Probabilidad

Segunda edición

COLECCIÓN
HÉCTOR OCHOA BACELIS
Textos de enseñanza de ciencias básicas

José Manuel Piña Gutiérrez

Rector

Probabilidad

Segunda edición

Robert J. Flowers
H. Daniel Cruz S.
Lucas López S.
Aroldo Pérez P.

Universidad Juárez
Autónoma de Tabasco

Probabilidad / Robert J. Flowers, … [y otros tres]. – Segunda edición. – Villahermosa, Tabasco: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2015.

232 páginas: Ilustrado. – (Colección: Héctor Ochoa Bacelis. Textos de enseñanza de ciencias básicas).

Incluye referencias bibliográficas (p. 231-232)

ISBN: 978-607-606-219-7

1. Probabilidad \ 2. Estadística matemática. I. Robert J. Flowers, Autor

L.C. QA273 P76 2015

Segunda edición, 2015

ISBN: 978-607-606-219-7

Apoyo editorial: Francisco Morales Hoil
Corrección de estilo: Blanca Quiriarte
Diseño y formación: Ricardo Cámara Córdova

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México

Índice

Prólogo

El presente trabajo es fruto de varios años de experiencia dictando la materia de Probabilidad en la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Comprende un curso completo de Probabilidad para las licenciaturas en Matemáticas, Física, Ciencias Computacionales y algunas áreas afines, relacionadas con el estudio de fenómenos aleatorios. En la presentación se han considerado los aspectos metodológicos de la enseñanza y comprensión de los conceptos más importantes de la probabilidad, apoyados con ejemplos claros y referencias que el estudiante puede consultar para una mejor y más amplia información de los procedimientos. El material se dispone en seis capítulos; en el primero se hace una breve introducción a la teoría de conjuntos incorporando la definición de eventos y técnicas de contar. En el capítulo dos se hace una presentación detallada de variables aleatorias en un espacio de probabilidad, haciendo énfasis en la construcción de un espacio de probabilidad real a través de la definición de una variable aleatoria. Mientras que en el capítulo tres se presentan los conceptos de valores esperados y funciones generadoras de momentos, junto con procedimientos alternativos para el cálculo de momentos de variables aleatorias. Los capítulos cuatro y cinco comprenden el estudio de las distribuciones de variables aleatorias discretas y continuas, respectivamente. Por último, en el capítulo seis se aborda el teorema del límite central, introduciendo con este propósito el concepto de convergencia en distribución y el teorema de continuidad; finalizando con la aproximación normal a la distribución binomial. Adicionalmente, se han construido las tablas de las distribuciones más importantes que se utilizan en la resolución de los ejemplos, los cuales se presentan en los apéndices *A*, *B*, *C*, y *D*.

Cambios en la segunda edición

Se realizaron correcciones de errores cometidos en cada uno de los cinco capítulos de los cuales disponía la primera edición. En el capítulo dos se da una descripción más detallada de la σ-álgebra de Borel en $\boldsymbol{R}$ y se agregan algunos resultados más concernientes a las variables aleatorias y las σ-álgebras. Se anexa también un capítulo más que aborda al teorema del límite central.

Capítulo 1
Eventos

1.1 Introducción

En la naturaleza existen distintos fenómenos, los cuales pueden clasificarse como determinísticos y estocásticos (o aleatorios): los primeros tienen la característica de que bajo las mismas condiciones iniciales para su realización siempre se obtiene el mismo resultado, mientras que los clasificados como aleatorios al observar el mismo fenómeno se obtienen distintos resultados, e incluso existe una infinidad de fenómenos de los cuales es imposible saber el resultado antes de su realización.

En la vida real un fenómeno adquiere la característica de aleatorio debido a las condiciones iniciales bajo las cuales ocurre, principalmente porque éstas pueden ser números muy grandes, tales que no pueden controlarse todas a la vez. Por esta razón, al observar el mismo fenómeno se tienen distintos resultados. A los fenómenos con ésta característica se les conoce como fenómenos estocásticos o aleatorios.

La probabilidad estudia los fenómenos de tipo aleatorio o estocástico que pueden reproducirse y en donde se conocen todos los resultados posibles, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda o de un dado. En un fenómeno probabilístico, no se sabe cuál será el resultado del experimento aún cuando se repita, pero sí podemos conocer todos los posibles resultados.

La probabilidad tiene sus orígenes en los juegos de azar por el siglo XVII. A principios de este siglo Kolmogorov propuso un tratamiento axiomático rigurosamente matemático. Actualmente la probabilidad se aplica en distintas disciplinas tales como la Física, Economía, Biología, Química, etc. Además de ser el fundamento teórico de la Estadística.

Antes de empezar con el tratamiento matemático mencionaremos algunas definiciones de Probabilidad que se fueron dando a lo largo de la historia.

Definición 1.1. (Clásica o a priori). Si un experimento aleatorio puede resultar de N maneras mutuamente excluyentes e igualmente verosímiles y si N_A de esos resultados tienen una propiedad A, entonces la probabilidad de A es la fracción N_A/N.

Definición 1.2. (Frecuentista o a posteriori). Se supone que se ha observado el fenómeno un número grande de veces y se aproxima la probabilidad de un resultado por su frecuencia relativa.

Definición 1.3. (Subjetiva). Esta probabilidad se asigna dependiendo del grado de conocimiento que se tenga del fenómeno.

Esta última definición no tiene interés científico, pero es importante mencionarla pues es frecuente que se hagan preguntas de este tipo. Algunos autores mencionan una definición de probabilidad geométrica, pero esta puede ser incluida en la definición frecuentista.

1.2 Conjuntos

Para el desarrollo matemático de la probabilidad necesitamos la teoría de conjuntos; en esta sección damos los conceptos más importantes empleando la noción empírica.

Para describir o determinar un conjunto existen dos formas, por extensión y por comprensión, en la primera se escriben explícitamente entre llaves, separando por comas a los elementos del conjunto; en la segunda forma, se escribe entre llaves la característica o características generales que distinguen a los elementos del conjunto, y la notación usual es, $\{x: P(x)\}$, se lee el conjunto de todos los elementos x tales que x tiene o satisface la propiedad P. Denotaremos con mayúsculas a los conjuntos A, B,..., y a los elementos del conjunto con minúsculas, x, y,...; para denotar que un elemento x pertenece al conjunto A escribimos $x \in A$, en caso contrario escribimos $x \notin A$.

Ejemplo 1.1. Dentro de los ejemplos más importantes de conjuntos, se encuentran: el conjunto de números naturales $\boldsymbol{N}$, el conjunto de números enteros $\boldsymbol{Z}$, el conjunto de números racionales $\boldsymbol{Q}$, el conjunto de números reales $\boldsymbol{R}$ y el conjunto de números complejos $\boldsymbol{C}$.

Ejemplo 1.2. Si queremos denotar al conjunto A que tiene como elementos a las vocales, lo podemos hacer como $A=\{a, e, i, o, u\}$, o bien como $A=\{x$: x es una vocal$\}$.

En un conjunto lo más importante son sus elementos que lo conforman, y no importa el orden en el que éstos se escriban, en caso de que haya repeticiones, éstas se considerarán como un solo elemento, es decir, se eliminarán los elementos repetidos.

Ejemplo 1.3. Los conjuntos $B = \{a, e, i, o, u\}$, $C = \{u, o, i, e, a\}$ y $D = \{a, a, e, e, e, i, i, o, o, u\}$ representan al mismo conjunto A, al de las vocales.

Existen dos conjuntos muy importantes, el conjunto que carece de elementos, llamado conjunto vacío y se denota por $\varnothing$, y el conjunto universal o universo, denotado por U.

Definición 1.4. Sean A y B dos conjuntos. Decimos que B es un subconjunto de A, denotado por $B\subset A$, si cada elemento de B es también un elemento de A.

Observemos que $\varnothing \subset A \subset U$, para todo conjunto A.

Ejemplo 1.4. Dentro de los subconjuntos más importantes de los números reales, se encuentran los subconjuntos definidos para dos números a, $b\in\boldsymbol{R}$ tales que $a<b$, llamados intervalos.

El intervalo abierto entre a y b se define como,

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}.$$

El intervalo cerrado entre a y b se define como,

$$[\, a , b \,] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}.$$

Los intervalos semi-abiertos o semi-cerrados entre a y b se definen como,

$$[\, a , b \,) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\},$$

$$(\, a , b \,] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}.$$

Definición 1.5. Dos conjuntos A y B se dice que son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos, en otras palabras, A=B si, y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

1.2.1 Operaciones con conjuntos

Definición 1.6. La Unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Propiedades de la unión. Si A, B y C son conjuntos, entonces las siguientes propiedades se cumplen para la unión:

1) $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$.
2) $A \cup B = B \cup A$.
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Definición 1.7. Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de conjuntos, se define la unión de estos conjuntos, denotada por $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, como

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para alguna } i\}.$$

Ejemplo 1.5. Sean $A_i = [\, 0 , 2 - 1/i \,]$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 2)$.

Definición 1.8. La intersección de dos conjuntos A y B, denotado por $A \cap B$, es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Propiedades de la Intersección. Si A, B, y C son conjuntos, entonces las siguientes propiedades se cumplen para la intersección:

4) $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$.
5) $A \cap B = B \cap A$.
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Definición 1.9. Se dice que dos conjuntos A y B son ajenos, si su intersección es vacía, es decir, A y B son conjuntos ajenos si, y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Una colección de conjuntos se dice que es ajena a pares o por parejas, si cualesquiera dos conjuntos de la colección son ajenos.

Definición 1.10. Sea A_1, A_2,... una colección numerable de conjuntos, se define la intersección de estos conjuntos, denotada por $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, como

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i \ \forall\, i\}.$$

Ejemplo 1.6. Sean $A_i = [\,0, 1/i)$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$.

Proposición 1.1. Para cualesquiera tres conjuntos A, B, y C, se cumplen las siguientes propiedades:

7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración.

La demostración de 7) se hará con base en la Definición 1.5 de la igualdad de conjuntos. Sea $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces $x \in A$ y $x \in (B \cup C)$, así $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$. Si $x \in B$, tenemos que $x \in (A \cap B)$; luego $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si $x \in C$, tenemos que $x \in (A \cap C)$; luego $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Esto demuestra que

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Por otro lado, como $(A \cap B) \subset B$ y $(A \cap C) \subset C$, entonces

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (B \cup C).$$

Similarmente, como $(A \cap B) \subset$ A y $(A \cap C) \subset A$, entonces

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A.$$

Por lo tanto,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

Por la definición 1.5, resulta que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

De manera análoga, se puede dar una demostración para 8).

◊

Proposición 1.2. Si A, B_1, B_2,... son conjuntos, entonces

9) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A \cap B_i \right).$

10) $A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup B_i)$.

Demostración.

Se dará la demostración para el inciso 9). Por la definición 1.5 tenemos que verificar las dos contenciones

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i) \quad \text{y} \quad A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i).$$

Para la primera, sea $x\in A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)$, entonces por la definición de intersección de dos conjuntos, $x\in A$ y $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$, de donde se tiene que existe i tal que $x\in B_i$, pero como $x\in A$ tenemos que $x\in A\cap B_i$, así $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)$, lo que demuestra la primera contención,

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i).$$

Para la otra contención, tomemos $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)$, entonces existe i tal que $x\in(A\cap B_i)$, de aquí que $x\in A$ y $x\in B_i$, luego $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$, por lo tanto $x\in A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$, de donde

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)\subset A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right),$$

con lo que se demuestra la igualdad del inciso 9). En forma similar se puede dar una demostración para el 10).

◊

Definición 1.11. Sea U el conjunto universal y A un conjunto arbitrario. El complemento del conjunto A, denotado por A^c, es el conjunto

$$A^c = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}.$$

Propiedades del complemento. Para todo conjunto A, se satisfacen las siguientes propiedades:

11) $(A^c)^c = A$.
12) $A \cup A^c = U$.
13) $A \cap A^c = \varnothing$.

Proposición 1.3. (Leyes de De Morgan). Para cualquier pareja de conjuntos A y B, se cumplen las siguientes propiedades:

14) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
15) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demostración.

Se dará la demostración para el inciso 14). Sea $x \in (A \cup B)^c$, luego $x \notin (A \cup B)$, por lo tanto $x \notin A$ y $x \notin B$, entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$, de donde $x \in A^c \cap B^c$; lo que demuestra que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Por otro lado, si $x \in A^c \cap B^c$, entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$, luego $x \notin A$ y $x \notin B$, por lo tanto $x \notin (A \cup B)$, de donde $x \in (A \cup B)^c$, lo que demuestra que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Por la definición 1.5 se tiene que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. En forma similar se logra una demostración para el 15).

◊

Proposición 1.4. Si A_1, A_2,... es una colección numerable de conjuntos, entonces

16) $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$.

17) $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$.

Demostración.

Para la demostración de 16) notemos que

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \text{ si, y sólo si } x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \text{si, y sólo si } \; x \notin A_i \;\forall\, i = 1, 2, \ldots.$$

Luego, $x \in A_i^c \;\forall\, i = 1, 2, \ldots$ si, y sólo si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$. Por lo tanto, $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$.

Para la demostración de 17) se ocupa el resultado del 16):

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(A_i^c\right)^c\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

◊

Definición 1.12. La diferencia entre dos conjuntos A y B, denotada por A-B, es el conjunto

$$A - B = A \cap B^c.$$

Propiedad de la diferencia.

18) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

Definición 1.13. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos.

a) $\{A_n\}$ es una sucesión monótona creciente, sí $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$.
b) $\{A_n\}$ es una sucesión monótona decreciente, sí $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$.

Para indicar que una sucesión $\{A_n\}$ es de alguno de estos dos tipos, se dice que $\{A_n\}$ es una sucesión monótona.

Ejemplo 1.7. Consideremos las sucesiones de conjuntos dadas en los ejemplos 1.5 y 1.6.

a) Si $A_i = [\,0,\ 1/i)$, $i = 1, 2,...,$ entonces $\{A_i\}$ es una sucesión monótona decreciente.
b) Si $B_i =[\,0,\ 2 - 1/i\,]$, $i = 1, 2,...,$ entonces $\{B_i\}$ es una sucesión monótona creciente.

Definición 1.14. Sea $\{A_n\}$ una sucesión monótona de conjuntos. El límite de la sucesión $\{A_n\}$, denotado por $\lim_{n\to\infty} A_n$, se define como

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ , si la sucesión es monótona creciente,}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ , si la sucesión es monótona decreciente.}$$

Ejemplo 1.8. Consideremos a las sucesiones del ejemplo anterior.

a) Para $A_i = [0, 1/i)$, $i = 1, 2, ...,$ $\{A_i\}$ es una sucesión monótona decreciente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

b) Para $B_i = [\,0\,,\,2 - 1/i\,]$, $i = 1, 2, ...,$ $\{B_i\}$ es una sucesión monótona creciente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = [0, 2).$$

Definición 1.15. Para dos conjuntos A y B, se define el producto cartesiano de A y B, denotado por $A\times B$, como el conjunto

$$A\times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Esta definición se puede extender a cualquier colección finita de conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i\,,\ \forall\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Ejemplo 1.9. Supongamos que se lanza un dado dos veces, el conjunto de resultados de un dado se puede representar como,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Entonces el conjunto de resultados del lanzamiento de los dos dados se puede escribir como,

$$A\times A = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Definición 1.16. Para un conjunto A, se define el conjunto potencia de A, denotado por Pot(A), como la familia de todos los subconjuntos de A.

Ejemplo 1.10. Si $A=\{a, b, c\}$, entonces el conjunto potencia de A, está dado por,

$$\mathrm{Pot}(A)=\{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

1.3 Definiciones y propiedades básicas de probabilidad

Definición 1.17. Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio muestral, y se le denota por Ω. Si Ω tiene un número finito de puntos, se llama espacio muestral finito, en caso contrario, espacio muestral infinito.

En esta sección establecemos una relación entre una clase de conjuntos de Ω y el intervalo [0, 1], es decir, asignamos un valor numérico a ciertos subconjuntos A de Ω para indicar el nivel de aparición de un punto muestral $w \in \Omega$ en A. A estos subconjuntos les llamaremos eventos y a la colección de todos los eventos le llamaremos σ-álgebra. Es decir, los elementos de una σ-álgebra serán ciertos subconjuntos de Ω a los que se les puede asignar un número real, entre 0 y 1, llamado probabilidad.

Definición 1.18. Sea Ω un conjunto no vacío. Una colección δ de subconjuntos de Ω se dice que es una σ-álgebra de Ω, si satisface las siguientes propiedades:

i) $\emptyset \in \delta$.
ii) Si $A \in \delta$, entonces $A^c \in \delta$.
iii) Si $\{A_i\}$ es una colección numerable de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \delta$.

Ejemplo 1.11. En el experimento de lanzar una moneda, podemos representar el resultado de sol y águila por s y a respectivamente, entonces el espacio muestral es $\Omega=\{s, a\}$ y la σ-álgebra δ es

$$\delta=\{\varnothing, \Omega, \{s\}, \{a\}\}.$$

Proposición 1.5. Si δ es una σ-álgebra de Ω y $A_1, A_2, ..., A_n \in \delta$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \delta$. Es decir, δ es cerrado bajo intersecciones finitas.

Demostración.

Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \delta$, de la definición 1.18, propiedad ii), $A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c \in \delta$. De la misma definición, propiedad iii), $\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \in \delta$. Por la proposición 1.3, propiedad 14),

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \delta$.

◊

Es claro que la proposición anterior es también válida cuando $n = \infty$.

Proposición 1.6. Para un conjunto no vacío Ω, defínanse $\delta_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ y δ_1 = Po$t(\Omega)$. Entonces δ_0 y δ_1 son σ-álgebras de Ω, y si δ es cualquier σ-álgebra de Ω, $\delta_0 \subset \delta \subset \delta_1$.

Demostración.

De la definición 1.18, se deduce que δ_0 y δ_1 son σ-álgebras de Ω. Sea δ un σ-álgebra de Ω. De la definición 1.18, propiedad i) y ii), $\Omega \in \delta$ y $\emptyset \in \delta$; por lo tanto $\delta_0 \subset \delta$. Por otro lado, la definición de δ_1 implica que $\delta \subset \delta_1$, para cualquier colección δ de subconjuntos de Ω. De esta manera se concluye que $\delta_0 \subset \delta \subset \delta_1$ para cualquier σ-álgebra δ de Ω.

◊

Corolario 1.1. Cualquier conjunto no vacío Ω, o tiene una σ-álgebra o tiene al menos dos σ-álgebras.

Demostración.

Si Ω consta de un elemento, entonces $\delta_1 = \delta_0$. Por la proposición 1.6, $\delta_0 = \delta = \delta_1$, y δ_0 es la única σ-álgebra de Ω. Si Ω consta de más de un elemento, $\delta_0 \subset \delta_1$. Por la proposición 1.6, existen al menos dos σ-álgebras para Ω, δ_0 y δ_1. Además, si δ es cualquier otra σ-álgebra de Ω, $\delta_0 \subset \delta \subset \delta_1$.

◊

Nótese que la proposición 1.6 y el corolario 1.1, garantizan la existencia de al menos una σ-álgebra para todo conjunto no vacío.

Proposición 1.7. Sea δ una σ-álgebra de Ω y $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$. Entonces $B \cap \delta = \{E : E = B \cap A, A \in \delta\}$ es una σ-álgebra reducida en B (o σ-álgebra en B).

Demostración.

Como δ una σ-álgebra de Ω, $\Omega \in \delta$; por lo tanto, $B \in B \cap \delta$, ya que $B = B \cap \Omega$. Por otro lado, si $E \in B \cap \delta$, $E = B \cap A$, con $A \in \delta$. Por la definición 1.18, parte ii), $A^c \in \delta$; luego $(B \cap A^c) \in B \cap \delta$. Ahora bien, el complemento de E en B está dado por

$$E_B^c = B \cap E^c = B \cap (B \cap A)^c = B \cap A^c.$$

Por lo tanto, $E_B^c \in B \cap \delta$.

Finalmente, si E_1, E_2,.... es una colección numerable de eventos en $B \cap \delta$, entonces existe una colección numerable A_1, A_2,... de eventos en δ tal que $E_i = B \cap A_i$.

Así, por la proposición 1.2, parte 9) resulta que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i) = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \delta \, ;$$

de donde se deduce que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in B \cap \delta \, .$$

Por lo tanto, con base en la definición 1.18, la colección $B \cap \delta$ es una σ-álgebra en B. Por simplicidad, denotaremos por δ_B a la σ-álgebra $B \cap \delta$.

◊

Definición 1.19. Se dice que un evento A ($A \in \delta$) ocurre, cuando el resultado del experimento es un elemento de A.

Antes de calcular probabilidades de eventos es importante observar cómo se representan los eventos en la notación de conjuntos.

Ejemplo 1.12. Supongamos que se lanzan dos dados, y consideremos los siguientes eventos:

> A: =la suma de las caras de los dados es un valor menor que 4,
> B: =la suma de las caras de los dados es un valor mayor que 8.

Describa el espacio muestral y represente los eventos en notación de conjuntos.

Solución.

El espacio muestral del experimento está dado por,

$$\Omega=\{(x\,,\,y)\,|\,x\,,\,y=1,2,3,4,5,6\}.$$

Entonces, en este caso la representación de los eventos, en la notación de conjuntos, es muy simple:

$$A=\{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$

$$B=\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

◊

Ejemplo 1.13: Considere los eventos *A*, *B*, *C* y *D* de un espacio muestral Ω; y describa los siguientes eventos en notación de conjuntos:

a) E_1: Al menos uno de los eventos ocurre.
b) E_2: A lo más dos de los eventos ocurren.
c) E_3: Exactamente dos de los eventos ocurren.
d) E_4: Al menos tres de los eventos ocurren.
e) E_5: Exactamente uno de los eventos ocurre.

Solución.

Para representar a estos eventos utilizamos intersecciones, uniones y complementos de conjuntos.

a) Este evento se presenta cuando el punto muestral se encuentra en *A*, o en *B*, o en *C*, o en *D*; es decir, ocurre *A*, o ocurre *B*, o ocurre *C*, o ocurre *D*, entonces $E_1 = A\cup B\cup C\cup D$.

b) En esta situación puede ocurrir exactamente uno de los eventos o dos de ellos simultáneamente pero no tres y no cuatro, entonces

$$
\begin{aligned}
E_2 = {} & (A\cap B^c\cap C^c\cap D^c) \cup (A^c\cap B\cap C^c\cap D^c) \\
& \cup (A^c\cap B^c\cap C\cap D^c) \cup (A^c\cap B^c\cap C^c\cap D) \cup (A\cap B\cap C^c\cap D^c) \\
& \cup (A\cap B^c\cap C\cap D^c) \cup (A\cap B^c\cap C^c\cap D) \cup (A^c\cap B\cap C\cap D^c) \\
& \cup (A^c\cap B\cap C^c\cap D) \cup (A^c\cap B^c\cap C\cap D).
\end{aligned}
$$

c) En este caso, puede ocurrir exactamente cualquier pareja de eventos, entonces

$$
\begin{aligned}
E_3 = {} & (A\cap B\cap C^c\cap D^c) \cup (A\cap B^c\cap C\cap D^c) \cup (A\cap B^c\cap C^c\cap D) \\
& \cup (A^c\cap B\cap C\cap D^c) \cup (A^c\cap B\cap C^c\cap D) \cup (A^c\cap B^c\cap C\cap D).
\end{aligned}
$$

d) En esta situación pueden ocurrir tres o cuatro de los eventos, entonces

$$
\begin{aligned}
E_4 = {} & (A\cap B\cap C\cap D^c) \cup (A\cap B^c\cap C\cap D) \cup (A\cap B\cap C^c\cap D) \\
& \cup (A^c\cap B\cap C\cap D) \cup (A\cap B\cap C\cap D).
\end{aligned}
$$

e) Finalmente,

$$
\begin{aligned}
E_5 = {} & (A\cap B^c\cap C^c\cap D^c) \cup (A^c\cap B\cap C^c\cap D^c) \\
& \cup (A^c\cap B^c\cap C\cap D^c) \cup (A^c\cap B^c\cap C^c\cap D).
\end{aligned}
$$

◊

Ejemplo 1.14. Escriba los siguientes eventos en notación de conjuntos.

a) El evento seguro.
b) El evento imposible.
c) El evento no ocurre A.
d) De los eventos A y B ocurre al menos uno.
e) De los eventos A y B ocurren los dos.
f) Si A ocurre también ocurre B.
g) De los eventos A y B ocurre exactamente uno.

Solución.

a) El evento seguro es Ω, pues siempre que se realiza el experimento el resultado se encuentra en el espacio muestral.
b) El evento imposible es aquel que nunca ocurre, es decir, carece de un resultado o punto muestral, es el conjunto $\emptyset$.
c) El evento de que A no ocurra significa que el resultado que aparece no es elemento de A, entonces debe estar en su complemento, entonces la representación es A^c.
d) La ocurrencia de al menos uno de los eventos significa que ocurre A o ocurre B, es decir, es $A \cup B$.
e) La ocurrencia de dos eventos simultáneamente se presenta cuando el punto muestral que aparece pertenece a ambos conjuntos, la representación es $A \cap B$.
f) Si ocurre A, significa que el resultado es un punto o elemento de A, para que implique la ocurrencia de B, también debe estar en B; esta situación se presenta cuando A es un subconjunto de B, es decir, $A \subset B$.
g) Que ocurra exactamente uno de los dos lo interpretamos como, si ocurre A no ocurre B o, si ocurre B no ocurre A, entonces el evento es $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

◊

Definición 1.20. Dado un espacio muestral Ω y una σ-álgebra δ de subconjuntos de Ω, definimos la medida de probabilidad (o simplemente probabilidad) como una función real P en δ tal que:

a) $P(\Omega)=1$.
b) $0 \le P(A) \le 1$ para todo $A \in \delta$.
c) Si $\{A_i\}$ es una colección numerable de eventos ajenos en δ, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) .$$

Éste último inciso, hace de P una función de conjuntos contablemente aditiva, y en el teorema 1.1, inciso b) se demostrará que también es finitamente aditiva.

Definición 1.21. Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, δ, P) formada por: un espacio muestral Ω, una σ-álgebra δ de subconjuntos de Ω y una medida de probabilidad P definida en δ.

Teorema 1.1. Si (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad, entonces la medida de probabilidad satisface las siguientes propiedades:

a) $P(\emptyset) = 0$.
b) Si $\{A_i\}$ es una colección finita de n eventos ajenos, entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,.$$

c) $P(A^c) = 1 - P(A)$, para todo evento A.
d) $P(A\text{-}B) = P(A) - P(A \cap B)$.
e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
f) Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Demostración.

a) Consideremos a la sucesión $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ es inmediato que esta sucesión es ajena, la intersección de dos cualesquiera de estos conjuntos es el conjunto vacío, entonces por la definición de probabilidad se tiene que

$$P(A) = P(A) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots.$$

De donde

$$0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots.$$

Así,

$$P(\varnothing) = 0.$$

b) Consideremos a la sucesión $B_1=A_1$, $B_2=A_2$,..., $B_n=A_n$, $B_{n+1}=\varnothing$, $B_{n+2}=\varnothing$, ..., entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,.$$

c) Sea A un evento, como $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^{c}) = P(A) + P(A^{c})$, se tiene que $P(A^{c}) = 1 - P(A)$.

d) Observemos que $A = (A\text{-}B) \cup (A \cap B)$, de donde

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)\,,$$

por lo tanto

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

e) Para demostrarlo consideremos la siguiente identidad de eventos ajenos:

$$A \cup B = (A\text{-}B) \cup (B\text{-}A) \cup (A \cap B).$$

De donde,

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

f) Consideremos la relación del inciso d), junto con la hipótesis $A \subset B$; se tiene que $A \cap B = A$, de donde

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A) \geq 0 .$$

Entonces

$$P(A) \leq P(B) . \qquad \Diamond$$

Regresando a la definición de espacio muestral, si un experimento tiene un conjunto finito de resultados posibles, podemos suponer que Ω se puede escribir como, $\Omega = \{s_1, s_2 ,...,s_n \}$.

Si suponemos que los resultados son equiprobables, entonces para calcular la probabilidad de un evento A, se aplica la definición clásica, que se puede resumir como número de casos favorables entre número de casos posibles.

Nótese que, $P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{s_i\}) = nP(\{s_i\}) = 1$, de donde $P(\{s_i\})$ $= 1/n$ para todo i.

Luego, como $A \subset \Omega$, $A = \{s_{a1}, s_{a2},...,s_{am} \}$, por lo tanto,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{s_{a_i}\}\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\{s_{a_i}\}) = \frac{m}{n}.$$

De esta manera, si queremos calcular la probabilidad de un evento, en este tipo de casos, lo que se tiene que hacer es contar los puntos de A y dividir entre el número de puntos del espacio muestral. Además, el conjunto de los eventos de interés (la σ-álgebra de interés), en este caso, estará dada por el conjunto potencia de Ω, Pot(Ω).

Teorema 1.2. Sea (Ω, δ, P) un espacio de probabilidad.

i) Si $\{A_n\}$ es una sucesión monótona de conjuntos en δ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$.

ii) Si $\{A_n\}$ es cualquier colección de conjuntos en δ, entonces $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Demostración.

i) Si $\{A_n\}$ es una sucesión monótona creciente de conjuntos en δ, entonces por la definición 1.13, $B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \ldots, B_n = A_n - A_{n-1}, \ldots$, forman una sucesión de conjuntos ajenos en δ. Además por la definición 1.14, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ y $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, luego, de la definición 1.20, propiedad c), resulta que

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Si $\{A_n\}$ es una sucesión monótona decreciente de conjuntos en δ, nótese que si $A_n \supset A_{n+1}$, entonces $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Luego, de la definición 1.13, $\{A_n^c\}$, es una sucesión monótona creciente de conjuntos en δ. Además por la definición 1.14, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, y por la proposición 1.4, parte 17), resulta que $A^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$. Por lo tanto, del caso anterior, resulta que $P(A^c) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n^c)$. Por el teorema 1.1, parte c), se deduce que $P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

ii) Si $\{A_n\}$ es cualquier colección de conjuntos en δ, sea $E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Claramente $E_n \in \delta$, y aplicando (n-1) veces el teorema 1.1 e), resulta que

$$P(E_n) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Además, por la definición de E_n, $\{E_n\}$ es una sucesión monótona creciente de conjunto en δ.

Por lo tanto, por el inciso i) ya demostrado, resulta que,

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k).$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

lo cual implica que

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k).$$

◊

La primera parte del teorema anterior, hace de P una función de conjuntos continua por abajo en una sucesión monótona creciente, y continua por arriba en una sucesión monótona decreciente. Mientras que la parte ii), muestra que P es una función de conjuntos contablemente subaditiva; de hecho, el lector puede demostrar del inciso c) del teorema 1.1, que P es finitamente subaditiva.

1.4 Permutaciones y combinaciones

Definición 1.22. Al procedimiento de extraer objetos de un conjunto dado (población) se le llama muestreo. Si el orden en el que se seleccionan, dichos objetos, es importante, se le llama muestreo con orden. Si el objeto seleccionado se sustituye en la población antes de seleccionar al siguiente, se le llama muestreo con reemplazo.

Principio fundamental del conteo o numeración. Si un primer experimento puede resultar de n_1 maneras, un segundo experimento puede resultar de n_2 maneras, etc. un m-ésimo experimento puede resultar de n_m maneras, entonces el experimento combinado puede resultar de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ maneras.

Definición 1.23. A las muestras con orden se les llama ordenaciones o permutaciones y a las muestras sin orden se les llama combinaciones.
Muestreo con orden y sin reemplazo. A este tipo de muestreo se le llama permutación, y supone que la población de donde se van a extraer los objetos tiene M elementos, y que el tamaño de muestra es de N, para este caso $N \leq M$. Observemos que el primer objeto se puede seleccionar de M maneras, que el segundo objeto se puede seleccionar de M-1 maneras, etc. el N-ésimo objeto se puede seleccionar de M-(N-1) maneras; entonces, por el principio fundamental de conteo, el número de muestras, bajo este tipo de muestreo, es $M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot \ldots \cdot (M-N+1)$.

Si recordamos que $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, entonces el producto anterior lo podemos escribir como

$$\frac{M!}{(M-N)!},$$

al cual representaremos como $(M)_N$ o $P_{M,N}$.

Muestreo con orden y con reemplazo. Para este tipo de permutación tenemos que en cada extracción se tienen M posibilidades, de donde si se seleccionan N, el número de muestras es M^N.

Muestreo sin orden y sin reemplazo. Al número de combinaciones, bajo este tipo de muestreo, lo denotaremos por

$$\binom{M}{N}.$$

Fijemos una de estas combinaciones, observemos que para esta combinación tenemos $N!$ permutaciones, si esto lo hacemos para cada una de las combinaciones tendremos el número total de permutaciones de N objetos tomados de M, es decir, tenemos

$$N!\binom{M}{N} = (M)_N,$$

de donde

$$\binom{M}{N} = \frac{(M)_N}{N!} = \frac{M!}{N! \cdot (M-N)!}.$$

Muestreo sin orden y con reemplazo. El número de muestras de tamaño N tomadas de un conjunto de tamaño M, bajo este tipo de muestreo, esta dada por la relación

$$\binom{M+N-1}{N}.$$

La deducción de esta relación la mostraremos con un caso particular, M=N=3. Supongamos que tenemos un conjunto con 3 objetos, digamos $\{A_1, A_2, A_3\}$, entonces las muestras bajo este tipo de muestreo, se pueden escribir únicamente con los subíndices:

$$111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333.$$

Ahora, definamos una función en este conjunto, de la siguiente manera, al primer dígito le sumamos cero, al segundo dígito le sumamos uno, al tercer dígito le sumamos dos, en el caso general se seguiría este proceso, este tipo de relación es una biyección. Entonces las muestras que obtenemos son

$$123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.$$

Las cuales son muestras de tamaño tres, seleccionadas de un conjunto de tamaño cinco sin orden y sin reemplazo, entonces por la biyección este número de muestras es igual al número de muestras sin orden y con reemplazo:

$$\binom{5}{3} = \binom{3+3-1}{3}.$$

El caso general es parecido, de donde se deduce la relación buscada.

Ejemplo 1.15. Si se extraen tres cartas de una baraja americana ordinaria, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos espadas exactamente?

Solución.

Sea A el evento de obtener dos espadas exactamente. El número de combinaciones que puede hacerse con tres cartas es

$$N = \binom{52}{3} = \frac{52!}{3!\,49!} = 22100.$$

El número de grupos de tres cartas que contienen exactamente dos espadas es

$$N_A = \binom{13}{2}\binom{39}{1} = 3042.$$

Donde el primer factor $\binom{13}{2}$ es el número de combinaciones de las 13 espadas tomadas de dos en dos. El segundo factor $\binom{39}{1}$ es el número de combinaciones de las 39 cartas seleccionadas una a una. Entonces se sigue que

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3042}{22100} \cong 0.138\,.$$

◊

En algunos problemas se tiene cierta información, que influye en el cálculo de las probabilidades, por ejemplo, un caso extremo es preguntarse por la probabilidad de seleccionar, dentro de la población de elefantes, un elefante color rosa, obviamente que la probabilidad de este evento es cero, pues no existen elefantes color rosa. Así, el grado de conocimiento afecta al cálculo de las probabilidades. Para estudiar este tipo de problemas se necesitan otras definiciones adicionales.

Definición 1.24. Sean (Ω, δ, P) un espacio de probabilidad y B un evento en Ω tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de un evento A en Ω dado B (o dado que ha ocurrido B), denotada por $P(A|B)$, se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Cuando hablamos de probabilidad condicional, realmente estamos condicionando sobre algún evento B; es decir, estamos suponiendo que el resultado del experimento resultará en B, un subconjunto de Ω. En efecto, nótese que

$$P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1.$$

Por lo tanto, resulta que B es nuestro nuevo espacio muestral. En otras palabras, la función $P(\cdot|B)$ definida para todo evento en Ω, induce un nuevo espacio de probabilidad de (Ω, δ, P) a (B, δ_B, P_B) en el cual, $\delta_B = B \cap \delta$ y

$$P_B(E) = \frac{P(E)}{P(B)}, \quad E \in \delta_B.$$

Teorema 1.3. Si (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad y $P(B) > 0$, entonces la función $P(\cdot|B)$ definida para todo evento en Ω, induce un nuevo espacio de probabilidad (B, δ_B, P_B).

Demostración.

En efecto, (B, δ_B, P_B) será un espacio de probabilidad si δ_B es una σ-álgebra de B y P_B es una función de probabilidad en B. Como $P(B) > 0$, entonces $B \neq \varnothing$ y por la proposición 1.6, δ_B es una σ-álgebra de B inducido por δ. Ahora bien, la demostración de que P_B es una función de probabilidad en B, se hará con base en la definición 1.24.

Como $P(B|B) = 1$, definiendo

$$P_B(B) = P(B|B),$$

resulta que $P_B(B) = 1$, $B \in \delta_B$.

Si $E \in \delta_B$, $E = B \cap A$, con $A, B \in \delta$. Como (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad, resulta que

$$0 \leq P(B \cap A) \leq P(B).$$

Como $P(B) > 0$, se tiene que

$$0 \leq P(A|B) \leq 1.$$

Ahora bien,

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}, \quad A \in \delta;$$

es equivalente a

$$P_B(E) = \frac{P(E)}{P(B)}, \quad E \in \delta_B.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq P_B(E) \leq 1, \quad \forall\, E \in \delta_B.$$

Finalmente, si $\{E_i\}$, es una colección numerable de eventos ajenos en δ_B, entonces existe una colección numerable de eventos ajenos $\{A_i\}$ en δ tal que $E_i = B \cap A_i$. Como (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad, resulta que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)},$$

es equivalente a

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(E_i)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(E_i).$$

Por lo tanto, por la definición 1.20, se deduce que $P(\cdot|B)$ definida para todo evento en Ω, induce un nuevo espacio de probabilidad (B, δ_B, P_B).

◊

Teorema 1.4. Sea $\{A_i\}$, $i = 1, 2,...,n$ una colección de n eventos, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Demostración.

La prueba se realiza por inducción. Observemos que para $n = 1$ es trivial, y que por la definición de probabilidad condicional, para $n = 2$, podemos escribir

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1),$$

ya mencionado previamente.

Ahora supongamos que la relación es válida para n-1:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right).$$

Entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

$$= P(A_1)P(A_2 | A_1)\cdots P\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

◊

Ejemplo 1.16. Supongamos que una caja contiene 5 pelotas verdes y 3 pelotas rojas. Si extraemos tres pelotas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de elegir dos pelotas verdes?

Solución.

Sea V_i el evento de elegir una pelota verde en el i-ésimo ensayo y sea R_i el evento de elegir una pelota roja en el i-ésimo ensayo. Entonces la probabilidad de elegir dos pelotas verdes primero y luego una pelota roja es

$$P\left(V_1 \cap V_2 \cap R_3\right) = P\left(R_3 \middle| V_1 \cap V_2\right) P\left(V_2 \middle| V_1\right) P\left(V_1\right)$$

$$= \frac{3}{6}\frac{4}{7}\frac{5}{8} \quad = \frac{P_{3,1}P_{5,2}}{P_{8,3}} = \frac{5}{28},$$

donde $P_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Esta es sólo una de las posibilidades, ya que se puede elegir la pelota roja en la primera, la segunda, o la tercera extracción. Por lo tanto, existen $\binom{n}{r} = \binom{3}{2} = \dfrac{3!}{1!\,2!}$ posibilidades, y las posibilidades para los tres casos son iguales. Entonces la probabilidad de extraer dos pelotas verdes ($2V$) y una roja ($1R$) es

$$P(2V, 1R) = \binom{3}{2}\frac{P_{3,1}P_{5,2}}{P_{8,3}} \quad = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}}$$

$$= 3\frac{5}{28} = \frac{15}{28}. \qquad \lozenge$$

Ejemplo 1.17. Ahora supongamos que una caja contiene M_V pelotas verdes y $M_R = N - M_V$ pelotas rojas. Si extraemos s pelotas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de extraer *x* pelotas verdes?

Solución.

Primero, consideremos el caso donde se extraen *x* pelotas verdes y luego *s*-*x* pelotas rojas. Así,

$$P\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_x \cap R_{x+1} \cap \cdots \cap R_s\right)$$

$$= \frac{M_V}{N}\frac{M_V - 1}{N-1}\cdots\frac{M_V - x + 1}{N - x + 1}\frac{M_R}{N-x}\cdots\frac{M_R - s + x + 1}{N - s + 1}$$

$$= \frac{\dfrac{M_V!}{(M_V - x)!}\dfrac{M_R!}{(M_R - s + x)!}}{\dfrac{N!}{(N-s)!}} = \frac{(M_V)_x (M_R)_{s-x}}{(N)_s},$$

es una de las $\binom{s}{x}$ posibilidades. Entonces la probabilidad de extraer *x* pelotas verdes y *s*-*x* pelotas rojas es

$$P(x \text{ verdes}) = \binom{s}{x}\frac{(M_V)_x (M_R)_{s-x}}{(N)_s} = \frac{\binom{M_V}{x}\binom{M_R}{s-x}}{\binom{N}{s}}, \quad \text{para } x = 1, 2, \ldots, s.$$

◊

Ejemplo 1.18. Ahora supongamos que tenemos una caja con 3 pelotas verdes, 2 pelotas rojas, y 5 pelotas azules. Si extraemos cuatro pelotas sin reemplazo,

¿cuál es la probabilidad de extraer dos pelotas verdes, 1 pelota roja, y 1 pelota azul?

Solución.

Sean V_i el evento de extraer una pelota verde, R_i el evento de extraer una pelota roja y A_i el evento de extraer una pelota azul en el i-ésimo ensayo. Consideremos primero el evento, $V_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap A_4$. Entonces

$$\begin{aligned} P(V_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap A_4) &= P(A_4 | V_1 \cap V_2 \cap R_3) P(R_3 | V_1 \cap V_2) P(V_2 | V_1) P(V_1) \\ &= \frac{5}{7}\frac{2}{8}\frac{2}{9}\frac{3}{10} = \frac{(5)_1 (2)_1 (3)_2}{(10)_4} \\ &= \frac{1}{7 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{84}. \end{aligned}$$

Pero esta es una de las $\frac{4!}{2!\,1!\,1!}$ maneras de extraer 2 pelotas verdes, 1 pelota roja, y 1 pelota verde. Si (Z_1, Z_2, Z_3) representa el número de pelotas verdes, rojas y azules respectivamente, entonces

$$P(\{2, 1, 1\}) = \frac{4!}{2!\,1!\,1!}\frac{1}{84} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}.$$

En general, si hay M_1 pelotas verdes, M_2 pelotas rojas y M_3 pelotas azules, donde $M_1+M_2+M_3= N$, entonces

$$P(\{Z_1, Z_2, Z_3\}) = \frac{n!}{Z_1!\ Z_2!\ Z_3!}\frac{(M_1)_{Z_1}(M_2)_{Z_2}(M_3)_{Z_3}}{(N)_n} = \frac{\binom{M_1}{Z_1}\binom{M_2}{Z_2}\binom{M_3}{Z_3}}{\binom{N}{n}}.$$

◊

Ejemplo 1.19. Ahora supongamos que hay pelotas de r colores diferentes en la caja. Si hay M_i pelotas de color i, y si extraemos Z_i pelotas de color i donde $M_1 + M_2 +...+ M_r = N$ y $Z_1 + Z_2 +...+ Z_r = n$, entonces

$$P(\{Z_1, Z_2, ..., Z_r\}) = \frac{\binom{M_1}{Z_1}\binom{M_2}{Z_2}\cdots\binom{M_r}{Z_r}}{\binom{N}{n}}.$$

◊

Si el conocimiento de algún evento B no influye en el cálculo de la probabilidad de un evento A, entonces se debe tener que $P(A \mid B) = P(A)$. Esto nos induce la siguiente:

Definición 1.25. Dados dos eventos A y B, se dirá que son eventos independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$$

Ejemplo 1.20. Supongamos que una caja contiene 5 pelotas verdes y 3 pelotas rojas. Si extraemos tres pelotas con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de elegir dos pelotas verdes?

Solución.

La probabilidad de extraer una pelota verde no depende de las otras extracciones. El resultado de la i-ésima extracción es independiente de las otras extracciones. Entonces si extraemos primero las dos pelotas verdes, tenemos

$$P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) = P(V_1)P(V_2)P(R_3) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8},$$

esta es solamente una de las $\binom{3}{2}$ posibilidades. Entonces la probabilidad de extraer dos pelotas verdes (y por consiguiente una roja) es

$$P(2V,1R) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8}.$$

En general, si hay N pelotas en la caja y si M_V son verdes y M_R son rojas, entonces la probabilidad de extraer x pelotas verdes de un total de n pelotas extraídas con reemplazo es

$$P(xV) = \binom{n}{x}\left(\frac{M_V}{N}\right)^x \left(\frac{M_R}{N}\right)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\frac{M_V}{N}\right)^x \left(1-\frac{M_V}{N}\right)^{n-x}, \quad x = 0,\ 1,\ldots,n.$$

Este resultado se llama la ley del binomio.

◊

Ejemplo 1.21. Ahora supongamos que tenemos una caja que contiene M pelotas de r colores diferentes, con M_i pelotas del color i. Si extraemos con reemplazo una muestra de tamaño n, ¿cuál es la probabilidad de extraer k_1 pelotas de color 1, k_2 pelotas de color 2, etc.?

Solución.

Por la independencia en cada extracción, la probabilidad de extraer una pelota de color i es, $\frac{M_i}{M}$. Sea Z_i el número de pelotas observadas de color i. Supongamos que por casualidad se extraen primero k_1 pelotas de color 1, luego k_2 pelotas de color 2, así sucesivamente hasta k_r pelotas de color r. Entonces la probabilidad de observar las pelotas en este orden es

$$P(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \cdots, Z_r = k_r) = \left(\frac{M_1}{M}\right)^{k_1} \left(\frac{M_2}{M}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{M_r}{M}\right)^{k_r},$$

donde $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$.

El número de maneras de extraer k_1 pelotas de color 1, k_2 pelotas de color 2, etc., es

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}.$$

Entonces la probabilidad de extraer cualquier colección de n pelotas de r colores está dada por

$$P(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \cdots, Z_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{k_1} \left(\frac{M_2}{M}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{M_R}{M}\right)^{k_r}.$$

◊

Teorema 1.5. Si A y B son dos eventos independientes, entonces

a) A^c y B son independientes.
b) A y B^c son independientes.
c) A^c y B^c son independientes.

Demostración.

a) Por demostrar que $P(A^c \cap B) = P(A^c)\, P(B)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B\text{-}A) = P(B)\text{-}P(A \cap B) = P(B)\text{-}P(A)P(B) \\ &= P(B)(1\text{-}P(A)) = P(A^c)P(B). \end{aligned}$$

b) Para este caso observemos que por a), intercambiando A y B, se sigue inmediatamente.

c) Aplicando los resultados anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c - B) = P(A^c) - P(A^c \cap B) \\ &= P(A^c) - P(A^c)P(B) = P(A^c)\{1 - P(B)\} \\ &= P(A^c)\, P(B^c). \end{aligned}$$

◊

Definición 1.26. Dados tres eventos A, B, C se dice que son independientes si

a) $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
b) $P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$.
c) $P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$.
d) $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$.

En algunas situaciones se pueden tener las primeras tres relaciones de la definición anterior pero la cuarta no, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.22. Supongamos que una caja contiene cuatro pelotas numeradas del 1 al 4. Si se extrae de la caja una pelota al azar, el espacio muestral estará dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.
Definimos tres eventos

$$A, B, C\text{:}\ \ A = \{1, 2\},\ \ B = \{1, 3\},\ \ C = \{1, 4\}.$$

De esta manera se tiene que

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2, \quad P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4,$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B),$$

$$P(A\cap C) = P(A)\ P(C),$$

$$P(B\cap C) = P(B)\ P(C).$$

Pero,

$$P(A\cap B\cap C) = 1/4 \neq P(A)\ P(B)\ P(C) = 1/8.$$

Por consiguiente, cualquier par de eventos son independientes, pero los tres eventos en grupo no son independientes.

Este concepto de independencia se puede generalizar para n eventos.

Definición 1.27. Una partición de un conjunto Ω es una colección de conjuntos ajenos y diferentes del vacío $\{B_i\}$, tal que $\Omega = \cup B_i$.

Teorema 1.6. (Teorema de probabilidad total). Sean (Ω, δ, P) un espacio de probabilidad, A un evento y $\{B_i\}$ una partición de Ω, entonces

$$P(A) = \sum P(B_i)\ P(A \mid B_i).$$

Demostración.

$$P(A) = P(A\cap\Omega) = P(A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)\ .$$

◊

Ejemplo 1.23. Supongamos que una fábrica tiene tres máquinas para producir un cierto producto. Llamamos a estas máquinas m_1, m_2, y m_3 respectivamente. Supongamos que las probabilidades de producir un producto defectuoso por estas tres máquinas son

$$P(D|M_1) = 0.1, \quad P(D|M_2) = 0.16, \quad P(D|M_3) = 0.05,$$

donde D es el evento de obtener un defectuoso y M_i es el evento de usar la máquina m_i para producir el producto. Si las máquinas m_1, m_2, m_3 producen 25%, 50% y 25% de los productos respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que un producto elegido al azar sea defectuoso?

Solución.

Las probabilidades de que un producto elegido al azar es de las máquinas m_1, m_2, m_3 son

$$P(M_1) = 0.25, \; P(M_2) = 0.5, \; P(M_3) = 0.25,$$

respectivamente, entonces

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|M_i)P(M_i) = 0.1175.$$

◊

Teorema 1.7. (Teorema de Bayes). Sean (Ω, δ, P) un espacio de probabilidad, A un evento y $\{Bi\}$ una partición de n elementos de Ω, entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

Demostración.

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 1.24. En el ejemplo anterior, consideramos una fábrica con tres máquinas m_1, m_2, m_3. En el cual se definieron las probabilidades:

$$P(D|M_1) = 0.1, \quad P(D|M_2) = 0.16, \quad P(D|M_3) = 0.05,$$
$$P(M_1) = 0.25, \quad P(M_2) = 0.5, \quad P(M_3) = 0.25.$$

Si un cliente compra uno de los productos y encuentra que el producto es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea de la máquina m_2?

Solución.

Por el teorema de Bayes,

$$P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2)P(M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(D|M_i)P(M_i)}$$

$$= \frac{0.16(0.5)}{0.1(0.25) + 0.16(0.5) + 0.05(0.25)}$$

$$= \frac{32}{47} \cong 0.68.$$

Esto es, si un cliente compra un producto y se encuentra que el producto es defectuoso, entonces la probabilidad es 68% de que el producto sea de la segunda máquina.

◊

Capítulo 2
Variables aleatorias

En este capítulo se definirán funciones reales en el espacio muestral, conocidas con el nombre de variables aleatorias. Se estudiaran sus propiedades y se apreciará su utilidad en el cálculo de probabilidades, además de clasificarlas en variables aleatorias discretas y continuas.

2.1. Variables aleatorias

Definición 2.1. Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P), es una función X definida de Ω en $\boldsymbol{R}$, tal que

$$(X \leq a) = \{w \in \Omega \colon X(w) \leq a\} \in \delta, \ \forall \ a \in \boldsymbol{R} \ .$$

Uno de los ejemplos más simples de variables aleatorias, surge de la asignación de un valor a cada resultado del lanzamiento de una moneda, interpretándose como una apuesta. En realidad, una variable aleatoria es, intuitivamente, un método de asignar números (o vectores de números) a los resultados de un experimento.

Ejemplo 2.1. Supongamos que se lanza una moneda y que se apuesta un peso a la cara de águila, por supuesto, se supone que si el resultado es sol se pierde un peso. Defina una variable aleatoria que represente la apuesta.

Solución.

El espacio muestral está dado por $\Omega = \{w_1, w_2\}$, donde w_1 representa sol y w_2 representa águila. Además, la σ-álgebra correspondiente es el conjunto de eventos

$$\delta = \{\emptyset, \Omega, \{w_1\}, \{w_2\}\}.$$

Entonces podemos interpretar la apuesta como una asignación numérica de cada uno de los puntos del espacio muestral, es decir, de las caras de la moneda:

$$X : \Omega \to \boldsymbol{R}$$

tal que

$$X(w_1) = -1 \quad y \quad X(w_2) = 1 .$$

Esta función X, así definida, es una variable aleatoria, en efecto, observemos que

$$(X \leq x) = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < -1 \\ \{w_1\}, & -1 \leq x < 1 \\ \Omega, & x \geq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, cada conjunto $(X \leq x)$ es un evento en δ, es decir, $(X \leq x) \in \delta$, $\forall\ x \in \boldsymbol{R}$. De la definición 2.1, X es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, δ, P).

◊

Observación. Por la proposición 1.6 y la definición 2.1, si δ=Pot(Ω), entonces toda función $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, δ, P). Nótese que este hecho se muestra en el ejemplo anterior.

En los ejemplos, la σ- álgebra a la que se hará referencia de ahora en adelante será δ=Pot(Ω).

Definición 2.2. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P), entonces la función de distribución de X, denotada por $F(x)$, se define por

$$F(x) = P(X \leq x), \forall\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Nótese que,

$$F(x)=P(X \leq x) = P\{w \in \Omega \colon X(w) \leq x\}.$$

Por otro lado,

$$P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]).$$

Si denotamos por $P_X((-\infty, x])$ a la $P(X \in (-\infty, x])$, entonces de la definición anterior se tiene

$$F(x) = P_X((-\infty, x]), \forall\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Ejemplo 2.2. Encuentre la función de distribución para la v. a. X, definida en el ejemplo 2.1.

Solución.

Por la definición de función de distribución y del ejemplo 2.1 se tiene que

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ p, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

donde p es la probabilidad de que caiga sol.

◊

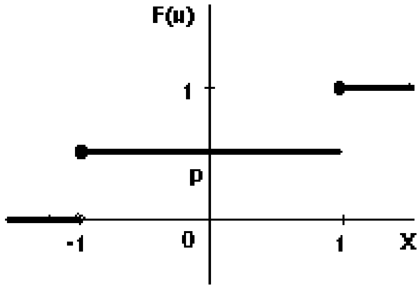

Figura 2.1

La función de distribución tiene varias propiedades las cuales están dadas en el siguiente teorema, y se pueden observar en la figura 2.1.

Teorema 2.1. Sea X una variable aleatoria definida en (Ω, δ, P), con función de distribución F. Entonces la distribución F, satisface las siguientes propiedades:

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo real x.
b) Si a y b son números reales tales que $a \leq b$, entonces $F(a) \leq F(b)$.
c) $F(x) \to 1$ cuando $x \to +\infty$.
d) $F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.
e) F es continua por la derecha.
f) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Demostración.

a) Por definición, $F(x)$ es una probabilidad, entonces $F(x)$ se encuentra entre 0 y 1.

b) Observemos que si $a \leq b$, entonces $(-\infty, a] \subset (-\infty, b]$ y por la de monotonía de la función de probabilidad P_X,

$$P_X\{(-\infty, a]\} \leq P_X\{(-\infty, b]\}.$$

Entonces de la definición de *F(x)* se tiene que $F(a) \leq F(b)$.

c) Para la prueba de esta propiedad consideremos una sucesión de números reales $\{x_n\}$, tal que, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Entonces la sucesión de intervalos correspondientes $\{(-\infty, x_n]\}_{n\in N}$, converge a $\boldsymbol{R}$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X\{(-\infty, x_n]\}.$$

Finalmente, por el teorema 1.2, inciso i), se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} P_X\{(-\infty, x_n]\} = P_X\{\lim_{n\to\infty}(-\infty, x_n]\} = P_X(\boldsymbol{R}) = 1.$$

d) En este caso consideremos una sucesión de números reales $\{x_n\}$, tal que, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$. Entonces la sucesión de intervalos correspondientes $\{(-\infty, x_n]\}_{n\in N}$, converge a Ø.

Así, resulta que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X\{(-\infty, x_n]\}.$$

Por lo tanto, del teorema 1.2, inciso i), se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{n\to\infty} P_X\{(-\infty, x_n]\} = P_X\{\lim_{n\to\infty}(-\infty, x_n]\} \\ &= P_X(\varnothing) = 0.\end{aligned}$$

e) Sea $\{x_n\}$ una sucesión decreciente de números reales que converge a un número real x, es decir, una sucesión de números reales que converge por la derecha a x, lo denotamos por la simbología usual del cálculo:

$$x_n \to x^+ .$$

Consideremos la sucesión correspondiente de intervalos $\{(-\infty, x_n]\}_{n\in N}$, esta resulta una sucesión decreciente de conjuntos, es inmediato que

$$\lim_{n\to\infty}(-\infty, x_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n] = (-\infty, x].$$

Entonces,

$$\lim_{x\to x^+} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X\left((-\infty, x_n]\right) .$$

Aplicando el teorema 1.2, inciso i), resulta

$$\lim_{x\to x^+} F(x) = \lim_{n\to\infty} P_X\left((-\infty, x_n]\right) = P_X\left(\lim_{n\to\infty}(-\infty, x_n]\right)$$

$$= P_X\left((-\infty, x]\right) = P(X \le x) = F(x).$$

f) Para el intervalo $(a,b]$, observemos que

$$(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b],$$

como la unión de los dos intervalos anteriores es una unión de conjuntos ajenos, se tiene que

$$P_X\left((-\infty, b]\right) = P_X\{(-\infty, a] \cup (a,b]\} = P_X\left((-\infty, a]\right) + P_X\left((a,b]\right),$$

pero, la relación anterior se puede escribir como

$$F(b) = F(a) + P(a < X \le b),$$

de donde

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a).$$

◊

El teorema anterior es de utilidad para representar las funciones de distribución, para ver tal utilidad, considere la distribución del ejemplo 2.2. Los intervalos de definición se escribieron cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, esto se debe a la continuidad por la derecha de *F*, ver figura 2.1.

Observación. De la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = P_X(\lim_{n\to\infty}(-\infty,\ x_n]).$$

Se sigue del teorema 1.2, inciso i) que si $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales tal que $x_n \to b,$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(b).$$

Definición 2.3. Si $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales tal que $x_n \to b$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(b),$$

es decir, *F* es continua por la derecha en *b*.

Por otro lado, si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente de números reales tal que $x_n \to b$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(b^-).$$

En general, a una función $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ que cumple las condiciones a)-e) del teorema 2.1 se le conoce como una función de distribución, y si para una variable aleatoria *X* dada, se cumple f), se dice que *X* tiene distribución *F*.

Hasta ahora se ha definido un espacio de probabilidad (Ω, δ, *P*) y una función *X* llamada variable aleatoria, $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$. Este último elemento llamado variable aleatoria, tiene propiedades de interés para un estudio más profundo de la teoría de la probabilidad. En efecto, por el teorema 2.1, inciso c) se tiene que si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente de números reales tal que $x_n \to \infty$,

$$P(\Omega) = P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]) = P_X(\boldsymbol{R}) = 1,$$

por lo tanto, *X* transforma Ω en $\boldsymbol{R}$.

Por otro lado, si ξ es la familia de todos los intervalos de la forma (-∞, *x*], $x\in\boldsymbol{R}$, entonces toda σ-álgebra δ que contiene a ξ contiene también a

1) $(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x - 1/n\right]$,
2) $[x, \infty) = (-\infty, x)^c$,
3) $(x, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[x + 1/n, \infty\right)$,
4) $(x, y) = (x, \infty)\cap(-\infty, y)$,
5) $[x, y) = [x, \infty)\cap(-\infty, y)$,
6) $(x, y] = (x, \infty)\cap(-\infty, y]$,
7) $[x, y] = [x, \infty)\cap(-\infty, y]$,
8) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x - 1/n, x + 1/n\right)$,

para todo $x, y \in \boldsymbol{R}$. De 8) se sigue que contiene también a todo conjunto finito o numerable

$$N = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

debido a que $N = \bigcup_i \{x_i\}$.

A la σ- álgebra más pequeña que contiene a ξ se le llama la σ- álgebra de Borel en $\boldsymbol{R}$ y la denotaremos por $\sigma(\boldsymbol{R})$, esto es, $\sigma(\boldsymbol{R})$ está contenida en cualquier otra σ- álgebra que contenga a ξ. Aunque es imposible dar una lista exhaustiva de los miembros de $\sigma(\boldsymbol{R})$, los incisos anteriores muestran que todo intervalo o conjunto numerable es un conjunto de Borel, así como cualquier otro conjunto que se obtenga a partir de éstos mediante operaciones finitas o numerables de conjuntos. Cabe destacar que existen subconjuntos de $\boldsymbol{R}$ que no son de Borel, sin embargo es un hecho que todo subconjunto de $\boldsymbol{R}$ que surja en la práctica será de Borel.

Lo anterior implica el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Si (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ es una variable aleatoria, entonces $(X \in I) \in \delta$ para todo intervalo I. En particular, $(X = x) \in \delta$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$.

Demostración.

Usando que para todo $x \in \boldsymbol{R}$, $(X \in (-\infty, x]) \in \delta$ se obtiene

1) $(X \in (x, \infty)) = (X \in (-\infty, x])^c \in \delta$.

2) $(X \in (-\infty, x)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \in (-\infty, x - 1/n]) \in \delta$.

3) $(X \in [x, \infty)) = (X \in (-\infty, x))^c \in \delta$.

Esto demuestra el resultado para todo intervalo no acotado. Cuando I es un intervalo acotado, se tiene que $I = I_1 \cap I_2$ donde I_1 e I_2 son intervalos no acotados, y así

$$(X \in I) = (X \in I_1 \cap I_2) = (X \in I_1) \cap (X \in I_2) \in \delta,$$

por lo que el teorema es válido. Para concluir, notemos que

$$(X = x) = (X \in (-\infty, x]) \cap (X \in [x, \infty)) \in \delta, \ \forall\, x \in \boldsymbol{R}.$$

◊

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se dejará como ejercicio al lector.

Proposición 2.1. Sean δ una σ- álgebra en Ω y $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ una variable aleatoria. Sea $\Im$ la familia de subconjuntos $A \subset \boldsymbol{R}$ tales que $(X \in A) \in \delta$. Entonces $\Im$ es una σ- álgebra en $\boldsymbol{R}$.

Observación. De la proposición anterior y el hecho de que $(-\infty, x] \in \Im$, $\forall$ $x \in \boldsymbol{R}$, se sigue que $\sigma(\boldsymbol{R}) \subset \Im$. Esto muestra que una función $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ es una variable aleatoria si, y sólo si $(X \in B) \in \delta$ para todo $B \in \sigma(\boldsymbol{R})$.

Por lo tanto, podemos resumir diciendo, que la definición de una v. a. X en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P) induce o define un nuevo espacio de probabilidad $(\boldsymbol{R}, \sigma(\boldsymbol{R}), P_X)$; donde R representa el conjunto de números reales, $\sigma(\boldsymbol{R})$ la σ- álgebra de Borel y P_X la medida de probabilidad definida como

$$P_X(B) = P\{w \in \Omega : X(w) \in B\}, \quad \forall\ B \in \sigma(\boldsymbol{R}).$$

Para el presente desarrollo, si en (Ω, δ, P) se ha definido una variable aleatoria X, entonces se usará $(\boldsymbol{R}, \sigma(\boldsymbol{R}), P_X)$ indistintamente de (Ω, δ, P). Además, puesto que en todos nuestros ejemplos, δ=Pot(Ω), todas las funciones que se definan serán variables aleatorias.

Así, resulta que

$$F(u)=P_X((-\infty,u]),\ \forall\, u \in \boldsymbol{R},$$

es la distribución de X.

2.1.1. Variable aleatoria discreta

Definición 2.4. Sea X una variable aleatoria en (Ω, δ, P), con distribución F. Se dice que X es una v. a. discreta (v.a.d.), si existe una función no negativa p que es cero casi en todas partes excepto en un número finito o infinito numerable de puntos, tal que

$$F(u)=\sum_{x \le u} p(x)$$

donde la suma se toma sobre todos los valores posibles de X que son menores o iguales que u. La función p, si existe, se llama la función de probabilidad de X.

Ejemplo 2.3. La variable aleatoria X definida en el Ejemplo 2.1, es una v. a. discreta con función de probabilidad

$$p(x)=\begin{cases} p, & x=-1 \\ 1-p, & x=1, \end{cases} \quad p \in (0,1).$$

Así,

$$F(u)=\sum_{x \le u} p(x),\ u \in \boldsymbol{R}.$$

◊

2.1.2. Variable aleatoria absolutamente continua

Definición 2.5. Sea X una variable aleatoria definida en (Ω, δ, P), con distribución F. Se dice que X es una v. a. absolutamente continua, si existe una función no negativa f, tal que

$$F(u) = P(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx\,.$$

Notemos que la f anterior no es única, ya que, si la modificamos en un número finito o infinito numerable de puntos, las integrales anteriores no se alteran. Sin embargo, en la práctica, la elección de f está determinada por condiciones de continuidad, así que, en adelante, nos referiremos a f como la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de X.

2.2. Distribuciones conjuntas

Definición 2.6. Un vector aleatorio $\underline{X} = (X, Y)$ definido en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P), es una función $\underline{X} : \Omega \to \boldsymbol{R}^2$ tal que,

$$(X \leq a, Y \leq b) = \{w : X(w) \leq a, Y(w) \leq b\} \in \delta \;\; \forall\, (a,b) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Donde X y Y se llaman variables componentes del vector aleatorio $\underline{X}$.

Definición 2.7. Sea $\underline{X} = (X, Y)$ un vector aleatorio definido en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P). La función de distribución de $\underline{X}$ o bien la función de distribución conjunta de (X, Y), denotada por $F(x, y)$, se define como

$$F(x, y) = P(\, X \leq x, Y \leq y), \;\; \forall x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Denotando por $P_{X,Y}((-\infty, x]\times(-\infty, y])$ a $P((X,Y)\in(-\infty, x]\times(-\infty, y])$, se tiene que

$$F(x, y) = P_{X,Y}((-\infty, x]\times(-\infty, y]), \ \ \forall x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Por lo tanto, el concepto de una función de distribución conjunta es simplemente una extensión de la noción de una función de distribución en el caso univariado. Mientras que en el caso univariado usamos el intervalo infinito $\left(-\infty,\ u\right]$, aquí usamos el rectángulo infinito $(-\infty, u]\times(-\infty, v]$, ver figura 2.2.

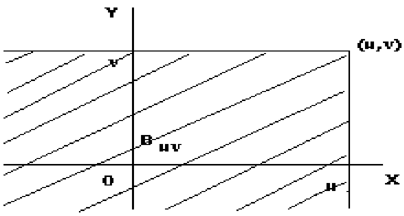

Figura 2.2

Ejemplo 2.4. Una moneda legal se lanza dos veces. Definimos X y Y como sigue:

X = El número de soles en el primer lanzamiento,
Y = El número de soles en el segundo lanzamiento.

Encuentre la función de distribución conjunta de X y Y.

Solución.

El espacio muestral tiene 4 resultados posibles: $\Omega = \{SS, SA, AS, AA\}$.

Por lo tanto, resulta que

$$(X,Y)(w)=(X(w),Y(w))=\begin{cases}(1,1), & w=SS\\ (1,0), & w=SA\\ (0,1), & w=AS\\ (0,0), & w=AA.\end{cases}$$

Entonces (X , Y) toma los valores (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) cada uno con probabilidad de 1/4.

Observemos

$$\{w : X(w)\le u,\ Y(w)\le v\}=\begin{cases}\varnothing, & u<0 \ \text{ o } \ v<0\\ \{AA\}, & 0\le u<1 \ \text{ y } \ 0\le v<1\\ \{AA, AS\}, & 0\le u<1 \ \text{ y } \ v\ge 1\\ \{AA, SA\}, & u\ge 1 \ \text{ y } \ 0\le v<1\\ \Omega, & u\ge 1 \ \text{ y } \ v\ge 1.\end{cases}$$

Por lo tanto, la función de distribución conjunta de X y Y está dada por

$$F(u,v)=\begin{cases}0, & u<0 \text{ o } v<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le u<1 \text{ y } 0\le v<1\\ \frac{1}{2}, & 0\le u<1 \text{ y } v\ge 1\\ \frac{1}{2}, & u\ge 1 \text{ y } 0\le v<1\\ 1, & u\ge 1 \text{ y } v\ge 1.\end{cases}$$

◊

Teorema 2.3. Sean X y Y dos variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P), y función de distribución conjunta F. Entonces la distribución F satisface las siguientes propiedades:

a) $0\le F(u,v)\le 1$, para cualquier par de números reales u y v.

b) (Monotonía) F es una función monótona no decreciente en cada variable separadamente. Esto es, para cualquier u fijo, $F(u,v)$ es monótona no decreciente en v y para cualquier v fijo, $F(u,v)$ es monótona no decreciente en u.

c) Si a, b, c, d son números reales cualesquiera con $a < b$ y $c < d$, entonces

$$P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

d) $\lim\limits_{u \to -\infty} F(u,v) = 0 = \lim\limits_{v \to -\infty} F(u,v)$.

e) $\lim\limits_{\substack{u \to \infty \\ v \to \infty}} F(u,v) = 1$.

f) F es continua por la derecha en cada una de las variables. Es decir, para cualquier u fijo, $F(u, v)$ es continua por la derecha en v, y para cualquier v fijo, $F(u, v)$ es continua por la derecha en u.

g) Si $F(a,\ b^-)$, $F(a^-,b)$ y $F(a^-,b^-)$ tienen el mismo significado que en la definición 2.3, entonces

$$P(X = a,\ Y = b) = F(a,b) - F(a,b^-) - F(a^-,b) + F(a^-,b^-).$$

Demostración.

a) Obvia ya que $F(u, v)$ representa una probabilidad.

b) Nótese que para $u= b$ fija y $c<d$, en la figura 2.3, se tiene que

$$\{w:\ \ X(w) \leq b,\ \ Y(w) \leq d\}$$

$$= \{w: X(w) \leq bY(w) \leq c\} \cup \{w: X(w) \leq b,\ c < Y(w) \leq d\}.$$

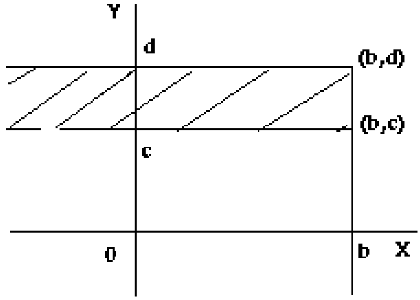

Figura 2.3

Como los eventos de la derecha son mutuamente excluyentes se deduce

$$P(X \leq b,\ Y \leq d) = P(X \leq b,\ Y \leq c) + P(X \leq b,\ c < Y \leq d).$$

Por lo tanto,

$$F(b,\ d) = F(b,\ c) + P(X \leq b,\ \ c < Y \leq d),$$

de donde

$$P(X \leq b,\ c < Y \leq d) = F(b,\ d) - F(b,\ c).$$

Como

$$P(X \leq b,\ c < Y \leq d) \geq 0,$$

se tiene

$$F(b,\ d) - F(b,\ c) \geq 0,$$

de donde

$$F(b,d) \geq F(b,c).$$

Así hemos probado que para un valor fijo de *u*, digamos *b*, $F(b,d) \geq F(b,c)$ siempre que *d*> *c*.

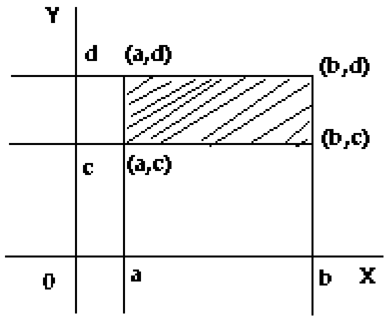

Figura 2.4

c) Considere la figura 2.4, nótese que

$$P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) = P(X \leq b, c < Y \leq d) - P(X \leq a, c < Y \leq d),$$

por otra parte

$$P(X \leq b,\ \ c < Y \leq d) = F(b,\ d) - F(b,\ c)$$

y

$$P(X \leq a,\ c < Y \leq d) = F(a,\ d) - F(a,\ c).$$

Así

$$P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

d) Supongamos que $\{u_n\}$ es una sucesión monótona decreciente de números reales para la cual $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, y sea $A_n = \{w:\ X(w) \le u_n,\ Y(w) \le v\}$.

Entonces $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos que se contrae en

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing .$$

Ahora

$$\lim_{u_n\to-\infty} F(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} F(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) .$$

Por el teorema 2.1, inciso i),

$$\lim_{u_n\to-\infty} F(u_n, v) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\varnothing) = 0.$$

De la misma forma se demuestra que $\lim_{v\to-\infty} F(u, v) = 0$.

e) Supongamos que $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son sucesiones crecientes de números reales para los cuales

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \ \text{ y } \lim_{n\to\infty} v_n = \infty ;$$

sea

$$B_n = \{w:\ X(w) \le u_n,\ Y(w) \le v_n\} .$$

Entonces B_n es una sucesión de subconjuntos de Ω que se expande a Ω, con

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{u_n\to\infty\\ v_n\to\infty}} F(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} F(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

Por el teorema 1.2, inciso i), se tiene que

$$\lim_{\substack{u_n\to\infty\\ v_n\to\infty}} F(u_n, v_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(\Omega) = 1\,.$$

f) Supongamos que *v* esta fijo, por demostrar que

$$\lim_{u\to a^+} F(u, v) = F(a, v) \quad \forall\ a \in \boldsymbol{R}\,.$$

Observe que $\lim_{u\to a^+} F(u, v)$ está definido como el límite de $F(u, v)$ cuando u tiende a a por medio de valores mayores que a. Como F es monótona y acotada este límite siempre existe.

Ahora bien, sea $\{u_n\}$ una sucesión decreciente de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, y definamos $B_n = \{w:\ X(w) \le u_n,\ Y(w) \le v\}$. Entonces $\{B_n\}$ es una sucesión de conjuntos decrecientes con

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{w: X(w) \le a,\ Y(w) \le v\}\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to a^+} F(u, v) = \lim_{n\to\infty} F(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)\,.$$

Por el teorema 1.2, inciso i), resulta que

$$\lim_{n\to a^+} F(u, v) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(\{w: X(w) \le a, Y(w) \le v\}) = F(a, v).$$

Como se puede ver, el otro caso es análogo.

g) Sea $C_n = \{w:\ a - \frac{1}{n} < X(w) \le a,\ b- \frac{1}{n} < Y(w) \le b\}$, entonces $\{C_n\}$ es una sucesión de conjuntos que se contrae y

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{w : X(w) = a, Y(w) = b\}\ .$$

Por el teorema 1.2, inciso i), resulta

$$P(X = a,\ Y = b) = P(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P[\{w : a - \tfrac{1}{n} < X(w) \le a,\ \ b - \tfrac{1}{n} < Y(w) \le b\}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [F(a,\ b) - F(a,\ b - \frac{1}{n}) - F(a - \frac{1}{n},\ b) + F(a - \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n})]$$

$$= F(a,\ b) - F(a,\ b^{-}) - F(a^{-},\ b) + F(a^{-},\ b^{-}).$$

◊

Nótese que por el inciso e), se puede demostrar que

$$P(\Omega) = P_{X,Y}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, u_n] \times (-\infty, v_n]) = P_{X,Y}(\boldsymbol{R}^2) = 1,$$

por lo tanto, $\underline{X} = (X, Y)$ transforma Ω en $\boldsymbol{R}^2$.

Si ahora, ξ es la familia de subconjuntos de $\boldsymbol{R}^2$ de la forma $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, entonces a la σ- álgebra generada por ξ, se le llama la σ- álgebra de Borel en $\boldsymbol{R}^2$, y se le denota por $\sigma(\boldsymbol{R}^2)$.

De manera similar al caso unidimensional, puede verse que un vector aleatorio $\underline{X} = (X, Y)$, definido en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P) induce o define un nuevo espacio de probabilidad ($\boldsymbol{R}^2$, $\sigma(\boldsymbol{R}^2)$, $P_{X,Y}$), donde $\boldsymbol{R}^2$ representa el plano cartesiano, $\sigma(\boldsymbol{R}^2)$ la σ- álgebra de Borel en el plano y $P_{X,Y}$ la medida de probabilidad definida como

$$P_{X,Y}(B) = P\{w \in \Omega : (X(w), Y(w)) \in B\}, \ \forall \ B \in \sigma(\boldsymbol{R}^2).$$

Así, resulta que

$$F_{X,Y}(u, v) = P_{X,Y}((-\infty, u] \times (-\infty, v]), \ \forall \ u, v \in \boldsymbol{R},$$

es la distribución conjunta de (X, Y).

Definición 2.8. Una variable aleatoria (o vector aleatorio) $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de dimensión n definido en un espacio de probabilidad (Ω, δ, P), es una función de Ω en $\boldsymbol{R}^n$ tal que

$$\left(X_1 \le x_1,\ X_2 \le x_2 \ldots, X_n \le x_n\right)$$

$$= \left\{w : X_1(w) \le x_1,\ X_2(w) \le x_2, \ldots, X_n(w) \le x_n\right\} \in \delta,$$

$\forall \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \boldsymbol{R}^n$.

A las funciones $X_i : \Omega \to \boldsymbol{R}$, se les llama funciones coordenadas de $\underline{X}$.

Ejemplo 2.5. Supongamos que se lanzan dos dados, el espacio muestral que resulta de este experimento esta dado por

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

con 36 resultados posibles. Consideremos dos variables aleatorias X y Y definidas en Ω de la siguiente manera

X= La suma de los números de los dados.
Y = El valor absoluto de la diferencia de los números de los dados.

Entonces para cualquier punto muestral $w=(i, j)$,

$$X(w) = i + j \qquad \text{y} \qquad Y(w) = |i - j| .$$

El rango de X consiste del conjunto de enteros $\{2, 3, 4,\ldots,12\}$ y el rango de Y el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Los valores de las variables aleatorias X y Y representados como pares ordenados $(X(w), Y(w))$, representan los valores de un vector aleatorio $\underline{X}(w) = (X(w), Y(w))$. De esta manera, el rango de $\underline{X}$, estará dado por

$$\{(x, y) : x = 2,\ldots,12; \quad y = 0,1,2,\ldots,5\} \subset \boldsymbol{R}^2.$$

◊

Definición 2.9. Sean $\underline{X}$ un vector aleatorio n dimensional, y $X_1, X_2,\ldots,X_n$ sus variables coordenadas. La función de distribución de $\underline{X}$, también llamada la distribución conjunta de $X_1, X_2,\ldots,X_n$, se define por

$$F(\underline{u}) = P(X_1 \leq u_1,\ldots,X_n \leq u_n) \qquad \forall\, \underline{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \boldsymbol{R}^n .$$

Nótese que

$$F(\underline{u}) = P(\{w \in \Omega : X_1(w) \leq u_1,\ X_2(w) \leq u_2,\ldots, X_n(w) \leq u_n\})$$

$$= P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(X_1 \leq u_1,\ X_2 \leq u_2,\ldots, X_n \leq u_n).$$

2.2.1. Distribuciones conjuntas discretas

Definición 2.10. La distribución conjunta de X y Y se dice que es una distribución discreta si existe una función no negativa $p : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, tal que es cero casi dondequiera excepto en un número finito o infinito numerable de puntos del plano y

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y), \quad \forall\, (x, y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Si el conjunto de puntos donde p puede ser positiva se denota por $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \ldots\}$ entonces p tiene las siguientes propiedades:

i) $p(x_i, y_j) \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots.$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1.$

Una función p con las propiedades anteriores se llama la función masa de probabilidad conjunta o la función de probabilidad conjunta de X y Y.

Conviene escribir la función de probabilidad conjunta en un arreglo rectangular

$X \setminus Y$	y_1	y_2	. . .	y_j	. . .
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	. . .	$P(x_1, y_j)$	. . .
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	. . .	$P(x_2, y_j)$	. . .
.	.	.		.	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
x_i	$P(x_i, y_1)$	$P(x_i, y_2)$	. . .	$P(x_i, y_j)$	. . .
.	.	.		.	
.	.	.		.	
.	.	.		.	

Para cualquier subconjunto B del plano (B un evento), la probabilidad de que (X, Y) tome algún valor en B, se encuentra sumando $p(x, y)$ para todos los puntos (x, y) que estén situados en B, esto es

$$P\big((X,Y)\in B\big)=\sum_{(x_i,\,y_j)\in B} p(x_i,\,y_j)\,.$$

La función de distribución conjunta se obtiene de la función de probabilidad conjunta por la relación

$$F(u,v)=P\big(X\le u,\ Y\le v\big)=\sum_{x_i\le u}\ \sum_{y_j\le v} p(x_i,\,y_j)\,.$$

Donde la suma se toma sobre todos los pares (x_i, y_j) para los cuales

$$x_i\le u,\quad y_j\le v \quad \text{ y } \quad p(x_i,\,y_j)>0\,.$$

En resumen, la función de probabilidad conjunta y la función de distribución conjunta de X y Y se relacionan de la siguiente manera

$$F(u,v)=\sum_{x_i\le u}\ \sum_{y_j\le v} p(x_i,\,y_j)\,,$$

$$p(x,y)=P\big(X=x,Y=y\big)=F(x,y)-F(x,y^-)-F(x^-,y)+F(x^-,y^-)\,.$$

Definición 2.11. Sea $\underline{X}=(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ una variable aleatoria n dimensional con distribución F. Se dice que $\underline{X}$ es una v. a. discreta (v. a. d.) n dimensional, si existe una función no negativa $p:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$, que es cero casi en todas partes excepto en un número finito o infinito numerable de puntos y

$$F(\underline{u})=\sum_{x_1\le u_1}\sum_{x_2\le u_2}\cdots\sum_{x_n\le u_n} p(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad \underline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n).$$

A las funciones p y F se les llama función de densidad de probabilidad y función de distribución conjunta discreta de $X_1, X_2,\ldots,X_n$, respectivamente. Aquí se asume, que la función p satisface las propiedades i) y ii) de la definición anterior.

Para cualquier subconjunto B de $\boldsymbol{R}^n$ (B un evento), la probabilidad de que $\underline{X}$ tome algún valor en B, se encuentra sumando $p(\underline{x})$ para todos los puntos $\underline{x}$ que estén situados en B, esto es

$$P(\underline{X} \in B) = \sum_{\underline{x} \in B} p(\underline{x}), \qquad \forall\, B \in \sigma(\boldsymbol{R}^n).$$

2.2.2. Distribuciones conjuntas absolutamente continuas

Definición 2.12. La distribución conjunta de X y Y se dice que es absolutamente continua si existe una función no negativa f tal que, para cualesquiera números reales u, v,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} f(x, y)\, dy dx.$$

Aunque, como en el caso unidimensional, la f anterior no es única, en la práctica, su elección está determinada por condiciones de continuidad, así que nos podemos referir a ella como la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y.

Teorema 2.4. La función de densidad de probabilidad conjunta f, de X y Y, satisface las siguientes propiedades:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy dx = 1$.

b) $\displaystyle P(a < X \le b,\ c < Y \le d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y)\, dy dx$.

c) $\displaystyle f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en los cuales la derivada existe.

Demostración.

a) De la definición de la distribución conjunta de X y Y,

$$1 = P(-\infty < X < \infty,\ -\infty < Y < \infty) = \lim_{n\to\infty} F(n, n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx.$$

b)

$$P(a < X \le b,\ \ c < Y \le d) = F(b,\ d) - F(b,\ c) - F(a,\ d) + F(a,\ c)$$

$$= \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f(x,\ y)dydx - \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{c} f(x,\ y)dydx - \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{d} f(x,\ y)dydx$$

$$+\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{c} f(x,\ y)dydx = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)dydx.$$

c) Es obvia, de la definición de la distribución conjunta de X y Y.

◊

Observación. La función de distribución conjunta y la función de densidad conjunta correspondientes están relacionadas por

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} f(x, y)dydx\,,$$

y

$$f(x,\ y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,\ y)$$

para los puntos $(x,\ y)$ en los cuales la derivada parcial existe.

Definición 2.13. Sea $\underline{X}=(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ una variable aleatoria n dimensional. La distribución conjunta de las v. a coordenadas $X_1, X_2,\ldots,X_n$ de $\underline{X}$ se dice que es absolutamente continua, si existe una función f tal que, para todo $(u_1, u_2,\ldots,u_n)\in\boldsymbol{R}^n$

$$F(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\int_{-\infty}^{u_1}\int_{-\infty}^{u_2}\cdots\int_{-\infty}^{u_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

A f se le llama la densidad de probabilidad conjunta de $X_1, X_2,\ldots,X_n$.
Dada la función de distribución se puede obtener la función de densidad como sigue:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}F(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

donde f se define arbitrariamente en los puntos en los cuales la derivada parcial no existe.

2.3 Distribuciones marginales

Supongamos que (Ω, δ, P) es un espacio de probabilidad, y que X y Y son dos funciones reales definidas en Ω, nos preguntamos:

1.-Si (X, Y) es un vector aleatorio. ¿Qué podemos decir acerca de X y Y individualmente?, ¿son variables aleatorias?, si lo son, ¿ podemos encontrar su distribución si la distribución de X y Y se conocen?

2.- Recíprocamente, suponga que X y Y son v. a., entonces ¿(X, Y) es un vector aleatorio?, si lo es, ¿podemos encontrar la distribución conjunta cuando las distribuciones individuales de X y Y se conocen?

Teorema 2.5. Si (X, Y) es un vector aleatorio con función de distribución $F(u, v)$, entonces X y Y son cada una v. a. s. Además, las distribuciones de X y Y están dadas por

$$F_X(u) = \lim_{v \to \infty} F(u, v),$$
$$F_Y(v) = \lim_{u \to \infty} F(u, v).$$

Demostración.

Como (X, Y) es un vector aleatorio bivariado, entonces por definición $\{w : X(w) \leq u, Y(w) \leq v\} \in \delta$, para cualquier par de números reales u, v.

Luego,

$$\{w : X(w) \leq u, Y(w) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w : X(w) \leq u, Y(w) < n\} \in \delta .$$

Sin embargo

$$\{w : X(w) \leq u,\ Y(w) < \infty\} = \{w : X(w) \leq u\} \bigcap \{w : Y(w) < \infty\}$$

$$= \{w : X(w) \leq u\} \bigcap \Omega = \{w : X(w) \leq u\}.$$

Por tanto, si (X, Y) es un vector aleatorio, entonces

$$\{w : X(w) \leq u\} \in \delta \quad \forall\, u \in \boldsymbol{R},$$

por consiguiente, X es una variable aleatoria. Un argumento análogo prueba que Y es una variable aleatoria. De la igualdad

$$\{w : X(w) \le u, Y(w) < \infty\} = \{w : X(w) \le u\},$$

resulta que $F_X(u) = \lim_{v\to\infty} F(u,v)$. Análogamente, de

$$\{w : X(w) < \infty, Y(w) \le v\} = \{w : Y(w) \le v\},$$

resulta que $F_Y(v) = \lim_{u\to\infty} F(u,v)$.

◊

Definición 2.14. Las distribuciones individuales de *X* y *Y* se llaman distribuciones marginales. Así F_X y F_Y son las funciones de distribución marginal de *X* y *Y* respectivamente.

Ejemplo 2.6. Consideremos la función de distribución conjunta de *X* y *Y* dada por

$$F(u,v) = \begin{cases} 0, & u < 0 \ \text{ o } \ v < 0 \\ 1 - 2e^{-v} + e^{-2v}, & u > v \ \text{ y } \ v \ge 0 \\ 1 - e^{-2u} + 2e^{-(u+v)} - 2e^{-v}, & u \ge 0 \ \text{ y } \ v \ge u. \end{cases}$$

Encuentre las distribuciones de *X* y *Y*.

Solución.

a) La distribución de *X* estará dada por, $F_X(u) = \lim_{v\to\infty} F(u,v)$.

Si $u < 0$, $F(u,v) = 0 \quad \forall\, v \in \boldsymbol{R}$.

Si $u \ge 0$, puesto que estamos haciendo $v \to \infty$, después de un tiempo *v* será mayor que *u*, y la forma funcional $F(u,v) = 1 - e^{-2u} + 2e^{-(u+v)} - 2e^{-v}$, es la apropiada. Entonces

$$F_X(u) = \lim_{v\to\infty} F(u,\ v) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ \underset{v\to\infty}{lím}(1 - e^{-2u} + 2e^{-(u+v)} - 2e^{-v}), & u \geq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 1 - e^{-2u}, & u \geq 0. \end{cases}$$

b) Para encontrar la distribución de *Y*, observemos que

$$F(u, v) = \begin{cases} 0, & \forall\, u, \quad v < 0 \\ 1 - 2e^{-v} + e^{-2v}, & \forall\, u > v, \quad v \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$F_Y(v) = \lim_{u\to\infty} F(u,\ v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ \lim\limits_{u\to\infty}(1 - 2e^{-v} + e^{-2v}), & v \geq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & v < 0 \\ 1 - 2e^{-v} + e^{-2v}, & v \geq 0. \end{cases}$$

◊

Teorema 2.6. Si *X* y *Y* son v. a., entonces *(X, Y)* es un vector aleatorio. Sin embargo, el conocimiento de la distribución de *X* y la de *Y* no es suficiente para determinar su distribución conjunta.

Demostración.

Supongamos que *X* y *Y* son variables aleatorias. Para probar que (*X*, *Y*) es un vector aleatorio, observemos que puesto que *X* y *Y* son v. a.

$$\{w : X(w) \leq u\} \in \delta \qquad \text{y} \qquad \{w : Y(w) \leq v\} \in \delta\,,$$

para cualesquiera números u, v.

Como δ es cerrado con respecto a la intersección, se tiene

$$\{w: X(w) \le u\} \bigcap \{w: Y(w) \le v\} \in \delta .$$

Pero

$$\{w: X(w) \le u\} \bigcap \{w: Y(w) \le v\} = \{w: X(w) \le u, Y(w) \le v\} .$$

Así, $\{w: X(w) \le u, Y(w) \le v\} \in \delta$ para cualesquiera números reales u y v. Por la definición de un vector aleatorio, se sigue que (X, Y) es un vector aleatorio.

Para ver que el conocimiento de las distribuciones marginales de las v. a.'s no es suficientes para determinar su distribución conjunta, consideremos las siguientes funciones de distribuciones conjuntas distintas $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$,

$$F^{(1)}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{6}{7}(xy + \frac{x^3 y^2}{6}), & 0 \le x < 1 \text{ y } 0 \le y < 1 \\ \frac{6}{7}(x + \frac{x^3}{6}), & 0 \le x < 1 \text{ y } y > 1 \\ \frac{6}{7}(y + \frac{y^2}{6}), & x \ge 1 \text{ y } 0 \le y < 1 \\ 1, & x \ge 1 \text{ y } y \ge 1. \end{cases}$$

$$F^{(2)}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{36}{49}(x + \frac{x^3}{6})(y + \frac{y^2}{6}), & 0 \le x < 1 \text{ y } 0 \le y < 1 \\ \frac{6}{7}(x + \frac{x^3}{6}), & 0 \le x < 1 \text{ y } y > 1 \\ \frac{6}{7}(y + \frac{y^2}{6}), & x \ge 1 \text{ y } 0 \le y < 1 \\ 1, & x \ge 1 \text{ y } y \ge 1. \end{cases}$$

Puede verificarse que ambas dan lugar a las mismas distribuciones marginales:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{7}(x + \frac{x^3}{6}), & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{7}(y + \frac{y^2}{6}), & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Lo que se infiere es que, mientras que las distribuciones marginales se determinan de la distribución conjunta, el inverso no es verdadero.

◊

Teorema 2.7. Supongamos que X y Y tiene una distribución conjunta discreta con la función de probabilidad conjunta dada por

$$p(x_i, y_j) = P\big(X = x_i, Y = y_j\big) \qquad i, j = 1, 2, \ldots,$$

entonces

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Demostración.

Primero demostramos que

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j).$$

Nótese que el evento $\{X = x_i\}$ ocurre en conjunción con los valores de Y, es decir,

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} \bigcup \{X = x_i, Y = y_2\} \bigcup \cdots.$$

Entonces

$$P(X=x_i)=P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X=x_i, Y=y_j\}\right),$$

puesto que los eventos $\{X=x_i, Y=y_j\}$, $j=1,2,\ldots$ son mutuamente excluyentes, esto implica que

$$p(x_i)=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p(x_i, y_j).$$

De la misma manera probamos que $p_Y(y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i, y_j)$.

Así, para encontrar la función de probabilidad marginal de una v. a., se deben sumar las probabilidades conjuntas con respecto a la otra variable.

◊

Escribiendo la función de probabilidad conjunta en un arreglo rectangular, obtenemos la siguiente tabla:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	$P(X=x)$
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	$\ldots$	$P(x_1, y_j)$	$\ldots$	$\sum_{j=1}^{\infty}P(x_1, y_j)$
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	$\ldots$	$P(x_2, y_j)$	$\ldots$	$\sum_{j=1}^{\infty}P(x_2, y_j)$
.	.	.			.	.
.	.	.			.	.
.	.	.			.	.
x_i	$P(x_i, y_1)$	$P(x_i, y_2)$	$\ldots$	$P(x_i, y_j)$	$\ldots$	$\sum_{j=1}^{\infty}P(x_i, y_j)$
.	.	.			.	.
.	.	.			.	.
.	.	.			.	
$P(Y=y)$	$\sum_{i=1}^{\infty}P(x_i, y_1)$	$\sum_{i=1}^{\infty}P(x_i, y_2)$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{\infty}P(x_i, y_j)$	$\ldots$	1

Ejemplo 2.7. Sea $p(x, y)$ definida por

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	3/100	8/100	4/100	10/100
2	9/100	4/100	9/100	11/100
3	2/100	4/100	6/100	13/100
5	3/100	3/100	4/100	7/100

La probabilidad marginal de Y está dada por

$$p(y)=P(Y=y) = \sum_x p(x, y) = \begin{cases} \frac{17}{100}, & y=0 \\ \frac{19}{100}, & y=1 \\ \frac{23}{100}, & y=2 \\ \frac{41}{100}, & y=3. \end{cases}$$

La probabilidad marginal de X está dada por

$$p(x)=P(X=x) = \sum_y p(x, y) = \begin{cases} \frac{25}{100}, & x=0 \\ \frac{33}{100}, & x=2 \\ \frac{25}{100}, & x=3 \\ \frac{17}{100}, & x=5. \end{cases}$$

◊

Teorema 2.8. Si X y Y tienen una distribución conjunta absolutamente continua con la f.d.p. conjunta f, entonces X y Y cada una tienen una distribución absolutamente continua y las funciones de densidad de probabilidad de X y Y están dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \quad -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx, \quad -\infty < y < \infty .$$

Demostración.

Sabemos que

$$F_X(u) = \lim_{v\to\infty} F(u, v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx .$$

Como $f(x, y)$ es no negativa, se sigue que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$ es no negativa.

La relación $F_X(u) = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right]dx$ muestra que la función de distribución de X puede obtenerse integrando la función no negativa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$. Entonces por definición, X tiene una distribución absolutamente continua con f. d. p. $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$. De la misma manera se prueba que Y es absolutamente continua con f. d. p. $f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$

◊

Proposición 2.2. Sean $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ una subcolección de las v. a. d. X_1, $X_2,\ldots,X_n$, las cuales son coordenadas de $\underline{X}$. Entonces la función de probabilidad marginal de la v. a. d. de dimensión k, $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$, está dada por

$$p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \sum_{\substack{x_i \neq x_{i_l} \\ 1\le l\le k}} p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

en donde la suma se toma sobre las x_i's salvo las $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Demostración.

Por el teorema 2.7,

$$p(x_{i_1}) = \sum_{x_i \neq x_{i_1}} p(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Aplicando este resultado k veces, resulta

$$p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \sum_{\substack{x_i \neq x_{i_l} \\ 1 \leq l \leq k}} p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

en donde la suma se toma sobre las x_i's salvo las $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

◊

2.4 Probabilidad condicional e independencia

Definición 2.15. Si $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ y $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_m}$ son subcolecciones ajenas de las variables aleatorias coordenadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la v. a. d. $\underline{X}$, entonces la función de probabilidad condicional de la v. a. $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ de dimensión k dado el valor $(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}) \in \boldsymbol{R}^m$ de $(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_m})$ se define por

$$p\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \middle| x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\right) = \frac{p(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})}{p(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})},$$

$\forall \ (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}) \in \boldsymbol{R}^{\mathrm{m}}$ tal que $p(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}) > 0$.

Nótese que si

$$\underline{Y} = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}), \ \underline{Z} = (X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_m}), \ \underline{y} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}),$$

y

$$\underline{z} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}), \text{ entonces}$$

$$P\left(\underline{Y} = \underline{y} \middle| \underline{Z} = \underline{z}\right) = \frac{P(\underline{Y} = \underline{y}, \ \underline{Z} = \underline{z})}{P(\underline{Z} = \underline{z})}, \quad P(\underline{Z} = \underline{z}) > 0.$$

O bien

$$p\left(\underline{y} \middle| \underline{z}\right) = \frac{p(\underline{y}, \underline{z})}{p(\underline{z})}, \quad p(\underline{z}) > 0.$$

Ejemplo 2.8. Encuentre la probabilidad condicional de Y dado X= 2, del ejemplo 2.7.

Solución.

La probabilidad condicional de Y dado $X = 2$ está dada por

$$p(y|2) = \frac{P_{Y,X}(y,2)}{P_X(2)} = \frac{P_{Y,X}(y,2)}{\frac{33}{100}} = \begin{cases} \frac{9}{33}, & y = 0 \\ \frac{4}{33}, & y = 1 \\ \frac{9}{33}, & y = 2 \\ \frac{11}{33}, & y = 3. \end{cases}$$

La probabilidad condicional de Y dado X estará dado por los valores de $p(y|0)$, $p(y|2)$, $p(y|3)$ y $p(y|5)$.

◊

Definición 2.16. Se dice que las variables coordenadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de un vector aleatorio discreto $\underline{X}$ son independientes, si

$$p(\underline{x}) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n), \quad \forall \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

Nótese que si X y Y son independientes y $p(y) > 0$, entonces

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = p(x).$$

Definición 2.17. Se dice que las variables coordenadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de un vector aleatorio continuo $\underline{X}$ son independientes, si

$$f(\underline{x}) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n), \quad \forall \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

Nótese que si X y Y son independientes y $f(y) > 0$, entonces

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = f(x).$$

Capítulo 3
Valores esperados

3.1. Valores esperados

Definición 3.1. Sean X una variable aleatoria con f.d.p. (o f.p.) $f(x)$, y $u(X)$ una función de X tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| f(x) dx \text{ existe, si } X \text{ es continua}$$

o bien (1)

$$\sum_x |u(x)| f(x) \text{ existe, si } X \text{ es discreta.}$$

Entonces el valor esperado o la esperanza matemática de $u(X)$, está dada por

$$E[u(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx, & X \text{ continua} \\ \sum_x u(x) f(x), & X \text{ discreta.} \end{cases}$$

Los valores esperados o esperanza matemática tienen las siguientes propiedades:

1) $E(k) = k$, si k es una constante.
2) Si k es una constante y $u(X)$ es una función de X, entonces $E[ku(X)] = kE[u(X)]$.
3) Si $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes y $u_1(X), u_2(X), \ldots, u_n(X)$ son funciones de X, entonces

$$E[k_1u_1(X)+k_2u_2(X)+\ldots+k_nu_n(X)] = k_1E[u_1(X)] + k_2E[u_2(X)] +\ldots+ k_nE[u_n(X)].$$

Nótese que de las propiedades anteriores, la esperanza matemática, denotada por E, es un operador lineal.

Ejemplo 3.1. Sea X una variable aleatoria con f.d.p.

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en cualquier otro punto}.\end{cases}$$

Entonces

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 4x^4dx=\left[\tfrac{4}{5}x^5\right]_0^1=\tfrac{4}{5},$$

y

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 4x^5dx=\left[\tfrac{4}{6}x^6\right]_0^1=\tfrac{2}{3}.$$

Por lo tanto

$$E(5X+2X^2)=5E(X)+2E(X^2)$$

$$=5\left(\tfrac{4}{5}\right)+2\left(\tfrac{2}{3}\right)=\tfrac{16}{3}.$$

Ejemplo 3.2. Sea X una variable aleatoria con f.p.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10}, & x=1,2,3,4.\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{cases}$$

Hállense: $E(X)$, $E(X^3)$ y $E(X^3-2X)$.

Solución.

$$E(X) = \sum_x x f(x) = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^2}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = 3,$$

$$E(X^3) = \sum_x x^3 f(x) = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^4}{10} = \frac{1+16+81+256}{10} = \frac{177}{5},$$

$$E(X^3 - 2X) = E(X^3) - 2E(X) = \frac{177}{5} - 2(3) = \frac{147}{5}. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 3.3. Sea *X* una variable aleatoria con f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto}. \end{cases}$$

Hállense: $E(X)$, $E(2-X)$ y $E[X(2-X)]$.

Solución.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1,$$

$$E(2-X) = \int_{-\infty}^{\infty} (2-x) f(x) dx = \int_0^2 \frac{2-x}{2} dx = 1,$$

$$E[X(2-X)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(2-x) f(x) dx = \int_0^2 \frac{x(2-x)}{2} dx = \tfrac{2}{3}.$$

Nótese que

$$E[X(2-X)] \neq E(X)E(2-X).$$

◊

3.2. Momentos

Definición 3.2. El momento r-ésimo con respecto al origen de una v.a. *X*, está definido por

$$E(X^r) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ continua} \\ \sum_x x^r f(x), & X \text{ discreta}. \end{cases}$$

Definición 3.3. El valor esperado (o media) de una variable aleatoria *X*, denotada por *E*(*X*), se define como el primer momento con respecto al origen:

a) $E(X) = \sum_x xf(x)$, en el caso discreto, donde la suma se toma sobre todos los valores de *X*.

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, en el caso continuo.

La media de una variable aleatoria es una medida de tendencia central, y usualmente se denota por μ.

Definición 3.4. El momento r-ésimo con respecto a la media de una v.a. *X*, está definido por

$$E\left[(X-\mu)^r\right]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^r f(x)dx, & X \text{ continua}\\ \sum_x (x-\mu)^r f(x), & X \text{ discreta}.\end{cases}$$

Definición 3.5. La varianza de una variable aleatoria *X*, denotada por *V*(*X*) (o Var(*X*)), se define como el segundo momento con respecto a la media

$$V(X)=E\left[(X-\mu)^2\right].$$

La varianza es una medida de dispersión y algunas veces también se denota por σ^2. Una propiedad muy útil de la varianza es la siguiente:

$$E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left(X^2\right)-\mu^2 .$$

Generalmente, es más fácil obtener la varianza usando este resultado en lugar de aplicar directamente la definición. Otra propiedad que es muy útil es la siguiente:

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

La desviación estándar se define como la raíz cuadrada de la varianza. Para hacer una comparación entre la desviación estándar y la media, a veces se usa el coeficiente de variación definido por $C=\sigma/\mu$. Un pequeño valor para el coeficiente de variación indica que hay poca variación. Esto es, la mayoría de las observaciones se encuentran concentradas alrededor de la media. Se debe notar que el coeficiente de variación no tiene sentido para una distribución con media cero.

Ejemplo 3.4. Sea *X* una variable aleatoria con f.d.p.

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{en cualquier otro punto.}\end{cases}$$

Encuentre la esperanza, la varianza y la desviación estándar de *X*.

*Solución***.**

Siendo que

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} 4x^4 dx = \tfrac{4}{5},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) = \int_{0}^{1} 4x^5 dx = \tfrac{2}{3},$$

se sigue que

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \tfrac{2}{3} - \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \tfrac{2}{75}$$

y

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\tfrac{2}{75}}.$$

◊

Ejemplo 3.5. Sea *X* una variable aleatoria con f.p.

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & \text{para } x = 0,1 \\ 0, & \text{para cualquier otro punto}. \end{cases}$$

Encuentre la esperanza, la varianza y la desviación estándar de *X*.

*Solución***.**

Siendo que

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xp^x(1-p)^{1-x} = 0(1-p) + 1(p) = p,$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{x=0}^{1} x^2 p^x (1-p)^{1-x} = 0^2(1-p)+1^2(p)= p\,,$$

se sigue que

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2 = p-p^2 = p(1-p).$$

Entonces, la desviación estándar está dada por

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}\,.$$

◊

Definición 3.6. Se dice que una v.a. X con f.d.p (o f.p) $f(x)$ tiene una distribución simétrica con respecto a un número $X = c$, si para cualquier otro valor x de X, se tiene que

$$f(c+x) = f(c-x).$$

Definición 3.7. El coeficiente de asimetría, γ_1, se define en términos del tercer momento central.

$$\gamma_1 = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}.$$

Este coeficiente mide el grado de asimetría de una distribución. Si la distribución es simétrica, $\gamma_1 = 0$; sin embargo, si $\gamma_1 = 0$, no implica que la distribución es simétrica. Los valores positivos para γ_1 corresponden a distribuciones con colas largas hacia la derecha, y los valores negativos corresponden a distribuciones con colas largas hacia la izquierda.

Para determinar si la distribución de una variable aleatoria X es puntiaguda o plana relativa a la distribución normal, se define el coeficiente de apuntamiento.

Definición 3.8. El coeficiente de apuntamiento, γ_2, se define como

$$\gamma_2 = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}.$$

La costumbre es comparar el valor de γ_2 de la distribución con el valor de γ_2 para la distribución normal la cuál es 3. Si $\gamma_2 > 3$, entonces la distribución es puntiaguda relativa a la normal. Sin embargo, si $\gamma_2 < 3$, entonces la distribución es plana relativa a la normal.

Es importante señalar que Moors (1986), demostró que γ_2 es más bien una medida de la dispersión de

$$Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$$

alrededor de su valor esperado 1 en lugar de una medida del apuntamiento. Esto es debido a que

$$E\left(Z^2\right) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = 1$$

y

$$V\left(Z^2\right) = E\left(Z^4\right) - 1 = \gamma_2 - 1 \ .$$

Por lo tanto

$$\gamma_2 = V\left(Z^2\right) + 1 \ .$$

3.3. Funciones generadores de momentos

Definición 3.9. La función generadora de momentos (f.g.m.) de una v.a. *X*, denotada por M(t), se define como

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{x} e^{tx} f(x), & \text{para } x \text{ discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{para } x \text{ continua} \end{cases}.$$

Nótese que, $M(0) = E(1) = 1.$

Por otro lado, también se debe notar que no todas las distribuciones tienen una función generadora de momentos. Un ejemplo, es la distribución de Cauchy.

Para cada función de distribución, si existe su función generadora de momentos, es única. Es posible definir dos funciones de densidad de probabilidad que tengan la misma función generadora de momentos, pero la diferencia entre estas dos funciones seria una función nula. Entonces las probabilidades calculadas con estas dos funciones serían las mismas.

Si se definen las funciones de densidad de probabilidad de manera que no existan discontinuidades, entonces para cada función generadora de momentos hay una sola función de densidad de probabilidad. Entonces si se conoce la función generadora de momentos de *X*, se puede en teoría identificar la distribución de *X*. Este hecho hace que la función generadora de momentos sea muy útil en la demostración de algunos teoremas.

En efecto, sea M(t) la f.g.m. de una v.a. *X*, si M(t) existe para $-h < t < h$, entonces se sigue que todas las derivadas de M(t) existen en $t = 0$. Esto permite obtener los momentos de la función de distribución de *X*.

Derivando *r* veces con respecto de *t* a M(*t*), se obtiene

$$M^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)dx.$$

Haciendo $t = 0$, se obtiene

$$M^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx = E(X^r).$$

En consecuencia,

$$E(X) = M'(0)$$

y

$$V(X) = M''(0) - [M'(0)]^2.$$

Análogamente, para las distribuciones discretas

$$M^{(r)}(t) = \sum_x x^r e^{tx} f(x)$$

y

$$M^{(r)}(0) = \sum_x x^r f(x).$$

Ejemplo 3.6. Sea X una variable aleatoria con f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Halle la función generadora de momentos de X y encuentre su media y su varianza.

Solución.

La función generadora de momentos de X está dada por

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x} dx = \frac{1}{1-t}, \ \ 0 < t < 1 .$$

Derivando dos veces con respecto a t se obtiene

$$M'(t) = \frac{1}{(1-t)^2},$$

y

$$M''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}.$$

En consecuencia,

$$E(X) = M'(0) = 1$$

y

$$V(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = 1 .$$

◊

Ejemplo 3.7. Sea X una variable aleatoria con f.p.

$$f(x) = \left[-\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \frac{\left(\tfrac{3}{10}\right)^x}{x}, \quad x = 1, 2, \ldots .$$

Halle la función generadora de momentos de X, y úsela para obtener su media y su varianza.

Solución.

Por definición

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} f(x).$$

Por lo tanto,

$$M(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \left[-\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \frac{\left(\tfrac{3}{10}\right)^x}{x} = \left[-\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\left(e^t\, \tfrac{3}{10}\right)^x}{x}$$

$$= \left[-\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \left[-\ln\left(1 - \tfrac{3}{10} e^t\right)\right], \qquad \tfrac{3}{10} e^t < 1.$$

Derivando dos veces con respecto a t se obtienen

$$M'(t) = -\left[\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \frac{\tfrac{3}{10} e^t}{1 - \tfrac{3}{10} e^t}$$

y

$$M''(t) = -\left[\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \frac{\tfrac{3}{10} e^t}{\left(1 - \tfrac{3}{10} e^t\right)^2}.$$

Haciendo $t = 0$, se obtiene

$$E(X) = M'(0) = -\left[\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \left(\tfrac{3}{7}\right) \cong 1.202.$$

y

$$E\left(X^2\right) = -\left[\ln\left(\tfrac{7}{10}\right)\right]^{-1} \tfrac{30}{49} \cong 1.717.$$

Entonces

$$V(X) \cong 1.717 - 1.202^2 \cong 0.272.$$

◊

El siguiente teorema es de Kirmani y Esfahani (1983).

Teorema 3.1. Sea *X* una variable aleatoria con f.g.m. M(*t*). Supóngase que existe *h* > 0 tal que M(*t*) está bien definida sobre $t \in [-h, h]$, es decir,

$$E\left(e^{tX}\right) < \infty \quad \forall \quad t \in [-h, h].$$

Entonces todos los momentos de orden entero positivo de *X* son finitos y M(*t*) tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias:

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E\left(X^k\right)}{k!} t^k \quad \forall \quad t \in (-h, h).$$

Demostración.

Puesto que existe M(t), se puede elegir h > 0 tal que $E\left(e^{tX}\right) < \infty$ para todo $t \in [-2h, 2h]$. Restringimos *t* al intervalo (-*h*, *h*). Por la formula de Taylor

$$e^{tx} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k x^k}{k!} + \frac{t^{n+1} e^{t\xi_n(x)} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde, $0 < |\xi_n(x)| < |x|$. De las desigualdades

$$\frac{h^n |x|^n}{n!} < e^{h|x|} < e^{hx} + e^{-hx},$$

se sigue que

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{e^{h|x|}}{h^n} < \frac{e^{hx} + e^{-hx}}{h^n}.$$

Por lo tanto

$$\left| \frac{t^{n+1} e^{t\xi_n(x)} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{|t|^{n+1} e^{h|x|} e^{h|x|}}{h^{n+1}} < \left(\frac{|t|}{h} \right)^{n+1} \left(e^{2hx} + e^{-2hx} \right).$$

Se sigue que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{E\left(X^k\right) t^k}{k!} - M(t) \right| \leq E\left(\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k X^k}{k!} - e^{tX} \right| \right)$$

$$= E\left(\left| \frac{t^{n+1} e^{t\xi_n(x)} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \right)$$

$$\leq E\left[\left(e^{2hX} + e^{-2hX} \right) \left(\frac{|t|}{h} \right)^{n+1} \right]$$

$$< \left[M(2h) + M(-2h) \right] \left(\frac{|t|}{h} \right)^{n+1}.$$

Cuando *n* tiende al infinito, el último término tiende a cero. En consecuencia,

$$M(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{E\left(X^k\right) t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E\left(X^k\right) t^k}{k!}.$$

◊

3.4. La función característica

Definición 3.10. La función característica (f.c) de una v.a X, denotada por $\phi(t)$, se define por

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = M(it) = \begin{cases} \sum_x e^{itx} f(x), & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx, & X \text{ continua} \end{cases}.$$

La función característica se puede usar como una alternativa a la función generadora de momentos. Esto es,

$$\phi^{(r)}(t) = i^r M^{(r)}(t).$$

Entonces

$$\phi^{(r)}(0) = i^r M^{(r)}(0) = i^r E\left(X^r\right).$$

Despejando el valor esperado se obtiene,

$$E\left(X^r\right) = \frac{\phi^{(r)}(0)}{i^r}.$$

Ejemplo 3.8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Hállese la función característica de X.

*Solución***.**

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^k e^{-x^2/2} dx \,.$$

En el capítulo 5, se demostrará en el lema 5.1 que la integral definida en el lado derecho toma el valor cero para k impar y para k par toma el valor $(2k)!/2^k k!$. Entonces

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)^k}{k!} = e^{-t^2/2} \,.$$

◊

Ejemplo 3.9. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Hállese la función característica de X.

Solución.

Por definición,

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

El desarrollo en serie de Taylor para la función e^u es

$$e^u = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{u^x}{x!}.$$

Aplicando este resultado, se obtiene

$$\phi(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

◊

Para cada función de densidad $f(x)$ corresponde una función característica $\varphi(t)$. Si se conoce la función característica $\phi(t)$, entonces se puede obtener $f(x)$, aplicando la transformada inversa. Esto es,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} e^{-itx} \phi(t) dt.$$

Ejemplo 3.10. Sea X una variable aleatoria con función característica

$$\phi(t) = e^{-t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Hállese la función de densidad de X.

*Solución***.**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-itx)^k}{k!} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt\ .$$

En el capítulo 5, se demostrará en el lema 5.1 que la integral definida en el lado derecho toma el valor cero para k impar y para k par toma el valor $(2k)!/2^k k!$. Entonces

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^k}{k!} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty\ .$$

◊

3.5. Momentos para distribuciones multivariantes

Definición 3.11. Sean (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con f.d.p. (o f.p.) $f(x, y)$, y $u(X, Y)$ una función de X y Y, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) f(x, y) dx dy \quad \text{existe , para } X \text{ y } Y \text{ continuas}$$

o bien (2)

$$\sum_x \sum_y u(x, y) f(x, y) \quad \text{existe , para } X \text{ y } Y \text{ discretas .}$$

Entonces el valor esperado de $u(X,Y)$ está dado por

$$E[u(X,Y)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) f(x,y)\,dx\,dy, & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas} \\ \sum_x \sum_y u(x,y) f(x,y), & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas}. \end{cases}$$

También se puede considerar el caso donde *X* es discreta y *Y* es continua o viceversa, pero aquí se consideran funciones donde las variables *X* y *Y* son ambas discretas, ó ambas continuas.

Ejemplo 3.11. Sea (*X*, *Y*) una variable aleatoria bidimensional con f.d.p.

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso}. \end{cases}$$

Hállese $E(XY)$.

Solución.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 6x^2y^3\,dx\,dy = \int_0^1 2y^3\,dy = \tfrac{1}{2}.$$

◊

Definición 3.12. Sean *X* y *Y* variables aleatorias con la f.d.p. (o f.p.) *f*(*x*, *y*). Si se definen $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$, $\sigma_1^2 = V(X)$ y $\sigma_2^2 = V(Y)$, entonces se puede definir la covarianza de *X* y *Y* como

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)].$$

Es fácil demostrar que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_1\mu_2.$$

Si hay una alta probabilidad de que valores grandes de X sean asociados con valores grandes de Y, o bien, si valores pequeños de X sean asociados con valores pequeños de Y, entonces Cov(X, Y) es positiva. Por otro lado, si hay una alta probabilidad de que valores grandes de X sean asociados con valores pequeños de Y, o bien, valores pequeños de X sean asociados con valores grandes de Y, entonces Cov(X, Y) es negativa.

Si $u(X, Y)$ es una función de una sola variable, entonces se puede obtener el valor esperado usando la f.d.p. (o f.p.) marginal. Por ejemplo, supongamos que $u(X)$ es una función de X, donde X es una variable aleatoria discreta. Entonces el valor esperado de $u(X)$ está dado por

$$E[u(X)] = \sum_x \sum_y u(x) f(x, y) = \sum_x u(x) f_1(x).$$

Se puede demostrar un resultado similar, para el caso de variables continuas. Este resultado permite calcular la media y la varianza, usando las funciones de densidad de probabilidad marginales, lo cual es generalmente más sencillo.

Si Z es una variable aleatoria de la forma

$$Z = aX + bY,$$

Entonces

$$V(Z) = a^2 V(X) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y) + b^2 V(Y).$$

Se puede demostrar que si X y Y son independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (ver el teorema 3.2). Por otro lado, si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, no se sigue que X y Y son independientes. Primero demostramos que si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces el valor esperado de $u_1(X)$ por $u_2(Y)$ es igual al producto de los valores esperados.

Teorema 3.2. Sean X y Y variables aleatorias ambas continuas o ambas discretas con f.d.p (o f.p) $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente. Si X y Y son independientes, entonces

$$E[u_1(X)u_2(Y)] = E[u_1(X)]E[u_2(Y)].$$

Demostración.

Si X y Y son v. a. continuas, entonces

$$E[u_1(X)u_2(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)u_2(y)f(x,y)dxdy.$$

Por la independencia de X y Y,

$$\begin{aligned} E[u_1(X)u_2(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)u_2(y)f(x)f(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} u_2(y)f(y)dy \\ &= E[u_1(X)]E[u_2(Y)]. \end{aligned}$$

Si X y Y son v. a. discretas, entonces

$$E[u_1(X)u_2(Y)] = \sum_x \sum_y u_1(x)u_2(y)p(x,y).$$

Por la independencia de X y Y,

$$\begin{aligned} E[u_1(X)u_2(Y)] &= \sum_x \sum_y u_1(x)u_2(y)p(x)p(y), \\ &= \sum_x u_1(x)p(x)\sum_y u_2(y)p(y), \\ &= E[u_1(X)]E[u_2(Y)]. \end{aligned}$$

◊

Teorema 3.3. Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces Cov$(X, Y) = 0$.

Demostración.

La demostración se hará para el caso cuando X y Y son variables aleatorias continuas e independientes, la demostración para el caso discreto es similar.

Por definición

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x, y)dxdy.$$

Siendo que X y Y son variables independientes, se sigue que

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f_1(x)f_2(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)f_1(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_2)f_2(y)dy = 0.\end{aligned}$$

◊

Como la covarianza depende de las unidades en que se miden X y Y, la interpretación de su valor es un poco difícil. Por ejemplo, si una de las variables representa el tiempo, entonces se puede medir el tiempo en segundos, minutos, horas, etc. Las unidades en que se mide la variable representa la escala de la variable. Si se cambia la escala de la variable, entonces cambia el valor de la covarianza. Esto hace difícil, definir lo que es una alta o una baja asociación entre las dos variables. Por esta razón, se ha definido una nueva medida conocida como la correlación que no depende de la escala.

Definición 3.13. La correlación entre dos variables aleatorias X y Y, se define como

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2},$$

donde σ_1^2=$V(X)$, σ_2^2=$V(Y)$, y σ_{12}=Cov(X, Y).

La correlación mide el grado de asociación lineal entre dos variables aleatorias X y Y; y se puede demostrar que ρ tiene la propiedad de que

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Ejemplo 3.12. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con una f.p conjunta

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{33}; \quad x = 1, 2, \quad y = 1, 2, 3.$$

Encontrar la correlación entre X y Y.

Solución.

La f.p. marginal de X está dada por

$$f_1(x) = \sum_{y=1}^{3} \frac{x + 2y}{33} = \frac{x + 4}{11}; \quad \text{para } x = 1, 2.$$

Ahora, se puede usar la f.p. marginal para obtener la media y la varianza de las variables. Los primeros dos momentos con respecto al origen y la varianza de X están dados por

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2} x \frac{x + 4}{11} = \frac{17}{11},$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{2} x^2 \frac{x + 4}{11} = \frac{29}{11},$$

y

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{30}{121}.$$

Para obtener los momentos de Y se usa

$$f_2(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x+2y}{33} = \frac{3+4y}{33}; \quad \text{para } y = 1, 2, 3\,.$$

Los primeros dos momentos de Y y su varianza están dados por

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} y\,\frac{3+4y}{33} = \frac{74}{33}\,,$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=1}^{3} y^2\,\frac{3+4y}{33} = \frac{186}{33}\,,$$

y

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{662}{1089}\,.$$

Ahora, hay que determinar E(XY), la cual está dada por

$$E(XY) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} xy\,\frac{x+2y}{33} = \frac{114}{33}\,.$$

La covarianza está dada por

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{4}{363}\,,$$

y por lo tanto la correlación está dada por

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \cong -0.0284\,.$$

◊

Ejemplo 3.13. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con la f.d.p. conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto}. \end{cases}$$

Hállese la correlación entre X y Y.

Solución.

Las f.d.p. marginales de X y Y están dadas por

$$f_1(x) = \int_x^1 6x\,dy = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1,$$

y

$$f_2(y) = \int_0^y 6x\,dx = 3y^2, \quad 0 < y < 1.$$

Los primeros dos momentos de X y Y están dados por

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 6x^3(1-x)dx = \frac{3}{10},$$

$$\mu_2 = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = \int_0^1 3y^3 dy = \frac{3}{4},$$

y

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy=\int_0^1 3y^4 dy=\frac{3}{5}.$$

Se sigue que las varianzas están dadas por

$$V(X)=\sigma_1^2=E\left(X^2\right)-\mu_1^2=\frac{1}{20}$$

y

$$V(Y)=\sigma_2^2=E\left(Y^2\right)-\mu_2^2=\frac{3}{80}.$$

Siendo que

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y 6x^2 ydxdy=\frac{2}{5},$$

se sigue que

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{12}=E(XY)-\mu_1\mu_2=\frac{1}{40}.$$

Por lo tanto, la correlación entre *X* y *Y* está dada por

$$\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cong 0.57.$$

◊

Se puede extender la definición 3.11 a n variables aleatorias $X_1, X_2,...,X_n$ con f.d.p. (o f.p.) $f(x_1, x_2,...,x_n)$, y $u(X_1, X_2,...,X_n)$ una función de las variables aleatorias, tal que (2) se cumple. Entonces el valor esperado de $u(X_1, X_2,...,X_n)$ está dado por

$$E[u(X_1, X_2,..., X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2,..., x_n) f(x_1, x_2,..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

si las variables aleatorias son continuas, y

$$E[u(X_1, X_2,..., X_n)] = \sum_{x_n} \cdots \sum_{x_1} u(x_1, x_2,..., x_n) f(x_1, x_2,..., x_n)$$

si las variables aleatorias son discretas.

3.6. Funciones generadoras de momentos para distribuciones de probabilidad multivariables

Definición 3.14. Sean X y Y variables aleatorias con f.d.p. (o f.p.) conjunta $f(x, y)$. Entonces la función generadora de momentos $M(t_1, t_2)$ se define como

$$M(t_1, t_2) = E\left(e^{t_1 X + t_2 Y}\right).$$

Se pueden obtener los momentos de X y Y usando el hecho de que

$$M(t_1, 0) = E\left(e^{t_1 X}\right) = M_1(t_1)$$

y

$$M(0, t_2) = E\left(e^{t_2 Y}\right) = M_2(t_2).$$

Esto es, si se hace $t_2 = 0$ en la función generadora de momentos $M(t_1, t_2)$, se obtiene la función generadora de momentos de X. De la misma manera, se obtiene la función generadora de momentos de Y, haciendo $t_1 = 0$ en $M(t_1, t_2)$.

Derivando $M(t_1, t_2)$, r veces con respecto a t_1 y s veces con respecto a t_2 se obtiene

$$\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Haciendo $t_1 = t_2 = 0$, se obtiene

$$\left.\frac{\partial^{r+s} M(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\right|_{t_1 = t_2 = 0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x, y)\,dx\,dy = E\left(X^r Y^s\right).$$

Se puede obtener la covarianza de X y Y usando

$$\sigma_{12} = E(XY) - \mu_1 \mu_2 = \left.\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = 0} - \left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1 = t_2 = 0} \left.\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = 0}.$$

Ejemplo 3.14. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con f.d.p. conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{en cualquier otro punto}. \end{cases}$$

Encontrar la función generadora de momentos y usarla para obtener la correlación entre X y Y.

Solución.

La función generadora de momentos de $f(x, y)$ está dada por

$$
\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{t_1 x + t_2 y} e^{-y}\, dy dx \\
&= \int_0^\infty e^{t_1 x} \left[-\frac{e^{(t_2 - 1)x}}{t_2 - 1} \right] dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{e^{-(1 - t_1 - t_2)x}}{t_2 - 1}\, dx \\
&= \frac{1}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2)} \quad \text{para } t_2 < 1,\ t_1 + t_2 < 1 .
\end{aligned}
$$

Las funciones generadoras de momentos para $f_1(x)$ y $f_2(y)$ están dadas por

$$M(t_1, 0) = \frac{1}{1 - t_1}$$

y

$$M(0, t_2) = \frac{1}{(1 - t_2)^2} .$$

Ahora se sigue que

$$\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} = \frac{1}{(1 - t_1)^2} \Rightarrow \left. \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} \right|_{t_1 = 0} = 1 = \mu_1 ,$$

$$\frac{\partial^2 M(t_1, 0)}{\partial t_1^2} = \frac{2}{(1 - t_1)^3} \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 M(t_1, 0)}{\partial t_1^2} \right|_{t_1 = 0} = 2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2 \Rightarrow \sigma_1^2 = 1 ,$$

$$\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} = \frac{2}{(1 - t_2)^3} \Rightarrow \left. \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_2 = 0} = 2 = \mu_2 ,$$

y

$$\frac{\partial^2 M(0,t_2)}{\partial t_2^2}=\frac{6}{(1-t_2)^4}\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 M(0,t_2)}{\partial t_2^2}\right|_{t_2=0}=6=\sigma_2^2+\mu_2^2\Rightarrow \sigma_2^2=2\,.$$

Se puede obtener *E(XY)* usando

$$\frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}=\frac{2}{(t_1+t_2-1)^3(t_2-1)}+\frac{1}{(t_1+t_2-1)^2(t_2-1)^2}\,.$$

Se sigue que

$$E(XY)=\left.\frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=t_2=0}=3\,.$$

Entonces, la covarianza es

$$\sigma_{12}=E(XY)-\mu_1\mu_2=1,$$

y por lo tanto, la correlación entre *X* y *Y* está dada por

$$\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

◊

Teorema 3.4. Dos variables aleatorias *X* y *Y* son independientes si y sólo si, su función generadora de momentos, si existe, es el producto de sus funciones generadoras de momentos individuales.

Demostración.

Supongamos que la f. g. m. $M(t_1, t_2)$ de *X* y *Y* existe, por definición $M(t_1, t_2)$ está dada por

$$M(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y}).$$

Si *X* y *Y* son v. a. independientes, entonces por el teorema 3.2, resulta que

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= E(e^{t_1 X})E(e^{t_2 Y}) \\ &= M(t_1, 0)M(0, t_2). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que la f. g. m., $M(t_1, t_2)$ de *X* y *Y* existe, y

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)M(0, t_2).$$

Entonces

$$M(t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f_1(x) f_2(y) dx dy & \text{en el caso continuo} \\ \sum_y \sum_x e^{t_1 x + t_2 y} f_1(x) f_2(y) & \text{en el caso discreto.} \end{cases}$$

Pero por la definición de la f.g.m.

$$M(t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy & \text{en el caso continuo} \\ \sum_y \sum_x e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) & \text{en el caso discreto.} \end{cases}$$

Ya que la f.g.m si existe, es única, se sigue que $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Por lo tanto *X* y *Y* son independientes.

◊

3.7. Desigualdad de Chebyshev

En esta sección, consideraremos la desigualdad de Chebyshev y algunas de sus consecuencias. El teorema 3.5 representa una generalización de la desigualdad de Chebyshev establecida en el teorema 3.6.

Teorema 3.5. Sea $u(X)$ una función no negativa de la variable aleatoria X. Si $E[u(X)]$ existe, entonces para cualquier constante positiva c,

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}.$$

Demostración.

La demostración se hará sólo para el caso cuando X es continua, la demostración para el caso cuando X discreta, es análoga. Sea X una v. a. continua con f.d.p $f(x)$. Definimos el conjunto A por

$$A = \{x \mid u(x) \geq c\}.$$

Entonces

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx = \int_A u(x) f(x) dx + \int_{A^c} u(x) f(x) dx .$$

Puesto que u(x) es una función no negativa, cada una de las integrales en el lado derecho es no negativa. Por lo tanto

$$E[u(X)] \geq \int_A u(x) f(x) dx \geq c \int_A f(x) dx = cP[u(X) \geq c].$$

Entonces

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}.$$

◊

Teorema 3.6 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $F(x)$ con media μ y varianza σ^2 finitas. Entonces para cada $k > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Demostración.

Defínase $u(X) = (X - \mu)^2$ y $c = k^2\sigma^2$, entonces por el teorema 3.5

$$P\left[(X - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2\right] \leq \frac{E\left[(X - \mu)^2\right]}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Se sigue que

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

◊

3.8. Ley débil de los grandes números

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se dejará de ejercicio al lector.

Lema 3.1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución con media μ y varianza σ^2.

Si $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, entonces $E(\overline{X}_n) = \mu$ y $V(\overline{X}_n) = \sigma^2 / n$.

A la variable aleatoria $\overline{X}_n$ le llamaremos **media muestral**.

Teorema 3.7. (Ley débil de los grandes números). Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ como en el lema 3.1. Si μ y σ^2 son finitas, entonces para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Demostración.

Usando el lema 3.1 y la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Tomando

$$k = \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma},$$

se obtiene

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Haciendo $n \to \infty$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

◊

Observación. La desigualdad de Chebyshev nos permite encontrar en términos de la varianza σ^2, una n suficientemente grande para garantizar que la desigualdad $\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon$ ocurra con una probabilidad tan cercana a 1 como se quiera. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, usando que $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, tenemos que

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta \quad \text{si } n \geq \frac{\sigma^2}{\delta\varepsilon^2}$$

es decir,

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta \quad \text{si } n \geq \frac{\sigma^2}{\delta\varepsilon^2}.$$

En un experimento donde cada observación X toma sólo uno de dos posibles resultados (1(éxito), 0(fracaso)), las pruebas individuales se llaman pruebas de Bernoulli. Si p representa la probabilidad de un éxito, entonces es fácil demostrar que $E\left(X^r\right) = p$. Por lo tanto $E(X) = p$ y $V(X) = p(1-p)$. Si S_n es el número de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli, entonces $E(S_n/n) = p$ y $V(S_n/n) = p(1-p)/n$. Aplicando la ley débil de los grandes números se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Así, en este caso particular, la ley débil de los grandes números nos indica para n grande, la frecuencia relativa de éxitos es cercana a p.

Observación. La ley débil de los grandes números sigue siendo válida bajo la condición más débil de que μ sea finita. Para una demostración de esto véase por ejemplo Laha (Theorem 2.1.3).

Capítulo 4
Distribuciones discretas

4.1. La distribución binomial

En el conjunto de las distribuciones discretas, una de las más importantes es la distribución binomial. Esta distribución se emplea para analizar los resultados de n ensayos independientes Bernoulli. Un ensayo es de Bernoulli, si éste tiene sólo dos posibles maneras de ocurrir, denominados "éxito" o "fracaso".

Sea X el resultado de un ensayo de Bernoulli, con valor 1 si el resultado es un éxito y 0 si es fracaso. Si p es la probabilidad de observar un éxito, entonces la función de probabilidad Bernoulli puede expresarse como

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que

$$f(1) = p \quad \text{y} \quad f(0) = 1 - p\,.$$

Ahora bien, considérese un experimento compuesto de n ensayos de Bernoulli, y defínase la variable aleatoria Y como

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \ ,$$

donde cada X_i sigue una distribución de Bernoulli con parámetro p. Para hallar la función de probabilidad de Y, supóngase que un ensayo Bernoulli se realiza n veces, de las cuales, k veces se observa un éxito. Se supone que cada prueba es independiente una de otra, y $k \leq n.$ Del total de resultados posibles en que pueden presentarse k éxitos y n-k fracasos, se tiene el resultado particular de que en las primeras k pruebas se observe un éxito y en las n-k restantes se tengan fracasos: Si p es la probabilidad de obtener un éxito, entonces la probabilidad de que los primeros k ensayos sean éxitos y los n-k restantes sean fracasos está dada por

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Por otro lado, como no importa el orden en que aparezcan k éxitos y n-k fracasos en las n pruebas de Bernoulli, entonces el número de maneras posibles de que ocurran k éxitos y n-k fracasos está dado por las combinaciones:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

De esta forma se puede definir la función de probabilidad para la variable aleatoria Y,

$$g(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, & y = 0, 1, \ldots, n. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si una v.a Y tiene f.p. como la anterior, se dice que Y tiene una distribución binomial con parámetros n y p, y se denota, Y~Bin(n, p).

Ejemplo 4.1. Se lanza una moneda legal 10 veces, encontrar la probabilidad de que en los lanzamientos:

a) Se obtengan exactamente 5 soles.
b) Se obtengan al menos 5 soles.
c) Se obtengan a lo más 5 soles.

Solución.

Observemos que la probabilidad de sol es 1/2, ya que la moneda es legal, además $n = 10$, así las respuestas son:

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5}(0.5)^5(0.5)^{10-5}$.

b) $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10}\binom{10}{k}(0.5)^k(0.5)^{10-k}$.

c) $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5}\binom{10}{k}(0.5)^k(0.5)^{10-k}$.

Ejemplo 4.2. Un dado se lanza 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 seis veces?

Solución.

Es claro que la distribución adecuada es la binomial, con $p = 2/6 = 1/3$ y $n = 10$, ¿por qué? Aquí la v.a. X, cuenta el número de veces que aparece un múltiplo de 3. Entonces

$$P(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(1-\frac{1}{3}\right)^{10-6} = 0.0569.$$

◊

Ejercicio 4.1. Un examen de opción múltiple está compuesto por 20 preguntas, con 5 respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes que realizan el examen contesta las preguntas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?

Ejercicio 4.2. Una nueva técnica quirúrgica tiene una probabilidad p de éxito. Suponga que la operación se efectúa cinco veces y que los resultados son independientes uno de otro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco operaciones sean exitosas, si p=0.8?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro operaciones sean exitosas, si p=0.6?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de dos operaciones sean exitosas, si p=0.3?

Como ya se ha definido en la sección 3.3, la función generadora (o generatriz) de momentos es muy útil para obtener los momentos de una distribución y para demostrar ciertos resultados teóricos. El siguiente teorema permite obtener la f.g.m. de una v.a. Y, con distribución binomial.

Teorema 4.1. La función generadora de momentos de una distribución Binomial con parámetros n y p está dada por:

$$M(t) = \left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^n.$$

Demostración.

Sea Y~Bin(n, p), por la definición de función generatriz de momentos, se tiene que

$$\begin{aligned} M(t) &= E\left(e^{tY}\right) \\ &= \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} e^{ty} p^y (1-p)^{n-y} \\ &= \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} (e^t p)^y (1-p)^{n-y}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned} M(t) &= \left[pe^t + (1-p)\right]^n \\ &= \left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^n. \end{aligned}$$

◊

El r-ésimo momento de una distribución se determina mediante la r-ésima derivada de su f.g.m.:

$$E\left(Y^r\right) = M^{(r)}(0) = \left.\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right|_{t=0}.$$

Por lo tanto, la media y la varianza de la variable aleatoria Y, se obtienen de su f.g.m. $M(t)$, como sigue:

$$M'(t) = n[1 + p(e^t - 1)]^{n-1} pe^t,$$

$$M''(t) = n(n-1)[1 + p(e^t - 1)]^{n-2}(pe^t)^2 + n[1 + p(e^t - 1)]^{n-1} pe^t.$$

Así resultan:

$$\mu = E(Y) = M'(0) = np, \text{ y } E\left(Y^2\right) = M''(0) = n(n-1)p^2 + np.$$

Luego

$$\sigma^2 = E\left(Y^2\right) - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p).$$

Cuando n=1, la distribución binomial se transforma en la distribución de Bernoulli, se sigue que la media y la varianza de la distribución Bernoulli son respectivamente $\mu = p$ y $\sigma^2 = p(1-p)$. En este caso, se dice que Y~Bin(1, p)=Ber(p).

4.2. Distribución hipergeométrica

Una distribución de importancia en el muestreo de aceptación es la distribución hipergeométrica. La distribución hipergeométrica tiene la siguiente función de probabilidad

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \max\{0, n-N+M\},\ldots,\min\{n, M\}.$$

Esta distribución caracteriza a situaciones en donde se tiene una población de N objetos, que se pueden clasificar en dos tipos, M defectuosos y N-M no defectuosos. Si X es el número de objetos defectuosos en una muestra de tamaño n sin orden y sin reemplazo de esta población, entonces X tiene una f.p. dada por $f(x)$.

Observemos que:

Si $M > n$, entonces X toma los valores 0, 1,...,n.
Si $M < n$, entonces X toma los valores 0, 1,...,M.

Se debe observar también que X no siempre puede tomar el valor 0. Por ejemplo, si $n > N–M$, entonces $x > 0$.

Otra manera de obtener una distribución hipergeométrica es con base en el siguiente resultado. Si X_1 y X_2 son variable aleatorias independiente, X_1~Bin(n_1, p) y X_2~Bin(n_2, p), entonces $(X_1 + X_2)$~Bin(n_1+n_2, p).

Ahora, podemos expresar la probabilidad condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = n$ por

$$P\left(X_1 = x_1 \middle| X_1 + X_2 = n\right) = \frac{P(X_1 = x_1, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)}.$$

$$P\left(X_1 = x_1 \middle| X_1 + X_2 = n\right) = \frac{P(X_1 = x_1)P(X_2 = n - x_1)}{P(X_1 + X_2 = n)}.$$

$$P\left(X_1 = x_1 \middle| X_1 + X_2 = n\right) = \frac{\binom{n_1}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{n_1 - x_1} \binom{n_2}{n - x_1} p^{n - x_1}(1-p)^{n_2 - (n - x_1)}}{\binom{n_1 + n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1 + n_2 - n}}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{n - x_1}}{\binom{n_1 + n_2}{n}}.$$

Haciendo $M = n_1$, $x = x_1$, $N\text{-}M = n_2$ y $N = n_1 + n_2$, resulta

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N - M}{n - x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \max\{0, n - N + M\}, \ldots, \min\{n, M\}.$$

Ahora bien, se puede obtener la media de la distribución a partir de la definición. Si X puede tomar los valores $0, 1, \ldots, n$, entonces se tiene

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad n \leq M.$$

Se puede ver que el primer termino en la suma es igual a cero. Entonces

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n} \frac{M\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=n\frac{M}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}.$$

Bajo la transformación $z = x$ - 1, se obtiene

$$E(X)=n\frac{M}{N}\sum_{z=0}^{n-1}\frac{\binom{M-1}{z}\binom{N-M}{n-1-z}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\frac{N}{M}.$$

Para obtener $E(X^2)$, primero se necesita obtener $E[X(X-1)]$. Se sigue que

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Se puede ver que los primeros dos términos de la suma son iguales a cero. Entonces

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{x=2}^{n}\frac{M\left(M-1\right)\binom{M-2}{x-2}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=n\left(n-1\right)\frac{M\left(M-1\right)}{N\left(N-1\right)}\sum_{x=2}^{n}\frac{\binom{M-2}{x-2}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-2}{n-2}}.$$

Bajo la transformación $z = x - 2$, se obtiene

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=n\left(n-1\right)\frac{M\left(M-1\right)}{N\left(N-1\right)}\sum_{z=0}^{n-2}\frac{\binom{M-2}{z}\binom{N-M}{n-2-z}}{\binom{N-2}{n-2}}=n\left(n-1\right)\frac{M\left(M-1\right)}{N\left(N-1\right)}.$$

Por lo tanto,

$$E\left(X^2\right)=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E\left(X\right)=n\left(n-1\right)\frac{M\left(M-1\right)}{N\left(N-1\right)}+n\frac{M}{N}.$$

Ahora, se puede obtener la varianza usando la formula

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\mu^2=n\left(n-1\right)\frac{M\left(M-1\right)}{N\left(N-1\right)}+n\frac{M}{N}-\left(n\frac{M}{N}\right)^2.$$

Simplificando se obtiene

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

Si se elige una muestra aleatoria pequeña de una población grande, $n << N$, y el número de objetos defectuosos es también grande en relación al tamaño de la muestra, entonces es posible usar la distribución binomial como una aproximación a la hipergeométrica. En efecto, en este caso

$$\frac{M!}{(M-x)!} = (M)(M-1)\cdots(M-x+1) \cong M^x,$$

$$\frac{(N-M)!}{(N-M-n+x)!} = (N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+x+1)$$
$$\cong (N-M)^{n-x},$$

$$\frac{N!}{n!} = (N)(N-1)\cdots(N-n+1) \cong N^n.$$

Ahora, se sigue que

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\frac{M!}{(M-x)!}\frac{(N-M)!}{(N-M-n+x)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

$$\cong \binom{n}{x} \frac{M^x (N-M)^{n-x}}{N^n}.$$

Si se define $p = \frac{M}{N}$, entonces

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} .$$

Esta es la f.p. binomial.

Ejercicio 4.3. En un almacén se tienen 10 impresoras de las cuales cuatro son defectuosas. Una compañía selecciona cinco de las máquinas al azar, suponiendo que todas funcionan bien. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco máquinas no sean defectuosas?

4.3. Distribución de Poisson

Otra distribución discreta de mucha importancia es la distribución de Poisson que tiene la función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}}{x!} \lambda^x, & si \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta distribución aparece en situaciones tales como el número de llegadas de clientes en una línea de espera, el número de errores tipográficos en un libro, o el número de accidentes de tránsito en un crucero particular.

Por otro lado, la distribución de Poisson puede obtenerse mediante un proceso límite de la binomial. Para tal efecto fijemos una situación particular, supongamos que es de interés encontrar la distribución de una v.a. *X* que mide el número de accidentes automovilísticos en un crucero particular, en un periodo de tiempo determinado, digamos de una semana. El periodo de tiempo lo podemos dividir en n pequeños subintervalos, tales que en uno de ellos pueda ocurrir a lo más un accidente, y asumamos además que la incidencia de accidentes puede considerarse independiente de intervalo a intervalo. Observemos que a medida que aumenta el número de subintervalos, la probabilidad de que ocurra un accidente en un subintervalo disminuye, es decir, la probabilidad es inversamente proporcional a la longitud de los subintervalos. De esta manera, si λ es la constante de proporcionalidad, entonces tal probabilidad está dada por $p = \lambda/n$.

Por lo tanto, considerando la independencia de los eventos, podemos encontrar la distribución de X, a partir de la binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Para obtener la mejor aproximación debemos tomar a n suficientemente grande, así resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X = k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Ésta es la distribución de Poisson.

Para demostrar que $f(x)$ es una función de probabilidad, hay que demostrar que $f(x) \geq 0$ para toda x y que

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1.$$

Claramente $f(x) \geq 0$ y

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Ya que, $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ es el desarrollo en serie de Taylor para e^{λ}, se sigue que

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 .$$

Ejemplo 4.3. Si en un estado se observan uno o más huracanes por año con probabilidad de 0.01, ¿Cuál es la probabilidad de observar dos o más huracanes en un año particular?

Solución.

Se supone que

$$P(X \geq 1) = 0.01.$$

Entonces por el modelo de Poisson,

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} = 1 - P(X \geq 1) = 0.99 .$$

Despejando λ, se obtiene

$$\lambda \approx 0.01005.$$

Luego

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-0.01005}(0.01005)^x}{x!}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-0.01005}(0.01005)^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{-0.01005}(1 + 0.01005)$$

$$= 1\text{-}0.99995$$

$$=0.00005.$$

◊

El siguiente teorema permite obtener la función generadora de momentos de una v.a. con distribución de Poisson.

Teorema 4.2. La función generadora de momentos de una variable aleatoria con una distribución Poisson con parámetro λ es

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Demostración.

Por definición de la función generadora de momentos,

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}.$$

Puesto que el desarrollo en serie de Taylor para $e^{\lambda e^t}$ es

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{t}\right)^{x}}{x!},$$

se sigue que

$$M(t)=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{t}}=e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}.$$

◊

Así, se puede usar la función generadora de momentos, para obtener la media y la varianza de X. Derivando $M(t)$ dos veces con respecto a t, se obtienen las ecuaciones

$$M'(t)=\lambda e^{t}e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)},$$

$$M''(t)=\left(\lambda e^{t}\right)^{2}e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}+\lambda e^{t}e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}.$$

Haciendo t=0, en las dos ecuaciones, se obtienen los primeros dos momentos

$$\mu=E(X)=M'(0)=\lambda,$$
$$E\left(X^{2}\right)=M''(0)=\lambda^{2}+\lambda.$$

Ya que la varianza está dada por la ecuación

$$\sigma^{2}=E\left(X^{2}\right)-\mu^{2}$$

se sigue que

$$\sigma^{2}=\left(\lambda^{2}+\lambda\right)-\lambda^{2}=\lambda.$$

Ejemplo 4.4. Si la probabilidad de contraer la influenza es 0.001 para los niños de la primaria, ¿cuál es la probabilidad de que dos o más alumnos de una clase de 30 alumnos contraigan la influenza?

Solución.

Para hacer una comparación entre la distribución binomial y la de Poisson, se hará el análisis por las dos distribuciones.
Por la distribución Binomial tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{30}{x} (0.001)^x (0.999)^{30-x}$$

$$=1-0.97043-0.02914$$
$$=0.00043.$$

Por la distribución de Poisson tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-0.03}\, 0.03^x}{x!}$$

$$=1-0.97045(1+0.03)$$

$$=0.00044.$$

◊

Teorema 4.3. Si las variables aleatorias independientes X_i siguen una distribución de Poisson con parámetros m_i para $i = 1,\ 2,\ \ldots, n$, entonces la variable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Demostración.

Se puede obtener la distribución de Y usando el método de la función generadora de momentos. Así, resulta que

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t\sum X_i}\right).$$

Por el supuesto de la independencia,

$$E\left(e^{t\sum X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right).$$

Este resultado es una extensión del teorema 3.2. Entonces, se sigue que

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{m_i\left(e^t - 1\right)} = e^{\sum m_i\left(e^t - 1\right)}.$$

Esta es la función generadora de momentos de una distribución de Poisson con parámetro $m = \sum m_i$.

◊

4.4. Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa se usa para representar el número de fracasos antes del k-ésimo éxito y como una alternativa a la distribución de Poisson cuando la varianza es mayor que la media. La función de probabilidad de la binomial negativa está dada por

$$f(x) = \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Cuando $k = 1$, se obtiene la función de probabilidad geométrica dada por

$$f(x) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

La distribución geométrica surge en situaciones parecidas al experimento binomial, es decir, se realiza una sucesión de ensayos independientes del tipo de Bernoulli, pero ahora la variable aleatoria X es el número de fracasos antes del primer éxito. Así, los valores que puede tomar X son 0,1, 2, 3,... observemos que el número no está acotado superiormente. El espacio muestral se puede representar como:

S={1, 01, 001, 0001,...}, donde 1 representa éxito y 0 fracaso.

Para obtener la distribución de X, consideremos un valor de X arbitrario, digamos k, entonces tenemos que encontrar la probabilidad de que ocurra el evento {0, 0,...,0, 1} en donde hay k ceros. Por la independencia, esta probabilidad es el producto

$$P(X = k) = (1-p)(1-p)\ldots(1-p)p,$$

donde p es la probabilidad de éxito y k puede tomar los valores 1, 2, 3,.... Resumiendo, la función de probabilidad de una variable aleatoria geométrica X es

$$P(X = k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

La distribución binomial negativa es simplemente una generalización de la distribución geométrica.

Teorema 4.4. La función generadora de momentos de la distribución binomial negativa está dada por

$$M(t) = p^k\left[1-(1-p)e^t\right]^{-k}.$$

Demostración.

Por la definición de la función generadora de momentos

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\binom{x+k-1}{x}p^k(1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{x}p^k\left[(1-p)e^t\right]^x.$$

Aplicando el teorema del binomio para exponentes negativos, se obtiene

$$M(t) = p^k\left[1-(1-p)e^t\right]^{-k}.$$

◊

Corolario 4.1. La función generadora de momentos de la distribución geométrica está dada por

$$M(t) = p\left[1-(1-p)e^t\right]^{-1}.$$

Los primeros dos momentos de la distribución binomial negativa se pueden obtener derivando la función generadora de momentos dos veces, y luego haciendo $t = 0$. De esta manera se obtienen:

$$E(X) = \frac{k(1-p)}{p}$$

y

$$E\left(X^2\right) = \frac{k(k+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{k(1-p)}{p}.$$

Ahora, se sigue que

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

Nótese que la distribución binomial negativa, tiene varianza mayor que su media.

Se puede demostrar que cuando k es grande y p está cerca a 1, entonces la distribución binomial negativa se aproxima a una distribución de Poisson. Esto se puede demostrar usando la función generadora de momentos. Para esto, consideremos constante

$$\mu = \frac{k(1-p)}{p}.$$

Entonces se puede expresar p en términos de μ y k. Esto es,

$$p = \left(1 + \frac{\mu}{k}\right)^{-1}.$$

Sustituyendo en la expresión para la función generadora de momentos, se obtiene

$$M_k(t) = \left[1 - \frac{\mu(e^t - 1)}{k}\right]^{-k}.$$

Ahora, tomando el límite cuando k tiende al infinito, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} M_k(t) = \lim_{k\to\infty}\left[1 - \frac{\mu(e^t - 1)}{k}\right]^{-k} = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

La cual resulta ser la función generadora de momentos de la distribución de Poisson.

Ejemplo 4.5. En hidrología se dice que una observación y es un valor extremo si y es mayor o igual que un cierto nivel y_T. El intervalo de recurrencia R es el tiempo hasta la ocurrencia del próximo evento extremo. El periodo de retorno T del evento $Y \geq y_T$ se define como $E(R)$. Es conveniente tratar el tiempo como una variable aleatoria discreta. Se puede definir un éxito por la ocurrencia del evento $Y \geq y_T$ y un fracaso para $Y < y_T$, en una unidad de tiempo. Si los datos son anuales, entonces R es el número de años hasta que ocurre el evento extremo. Encuentre la función de probabilidad de R y determine una fórmula para el periodo de retorno T.

Solución.

Sea X el número de fracasos antes del primer éxito, esto es, X es el número de periodos de tiempo antes de observar un valor extremo. Entonces X sigue una distribución geométrica con parámetro p, donde p es la probabilidad de observar el valor extremo en un periodo de tiempo. Se sigue que $R = X + 1$. Entonces

$$g(r) = p(1-p)^{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Como ya se demostró que $E(X) = \dfrac{1-p}{p}$, entonces

$$T = E(R) = E(X) + 1 = \frac{1}{p}.$$

◊

Una generalización de la binomial negativa se obtiene, utilizando la función gamma, denotada por, $\Gamma(k)$, y definida como

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx .$$

En el apéndice F se muestra valores de la función gamma para k entre 1 y 2. Una propiedad de la función anterior, $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$, es útil para obtener otros valores de la función gamma. Así, la función binomial negativa toma la forma

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x!\Gamma(k)} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Utilizando esta forma de la binomial negativa se pueden modelar datos de grupos heterogéneos. Por ejemplo, se puede suponer que el número de accidentes por persona en cierto periodo de tiempo tiene una distribución de Poisson. En una población la tasa de accidentes varía de persona a persona. Si la variación es poca, la distribución de Poisson hace un buen ajuste a los datos. Sin embargo, si las tasas de accidentes varían mucho, una muestra de la población no estaría acorde a una muestra de una distribución de Poisson. En este caso, la distribución binomial negativa generalmente hace un mejor ajuste a los datos.

Ejemplo 4.6. Un entrenador de un equipo de béisbol tiene una lista del número de triples pegados por cada uno de los bateadores de la Liga Americana, en la temporada anterior. Después de un análisis de los datos, él determina que el número de triples por jugador sigue una distribución binomial negativa con parámetros $k = 0.6$ y $p = 0.3$. ¿Qué proporción de los jugadores debe tener por lo menos 4 triples?

Solución.

Para este problema, la binomial negativa se define como

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+0.6)}{x!\Gamma(0.6)} (0.3)^{0.6} (0.7)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Entonces

$$f(0)=(0.3)^{0.6}=0.4856,$$

$$f(1)=\frac{\Gamma(1.6)}{1!\Gamma(0.6)}(0.3)^{0.6}(0.7)=(0.6)(0.3)^{0.6}(0.7)=0.2039,$$

$$f(2)=\frac{\Gamma(2.6)}{2!\Gamma(0.6)}(0.3)^{0.6}(0.7)^2=\frac{(1.6)(0.6)}{2}(0.3)^{0.6}(0.7)^2=0.1142,$$

$$f(3)=\frac{\Gamma(3.6)}{3!\Gamma(0.6)}(0.3)^{0.6}(0.7)^3=\frac{(2.6)(1.6)(0.6)}{6}(0.3)^{0.6}(0.7)^3=0.0693.$$

Ahora,

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)=1-0.4856-0.2039-0.1142-0.0693=0.1270.$$

4.5. Distribución beta-binomial

La distribución beta-binomial tiene la siguiente función de probabilidad,

$$f(x)=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)},\ \ x=0,1,\ldots,n.$$

Una manera de deducirla puede ser como sigue: supongamos que se tiene una caja con n pelotas azules y $\alpha + \beta - 1$ verdes. Si se sacan pelotas sin reemplazo de la caja hasta obtener α pelotas verdes, la probabilidad de sacar x pelotas azules está dado por

$$P(X=x)=\binom{x+\alpha-1}{x}\frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\cdots(\beta)(n)(n-1)\cdots(n-x+1)}{(n+\alpha+\beta-1)(n+\alpha+\beta-2)\cdots(n+\beta-x)}$$

$$=\frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\Gamma(\alpha)}\frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\dfrac{n!}{(n-x)!}}{\dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\beta-x)}}$$

$$=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

La media y la varianza se pueden obtener usando los momentos factoriales como se hizo en la sección 4.2 para la distribución hipergeométrica. Sin embargo, de la definición de media, se sigue que

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}x\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

$$=n\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

Se puede hacer el cambio de variable $y = x - 1$ para obtener

$$E(X)=n\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(y+\alpha+1)\Gamma(n+\beta-y-1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

La suma en el lado derecho es igual a uno, ya que es la suma sobre todos los valores de una función de probabilidad beta-binomial con parámetros $n-1$, $\alpha+1$, y β. Así, resulta que

$$E(X)=\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

El segundo momento factorial se puede obtener de la misma manera. Por definición, se tiene

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

$$=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{(n)(n-1)(\alpha)(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

Ahora, se puede hacer el cambio de variable $y = x - 2$ para obtener

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\frac{(n)(n-1)(\alpha)(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$
$$\sum_{y=0}^{n-2}\binom{n-2}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(y+\alpha+2)\Gamma(n+\beta-y-2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

La suma en el lado derecho toma el valor 1, debido a que es la suma sobre todos los valores de una función de probabilidad beta-binomial con parámetros $n-2$, $\alpha+2$, y β. Por lo tanto,

$$E[X(X-1)]=\frac{n(n-1)(\alpha)(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Ahora,

$$E\left(X^2\right)=E[X(X-1)]+E(X)=\frac{n(n-1)(\alpha)(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}+\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Siendo que $V(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)$, se sigue que

$$V(X)=\frac{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Como un caso especial, una distribución beta-binomial con $\alpha = \beta = 1$, se llama distribución uniforme discreta, y su función de probabilidad es de la forma

$$f(x)=\frac{1}{n+1},\ \ x=0,1,2,...,n.$$

Ejemplo 4.7. Se tiene una caja con 10 pelotas azules y 8 verdes. Se sacan pelotas al azar y sin reemplazo de la caja hasta obtener 5 pelotas verdes. Encuentre la probabilidad de sacar por lo menos 3 pelotas azules.

Solución.

Del anunciado, se tiene $n = 10$, $\alpha+\beta-1=8$, y $\alpha=5$ y por lo tanto $\beta=4$. Entonces la función de probabilidad está dada por

$$f(x)=\binom{10}{x}\frac{\Gamma(9)\Gamma(x+5)\Gamma(14-x)}{\Gamma(5)\Gamma(4)\Gamma(19)},\quad x=0,1,\ldots,10.$$

Para hacer el análisis con una calculadora, es conveniente escribir la función como

$$f(x)=\frac{\binom{x+4}{x}\binom{13-x}{10-x}}{\binom{18}{8}}.$$

Se sigue que

$$P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-\frac{\binom{4}{0}\binom{13}{10}}{\binom{18}{8}}-\frac{\binom{5}{1}\binom{12}{9}}{\binom{18}{8}}-\frac{\binom{6}{2}\binom{11}{8}}{\binom{18}{8}}=0.912.$$

◊

4.6. La distribución de series logarítmica

La distribución de series logarítmica ha sido usada para representar: el número de especies por género, el número de género por sub-familia, el número de parásitos por sujeto, y el número de artículos escritos por biólogo en un año particular (Pollard, 1977).

La función de probabilidad de series logarítmica está dada por

$$f(x)=[-\ln(1-\alpha)]^{-1}\frac{\alpha^{x}}{x},\ \ x=1,2,3,....$$

Teorema 4.5. La función generadora de momentos de la distribución de series logarítmica está dada por

$$M(t)=[-\ln(1-\alpha)]^{-1}\left[-\ln\left(1-\alpha e^{t}\right)\right].$$

Demostración.

Por la definición de la función generadora de momentos

$$M(t)=\sum_{x=1}^{\infty}\left[-\ln(1-\alpha)\right]^{-1}\frac{\left(\alpha e^{t}\right)^{x}}{x}$$

$$=\left[-\ln(1-\alpha)\right]^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\left(\alpha e^{t}\right)^{x}}{x}$$

$$=\left[-\ln(1-\alpha)\right]^{-1}\left[-\ln\left(1-\alpha e^{t}\right)\right].$$

◊

Usando la función generadora de momentos, se puede demostrar que la media y la varianza de la distribución de series logarítmica están dadas por

$$\mu=\left[-\ln(1-\alpha)\right]^{-1}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

y

$$\sigma^{2}=\frac{\mu}{1-\alpha}-\mu^{2}.$$

Cuando el parámetro k de la distribución binomial negativa es pequeño, la probabilidad condicional de X dado que no es igual a cero, se aproxima a la función de probabilidad de las series logarítmica. Esto es,

$$P(X=x|X\geq 1)=\frac{\binom{k+x-1}{x}p^{k}(1-p)^{x}}{\sum_{x=1}^{\infty}\binom{k+x-1}{x}p^{k}(1-p)^{x}}.$$

Puesto que

$$\frac{\Gamma(k+x)}{x!\Gamma(k)} = \frac{k}{x}\frac{(1+k)(2+k)\cdots(x-2+k)(x-1+k)}{(1)(2)\cdots(x-2)(x-1)} \cong \frac{k}{x},$$

se sigue que

$$P(X = x | X \geq 1) \cong \frac{\frac{(1-p)^x}{x}}{\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(1-p)^x}{x}} = [-\ln(p)]^{-1}\frac{(1-p)^x}{x}.$$

Se puede ver que esta es la función de probabilidad de series logarítmica.

Ejemplo 4.8. Un entrenador de un equipo de las grandes ligas tiene una lista de todos los lanzadores quienes lanzaron por lo menos un juego completo sin permitir una carrera. Él hace un análisis de los datos y determina que el número de juegos completos sin permitir carrera para cada uno de ellos sigue una distribución de series logarítmica con $\alpha = 0.38$. Bajo este modelo, ¿qué proporción de los jugadores lanzaron por lo menos 3 juegos completos sin permitir una carrera?

Solución.

Para $\alpha = 0.38$, la función de probabilidad de serie logarítmica está dada por

$$f(x) = \frac{(0.38)^x}{0.478x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

entonces

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.7949 - 0.1510 = 0.0541.$$

◊

Ejemplo 4.9. Un biólogo atrapó un gran número de especies de polillas. Él determina que el número de polillas por especie puede ser representado por una distribución de series logarítmica con $\alpha = 0.99$. Bajo este modelo, ¿qué proporción de las especies en la muestra tienen menos de ocho especímenes?

Solución.

Cuando $\alpha = 0.99$, la función de probabilidad de series logarítmica puede ser representada como

$$f(x) = \frac{(0.99)^x}{4.605x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

Entonces

$$P(X \le 7) = 0.2150 + 0.1064 + 0.0702 + 0.0521$$
$$+0.0413 + 0.0341 + 0.0289 = 0.5480\,.$$

◊

4.7. La distribución multinomial

La función de probabilidad multinomial está definida por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}) = \frac{N!}{x_1!x_2!\ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_I^{x_I} \,,$$

donde $\sum_{i=1}^{I} x_i = N$ y $\sum_{i=1}^{I} p_i = 1$.

Es común suponer una función de probabilidad multinomial para las observaciones de una tabla de contingencia. La función de probabilidad puede ocurrir de la siguiente manera. Supongamos que se asignan pelotas al azar a I cajas con probabilidades $p_1, p_2, ..., p_I$, respectivamente. Sea x_i el número de pelotas asignado a la caja i-ésima. La probabilidad de asignar x_1 pelotas a la caja 1, luego x_2 pelotas a caja 2 y así sucesivamente hasta x_I pelotas a la caja I es $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_I^{x_I}$. Este no es el único orden posible de asignar las pelotas. El número de maneras de asignar las pelotas es

$$\binom{N}{x_1}\binom{N-x_1}{x_2}\cdots\binom{N-x_1-\ldots-x_{I-1}}{x_I} = \frac{N!}{x_1!\,x_2!\ldots x_I!}.$$

Entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}) = \frac{N!}{x_1!x_2!\ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_I^{x_I}.$$

Otra manera de obtener la función de probabilidad multinomial es como una función de probabilidad condicional como se muestra en el teorema 4.6.

Teorema 4.6. Si $X_1, X_2, ..., X_I$ son variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $m_1, m_2, ..., m_I$ respectivamente, entonces la probabilidad condicional $X_1, X_2, \ldots, X_I$ dado $\sum_{i=1}^{I} X_i$ tiene una función de probabilidad multinomial.

Demostración.

Suponiendo que $X_1, X_2, ..., X_I$ son variables aleatorias independientes de Poisson, se sigue que

$$P\left(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, ..., X_I = x_I \,\middle|\, X_1 + X_2 + \ldots + X_I = \sum_{i=1}^{I} x_i \right)$$

$$= \frac{P\left(X_1 = x_1\right) P\left(X_2 = x_2\right) \cdots P\left(X_I = x_I\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{I} X_i = \sum_{i=1}^{I} x_i \right)}.$$

Esta probabilidad condicional es una función de x_1, x_2,...,x_I y puede representarse por la función de probabilidad $f(x_1, x_2, ..., x_{I-1})$. Por el teorema 4.3, se sabe que $\sum_{i=1}^{I} X_i$ es Poisson con parámetro $\sum_{i=1}^{I} m_i$. Entonces

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{I-1}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{I} e^{-m_i} m_i^{x_i} \big/ x_i!}{e^{-\sum_{i=1}^{I} m_i} \left(\sum_{i=1}^{I} m_i \right)^{\sum_{i=1}^{I} x_i} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{I} x_i \right)!}$$

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_{I-1}\right) = \frac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} \left(\frac{m_1}{N}\right)^{x_1} \left(\frac{m_2}{N}\right)^{x_2} \cdots \left(\frac{m_I}{N}\right)^{x_I}.$$

Esta es la función de probabilidad multinomial con $p_i = m_i/N$ para $i = 1, 2, ..., I$. ◊

En el teorema 4.7, se da la función generadora de momentos de la distribución multinomial. La función generadora de momentos es útil no solamente para obtener los momentos para la función de probabilidad multinomial, sino también para obtener las funciones de probabilidad marginales.

Teorema 4.7. La función generadora de momentos de la distribución multinomial está dada por

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_{I-1}) = \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{I-1} e^{t_{I-1}} + p_I\right)^N.$$

Demostración.

Por la definición de una función generadora de momentos

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_{I-1}) = E\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_{I-1} X_{I-1}}\right)$$

$$= \sum_{x_{I-1}} \cdots \sum_{x_2} \sum_{x_1} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{I-1} x_{I-1}} \frac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_I^{x_I}$$

$$= \sum_{x_{I-1}} \cdots \sum_{x_2} \sum_{x_1} \frac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} \left(p_1 e^{t_1}\right)^{x_1} \left(p_2 e^{t_2}\right)^{x_2} \cdots \left(p_{I-1} e^{t_{I-1}}\right)^{x_{I-1}} p_I^{x_I}$$

$$= \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{I-1} e^{t_{I-1}} + p_I\right)^N.$$

◊

Se puede obtener la función de probabilidad marginal de X_k considerando $M(0, \ldots, 0, t_k, 0, \ldots, 0)$. Como

$$M_k(t) = M(0, \ldots, 0, t_k, 0, \ldots, 0)$$

$$= \left(p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k e^{t_k} + p_{k+1} + \ldots + p_I\right)^N$$

$$= \left[p_k e^{t_k} + (1 - p_k)\right]^N$$

es la función generadora de momentos de una distribución binomial con parámetros p_k y N, se sigue que

$$f_k(x_k) = \binom{N}{x_k} p_k (1 - p_k)^{N - x_k}, \quad x_k = 0, 1, \ldots, N.$$

En consecuencia,

$$E(X_k) = Np_k \text{ y } \mathrm{Var}(X_k) = Np_k(1 - p_k).$$

Se puede obtener la correlación entre X_i y X_j ($i \neq j$) usando la función generadora de momentos de la multinomial. Primero, hay que encontrar $E(X_i X_j)$. Se sabe que

$$\left.\frac{\partial^2 M}{\partial t_i \partial t_j}\right|_{t_i = t_j = 0} = E(X_i X_j).$$

Puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial t_i} = N\left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{I-1} e^{t_{I-1}} + p_I\right)^{N-1} p_i e^{t_i}$$

y

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t_i \partial t_j} = N(N-1)\left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{I-1} e^{t_{I-1}} + p_I\right)^{N-2} p_i e^{t_i} p_j e^{t_j},$$

se sigue que

$$E(X_i X_j) = N(N-1) p_i p_j.$$

Se puede obtener la covarianza entre X_i y X_j por la relación

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j.$$

Se sigue que

$$\operatorname{Cov}\left(X_i,\ X_j\right) = N\left(N-1\right) p_i p_j - \left(Np_i\right)\left(Np_j\right) = -Np_i p_j.$$

Ahora, la correlación entre X_i y X_j está dada por

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X_i\right)\operatorname{Var}\left(X_j\right)}}$$

$$= \frac{-Np_i p_j}{\sqrt{Np_i\left(1-p_i\right)Np_j\left(1-p_j\right)}}$$

$$= -\sqrt{\frac{p_i p_j}{\left(1-p_i\right)\left(1-p_j\right)}}\,.$$

Se demostró que si X_1, X_2,...,X_I, son variables aleatorias de una distribución multinomial con parámetros N, p_1, p_2, ..., p_{I-1}, entonces la función de probabilidad marginal es binomial con parámetros N y p_i. También, se puede usar el mismo procedimiento que se usó antes para definir una función de probabilidad marginal de dos o más variables. Por ejemplo, consideramos la función de probabilidad marginal de X_1 y X_2. La función generadora de la multinomial es

$$M\left(t_1, t_2, \ldots, t_{I-1}\right) = \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{I-1} e^{t_{I-1}} + p_I\right)^N.$$

La función generadora de momentos de X_1 y X_2 es

$$M_{12}\left(t_1,\ t_2\right) = M\left(t_1, t_2, 0, \ldots, 0\right)$$

$$= \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 \ldots + p_I\right)^N$$

$$= \left[p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + (1 - p_1 - p_2) \right]^N .$$

Esta es la función generadora de momentos de una función de probabilidad trinomial. Entonces

$$f_{12}(x_1, x_2) = \frac{N!}{x_1! x_2! (N - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{N - x_1 - x_2} .$$

Ahora, consideremos la función de probabilidad condicional de $X_2,....,X_{I-1}$ dado que $X_1 = x_1$. Por la definición de una función de probabilidad condicional

$$f(x_2, \ldots, x_{I-1} | x_1) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{I-1})}{f_1(x_1)} .$$

Entonces

$$f(x_2, \ldots, x_{I-1} | x_1) = \frac{\dfrac{N!}{x_1! x_2! \ldots x_I!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_I^{x_I}}{\dfrac{N!}{x_1! (N - x_1)!} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{N - x_1}}$$

$$= \frac{(N - x_1)!}{x_2! x_3! \ldots x_I!} \left(\frac{p_2}{1 - p_1} \right)^{x_2} \left(\frac{p_3}{1 - p_1} \right)^{x_3} \cdots \left(\frac{p_I}{1 - p_1} \right)^{x_I} .$$

Esta es una función de probabilidad multinomial con parámetros (N-x_1), p_2/(1-p_1),..., p_I/(1-p_I).

Capítulo 5
Distribuciones continuas

5.1. La distribución uniforme

Esta distribución se usa en la mayoría de los procedimientos para generar variables aleatorias no uniformes. En la actualidad existen varios procedimientos para generar variables aleatorias no uniformes, uno de éstos es el método de la transformación inversa. El método consiste en definir transformaciones de una o más variables uniformes para generar variables de diferentes distribuciones, tales como la normal, la exponencial, la Weibull, la Gumbel, entre otras.

La función de densidad uniforme en el intervalo (α, β) se define como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, \text{ en cualquier otro punto.} & \end{cases}$$

Dada una variable aleatoria absolutamente continua *X*, la distribución uniforme puede obtenerse como una aproximación a la probabilidad condicional de $\{X \leq x\}$ dado que *X* se encuentra en el intervalo (α, β), $\alpha < x < \beta$. Sea *G*(*x*) la distribución de *X*, luego

$$P(X \leq x | \alpha < X < \beta) = \frac{G(x) - G(\alpha)}{G(\beta) - G(\alpha)}.$$

Si el intervalo (α, β) es suficientemente pequeño, entonces *G(x)* se puede aproximar usando un desarrollo en serie de Taylor alrededor del valor $x = \alpha$. Esto es, si *g* es la f.d.p de *X*, entonces

$$P\left(X \le x \middle| \alpha < X < \beta\right) \cong \frac{\left[G(\alpha) + g(\alpha)(x-\alpha)\right] - G(\alpha)}{\left[G(\alpha) + g(\alpha)(\beta-\alpha)\right] - G(\alpha)}$$
$$= \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Esta última expresión es la función de distribución acumulativa de la uniforme.

Ejemplo 5.1. Un autobús llega a una parada entre las 4:55 p.m. y las 5:05 p.m. Encuentre la probabilidad de que el autobús llegue después de las 5:02 p.m.

Solución.

La distribución para el tiempo de llegada es desconocida, pero siendo que el intervalo es corto, parece razonable aproximar la distribución por la uniforme. Se puede tomar a 4:55 p.m. como el tiempo $x = 0$, x medido en minutos. Así, x tiene una distribución uniforme en (0, 10). Por lo tanto, la probabilidad de que el autobús llegue después de las 5:02 p.m. estará dada por

$$P(X > 7) = \int_{7}^{10} \tfrac{1}{10}\, dx = \tfrac{3}{10}.$$

◊

Los momentos de la distribución uniforme, se obtienen directamente de la definición. Así resulta,

$$E\left(X^r\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^r}{\beta-\alpha} dx = \left[\frac{x^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)} - \frac{\alpha^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)}.$$

Cuando $r = 1$, se sigue que

$$E(X)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Para $r = 2$, se obtiene

$$E\left(X^2\right)=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}.$$

Ahora, la varianza está dada por

$$\operatorname{Var}(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

5.2. La distribución gamma

La distribución gamma es una de las más importantes en la estadística. La función de densidad gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ está dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{en cualquier otro punto}.\end{cases}$$

Existen algunos casos particulares de la densidad gamma que son importantes en las aplicaciones, por ejemplo, si $\alpha = 1$, a la densidad resultante se le llama densidad exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y es de la forma

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{en otro punto.}\end{cases}$$

En general, si el parámetro α es entero, entonces a la distribución gamma también se le llama distribución de Erlang y su función de densidad de probabilidad tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{en cualquier otro punto}.\end{cases}$$

Otro caso especial de la distribución gamma se obtiene si hacemos $\lambda = 1/2$ y α=n/2, donde n es un entero positivo. En este caso la densidad que resulta tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n/2)-1}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & \text{en otro casos}\end{cases}$$

y se dice que X tiene una distribución ji-cuadrada con n grados de libertad, muy útil para construir estadísticos de prueba y se denota por $X \sim \chi_n^2$.

Algunas de las aplicaciones de la distribución gamma, surgen en los estudios de confiabilidad, y en los estudios para medir el tiempo entre accidentes. Esta última aplicación se basa en la relación entre la distribución de Poisson y la gamma, como se muestra a continuación.

Supongamos que Y tiene una distribución de Poisson con parámetro μ, dada por

$$g(y)=\frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}, \quad y=0,1,2....$$

La probabilidad de que Y sea menor a k, está dada por

$$P(Y < k) = \sum_{y=0}^{k-1} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} .$$

Se puede demostrar que

$$\sum_{y=0}^{k-1} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^{k-1} e^{-x}}{(k-1)!} dx$$

$$= \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^{k-1} e^{-x}}{\Gamma(k)} dx ,$$

donde

$$\Gamma(k) = \int_{0}^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx ,$$

es la función gamma. Entonces

$$P(Y < k) = P(X > \mu),$$

donde X se distribuye como una distribución gamma con $\alpha = k$ y $\lambda = 1$.

En los estudios de los accidentes de tránsito, se supone que los accidentes en un periodo de tiempo [0, t], siguen una distribución de Poisson con parámetro λt, entonces del resultado del párrafo anterior, se sigue que el tiempo entre accidentes es exponencial y el tiempo hasta el k-ésimo accidente es gamma.

Otra aplicación de la distribución exponencial es en la hidrología. Se puede usar la exponencial para representar el tiempo entre eventos hidrológicos como la lluvia.

Ejemplo 5.2. El número de días entre lluvias en cierta estación meteorológica sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.25$. Encuentre la probabilidad de que después de llover pasen más de 12 días para la próxima lluvia.

Solución.

La función de densidad exponencial está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro punto.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la probabilidad de interés se puede calcular usando la función de densidad o la función de distribución, la cual está dada por $F(x) = 1 - e^{-x/4}$, x >0. Entonces

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = e^{-3} \cong 0.05\,.$$

◊

Los momentos de la distribución gamma se pueden obtener con base en la función generadora de momentos, dada en el siguiente teorema.

Teorema 5.1. La función generadora de momentos para la distribución gamma está dada por

$$M(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}\,.$$

Demostración.

Por definición

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda-t)^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx\,, \;\; t \neq \lambda.$$

$$= \left(1 - \frac{\text{t}}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \quad t < \lambda.$$

◊

Si se deriva la función generadora de momentos dos veces se obtienen

$$M'(t) = -\alpha\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha-1}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

y

$$M''(t) = (-\alpha-1)(-\alpha)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha-2}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{2}.$$

Haciendo $t = 0$ en las dos ecuaciones, se obtienen

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

y

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Por lo tanto, se sigue que la varianza de la distribución gamma está dada por

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Estos resultados se pueden usar para obtener la media, la varianza y la f.g.m. de las distribuciones particulares de la Gamma, ver tabla 1.

Tabla 1. Media, varianza y f.g.m de algunas distribuciones particulares de la Gamma.

Distribución	Caso particular	$E(X)$	Var(X)	$M_X(t)$
	X~Gamma(α, λ)	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$
X~Exp(λ)	X~Gamma(1, λ)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-1}$
X~Erlang(n, λ)	X~Gamma(n, λ)	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-n}$
$X\sim\chi^2_n$	X~Gamma($\frac{n}{2}, \frac{1}{2}$)	n	$2n$	$(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

Si queremos calcular probabilidades usando la distribución gamma, es necesario utilizar integración numérica. Esté procedimiento puede ser un poco tedioso, sin embargo, a veces se puede hacer una transformación a la distribución ji-cuadrada, y después usar las tablas de esta última para calcular la probabilidad deseada. Por ejemplo, si X~Gamma(n, λ), entonces $Y = 2\lambda X \sim \chi^2_{2n}$.

Ejemplo 5.3. Sea X una variable aleatoria de una distribución gamma con parámetros $\alpha = 3$ y $\lambda = 6.3$. Hállese $P(X \le 1)$.

Solución.

Se sigue que

$$P(X \le 1) = P(2\lambda X \le 2\lambda) = P(Y \le 12.6) = 1 - P(Y \ge 12.6) = 1 - p,$$

donde Y tiene una distribución ji-cuadrada con 6 grados de libertad. En la tabla de la distribución ji-cuadrada, hay que encontrar la probabilidad

$$p = P\left(Y \geq \chi^2_{1-p,6}\right) \text{ tal que } \chi^2_{1-p,6} = 12.6.$$

Resultando este valor, $p = 0.05$, y así

$$P(X \leq 1) = P(Y \leq 12.6) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

◊

Debido a la relación entre la distribución gamma y la distribución de Poisson, también se pueden usar las tablas de la distribución gamma para obtener algunos valores de la distribución de Poisson. Por ejemplo, Si X ~Poisson(μ), entonces

$$P(X < k) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)} s^{k-1} e^{-s} ds.$$

Haciendo $y = 2s$, resulta

$$P(X < k) = \int_{2\mu}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k) 2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy = 1 - F_{2k}(2\mu),$$

donde $F_{2k}(x)$ representa la función de distribución acumulativa de la χ^2_{2k}.

Ejemplo 5.4. Sea X una variable aleatoria de una distribución de Poisson con media 5. Usar la distribución ji-cuadrada para obtener la probabilidad de que X sea a lo más 4.

Solución.

Siendo que

$$P(X \leq 4) = P(X < 5) = 1 - F_{10}(2 \times 5) = 1 - F_{10}(10).$$

Hay que encontrar la probabilidad de observar un valor de la ji-cuadrada con 10 grados de libertad que es menor o igual a 10. Este valor no se encuentra en la tabla, por lo tanto, hay que interpolar. Siendo que $F_{10}(9.342) = 0.50$ y $F_{10}(10.473) = 0.60$, una interpolación lineal da el valor $F_{10}(10) = 0.5582$. Por consiguiente, $P(X \leq 4) \cong 0.4418$. Si se usa la distribución de Poisson para calcular esta probabilidad, entonces se obtiene $P(X \leq 4) = 0.4405$. En teoría, la distribución ji-cuadrada debe dar el valor exacto, pero en la práctica casi siempre hay que interpolar.

◊

5.3. La distribución normal

Probablemente la distribución más importante en la estadística es la distribución normal, tanto en su utilidad práctica como en los resultados teóricos derivados de ella.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, denotada por, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty .$$

En particular, si $X \sim N(0, 1)$, se dice que X tiene una distribución normal estándar.

Para encontrar los momentos de la distribución normal, utilizaremos el siguiente lema presentado en Kreider, Kuller, Ostberg, y Perkins (1966).

Lema 5.1. Sea $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n dx, \ n = 0, 1, \ldots$. Entonces $I_{2n+1} = 0$ y

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}$$

para todo n.

Demostración.

Sean $0 < a < b$, luego

$$I_{2n+1} = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_{-a}^{b} e^{-x^2/2} x^{2n+1} dx .$$

Puesto que $e^{-x^2/2} x^{2n+1}$ es una función impar, se sigue que

$$\int_{-a}^{b} e^{-x^2/2} x^{2n+1} dx = \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2} x^{2n+1} dx + \int_{a}^{b} e^{-x^2/2} x^{2n+1} dx$$

$$= \int_{a}^{b} e^{-x^2/2} x^{2n+1} dx .$$

Integrando por partes se obtiene

$$\int_{a}^{b} x^{2n} \left(x e^{-x^2/2} \right) dx = \left[- x^{2n} e^{-x^2/2} \right]_a^b + 2n \int_{a}^{b} x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx .$$

Se sigue que

$$I_{2n+1} = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \left[- x^{2n} e^{-x^2/2} \right]_a^b + 2n \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx$$

$$= 2n \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx$$

$$= 2n \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \left[\int_{-a}^{a} x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx + \int_a^b x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx \right]$$

$$= 2n \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_{-a}^{b} x^{2n-1} e^{-x^2/2} dx = 2nI_{2n-1} \quad \text{para todo } n > 0 .$$

Para I_1 se tiene

$$I_1 = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_{-a}^{b} xe^{-x^2/2} dx = \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{-a}^{b} = 0 .$$

Por consiguiente, $I_{2n+1} = 0$ para todo n.

Para obtener una expresión para I_{2n}, es necesario primero obtener I_0. Por definición

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx .$$

Se sigue que

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)/2} dxdy .$$

Ahora, se puede transformar a coordenadas polares tomando

$$x = \rho\cos(\theta)$$
$$y = \rho sen(\theta).$$

El Jacobiano de la transformación está dado por

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho sen(\theta) \\ sen(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$= \rho\cos^2(\theta) + \rho\,\mathrm{sen}^2(\theta) = \rho.$$

En consecuencia,

$$I_0^2 = 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \rho e^{-\rho^2/2} d\theta d\rho = 4\int_0^\infty \frac{\pi}{2} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho = 2\pi\left[-e^{-\rho^2/2}\right]_0^\infty = 2\pi\ .$$

Por lo tanto, $I_0 = \sqrt{2\pi}$. Ahora bien, para $n > 0$, se tiene

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1}\left(xe^{-x^2/2}\right)dx$$

$$= \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \left\{\left[-x^{2n-1}e^{-x^2/2}\right]_{-a}^{b} + (2n-1)\int_{-a}^{b} x^{2n-2}e^{-x^2/2}dx\right\}$$

y por consiguiente

$$I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}\ .$$

Se sigue que

$$I_2 = \sqrt{2\pi}\ ,$$

$$I_4 = (3)(1)\sqrt{2\pi}\ ,$$

$$I_6 = (5)(3)(1)\sqrt{2\pi}\ , \text{ etc.}$$

Para el n-ésimo término

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}\ .$$

◊

Teorema 5.2. Si X es una variable aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces para n = 0, 1, 2,...,

$$E\left[(X-\mu)^{2n+1}\right] = 0$$

y

$$E\left[(X-\mu)^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n}.$$

Demostración.

Si se define $Z = (X-\mu)/\sigma$, entonces se sigue que

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{2n}\right] = E(Z^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} z^n dz = \frac{I_n}{\sqrt{2\pi}}\ .$$

En el lema 5.1, se demostró que para n = 0, 1, 2,...,

$$I_{2n+1} = 0$$

y

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi} .$$

Esto implica que

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{2n+1}\right] = 0$$

y

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

En consecuencia,

$$E\left[(X-\mu)^{2n+1}\right] = 0$$

y

$$E\left[(X-\mu)^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} .$$

◊

También se pueden obtener los momentos de la distribución normal con base a su función generadora de momentos, la cual está dada en el siguiente teorema.

Teorema 5.3. Si la variable aleatoria *X* tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces la función generadora de momentos de *X* está dada por

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Demostración.

Por definición

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 tx\right)/2\sigma^2} dx.$$

Completando el cuadrado, se obtiene

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\left(x-\mu-\sigma^2 t\right)^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2\right]/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(x-\mu-\sigma^2 t\right)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Para calcular probabilidades de una distribución normal, se requiere integración numérica, ya que no existe una forma explícita para la función de distribución normal en general. Sin embargo, se han hecho tablas de la distribución normal estándar, la cual tiene media 0 y varianza 1. En la práctica, lo que se hace es transformar la variable normal general a una variable normal estándar. Esto permite el uso de las tablas de la normal estándar para calcular las probabilidades de una distribución normal en general. Por ejemplo, se puede demostrar que si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces $Z = (X - \mu)/\sigma$ tiene una distribución normal estándar.

Ejemplo 5.5. Sea X una variable aleatoria de la distribución normal que tiene media $\mu = 5$ y varianza $\sigma^2 = 4$. Hállese la probabilidad $P(X \leq 4)$.

Solución.

$$P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq -\tfrac{1}{2}\right) = \Phi\left(-\tfrac{1}{2}\right),$$

donde Φ representa la distribución normal estándar. Por la simetría de la distribución normal

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Por lo tanto,

$$P(X \leq 4) = 1 - \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - 0.691 = 0.309\,.$$

◊

Ejemplo 5.6. La precipitación anual en cierta estación meteorológica sigue aproximadamente una distribución normal con media 100 cm y desviación estándar 23 cm. Encuentre la probabilidad de observar entre 80 y 120 cm de lluvia en el próximo año.

*Solución***.**

$$P(80 \leq X \leq 120) = P\left(-\frac{20}{23} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{20}{23}\right)$$

$$= \Phi(0.87) - \Phi(-0.87)$$

$$= \Phi(0.87) - [1 - \Phi(0.87)] = 0.616\,.$$

◊

Siendo que no existe una expresión explícita para esta distribución, para poder programar la distribución hay que usar algún procedimiento numérico. Una opción es usar la regla de Simpson para la integración numérica. También, se pueden usar las fórmulas de aproximación presentadas en Robert y Casella (1999). Para encontrar $\Phi(z)$, se puede usar la siguiente aproximación:

$$\Phi(z) \cong 1 - \varphi(z)\left[b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\right], \quad z > 0$$

y

$$t = \frac{1}{1 + pz},$$

donde φ es la f.d.p. de una v.a. con distribución normal estándar, p = 0.2316419, b_1 = 0.31938, b_2 = -0.35656, b_3 = 1.78148, b_4 = -1.82125, b_5 = 1.33027. La fórmula es solamente para $z > 0$. Para $z < 0$ se debe usar la propiedad de la simetría, esto es, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Ejemplo 5.7. Encontrar $\Phi(1.7)$ usando la fórmula de aproximación a la normal.

Solución.

Usando la fórmula de aproximación a la normal se obtiene $\Phi(1.7) = 0.95543$. Este es el mismo valor que se obtiene usando la tabla de la normal.

◊

Para encontrar un valor de la función de distribución inversa, se usa la aproximación

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) \cong t - \frac{a_0 + a_1 t}{1 + b_1 t + b_2 t^2}, \quad \alpha \leq 0.5$$

y

$$t^2 = -2\ln(\alpha),$$

donde

$$a_0 = 2.30753,\ a_1 = 0.27061,\ b_1 = 0.99229,\ b_2 = 0.04481.$$

Ejemplo 5.8. Sea Z una variable aleatoria normal estándar. Encuentre el valor de c tal que $P(Z > c) = 0.25$.

Solución.

De la aproximación anterior, se obtiene $c = 0.6717$. El valor correspondiente, no se encuentra en la tabla. Por lo tanto, es necesario interpolar. De la tabla se obtienen los valores $\Phi(0.67) = 0.74857$ y $\Phi(0.68) = 0.75175$. Interpolando entre estos valores, se obtiene $c = \Phi^{-1}(0.75) = 0.67450$.

◊

5.4. La distribución lognormal

Es común obtener observaciones de alguna variable que toma valores positivos, tales como los niveles de concentración de agentes contaminantes del medio ambiente. En estos casos puede resultar que la variable de interés, se observe acorde a una distribución lognormal. Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución lognormal con parámetros $\mu \in \boldsymbol{R}$ y $\sigma^2 > 0$, si su función de densidad es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto}. \end{cases}$$

Esta distribución se obtiene con base en la transformación $X = e^Y$, en donde Y es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2. En efecto, nótese que

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \varphi(\ln x)\left|\frac{d(\ln x)}{dx}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2}\,\frac{1}{x},\ \ x > 0.
\end{aligned}
$$

Además, mediante la transformación inversa se tiene que si X sigue una distribución lognormal, entonces $Y = \ln(X)$ sigue una distribución normal. Esta relación, permite al investigador usar la teoría de la distribución normal para analizar datos de la lognormal. Por ejemplo, en el análisis de datos de agentes contaminantes del medio ambiente, es de interés transformar los datos originales con el objetivo de que éstos tengan un mejor comportamiento en la escala transformada, para luego regresar a la escala original mediante la transformación inversa. Shumway, Azari y Johnson (1989), analizan datos de agentes contaminantes del aire, utilizando una transformación que permite estabilizar la varianza y obtener normalidad.

Los momentos de la distribución lognormal, se obtienen fácilmente usando la relación que existe entre esta distribución y la normal. Esto es,

$$E\left(X^r\right) = E\left(e^{rY}\right) = M(r),$$

en donde $M(r)$ es la función generadora de la distribución normal. Por lo tanto,

$$E\left(X^r\right) = e^{\mu r+\frac{1}{2}\sigma^2 r^2}.$$

En consecuencia,

$$E\left(X\right) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = me^{\frac{1}{2}\sigma^2},$$

en donde $\mu = \ln(m)$. Similarmente se obtiene

$$E\left(X^2\right) = e^{2\mu+2\sigma^2} = m^2 e^{2\sigma^2} .$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$$= m^2 e^{2\sigma^2} - m^2 e^{\sigma^2}$$

$$= m^2 e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) = E^2(X)\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Nótese que la distribución lognormal tiene una desviación estándar proporcional a la media.

Ejemplo 5.9. Sea X una variable aleatoria de una distribución lognormal con parámetros $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 4$. Hállese $P(X < 1)$.

Solución.

$$P(X < 1) = P(\ln X < 0) = P(Y < 0) = P\left(\frac{Y-5}{2} < -2.5\right) = \Phi(-2.5) = 0.0062 .$$

5.5. La distribución beta

La distribución beta es útil para el estudio de datos que toman valores entre 0 y 1. Esta distribución es muy popular como una distribución previa para el parámetro p de una binomial en los análisis bayesianos. Una variable aleatoria X con distribución beta y parámetros α y $\beta > 0$, tiene función de densidad

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\quad 0<x<1.$$

Existen algunos casos especiales de la distribución beta, los cuales son de gran interés práctico. Si $\alpha=\beta=1$, se obtiene una distribución uniforme sobre el intervalo (0, 1); y si $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, se obtiene una distribución arco seno. En general, se llaman densidades generalizadas arco seno a las densidades betas con $\alpha+\beta=1$, Feller (1989).

Mediante una integración por partes, se puede demostrar que existe una relación entre la distribución beta y la distribución binomial, dada por

$$\int_0^p \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx=\sum_{d=k}^{n}\frac{n!}{d!(n-d)!}p^d(1-p)^{n-d}\ ,\ 0<p<1.$$

Por lo tanto, si D es una variable aleatoria de una distribución binomial con parámetros n y p, entonces $P(D\geq k)=P(X\leq p)$, donde X sigue una distribución beta con parámetros k y $n-k+1$.

Ejemplo 5.10. Sea D una variable aleatoria de una distribución binomial con parámetros n = 20 y p = 0.3. Encuentre $P(D\leq 7)$.

Solución.

Por la relación entre la binomial y la beta, se sigue que

$$P(D\leq 7)=1-P(D\geq 8)=1-\sum_{d=8}^{20}\frac{20!}{d!(20-d)!}(0.3)^d(0.7)^{20-d}$$

$$=1-\int_0^{0.3}\frac{20!}{7!12!}x^7(1-x)^{12}\,dx\,.$$

◊

Se pueden usar las tablas del apéndice *C* para evaluar esta integral, sin embargo, éstas no incluyen valores para una distribución beta con $\alpha = 8$ y $\beta = 13$. Por lo tanto, es necesario interpolar tres veces. Primero se calcula la probabilidad usando una beta con $\alpha = 8$ y $\beta = 12$, es decir, $F_{8,12}(0.3) \cong 0.1846$; en donde los subíndices de *F* indican los valores de los parámetros α y β. Después se calcula la misma probabilidad usando $\alpha = 8$ y $\beta = 15$, este caso, se obtiene $F_{8,15}(0.3) \cong 0.3296$. Debido a la necesidad de interpolar, este valor es sólo una aproximación. Finalmente, se puede interpolar entre las dos probabilidades ya calculadas para obtener $F_{8,13}(0.3) \cong 0.0.2329$. Entonces se sigue que

$$P(D \leq 7) = 1 - P(D \geq 8) = 1 - 0.2329 = 0.7671.$$

Este valor está cerca al valor exacto de 0.772.

◊

5.6. La distribución de Laplace

La distribución de Laplace tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x-\mu|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Una variable aleatoria con una distribución de Laplace, puede obtenerse mediante la diferencia entre dos variables aleatorias independientes de una distribución exponencial con parámetro β.

Teorema 5.4. Si *X* es una variable aleatoria de una distribución de Laplace, entonces la función generadora de *X* está dada por

$$M(t) = e^{\mu t}\left(1 - t^2/\beta^2\right)^{-1}.$$

Demostración.

Por definición

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{e^{tx}}{2} \beta e^{-\beta(\mu - x)} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{e^{tx}}{2} \beta e^{-\beta(x-\mu)} dx.$$

Entonces

$$M(t) = \frac{\beta e^{-\beta\mu}}{2} \int_{-\infty}^{\mu} e^{x(t+\beta)} dx + \frac{\beta e^{\beta\mu}}{2} \int_{\mu}^{\infty} e^{x(t-\beta)} dx$$

$$= \frac{\beta e^{-\beta\mu}}{2}\left[\frac{e^{x(t+\beta)}}{t+\beta}\right]_{-\infty}^{\mu} + \frac{\beta e^{\beta\mu}}{2}\left[\frac{e^{x(t-\beta)}}{t-\beta}\right]_{\mu}^{\infty}, \quad t \neq \beta$$

$$= \frac{\beta e^{-\beta\mu}}{2} \frac{e^{\mu(t+\beta)}}{t+\beta} - \frac{\beta e^{\beta\mu}}{2} \frac{e^{\mu(t-\beta)}}{t-\beta}, \quad t < \beta$$

$$= \frac{\beta}{2} \frac{e^{\mu t}}{t+\beta} - \frac{\beta}{2} \frac{e^{\mu t}}{t-\beta}, \quad t < \beta$$

$$= \frac{\beta}{2} e^{\mu t}\left[\frac{(t-\beta)-(t+\beta)}{t^2-\beta^2}\right], \quad t < \beta$$

$$= e^{\mu t}\left(1 - t^2/\beta^2\right)^{-1}, \quad t < \beta.$$

◊

Derivando la función generadora dos veces con respecto a t y haciendo $t = 0$, se obtienen $E(X) = \mu$ y $E(X^2) = \mu^2 + \frac{2}{\beta^2}$. Por lo tanto, se sigue que $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\beta^2}$.

Ejemplo 5.11. Sea X una variable aleatoria de una distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $\beta = 1$. Hállese $P(X \leq 1)$.

Solución.

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \tfrac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{1} \tfrac{1}{2} e^{-x} dx = \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} e^{-1}\right) = 1 - \tfrac{1}{2} e^{-1} \cong 0.816 .$$

5.7. La distribución de Weibull

La distribución de Weibull es una de las distribuciones de más importancia en los estudios de la confiabilidad. Esta distribución tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta - 1} e^{-\alpha x^{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto}. \end{cases}$$

La confiabilidad de un producto se puede definir como la probabilidad de que el producto falle después de un periodo de tiempo especificado t. Es decir, Si $R(t)$ denota la confiabilidad de un producto, entonces $R(t) = P(T \geq t)$, donde T es el tiempo hasta la falla del producto. Si T es una variable aleatoria de alguna distribución $G(t)$, entonces $R(t) = 1 - G(t)$. La probabilidad de que el producto falle en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, está dada por

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t) = G(t + \Delta t) - G(t).$$

Por lo tanto, la probabilidad condicional de que el producto falle en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ dado que el producto no falló antes de *t* está dada por

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{R(t)}.$$

La tasa media de fallas $Z(t)$, se obtiene al dividir entre Δt a la ecuación anterior, y tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$.

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{g(t)}{R(t)}.$$

Como $R(t) = 1 - G(t)$, se sigue que

$$\mathrm{R}'(\mathrm{t}) = -\mathrm{G}'(\mathrm{t}) = -\mathrm{g}(\mathrm{t})$$

y por lo tanto

$$Z(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt}[\ln R(t)].$$

Integrando, se obtiene

$$\int_{R(0)}^{R(t)} d(\ln R) = -\int_{0}^{t} Z(\tau) d\tau .$$

Como $R(0) = P(T \geq 0) = 1$, se tiene que

$$\mathrm{R}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{z}(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Puesto que $g(t) = Z(t)R(t)$, se sigue que

$$\mathrm{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{Z}(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{z}(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

En consecuencia, se puede ver que a la distribución de Weibull le corresponde una tasa de falla de la forma

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0.$$

Es decir,

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(\tau)d\tau}, \quad t > 0.$$

En particular, si $\beta = 1$, la tasa de fallas es constante y la distribución correspondiente es la exponencial. Por cierto, algunas veces a $Z(t)$ vista como $Z(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, también se le llama índice de riesgo.

El momento r-ésimo de la distribución de Weibull está dado por

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx = \int_0^\infty \alpha\beta x^{r+\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = x^\beta$ se obtiene

$$E(X^r) = \int_0^\infty \alpha u^{r/\beta} e^{-\alpha u} du = \alpha \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\beta}+1\right)}{\alpha^{\frac{r}{\beta}+1}} = \alpha^{-r/\beta}\Gamma\left(\frac{r}{\beta}+1\right).$$

Se sigue que los primeros dos momentos están dados por

$$E(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

y

$$E(X^2) = \alpha^{-2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right).$$

Por lo tanto, la varianza de la distribución de Weibull está dada por

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \alpha^{-2/\beta}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right].$$

Si T es el tiempo hasta la falla de un producto, entonces es común referir a la media de T como el tiempo medio entre fallas (TMEF).

Ejemplo 5.12. Supongamos que hay n componentes en serie y que el tiempo de falla de cada componente sigue una distribución de Weibull con parámetros α_i y β. Encuentre el tiempo medio entre fallas.

Solución.

La única manera en que el sistema no falle antes de un periodo de tiempo t, ocurre, sí ninguna componente falla. Si se supone la independencia de los componentes del sistema, entonces la confiabilidad del sistema está dada por

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_i(t)\right] = \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i t^\beta} = e^{-\left(\sum \alpha_i\right)t^\beta}.$$

Entonces

$$F_s(t) = 1 - R_s(t) = 1 - e^{-\left(\sum \alpha_i\right) t^{\beta}},$$

es una función de distribución de Weibull con parámetros $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y β. Por lo tanto, el tiempo medio entre fallas para el sistema es

$$\mathrm{TMEF_s} = \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{i}}\right)^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right).$$

◊

5.8. La distribución de Gumbel

La distribución de Gumbel es una distribución que se usa mucho en los estudios hidrológicos. La distribución Gumbel con parámetros $\theta \in \boldsymbol{R}$ y $\alpha > 0$ tiene la función de densidad

$$f(x) = \alpha \exp\left[-\alpha(x-\theta) - e^{-\alpha(x-\theta)}\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Teorema 5.5. Si X es una variable aleatoria de una distribución de Gumbel con parámetros α y θ, entonces la función generadora de momentos está dada por

$$M(t) = e^{t\theta}\Gamma\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right).$$

Demostración.

Por definición

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \alpha \exp\left[-\alpha(x-\theta) - e^{-\alpha(x-\theta)}\right] dx .$$

Ahora, se puede hacer el cambio de variables

$$y = e^{-\alpha(x-\theta)}$$

o equivalentemente

$$x = \theta + \frac{\ln y}{-\alpha}.$$

El Jacobiano de la transformación está dado por

$$J = \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\alpha y}.$$

Se sigue que

$$M(t) = \int_0^\infty e^{t\left(\theta - \frac{\ln y}{\alpha}\right)} e^{-y} dy = e^{t\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\alpha}\ln y} e^{-y} dy.$$

Por lo tanto

$$M(t) = e^{t\theta} \int_0^\infty y^{-t/\alpha} e^{-y} dy = e^{t\theta} \Gamma\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right).$$

◊

Para encontrar los momentos de la distribuciòn de Gumbel, se puede definir

$$Q(t) = \ln M(t) = t\theta + \ln\Gamma\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right).$$

Derivando $Q(t)$ dos veces con respecto a t y haciendo $t = 0$, se obtienen la media y la varianza. Siendo que

$$Q'(t) = \theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma'\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)} = \theta - \frac{1}{\alpha}\Psi\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)$$

y

$$Q''(t) = \frac{1}{\alpha^2}\Psi'\left(1-\frac{t}{\alpha}\right),$$

se sigue que

$$\mu = Q'(0) = \theta - \frac{1}{\alpha}\Psi(1) = \theta + \frac{\gamma}{\alpha} \cong \theta + \frac{0.577}{\alpha}$$

y

$$\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}\Psi'(1) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}.$$

Los valores de $\Psi(1)$ y $\Psi'(1)$, se obtienen usando el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$\Psi(r) = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{r+n-1}\right) + \ldots.$$

Ejemplo 5.13. Supongamos que los valores máximos anuales para lluvias de 10 minutos de duración, siguen aproximadamente una distribución de Gumbel con media 14 mm y desviación estándar 3.25 mm. Calcule el valor máximo de lluvias de 10 minutos de duración con periodo de retorno de 20 años.

Solución.

Puesto que

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha} = 3.25,$$

se sigue que $\alpha = 0.3946$. También de

$$\mu = \theta + \frac{\gamma}{\alpha} \cong \theta + \frac{0.577}{\alpha} = 14,$$

se sigue que $\theta = 12.5378$. Entonces

$$F(x) = \exp\{-\exp[-0.3946(x - 12.5378)]\}.$$

Ahora, $T = 20 = \frac{1}{p}$ implica que $p = 0.05 = P(X \geq x_{20})$. Entonces

$$P(X < x_{20}) = F(x_{20}) = 0.95,$$

y por lo tanto $x_{20} = 20.0644$. Nota: Para datos hidrológicos, *x* no puede tomar un valor negativo. Es importante verificar que $F(0) \cong 0$. Si no es, entonces el modelo no es bueno.

5.9. La distribución normal bivariante

Una variable aleatoria bidimensional (*X*, *Y*) tiene una función de densidad normal bivariante, si su función de densidad conjunta es de la forma

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-h(x,y)/2}, \quad -\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty,$$

donde $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$, y

$$h(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

Teorema 5.6. La función generadora de momentos de la distribución normal bivariante está dada por

$$M(t_1,t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right).$$

Demostración.

Por la definición de la función generadora de momentos,

$$M(t_1,t_2) = E\left(e^{t_1 X + t_2 Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{h(x,y)/2} dxdy.$$

Haciendo el cambio de variables

$$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \quad \text{y} \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

se obtiene

$$M(t_1,t_2) = e^{t_1\mu_1 + t_2\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left[-\frac{-2(1-\rho^2)(t_1\sigma_1 u + t_2\sigma_2 v) + u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right] dudv.$$

Ahora, se puede hace la siguiente transformación:

$$w = \frac{u - \rho v - \left(1-\rho^2\right) t_1 \sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$z = v - \rho t_1 \sigma_1 - t_2 \sigma_2.$$

El Jacobiano de la transformación está dado por

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial w} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial w} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1-\rho^2}\ .$$

Entonces se sigue que

$$M(t_1, t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2+z^2}{2}} dwdz$$

$$= \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right).$$

◊

Puesto que

$$M(t_1, 0) = e^{\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2}$$

y

$$M(0, t_2) = e^{\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2},$$

se sigue que la distribución marginal de X_1 es normal con media μ_1 y varianza σ_1^2 y la distribución marginal de X_2 es normal con media μ_2 y varianza σ_2^2. Usando la función generadora de momentos del teorema 5.6, se obtiene

$$E(XY)=\rho\sigma_1\sigma_2+\mu_1\mu_2$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Teorema 5.7. Si la variable aleatoria bidimensional (*X*, *Y*) tiene una distribución normal bivariante con medias μ_1 y μ_2, varianzas σ_1^2 y σ_2^2, y coeficiente de correlación ρ, entonces *X* y *Y* son independientes en el sentido estocástico si y solo si $\rho=0$.

Demostración.

La función generadora de momentos de la normal bivariante está dada por

$$M(t_1,t_2)=\exp\left(\mu_1t_1+\mu_2t_2+\tfrac{1}{2}\sigma_1^2t_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2+\tfrac{1}{2}\sigma_2^2t_2^2\right).$$

Si $\rho=0$, entonces

$$\begin{aligned}M(t_1,t_2)&=\exp\left(\mu_1t_1+\mu_2t_2+\tfrac{1}{2}\sigma_1^2t_1^2+\tfrac{1}{2}\sigma_2^2t_2^2\right)\\&=\exp\left(\mu_1t_1+\tfrac{1}{2}\sigma_1^2t_1^2\right)\exp\left(\mu_2t_2+\tfrac{1}{2}\sigma_2^2t_2^2\right)\\&=M_1(t_1)M_2(t_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto *X* y *Y* son independientes. Ahora, supongamos que *X* y *Y* son independientes. Entonces

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]=E[(X_1-\mu_1)]E[(X_2-\mu_2)]=0.$$

Pero si la covarianza es cero, entonces la correlación también es cero.

◊

Capítulo 6
Teorema del límite central

6.1. Introducción

La ley débil de los grandes números en el teorema 3.7 nos da información relevante sobre el comportamiento de la media muestral $\overline{X}_n$, ésta nos dice que la variable aleatoria $\overline{X}_n$ toma valores cercanos a la media μ con probabilidad cercana a 1 cuando n es suficientemente grande. Sin embargo, pretendemos ahora dar un resultado que nos da información más precisa sobre la distribución de $\overline{X}_n$, a saber, el teorema del límite central. En ocasiones, la distribución de $\overline{X}_n$ puede encontrarse de manera explícita, como lo mostramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.1. Si $X_1, \mathrm{X}_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución binomial de parámetros *m* y *p*, entonces $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución binomial con parámetros *nm* y *p*. Luego, para todo entero no negativo $k \le nm$ se tiene

$$P\left(\overline{X}_n = \frac{k}{n}\right) = P(S_n = k) = \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k},$$

lo cual determina la distribución de $\overline{X}_n$.

Ejemplo 6.2. Si $X_1, \mathrm{X}_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, todas con distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces $\overline{X}_n$ tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2/n. En efecto, como la función generadora de momentos de cada X_i es $M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, usando que

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes, tenemos (véase el teorema 3.2) que la función generadora de momentos $M_{\overline{X}_n}(t)$ de $\overline{X}_n$ es

$$M_{\overline{X}_n}(t) = E\left[e^{t\overline{X}_n}\right] = E\left[e^{t\left(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right)}\right] = E\left[e^{\left(\frac{t}{n}\right)X_1} \ldots e^{\left(\frac{t}{n}\right)X_n}\right]$$

$$= E\left[e^{\left(\frac{t}{n}\right)X_1}\right] \ldots E\left[e^{\left(\frac{t}{n}\right)X_n}\right] = e^{\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)2} \cdots e^{\mu\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)2} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)t^2}.$$

Por lo tanto, $\overline{X}_n$ tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 / n.

En general, encontrar la distribución de $\overline{X}_n$ no es una tarea sencilla, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.3. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y con la misma distribución con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Notemos que la función generadora de momentos de cada X_i, $i = 1, 2, \ldots,, n$, es

$$M(t) = \int_0^1 e^{tx}dx = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Luego, por la independencia de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tenemos (igual que en el ejemplo 6.2) que la función generadora de momentos de $\overline{X}_n$ es

$$M_{\overline{X}_n}(t) = \left[M\left(t/n\right)\right]^n = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{t/n} - 1}{t/n}\right)^n, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Aunque para n fijo, pueden utilizarse varias técnicas matemáticas en la determinación de la función de densidad de $\overline{X}_n$, ésta, es tan complicada que pocos estarían interesados en usarla en el cálculo de probabilidades de $\overline{X}_n$. Sin embargo, es extremadamente notable que, realizando una transformación sencilla sobre $\overline{X}_n$ es posible obtener una variable aleatoria cuya distribución puede aproximarse por medio de la distribución normal estándar, sin importar la distribución común de las variables $X_1, \mathrm{X}_2, \ldots, X_n$, bajo la única condición de que la varianza común de las $X_i's$ sea finita. A este resultado se le conoce como el **teorema del límite central** (véase el teorema 6.1).

6.2. Convergencia en distribución

Definición 6.1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias con sucesión correspondiente de funciones de distribución $\{F_n\}$. La sucesión $\{X_n\}$ se dice **converger en distribución** a una función de distribución F si $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ para todo punto x en el cual F es continua.

Si X es una variable aleatoria con la función de distribución F, diremos que $\{X_n\}$ converge en distribución a X.

Ejemplo 6.4. Consideremos la función

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ny)^2}{2}} dy.$$

Haciendo el cambio de variable $z = ny$, obtenemos

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{nx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

de lo cual, en vista de que $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ es la densidad de una distribución normal estándar, resulta evidente que F_n es una función de distribución. Es también claro que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Como la función

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

es obviamente una función de distribución y $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ en todo punto de continuidad de F (solamente $\lim_{n\to\infty} F_n(0) \neq 0$, pero 0 no es un punto de continuidad de *F*). Se sigue que si X_n es una variable aleatoria con función de distribución F_n, entonces X_n converge en distribución a F.

Ejemplo 6.5. Sea X_n una variable aleatoria con función de probabilidad

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{n}\\ 0, & \text{en cualquier otro punto.}\end{cases}$$

La función de distribución de X_n es

$$F_n(x)=\begin{cases}1, & x\geq \dfrac{1}{n}\\ 0, & x<\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

Como

$$F(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

es una función de distribución y $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ en todos los puntos de continuidad de F, tenemos que X_n converge en distribución a F.

Observación. Notemos que en este ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \text{para todo } x.$$

Así, el límite en distribución de una sucesión de variables aleatorias no puede determinarse, en general, calculando el límite de la sucesión de funciones de probabilidad (o densidad) correspondiente.

6.3. Teorema de continuidad

Como vimos en los ejemplos de la sección 6.2, para encontrar el límite en distribución de una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$, usando la definición de este tipo de convergencia, se requiere para cada *n*, conocer la función de distribución F_n de la variable aleatoria X_n, lo cual, como se ilustró en el ejemplo 6.3 puede no ser una tarea sencilla. Sin embargo, como se muestra en el siguiente teorema, conocido como teorema de continuidad, si existe la función generadora de momentos correspondiente a F_n, este teorema nos da un método útil para determinar el límite en distribución de la sucesión $\{X_n\}$. La demostración de este teorema cae fuera del nivel requerido en este libro, por lo cual se omite.

Teorema 6.1. Sea $\{X_n\}$una sucesión de variables aleatorias. Si la función generadora de momentos para X_n, $M_n(t)$, existe para $-h < t < h$ para todo *n*, y existe una función de distribución *F* con función generadora de momentos correspondiente $M(t)$, definida para $|t| \leq h_1 < h$ de manera que $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$, entonces $\{X_n\}$ converge en distribución a *F*.

Vimos ya (sección 4.3) que la distribución de Poisson puede obtenerse mediante un proceso límite de la binomial, lo cual, nos permite aproximar las probabilidades binomiales correspondientes para valores grandes de *n* y valores pequeños de *p* mediante la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$. Obtendremos ahora este resultado como consecuencia del teorema 6.1.

Ejemplo 6.6. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros *n* y *p*. Supongamos que $EX_n = \lambda$ para todo *n*, es decir, $p = \lambda / n$ con $\lambda > 0$ constante. Entonces, por el teorema 4.1 tenemos

$$M_n(t) = E\left(e^{tX_n}\right) = \left[(1-p) + pe^t\right]^n = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}e^t\right]^n = \left[1 + \frac{\lambda\left(e^t - 1\right)}{n}\right]^n$$

para todo t. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

para todo *t*. Se usó aquí que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + x/n\right)^n = e^x$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Como $M(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$ es la función generadora de momentos de una variable aleatoria X con distribución de Poisson con parámetro λ, se tiene por el teorema 6.1 que $\{X_n\}$ converge en distribución a *X*.

6.4. Teorema del límite central

Daremos una demostración del teorema del límite central basada en el teorema 6.1, para lo cual, requerimos entonces suponer la existencia de la función generadora de momentos en un intervalo abierto $(-h, h)$ de las variables independientes e idénticamente distribuidas $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Sin embargo, el argumento es esencialmente igual al que sería dado en un curso avanzado reemplazando la función generadora de momentos por la función característica.

Teorema 6.2. (Teorema del límite central). Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución con media μ y varianza σ^2 finita. Entonces la sucesión de variables aleatorias $Z_n = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) / \sigma$ converge en distribución a una normal estándar.

Demostración.

Como mencionamos arriba, supondremos además la existencia de la función generadora de momentos $M(t) = E\left(e^{tX_n}\right)$, $-h < t < h$ (M no depende de n, ya que las variables tienen todas la misma distribución). Pero recalcamos de nuevo que el teorema es válido sin esta suposición adicional y puede demostrarse reemplazando la función generadora de momentos por la función característica.

Notemos que

$$m(t) := E\left[e^{t(X_n - \mu)}\right] = E\left(e^{-\mu t} e^{tX_n}\right) = e^{-\mu t} E\left(e^{tX_n}\right) = e^{-\mu t} M(t)$$

existe para todo $t \in (-h, h)$. La función $m(t)$ es la función generadora de momentos de $X_n - \mu$ para todo n, y así, $m(0) = 1$, $m'(0) = E(X_n - \mu) = 0$ y $m''(0) = E(X_n - \mu)^2 = \sigma^2$.

Usando el teorema de Taylor, tenemos que existe $s \in (0, t)$ de manera que

$$m(t) = m(0) + m'(0)t + \frac{m''(s)}{2} t^2 = 1 + \frac{m''(s)}{2} t^2.$$

Sumando y restando $\sigma^2 t^2 / 2$ en ambos lados de la igualdad anterior obtenemos

$$m(t)=1+\frac{\sigma^2}{2}t^2+\frac{m''(s)-\sigma^2}{2}t^2.$$

Denotemos ahora por $M_n(t)$ a la función generadora de momentos de Z_n. Entonces

$$M_n(t)=E\left[\exp(tZ_n)\right]=E\left\{\exp\left[t\left(\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

$$=E\left\{\exp\left[t\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]\right\}.$$

De aquí, usando la independencia de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, se sigue que

$$M_n(t)=E\left\{\exp\left[\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1-\mu)\right]\right\}\cdots E\left\{\exp\left[\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_n-\mu)\right]\right\},$$

y como las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen todas la misma distribución,

$$M_n(t)=\left\{E\left[\exp\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1-\mu)\right)\right]\right\}^n=\left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n,\qquad -h<\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}<h.$$

Sustituyendo t por ${}^{t}\!/\!_{\sigma\sqrt{n}}$ en $m(t)$ obtenemos

$$m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1+\frac{t^2}{2n}+\frac{m''(s)-\sigma^2}{2n\sigma^2}t^2,$$

donde ahora $s\in\left(0,\ t/\sigma\sqrt{n}\right)$ con $-h\sigma\sqrt{n}<t<h\sigma\sqrt{n}$. Por lo tanto

$$M_n(t)=\left[1+\frac{t^2}{2n}+\frac{m''(s)-\sigma^2}{2n\sigma^2}t^2\right]^n.$$

Debido a que $m''(t)$ es continua en $t=0$ (recordemos que las derivadas $m^{(r)}(t)$ existen en $t=0$ para todo número natural *r*) y como $s\to 0$ cuando $n\to\infty$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[m''(s)-\sigma^2\right]=m''(0)-\sigma^2=\sigma^2-\sigma^2=0.$$

En algunos textos de cálculo avanzado se muestra que para toda *a* que no dependa de *n*,

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{a}{n}+\frac{\zeta(n)}{n}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

Usando este hecho y lo que se acaba de probar, se sigue de la última expresión de $M_n(t)$ que

$$\lim_{n\to\infty}M_n(t)=e^{t^2/2}$$

para todo $t\in\mathbf{R}$. Como $e^{t^2/2}$ es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal estándar, se sigue por el teorema 6.1 que $\{Z_n\}$

converge en distribución a una variable aleatoria con distribución normal estándar.

◊

Ejemplo 6.7. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{108}$ variables aleatorias independientes y con la misma distribución con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Fue observado en el ejemplo 6.3 que como la función de densidad de $\overline{X}_{108} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_{108}}{108}$ es bastante complicada, el cálculo de probabilidades con ella sería extremadamente laborioso. Pero como las condiciones del teorema del límite central se satisfacen: la función generadora de momentos de cada X_i, $i = 1, 2, \ldots, ,108$ existe y está dada por

$$M(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

y además, tienen la media y varianza dadas por $\mu = 1/2$ y $\sigma^2 = 1/12$. De esta manera, aplicando el teorema del límite central (teorema 6.2) se sigue que la probabilidad de que $\overline{X}_{108}$ tome valores entre 0.5 y 0.6 es aproximadamente (véase la tabla del apéndice A)

$$P\left(0.5 < \overline{X}_{108} < 0.6\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{108}\left(0.5-0.5\right)}{1\big/\sqrt{12}} < \frac{\sqrt{108}\left(\overline{X}_{108}-0.5\right)}{1\big/\sqrt{12}} < \frac{\sqrt{108}\left(0.6-0.5\right)}{1\big/\sqrt{12}} \right)$$

$$= P\left(0 < 36\left(\overline{X}_{108}-0.5\right) < 3.6\right) \approx P\left(0 < Z < 3.6\right) = 0.49984.$$

6.5. Aproximación normal a la distribución binomial

Un ejemplo importante de aproximación de probabilidades de algunas variables aleatorias discretas (cuando es difícil calcular éstas en forma exacta) por la normal, mediante el uso del teorema del límite central, es la distribución binomial para valores grandes de n, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.8. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución Bernoulli de parámetro p. En este caso, la función generadora de momentos de cada X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ existe para todo $t \in \mathbf{R}$, además, la media y la varianza de estas variables son $\mu = p$ y $\sigma^2 = p(1-p)$. Es conocido (véase la sección 4.1) que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene distribución binomial con parámetros n y p. Por el teorema del límite central tenemos que las variables aleatorias

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p\right)}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

convergen en distribución a una normal estándar, esto es, para n grande, Z_n tiene distribución aproximadamente normal estándar. Esto puede ser usado para obtener buenas estimaciones de probabilidades que involucran la distribución binomial mediante el uso de la distribución normal. Por ejemplo, si Y tiene distribución binomial con parámetros $n = 150$, $p = 0.4$ y deseamos calcular $P(Y \in \{71, 72, 73, 74, 75, 76\})$, entonces como la variable aleatoria Y es discreta, los eventos $Y \in \{71, 72, 73, 74, 75, 76\}$ y $70.5 < Y < 76.5$ son equivalentes, y así

$$P\left(Y \in \{71,\ 72,\ 73,\ 74,\ 75,\ 76\}\right) = P\left(70.5 < Y < 76.5\right)$$

$$= P\left(\frac{70.5 - 150(0.4)}{\sqrt{150(0.4)}(0.6)} < \frac{Y - 150(0.4)}{\sqrt{150(0.4)(0.6)}} < \frac{76.5 - 150(0.4)}{\sqrt{150(0.4)(0.6)}}\right)$$

$$= P\left(1.75 < \frac{Y - 60}{6} < 2.75\right),$$

de donde, usando que $\frac{Y - 60}{6}$ tiene una distribución aproximadamente normal estándar, tenemos que

$$P(Y \in \{71, 72, 73, 74, 75, 76\}) \approx P(1.75 < Z < 2.75) = 0.03708.$$

Una regla empírica útil es que la aproximación normal a la distribución binomial es adecuada cuando

$$0 < p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{y} \quad p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < 1.$$

Apéndice A: Distribución normal estándar. Valores de $Z = (X - \mu)/\sigma$. $P(Z \leq z_{1-\alpha})$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.00	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.10	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.20	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.30	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.40	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.50	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.60	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.70	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.80	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.90	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Apéndice B: Valores de cuantiles de la distribución ji-cuadrada

$P(X \leq x_{1-\alpha})$

ν	$x_{0.005}$	$x_{0.010}$	$x_{0.025}$	$x_{0.050}$	$x_{0.100}$	$x_{0.200}$	$x_{0.300}$	$x_{0.400}$	$x_{0.500}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.0642	0.1485	0.2750	0.4549
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.4463	0.7133	1.0217	1.3863
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.0052	1.4237	1.8692	2.3660
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.6488	2.1947	2.7528	3.3567
5	0.4118	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	2.3425	2.9999	3.6555	4.3515
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	3.0701	3.8276	4.5702	5.3481
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	3.8223	4.6713	5.4932	6.3458
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	4.5936	5.5274	6.4226	7.3441
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	5.3801	6.3933	7.3570	8.3428
10	2.1558	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	6.1791	7.2672	8.2955	9.3418
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	6.9887	8.1479	9.2373	10.3410
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	7.8073	9.0343	10.1820	11.3403
13	3.5650	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	8.6339	9.9257	11.1291	12.3398
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	9.4673	10.8215	12.0785	13.3393
15	4.6009	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	10.3070	11.7212	13.0298	14.3389
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	11.1521	12.6243	13.9827	15.3385
17	5.6973	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	12.0023	13.5307	14.9373	16.3382
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	12.8570	14.4399	15.8932	17.3379
19	6.8439	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	13.7158	15.3517	16.8504	18.3376
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	14.5784	16.2659	17.8088	19.3374
21	8.0336	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	15.4446	17.1823	18.7683	20.3372
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	16.3140	18.1007	19.7288	21.3370
23	9.2604	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	17.1865	19.0211	20.6902	22.3369
24	9.8862	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	18.0618	19.9432	21.6525	23.3367
25	10.5196	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	18.9397	20.8670	22.6156	24.3366
26	11.1602	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	19.8202	21.7924	23.5794	25.3365
27	11.8077	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	20.7030	22.7192	24.5440	26.3363
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	21.5880	23.6475	25.5092	27.3362
29	13.1211	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	22.4751	24.5770	26.4751	28.3361
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	23.3641	25.5078	27.4416	29.3360
40	20.7066	22.1642	24.4331	26.5093	29.0505	32.3449	34.8719	37.1340	39.3353
50	27.9908	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	41.4492	44.3133	46.8638	49.3349
60	35.5344	37.4848	40.4817	43.1880	46.4589	50.6406	53.8091	56.6200	59.3347
70	43.2753	45.4417	48.7575	51.7393	55.3289	59.8978	63.3460	66.3961	69.3345
80	51.1719	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	69.2070	72.9153	76.1879	79.3343
90	59.1963	61.7540	65.6466	69.1260	73.2911	78.5584	82.5111	85.9925	89.3342
100	67.3275	70.0650	74.2219	77.9294	82.3581	87.9453	92.1290	95.8078	99.3341
150	109.142	112.668	117.984	122.692	128.275	135.262	140.457	145.000	149.334
200	152.241	156.432	162.728	168.278	174.835	183.003	189.049	194.319	199.334
250	196.160	200.939	208.098	214.391	221.806	231.013	237.808	243.720	249.334
300	240.663	245.973	253.912	260.878	269.068	279.214	286.688	293.179	299.334
350	285.608	291.406	300.064	307.648	316.550	327.561	335.657	342.681	349.334
400	330.903	337.155	346.482	354.641	364.207	376.022	384.698	392.217	399.334

Apéndice B: Valores de cuantiles de la distribución ji-cuadrada $P(X \leq x_{1-\alpha})$

ν	$x_{0.600}$	$x_{0.700}$	$x_{0.800}$	$x_{0.850}$	$x_{0.900}$	$x_{0.950}$	$x_{0.975}$	$x_{0.990}$	$x_{0.995}$
1	0.7083	1.0742	1.6424	2.0722	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	1.8326	2.4079	3.2189	3.7942	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	2.9462	3.6649	4.6416	5.3170	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	4.0446	4.8784	5.9886	6.7449	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	5.1319	6.0644	7.2893	8.1152	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	6.2108	7.2311	8.5581	9.4461	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	7.2832	8.3834	9.8032	10.7479	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	8.3505	9.5245	11.0301	12.0271	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549
9	9.4136	10.6564	12.2421	13.2880	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	10.4732	11.7807	13.4420	14.5339	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881
11	11.5298	12.8987	14.6314	15.7671	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250	26.7569
12	12.5838	14.0111	15.8120	16.9893	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2997
13	13.6356	15.1187	16.9848	18.2020	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8193
14	14.6853	16.2221	18.1508	19.4062	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3194
15	15.7332	17.3217	19.3107	20.6030	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780	32.8015
16	16.7795	18.4179	20.4651	21.7931	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999	34.2671
17	17.8244	19.5110	21.6146	22.9770	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7184
18	18.8679	20.6014	22.7595	24.1555	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052	37.1564
19	19.9102	21.6891	23.9004	25.3289	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5821
20	20.9514	22.7745	25.0375	26.4976	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663	39.9969
21	21.9915	23.8578	26.1711	27.6620	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4009
22	23.0307	24.9390	27.3015	28.8224	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894	42.7957
23	24.0689	26.0184	28.4288	29.9792	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383	44.1814
24	25.1064	27.0960	29.5533	31.1325	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5584
25	26.1430	28.1719	30.6752	32.2825	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140	46.9280
26	27.1789	29.2463	31.7946	33.4295	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416	48.2898
27	28.2141	30.3193	32.9117	34.5736	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628	49.6450
28	29.2486	31.3909	34.0266	35.7150	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782	50.9936
29	30.2825	32.4612	35.1394	36.8538	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878	52.3355
30	31.3159	33.5302	36.2502	37.9902	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6719
40	41.6222	44.1649	47.2685	49.2438	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908	66.7660
50	51.8916	54.7228	58.1638	60.3460	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538	79.4898
60	62.1348	65.2265	68.9721	71.3411	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794	91.9518
70	72.3583	75.6893	79.7147	82.2553	85.5270	90.5313	95.0231	100.425	104.215
80	82.5663	86.1197	90.4053	93.1058	96.5782	101.879	106.628	112.329	116.321
90	92.7614	96.5238	101.054	103.904	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	102.946	106.906	111.667	114.659	118.498	124.342	129.561	135.807	140.170
150	153.753	158.577	164.349	167.962	172.581	179.581	185.800	193.207	198.360
200	204.434	209.985	216.609	220.744	226.021	233.994	241.058	249.445	255.264
250	255.033	261.225	268.599	273.194	279.050	287.881	295.688	304.939	311.346
300	305.574	312.346	320.397	325.409	331.788	341.395	349.874	359.906	366.844
350	356.072	363.376	372.051	377.445	384.306	394.626	403.723	414.474	421.901
400	406.535	414.335	423.590	429.340	436.649	447.632	457.306	468.724	476.607

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.10$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.1958	0.1426	0.1122	0.0926	0.0788	0.0686	0.0608	0.0545	0.0495
3	0.3205	0.2466	0.2009	0.1696	0.1469	0.1295	0.1158	0.1048	0.0957
4	0.4161	0.3332	0.2786	0.2397	0.2104	0.1876	0.1692	0.1542	0.1416
5	0.4897	0.4038	0.3446	0.3010	0.2673	0.2405	0.2187	0.2005	0.1851
6	0.5474	0.4618	0.4006	0.3542	0.3177	0.2882	0.2637	0.2432	0.2256
7	0.5938	0.5099	0.4483	0.4005	0.3623	0.3309	0.3046	0.2822	0.2629
8	0.6316	0.5504	0.4892	0.4410	0.4018	0.3691	0.3415	0.3178	0.2973
9	0.6632	0.5848	0.5247	0.4766	0.4369	0.4035	0.3750	0.3504	0.3288
10	0.6898	0.6145	0.5557	0.5080	0.4683	0.4346	0.4055	0.3802	0.3579
11	0.7125	0.6402	0.5830	0.5360	0.4965	0.4626	0.4333	0.4075	0.3848
12	0.7322	0.6628	0.6072	0.5611	0.5219	0.4882	0.4587	0.4327	0.4095
13	0.7493	0.6827	0.6288	0.5836	0.5450	0.5114	0.4820	0.4558	0.4325
14	0.7644	0.7004	0.6481	0.6040	0.5660	0.5327	0.5034	0.4773	0.4538
15	0.7778	0.7163	0.6656	0.6225	0.5851	0.5523	0.5232	0.4971	0.4736
16	0.7898	0.7306	0.6814	0.6393	0.6027	0.5703	0.5414	0.5155	0.4920
17	0.8005	0.7435	0.6958	0.6548	0.6188	0.5869	0.5584	0.5327	0.5093
18	0.8102	0.7552	0.7090	0.6690	0.6337	0.6024	0.5742	0.5487	0.5254
19	0.8190	0.7660	0.7211	0.6820	0.6475	0.6167	0.5889	0.5636	0.5406
20	0.8271	0.7758	0.7322	0.6941	0.6603	0.6300	0.6026	0.5776	0.5548
21	0.8344	0.7848	0.7425	0.7053	0.6723	0.6425	0.6155	0.5908	0.5681
22	0.8412	0.7931	0.7520	0.7158	0.6834	0.6541	0.6275	0.6032	0.5807
23	0.8474	0.8009	0.7608	0.7255	0.6938	0.6651	0.6389	0.6148	0.5926
24	0.8531	0.8080	0.7691	0.7345	0.7035	0.6753	0.6495	0.6258	0.6039
25	0.8585	0.8147	0.7768	0.7430	0.7126	0.6850	0.6596	0.6362	0.6145
26	0.8634	0.8209	0.7840	0.7510	0.7212	0.6941	0.6691	0.6460	0.6246
27	0.8681	0.8267	0.7907	0.7585	0.7293	0.7027	0.6781	0.6554	0.6342
28	0.8724	0.8322	0.7970	0.7656	0.7370	0.7108	0.6866	0.6642	0.6433
29	0.8764	0.8373	0.8030	0.7722	0.7442	0.7185	0.6947	0.6726	0.6520
30	0.8802	0.8421	0.8086	0.7785	0.7510	0.7258	0.7024	0.6806	0.6603
40	0.9084	0.8782	0.8512	0.8265	0.8036	0.7823	0.7623	0.7434	0.7256
50	0.9259	0.9009	0.8783	0.8574	0.8379	0.8195	0.8021	0.7856	0.7699
60	0.9377	0.9164	0.8970	0.8790	0.8620	0.8459	0.8306	0.8159	0.8019
80	0.9528	0.9364	0.9213	0.9071	0.8936	0.8808	0.8684	0.8565	0.8451
100	0.9620	0.9487	0.9363	0.9246	0.9135	0.9028	0.8924	0.8825	0.8728
120	0.9682	0.9570	0.9465	0.9366	0.9271	0.9179	0.9091	0.9005	0.8921
140	0.9727	0.9630	0.9539	0.9453	0.9370	0.9290	0.9212	0.9137	0.9063
160	0.9761	0.9675	0.9595	0.9519	0.9445	0.9374	0.9305	0.9238	0.9172
180	0.9787	0.9710	0.9639	0.9570	0.9504	0.9441	0.9379	0.9318	0.9259
200	0.9808	0.9739	0.9674	0.9612	0.9552	0.9494	0.9438	0.9383	0.9329
250	0.9846	0.9790	0.9738	0.9688	0.9639	0.9592	0.9546	0.9501	0.9457
300	0.9871	0.9825	0.9781	0.9739	0.9698	0.9658	0.9620	0.9582	0.9544
350	0.9890	0.9850	0.9812	0.9775	0.9740	0.9706	0.9672	0.9640	0.9607
400	0.9903	0.9868	0.9835	0.9803	0.9772	0.9742	0.9712	0.9683	0.9655

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.10$

$\alpha \backslash \beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.0452	0.0417	0.0337	0.0256	0.0173	0.0130	0.0088	0.0066	0.0053
3	0.0880	0.0815	0.0667	0.0512	0.0349	0.0265	0.0179	0.0135	0.0109
4	0.1309	0.1218	0.1006	0.0781	0.0539	0.0412	0.0280	0.0212	0.0170
5	0.1720	0.1606	0.1339	0.1050	0.0733	0.0563	0.0385	0.0292	0.0236
6	0.2104	0.1972	0.1659	0.1312	0.0926	0.0716	0.0492	0.0375	0.0303
7	0.2461	0.2314	0.1962	0.1566	0.1116	0.0867	0.0600	0.0459	0.0371
8	0.2792	0.2633	0.2248	0.1809	0.1302	0.1017	0.0708	0.0543	0.0440
9	0.3098	0.2929	0.2518	0.2042	0.1483	0.1164	0.0815	0.0627	0.0509
10	0.3382	0.3205	0.2772	0.2264	0.1658	0.1309	0.0921	0.0710	0.0578
11	0.3644	0.3462	0.3011	0.2476	0.1828	0.1450	0.1026	0.0794	0.0647
12	0.3888	0.3701	0.3236	0.2678	0.1993	0.1588	0.1129	0.0876	0.0716
13	0.4115	0.3924	0.3448	0.2870	0.2152	0.1722	0.1231	0.0958	0.0784
14	0.4326	0.4133	0.3648	0.3053	0.2305	0.1853	0.1331	0.1039	0.0852
15	0.4523	0.4329	0.3837	0.3228	0.2454	0.1980	0.1429	0.1119	0.0919
16	0.4707	0.4512	0.4015	0.3395	0.2597	0.2104	0.1526	0.1198	0.0985
17	0.4880	0.4684	0.4184	0.3554	0.2736	0.2225	0.1621	0.1275	0.1051
18	0.5042	0.4846	0.4343	0.3706	0.2870	0.2343	0.1715	0.1352	0.1117
19	0.5194	0.4999	0.4495	0.3852	0.2999	0.2457	0.1806	0.1428	0.1181
20	0.5337	0.5143	0.4639	0.3991	0.3124	0.2569	0.1896	0.1503	0.1245
21	0.5472	0.5279	0.4775	0.4124	0.3245	0.2677	0.1984	0.1577	0.1308
22	0.5600	0.5408	0.4905	0.4252	0.3362	0.2783	0.2071	0.1649	0.1371
23	0.5721	0.5530	0.5029	0.4374	0.3476	0.2885	0.2156	0.1721	0.1432
24	0.5835	0.5646	0.5147	0.4492	0.3585	0.2985	0.2239	0.1792	0.1493
25	0.5944	0.5756	0.5260	0.4604	0.3691	0.3083	0.2320	0.1861	0.1554
26	0.6047	0.5861	0.5368	0.4713	0.3794	0.3178	0.2401	0.1930	0.1613
27	0.6145	0.5961	0.5471	0.4817	0.3894	0.3270	0.2479	0.1997	0.1672
28	0.6238	0.6056	0.5569	0.4917	0.3990	0.3361	0.2556	0.2064	0.1730
29	0.6327	0.6147	0.5664	0.5014	0.4084	0.3448	0.2632	0.2129	0.1788
30	0.6412	0.6233	0.5755	0.5107	0.4175	0.3534	0.2706	0.2194	0.1845
40	0.7087	0.6927	0.6489	0.5878	0.4954	0.4285	0.3378	0.2789	0.2376
50	0.7549	0.7405	0.7009	0.6440	0.5551	0.4883	0.3940	0.3304	0.2846
60	0.7885	0.7755	0.7395	0.6869	0.6023	0.5369	0.4416	0.3753	0.3264
80	0.8340	0.8233	0.7929	0.7477	0.6721	0.6110	0.5177	0.4494	0.3972
100	0.8634	0.8543	0.8282	0.7888	0.7211	0.6648	0.5757	0.5080	0.4547
120	0.8840	0.8760	0.8533	0.8184	0.7574	0.7056	0.6213	0.5554	0.5024
140	0.8991	0.8921	0.8719	0.8407	0.7854	0.7375	0.6581	0.5946	0.5424
160	0.9108	0.9045	0.8864	0.8581	0.8075	0.7632	0.6884	0.6274	0.5766
180	0.9201	0.9144	0.8979	0.8721	0.8256	0.7843	0.7138	0.6553	0.6060
200	0.9276	0.9224	0.9073	0.8836	0.8405	0.8020	0.7354	0.6794	0.6316
250	0.9414	0.9371	0.9246	0.9050	0.8687	0.8357	0.7773	0.7270	0.6831
300	0.9507	0.9471	0.9365	0.9197	0.8884	0.8595	0.8078	0.7624	0.7220
350	0.9575	0.9544	0.9452	0.9305	0.9029	0.8774	0.8310	0.7896	0.7524
400	0.9627	0.9599	0.9517	0.9387	0.9141	0.8912	0.8491	0.8113	0.7768

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.20$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.2871	0.2123	0.1686	0.1399	0.1195	0.1044	0.0926	0.0833	0.0756
3	0.4175	0.3266	0.2686	0.2283	0.1986	0.1757	0.1576	0.1429	0.1307
4	0.5098	0.4146	0.3501	0.3032	0.2675	0.2394	0.2167	0.1979	0.1822
5	0.5776	0.4832	0.4163	0.3661	0.3268	0.2953	0.2693	0.2476	0.2291
6	0.6291	0.5379	0.4709	0.4191	0.3779	0.3441	0.3160	0.2921	0.2716
7	0.6696	0.5823	0.5163	0.4643	0.4221	0.3870	0.3574	0.3321	0.3101
8	0.7022	0.6191	0.5548	0.5032	0.4606	0.4249	0.3944	0.3680	0.3450
9	0.7290	0.6499	0.5876	0.5369	0.4945	0.4585	0.4274	0.4004	0.3767
10	0.7514	0.6762	0.6161	0.5664	0.5244	0.4884	0.4572	0.4298	0.4056
11	0.7704	0.6989	0.6408	0.5924	0.5511	0.5154	0.4841	0.4565	0.4320
12	0.7867	0.7186	0.6627	0.6155	0.5749	0.5396	0.5085	0.4809	0.4562
13	0.8008	0.7359	0.6820	0.6361	0.5964	0.5616	0.5308	0.5033	0.4785
14	0.8132	0.7512	0.6992	0.6547	0.6159	0.5816	0.5511	0.5238	0.4991
15	0.8242	0.7648	0.7147	0.6715	0.6335	0.5999	0.5698	0.5427	0.5181
16	0.8339	0.7770	0.7287	0.6867	0.6497	0.6167	0.5870	0.5602	0.5358
17	0.8426	0.7880	0.7414	0.7006	0.6645	0.6321	0.6029	0.5764	0.5522
18	0.8505	0.7980	0.7529	0.7133	0.6780	0.6463	0.6177	0.5915	0.5676
19	0.8576	0.8071	0.7635	0.7250	0.6906	0.6595	0.6313	0.6056	0.5819
20	0.8640	0.8154	0.7732	0.7358	0.7022	0.6718	0.6441	0.6187	0.5953
21	0.8699	0.8230	0.7821	0.7457	0.7130	0.6832	0.6560	0.6310	0.6079
22	0.8753	0.8300	0.7904	0.7550	0.7230	0.6938	0.6671	0.6425	0.6197
23	0.8803	0.8365	0.7980	0.7636	0.7323	0.7038	0.6776	0.6533	0.6309
24	0.8849	0.8425	0.8052	0.7716	0.7411	0.7131	0.6874	0.6635	0.6414
25	0.8892	0.8481	0.8118	0.7791	0.7493	0.7219	0.6966	0.6732	0.6513
26	0.8931	0.8533	0.8180	0.7861	0.7569	0.7301	0.7053	0.6822	0.6607
27	0.8968	0.8582	0.8238	0.7927	0.7642	0.7379	0.7135	0.6908	0.6696
28	0.9002	0.8627	0.8292	0.7989	0.7710	0.7452	0.7213	0.6990	0.6781
29	0.9035	0.8670	0.8344	0.8047	0.7774	0.7522	0.7287	0.7067	0.6861
30	0.9065	0.8710	0.8392	0.8102	0.7835	0.7587	0.7357	0.7141	0.6938
40	0.9287	0.9009	0.8755	0.8520	0.8300	0.8093	0.7898	0.7714	0.7538
50	0.9424	0.9195	0.8984	0.8787	0.8601	0.8424	0.8256	0.8096	0.7942
60	0.9517	0.9322	0.9142	0.8972	0.8811	0.8657	0.8510	0.8368	0.8232
80	0.9635	0.9485	0.9346	0.9213	0.9086	0.8964	0.8846	0.8732	0.8621
100	0.9706	0.9585	0.9471	0.9362	0.9257	0.9156	0.9058	0.8963	0.8870
120	0.9755	0.9653	0.9556	0.9464	0.9375	0.9289	0.9205	0.9123	0.9043
140	0.9789	0.9701	0.9618	0.9538	0.9460	0.9385	0.9312	0.9240	0.9170
160	0.9815	0.9738	0.9664	0.9594	0.9525	0.9458	0.9393	0.9329	0.9267
180	0.9835	0.9766	0.9701	0.9637	0.9576	0.9516	0.9458	0.9400	0.9344
200	0.9852	0.9789	0.9730	0.9673	0.9617	0.9563	0.9510	0.9457	0.9406
250	0.9881	0.9831	0.9783	0.9737	0.9692	0.9648	0.9604	0.9562	0.9520
300	0.9901	0.9859	0.9819	0.9780	0.9742	0.9705	0.9668	0.9633	0.9597
350	0.9915	0.9879	0.9844	0.9811	0.9778	0.9746	0.9715	0.9684	0.9653
400	0.9926	0.9894	0.9864	0.9834	0.9805	0.9777	0.9750	0.9722	0.9695

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.20$

$\alpha\backslash\beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.0693	0.0639	0.0518	0.0394	0.0267	0.0202	0.0135	0.0102	0.0082
3	0.1204	0.1117	0.0916	0.0706	0.0483	0.0368	0.0249	0.0188	0.0151
4	0.1688	0.1572	0.1304	0.1015	0.0704	0.0539	0.0367	0.0278	0.0224
5	0.2132	0.1994	0.1670	0.1314	0.0922	0.0710	0.0486	0.0370	0.0298
6	0.2539	0.2383	0.2013	0.1599	0.1134	0.0879	0.0606	0.0462	0.0374
7	0.2909	0.2740	0.2333	0.1870	0.1340	0.1044	0.0724	0.0555	0.0449
8	0.3247	0.3067	0.2631	0.2127	0.1539	0.1206	0.0842	0.0646	0.0525
9	0.3556	0.3368	0.2908	0.2370	0.1730	0.1363	0.0957	0.0737	0.0600
10	0.3840	0.3646	0.3167	0.2599	0.1914	0.1516	0.1070	0.0827	0.0674
11	0.4100	0.3902	0.3408	0.2816	0.2092	0.1664	0.1182	0.0916	0.0748
12	0.4340	0.4139	0.3634	0.3022	0.2262	0.1808	0.1291	0.1004	0.0821
13	0.4562	0.4358	0.3845	0.3217	0.2426	0.1948	0.1398	0.1090	0.0893
14	0.4767	0.4562	0.4044	0.3401	0.2584	0.2084	0.1503	0.1175	0.0965
15	0.4958	0.4753	0.4230	0.3577	0.2735	0.2215	0.1605	0.1259	0.1036
16	0.5135	0.4930	0.4405	0.3743	0.2881	0.2343	0.1706	0.1342	0.1106
17	0.5301	0.5097	0.4570	0.3902	0.3021	0.2466	0.1804	0.1423	0.1174
18	0.5456	0.5252	0.4726	0.4053	0.3157	0.2586	0.1901	0.1503	0.1243
19	0.5601	0.5399	0.4874	0.4196	0.3287	0.2703	0.1995	0.1581	0.1310
20	0.5737	0.5537	0.5013	0.4333	0.3413	0.2816	0.2087	0.1659	0.1376
21	0.5865	0.5666	0.5145	0.4464	0.3534	0.2926	0.2178	0.1735	0.1442
22	0.5986	0.5789	0.5271	0.4590	0.3651	0.3032	0.2266	0.1810	0.1506
23	0.6100	0.5905	0.5390	0.4709	0.3764	0.3136	0.2353	0.1883	0.1570
24	0.6207	0.6014	0.5503	0.4824	0.3873	0.3237	0.2438	0.1956	0.1633
25	0.6309	0.6118	0.5611	0.4934	0.3978	0.3335	0.2521	0.2027	0.1695
26	0.6406	0.6217	0.5714	0.5039	0.4080	0.3430	0.2602	0.2097	0.1756
27	0.6498	0.6311	0.5813	0.5140	0.4179	0.3522	0.2682	0.2166	0.1817
28	0.6585	0.6401	0.5907	0.5237	0.4274	0.3613	0.2760	0.2234	0.1876
29	0.6668	0.6486	0.5996	0.5330	0.4367	0.3700	0.2837	0.2301	0.1935
30	0.6747	0.6567	0.6082	0.5420	0.4456	0.3786	0.2912	0.2366	0.1993
40	0.7371	0.7212	0.6776	0.6160	0.5218	0.4529	0.3586	0.2969	0.2533
50	0.7795	0.7654	0.7262	0.6695	0.5797	0.5116	0.4145	0.3485	0.3007
60	0.8101	0.7975	0.7621	0.7099	0.6252	0.5589	0.4616	0.3933	0.3426
80	0.8514	0.8410	0.8115	0.7670	0.6920	0.6307	0.5363	0.4667	0.4132
100	0.8780	0.8692	0.8439	0.8054	0.7386	0.6825	0.5929	0.5244	0.4702
120	0.8965	0.8888	0.8668	0.8329	0.7730	0.7215	0.6373	0.5709	0.5172
140	0.9101	0.9034	0.8839	0.8536	0.7994	0.7520	0.6729	0.6092	0.5566
160	0.9206	0.9145	0.8971	0.8697	0.8203	0.7765	0.7022	0.6412	0.5901
180	0.9288	0.9234	0.9076	0.8826	0.8372	0.7966	0.7267	0.6684	0.6189
200	0.9356	0.9306	0.9161	0.8932	0.8512	0.8134	0.7475	0.6917	0.6439
250	0.9479	0.9438	0.9319	0.9129	0.8776	0.8453	0.7878	0.7379	0.6941
300	0.9562	0.9528	0.9427	0.9265	0.8961	0.8679	0.8170	0.7720	0.7319
350	0.9623	0.9593	0.9505	0.9364	0.9097	0.8847	0.8392	0.7983	0.7614
400	0.9669	0.9642	0.9564	0.9439	0.9201	0.8978	0.8565	0.8192	0.7851

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.30$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.3633	0.2724	0.2180	0.1818	0.1559	0.1365	0.1214	0.1093	0.0994
3	0.4916	0.3898	0.3233	0.2763	0.2413	0.2142	0.1926	0.1750	0.1603
4	0.5780	0.4761	0.4052	0.3530	0.3127	0.2808	0.2548	0.2332	0.2150
5	0.6396	0.5414	0.4701	0.4156	0.3726	0.3377	0.3088	0.2845	0.2638
6	0.6857	0.5925	0.5224	0.4675	0.4232	0.3866	0.3559	0.3298	0.3072
7	0.7214	0.6335	0.5655	0.5111	0.4664	0.4290	0.3972	0.3699	0.3461
8	0.7499	0.6670	0.6016	0.5482	0.5037	0.4661	0.4337	0.4056	0.3809
9	0.7731	0.6950	0.6321	0.5801	0.5363	0.4987	0.4661	0.4376	0.4124
10	0.7923	0.7186	0.6584	0.6079	0.5648	0.5276	0.4951	0.4664	0.4408
11	0.8086	0.7389	0.6811	0.6322	0.5901	0.5534	0.5211	0.4924	0.4667
12	0.8225	0.7564	0.7011	0.6537	0.6126	0.5765	0.5446	0.5160	0.4903
13	0.8345	0.7717	0.7187	0.6729	0.6328	0.5974	0.5659	0.5376	0.5120
14	0.8450	0.7853	0.7343	0.6900	0.6510	0.6164	0.5853	0.5573	0.5319
15	0.8543	0.7973	0.7483	0.7055	0.6675	0.6336	0.6031	0.5754	0.5503
16	0.8625	0.8080	0.7609	0.7195	0.6825	0.6494	0.6194	0.5921	0.5672
17	0.8698	0.8177	0.7723	0.7322	0.6962	0.6638	0.6344	0.6076	0.5830
18	0.8764	0.8264	0.7827	0.7438	0.7088	0.6772	0.6483	0.6219	0.5977
19	0.8824	0.8344	0.7922	0.7545	0.7204	0.6895	0.6612	0.6353	0.6113
20	0.8878	0.8416	0.8008	0.7643	0.7311	0.7009	0.6732	0.6477	0.6241
21	0.8927	0.8483	0.8088	0.7733	0.7410	0.7115	0.6844	0.6593	0.6361
22	0.8972	0.8544	0.8162	0.7817	0.7503	0.7214	0.6948	0.6702	0.6473
23	0.9014	0.8600	0.8230	0.7895	0.7588	0.7306	0.7046	0.6804	0.6579
24	0.9052	0.8652	0.8294	0.7967	0.7668	0.7393	0.7137	0.6900	0.6678
25	0.9087	0.8701	0.8353	0.8035	0.7743	0.7474	0.7223	0.6990	0.6772
26	0.9120	0.8746	0.8408	0.8099	0.7814	0.7550	0.7305	0.7075	0.6861
27	0.9151	0.8788	0.8459	0.8158	0.7880	0.7622	0.7381	0.7156	0.6945
28	0.9180	0.8827	0.8507	0.8214	0.7942	0.7689	0.7453	0.7232	0.7024
29	0.9206	0.8864	0.8553	0.8266	0.8001	0.7753	0.7522	0.7304	0.7100
30	0.9231	0.8898	0.8595	0.8316	0.8056	0.7814	0.7587	0.7373	0.7172
40	0.9415	0.9156	0.8915	0.8690	0.8478	0.8278	0.8087	0.7906	0.7734
50	0.9528	0.9315	0.9116	0.8928	0.8750	0.8579	0.8416	0.8260	0.8110
60	0.9605	0.9424	0.9255	0.9093	0.8939	0.8791	0.8648	0.8511	0.8379
80	0.9702	0.9563	0.9432	0.9307	0.9186	0.9068	0.8955	0.8845	0.8738
100	0.9760	0.9648	0.9542	0.9439	0.9339	0.9242	0.9148	0.9056	0.8967
120	0.9800	0.9706	0.9616	0.9529	0.9444	0.9362	0.9281	0.9203	0.9125
140	0.9828	0.9747	0.9669	0.9594	0.9520	0.9448	0.9378	0.9309	0.9242
160	0.9849	0.9778	0.9709	0.9643	0.9578	0.9514	0.9452	0.9391	0.9331
180	0.9866	0.9802	0.9741	0.9682	0.9623	0.9566	0.9510	0.9455	0.9401
200	0.9879	0.9822	0.9766	0.9713	0.9660	0.9608	0.9558	0.9508	0.9458
250	0.9903	0.9857	0.9812	0.9769	0.9726	0.9684	0.9643	0.9603	0.9562
300	0.9919	0.9881	0.9843	0.9807	0.9771	0.9736	0.9701	0.9667	0.9633
350	0.9931	0.9898	0.9865	0.9834	0.9803	0.9773	0.9743	0.9713	0.9684
400	0.9939	0.9910	0.9882	0.9855	0.9827	0.9801	0.9774	0.9748	0.9722

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.30$

$\alpha \backslash \beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.0911	0.0841	0.0684	0.0521	0.0353	0.0267	0.0180	0.0135	0.0109
3	0.1479	0.1373	0.1129	0.0872	0.0599	0.0456	0.0309	0.0234	0.0188
4	0.1995	0.1860	0.1547	0.1209	0.0841	0.0645	0.0440	0.0333	0.0269
5	0.2459	0.2303	0.1934	0.1527	0.1075	0.0830	0.0569	0.0434	0.0350
6	0.2876	0.2703	0.2291	0.1827	0.1300	0.1010	0.0698	0.0533	0.0431
7	0.3252	0.3067	0.2620	0.2108	0.1517	0.1184	0.0824	0.0631	0.0512
8	0.3591	0.3397	0.2923	0.2372	0.1724	0.1354	0.0947	0.0729	0.0592
9	0.3900	0.3699	0.3204	0.2621	0.1922	0.1517	0.1068	0.0824	0.0671
10	0.4180	0.3974	0.3464	0.2854	0.2111	0.1676	0.1187	0.0918	0.0749
11	0.4436	0.4228	0.3705	0.3073	0.2293	0.1829	0.1302	0.1011	0.0826
12	0.4672	0.4461	0.3930	0.3280	0.2467	0.1977	0.1415	0.1102	0.0903
13	0.4888	0.4676	0.4139	0.3476	0.2633	0.2120	0.1526	0.1192	0.0978
14	0.5088	0.4876	0.4335	0.3660	0.2793	0.2259	0.1634	0.1280	0.1052
15	0.5272	0.5061	0.4518	0.3835	0.2946	0.2392	0.1739	0.1366	0.1125
16	0.5444	0.5233	0.4690	0.4001	0.3093	0.2522	0.1842	0.1451	0.1197
17	0.5603	0.5394	0.4852	0.4158	0.3234	0.2647	0.1943	0.1535	0.1268
18	0.5752	0.5545	0.5004	0.4307	0.3370	0.2769	0.2041	0.1617	0.1338
19	0.5892	0.5686	0.5148	0.4449	0.3500	0.2886	0.2137	0.1697	0.1407
20	0.6022	0.5818	0.5283	0.4584	0.3626	0.3000	0.2231	0.1776	0.1475
21	0.6145	0.5943	0.5412	0.4712	0.3747	0.3111	0.2323	0.1854	0.1543
22	0.6260	0.6060	0.5533	0.4835	0.3863	0.3218	0.2413	0.1930	0.1609
23	0.6368	0.6171	0.5649	0.4952	0.3975	0.3322	0.2501	0.2005	0.1674
24	0.6471	0.6276	0.5758	0.5064	0.4084	0.3423	0.2586	0.2079	0.1738
25	0.6567	0.6375	0.5862	0.5172	0.4188	0.3520	0.2670	0.2151	0.1801
26	0.6659	0.6470	0.5962	0.5274	0.4289	0.3616	0.2752	0.2222	0.1864
27	0.6746	0.6559	0.6056	0.5373	0.4387	0.3708	0.2833	0.2292	0.1925
28	0.6829	0.6644	0.6147	0.5467	0.4481	0.3798	0.2911	0.2361	0.1986
29	0.6907	0.6725	0.6233	0.5558	0.4572	0.3885	0.2988	0.2428	0.2045
30	0.6982	0.6802	0.6315	0.5645	0.4660	0.3970	0.3064	0.2495	0.2104
40	0.7569	0.7412	0.6978	0.6361	0.5408	0.4706	0.3738	0.3101	0.2650
50	0.7965	0.7826	0.7439	0.6874	0.5973	0.5283	0.4294	0.3618	0.3126
60	0.8251	0.8127	0.7778	0.7261	0.6415	0.5748	0.4760	0.4064	0.3545
80	0.8634	0.8532	0.8243	0.7805	0.7060	0.6448	0.5497	0.4792	0.4249
100	0.8879	0.8794	0.8548	0.8169	0.7509	0.6950	0.6053	0.5363	0.4814
120	0.9050	0.8976	0.8762	0.8429	0.7839	0.7328	0.6487	0.5821	0.5279
140	0.9176	0.9110	0.8921	0.8625	0.8091	0.7623	0.6835	0.6196	0.5668
160	0.9272	0.9214	0.9044	0.8777	0.8291	0.7859	0.7120	0.6510	0.5998
180	0.9348	0.9295	0.9142	0.8899	0.8453	0.8053	0.7359	0.6777	0.6281
200	0.9410	0.9362	0.9222	0.8999	0.8587	0.8214	0.7560	0.7005	0.6527
250	0.9523	0.9483	0.9368	0.9184	0.8839	0.8521	0.7952	0.7456	0.7019
300	0.9599	0.9566	0.9468	0.9311	0.9014	0.8738	0.8235	0.7789	0.7390
350	0.9655	0.9626	0.9541	0.9404	0.9144	0.8899	0.8449	0.8045	0.7678
400	0.9697	0.9671	0.9596	0.9475	0.9243	0.9024	0.8617	0.8248	0.7909

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.40$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.4329	0.3292	0.2656	0.2226	0.1916	0.1682	0.1498	0.1351	0.1230
3	0.5555	0.4463	0.3731	0.3206	0.2811	0.2502	0.2255	0.2052	0.1883
4	0.6350	0.5292	0.4539	0.3975	0.3535	0.3184	0.2896	0.2656	0.2453
5	0.6906	0.5908	0.5165	0.4590	0.4131	0.3755	0.3443	0.3178	0.2952
6	0.7315	0.6382	0.5664	0.5093	0.4627	0.4240	0.3913	0.3633	0.3390
7	0.7629	0.6758	0.6070	0.5511	0.5047	0.4656	0.4321	0.4032	0.3779
8	0.7877	0.7064	0.6407	0.5864	0.5407	0.5016	0.4679	0.4384	0.4124
9	0.8079	0.7317	0.6691	0.6165	0.5718	0.5331	0.4994	0.4698	0.4434
10	0.8245	0.7530	0.6933	0.6426	0.5990	0.5609	0.5275	0.4978	0.4713
11	0.8385	0.7712	0.7143	0.6654	0.6229	0.5856	0.5526	0.5231	0.4966
12	0.8504	0.7869	0.7325	0.6855	0.6442	0.6077	0.5751	0.5459	0.5196
13	0.8607	0.8005	0.7486	0.7032	0.6632	0.6275	0.5956	0.5667	0.5406
14	0.8697	0.8126	0.7629	0.7191	0.6803	0.6455	0.6141	0.5857	0.5598
15	0.8776	0.8232	0.7756	0.7334	0.6957	0.6618	0.6310	0.6031	0.5775
16	0.8846	0.8327	0.7870	0.7463	0.7097	0.6766	0.6465	0.6191	0.5938
17	0.8908	0.8413	0.7974	0.7580	0.7225	0.6902	0.6608	0.6338	0.6090
18	0.8964	0.8490	0.8067	0.7687	0.7342	0.7028	0.6740	0.6475	0.6230
19	0.9014	0.8560	0.8153	0.7785	0.7450	0.7143	0.6861	0.6601	0.6361
20	0.9060	0.8624	0.8231	0.7875	0.7549	0.7250	0.6974	0.6719	0.6483
21	0.9102	0.8682	0.8303	0.7957	0.7641	0.7349	0.7080	0.6829	0.6597
22	0.9140	0.8736	0.8369	0.8034	0.7726	0.7441	0.7178	0.6932	0.6704
23	0.9175	0.8785	0.8430	0.8105	0.7805	0.7527	0.7269	0.7029	0.6804
24	0.9207	0.8831	0.8487	0.8171	0.7879	0.7608	0.7355	0.7119	0.6899
25	0.9237	0.8873	0.8540	0.8233	0.7948	0.7683	0.7436	0.7205	0.6988
26	0.9265	0.8913	0.8589	0.8291	0.8013	0.7754	0.7512	0.7285	0.7072
27	0.9291	0.8949	0.8635	0.8345	0.8074	0.7821	0.7584	0.7361	0.7151
28	0.9315	0.8984	0.8679	0.8395	0.8131	0.7884	0.7651	0.7433	0.7227
29	0.9337	0.9016	0.8719	0.8443	0.8185	0.7943	0.7715	0.7501	0.7298
30	0.9358	0.9046	0.8757	0.8488	0.8236	0.7999	0.7776	0.7565	0.7366
40	0.9513	0.9270	0.9042	0.8827	0.8622	0.8427	0.8242	0.8064	0.7895
50	0.9607	0.9409	0.9221	0.9041	0.8869	0.8705	0.8546	0.8394	0.8247
60	0.9671	0.9504	0.9343	0.9190	0.9042	0.8899	0.8761	0.8627	0.8498
80	0.9752	0.9624	0.9501	0.9381	0.9265	0.9153	0.9043	0.8937	0.8833
100	0.9801	0.9697	0.9597	0.9499	0.9404	0.9312	0.9221	0.9132	0.9045
120	0.9834	0.9747	0.9662	0.9580	0.9499	0.9420	0.9343	0.9267	0.9193
140	0.9857	0.9782	0.9709	0.9638	0.9568	0.9499	0.9432	0.9366	0.9300
160	0.9875	0.9809	0.9745	0.9682	0.9620	0.9559	0.9500	0.9441	0.9383
180	0.9889	0.9830	0.9773	0.9716	0.9661	0.9607	0.9553	0.9500	0.9448
200	0.9900	0.9847	0.9795	0.9744	0.9694	0.9645	0.9596	0.9548	0.9501
250	0.9920	0.9877	0.9835	0.9794	0.9754	0.9714	0.9674	0.9635	0.9597
300	0.9933	0.9897	0.9862	0.9828	0.9794	0.9761	0.9727	0.9694	0.9662
350	0.9942	0.9912	0.9882	0.9852	0.9823	0.9794	0.9765	0.9737	0.9709
400	0.9950	0.9923	0.9897	0.9871	0.9845	0.9819	0.9794	0.9769	0.9744

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.40$

$\alpha\backslash\beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.1130	0.1044	0.0850	0.0650	0.0441	0.0334	0.0225	0.0170	0.0136
3	0.1740	0.1617	0.1333	0.1032	0.0711	0.0542	0.0368	0.0278	0.0224
4	0.2279	0.2128	0.1775	0.1390	0.0970	0.0745	0.0509	0.0386	0.0311
5	0.2755	0.2583	0.2176	0.1724	0.1218	0.0941	0.0647	0.0493	0.0399
6	0.3178	0.2991	0.2542	0.2034	0.1453	0.1130	0.0783	0.0599	0.0485
7	0.3555	0.3357	0.2877	0.2323	0.1677	0.1313	0.0915	0.0702	0.0570
8	0.3894	0.3688	0.3183	0.2592	0.1891	0.1488	0.1044	0.0804	0.0653
9	0.4199	0.3988	0.3465	0.2844	0.2094	0.1657	0.1169	0.0903	0.0736
10	0.4476	0.4261	0.3725	0.3079	0.2287	0.1820	0.1292	0.1001	0.0817
11	0.4727	0.4510	0.3965	0.3300	0.2472	0.1976	0.1411	0.1097	0.0897
12	0.4957	0.4739	0.4187	0.3507	0.2648	0.2127	0.1527	0.1191	0.0976
13	0.5168	0.4950	0.4394	0.3702	0.2817	0.2273	0.1640	0.1283	0.1054
14	0.5361	0.5144	0.4587	0.3886	0.2978	0.2414	0.1751	0.1374	0.1130
15	0.5540	0.5324	0.4767	0.4060	0.3132	0.2549	0.1858	0.1462	0.1205
16	0.5706	0.5492	0.4935	0.4224	0.3279	0.2680	0.1963	0.1549	0.1279
17	0.5860	0.5647	0.5094	0.4379	0.3420	0.2807	0.2066	0.1634	0.1352
18	0.6003	0.5793	0.5242	0.4526	0.3556	0.2929	0.2165	0.1718	0.1424
19	0.6137	0.5929	0.5382	0.4666	0.3686	0.3047	0.2263	0.1800	0.1494
20	0.6262	0.6057	0.5514	0.4799	0.3811	0.3161	0.2358	0.1880	0.1563
21	0.6380	0.6176	0.5639	0.4925	0.3931	0.3272	0.2451	0.1959	0.1632
22	0.6490	0.6289	0.5756	0.5045	0.4047	0.3379	0.2541	0.2036	0.1699
23	0.6593	0.6396	0.5868	0.5160	0.4159	0.3483	0.2630	0.2112	0.1765
24	0.6691	0.6496	0.5974	0.5270	0.4266	0.3584	0.2716	0.2187	0.1830
25	0.6783	0.6591	0.6075	0.5375	0.4369	0.3682	0.2801	0.2260	0.1895
26	0.6871	0.6681	0.6171	0.5475	0.4469	0.3776	0.2883	0.2332	0.1958
27	0.6953	0.6766	0.6262	0.5571	0.4566	0.3868	0.2964	0.2403	0.2020
28	0.7032	0.6847	0.6349	0.5663	0.4659	0.3958	0.3043	0.2472	0.2081
29	0.7106	0.6925	0.6432	0.5752	0.4749	0.4045	0.3120	0.2540	0.2142
30	0.7177	0.6998	0.6511	0.5836	0.4836	0.4129	0.3196	0.2607	0.2201
40	0.7733	0.7577	0.7146	0.6530	0.5570	0.4858	0.3869	0.3215	0.2751
50	0.8105	0.7969	0.7586	0.7025	0.6122	0.5426	0.4422	0.3732	0.3229
60	0.8373	0.8252	0.7908	0.7397	0.6552	0.5882	0.4884	0.4176	0.3648
80	0.8731	0.8632	0.8349	0.7918	0.7178	0.6566	0.5611	0.4900	0.4349
100	0.8960	0.8877	0.8637	0.8265	0.7612	0.7056	0.6158	0.5464	0.4910
120	0.9119	0.9047	0.8839	0.8513	0.7930	0.7423	0.6583	0.5915	0.5371
140	0.9236	0.9173	0.8989	0.8699	0.8173	0.7709	0.6924	0.6285	0.5755
160	0.9326	0.9269	0.9104	0.8843	0.8365	0.7938	0.7203	0.6594	0.6080
180	0.9396	0.9345	0.9196	0.8959	0.8521	0.8125	0.7436	0.6855	0.6359
200	0.9454	0.9407	0.9271	0.9054	0.8650	0.8281	0.7633	0.7079	0.6601
250	0.9558	0.9520	0.9409	0.9229	0.8891	0.8577	0.8014	0.7521	0.7085
300	0.9629	0.9597	0.9503	0.9349	0.9059	0.8786	0.8289	0.7847	0.7449
350	0.9681	0.9653	0.9571	0.9437	0.9183	0.8942	0.8498	0.8097	0.7732
400	0.9720	0.9695	0.9623	0.9504	0.9278	0.9062	0.8661	0.8295	0.7958

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.50$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.5000	0.3857	0.3138	0.2645	0.2285	0.2011	0.1796	0.1623	0.1480
3	0.6143	0.5000	0.4214	0.3641	0.3205	0.2862	0.2586	0.2358	0.2167
4	0.6862	0.5786	0.5000	0.4402	0.3931	0.3551	0.3238	0.2976	0.2753
5	0.7355	0.6359	0.5598	0.5000	0.4517	0.4119	0.3785	0.3502	0.3258
6	0.7715	0.6795	0.6069	0.5483	0.5000	0.4595	0.4251	0.3954	0.3697
7	0.7989	0.7138	0.6449	0.5881	0.5405	0.5000	0.4651	0.4348	0.4082
8	0.8204	0.7414	0.6762	0.6215	0.5749	0.5349	0.5000	0.4694	0.4423
9	0.8377	0.7642	0.7024	0.6498	0.6046	0.5652	0.5306	0.5000	0.4727
10	0.8520	0.7833	0.7247	0.6742	0.6303	0.5918	0.5577	0.5273	0.5000
11	0.8640	0.7996	0.7439	0.6955	0.6529	0.6153	0.5818	0.5517	0.5246
12	0.8742	0.8135	0.7606	0.7141	0.6730	0.6363	0.6034	0.5737	0.5469
13	0.8830	0.8257	0.7753	0.7306	0.6908	0.6551	0.6229	0.5937	0.5671
14	0.8906	0.8363	0.7882	0.7453	0.7068	0.6720	0.6406	0.6119	0.5857
15	0.8973	0.8458	0.7998	0.7585	0.7212	0.6874	0.6567	0.6285	0.6027
16	0.9032	0.8542	0.8101	0.7703	0.7343	0.7014	0.6714	0.6438	0.6184
17	0.9085	0.8617	0.8195	0.7811	0.7462	0.7142	0.6849	0.6578	0.6329
18	0.9132	0.8685	0.8279	0.7909	0.7570	0.7259	0.6973	0.6708	0.6463
19	0.9175	0.8747	0.8356	0.7999	0.7670	0.7368	0.7088	0.6829	0.6588
20	0.9214	0.8803	0.8427	0.8081	0.7762	0.7468	0.7194	0.6941	0.6704
21	0.9249	0.8854	0.8491	0.8157	0.7847	0.7560	0.7293	0.7045	0.6813
22	0.9281	0.8901	0.8551	0.8226	0.7926	0.7646	0.7386	0.7142	0.6914
23	0.9310	0.8945	0.8606	0.8291	0.7999	0.7726	0.7472	0.7234	0.7010
24	0.9338	0.8985	0.8657	0.8352	0.8067	0.7801	0.7553	0.7319	0.7100
25	0.9363	0.9022	0.8704	0.8408	0.8131	0.7872	0.7628	0.7400	0.7184
26	0.9386	0.9056	0.8748	0.8460	0.8191	0.7937	0.7699	0.7475	0.7264
27	0.9408	0.9089	0.8790	0.8509	0.8247	0.7999	0.7766	0.7547	0.7339
28	0.9428	0.9119	0.8828	0.8556	0.8299	0.8058	0.7830	0.7614	0.7410
29	0.9447	0.9147	0.8864	0.8599	0.8349	0.8113	0.7889	0.7678	0.7478
30	0.9464	0.9173	0.8899	0.8640	0.8395	0.8164	0.7946	0.7739	0.7542
40	0.9594	0.9368	0.9153	0.8946	0.8749	0.8561	0.8380	0.8206	0.8040
50	0.9673	0.9489	0.9312	0.9140	0.8975	0.8816	0.8662	0.8514	0.8370
60	0.9726	0.9571	0.9420	0.9274	0.9132	0.8995	0.8861	0.8731	0.8606
80	0.9794	0.9675	0.9559	0.9446	0.9336	0.9227	0.9122	0.9019	0.8918
100	0.9834	0.9739	0.9645	0.9552	0.9462	0.9373	0.9285	0.9200	0.9116
120	0.9862	0.9781	0.9702	0.9624	0.9548	0.9472	0.9398	0.9325	0.9252
140	0.9881	0.9812	0.9744	0.9676	0.9610	0.9544	0.9479	0.9416	0.9353
160	0.9896	0.9835	0.9775	0.9716	0.9657	0.9599	0.9542	0.9485	0.9429
180	0.9907	0.9853	0.9800	0.9747	0.9694	0.9642	0.9591	0.9540	0.9489
200	0.9917	0.9868	0.9819	0.9771	0.9724	0.9677	0.9630	0.9584	0.9538
250	0.9933	0.9894	0.9855	0.9816	0.9778	0.9740	0.9702	0.9664	0.9627
300	0.9944	0.9912	0.9879	0.9847	0.9814	0.9782	0.9750	0.9719	0.9687
350	0.9952	0.9924	0.9896	0.9868	0.9840	0.9813	0.9785	0.9758	0.9731
400	0.9958	0.9934	0.9909	0.9884	0.9860	0.9836	0.9812	0.9788	0.9764

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta $F(x) = 0.50$

$\alpha \backslash \beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.1360	0.1258	0.1027	0.0786	0.0536	0.0406	0.0274	0.0206	0.0166
3	0.2004	0.1865	0.1542	0.1197	0.0827	0.0632	0.0429	0.0325	0.0261
4	0.2561	0.2394	0.2002	0.1573	0.1101	0.0847	0.0580	0.0441	0.0355
5	0.3045	0.2859	0.2415	0.1919	0.1360	0.1054	0.0726	0.0554	0.0448
6	0.3471	0.3270	0.2788	0.2238	0.1605	0.1251	0.0868	0.0664	0.0538
7	0.3847	0.3637	0.3126	0.2532	0.1836	0.1439	0.1005	0.0773	0.0627
8	0.4182	0.3966	0.3433	0.2806	0.2054	0.1620	0.1139	0.0878	0.0715
9	0.4483	0.4263	0.3715	0.3059	0.2261	0.1794	0.1269	0.0981	0.0800
10	0.4754	0.4531	0.3973	0.3296	0.2458	0.1960	0.1394	0.1082	0.0884
11	0.5000	0.4776	0.4211	0.3517	0.2645	0.2119	0.1517	0.1181	0.0967
12	0.5224	0.5000	0.4431	0.3724	0.2823	0.2273	0.1636	0.1278	0.1048
13	0.5428	0.5205	0.4634	0.3918	0.2992	0.2421	0.1751	0.1372	0.1128
14	0.5616	0.5395	0.4824	0.4100	0.3154	0.2563	0.1864	0.1464	0.1206
15	0.5789	0.5569	0.5000	0.4272	0.3308	0.2700	0.1973	0.1555	0.1283
16	0.5949	0.5732	0.5165	0.4434	0.3456	0.2831	0.2080	0.1643	0.1358
17	0.6097	0.5882	0.5319	0.4587	0.3597	0.2959	0.2184	0.1730	0.1433
18	0.6235	0.6023	0.5464	0.4732	0.3733	0.3082	0.2285	0.1815	0.1506
19	0.6363	0.6154	0.5600	0.4870	0.3862	0.3200	0.2383	0.1898	0.1578
20	0.6483	0.6276	0.5728	0.5000	0.3987	0.3315	0.2479	0.1980	0.1648
21	0.6595	0.6391	0.5849	0.5124	0.4106	0.3425	0.2573	0.2060	0.1718
22	0.6701	0.6500	0.5963	0.5242	0.4221	0.3533	0.2664	0.2138	0.1786
23	0.6800	0.6602	0.6071	0.5354	0.4331	0.3636	0.2753	0.2215	0.1853
24	0.6893	0.6698	0.6174	0.5461	0.4438	0.3737	0.2840	0.2290	0.1919
25	0.6981	0.6789	0.6271	0.5564	0.4540	0.3834	0.2925	0.2364	0.1984
26	0.7064	0.6875	0.6363	0.5662	0.4639	0.3929	0.3008	0.2437	0.2048
27	0.7143	0.6956	0.6451	0.5755	0.4734	0.4020	0.3089	0.2508	0.2111
28	0.7217	0.7034	0.6535	0.5845	0.4826	0.4109	0.3168	0.2578	0.2173
29	0.7288	0.7107	0.6615	0.5931	0.4914	0.4195	0.3245	0.2646	0.2234
30	0.7355	0.7177	0.6692	0.6013	0.5000	0.4279	0.3321	0.2713	0.2294
40	0.7881	0.7727	0.7300	0.6685	0.5721	0.5000	0.3993	0.3324	0.2847
50	0.8232	0.8098	0.7720	0.7163	0.6260	0.5560	0.4543	0.3840	0.3326
60	0.8483	0.8364	0.8027	0.7521	0.6679	0.6007	0.5000	0.4282	0.3745
80	0.8819	0.8722	0.8445	0.8020	0.7287	0.6676	0.5718	0.5000	0.4442
100	0.9033	0.8952	0.8717	0.8352	0.7706	0.7153	0.6255	0.5558	0.5000
120	0.9181	0.9112	0.8908	0.8588	0.8013	0.7510	0.6673	0.6003	0.5456
140	0.9290	0.9229	0.9050	0.8766	0.8248	0.7788	0.7007	0.6368	0.5836
160	0.9374	0.9319	0.9159	0.8903	0.8433	0.8010	0.7280	0.6671	0.6157
180	0.9439	0.9390	0.9245	0.9013	0.8583	0.8191	0.7507	0.6928	0.6432
200	0.9493	0.9448	0.9316	0.9103	0.8706	0.8343	0.7699	0.7148	0.6670
250	0.9590	0.9554	0.9445	0.9270	0.8938	0.8629	0.8071	0.7581	0.7147
300	0.9656	0.9625	0.9533	0.9384	0.9099	0.8831	0.8340	0.7900	0.7504
350	0.9704	0.9677	0.9597	0.9467	0.9218	0.8981	0.8542	0.8144	0.7782
400	0.9740	0.9716	0.9646	0.9531	0.9309	0.9097	0.8701	0.8338	0.8004

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta

$F(x) = 0.60$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.5671	0.4445	0.3650	0.3094	0.2685	0.2371	0.2123	0.1921	0.1755
3	0.6708	0.5537	0.4708	0.4092	0.3618	0.3242	0.2936	0.2683	0.2470
4	0.7344	0.6269	0.5461	0.4835	0.4336	0.3930	0.3593	0.3309	0.3067
5	0.7774	0.6794	0.6025	0.5410	0.4907	0.4489	0.4136	0.3835	0.3574
6	0.8084	0.7189	0.6465	0.5869	0.5373	0.4953	0.4593	0.4282	0.4010
7	0.8318	0.7498	0.6816	0.6245	0.5760	0.5344	0.4984	0.4669	0.4391
8	0.8502	0.7745	0.7104	0.6557	0.6087	0.5679	0.5321	0.5006	0.4725
9	0.8649	0.7948	0.7344	0.6822	0.6367	0.5968	0.5616	0.5302	0.5022
10	0.8770	0.8117	0.7547	0.7048	0.6610	0.6221	0.5876	0.5566	0.5287
11	0.8870	0.8260	0.7721	0.7245	0.6822	0.6445	0.6106	0.5801	0.5524
12	0.8956	0.8383	0.7872	0.7417	0.7009	0.6643	0.6312	0.6012	0.5739
13	0.9030	0.8490	0.8005	0.7568	0.7175	0.6820	0.6497	0.6203	0.5935
14	0.9094	0.8584	0.8121	0.7703	0.7324	0.6979	0.6665	0.6377	0.6112
15	0.9150	0.8667	0.8225	0.7824	0.7458	0.7123	0.6817	0.6535	0.6275
16	0.9199	0.8740	0.8318	0.7932	0.7579	0.7254	0.6956	0.6680	0.6425
17	0.9243	0.8806	0.8402	0.8031	0.7689	0.7374	0.7083	0.6814	0.6564
18	0.9283	0.8865	0.8478	0.8120	0.7789	0.7483	0.7200	0.6937	0.6691
19	0.9318	0.8919	0.8547	0.8201	0.7881	0.7584	0.7308	0.7050	0.6810
20	0.9350	0.8968	0.8610	0.8276	0.7966	0.7677	0.7408	0.7156	0.6921
21	0.9380	0.9012	0.8667	0.8345	0.8044	0.7763	0.7501	0.7255	0.7024
22	0.9406	0.9053	0.8721	0.8409	0.8117	0.7843	0.7587	0.7346	0.7120
23	0.9431	0.9091	0.8770	0.8467	0.8184	0.7918	0.7667	0.7432	0.7210
24	0.9454	0.9126	0.8815	0.8522	0.8246	0.7987	0.7743	0.7513	0.7295
25	0.9474	0.9158	0.8857	0.8573	0.8305	0.8052	0.7813	0.7588	0.7375
26	0.9494	0.9188	0.8896	0.8620	0.8359	0.8113	0.7880	0.7659	0.7450
27	0.9512	0.9216	0.8933	0.8665	0.8411	0.8170	0.7942	0.7726	0.7521
28	0.9528	0.9242	0.8967	0.8706	0.8459	0.8224	0.8001	0.7790	0.7589
29	0.9544	0.9266	0.9000	0.8746	0.8504	0.8275	0.8057	0.7849	0.7652
30	0.9559	0.9289	0.9030	0.8782	0.8547	0.8323	0.8109	0.7906	0.7713
40	0.9666	0.9458	0.9255	0.9059	0.8870	0.8687	0.8512	0.8343	0.8180
50	0.9731	0.9562	0.9395	0.9233	0.9075	0.8922	0.8773	0.8629	0.8489
60	0.9775	0.9632	0.9491	0.9353	0.9217	0.9085	0.8956	0.8831	0.8708
80	0.9830	0.9722	0.9614	0.9507	0.9401	0.9298	0.9196	0.9097	0.8999
100	0.9864	0.9776	0.9689	0.9601	0.9515	0.9430	0.9347	0.9264	0.9183
120	0.9886	0.9813	0.9739	0.9666	0.9593	0.9521	0.9449	0.9379	0.9309
140	0.9903	0.9839	0.9776	0.9712	0.9649	0.9586	0.9524	0.9463	0.9402
160	0.9915	0.9859	0.9803	0.9747	0.9692	0.9636	0.9581	0.9527	0.9473
180	0.9924	0.9875	0.9825	0.9775	0.9725	0.9675	0.9626	0.9577	0.9529
200	0.9932	0.9887	0.9842	0.9797	0.9752	0.9707	0.9662	0.9618	0.9574
250	0.9945	0.9909	0.9873	0.9837	0.9800	0.9764	0.9728	0.9692	0.9656
300	0.9954	0.9924	0.9894	0.9864	0.9833	0.9803	0.9772	0.9742	0.9712
350	0.9961	0.9935	0.9909	0.9883	0.9857	0.9830	0.9804	0.9778	0.9752
400	0.9966	0.9943	0.9920	0.9897	0.9874	0.9851	0.9828	0.9805	0.9782

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.60$

$\alpha \backslash \beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.1615	0.1496	0.1224	0.0940	0.0642	0.0487	0.0329	0.0248	0.0199
3	0.2288	0.2131	0.1768	0.1376	0.0954	0.0730	0.0496	0.0376	0.0303
4	0.2857	0.2675	0.2244	0.1769	0.1243	0.0958	0.0657	0.0499	0.0403
5	0.3346	0.3145	0.2666	0.2125	0.1512	0.1173	0.0810	0.0619	0.0501
6	0.3771	0.3558	0.3043	0.2451	0.1764	0.1378	0.0958	0.0735	0.0596
7	0.4144	0.3923	0.3382	0.2750	0.2001	0.1573	0.1101	0.0847	0.0688
8	0.4474	0.4249	0.3690	0.3026	0.2224	0.1758	0.1239	0.0957	0.0779
9	0.4769	0.4541	0.3969	0.3281	0.2435	0.1936	0.1373	0.1063	0.0868
10	0.5034	0.4804	0.4225	0.3517	0.2634	0.2105	0.1502	0.1167	0.0955
11	0.5273	0.5043	0.4460	0.3738	0.2823	0.2267	0.1627	0.1269	0.1040
12	0.5490	0.5261	0.4676	0.3943	0.3002	0.2423	0.1748	0.1368	0.1123
13	0.5688	0.5461	0.4876	0.4136	0.3172	0.2572	0.1866	0.1464	0.1205
14	0.5869	0.5644	0.5061	0.4316	0.3334	0.2716	0.1981	0.1559	0.1285
15	0.6035	0.5813	0.5233	0.4486	0.3489	0.2854	0.2092	0.1651	0.1363
16	0.6189	0.5969	0.5394	0.4646	0.3636	0.2986	0.2200	0.1741	0.1441
17	0.6331	0.6114	0.5544	0.4797	0.3777	0.3114	0.2305	0.1829	0.1516
18	0.6463	0.6249	0.5684	0.4939	0.3911	0.3237	0.2407	0.1915	0.1591
19	0.6586	0.6375	0.5816	0.5074	0.4040	0.3356	0.2506	0.2000	0.1664
20	0.6700	0.6493	0.5940	0.5201	0.4164	0.3470	0.2603	0.2082	0.1735
21	0.6807	0.6603	0.6057	0.5323	0.4282	0.3581	0.2697	0.2163	0.1806
22	0.6907	0.6706	0.6168	0.5438	0.4396	0.3688	0.2789	0.2242	0.1875
23	0.7001	0.6804	0.6272	0.5548	0.4505	0.3791	0.2879	0.2320	0.1943
24	0.7090	0.6896	0.6371	0.5652	0.4610	0.3892	0.2966	0.2396	0.2010
25	0.7173	0.6982	0.6464	0.5752	0.4711	0.3988	0.3051	0.2471	0.2075
26	0.7252	0.7064	0.6553	0.5847	0.4808	0.4082	0.3134	0.2544	0.2140
27	0.7327	0.7142	0.6638	0.5938	0.4902	0.4173	0.3216	0.2615	0.2204
28	0.7397	0.7215	0.6719	0.6025	0.4993	0.4261	0.3295	0.2685	0.2266
29	0.7464	0.7285	0.6795	0.6109	0.5080	0.4347	0.3372	0.2754	0.2328
30	0.7528	0.7352	0.6868	0.6189	0.5164	0.4430	0.3448	0.2822	0.2388
40	0.8024	0.7873	0.7451	0.6839	0.5871	0.5142	0.4118	0.3434	0.2944
50	0.8354	0.8222	0.7850	0.7299	0.6397	0.5692	0.4663	0.3949	0.3424
60	0.8589	0.8473	0.8142	0.7642	0.6804	0.6131	0.5116	0.4389	0.3842
80	0.8903	0.8809	0.8538	0.8120	0.7393	0.6785	0.5824	0.5100	0.4536
100	0.9103	0.9024	0.8795	0.8437	0.7799	0.7249	0.6352	0.5651	0.5090
120	0.9241	0.9173	0.8975	0.8662	0.8095	0.7596	0.6762	0.6091	0.5541
140	0.9342	0.9283	0.9108	0.8831	0.8321	0.7866	0.7088	0.6450	0.5916
160	0.9419	0.9367	0.9211	0.8961	0.8499	0.8081	0.7355	0.6748	0.6233
180	0.9481	0.9433	0.9292	0.9066	0.8643	0.8257	0.7577	0.7000	0.6504
200	0.9530	0.9487	0.9358	0.9151	0.8762	0.8403	0.7765	0.7216	0.6739
250	0.9620	0.9585	0.9480	0.9309	0.8984	0.8680	0.8127	0.7640	0.7208
300	0.9682	0.9652	0.9563	0.9418	0.9139	0.8875	0.8389	0.7952	0.7559
350	0.9726	0.9700	0.9623	0.9497	0.9252	0.9020	0.8586	0.8192	0.7831
400	0.9759	0.9737	0.9668	0.9557	0.9340	0.9131	0.8740	0.8381	0.8049

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.70$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.6367	0.5084	0.4220	0.3604	0.3143	0.2786	0.2501	0.2269	0.2077
3	0.7276	0.6102	0.5239	0.4586	0.4075	0.3665	0.3330	0.3050	0.2814
4	0.7820	0.6767	0.5948	0.5299	0.4776	0.4345	0.3984	0.3679	0.3416
5	0.8182	0.7237	0.6470	0.5844	0.5325	0.4889	0.4518	0.4199	0.3921
6	0.8441	0.7587	0.6873	0.6274	0.5768	0.5336	0.4963	0.4637	0.4352
7	0.8635	0.7858	0.7192	0.6623	0.6134	0.5710	0.5339	0.5013	0.4724
8	0.8786	0.8074	0.7452	0.6912	0.6441	0.6028	0.5663	0.5339	0.5049
9	0.8907	0.8250	0.7668	0.7155	0.6702	0.6301	0.5944	0.5624	0.5336
10	0.9006	0.8397	0.7850	0.7362	0.6928	0.6539	0.6191	0.5876	0.5592
11	0.9089	0.8521	0.8005	0.7541	0.7124	0.6748	0.6409	0.6100	0.5820
12	0.9159	0.8627	0.8140	0.7697	0.7297	0.6933	0.6603	0.6301	0.6026
13	0.9219	0.8719	0.8257	0.7835	0.7450	0.7098	0.6777	0.6483	0.6212
14	0.9271	0.8800	0.8361	0.7957	0.7586	0.7247	0.6934	0.6647	0.6381
15	0.9316	0.8871	0.8453	0.8066	0.7709	0.7380	0.7077	0.6796	0.6536
16	0.9356	0.8934	0.8535	0.8164	0.7820	0.7502	0.7207	0.6933	0.6678
17	0.9392	0.8990	0.8609	0.8252	0.7921	0.7612	0.7325	0.7058	0.6809
18	0.9424	0.9041	0.8675	0.8333	0.8012	0.7713	0.7434	0.7174	0.6930
19	0.9453	0.9086	0.8736	0.8406	0.8096	0.7806	0.7535	0.7281	0.7042
20	0.9479	0.9128	0.8791	0.8473	0.8173	0.7892	0.7628	0.7379	0.7146
21	0.9502	0.9166	0.8842	0.8535	0.8244	0.7971	0.7714	0.7471	0.7243
22	0.9524	0.9201	0.8889	0.8591	0.8310	0.8044	0.7794	0.7557	0.7334
23	0.9544	0.9233	0.8932	0.8644	0.8371	0.8113	0.7868	0.7637	0.7419
24	0.9562	0.9262	0.8971	0.8693	0.8428	0.8176	0.7938	0.7712	0.7498
25	0.9579	0.9290	0.9008	0.8738	0.8481	0.8236	0.8003	0.7783	0.7573
26	0.9594	0.9315	0.9043	0.8781	0.8530	0.8292	0.8065	0.7849	0.7643
27	0.9609	0.9339	0.9075	0.8820	0.8577	0.8344	0.8122	0.7911	0.7710
28	0.9622	0.9361	0.9105	0.8857	0.8620	0.8393	0.8177	0.7970	0.7773
29	0.9635	0.9382	0.9133	0.8892	0.8661	0.8440	0.8228	0.8026	0.7832
30	0.9647	0.9401	0.9159	0.8925	0.8700	0.8483	0.8276	0.8078	0.7889
40	0.9733	0.9544	0.9355	0.9170	0.8990	0.8816	0.8646	0.8483	0.8324
50	0.9785	0.9632	0.9477	0.9325	0.9175	0.9028	0.8885	0.8746	0.8611
60	0.9820	0.9691	0.9560	0.9431	0.9302	0.9176	0.9053	0.8932	0.8813
80	0.9865	0.9766	0.9667	0.9566	0.9467	0.9369	0.9271	0.9176	0.9082
100	0.9891	0.9812	0.9731	0.9650	0.9569	0.9488	0.9408	0.9329	0.9251
120	0.9909	0.9843	0.9775	0.9707	0.9638	0.9570	0.9502	0.9434	0.9367
140	0.9922	0.9865	0.9807	0.9747	0.9688	0.9629	0.9570	0.9511	0.9453
160	0.9932	0.9882	0.9830	0.9778	0.9726	0.9673	0.9621	0.9569	0.9517
180	0.9939	0.9895	0.9849	0.9802	0.9756	0.9709	0.9662	0.9615	0.9569
200	0.9945	0.9905	0.9864	0.9822	0.9779	0.9737	0.9695	0.9652	0.9610
250	0.9956	0.9924	0.9891	0.9857	0.9823	0.9788	0.9754	0.9720	0.9685
300	0.9964	0.9937	0.9909	0.9880	0.9852	0.9823	0.9794	0.9765	0.9736
350	0.9969	0.9946	0.9922	0.9897	0.9873	0.9848	0.9823	0.9798	0.9773
400	0.9973	0.9952	0.9931	0.9910	0.9888	0.9867	0.9845	0.9823	0.9801

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.70$

$\alpha \backslash \beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.1914	0.1775	0.1457	0.1122	0.0769	0.0585	0.0395	0.0298	0.0240
3	0.2611	0.2436	0.2027	0.1584	0.1102	0.0844	0.0576	0.0437	0.0352
4	0.3189	0.2989	0.2517	0.1992	0.1405	0.1085	0.0745	0.0568	0.0458
5	0.3678	0.3463	0.2945	0.2357	0.1684	0.1310	0.0907	0.0693	0.0561
6	0.4099	0.3874	0.3325	0.2689	0.1944	0.1522	0.1061	0.0814	0.0661
7	0.4466	0.4235	0.3664	0.2991	0.2186	0.1722	0.1209	0.0932	0.0758
8	0.4789	0.4554	0.3969	0.3268	0.2413	0.1913	0.1352	0.1045	0.0852
9	0.5076	0.4840	0.4246	0.3523	0.2627	0.2094	0.1489	0.1155	0.0944
10	0.5333	0.5097	0.4497	0.3759	0.2828	0.2266	0.1621	0.1262	0.1033
11	0.5564	0.5328	0.4728	0.3978	0.3018	0.2431	0.1749	0.1366	0.1121
12	0.5772	0.5539	0.4939	0.4182	0.3198	0.2588	0.1873	0.1468	0.1206
13	0.5962	0.5732	0.5134	0.4372	0.3369	0.2739	0.1993	0.1566	0.1290
14	0.6136	0.5908	0.5314	0.4550	0.3531	0.2883	0.2109	0.1663	0.1372
15	0.6295	0.6070	0.5482	0.4717	0.3685	0.3022	0.2222	0.1757	0.1452
16	0.6441	0.6220	0.5637	0.4873	0.3831	0.3155	0.2331	0.1848	0.1531
17	0.6576	0.6359	0.5782	0.5021	0.3971	0.3283	0.2438	0.1938	0.1608
18	0.6702	0.6487	0.5918	0.5160	0.4105	0.3406	0.2541	0.2026	0.1684
19	0.6818	0.6607	0.6045	0.5292	0.4233	0.3525	0.2641	0.2111	0.1758
20	0.6927	0.6720	0.6165	0.5416	0.4355	0.3639	0.2739	0.2195	0.1831
21	0.7028	0.6824	0.6277	0.5535	0.4472	0.3750	0.2833	0.2277	0.1902
22	0.7123	0.6923	0.6383	0.5647	0.4584	0.3856	0.2926	0.2357	0.1973
23	0.7211	0.7015	0.6483	0.5753	0.4692	0.3959	0.3016	0.2435	0.2042
24	0.7295	0.7102	0.6578	0.5855	0.4795	0.4059	0.3103	0.2512	0.2109
25	0.7374	0.7184	0.6668	0.5951	0.4895	0.4155	0.3189	0.2587	0.2176
26	0.7448	0.7262	0.6753	0.6044	0.4990	0.4248	0.3272	0.2660	0.2241
27	0.7518	0.7335	0.6834	0.6132	0.5083	0.4338	0.3353	0.2732	0.2305
28	0.7584	0.7404	0.6911	0.6216	0.5171	0.4425	0.3432	0.2803	0.2368
29	0.7647	0.7470	0.6984	0.6297	0.5257	0.4510	0.3510	0.2872	0.2430
30	0.7707	0.7533	0.7054	0.6374	0.5340	0.4592	0.3585	0.2940	0.2491
40	0.8171	0.8023	0.7608	0.7000	0.6030	0.5294	0.4252	0.3552	0.3050
50	0.8479	0.8350	0.7986	0.7441	0.6542	0.5834	0.4793	0.4066	0.3530
60	0.8698	0.8585	0.8261	0.7769	0.6936	0.6262	0.5240	0.4503	0.3947
80	0.8989	0.8898	0.8634	0.8224	0.7505	0.6899	0.5936	0.5208	0.4637
100	0.9174	0.9097	0.8875	0.8525	0.7896	0.7350	0.6455	0.5751	0.5186
120	0.9301	0.9236	0.9044	0.8738	0.8181	0.7687	0.6855	0.6184	0.5632
140	0.9395	0.9337	0.9168	0.8898	0.8397	0.7948	0.7175	0.6537	0.6002
160	0.9466	0.9415	0.9264	0.9021	0.8568	0.8155	0.7435	0.6830	0.6314
180	0.9522	0.9476	0.9340	0.9120	0.8706	0.8325	0.7652	0.7077	0.6581
200	0.9568	0.9526	0.9402	0.9201	0.8819	0.8466	0.7834	0.7288	0.6812
250	0.9651	0.9617	0.9516	0.9350	0.9032	0.8733	0.8187	0.7703	0.7272
300	0.9708	0.9679	0.9593	0.9452	0.9180	0.8920	0.8441	0.8008	0.7617
350	0.9748	0.9723	0.9649	0.9526	0.9288	0.9060	0.8632	0.8241	0.7883
400	0.9779	0.9757	0.9691	0.9583	0.9371	0.9167	0.8782	0.8426	0.8097

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.80$

$\alpha \backslash \beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.7129	0.5825	0.4902	0.4224	0.3709	0.3304	0.2978	0.2710	0.2486
3	0.7877	0.6734	0.5854	0.5168	0.4621	0.4177	0.3809	0.3501	0.3238
4	0.8314	0.7314	0.6499	0.5837	0.5291	0.4837	0.4452	0.4124	0.3839
5	0.8601	0.7717	0.6968	0.6339	0.5809	0.5357	0.4968	0.4631	0.4336
6	0.8805	0.8014	0.7325	0.6732	0.6221	0.5779	0.5394	0.5055	0.4756
7	0.8956	0.8243	0.7606	0.7047	0.6559	0.6130	0.5751	0.5415	0.5116
8	0.9074	0.8424	0.7833	0.7307	0.6840	0.6426	0.6056	0.5726	0.5428
9	0.9167	0.8571	0.8021	0.7524	0.7079	0.6679	0.6320	0.5996	0.5702
10	0.9244	0.8693	0.8178	0.7709	0.7284	0.6899	0.6550	0.6233	0.5944
11	0.9307	0.8796	0.8312	0.7868	0.7461	0.7091	0.6753	0.6444	0.6160
12	0.9361	0.8883	0.8428	0.8006	0.7617	0.7260	0.6933	0.6632	0.6354
13	0.9407	0.8959	0.8529	0.8127	0.7755	0.7411	0.7094	0.6801	0.6529
14	0.9447	0.9025	0.8618	0.8235	0.7877	0.7546	0.7238	0.6953	0.6688
15	0.9482	0.9084	0.8696	0.8330	0.7987	0.7667	0.7369	0.7092	0.6833
16	0.9512	0.9135	0.8767	0.8416	0.8086	0.7777	0.7488	0.7218	0.6966
17	0.9540	0.9181	0.8830	0.8493	0.8176	0.7877	0.7597	0.7334	0.7088
18	0.9564	0.9223	0.8886	0.8564	0.8258	0.7969	0.7697	0.7441	0.7200
19	0.9586	0.9260	0.8938	0.8628	0.8332	0.8053	0.7788	0.7539	0.7304
20	0.9606	0.9294	0.8985	0.8686	0.8401	0.8130	0.7873	0.7630	0.7401
21	0.9624	0.9325	0.9028	0.8740	0.8464	0.8201	0.7951	0.7715	0.7491
22	0.9640	0.9354	0.9067	0.8789	0.8522	0.8267	0.8024	0.7794	0.7574
23	0.9655	0.9380	0.9104	0.8835	0.8576	0.8328	0.8092	0.7867	0.7653
24	0.9669	0.9404	0.9138	0.8877	0.8626	0.8385	0.8155	0.7936	0.7726
25	0.9682	0.9426	0.9169	0.8917	0.8673	0.8439	0.8214	0.8000	0.7795
26	0.9694	0.9447	0.9198	0.8953	0.8717	0.8489	0.8270	0.8061	0.7860
27	0.9705	0.9466	0.9225	0.8988	0.8757	0.8536	0.8322	0.8117	0.7921
28	0.9715	0.9484	0.9250	0.9020	0.8796	0.8580	0.8371	0.8171	0.7979
29	0.9724	0.9501	0.9274	0.9050	0.8832	0.8621	0.8418	0.8222	0.8034
30	0.9733	0.9517	0.9296	0.9078	0.8866	0.8660	0.8461	0.8270	0.8086
40	0.9798	0.9632	0.9461	0.9290	0.9121	0.8956	0.8794	0.8637	0.8484
50	0.9838	0.9703	0.9564	0.9423	0.9283	0.9145	0.9009	0.8876	0.8745
60	0.9865	0.9751	0.9633	0.9514	0.9394	0.9276	0.9158	0.9043	0.8930
80	0.9898	0.9812	0.9722	0.9630	0.9538	0.9445	0.9354	0.9263	0.9173
100	0.9918	0.9849	0.9776	0.9702	0.9626	0.9551	0.9475	0.9400	0.9326
120	0.9932	0.9874	0.9813	0.9750	0.9686	0.9622	0.9558	0.9495	0.9431
140	0.9941	0.9892	0.9839	0.9785	0.9730	0.9674	0.9619	0.9563	0.9508
160	0.9949	0.9905	0.9859	0.9811	0.9763	0.9714	0.9665	0.9616	0.9566
180	0.9954	0.9916	0.9874	0.9832	0.9788	0.9745	0.9701	0.9657	0.9613
200	0.9959	0.9924	0.9887	0.9848	0.9809	0.9769	0.9730	0.9690	0.9650
250	0.9967	0.9939	0.9909	0.9878	0.9847	0.9815	0.9782	0.9750	0.9718
300	0.9973	0.9949	0.9924	0.9898	0.9872	0.9845	0.9818	0.9791	0.9763
350	0.9977	0.9956	0.9935	0.9913	0.9890	0.9867	0.9843	0.9820	0.9796
400	0.9979	0.9962	0.9943	0.9923	0.9903	0.9883	0.9863	0.9842	0.9821

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.80$

$\alpha\backslash\beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.2296	0.2133	0.1758	0.1360	0.0935	0.0713	0.0483	0.0365	0.0294
3	0.3011	0.2814	0.2352	0.1846	0.1290	0.0991	0.0678	0.0515	0.0415
4	0.3592	0.3373	0.2853	0.2268	0.1608	0.1245	0.0858	0.0654	0.0529
5	0.4076	0.3845	0.3285	0.2642	0.1898	0.1480	0.1028	0.0787	0.0638
6	0.4489	0.4251	0.3665	0.2978	0.2165	0.1700	0.1189	0.0914	0.0743
7	0.4846	0.4604	0.4001	0.3282	0.2413	0.1907	0.1343	0.1036	0.0844
8	0.5159	0.4915	0.4302	0.3559	0.2643	0.2102	0.1490	0.1154	0.0942
9	0.5435	0.5191	0.4573	0.3813	0.2859	0.2286	0.1632	0.1268	0.1037
10	0.5680	0.5438	0.4819	0.4047	0.3062	0.2462	0.1768	0.1379	0.1130
11	0.5900	0.5660	0.5042	0.4263	0.3253	0.2629	0.1899	0.1486	0.1220
12	0.6098	0.5861	0.5247	0.4463	0.3433	0.2788	0.2025	0.1590	0.1308
13	0.6278	0.6045	0.5436	0.4650	0.3603	0.2939	0.2147	0.1691	0.1394
14	0.6442	0.6212	0.5609	0.4824	0.3764	0.3085	0.2265	0.1789	0.1479
15	0.6592	0.6366	0.5770	0.4987	0.3918	0.3224	0.2379	0.1885	0.1561
16	0.6729	0.6508	0.5919	0.5140	0.4063	0.3357	0.2490	0.1979	0.1641
17	0.6856	0.6639	0.6058	0.5283	0.4201	0.3485	0.2597	0.2070	0.1720
18	0.6974	0.6760	0.6188	0.5418	0.4333	0.3608	0.2701	0.2158	0.1797
19	0.7082	0.6873	0.6309	0.5546	0.4459	0.3726	0.2803	0.2245	0.1872
20	0.7184	0.6978	0.6423	0.5667	0.4580	0.3840	0.2901	0.2330	0.1946
21	0.7278	0.7076	0.6530	0.5781	0.4695	0.3950	0.2996	0.2413	0.2019
22	0.7366	0.7168	0.6631	0.5889	0.4805	0.4055	0.3089	0.2493	0.2090
23	0.7449	0.7255	0.6726	0.5992	0.4911	0.4157	0.3179	0.2572	0.2160
24	0.7527	0.7336	0.6816	0.6089	0.5012	0.4256	0.3267	0.2650	0.2228
25	0.7600	0.7413	0.6900	0.6182	0.5110	0.4351	0.3352	0.2725	0.2296
26	0.7668	0.7485	0.6981	0.6271	0.5203	0.4443	0.3435	0.2799	0.2362
27	0.7733	0.7553	0.7057	0.6355	0.5293	0.4532	0.3516	0.2872	0.2427
28	0.7795	0.7618	0.7130	0.6436	0.5380	0.4618	0.3596	0.2943	0.2490
29	0.7853	0.7680	0.7199	0.6513	0.5463	0.4701	0.3673	0.3012	0.2553
30	0.7908	0.7738	0.7265	0.6587	0.5544	0.4782	0.3748	0.3080	0.2614
40	0.8336	0.8192	0.7785	0.7184	0.6214	0.5471	0.4411	0.3693	0.3175
50	0.8618	0.8494	0.8139	0.7603	0.6709	0.5998	0.4944	0.4204	0.3655
60	0.8818	0.8709	0.8395	0.7913	0.7088	0.6414	0.5384	0.4637	0.4071
80	0.9084	0.8996	0.8741	0.8341	0.7634	0.7031	0.6067	0.5333	0.4756
100	0.9252	0.9179	0.8964	0.8624	0.8007	0.7467	0.6574	0.5868	0.5298
120	0.9368	0.9305	0.9120	0.8824	0.8278	0.7791	0.6964	0.6293	0.5738
140	0.9453	0.9398	0.9236	0.8973	0.8484	0.8041	0.7275	0.6638	0.6102
160	0.9518	0.9469	0.9324	0.9089	0.8647	0.8241	0.7527	0.6924	0.6409
180	0.9569	0.9525	0.9394	0.9181	0.8777	0.8403	0.7737	0.7165	0.6671
200	0.9610	0.9570	0.9451	0.9257	0.8885	0.8538	0.7914	0.7371	0.6897
250	0.9685	0.9653	0.9556	0.9396	0.9086	0.8793	0.8255	0.7776	0.7347
300	0.9736	0.9709	0.9627	0.9491	0.9226	0.8972	0.8500	0.8072	0.7683
350	0.9773	0.9749	0.9678	0.9560	0.9329	0.9105	0.8685	0.8299	0.7944
400	0.9801	0.9780	0.9717	0.9613	0.9407	0.9208	0.8829	0.8478	0.8152

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.90$

$\alpha\backslash\beta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.8042	0.6795	0.5839	0.5103	0.4526	0.4062	0.3684	0.3368	0.3102
3	0.8574	0.7534	0.6668	0.5962	0.5382	0.4901	0.4496	0.4152	0.3855
4	0.8878	0.7991	0.7214	0.6554	0.5994	0.5517	0.5108	0.4753	0.4443
5	0.9074	0.8304	0.7603	0.6990	0.6458	0.5995	0.5590	0.5234	0.4920
6	0.9212	0.8531	0.7896	0.7327	0.6823	0.6377	0.5982	0.5631	0.5317
7	0.9314	0.8705	0.8124	0.7595	0.7118	0.6691	0.6309	0.5965	0.5654
8	0.9392	0.8842	0.8308	0.7813	0.7363	0.6954	0.6585	0.6250	0.5945
9	0.9455	0.8952	0.8458	0.7995	0.7568	0.7178	0.6822	0.6496	0.6198
10	0.9505	0.9043	0.8584	0.8149	0.7744	0.7371	0.7027	0.6712	0.6421
11	0.9548	0.9120	0.8691	0.8280	0.7896	0.7539	0.7208	0.6902	0.6618
12	0.9583	0.9185	0.8782	0.8394	0.8028	0.7686	0.7367	0.7071	0.6795
13	0.9613	0.9241	0.8862	0.8494	0.8145	0.7817	0.7509	0.7222	0.6954
14	0.9640	0.9290	0.8932	0.8582	0.8249	0.7933	0.7637	0.7358	0.7097
15	0.9663	0.9333	0.8994	0.8661	0.8341	0.8038	0.7752	0.7482	0.7228
16	0.9683	0.9371	0.9049	0.8731	0.8425	0.8133	0.7856	0.7594	0.7347
17	0.9701	0.9405	0.9098	0.8794	0.8500	0.8218	0.7951	0.7697	0.7456
18	0.9717	0.9436	0.9142	0.8851	0.8568	0.8297	0.8038	0.7791	0.7557
19	0.9731	0.9463	0.9183	0.8903	0.8631	0.8368	0.8117	0.7878	0.7650
20	0.9744	0.9488	0.9219	0.8950	0.8688	0.8434	0.8191	0.7958	0.7736
21	0.9756	0.9511	0.9253	0.8994	0.8740	0.8495	0.8259	0.8032	0.7816
22	0.9766	0.9532	0.9283	0.9034	0.8789	0.8551	0.8322	0.8101	0.7890
23	0.9776	0.9551	0.9312	0.9071	0.8834	0.8603	0.8380	0.8166	0.7960
24	0.9785	0.9568	0.9338	0.9105	0.8875	0.8652	0.8435	0.8226	0.8025
25	0.9794	0.9585	0.9362	0.9137	0.8914	0.8697	0.8486	0.8282	0.8086
26	0.9801	0.9600	0.9385	0.9166	0.8950	0.8739	0.8534	0.8335	0.8143
27	0.9808	0.9614	0.9406	0.9194	0.8984	0.8779	0.8579	0.8385	0.8197
28	0.9815	0.9627	0.9425	0.9220	0.9016	0.8816	0.8621	0.8431	0.8248
29	0.9821	0.9639	0.9444	0.9244	0.9046	0.8851	0.8661	0.8476	0.8296
30	0.9827	0.9651	0.9461	0.9267	0.9074	0.8884	0.8698	0.8517	0.8342
40	0.9870	0.9735	0.9588	0.9437	0.9284	0.9133	0.8983	0.8836	0.8691
50	0.9895	0.9786	0.9667	0.9543	0.9417	0.9291	0.9165	0.9041	0.8919
60	0.9912	0.9821	0.9720	0.9615	0.9508	0.9400	0.9292	0.9185	0.9079
80	0.9934	0.9865	0.9788	0.9708	0.9625	0.9541	0.9457	0.9373	0.9290
100	0.9947	0.9891	0.9830	0.9764	0.9697	0.9629	0.9560	0.9491	0.9422
120	0.9956	0.9909	0.9857	0.9803	0.9746	0.9688	0.9630	0.9571	0.9512
140	0.9962	0.9922	0.9877	0.9830	0.9781	0.9731	0.9681	0.9630	0.9578
160	0.9967	0.9932	0.9893	0.9851	0.9808	0.9764	0.9719	0.9674	0.9629
180	0.9971	0.9939	0.9904	0.9867	0.9829	0.9789	0.9749	0.9709	0.9668
200	0.9974	0.9945	0.9914	0.9880	0.9846	0.9810	0.9774	0.9737	0.9700
250	0.9979	0.9956	0.9931	0.9904	0.9876	0.9847	0.9818	0.9788	0.9758
300	0.9982	0.9963	0.9942	0.9920	0.9896	0.9872	0.9848	0.9823	0.9798
350	0.9985	0.9969	0.9950	0.9931	0.9911	0.9890	0.9869	0.9848	0.9826
400	0.9987	0.9973	0.9957	0.9940	0.9922	0.9904	0.9885	0.9866	0.9847

Apéndice C: Valores de cuantiles de la distribución beta
$F(x) = 0.90$

$\alpha\backslash\beta$	11	12	15	20	30	40	60	80	100
2	0.2875	0.2678	0.2222	0.1729	0.1198	0.0916	0.0623	0.0472	0.0380
3	0.3598	0.3372	0.2837	0.2242	0.1579	0.1218	0.0836	0.0636	0.0513
4	0.4170	0.3928	0.3344	0.2678	0.1914	0.1488	0.1030	0.0787	0.0637
5	0.4640	0.4389	0.3775	0.3059	0.2215	0.1735	0.1210	0.0929	0.0754
6	0.5035	0.4781	0.4149	0.3397	0.2490	0.1964	0.1380	0.1064	0.0865
7	0.5374	0.5118	0.4477	0.3700	0.2742	0.2177	0.1541	0.1192	0.0972
8	0.5667	0.5413	0.4768	0.3974	0.2976	0.2377	0.1694	0.1316	0.1076
9	0.5925	0.5673	0.5029	0.4224	0.3194	0.2566	0.1841	0.1435	0.1175
10	0.6152	0.5905	0.5264	0.4452	0.3397	0.2744	0.1981	0.1549	0.1272
11	0.6356	0.6112	0.5477	0.4663	0.3588	0.2913	0.2115	0.1660	0.1366
12	0.6538	0.6299	0.5671	0.4857	0.3767	0.3073	0.2245	0.1767	0.1457
13	0.6703	0.6468	0.5849	0.5037	0.3935	0.3226	0.2369	0.1871	0.1546
14	0.6852	0.6623	0.6013	0.5205	0.4095	0.3372	0.2489	0.1972	0.1633
15	0.6989	0.6764	0.6163	0.5361	0.4245	0.3511	0.2605	0.2071	0.1718
16	0.7114	0.6894	0.6303	0.5508	0.4388	0.3643	0.2718	0.2166	0.1800
17	0.7229	0.7013	0.6433	0.5645	0.4524	0.3771	0.2826	0.2259	0.1881
18	0.7335	0.7124	0.6553	0.5773	0.4653	0.3893	0.2931	0.2349	0.1960
19	0.7433	0.7227	0.6666	0.5895	0.4776	0.4010	0.3033	0.2437	0.2037
20	0.7524	0.7322	0.6772	0.6009	0.4893	0.4122	0.3131	0.2523	0.2112
21	0.7609	0.7411	0.6871	0.6117	0.5005	0.4231	0.3227	0.2607	0.2186
22	0.7688	0.7495	0.6964	0.6219	0.5112	0.4335	0.3320	0.2689	0.2259
23	0.7762	0.7573	0.7051	0.6316	0.5215	0.4435	0.3410	0.2768	0.2329
24	0.7832	0.7646	0.7134	0.6408	0.5313	0.4532	0.3498	0.2846	0.2399
25	0.7897	0.7715	0.7212	0.6496	0.5407	0.4625	0.3583	0.2922	0.2467
26	0.7958	0.7780	0.7286	0.6579	0.5497	0.4715	0.3666	0.2997	0.2534
27	0.8016	0.7842	0.7356	0.6658	0.5584	0.4802	0.3747	0.3070	0.2599
28	0.8071	0.7900	0.7423	0.6734	0.5667	0.4886	0.3825	0.3141	0.2664
29	0.8123	0.7955	0.7486	0.6807	0.5748	0.4968	0.3902	0.3211	0.2727
30	0.8172	0.8007	0.7546	0.6876	0.5825	0.5046	0.3977	0.3279	0.2789
40	0.8550	0.8412	0.8020	0.7431	0.6466	0.5715	0.4631	0.3890	0.3352
50	0.8799	0.8680	0.8340	0.7819	0.6935	0.6223	0.5155	0.4396	0.3831
60	0.8974	0.8871	0.8571	0.8104	0.7294	0.6622	0.5584	0.4823	0.4243
80	0.9206	0.9124	0.8881	0.8497	0.7806	0.7211	0.6247	0.5506	0.4920
100	0.9353	0.9284	0.9081	0.8755	0.8155	0.7624	0.6736	0.6028	0.5453
120	0.9454	0.9395	0.9220	0.8937	0.8409	0.7931	0.7112	0.6441	0.5884
140	0.9527	0.9476	0.9323	0.9073	0.8600	0.8167	0.7410	0.6776	0.6239
160	0.9583	0.9538	0.9402	0.9178	0.8751	0.8355	0.7653	0.7053	0.6538
180	0.9628	0.9587	0.9464	0.9262	0.8872	0.8508	0.7853	0.7286	0.6793
200	0.9663	0.9626	0.9514	0.9330	0.8972	0.8635	0.8022	0.7485	0.7013
250	0.9728	0.9698	0.9607	0.9455	0.9158	0.8874	0.8347	0.7874	0.7449
300	0.9772	0.9747	0.9670	0.9541	0.9288	0.9042	0.8581	0.8159	0.7775
350	0.9804	0.9782	0.9716	0.9604	0.9382	0.9166	0.8756	0.8377	0.8026
400	0.9828	0.9809	0.9750	0.9651	0.9455	0.9262	0.8893	0.8548	0.8226

Apéndice D: Valores de la función gamma

k	$\Gamma(k)$	**k**	$\Gamma(k)$	**k**	$\Gamma(k)$	**k**	$\Gamma(k)$
1	1.00000	1.26	0.90440	1.52	0.88704	1.78	0.92623
1.01	0.99433	1.27	0.90250	1.53	0.88757	1.79	0.92877
1.02	0.98884	1.28	0.90072	1.54	0.88818	1.8	0.93138
1.03	0.98355	1.29	0.89904	1.55	0.88887	1.81	0.93408
1.04	0.97844	1.3	0.89747	1.56	0.88964	1.82	0.93685
1.05	0.97350	1.31	0.89600	1.57	0.89049	1.83	0.93969
1.06	0.96874	1.32	0.89464	1.58	0.89142	1.84	0.94261
1.07	0.96415	1.33	0.89338	1.59	0.89243	1.85	0.94561
1.08	0.95973	1.34	0.89222	1.6	0.89352	1.86	0.94869
1.09	0.95546	1.35	0.89115	1.61	0.89468	1.87	0.95184
1.1	0.95135	1.36	0.89018	1.62	0.89592	1.88	0.95507
1.11	0.94740	1.37	0.88931	1.63	0.89724	1.89	0.95838
1.12	0.94359	1.38	0.88854	1.64	0.89864	1.9	0.96177
1.13	0.93993	1.39	0.88785	1.65	0.90012	1.91	0.96523
1.14	0.93642	1.4	0.88726	1.66	0.90167	1.92	0.96877
1.15	0.93304	1.41	0.88676	1.67	0.90330	1.93	0.97240
1.16	0.92980	1.42	0.88636	1.68	0.90500	1.94	0.97610
1.17	0.92670	1.43	0.88604	1.69	0.90678	1.95	0.97988
1.18	0.92373	1.44	0.88581	1.7	0.90864	1.96	0.98374
1.19	0.92089	1.45	0.88566	1.71	0.91057	1.97	0.98768
1.2	0.91817	1.46	0.88560	1.72	0.91258	1.98	0.99171
1.21	0.91558	1.47	0.88563	1.73	0.91467	1.99	0.99581
1.22	0.91311	1.48	0.88575	1.74	0.91683	2	1.00000
1.23	0.91075	1.49	0.88595	1.75	0.91906		
1.24	0.90852	1.5	0.88623	1.76	0.92137		
1.25	0.90640	1.51	0.88659	1.77	0.92376		

Bibliografía

Abramowitz, M. y I. Stegun, 1964. **Handbook of Mathematical Functions.** New York: Dover.

Ash, R. B., 2000. **Probability and measure theory**, Second Edition. USA: Academic Press.

Breiman, L., 1992. **Probability**. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Chan, B., 1982. Derivation of Moment Formulas by Operator Valued Probability Generating Functions. **The American Statistician,** 36(3): 179-181.

Chun, K. L., 2001. **A Course in Probability Theory**, Third Edition. USA: Academic Press.

Cressie, N., A.S. Davis, J.L. Folks, y G.E. Policello, 1981. The Moment Generating Function and Negative Moments. **The American Statistician**, 35(3): 148-150.

Feller, W., 1989. **Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones**. México: Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Gut, A., 2005. **Probability: a graduate course**. USA: Springer.

Hogg, R.V. y A.T. Craig, 1970. **Introduction to Mathematical Statistics**. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Johnson, N.L. y S. Kotz, 1981. Letter to the Editor. **The American Statistician,** 35(4): 268.

Kirmani, S.N.U.A. y M. Esfahani, 1983. A Note on the Moment Generating Function. **The American Statistician,** 37(2): 161.

Kreider, D.L., R.G. Kuller, D.R. Ostberg, y F.W. Perkins, 1966. **An Introduction to Linear Analysis.** Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Link, R.F., 1981. Moments of Discrete Probability Distributions Derived Using Finite Difference Operators. **The American Statistician,** 35(1): 44-46.

Moors, J.J.A., 1986. The Meaning of Kurtosis: Darlington Reexamined. **The American Statistician,** 40(4): 283-284.

Piegorsch, W.W. y G. Casella, 1985. The Existence of the First Negative Moment. **The American Statistician,** 39(1): 60-62.

Pollard, J.H., 1977. **Numerical and Statistical Techniques**. New York: Cambridge University Press.

Rao, B.R. y K.G. Janardan, 1982. On the Moments of Multivariate Discrete Distributions using finite difference operators. **The American Statistician,** 36(4): 381-383.

Robert, C.P. y G. Casella, 1999. **Monte Carlo Statistical Methods.** New York: Springer.

Rosenthal, J. S., 2006. **A first look at rigorous probability theory**, Second Edition. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Shumway, R.H., A.S. Azari y P. Johnson, 1989. Estimating Mean Concentrations Under Transformation for Environmental Data with Detection Limits. **Technometrics**, 31(3): 347-356.

Difusión y Divulgación
Científica yTecnológica

José Manuel Piña Gutiérrez
Rector

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Fabián Chablé Falcón
Director de Difusión y Divulgación Científica y Tecnológica

Francisco Morales Hoil
Jefe del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas

Esta obra se terminó de imprimir el 20 de diciembre de 2015, con un tiraje de 300 ejemplares en los talleres de Impresora Mercantil; Calle Iguala 113; Colonia Centro; Villahermosa, Tabasco, México. El cuidado estuvo a cargo de los autores y del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas de la Dirección de Difusión y Divulgación Científica y Tecnológica de la UJAT.