyectivo.

Demostración. Supóngase que $G_1 \xrightarrow{\psi_1} G_0 \xrightarrow{\phi} 0$ es una sucesión exacta. Dado que $\phi : G_0 \rightarrow 0$, $\text{ker}\phi = G_0$. Por exactitud, $\text{im}\psi_1 = \text{ker}\phi = G_0$, esto es, ψ_1 es un epimorfismo.

Inversamente, si ψ_1 es un epimorfismo, entonces $\text{im}\psi_1 = G_0$. Dado que $\phi : G_0 \rightarrow 0$, $\text{ker}\phi = G_0$. Por lo tanto, $\text{im}\psi_1 = \text{ker}\phi$. ◀

Lema 2.63. $0 \xrightarrow{\phi} G_1 \xrightarrow{\psi_1} G_0$ es una sucesión exacta si y solo si ψ_1 es un monomorfismo, esto es, es un homomorfismo inyectivo.

Demostración. Supóngase que la sucesión es exacta. Por ser ϕ homomorfismo tenemos que $\text{im}\phi = 0$, así $\text{ker}\psi_1 = 0$, lo cual implica que ϕ es un monomorfismo.

Recíprocamente, si ψ_1 es un monomorfismo, entonces $\text{ker}\psi_1 = 0$. Dado que $\phi : 0 \rightarrow G_1$, $\text{im}\phi = 0$. Por lo tanto, $\text{im}\phi = \text{ker}\psi_1$. ▶

Argumentando de la misma manera podemos probar lo siguiente.

Lema 2.64. Suponga que

$$G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \xrightarrow{\psi_1} G_0$$

es una sucesión exacta. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. ψ_3 es un epimorfismo;
2. ψ_2 es el homomorfismo cero;
3. ψ_1 es un monomorfismo.

Ahora tenemos la siguiente definición.

Definición 2.65. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 2.66. Considere un par cúbico (X, A) y para cada k la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow C_k(A) \xrightarrow{i_k} C_k(X) \xrightarrow{\pi_k} C_k(X, A) \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

donde i_k es el mapeo inclusión y π_k es el mapeo cociente.

Notemos que i_k es un monomorfismo, ya que es una inclusión. Por el lema 2.63

$$0 \xrightarrow{\phi} C_k(A) \xrightarrow{i_1} C_k(X)$$

es exacta. Similarmente, por la definición de cadenas relativas, π_k es un epimorfismo, y por el lema 2.62 se tiene que

$$C_k(X) \xrightarrow{\pi_k} C_k(X, A) \longrightarrow 0$$

es exacta. Así, solo falta mostrar que es exacta en $C_k(X)$

Por definición, $\ker \pi_k = C_k(A)$. Más aún, como i_k es una inclusión, $\text{im} i_k = C_k(A)$, lo cual significa que $\text{im} i_k = \ker \pi_k$.

A la sucesión exacta corta (2.3) se le llama *sucesión exacta corta de un par*, además esta sucesión cumple la siguiente definición.

Definición 2.67. Una *sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0$$

se **escinde**, si existe un subgrupo $H \subset G_2$ tal que

$$G_2 = \text{im} \psi_3 \oplus H.$$

La ecuación anterior es equivalente a $G_2 = \ker \psi_2 \oplus H$.

2.9. Homomorfismo de conexión

En esta sección se probará el teorema fundamental del álgebra homológica. Además, se verá como los grupos de homología relativa se relacionan con los grupos de homología de cada espacio en la pareja.

Definición 2.68. Sean $\mathcal{A} = \{A_k, \partial_k^A\}$, $\mathcal{B} = \{A_k, \partial_k^B\}$ y $\mathcal{C} = \{C_k, \partial_k^C\}$ complejos de cadenas. Sea 0 el complejo de cadena trivial, que es el complejo de cadena en el que cada grupo es el grupo trivial. Sea $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ mapeos de cadenas. La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es una **sucesión exacta corta de complejos de cadenas**, si para cada k

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{\phi_k} B_k \xrightarrow{\psi_k} C_k \longrightarrow 0$$

es una **sucesión exacta corta**.

Ahora se presenta el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [KKM].

Teorema 2.69 (Lema del Zig-zag o Lema de la serpiente). *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

una **sucesión exacta corta de complejos de cadenas**. Entonces para cada k existe un homomorfismo

$$\partial_* : H_{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow H_k(\mathcal{A})$$

tal que

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi_*} H_{k+1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi_*} H_{k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_k(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

es una **sucesión exacta larga**.

El mapeo ∂_* es llamado **homomorfismo de conexión**.

Consecuentemente, tenemos el siguiente corolario para un par cúbico.

Corolario 2.70 (La sucesión exacta de homología de un par). *Sea (X, A) un par cúbico. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k+1}(X) \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \longrightarrow \cdots$$

donde $i : \mathcal{C}(A) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$ es el mapeo inclusión, $\pi : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X, A)$ es el mapeo cociente, y ∂_* es el homomorfismo de conexión.

La homología relativa da un criterio necesario para que A sea un retracto por deformación de X , este resultado se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 2.71. *Si (X, A) es un par cúbico y A es un retracto por deformación de X , entonces $H_*(X, A) = 0$.*

Demostración. Considera la siguiente porción de la sucesión exacta larga de un par:

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Los espacios A y X tienen el mismo tipo de homotopía y por tanto $H_*(A) \cong H_*(X)$. Más aún el mapeo inclusión $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ es un isomorfismo.

Ahora, dado que i_* es un isomorfismo, $\pi_*(H_k(X)) = 0$ y por tanto, ∂_* es un monomorfismo. Sin embargo, dado que i_* es un isomorfismo, $\partial_*(H_k(X, A)) = 0$ y así $H_k(X, A) = 0$.

2.10. Sucesión de Mayer-Vietoris

Un conjunto cúbico X es *acíclico*, si

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ son dos conjuntos acíclicos cuya intersección forma un conjunto acíclico, entonces se puede asegurar que $X \cup Y$ es también un conjunto acíclico.

En esta sección se generaliza este resultado para mostrar como la homología puede ser calculada partiendo de subconjuntos.

Teorema 2.72 (Mayer-Vietoris). *Sea X un espacio cúbico. Sean A_0 y A_1 subconjuntos cúbicos de X tal que $X = A_0 \cup A_1$ y sea $B = A_0 \cap A_1$. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A_0) \oplus H_k(A_1) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

2.11. Índice de punto fijo

Todo endomorfismo φ de un grupo cíclico libre está determinado por un entero; es decir, $\varphi(x) = dx$ para algún $d \in \mathbb{Z}$ y x es un generador del dominio. Con esta observación se define la noción de grado en topología algebraica. En esta sección se define el índice de punto fijo y se presentan algunas de sus propiedades, para lo cual nos basamos en [De].

Definición 2.73. *Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ (respectivamente $f : (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \rightarrow (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$) es un mapeo entonces el endomorfismo inducido f_* de $\tilde{H}_n \mathbb{S}^n \cong \mathbb{Z}$ (respectivamente $H_{n+1}(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$) está dado por $f_*(x) = \deg(f) \cdot x$, donde $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ es un entero únicamente determinado. Este entero es llamado el **grado de f** .*

Proposición 2.74. 1. $\deg(id) = +1$,

2. $\deg(f \circ f') = \deg(f) \cdot \deg(f')$,

3. $f \simeq f'$, entonces $\deg(f) = \deg(f')$,

4. el grado de una equivalencia homotópica es ± 1 ,

5. Si $f : (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \rightarrow (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ entonces $\deg(f) = \deg(f|_{\mathbb{S}^n})$.

El grado puede ser determinado localmente (con respecto al rango) como el número de pre-ímagenes de un punto, cada pre-imagen contada con su multiplicidad. Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una función

continua y sea $q \in \mathbb{S}^n$. Si $X = \mathbb{S}^n$ consideremos $U, V, W \subset X$ tales que

$$\begin{aligned} X - W &= V \\ W &= X - V = \mathbb{S}^n - V \\ U - W &= V - f^{-1}(q). \end{aligned}$$

Por lo que $U = \mathbb{S}^n - f^{-1}(q)$. Por otro lado, también notemos que

$$\begin{aligned} U &= W \cup (V - f^{-1}(q)) \\ &= W \cup (V \cap f^{-1}(q)^c). \end{aligned}$$

Observemos que $f^{-1}(q) \subset V$ lo que implica

$$\begin{aligned} V^c &\cap W \subset f^{-1}(q)^c \\ &\cong (W \cup V) \cap (W \cup f^{-1}(q)^c) \\ &\cong \mathbb{S}^n \cap f^{-1}(q)^c \\ &= \mathbb{S}^n - f^{-1}(q). \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{S}^n - V \\ U &= \mathbb{S}^n - f^{-1}(q), \end{aligned}$$

veamos que $\overline{W} \subset \text{int}(U)$.

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \overline{\mathbb{S}^n - V} = \mathbb{S}^n - V \\ \text{int}(U) &= \text{int}(\mathbb{S}^n - f^{-1}(q)) = \mathbb{S}^n - f^{-1}(q), \end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{W} \subset \text{int}(U)$, y por escisión tenemos

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{S}^n - (\mathbb{S}^n - V), (\mathbb{S}^n - f^{-1}(q)) - (\mathbb{S}^n - V)) \\ = H_k(V, V - f^{-1}(q)) \cong H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - f^{-1}(q)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por otra parte, si X es un espacio topológico arco-conexo y $p \in X$

$$H_n(X, \{p\}) \cong \tilde{H}_n(X), \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

En efecto, de la sucesión

$$\dots \longrightarrow H_k(\{p\}) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(X, \{p\}) \longrightarrow H_{k-1}(\{p\}) \longrightarrow \dots$$

tenemos que para $k > 1$,

$$H_k(X) = \tilde{H}_k(X) \cong H_k(X, \{p\}),$$

y si $k = 1$

$$H_1(\{p\}) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{1-1} H_1(X, \{p\}) \longrightarrow H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(X)$$

de lo cual se obtiene

$$0 \longrightarrow H_1(X) = \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{\cong} H_1(X, \{p\}) \longrightarrow 0.$$

Cuando $k = 0$, tenemos que

$$H_1(X) \xrightarrow{\cong} H_1(X, \{p\}) \longrightarrow H_0(\{p\}) \xrightarrow{\cong} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, \{p\}) \longrightarrow 0, \quad (2.5)$$

entonces $\ker(j_*) = H_0(X)$, y por lo tanto, $j_* = 0$. Así

$$H_0(X, \{p\}) = 0 = \tilde{H}_0(X).$$

De lo anterior concluimos que

$$H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n(\mathbb{S}^n, \{p\}) = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = H_n(\mathbb{S}^n), \quad (2.6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde el primer isomorfismo se obtiene debido a que $\mathbb{S}^n - \{q\}$ es del mismo tipo de homotopía que $\{p\}$ y donde $p \in \mathbb{S}^n - \{q\}$.

De la discusión anterior concluimos lo siguiente.

Dados $V \subset \mathbb{S}^n, n > 0$, un conjunto abierto, $f: V \rightarrow \mathbb{S}^n$ un mapeo y $q \in \mathbb{S}^n$ un punto tal que $f^{-1}(q)$ es compacto. La composición

$$H_n \mathbb{S}^n \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - f^{-1}\{q\}) \underset{Esc.}{\cong} H_n(V, V - f^{-1}(q)) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n \mathbb{S}^n \quad (2.7)$$

donde Esc., es el isomorfismo de escisión de la ecuación (2.4) y el último isomorfismo está dado por la ecuación (2.6); tiene la forma

$$x \mapsto (\deg_Q f) x$$

donde $\deg_Q f$ es un entero al cual se le llama el *grado local de f sobre q* .

Ejemplo 2.75. Si $q \notin \text{im}(f)$, entonces $\deg_q(f) = 0$. Si $f: V \rightarrow \mathbb{S}^n$ es el mapeo inclusión, entonces $\deg_q(f) = 1$, para todo $q \in V$. Si f es un homeomorfismo en un conjunto abierto $f(V) \in \mathbb{S}^n$, entonces $\deg_q(f) = \pm 1$, para todo $q \in f(V)$.

Si $q \notin \text{im}(f)$, entonces $f^{-1}(q) = \emptyset$. Así se tiene la sucesión

$$H_n \mathbb{S}^n \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \emptyset) \cong H_n(V, V - \emptyset) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \emptyset) \cong H_n \mathbb{S}^n$$

y ya que $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \emptyset) = 0$, concluimos que en este caso $\deg_q(f) = 0$.

Si f es el mapeo inclusión, entonces $f(V) = V$, y $f(q) = q, p \in V$.

$$H_n \mathbb{S}^n \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n(V, V - \{q\}) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n \mathbb{S}^n. \quad (2.8)$$

Notemos que si $n > 1$, tenemos la sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow 0 = H_n(\mathbb{S}^n - \{q\}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^n - \{q\}) = 0 \longrightarrow \dots$$

Ahora, en el caso $n = 1$, tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow 0 = H_1(\mathbb{S}^1 - \{q\}) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{j_*} H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - \{q\}) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^1 - \{q\}) = \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{\cong} H_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

De esta forma, j_* es isomorfismo, para toda $n \geq 1$ y en (2.8) tenemos que

$$H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n(V, V - \{q\}) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n \mathbb{S}^n$$

Como f es inclusión, entonces $f_*(O_k) = O_k = 1 \cdot O_k$, donde O_k es un generador de $H_n(V, V - \{q\})$ y por lo tanto $\deg_q(f) = 1$.

Proposición 2.76. Si $f^{-1}(q) \subset K \subset U \in V$, donde K es compacto y U es una vecindad de K , entonces el grado de f sobre q está dado por

$$H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \cong H_n(U, U - K) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - \{q\}) \cong H_n \mathbb{S}^n$$

Proposición 2.77. Sea $f : V \rightarrow \mathbb{S}^n$ y $q \in \mathbb{S}^n$ tal que $f^{-1}(q)$ es compacto. Suponga que V es la unión finita de conjuntos abiertos, $V = \bigcup_{\lambda=1}^r V_\lambda$, tal que los conjuntos $f_\lambda^{-1}(q)$ donde $f_\lambda = f|_{V_\lambda}$, son mutuamente disjuntos, es decir, $(f_\lambda^{-1}(q)) \cap (f_\mu^{-1}(q)) = \emptyset$, si $\lambda \neq \mu$. Entonces

$$\deg_q(f) = \sum_{\lambda=1}^r \deg_q(f_\lambda).$$

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y $q \in \mathbb{R}^n$. El grado de g sobre q cuenta el número de puntos en $g^{-1}(q)$, asumiendo que este conjunto es finito o compacto.

Notemos que $g(x) = x$ es equivalente a $(i - g)(x) = 0$, donde i es el mapeo inclusión. El conjunto de puntos fijos de g , F_g , es igual a $(i - g)^{-1}(0)$. Por lo que el conjunto de puntos fijos puede ser medido por el grado de $(i - g)$ sobre 0.

Para todo generador o de $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n > 0$; y todo par $K \subset V$ (donde $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, K es compacto) existe una clase fundamental $o_K \in H_n(V, V - K)$ alrededor de K . Esta clase o_K es la imagen de o bajo $H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - K) \cong H_n(V, V - K)$, y está caracterizada por la propiedad de que su imagen bajo $H_n(V, V - K) \rightarrow H_n(V, V - p) \cong \mathbb{Z}$ coincide con o_p para todo $p \in K$.

Definición 2.78. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Asuma que el conjunto de puntos fijos de g , $F = F_g = \{x \in V \mid g(x) = x\}$, es compacto. Consideremos la función

$$(i - g)_* : H_n(V, V - F) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$$

(donde $(i - g)x = x - g(x)$). El **índice de punto fijo** $I_g \in \mathbb{Z}$ de g se define por

$$(i - g)_*(o_F) = I_g \cdot o_0,$$

donde o_0 genera $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, e

$$(i - g) : (V, V - F) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Proposición 2.79. Dado $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ como en la definición 2.78, sea W un conjunto abierto, K un conjunto compacto tal que $F_g \subset K \subset W \subset V$. Entonces el mapeo $(i - g)$ mapea $(W, W - K)$ en $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ y

$$(i - g)_*(o_K) = I_g \cdot o_0.$$

Proposición 2.80. Un mapeo constante $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $g(V) = p \in \mathbb{R}^n$ tiene índice 1, si $p \in V$; e índice 0, si $p \notin V$.

Demostración. Si $p \notin V$, entonces $F = \emptyset$. Por lo tanto $o_F = 0$. Si $p \in V$, entonces

$$i - g : (V, V - p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

lleva o_p en o_0 . ◀

Proposición 2.81. Dado $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Sea V una unión finita de conjuntos abiertos $V_i, i = 1, \dots, r$, tal que todo $F^i = \{x \in V_i \mid g(x) = x\}$ es compacto y $F^i \cap F^j = \emptyset$, para $i \neq j$. Entonces $F = \bigcup_i F^i$ y

$$I_g = \sum_i (I_g|_{V_i}).$$

Proposición 2.82. Si $g_t : V \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq 1$, es una deformación tal que

$$\{x \in V \mid g_t(x) = x, \text{ para algún } t\} = \bigcup_t F_{g_t}$$

es compacto, entonces $I_{g_0} = I_{g_1}$.

Demostración. De la proposición 2.79 tenemos que $I_g o_0 = (i - g_t)_*(o_K)$, para toda $t \in [0, 1]$. Pero $(i - g) : (V, V - K) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ es una deformación, por lo tanto $(i - g_0)_* = (i - g_1)_*$. ◀

El índice de Conley para flujos es un invariante de carácter topológico que describe el comportamiento alrededor de un conjunto invariante aislado S . Sin embargo, aún cuando la definición del índice de Conley es similar al caso continuo (flujos), para el caso discreto es necesario considerar otros elementos necesarios para poder definirlo (ver ejemplo 3.8).

En este capítulo definiremos el índice de Conley para sistemas dinámicos discretos, también se dan algunas propiedades y ejemplos. Los resultados aquí mostrados pueden ser consultados en [BF, Do, M].

3.1. Algunas definiciones de topología

Los resultados de esta sección se pueden consultar en [Do].

Definición 3.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Decimos que f_0 es **homotópico** a f_1 , denotado $f_0 \simeq f_1$, si existe una función continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f_0(x) \\ F(x, 1) &= f_1(x). \end{aligned}$$

Definición 3.2. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X y Y son **del mismo tipo de homotopía** si existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. f y g son llamadas **equivalencias homotópicas**.

Definición 3.3. Un espacio X es **contraíble** si es homotópicamente equivalente a un punto.

Ejemplo 3.4. Cualquier subconjunto convexo de \mathbb{R}^n es contraíble.

Definición 3.5. Un subconjunto A de un espacio topológico X es llamado un **retracto** de X si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = Id_A$ ($r|_A = Id_A$), donde $i : A \rightarrow X$ es la función inclusión. A r se le llama una **retracción**. Aún más, decimos que A es un **retracto por deformación** de X , si $i \circ r \simeq Id_X$.

Sea (X, A) un par topológico. El *espacio cociente*, X/A se define por

$$X/A = (X \setminus A) \cup \{q\},$$

donde q es un punto fuera de X , y el *mapeo cociente* $g : X \cup \{q\} \rightarrow X/A$ está dado por

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus A \\ q & \text{si } x \in A \text{ o } x = q. \end{cases}$$

3.2. Definición del Índice de Conley

Para esta sección y las subsecuentes seguimos principalmente los trabajos de K. Mischaikow and M. Mrozek [BF, Sec. 3.2, pag. 413] y Marian Mrozek [M].

Sean X un espacio topológico, $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo (función continua) y $Z \subset X$. Definimos el *invariante* de Z bajo f como

$$\text{Inv}(Z, f) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i|_Z(Z),$$

y diremos que $N \subset X$ es una *vecindad aislante* para f si N es compacto y

$$\text{Inv}(N, f) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(N) \subset \text{int}(N).$$

Definición 3.6. Sean X un espacio métrico localmente compacto, Q_1, Q_0 subconjuntos compactos de X y $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo. El par $Q := (Q_1, Q_0)$ de conjuntos compactos de X es llamado un **buen par** para un conjunto invariante aislado S , si cumple las siguientes condiciones

- $Q_0 \subset Q_1$,
- $\overline{Q_1 \setminus Q_0}$ es una vecindad aislante para S ,
- $f(Q_0) \cap Q_1 \subset Q_0$ (invarianza positiva),
- $f(Q_1 \setminus Q_0) \subset Q_1$ (conjunto de salida).

Teorema 3.7. Para cualquier vecindad V de un conjunto invariante aislado S existe un buen par (Q_1, Q_0) para S tal que $Q_1 \setminus Q_0 \subset V$.

Ahora consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) := x + 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $L_n := [n, n + \frac{1}{2}]$ y $N_n := \bigcup \{L_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$.

Notemos que $L_n \subset N_n$. Además

$$\blacksquare \quad N_n \setminus L_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i \quad y \quad \overline{N_n \setminus L_n} = \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i$$

lo que implica que

$$\text{inv}(\overline{N_n \setminus L_n}) = \bigcap_{-\infty}^{\infty} f^n(\overline{N_n \setminus L_n}) = \emptyset.$$

En efecto, sea $x \in \text{inv}(\overline{N_n \setminus L_n})$, entonces $x \in \overline{N_n \setminus L_n}$ y $f^n(x) \in \overline{N_n \setminus L_n}$, por lo tanto se tiene una contradicción.

- \blacksquare Supóngase que $f(L_n) \cap N_n \not\subseteq L_n$. Entonces existe $x \in f(L_n) \cap N_n$ tal que $x \notin L_n$. Entonces $x \in [n+1, n+\frac{3}{2}]$ y $x \in N_n$, luego $x \in [n+1, n+\frac{3}{2}]$ y $x \in \bigcup L_i$. Por lo tanto $x \in [n+1, n+\frac{3}{2}]$ y $x \in L_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$, así $x \in [n+1, n+\frac{3}{2}]$, $x \in [i_0, i_0 + \frac{1}{2}]$ para algún $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$, lo cual implica que

$$n+1 \leq x \leq n+\frac{3}{2} \quad y \quad i_0 \leq x \leq i_0 + \frac{1}{2}.$$

Lo cual nos lleva a una contradicción.

- \blacksquare Notemos que $f(N_n \setminus L_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} f(L_i)$ y,

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} f(L_i) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \left[i+1, i+\frac{3}{2} \right].$$

Además

$$\left[2, \frac{5}{2} \right] \cup \dots \cup \left[n, n+\frac{1}{2} \right] \subset \left[1, \frac{3}{2} \right] \cup \left[2, \frac{5}{2} \right] \cup \dots \cup \left[n, n+\frac{1}{2} \right] = N_n.$$

Así $f(N_n \setminus L_n) \subset N_n$.

Por lo que para todo $n \in \mathbb{N}$, el par (N_n, L_n) es un buen par para f tal que $N_n \setminus L_n$ aísla al conjunto vacío.

Ejemplo 3.9. Sea $N = [0, 1] \times [0, 1]$. Considere la herradura de Smale. Hagamos

$$C_n := \{ \alpha_1/5 + \dots + \alpha_n/5^n + \alpha/5^{n+1} \mid \alpha_i \in \{1, 3\}, i = 1, 2, \dots, n, \alpha \in [0, 1] \},$$

$$L_n := [0, 1] \times \overline{[0, 1] \setminus C_n}.$$

Entonces $S := \text{Inv}(N) \subset \bigcap \{ C_n \times C_n \mid n = 1, 2, \dots \}$. Se puede verificar que (N, L_n) es un buen par para S , para toda $n \in \mathbb{N}$ y $[N/L_n, [L_n]]$ es del tipo de homotopía de la suma de 2^n copias de un círculo.

Así, de los ejemplos anteriores, tenemos una sucesión numerable infinita de buenos pares los cuales definen el mismo conjunto aislado \emptyset . Notamos que el tipo de homotopía de cada uno de estos, es el de n puntos, es decir, $H_0(N_n/L_n) \simeq \mathbb{Z}^n$ (notar que (N_n, L_n) es un par de conjuntos cúbicos). Lo que nos dice que no se puede caracterizar un análogo del índice de Conley como se hace en flujos, utilizando únicamente la homotopía de un buen par (N, L) . Esto sugiere que debemos realizar un esfuerzo extra para poder tener una buena definición de dicho índice. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 3.10. Sean (N, L) un buen par para un conjunto invariante aislado S y $f : X \rightarrow X$ una función continua. El **mapeo de índices** inducido por f es el mapeo $f_{N,L} : N/L \rightarrow N/L$ definido por

$$f_{N,L}([x]) := \begin{cases} [f(x)], & \text{si } f(x) \in N \\ [L] & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

El mapeo de índices resulta ser esencial al extraer información común del índice de pares del mismo conjunto invariante aislado. Esto puede ser hecho de distintas formas. Un método que fue propuesto por Franks y Richeson [FR], consiste en usar lo que se conoce como las shift equivalencias.

Suponga que $c : C \rightarrow C$ y $d : D \rightarrow D$ son mapeos continuos. Diremos que son *shift equivalentes* si existen mapeos continuos $r : C \rightarrow D$ y $s : D \rightarrow C$ y un número natural m tal que

$$rc = dr, sd = cs, rs = c^m \text{ y } sr = d^m.$$

Además diremos que las clases de homotopías de c y d son shift equivalentes si existen mapeos continuos $r : C \rightarrow D$, $s : D \rightarrow C$ y un número natural m tal que $rc \sim dr$, $sd \sim cs$, $rs \sim c^m$ y $sr \sim d^m$, y diremos que $h(S, f)$ es el *índice de Conley homotópico* de S que se define como las clases de shift equivalencias $[f_{N,L}]$.

Teorema 3.11. Si (N, L) y (N', L') son buenos pares para un conjunto invariante S , entonces las clases de homotopías de mapeos de índices $[f_{N,L}]$ y $[f_{N',L'}]$ son shift equivalentes.

Sin embargo, calcular el índice de Conley no es lo más apropiado para nuestros fines, ya que resulta ser muy difícil. Por esto, es preferible trabajar desde un aspecto más algebraico haciendo uso de la homología (cúbica).

3.3. Reducción de Leray asociada a un buen par

En lo sucesivo, consideremos la homología con coeficientes en \mathbb{Q} , y que el espacio fase X es un conjunto cúbico y un retracto por deformación de una vecindad aislante. Con estas suposiciones podemos asegurar que en cualquier vecindad de un conjunto invariante aislado existe un buen par de conjuntos cúbicos (N, L) tal que $H_*(N, L)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, ver [KKM, Capítulo 10].

Sea $e : E \rightarrow F$ un endomorfismo de un espacio vectorial finito. El *kernel generalizado* de e se define como:

$$\text{gker}(e) := \bigcup \{e^{-n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que $e(\text{gker}(e)) \subset \text{gker}(e)$. En efecto, si $y \in e(\text{gker}(e))$ entonces, existe $x \in \text{gker}(e)$ tal que $y = e(x)$. Notemos que $e^n(x) = 0$ implica que $e^{n+1}(x) = 0$ pero $e^n(e(x)) = e^n(y) = 0$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Así $e(\text{gker}(e)) \subset \text{gker}(e)$. Por lo que se tiene un isomorfismo inducido

$$e' : E/\text{gker}(e) \rightarrow E/\text{gker}(e)$$

definido por,

$$e'[x] = [e(x)].$$

A e' se le llama *reducción de Leray*.

La siguiente proposición nos dice que la reducción de Leray será un isomorfismo de un espacio en si mismo.

Proposición 3.12. *La reducción de Leray de un endomorfismo es un automorfismo.*

Demostración. Probaremos los siguientes puntos.

- e' es una transformación lineal. En efecto, sean $[x], [y] \in \frac{E}{\text{gker}(e)}$, entonces

$$\begin{aligned} e'([x] + [y]) &= e'([x + y]) \\ &= [e(x + y)] = [e(x) + e(y)] \\ &= [e(x)] + [e(y)] = e'([x]) + e'([y]), \end{aligned}$$

y

$$e'[\alpha x] = \alpha e'([x])$$

- e' es inyectiva

Supongamos que $e'([x]) = e'([y])$. Debemos probar $[x] = [y]$. Por hipótesis $e'([x]) = e'([y])$. De esta forma $[e(x)] = [e(y)]$, y $e(x) \sim e(y)$, luego $e(x) - e(y) \in \text{gker}(e)$. Así, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(e(x) - e(y)) \in e^{-p}(0)$. Entonces

$$\begin{aligned} e^p(e(x) - e(y)) &= 0 \\ e^{p+1}(x) - e^{p+1}(y) &= 0 \\ e^{p+1}(x - y) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $x - y \in e^{-(p+1)}(0)$, así $(x - y) \in \text{gker}(e)$ lo que implica que $x \sim y$ y por lo tanto $[x] = [y]$.

- $e' : \frac{E}{gker(e)} \rightarrow \frac{E}{gker(e)}$ es sobre.

Del teorema del rango de álgebra lineal se tiene que E puede ser escrito como $E = \ker(e) \oplus \text{im}(e)$. Así, si $x \in E$ entonces $x = k + i$, donde $k \in \ker(e)$ y $i \in \text{im}(e)$. De lo anterior, se sigue que $i = x - k$, lo que implica que existe $z \in E$ tal que $e(z) = i = x - k$. Entonces

$$e'([z]) = [e(z)] = [x - k] = [x].$$

La última igualdad se tiene, ya que $x \sim x - k$, pues $x - (x - k) = k \in \ker(e) = e^{-1}(0) \subset gker(e)$.

De todo lo anterior concluimos que e' es un automorfismo. ◀

Las siguientes proposiciones facilitan los cálculos de las reducciones de Leray. Antes de enunciarlos, probaremos un lema que será indispensable para las demostraciones.

Lema 3.13. *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita y $e : E \rightarrow E$ es un endomorfismo, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $gker(e) = e^{-m}(0)$.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Para $x, y \in e^{-k}(0)$, notemos que

- $e^k(\alpha x + \beta y) = \alpha e^k(x) + \beta e^k(y) = 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, dado que $e^k(x) = e^k(y) = 0$
- $e^{-k}(0) \subset e^{-(k+1)}(0)$

Sea $x \in e^{-k}(0)$, entonces $e^k(x) = 0$, luego $e(e^k(x)) = e(0) = 0$, así $x \in e^{-(k+1)}(0)$.

De los puntos anteriores obtenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$e^{-1}(0) \subset e^{-2}(0) \subset e^{-3}(0) \subset \dots \subset e^{-k}(0) \subset e^{-(k+1)}(0) \subset \dots \subset e^{-m}(0) = e^{-(m+1)}(0) = e^{-(m+2)}(0),$$

ya que E es un espacio vectorial de dimensión finita y $e^{-k}(0)$ es un subespacio vectorial de E , para todo $k \in \mathbb{N}$. ◀

La siguiente proposición nos dice que podemos trabajar indistintamente con e o con su reducción de Leray.

Proposición 3.14. *Si e' es la reducción de Leray de un endomorfismo $e : E \rightarrow E$ de un espacio vectorial de dimensión finita entonces e y e' son shift equivalentes.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{gker}(e) = e^{-m}(0)$. Proponemos $r : E \rightarrow E/\text{gker}(e)$ y $s : E/\text{gker}(e) \rightarrow E$ como

$$r(x) = [x] \quad \text{y} \quad s([x]) = e^m(x),$$

respectivamente.

Primero, notemos que s está bien definida. En efecto si $x \sim y$, entonces $(x - y) \in \text{gker}(e)$. Por lo tanto, $(x - y) \in e^{-m}(0)$. Entonces $e^m(x) - e^m(y) = 0$. Así

$$s([x]) = e^m(x) = e^m(y) = s([y]).$$

Ahora vamos a verificar las condiciones para que sean shift equivalentes.

- Veamos que $re = e'r$. En efecto

$$(re)(x) = r(e(x)) = [e(x)] \quad \text{y} \quad (e'r)(x) = e'([x]) = [e(x)] \quad \text{para todo } x \in X$$

- Demostraremos ahora que $se' = es$.

Sea $[x] \in \frac{E}{\text{gker}(e)}$, entonces

$$(se')([x]) = s([e(x)]) = e^m(e(x)) = e^{m+1}(x).$$

Por otra parte,

$$(es)([x]) = e(e^m(x)) = e^{m+1}(x)$$

- Ahora probemos que $rs = (e')^m$

Sea $[x] \in \frac{E}{\text{gker}(e)}$, entonces

$$(rs)([x]) = r(e^m(x)) = [e^m(x)] = (e')^m([x]).$$

- Finalmente veamos que $sr = e^m$

Sea $x \in E$, entonces

$$(sr)(x) = s([x]) = e^m(x).$$

Por lo tanto, e y e' son shift equivalentes. ◀

El siguiente resultado muestra que ser shift equivalentes es igual a conjugación.

Proposición 3.15. Sean $e : E \rightarrow E$ y $f : F \rightarrow F$ automorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces, e y f son shift equivalentes si y sólo si son conjugados.

Demostración. Supongamos que e y f son shift equivalentes, entonces existen $r : E \rightarrow F$ y $s : F \rightarrow E$ transformaciones lineales y $m \in \mathbb{N}$ tales que $re = fr$, $sf = es$, $rs = f^m$, $sr = e^m$.

Se sigue de $rs = f^m$ que r es sobre, mientras que de $sr = e^m$ que r es inyectiva. Además de $re = fr$ se tiene que $r^{-1}re = r^{-1}fr$ de lo cual $e = r^{-1}fr$ y por lo tanto e y f son conjugadas.

Ahora, supongamos que e y f son conjugados, entonces existe un isomorfismo $r : E \rightarrow F$ tal que $re = fr$, de lo que se tiene que $r^{-1}f = er^{-1}$, y definamos $s : F \rightarrow E$ como

$$s = r^{-1}f.$$

Probaremos que mediante estas funciones r y s se tiene que e y f son shift equivalentes. Para ello verificamos los siguientes puntos.

- $sf = es$, en efecto,

$$sf = r^{-1}ff = er^{-1}f = es.$$

- Notemos que $rs = rr^{-1}f = f$ y $sr = r^{-1}fr = er^{-1}r = e$, por lo que tomando $m = 1$, tenemos que

$$rs = f^m \quad \text{y} \quad sr = e^m.$$

De lo cual se sigue que e y f son shift equivalentes. ◀

Dado que la reducción de Leray de un endomorfismo de espacios vectoriales de dimensión finita es un isomorfismo, entonces tenemos un automorfismo. Así podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.16. *Dos endomorfismos e y f de espacios vectoriales de dimensión finita son shift equivalentes si y sólo si sus reducciones de Leray son conjugadas.*

Demostración. Sean e y f endomorfismos como en la hipótesis.

Supongamos que e y f son shift equivalentes, entonces existen $r_1 : E \rightarrow F$, $s_1 : F \rightarrow E$ transformaciones lineales y $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_1e = fr_1$, $s_1f = es_1$, $r_1s_1 = e^m$, $s_1r_1 = f^m$.

Por otro lado, por la proposición 3.14, e y f son shift equivalentes a sus reducciones de Leray, respectivamente. Así, existen

$$\begin{aligned} a_1 : E &\rightarrow E/gker(e), & b_1 : E/gker(e) &\rightarrow E, \\ c_1 : F &\rightarrow F/gker(f), & d_1 : F/gker(f) &\rightarrow F, \end{aligned}$$

isomorfismos, μ y η en \mathbb{N} tal que

$$a_1e = e'a_1, \quad b_1e' = eb_1, \quad a_1b_1 = (e')^\mu, \quad b_1a_1 = e^\mu, \quad (3.1)$$

$$c_1f = f'c_1, \quad d_1f' = fd_1, \quad c_1d_1 = (f')^\eta, \quad d_1c_1 = f^\eta. \quad (3.2)$$

Como $r_1 e = f r_1$, $e = b_1 e' b_1^{-1}$ y $f = c_1^{-1} f' c_1$ se sigue que

$$\begin{aligned} r_1 b_1 e' b_1^{-1} &= f r_1 \\ e' &= b_1^{-1} r_1^{-1} f r_1 b_1, \end{aligned}$$

de lo cual $e' = b_1^{-1} r_1^{-1} c_1^{-1} f' c_1 r_1 b_1 = (c_1 r_1 b_1)^{-1} f' c_1 r_1 b_1$. Por lo tanto e' y f' son conjugadas.

Ahora supongamos que e' y f' son conjugadas. Nuevamente, por la proposición 3.15, e' y f' son shift equivalentes. Por lo tanto, existen $r_2 : E/gker(e) \rightarrow F/gker(f)$, $s_2 : F/gker(f) \rightarrow E/gker(e)$ transformaciones lineales y $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_2 e' = f' r_2$, $s_2 f' = e' s_2$, $r_2 s_2 = (f')^n$, $s_2 r_2 = (e')^n$.

Nuevamente, la proposición 3.14 implica que e y f son shift equivalentes a e' y f' , respectivamente. Entonces, existen

$$\begin{aligned} a_2 : E &\rightarrow E/gker(e), & b_2 : E/gker(e) &\rightarrow E, \\ c_2 : F &\rightarrow F/gker(f), & d_2 : F/gker(f) &\rightarrow F, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} a_2 e &= e b_2, & b_2 e' &= e b_2, & a_2 b_2 &= (e')^\alpha & b_2 a_2 &= e^\alpha, \\ c_2 f &= f' c_2, & d_2 f' &= f' d_2, & c_2 d_2 &= (f')^\beta, & d_2 c_2 &= f^\beta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notemos que las funciones en (3.3) son isomorfismos, esto se sigue de que e' y f' son isomorfismos y de las igualdades en (3.4).

Notar que $e' = b_2^{-1} e b_2$ y $f' = d_2^{-1} f d_2$. Así, dado que $r_2 e' = f' r_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} r_2 b_2^{-1} e b_2 &= f' r_2, \\ e &= b_2 r_2^{-1} f' r_2 b_2^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo cual, $e = b_2 r_2^{-1} d_2^{-1} f d_2 r_2 b_2^{-1} = (d_2 r_2 b_2^{-1})^{-1} f (d_2 r_2 b_2^{-1})$. De esta forma, concluimos que e y f son conjugados, y por la proposición 3.15, e y f son shift equivalentes. ◀

Del teorema anterior podemos definir el índice de Conley homológico para mapeos en regiones compactas como un par

$$\text{Con}(S, f) = (CH_*(S, f), \chi_*(S, f)),$$

donde

$$CH_*(S, f) = \bigoplus_n CH_n(S, f)$$

es un espacio de dimensión finita graduado igual a

$$H_*(N/L, [L]) / gker(f_{N,L})_* = \bigoplus_n H_n(N/L, [L]) / gker(f_{N,L})_n,$$

para cualquier buen par de conjuntos cúbicos (N, L) tal que $H_*(N/L, [L])$ es de dimensión finita y

$$\chi_*(S, f) = \{\chi_n(S, f)\}$$

es un automorfismo graduado en $CH_*(S, f)$ igual a la reducción de Leray de $(f_{N,L})_*$.

Denotaremos como $\text{Con}_i(S, f) = (CH_i(S, f), \chi_i(S, f))$

Una de las propiedades del índice de Conley es la propiedad de continuidad.

Teorema 3.17. *Si S_1 y S_2 son conjuntos invariantes aislados que están relacionados bajo continuidad. Entonces $CH_*(S_1) \cong CH_*(S_2)$.*

El índice de Conley homológico se comporta bien bajo deformaciones y satisface una propiedad de aditividad, de acuerdo con el siguiente resultado (ver [M]).

Teorema 3.18. *a) Propiedad de continuidad bajo homotopía. Asíumase que $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto y que $f : J \times X \rightarrow X$ es una función continua tal que para cada $\lambda \in J$ la función*

$$f_\lambda : X \rightarrow X, \quad f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$$

es un homeomorfismo. Sea N un conjunto aislante con respecto a f_λ . Entonces $\text{Con}_(\text{Inv}(N, f_\lambda))$ no depende de $\lambda \in J$.*

b) Propiedad de aditividad. Supongamos que S es un conjunto aislante que es igual a la unión $S_0 \cup S_1$ de dos conjuntos aislantes disjuntos S_0 y S_1 . Entonces $\text{Con}_(S) = \text{Con}_*(S_0) \oplus \text{Con}_*(S_1)$.*

3.3.1. Índice de Conley y Órbitas Periódicas

En esta sección se presentan algunos ejemplos de la aplicación del índice de Conley para sistemas dinámicos discretos (ver teoremas 3.20 y 3.21). Consideremos un punto fijo hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Denotemos a k como el número de valores propios de $Df(x_0)$ fuera del círculo unitario (contado con multiplicidades). Sea l el número de valores propios de $Df(x_0)$ que son menores que -1 . El par (k, l) se llamará *Índice de Morse* de x_0 .

Ejemplo 3.19. ▪ *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

En este caso la ecuación en diferencias que nos queda está dada por

$$y_{n+1} = Ay_0 \tag{3.6}$$

$$= A^n y_0. \tag{3.7}$$

Notemos que el punto fijo para este sistema es el punto $(0, 0)$ y, $(k, l) = (1, 1)$.

- Considerese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

en este caso $(k, l) = (3, 3)$.

- La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

cuyos valores propios son: $\lambda = -2, 1$.

Así en este caso tenemos que $(k, l) = (1, 1)$.

Recordamos que para un conjunto invariante aislado S ,

$$\text{Con}_i(S, f) = (CH_i(S, f), \chi_i(S, f)), i \in \mathbb{N}.$$

En el caso cuando S consiste únicamente de un punto fijo hiperbólico, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.20. *Supongamos que x_0 es un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x_0\}$ es un conjunto invariante aislado y*

$$\text{Con}_i(\{x_0\}, f) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k, \\ (\mathbb{Q}, (-1)^i \text{id}) & \text{para } i = k. \end{cases} \quad (3.10)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_0 = 0$. Primero consideremos el caso en el que f es lineal, es decir

$$f(x) = Ax, \quad \text{para alguna } A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Sea $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ la descomposición de \mathbb{R}^n en espacios propios de A correspondientes a los valores propios de A con módulo mayor que 1 y menores que 1 respectivamente. Así, sea

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

la descomposición de A . Así

$$A^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y

$$A^n y_0 = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^u \\ y_0^s \end{bmatrix}, \quad y_0 = (y_0^u, y_0^s) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.13)$$

Notemos que existe una norma en \mathbb{R}^n tal que A es una contracción o expansión siempre que se restrinja al espacio estable o inestable, respectivamente, (ver [HSD]). Como todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, puede asumirse que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es tal que

$$\|A^n y_0^u\| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \|A^n y_0^s\| \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\|A^n y_0^u\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|A^n y_0^s\| \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_-.$$

Por lo que $\{0\}$ es el único conjunto invariante aislado en cualquier n -cubo que contenga al 0.

Ahora, para probar (3.10) para el caso lineal, supóngase que A tiene n valores propios distintos. Elíjase una base de tal forma que A tenga la matriz de bloques de diagonales con bloques de dimensión 1, $[\lambda_j]$, correspondientes a los valores propios λ_j reales y bloques de dimensión 2

$$\begin{bmatrix} r_j \cos \varphi_j & r_j \sen \varphi_j \\ -r_j \sen \varphi_j & r_j \cos \varphi_j \end{bmatrix}$$

que corresponden a los pares de valores propios complejos $r_j \exp(-i\varphi_j)$ y $r_j \exp(i\varphi_j)$. A continuación se define para $t \in [0, 1]$ la familia de homotopías A_t como las matrices de la misma estructura de bloques en diagonal y con los correspondientes bloques de la forma

$$[h(\lambda_j, t)] \quad \text{y} \quad [h(r_j, t)] \begin{bmatrix} \cos t\varphi_j & \sen t\varphi_j \\ -\sen t\varphi_j & \cos t\varphi_j \end{bmatrix},$$

donde

$$h(u, t) := tu + (1 - t) \text{sng}(u) \exp(\text{sng}(|u| - 1) \ln 2),$$

y sng es la función signo.

De esta manera se organizan los valores propios de $A_t, t \in [0, 1]$, en reales y complejos, respectivamente. En particular, para $t = 0$ se tiene que los valores propios de A_0 son reales y están dados por

$$h(\lambda_j, 0) = \text{sng}(\lambda_j) \exp(\text{sng}(|\lambda_j| - 1) \ln 2) = \begin{cases} -2, & \lambda_j < -1, \\ 2, & \lambda_j > 1, \\ -1/2, & -1 < \lambda_j < 0, \\ 1/2, & 0 < \lambda_j < 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

donde sng es la función signo.

Así mismo, los valores propios de A_1 coinciden con los de A .

Más aún, puesto que h define una homotopía entre A_0 y A_1 , se sigue del teorema de la variedad estable (ver [C]), que $\{0\}$ es el único conjunto invariante aislado con respecto a cada A_t y de la propiedad de la homotopía de Conley (ver teorema 3.18 a) se muestra que $\text{Con}(\{0\}, A_0) = \text{Con}(\{0\}, A_1)$. Así se puede asumir que $A = A_0$. Notemos que de (3.14), se tiene que A tiene una matriz diagonal en la que -2 aparece l veces, 2 aparece $k - l$ veces y las entradas restantes distintas de cero son $1/2$ o $-1/2$.

Definanse los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
 N &= \{(x + y, z) \in (W_1 \oplus W_2) \times \mathbb{R}^{n-k} \mid \|x + y\| \leq 2, \|z\| \leq 1\}, \\
 L &= \{(x + y, z) \in N \mid \|x + y\| \geq 1\}, \\
 B &= \{x + y \in W_1 \oplus W_2 \mid \|x + y\| \leq 1\}, \\
 S &= \{x + y \in W_1 \oplus W_2 \mid \|x + y\| = 1\},
 \end{aligned}$$

donde $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^k$, $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = k - l$.

Gráficamente tenemos

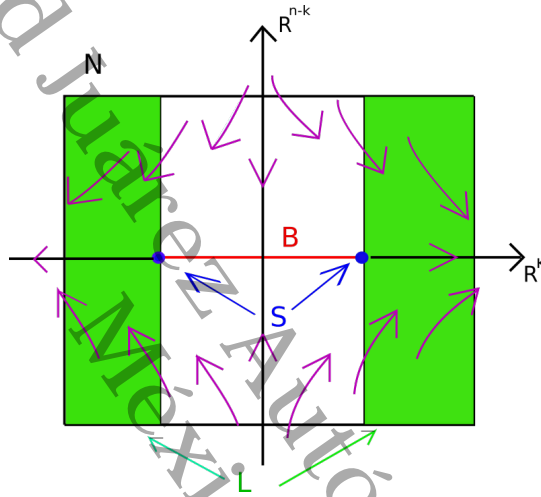


Figura 3.1: Representación de N, L, B, S .

La pareja (N, L) cumple con las propiedades para ser un buen par de $\{0\}$. Defínase las aplicaciones

$$\begin{aligned}
 d &: (B, S) \rightarrow (B, S), \\
 \alpha &: (B, S) \rightarrow (N, L),
 \end{aligned}$$

dadas por

$$\begin{aligned}
 d(x_1 + x_2, y) &:= x - y, \\
 \alpha(x_1 + x_2, y) &:= (x + y, 0).
 \end{aligned}$$

Considérese la restricción de d a B , $d' := d|_B$,
 Nótese que $B \subset N$ y $S \subset L$, así tenemos el siguiente diagrama

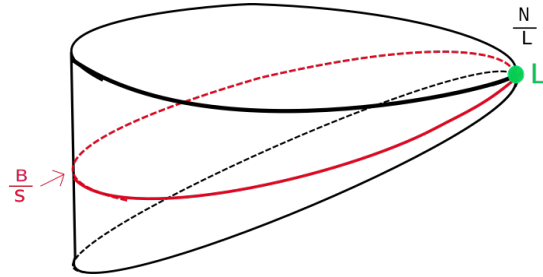


Figura 3.2: Cociente de N y L .

$$\begin{array}{ccc}
 N/L & \xrightarrow{A} & N/L \\
 \downarrow \alpha \simeq & & \downarrow \simeq \alpha \\
 B/S & \xrightarrow{d} & B/S
 \end{array}$$

el cual es conmutativo salvo homotopías (ver figura 3.2). Del diagrama anterior, obtenemos que el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(N/L) & \xrightarrow{(f_{N,L})_*} & H_n(N/L) \\
 \downarrow \alpha_* \simeq & & \downarrow \simeq \alpha_* \\
 H_l(B/S) & \xrightarrow{d_*} & H_l(B/S)
 \end{array}$$

donde α_* y d_* son isomorfismos y concluimos que

$$\text{Con}(\{0\}, f) = (H_*(B/S), d_*) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq k, \\ (\mathbb{Q}, (-1)^l \text{id}), & \text{para } i = k. \end{cases} \quad (3.15)$$

Finalmente, para la fórmula (3.10) en el caso de un mapeo lineal con valores propios distintos basta construir una homotopía que una el mapeo A con un mapeo cercano A' que tenga valores propios distintos por pares y después aplicar la propiedad de la homotopía.

Ahora consideramos el caso de un mapeo general f . Notemos que del caso lineal y del teorema de Hartman-Grobman se sigue que $\{0\}$ es un conjunto invariante aislado.

Defínase $A := Df(0)$. Tenemos

$$f(x) = Ax + r(x),$$

donde $r(x) = o(\|x\|)$. Sea $\lambda \in [0, 1]$ definamos

$$f_\lambda(x) = Ax + \lambda r(x).$$

Para cada $\lambda \in [0, 1]$ podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman para encontrar $\delta(\lambda) \geq 0$ tal que $B(\delta(\lambda)) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta(\lambda)\}$ es una vecindad aislada con respecto a f_λ , que aísla a $\{0\}$. Un argumento de compacidad muestra que existe un $\delta \geq 0$ tal que $B(\delta)$ es una vecindad aislante con respecto a f_λ para cada $\lambda \in [0, 1]$. Por supuesto, podemos hacer δ lo suficientemente pequeño para asegurar que $\text{Inv}(B(\delta), f) = \{0\}$. Dado que $f_1 = f, f_0 = A$, la tesis se sigue ahora de la invarianza bajo homotopía del índice de Conley y del caso lineal que se probó. ◀

Teorema 3.21. *Supongamos que f es un difeomorfismo y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo hiperbólico de f^d , para algún $d \in \mathbb{N}$. Sea (k, l) el índice de Morse de x_0 con respecto a f^d . Si d es el periodo mínimo de x_0 , es decir, $f^i(x_0) \neq x_0$ para $i = 1, 2, \dots, d - 1$. Entonces $S := \{x_0, f(x_0), \dots, f^{d-1}(x_0)\}$ es un conjunto invariante y*

$$\text{Con}_i(S) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k, \\ (\mathbb{Q}^d, D) & \text{para } i = k, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde $D : \mathbb{Q}^d \rightarrow \mathbb{Q}^d$ está dado en la base canónica $\{e_i\}_{i=1,d}$ de \mathbb{Q}^d por

$$\begin{aligned} D(e_i) &= e_{i+1} & \text{para } i = 1, 2, \dots, d - 1, \\ D(e_i) &= (-1)^l e_1. \end{aligned}$$

Demostración. Elegimos un buen par (N, L) de $\{x_0\}$ con respecto a $g := f^d$. Definamos $x^i := f^i(x_0), N^i := f^i(N), L^i := f^i(L)$ para $i = 0, 1, \dots, d - 1$. Tomando N más pequeño si es necesario, podemos asumir que $N^i \cap N^j = \emptyset$. Ya que x_0 es un punto fijo hiperbólico, el resultado se obtiene por el teorema de la variedad estable. Además dado $i = 0, \dots, d - 1$ se tiene una conjugación de g con g , vía el difeomorfismo f^i como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N^d \\ \downarrow f^i \simeq & & \simeq \downarrow f^i \\ N^i & \xrightarrow{g} & N^{d+i} \end{array}$$

donde $x^i = f^i(x_0)$. Por consiguiente los puntos x^i son puntos fijos hiperbólicos de g con el mismo índice de Morse (k, l) .

Como (N, L) son buen par para $\{x_0\}$, dado $i \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ se satisface lo siguiente:

- $L \subset N$ implica $f^i(L) \subset f^i(N)$, es decir, $L^i \subset N^i$;

- $\overline{N \setminus L}$ nos permite garantizar que $\overline{N^i \setminus L^i}$ es una vecindad aislante para $S_i = \{x^i\}$;
- $g(L) \cap N \subset L$ implica que $f^i(g(L)) \cap N^i \subset L^i$, es decir, $g(L^i) \cap N^i \subset L^i$, ya que $f^i g = f^{d+i}$ (*invarianza positiva*);
- Dado que $g(N \setminus L) \subset N$, entonces $g(N^i \setminus L^i) \subset N^i$ (*conjunto de salida*).

Por lo tanto, (N^i, L^i) para $i = 0, 1, \dots, d-1$ es un buen par para S_i con respecto a g . De los cual se sigue que $N' = \bigcup_{i=0}^{d-1} N^i$ es una vecindad aislante con respecto a f y (N', L') es un buen par para f que aísla $\{x^0, x^1, \dots, x^{d-1}\}$, con $L' = \bigcup_{i=0}^{d-1} L^i$. Así tenemos que

$$H_*(N'/L') = H_*(N^0/L^0) \oplus \dots \oplus H_*(N^{d-1}/L^{d-1}).$$

Por lo tanto, se sigue del teorema 3.20 (ver ecuación (3.15)) aplicado a g y a $\{x^i\}$ que $H_j(N^i/L^i)$ es cero para cada $j \neq k$ y $H_k(N^i/L^i) \simeq \mathbb{Q}$ que es un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión 1.

Así, $H_i(N'/L')$ es cero para $i \neq k$ y $H_k(N'/L')$ es un espacio vectorial de dimensión d .

Elegimos arbitrariamente un generador $\alpha^0 \in H_k(N^0/L^0)$ y defínase recursivamente una sucesión $\{\alpha^i\}_{i=0, d-1}$ de generadores en $H_k(N^i/L^i)$ por $\alpha^{i+1} := H_k(f)(\alpha^i)$ para $i = 0, 1, \dots, d-2$.

Entonces $\{\epsilon^i\}_{i=0, d-1}$ con $\epsilon^i := (0, \dots, \alpha^i, \dots, 0)$ es una base de $H_k(N'/L')$. Por otra parte se verifica que $(f_{N', L'})_k(\epsilon^i) = \epsilon^{i+1}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, d-2$. Tenemos también por (3.6) que

$$\begin{aligned} (f_{N', L'})_k(\epsilon^{d-1}) &= (f_{N', L'}^d)_k(\epsilon^0) = (g_{N', L'})_k(\alpha^0, 0, \dots, 0) \\ &= \left((-1)^l \alpha^0, 0, \dots, 0 \right) = (-1)^l \epsilon^0. \end{aligned}$$

Esto muestra que $(f_{N', L'})_*$ es un isomorfismo y por lo tanto, se tiene que si $S_i = \{x_i = f^i(x_0)\}$ y $S = \bigcup_{i=0}^{d-1} S_i$, entonces tenemos del teorema 3.18 b) que la homología de la órbita está dada por

$$\text{Con}_*(S) = \bigoplus \text{Con}_*(S_i) \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^d, \text{ y la fórmula (3.16) se tiene.} \blacktriangleleft$$

3.4. Índice de Conley y Dinámica Simbólica

Teorema 3.22. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo en un espacio métrico localmente compacto. Asíumase que $N = N_0 \cup N_1$ es una vecindad aislante bajo f , donde N_0 y N_1 son conjuntos compactos disjuntos y para $k = 0, 1$*

$$\text{Con}_n(N_k) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, id), & \text{si } n = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Entonces $N_{kl} := (N_k \cap f(N_k)) \cup (N_k \cap f(N_l)) \cup (N_l \cap f(N_l))$ para $k, l \in \{0, 1\}, k \neq l$ son vecindades aisladas. Si adicionalmente $\chi_(N_{kl})$ no es conjugado a la identidad, entonces existe*

$d \in \mathbb{N}$ y una función continua sobreyectiva $\rho : Inv(N, f) \rightarrow \Sigma_2$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Inv(N, f) & \xrightarrow{f^d} & Inv(N, f) \\
 \rho \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \rho \\
 \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2
 \end{array} \tag{3.18}$$

conmuta.

Una desventaja en el teorema anterior es el hecho que se necesita cuatro vecindades aislantes y los correspondientes índices de Conley para verificar la existencia de una semiconjugación sobre las dinámicas de corrimientos.

3.4.1. Ejemplos

En esta sección se presentan ejemplos con la finalidad de que el lector vea como se aplican las distintas herramientas que se desarrollaron en las secciones anteriores.

Comenzamos con los ejemplos 3.23 y 3.24, para los cuales se consideró [E].

Ejemplo 3.23. *Considérese el sistema dinámico discreto (\mathbb{R}^2, f) , donde*

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Nótese que $(0, 0)$ es punto fijo hiperbólico de (3.19), cuyos valores propios son: $\lambda = -1/2, -2$. y vectores propios.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El retrato fase se muestra en la figura 3.3.

Por el teorema 3.20, $\{(0, 0)\}$ es un conjunto invariante aislado y, en este caso, tenemos que $(k, \ell) = (1, 1)$. Por lo cual,

$$Con_i(\{0, 0\}) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq 1, \\ (\mathbb{Q}, -id), & \text{para } i = 1. \end{cases}$$

De lo anterior y de la tabla 3.1, podemos observar que se tienen varios casos según se tenga el par (k, ℓ) .

Por lo que

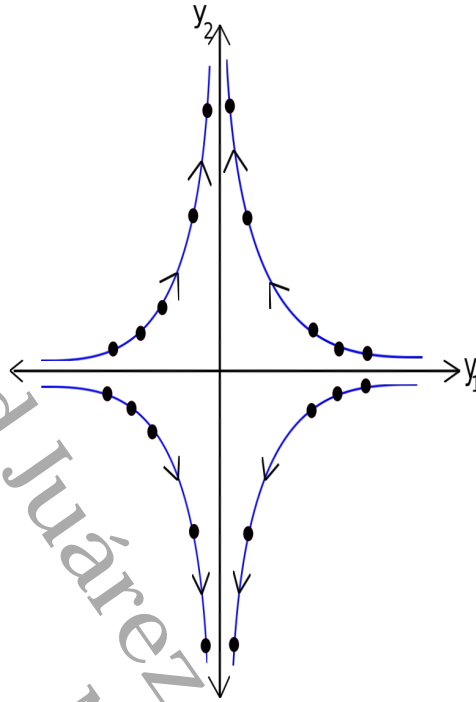


Figura 3.3: Retrato fase del sistema (3.19).

	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6
k	2	2	2	1	1	0
l	1	2	0	0	1	0

Cuadro 3.1: Análisis de (k, l)

$$Con_i(\{0, 0\}) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq 1, 2, \\ (\mathbb{Q}, -id), & \text{para } i = 1, 2, \end{cases}$$

para los casos 1 y 5 de la tabla 3.1. Por otra parte se tiene

$$Con_i(\{0, 0\}) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq 0, 1, 2, \\ (\mathbb{Q}, id), & \text{para } i = 0, 1, 2, \end{cases}$$

para los otros casos.

Ejemplo 3.24. Ahora considérese el sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= -2x_1(n) - x_1(n)[x_1^2(n) + x_2^2(n)], \\ y_2(n+1) &= -2x_2(n) - x_2(n)[x_1^2(n) + x_2^2(n)]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Este sistema lo podemos reescribir como

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1(n) [x_1^2(n) + x_2^2(n)] \\ -x_2(n) [x_1^2(n) + x_2^2(n)] \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Notemos que el punto $(0, 0)$ es un punto fijo hiperbólico del sistema (3.20), pues

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Aplicando el teorema 3.21, el sistema (3.20) tiene un conjunto invariante aislado, a saber, $C = \{(0, 0)\}$. Además podemos concluir, por (3.22), que

$$\text{Con}_i(\{0, 0\}) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq 2, \\ (\mathbb{Q}, -id), & \text{para } i = 2, \end{cases}$$

ya que los valores propios de $Df(0, 0)$ están fuera del círculo unitario, y por lo tanto $(k, \ell) = (2, 1)$. El retrato fase para el sistema se puede apreciar en la figura 3.4.

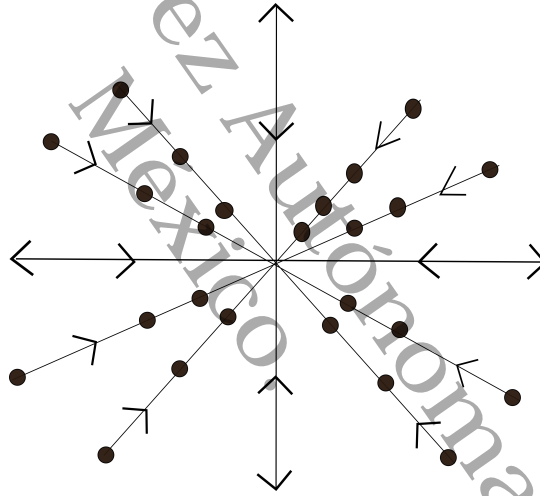


Figura 3.4: Retrato fase para el ejemplo 3.24.

Para los siguientes ejemplos consideramos esencialmente los artículos [M] y [BF].

Ejemplo 3.25. Sean $X = \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y $f : X \rightarrow X$ la función herradura de Smale. Esta es una función continua que mapea los rectángulos R_0 y R_1 linealmente en los rectángulos S_0 y S_1 como se muestra en la figura 3.5, donde el cuadrado $ABCD$ es el cuadrado $[0, 5] \times [0, 5]$.

El conjunto $N = [0, 5] \times [0, 5]$ es una vecindad aislante. Tomemos

$$P_1 = [1, 4] \times [0, 5], \quad P_2 := [1, 4] \times ([0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]).$$

Entonces $P = (P_1, P_2)$ es un buen par y $(f_{P_1, P_2})_*$ tiene la matriz

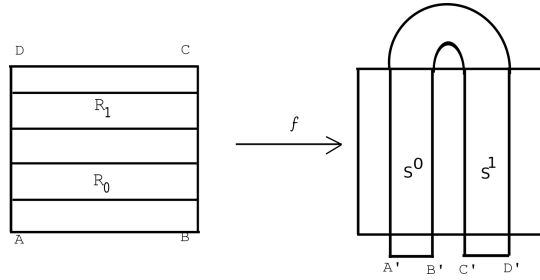


Figura 3.5: Herradura de Smale con $N = [0, 5] \times [0, 5]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $(f_{P_1, P_1})_*^2 = 0$, lo que implica que $H_*(P_2/P_1, [P_1]) / gker(f_{P_1, P_2})_* = 0$ y por lo tanto la herradura de Smale tiene índice de Conley cero.

Ejemplo 3.26. Esto no se tiene para el conjunto invariante aislado S mostrado en la figura 3.6.

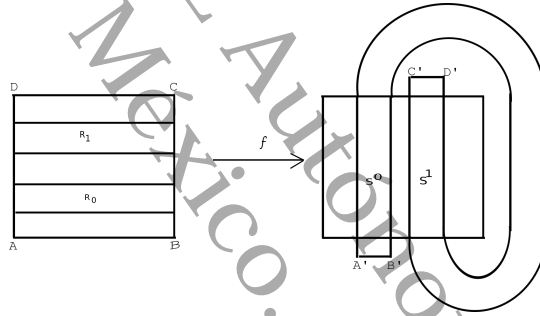


Figura 3.6: Figura para el ejemplo 3.26.

El par $P = (P_1, P_2)$ en el ejemplo 3.25 vuelve a ser un buen par, pero en este caso $(f_{P_1, P_2})_*$ tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que $(f_{N, L})_*^2 = 2(f_{N, L})_*$, se sigue que $gker(f_{N, L})_* = ker(f_{N, L})_*$ y encontramos que

$$Con_k(S) = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 1, \\ (\mathbb{Q}, 2id), & \text{para } k = 1. \end{cases}$$

Sin embargo, cálculos similares para coeficientes enteros implica que el índice es cero, ya que $2id : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ no es un isomorfismo, solo un monomorfismo y su imagen generalizada es cero. Lo que nos muestra que algunas veces los coeficientes racionales pueden dar más información.

Por otra parte, el índice de Conley para la herradura de la figura 3.7

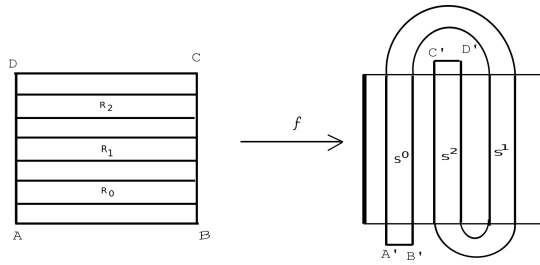


Figura 3.7: G -herradura, ejemplo 3.26, caso 2.

es

$$\text{Con}_k(S) = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 1, \\ (\mathbb{Q}, \text{id}), & \text{para } k = 1. \end{cases}$$

Así, para las tres herraduras anteriores obtenemos tres índices diferentes para cada uno. De lo que se tiene que ninguno de ellos se puede deformar en el otro sin dar lugar a trayectorias acotadas que crucen la frontera de N . Pues de lo contrario contradecimos la invarianza bajo homotopía del índice.

Ahora se presenta un ejemplo en el que se aplica el método de Euler.

Ejemplo 3.27. Conley probó que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ x'_n = (x_1)^2 - 1, \end{cases} \quad (3.23)$$

admite una solución acotada no constante. Una pregunta que surge es si para el sistema dinámico discreto obtenido de (3.23) por el método de aproximación de Euler, es decir, el sistema definido por la función

$$f_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) + s(x_2, \dots, (x_1)^2 - 1)$$

donde s es una constante que denota el paso del método de Euler. Notemos que después del cambio de coordenadas lineal $z_j := s^{n-1+j}x_j$ la función f_s se transforma en

$$f_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (z_1, z_2, \dots, z_n) + (z_2, \dots, z_n, (z_1)^2 - s^{2n}).$$

El origen es el único conjunto invariante aislado no trivial con respecto a f_0 y $C(\{0\}, f_0) = 0$. Por lo que se sigue que $B = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| \leq 1\}$ es una vecindad aislante para f_s para s pequeños. Si dos puntos fijos de f_s fueran las trayectorias de f_s en B , entonces, por el teorema 3.18 b), deberían tener índice cero. Sin embargo, se tiene que uno de los puntos fijos debe ser hiperbólico; así, por el teorema 3.20, al menos uno de ellos debe tener índice distinto de cero.

Esto muestra que la aproximación de Euler del sistema (3.23) también admite una trayectoria acotada no constante al menos para valores pequeños del paso s .

Caos de mapeos tipo herradura

En esta sección analizamos mapeos de tipo herraduras desde un punto de vista topológico, utilizando el invariante dado por el índice de punto fijo. El material expuesto en este capítulo puede ser consultado en [Z].

4.1. Aplicación del índice de punto fijo

Vamos a denotar por $\rho(x, y)$ la distancia de x a y en \mathbb{R}^d . Para $Z \subset \mathbb{R}^d$ y $x \in \mathbb{R}^d$ escribimos $\rho(x, Z) = \inf \{\rho(x, y) \mid y \in Z\}$, $B_\epsilon(x) = \{y \mid \rho(x, y) < \epsilon\}$ y $B_\epsilon(Z) = \{y \mid \rho(x, Z) < \epsilon\}$. Para funciones F definidas en $[0, 1] \times Z$ se escribirá $F_\lambda(x)$ en lugar de $F(\lambda, x)$.

Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y $Z \subset X$. Se define $\text{Inv}(Z, f) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f_{|Z}^i(Z)$. Si Z es compacto entonces $\text{Inv}(Z, f)$ es un conjunto invariante maximal contenido en Z .

Definición 4.1. Sea $Z \subset X$. Se dirá que Z es una **vecindad aislante** para f si Z es compacto y además $\text{Inv}(Z, f) \subset \text{int}(Z)$.

Sean Z_0, Z_1, \dots, Z_n conjuntos disjuntos por pares. Sea $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, s\}$. Definimos

$$Z_\alpha^\lambda := Z_{\alpha_0} \cap F_\lambda^{-1}(Z_{\alpha_1}) \cap \dots \cap F_\lambda^{-n}(Z_{\alpha_n})$$

Observación 4.2.

$$Z_\alpha^\lambda \cap Z_\beta^\lambda = \emptyset, \text{ para } \alpha \neq \beta.$$

Lema 4.3. Sean $M \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto, N un subconjunto compacto de M y $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ una función continua. Asuma que N es una vecindad aislada para F_λ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Entonces existe un conjunto abierto D tal que $\overline{D} \subset \text{int}(N)$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, $\text{Inv}(N, F_\lambda) \subset D$.

Demostración. Sea $x_0 \in \partial N$ y $\lambda_0 \in [0, 1]$. Entonces $x_0 \notin \text{Inv}(N, F_{\lambda_0})$ ya que $\partial N \neq \emptyset$ e $\text{Inv}(N, F_\lambda) \subset \text{int}(N)$, lo que implica $\text{int}(N) \cap \partial N = \emptyset$. Así, existe $k > 0$ tal que $F_{\lambda_0}^k(x_0) \notin N$ o $x_0 \notin F_{\lambda_0}^k(N)$ ya que $x \notin \text{Inv}(N, F_{\lambda_0}) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F_{\lambda_0}^n(N)$. Por lo que $x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (F_{\lambda_0}^n(N))^c$. De esta forma, existe $k \in \mathbb{Z}$

tal que $x \in (F_{\lambda_0}^k(N))^c$, por lo que $x \notin F_{\lambda_0}^k(N)$.

Como $k > 0$ y $F_{\lambda_0}^k(N)$ es compacto, en particular, es cerrado, entonces se sigue que $x \in (F_{\lambda_0}^k(N))^c = U$, y U es abierto. Por lo que existe $\overline{B_\epsilon(x_0)} \subset U \subset \mathbb{R}^d$. Así $\overline{B_\epsilon(x_0)} \cap F_{\lambda_0}^k(N) = \emptyset$, lo cual implica $F_{\lambda_0}^k(N) \cap B_\epsilon(x_0) = \emptyset$; esto es, $x \in F_{\lambda_0}^k(N)$. Existen $B(\lambda_0, \delta), B(x_0, \epsilon)$ tales que

$$F_\lambda^k(x) \notin N \text{ ó } x \notin F_{\lambda_0|N}^k(N) \text{ para todo } (\lambda, x) \in B(\lambda_0, \delta) \times \overline{B(x_0, \epsilon)} \subset [0, 1] \times (F_{\lambda_0|N}^k(N))^C. \quad (4.1)$$

La afirmación anterior dice que dado $x \in \partial N$ existen $\delta_x, \epsilon_x > 0$ tales que (4.1) en x implica que

$$x \in \overline{B(x, \epsilon_x)} \leftrightarrow U_{x, \lambda}; \text{ es decir, } \partial N = \bigcup_{x \in \partial N} \overline{B(x, \epsilon_x)}.$$

La familias de conjuntos $U_{x, \lambda} = B(x, \epsilon) \times ((\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap [0, 1])$ es una cubierta abierta del conjunto compacto $\partial N \times [0, 1]$. Así, existe una subcubierta finita $U_{x_i, \lambda_i}, i = 1, \dots, n$.

Definamos $W := \bigcup_{i=1}^n U_{(x_i, \lambda_i)}$. El conjunto W es abierto en $M \times [0, 1]$, contiene a $\partial N \times [0, 1]$, $x \notin \text{Inv}(N, F_\lambda) \forall (\lambda, x) \in W$.

Ahora, sea $x \in \partial N$ entonces existen bolas $Y_{x, i}$ con centro en x y conjuntos abiertos Λ_i en $[0, 1]$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$\overline{Y_{x, i}} \times \Lambda_i \subset W \text{ y } \{x\} \times [0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^m (Y_{x, i} \times \Lambda_i).$$

En efecto, $Y_{x, i} \times \Lambda_i \subset W = U_{x, \lambda} = B(x, \epsilon) \times ((\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap [0, 1])$. Elegimos $Y_{x, i} = B(x, \gamma_i)$ con $\gamma_i < d(x, \partial B(x, \epsilon))$ tal que $\overline{Y_{x, i}} = \overline{B(x, \gamma_i)} \subset B(x, \epsilon)$ para todo i tal que $x \in B(x, \epsilon)$. Sea $Y_x = \bigcap_{i=1}^m Y_{x, i}$. Entonces

$$\overline{Y_x} \subset \bigcap_{i=1}^m \overline{Y_{x, i}} = \bigcap_{\gamma_i} B(x, \gamma_i) = \overline{B(x, \gamma_{i_0})}, \quad \gamma_{i_0} = \min \{\gamma_i\}.$$

Luego

$$\overline{Y_{x, i}} \times \Lambda_{i_0} \subset W,$$

donde $\overline{Y_{x, i}} \times [0, 1] = \overline{Y_{x, i}} \times \Lambda_{i_0} \subset W$. Si elegimos $\bigcup \Lambda_i = [0, 1]$, entonces

$$\overline{Y_{x, i}} \times [0, 1] = \bigcup_{i=1}^m (\overline{Y_{x, i}} \times \Lambda_{i_0}) \subset W.$$

Por lo que $\{Y_x \mid x \in \partial N\}$ es una cubierta de ∂N , y existe una subcubierta finita $\{Y_{x_r} \mid r = 1, \dots, \ell_1\}$.

Definamos $V := \bigcup_{r=1}^{\ell_1} Y_{x_r}$. Ahora bien, se tiene que $\partial N \subset \text{int}(V)$ y $\overline{V} \times [0, 1] \subset W$.

Ahora definamos $D := N \setminus \overline{V}$. El conjunto D así definido es un conjunto abierto, y $\text{Inv}(N, F_\lambda) \subset D$, para todo λ . De $\partial N \subset V$ se sigue que $\overline{D} \subset \text{Int}(N)$. ◀

Teorema 4.4. Sean $N = \cup N_s, s = 0, \dots, m$ donde $N_s \subset \mathbb{R}^d$ son conjuntos compactos disjuntos y $\overline{\text{int}(N_s)} = N_s$. Sean $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones continuas. Supóngase que existe la homotopía que conecta a f y g tal que N es una vecindad aislante para $\lambda \in [0, 1]$. Entonces para cualquier sucesión finita $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, \dots, m\}^{n+1}$ los índices de punto fijo

$$I(f^{n+1}, N_{\alpha_0} \cap f^{-1}(N_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(N_{\alpha_n})),$$

y

$$I(g^{n+1}, N_{\alpha_0} \cap g^{-1}(N_{\alpha_1}) \cap \dots \cap g^{-n}(N_{\alpha_n}))$$

son iguales.

Demostración. Sean $F : [0, 1] \times N \rightarrow [-L, L]^d$ continua, entonces $F = (F_1, F_2, \dots, F_d)$, y F_i es continua para todo i .

Si $A_i = [0, 1] \times N$, la función $F_i : A_i \rightarrow [-L, L]$ es continua, para todo i . Notemos que existe $\tilde{F}_i : [0, 1] \times [-L, L]^d \rightarrow [-L, L]$ para todo i tal que $\tilde{F}_i = F_i$ en A_i para todo i . Definamos $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_d)$. Luego escribimos, para todo $(\lambda, x) \in [0, 1] \times N$

$$\tilde{F}(\lambda, x) = (\tilde{F}_1(\lambda, x), \dots, \tilde{F}_d(\lambda, x)) = (F_1(\lambda, x), F_2(\lambda, x), \dots, F_d(\lambda, x)).$$

Así podemos considerar $A := [0, 1] \times [-L, L]^d$ y sin perder generalidad podemos trabajar con \tilde{F} , pero para ahorrar notación se escribirá F en lugar de \tilde{F} . Como $F : A \rightarrow \mathbb{R}^d, F = (F_1, F_2, \dots, F_d), F_i$ es continua para todo i .

Dado que $N \subset [-L, L]^d$ es aislante, entonces

$$\text{Inv}(N, F_\lambda) \subset \text{Int}(N),$$

además

$$F_\lambda^n(\text{Inv}(N, F_\lambda)) \subset F_\lambda^n(\text{Int}(N)) \subset \text{Im}(F) \subset [-L, L]^d$$

por lo que podemos iterar \tilde{F} sin salirnos del dominio de definición.

Ahora fijamos n y $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si $n = 0$ como f y g son homotópicas se tiene la conclusión ya que

$$I(f, N_{\alpha_0}) = I(g, N_{\alpha_0}).$$

Por otro lado, del lema anterior podemos encontrar conjuntos D, C tal que

$$\overline{D} \subset C, \quad \overline{C} \subset \text{int}(N), \quad \text{Inv}(N, F_\lambda) \subset D, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

En efecto, sean

$$C = \bigcup_{p \in \overline{D}} B_{\delta_p}(p) \subset \text{int}(N), \quad \overline{C} = \overline{\bigcup_{p \in \overline{D}} B_{\delta_p}(p)} \subset \text{int}(N).$$

$$\overline{D} = D \cup \left(\bigcup_{p \in \partial D} B_{\delta_p}(p) \right)$$

Pero $\overline{C} = C \cup C'$, incluso si $C = D \cup \left(\bigcup_{p \in \partial \overline{D}} B_{\delta_p}(p) \right)$ implica que $D \subset \overline{D} \subset \text{int}(N)$ lo que implica

$$C = D \cup \left(\bigcup_{p \in \partial D} B_{\delta_p}(p) \right) \subset \text{int}(N).$$

Nótese que $D \subset C \subset \overline{C}$, pues $\overline{B_{\frac{\delta_p}{2}}(p)} \subset B_{\delta_p}(p) \subset \text{int}(N)$.

Ahora definamos $C_i = C \cap N_i$, $D_i = D \cap N_i$ puede ocurrir que $C_i \cap \partial \overline{D} \neq \emptyset$, $D_i \cap \partial \overline{D} = \emptyset$. Sea $\delta > 0$ tal que

$$B(D_i, \delta) \subset C_i, B(C_i, \delta) \subset N_i. \quad (4.3)$$

Sean $\lambda_0 \in [0, 1]$ y $x \in [-L, L]^d$. Entonces existe un conjunto abierto Λ en $[0, 1]$, con $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$,

$$\rho(F^i(\lambda_1, x), F^i(\lambda_2, x)) \leq \delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

$x \in D_\alpha^\lambda = \{x | F_\lambda^j(x) \in D_{\alpha_j}\}$ si y solo si $F_\lambda^j(x) \in D_{\alpha_j} \subset D_{\alpha_0}$, además $x \in C_\alpha^\lambda$ si y solo $F_\lambda^j(x) \in C_{\alpha_j} \subset C_{\alpha_0}$. Para concluir la demostración, siguiendo [Z], enseguida vamos a bosquejar la idea principal usando las propiedades de índice de punto fijo.

Afirmación. Se satisface que

$$D_\alpha^\lambda \subset C_\alpha^{\lambda_0} \subset \text{int}(N_\alpha^\lambda), \quad (4.5)$$

$$F_\lambda^{n+1}(x) \neq x \text{ para } x \in N_\alpha^\lambda \setminus D_\alpha^\lambda. \quad (4.6)$$

Esta afirmación implica que

- a) Para $\lambda, \lambda_0 \in [0, 1]$ los conjuntos frontera

$$bd(D_\alpha^\lambda), bd(C_\alpha^\lambda), bd(N_\alpha^\lambda)$$

están contenidos en $N_\alpha^\lambda \setminus D_\alpha^\lambda$.

- b) El índice de punto fijo para los mapeos iteraciones F_λ^{n+1} , relativo a $D_\alpha^\lambda, C_\alpha^\lambda, N_\alpha^\lambda$, respectivamente, está bien definido.

Luego

$$I(F_\lambda^{n+1}, D_\alpha^\lambda) = I(F_\lambda^{n+1}, C_\alpha^{\lambda_0}) = I(F_\lambda^{n+1}, N_\alpha^\lambda) \quad (4.7)$$

Sustituyendo $\lambda := \lambda_0$, escribimos

$$I(F_{\lambda_0}^{n+1}, D_\alpha^{\lambda_0}) = I(F_{\lambda_0}^{n+1}, C_\alpha^{\lambda_0}) \quad (4.8)$$

De (4.5) y (4.6) se sigue que para todo $\lambda \in \Lambda$ y para todo $c \in bd(C^{\lambda_0}, \alpha)$

$$F_\lambda^{n+1}(x) \neq x.$$

De la invarianza bajo homotopía del índice de punto fijo, obtenemos

$$I(F_\lambda^{n+1}, C_\alpha^{\lambda_0}) = I(F_{\lambda_0}^{n+1}, C_\alpha^{\lambda_0}), \quad \text{para toda } \lambda \in \Lambda. \quad (4.9)$$

De (4.7), (4.8), (4.9) concluimos que

$$I(F_\lambda^{n+1}, D_\alpha^\lambda) = I(F_{\lambda_0}^{n+1}, D_\alpha^{\lambda_0}), \quad \text{para toda } \lambda \in \Lambda. \quad (4.10)$$

De la compacidad de $[0, 1]$ y (4.10) obtenemos

$$I(F_0^{n+1}, D_\alpha^0) = I(F_1^{n+1}, D_\alpha^1).$$

Se sigue, finalmente, de (4.7) que

$$I(F_0^{n+1}, N_\alpha^0) = I(F_1^{n+1}, N_\alpha^1).$$

4.2. Mapeos de tipo herradura topológica

En esta subsección consideramos mapeos del tipo de homotopía de una U -herradura o bien de una G -herradura, para los cuales nos interesamos en condiciones suficientes que garanticen en principio el análisis caótico que estos pueden presentar. En este sentido nos enfocamos en un punto de vista topológico-algebraico sin considerar una estructura diferencial para los mapeos de interés.

Definamos los conjuntos $N_0 = [-1, 1] \times [-1, -0.5]$, $N_1 = [-1, 1] \times [0.5, 1.0]$ y $N = N_0 \cup N_1$.

Definición 4.5. Las funciones $U : N \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$U(x, y) := \begin{cases} (-0.5, 5(y + 0.75)), & \text{para } (x, y) \in N_0, \\ (0.5, -5(y - 0.75)), & \text{para } (x, y) \in N_1 \end{cases}$$

$$G(x, y) := \begin{cases} (-0.5, 5(y + 0.75)), & \text{para } (x, y) \in N_0, \\ (0.5, 5(y - 0.75)), & \text{para } (x, y) \in N_1, \end{cases}$$

son llamadas **U -herradura** y **G -herradura**, respectivamente (figura 4.1).

Definición 4.6. Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$, $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y $\delta \geq 0$. Definimos

$$V(P, \delta) := [a, a + \delta] \times [c, d] \cup [b - \delta, b] \times [c, d],$$

$$H(P, \delta) := [a, b] \times [c, c + \delta] \cup [a, b] \times [d - \delta, d].$$

Para cualquier conjunto $Z = \cup P_i$, $P_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, definimos

$$V(Z, \delta) := \bigcup V(P_i, \delta), \quad H(Z, \delta) := \bigcup H(P_i, \delta)$$

como las δ -**vecindades** en Z de las aristas verticales y horizontales de Z , respectivamente.

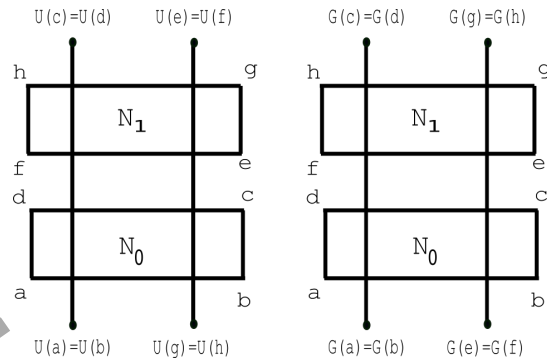


Figura 4.1: U -herradura y G -herradura, respectivamente.

Ahora introducimos dos condiciones geométricas para que N sea una vecindad aislante para una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$, dichas condiciones son las siguientes:

- a) $f(H(N)) \cap N = \emptyset$,
- b) $f(N) \cap V(N) = \emptyset$.

Geoméricamente, la condición a) dice que las aristas horizontales son llevadas por f fuera de N , y la condición b) nos dice que las aristas verticales no intersecan a la imagen de N .

Definición 4.7. Sea $F : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$ una homotopía continua que conecta a f con g , es decir,

$$F(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad \text{y} \quad F(1, x_1, x_2) = g(x_1, x_2).$$

Se dirá que F es **apropiada** si las condiciones a) y b) se cumplen para cada F_λ , $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema 4.8. Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Suponga que existe una homotopía apropiada F que conecta a f con la U -herradura o con la G -herradura. Entonces para cualquier secuencia $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ existen puntos x, y que satisfacen

$$\begin{aligned} f^i(x) &\in N_{\alpha_i} \quad \text{para } i = 0, \dots, n \quad \text{y} \quad f^{n+1}(x) = x, \\ f^i(y) &\in N_{\alpha_i} \quad \text{para } i = 0, \dots, n \quad \text{y} \quad f^{n+1}(y) \notin N. \end{aligned}$$

Definición 4.9. A las funciones para las cuales las hipótesis del teorema anterior se tienen, se llaman **herraduras topológicas**.

4.3. Semiconjugación con el mapeo corrimiento: Condiciones suficientes

Recordemos que $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es la función corrimiento tal que $(\sigma(\mathbf{a}))_k = a_{k+1}$, donde $\mathbf{a} \in \Sigma_2$ y Σ_2 es el espacio de secuencias bi-infinitas de 0's y 1's.

Teorema 4.10. *Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ una herradura topológica que es inyectiva. Entonces existe una función continua sobreyectiva $g : \text{Inv}(N) \rightarrow \Sigma_2$ tal que $g \circ f = \sigma \circ g$. Si $\alpha \in \Sigma_2$ es periódico, entonces $g^{-1}(\alpha)$ contiene puntos periódicos con el mismo periodo.*

Demostración. Tenemos que $\text{Inv}(N) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f|_N^n(N)$. Para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ y $x \in \text{Inv}(N)$, definimos $g_i(x) = j$, si $f^i(x) \in N_j$. Esta función está bien definida, es continua, e induce una función continua $g : \text{Inv}(N) \rightarrow \Sigma_2$. Nótese que $g \circ f = \sigma \circ g$. Del teorema 4.8 se sigue que g^{-1} de cualquier trayectoria periódica contiene una órbita periódica con el mismo periodo. Pero los puntos periódicos son densos en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, así las entradas de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ están en las imágenes de g . ◀

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el *índice de Conley homológico* y pudimos apreciar su utilidad como una herramienta topológica-algebraica invariante alternativa para abordar el análisis de la caoticidad de sistema dinámicos discretos, cuyo enfoque, a diferencia del clásico, consiste en incorporar en dicho análisis los grupos de homología cúbica asociada a un buen par de un conjunto invariante aislado.

En los teoremas 3.20, 3.21 se calculó el índice de Conley homológico para un punto fijo o bien una órbita periódica a través del índice de Morse discreto, lo cual relaciona la dinámica discreta y la homología cúbica. Así mismo, el teorema 3.22 muestra que existen condiciones suficientes que garantizan que un homeomorfismo se puede restringir a un conjunto invariante de tal manera que resulta ser semiconjugado al mapeo corrimiento de dos símbolos, lo que nos acerca, en principio usando este enfoque, al análisis de la caoticidad de dicho mapeo.

Finalmente, como podemos observar en el capítulo 4, es posible garantizar que un mapeo de tipo herradura inyectivo en el plano es semiconjugado al mapeo corrimiento en dos símbolos, sin utilizar el índice de Conley. Lo cual es una alternativa puramente topológica para garantizar la caoticidad del mapeo en estudio, en el cual el índice de Conley homológico no se pueda usar para tal fin.

Bibliografía

- [BF] B. Fiedler, *Handbook of Dynamical systems*, Elsevier, vol. 2 (2002), North-Holland.
- [C] J. M. Cushing, *An Introduction to Structured Population Dynamics*, 1998.
- [D] R. L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*, 1992.
- [E] S. N. Elaydi, *Discrete Chaos with Applications in Science and Engineering*, Second Ed., Chapman and Hall/CRC, Taylor & Francis Group, LLC, 2007.
- [HSD] M. W. Hirsh, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Second Ed., El sevier, 2003. Academic Press, New York.
- [KKM] T. Kaczynski, K. MIschaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Springer, Applied Mathematical Sciences, Vol. 157, 2004.
- [R] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Second Ed., CRC Press, 1999.
- [SVM] J. A. Sanders, F. Verhulst y J. Murdock, (2010), *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second Ed. Springer, New York.
- [W] S. Wiggins, (1988) *Global Bifurcations and Chaos*, Springer-Verlag, New York.
- [BCDS] Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, 99, 1992, 332-334.
- [Z] P. Zgliczynski, *Fixed Point Index for Iterations of Maps, Topological Horseshoe and Chaos*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center, Vol. 8, 1996, 169–177.
- [RS1] J. Robbin and D. Salamon, *Dynamical systems, shape theory, and the Conley index*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 8 (1988),
- [FR] John Franks and David Richeson, *Shift equivalence and the Conley index*, Trans. Amer. Math. Soc. 352, (2000), 3305–3322
- [Do] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*, Second Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 19980.

- [M] M. Mrozek, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 149-178

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
México.