Segundo Curso sobre Elementos Básicos del Análisis Matemático

Aroldo Pérez Pérez
Justino Alavez Ramírez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"

Segundo Curso sobre Elementos Básicos del Análisis Matemático

C O L E C C I Ó N
HÉCTOR OCHOA BACELIS
Textos de Enseanza de Ciencias Básicas

Guillermo Narváez Osorio

Rector

Gerardo Delgadillo Piñón

Director de la División Académica de Ciencias Básicas

Segundo Curso sobre Elementos Básicos del Análisis Matemático

Aroldo Pérez Pérez

Justino Alavez Ramírez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Primera edición, 2021

Esta obra fue dictaminada mediante el sistema de pares ciego, por el Consejo Divisional Editorial de la División Académica de Ciencias Básicas de la UJAT.

ISBN: 978-607-606-574-7

Edición: Aroldo Pérez Pérez y Justino Alavez Ramírez
Maquetación: Aroldo Pérez Pérez y Justino Alavez Ramírez
Portada: Walk Iria Chi Balan

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México.

Índice general

Introducción **VII**

1. Integración de Riemann-Stieltjes **1**

1.1. Definición y existencia de la integral de Riemann-Stieltjes . . . 1
1.2. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes . . . 13
1.3. Teoremas elementales . . . 23
1.4. Funciones de variación acotada . . . 30
1.5. Integradores de variación acotada . . . 37
1.6. Integración de funciones vectoriales y curvas rectificables . . . 42

2. Sucesiones y series de funciones **51**

2.1. Convergencia puntual . . . 51
2.2. Convergencia uniforme . . . 54
2.3. Convergencia uniforme y continuidad . . . 62
2.4. Convergencia uniforme e integración . . . 67
2.5. Convergencia uniforme y diferenciación . . . 70
2.6. Series de potencias . . . 73
2.7. Fórmula de Taylor . . . 83
2.8. Teorema de Ascoli . . . 88
2.9. Teorema de Stone-Weierstrass . . . 93

3. Funciones de varias variables **99**

3.1. El teorema de punto fijo para contracciones . . . 99
3.2. Normas de operadores lineales . . . 101
3.3. Derivada de funciones de varias variables . . . 107
3.4. Regla de la cadena y regla del producto . . . 116

3.5. Teorema del valor medio y fórmula de Taylor 121
3.6. Teorema de la función inversa 133
3.7. Teorema de la función implícita 138
3.8. Integrales múltiples 143
3.9. Teorema de Lebesgue 149
3.10. Teorema de cambio de variables para integrales múltiples 155

4. Integrales impropias de Riemann **168**
4.1. Tipos de integrales impropias de Riemann 168
4.2. Criterios de convergencia para integrales impropias del 1er tipo 172
4.3. Criterios de convergencia para integrales impropias del 2do tipo 178
4.4. Ejemplos de convergencia para integrales impropias del 3er tipo 180
4.5. Funciones definidas por integrales 183
4.6. Función gamma y función beta 192
4.7. Nociones sobre la transformada de Laplace 198

Bibliografía **205**

Introducción

Este trabajo es una continuación del libro "Introducción Básica al Estudio del Análisis Matemático" de Pérez et al. [25], el cual se escribió con el propósito de ser una guía en la impartición de un primer curso semestral de Análisis Matemático para estudiantes universitarios de la carrera de Matemáticas. En ese primer libro se abordaron, principalmente, conceptos y resultados sobre convergencia y continuidad en espacios métricos; sentando las bases para el estudio de la integración y diferenciación de manera más general y rigurosa que la estudiada en los cursos previos de cálculo. El objetivo del presente trabajo es, entonces, el de servir como guía en la impartición de un segundo curso semestral de Análisis Matemático para estudiantes universitarios. En éste se abordan conceptos como el de integral de Riemann-Stieltjes, convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series, teoría sobre la diferenciación e integración de funciones de varias variables y las integrales impropias de Riemann. Se espera que este tomo y el anterior, sean (juntos), una referencia de caracter elemental y autocontenida que les permita a los estudiantes comprender con mayor profundidad, que la adquirida en sus cursos previos de cálculo, estos valiosos conceptos de la matemática. Con este propósito, al final de cada sección, se presentan varios problemas relativos al tema específico desarrollado en esa sección. Esperamos también, que pueda servir como guía a los profesores en la impartición de los temas aquí abordados y que se han dispuesto de la manera siguiente. En el capítulo 1 se inicia con la integración de Riemann-Stieltjes, primero para integradores no decrecientes, mediante límites de sumas inferiores y superiores; para luego, extender los conceptos y resultados a una clase de integradores más amplia, la de las funciones de variación acotada, que se caracterizan por poder expresarse como la diferencia de dos funciones no decrecientes. Se finaliza este primer capítulo con el estudio de la integración de Riemann-Stieltjes de funciones vectoriales y la determinación de la longitud de curvas. En el capítulo 2 se abordan la convergencia puntual y la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones. Se muestra que la mera convergencia puntual no garantiza la adquisición, por la función límite, de propiedades importantes de las funciones de la sucesión, tales como continuidad, integrabilidad y diferenciación, entre otras propiedades concernientes al intercambio de límites. Sin embargo se ve que la convergencia uniforme si garantiza, en la mayoría de los casos, que la función límite herede las propiedades de las funciones de la sucesión. En este segundo capítulo se analiza también la convergencia de las series de potencias y se muestra que toda función que puede ser expresada como una serie de potencias (función analítica) es infinitamente diferenciable y que sus derivadas se pueden obtener diferenciando la serie término a término. Se presenta además la fórmula de Taylor para funciones de una variable y se muestra que si el residuo, de una función infinitamente diferenciable en un punto, tiende a cero, entonces dicha función puede ser expresada en términos de su serie de Taylor alrededor de ese punto. Finalmente, se estudia también el teorema de Ascoli que da condiciones bajo las cuales una sucesión de funciones continuas definidas sobre un espacio métrico compacto tiene una subsucesión uniformemente convergente; así como el teorema de Stone-Weierstrass que da condiciones suficientes bajo las cuales un subconjunto del espacio de las funciones continuas definidas sobre un espacio métrico compacto es denso en tal espacio. En el capítulo 3 se da la definición rigurosa de la derivada de una función de un subconjunto abierto E de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y su representación matricial en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Se muestra además que una función es continuamente diferenciable en E si y sólo si todas sus derivadas parciales existen y son continuas en E. Se estudian dos técnicas de diferenciación, una para la composición de funciones, llamada la regla de la cadena y otra para el producto, llamada regla de Leibniz. Se da también la generalización a funciones de varias variables del teorema del valor medio y el teorema de Taylor. Se estudia el teorema de la función inversa y el teorema de la función implícita, los cuales resultan ser equivalentes. El primero da condiciones suficientes para que una función definida en un conjunto abierto E de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ sea (localmente) invertible y se expresa la derivada de la función inversa en términos de la inversa de la derivada de la función. El segundo da condiciones suficientes bajo las cuales un sistema de ecuaciones de la forma $F(x,y)=0$ tiene solución única (localmente) para la variable $y \in \mathbb{R}^m$ en términos de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, donde F es una función de un subconjunto abierto E de $\mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^m$ y da además una fórmula para calcular la derivada $Df(x)$, donde $f(x)$ se define como el valor único, y, tal que $F(x,y)=0$. Se estudia la generalización de la integral de Riemann para funciones de varias variables con valores reales, y se da una condición necesaria y suficiente para que una función con valores reales acotada definida sobre un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ sea Riemann integrable sobre dicho conjunto (teorema de Lebesgue). Se finaliza este tercer capítulo con un teorema fundamental en la evaluación de integrales múltiples, a saber, el teorema de cambio de variables y su aplicación en tres casos particulares: coordenadas polares, esféricas y cilíndricas. Finalmente, en el capítulo 4 se analizan los diferentes tipos de integrales impropias de Riemann, se dan criterios de convergencia y ejemplos para los diferentes tipos de integrales. Se analizan propiedades de funciones que son definidas por medio de integrales impropias de Riemann y su aplicación para obtener el límite de algunas integrales impropias convergentes. Se analizan dos funciones definidas por integrales impropias de gran importancia en las aplicaciones; a saber, la función gamma y la función beta. Por último, se da una breve introducción al estudio de la transformada de Laplace, la cual desarrolla un papel fundamental en las aplicaciones, en particular, en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Capítulo 1

Integración de Riemann-Stieltjes

1.1. Definición y existencia de la integral de Riemann-Stieltjes

Consideremos un alambre sobre el eje x, con extremos en $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y supongamos que este alambre tiene una distribución de masa no uniforme. Por ejemplo, cuando x varía, el alambre puede variar ligeramente en espesor o en densidad (masa por unidad de longitud). Supongamos que se desea calcular, si es posible, la densidad en cada punto como una función $f(x)$.

Lo que podemos medir de manera eficaz es la distribución de la masa a lo largo del alambre. Es decir, podemos medir fácilmente la masa de cualquier segmento del alambre, y conocer por lo tanto, la masa del segmento situado a lo largo del intervalo $[a, x]$ como una función $F(x)$. De esta manera, somos capaces de medir la masa de pequeños trozos como $dm = F(x + dx) - F(x) = dF$, lo cual nos lleva a definir la densidad como $f(x) = \frac{dm}{dx} = F'(x)$, la derivada de la distribución $F(x)$, si F es, desde luego, diferenciable.

Pero aquí F es una función creciente, no necesariamente diferenciable. ¿Qué podemos hacer en el caso en que F no es diferenciable? ¿Podríamos, por ejemplo, encontrar aún el centro de masa? (el punto de equilibrio del alambre).

Como suele suceder, desde el punto de vista físico, mucho de lo que se requiere conocer no depende de la diferenciación, sino más bien en la integración. Para ver esto, utilicemos, solamente, el formalismo del curso inicial de cálculo para escribir dF como la masa de un pequeño trozo de alambre. Así, la masa total es

$$m = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a);$$

y pueden calcularse también varios momentos como integrales, a saber,

$$\mu = \frac{1}{m} \int_a^b x dF(x) \quad \text{(el centro de masa)}$$

y

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} \int_a^b (x-\mu)^2 \, dF(x) \quad \text{(el momento de inercia sobre } \mu\text{)}.$$

Podríamos, incluso, querer considerar varias medidas φ y calcular expresiones tales como

$$\frac{1}{m} \int_a^b \varphi(x) dF(x) \quad \text{(valor esperado de } \varphi\text{)}.$$

El punto aquí, es que es posible dar sentido a estas integrales de Riemann “generalizadas” sin hacer ninguna suposición sobre la diferenciabilidad de F. Aunque, como veremos más adelante, si F' existe, esta nueva integral es consistente con la de Riemann y en este caso,

$$\int_a^b \varphi(x) dF(x) = \int_a^b \varphi(x) F'(x) dx.$$

En particular, veremos que en el caso $F(x) = x$ obtenemos la integral de Riemann.

El concepto de integral, informalmente introducido en las líneas anteriores, data de 1894 y se debe al astrónomo y matemático holandés Thomas Joannes Stieltjes. Esta integral, llamada la integral de Riemann-Stieltjes, como se aprecia en la introducción inicial, tiene aplicaciones en física e ingeniería, así como en varias áreas de las matemáticas. En particular, esta integral permite tratar simultáneamente a las variables aleatorias continuas y discretas, lo cual conlleva a aplicaciones a la teoría de la probabilidad y estadística.

De la discusión anterior, se observa que la integración de Riemann-Stieltjes comprende dos funciones f y F, que a menos que especifiquemos lo contrario, supondremos que son funciones de valores reales definidas en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ con f acotada y F no decreciente.

Dada una **partición** $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, es decir, un conjunto finito de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tales que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, escribiremos

$$\Delta F_i = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Notemos que $\Delta F_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, y que $\sum_{i=1}^n \Delta F_i = F(b) - F(a)$.

Ahora, para cada $i (= 1, \ldots, n)$, definamos

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad \text{y} \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

y consideremos

$$L(P,f,F)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta F_i \quad \text{y} \quad U(P,f,F)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta F_i.$$

A los números $L(P,f,F)$ y $U(P,f,F)$ les llamaremos, respectivamente, **suma inferior de Riemann-Stieltjes** de f respecto a F sobre P y **suma superior de Riemann-Stieltjes** de f respecto a F sobre P.

Es claro que para cualquier partición P de $[a,b]$,

$$L(P,f,F)\leq U(P,f,F). \tag{1.1}$$

Recordemos de nuestros cursos de cálculo elemental, que una partición P^* de $[a,b]$ es llamada un **refinamiento** de la partición P si $P^*\supset P$. Así, dadas dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, $P^*=P_1\cup P_2$ es un refinamiento tanto para P_1 como para P_2, y nos referiremos a tal refinamiento como el **refinamiento común** de P_1 y P_2.

Proposición 1.1 *Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ no decreciente y P, P^* particiones de $[a,b]$. Si P^* es un refinamiento de P, entonces*

$$L(P,f,F)\leq L(P^*,f,F) \tag{1.2}$$

y

$$U(P^*,f,F)\leq U(P,f,F). \tag{1.3}$$

Demostración. Supongamos primero que P^* tiene solamente un punto más que P, es decir, si $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, entonces $P^*=\{x_0,\ldots,x_{i-1},x^*,x_i,\ldots,x_n\}$. Consideremos

$$w_1=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x^*} f(x) \quad \text{y} \quad w_2=\inf_{x^*\leq x\leq x_i} f(x).$$

Es claro que $w_1\geq m_i$ y $w_2\geq m_i$, donde $m_j=\inf_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f(x)$, $j=1,\ldots,n$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&L(P^*,f,F)-L(P,f,F)\\
&\quad= \sum_{j=1}^{i-1} m_j\Delta F_j + w_1\left[F(x^*)-F(x_{i-1})\right]+w_2\left[F(x_i)-F(x^*)\right]+\sum_{j=i+1}^{n} m_j\Delta F_j\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{i-1} m_j\Delta F_j - m_i\Delta F_i-\sum_{j=i+1}^{n} m_j\Delta F_j\\
&\quad= w_1\left[F(x^*)-F(x_{i-1})\right]+w_2\left[F(x_i)-F(x^*)\right]-m_i\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]\\
&\quad= (w_1-m_i)\left[F(x^*)-F(x_{i-1})\right]+(w_2-m_i)\left[F(x_i)-F(x^*)\right]\\
&\quad\geq 0.
\end{aligned}$$

Si P^* tiene k puntos más que P, la conclusión de (1.2) se sigue aplicando k veces el razonamiento anterior.

Debido a que $U(P, f, F) = -L(P, -f, F)$ (problema 1), (1.3) se sigue de lo que tenemos ya demostrado. ■

Corolario 1.2 *Para cualesquiera dos particiones P y Q de $[a, b]$,*

$$L(P, f, F) \leq U(Q, f, F). \tag{1.4}$$

Demostración. Sea P^* el refinamiento común de P y Q. Entonces por la proposición 1.1 y (1.1) obtenemos

$$L(P, f, F) \leq L(P^*, f, F) \leq U(P^*, f, F) \leq U(Q, f, F).$$

■

Considerando la partición $R = \{a, b\}$, se observa de la proposición 1.1 y el corolario 1.2 que para toda partición P y Q de $[a, b]$,

$$m\left[F(b) - F(a)\right] \leq L(P, f, F) \leq U(Q, f, F) \leq M\left[F(b) - F(a)\right],$$

donde $m = \text{ínf}_{a \leq x \leq b} f(x)$ y $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$.

De esta manera, denotando por $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones P de $[a, b]$, podemos definir

$$\underline{\int_a^b} f dF = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(P, f, F) \tag{1.5}$$

y

$$\overline{\int_a^b} f dF = \operatorname*{ínf}_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(P, f, F), \tag{1.6}$$

valores reales a los que llamaremos **integral inferior de Riemann-Stieltjes** de f respecto a F sobre $[a, b]$ e **integral superior de Riemann-Stieltjes** de f respecto a F sobre $[a, b]$, respectivamente.

Se observa también del corolario 1.2 que

$$\underline{\int_a^b} f dF \leq \overline{\int_a^b} f dF.$$

En efecto, fijando Q se sigue de (1.4) que

$$\underline{\int_a^b} f dF = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(P, f, F) \leq U(Q, f, F).$$

Como la anterior desigualdad es válida para cualquier partición Q de $[a,b]$, se obtiene

$$\underline{\int_a^b} f dF \leq \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P,f,F) = \overline{\int_a^b} f dF.$$

Tenemos ya lo suficiente para dar la definición de la integral de Riemann-Stieltjes de funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotadas respecto a funciones $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ no decrecientes.

Definición 1.3 *Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función no decreciente. Si*

$$\underline{\int_a^b} f dF = \overline{\int_a^b} f dF,$$

diremos que f es **Riemann-Stieltjes integrable** con respecto a F sobre $[a,b]$ y al valor común, que denotaremos por

$$\int_a^b f dF \quad \left(\text{o por } \int_a^b f(x)dF(x)\right) \tag{1.7}$$

le llamaremos la **integral de Riemann-Stieltjes** de f respecto a F sobre $[a,b]$.

A la función f en (1.7) le llamaremos el **integrando** y a F el **integrador**. Denotaremos a la clase de todas las funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto a F sobre $[a,b]$ por $\mathcal{R}[F;a,b]$.

Es conveniente completar la definición de la integral de Riemann-Stieltjes considerando

$$\int_b^a f dF = -\int_a^b f dF$$

cuando la integral de la derecha exista y

$$\int_a^a f dF = 0$$

para todas las funciones f y F.

Notemos que la integral de Riemann-Stieltjes (1.7) se reduce a la integral de Riemann de f sobre $[a,b]$ cuando $F(x)=x$ para todo $x\in[a,b]$. A la clase de todas las funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ la denotaremos por $\mathcal{R}[a,b]$.

Ejemplo 1.4 *Toda función $f \equiv c$ constante es Riemann-Stieltjes integrable respecto a cualquier función no decreciente F y*

$$\int_a^b c dF = c\left[F(b) - F(a)\right].$$

Esto se sigue del hecho de que, para cada partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$,

$$L(P, c, F) = U(P, c, F) = \sum_i c\Delta F_i = c\left[F(b) - F(a)\right].$$

Ejemplo 1.5 *Consideremos la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x)$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales y $1_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la* ***función indicadora*** *en $\mathbb{Q}$, es decir, la función que toma el valor 1 para $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ y el valor 0 para $x \notin [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Entonces para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$,*

$$m_i = \operatorname*{ínf}_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0 \quad y \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, para cualquier función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ no decreciente

$$\underline{\int_a^b} f dF = 0 \quad y \quad \overline{\int_a^b} f dF = F(b) - F(a).$$

Así, si F no es una función constante, $f \notin \mathcal{R}[F; a, b]$.

Estableceremos ahora una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$. En este punto es conveniente recordar nuestra convención de que f y F son funciones con valores reales que son, respectivamente, acotada y no decreciente en $[a, b]$.

Teorema 1.6 *La función $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ para la cual*

$$U(P, f, F) - L(P, f, F) < \epsilon. \tag{1.8}$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Se sigue de la definición 1.3 y (1.5), que existe una partición P_1 de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f dF - L(P_1, f, F) < \frac{\epsilon}{2},$$

y de la definición 1.3 y (1.6), que existe una partición P_2 de $[a,b]$ tal que

$$U(P_2,f,F) - \int_a^b f dF < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando el refinamiento común, $P = P_1 \cup P_2$, de P_1 y P_2 se sigue de la proposición 1.1 que

$$U(P,f,F) \leq U(P_2,f,F) < \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b f dF < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + L(P_1,f,F) \leq \epsilon + L(P,f,F),$$

de donde

$$U(P,f,F) - L(P,f,F) < \epsilon.$$

Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, existe, por hipótesis, una partición P de $[a,b]$ tal que $U(P,f,F) - L(P,f,F) < \epsilon$. Como

$$L(P,f,F) \leq \underline{\int_a^b} f dF \leq \overline{\int_a^b} f dF \leq U(P,f,F),$$

entonces

$$\overline{\int_a^b} f dF - \underline{\int_a^b} f dF < \epsilon.$$

Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, se sigue que

$$\overline{\int_a^b} f dF = \underline{\int_a^b} f dF.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$. ■

Observación 1.7 *De las desigualdades (1.2) y (1.3) se sigue inmediatamente que si P es una partición para la cual (1.8) se cumple, entonces se cumple también para cualquier refinamiento P^* de P.*

Denotaremos al espacio de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas por $\mathcal{C}[a,b]$. Notemos que si $f \in \mathcal{C}[a,b]$, entonces, debido a que $[a,b]$ es compacto en $\mathbb{R}$, f es acotada en $[a,b]$.

Teorema 1.8 $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[F;a,b]$.

Demostración. Consideremos $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Del teorema 1.6, tenemos que basta encontrar una partición P de $[a,b]$ tal que $U(P,f,F) - L(P,f,F) < \epsilon$.

Elijamos $\eta > 0$ de manera que

$$[F(b) - F(a)]\,\eta < \epsilon.$$

Como f es continua en el compacto $[a,b]$, se sigue que es uniformemente continua en $[a,b]$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mid f(x) - f(y) \mid < \eta \tag{1.9}$$

cuando $x, y \in [a,b]$ y $\mid x - y \mid < \delta$.

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ tal que $\Delta x_i < \delta$ para todo $i (= 1, \ldots, n)$, entonces de (1.9) se obtiene que

$$M_i - m_i \leq \eta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto

$$U(P,f,F) - L(P,f,F) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta F_i \leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \eta\,[F(b) - F(a)] < \epsilon.$$

Esto demuestra que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$. ∎

Dada una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, definamos

$$\|P\| = \text{máx}\left\{x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

A $\|P\|$ le llamaremos la **malla** de la partición P.

Teorema 1.9 *Si f es monótona en $[a,b]$ y F es continua (recordemos que es, además, no decreciente), entonces $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$.*

Demostración. Notemos primero que por ser F continua en el compacto $[a,b]$, F es uniformemente continua. Supongamos ahora que f es no decreciente. Entonces si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$,

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{y} \quad M_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Luego

$$\begin{aligned}
U(P,f,F)-L(P,f,F) &= \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\Delta F_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right] \\
&= \max_{1\leq i\leq n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]\left[f(b)-f(a)\right]\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $\|P\|\to 0$, por la continuidad uniforme de F. El caso en que f es no creciente es similar y se dejará como ejercicio al lector. ■

Teorema 1.10 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Si f tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y F es continua en todo punto de discontinuidad de f, entonces $f\in\mathcal{R}[F;a,b]$.*

Demostración. Sean $\epsilon>0$ dado y $M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Si $M=0$, entonces $f\equiv 0$ en $[a,b]$ y por consiguiente será Riemann-Stieltjes integrable respecto a F sobre $[a,b]$. Así que supondremos $M>0$. Sea D el conjunto de puntos de discontinuidad de f en $[a,b]$, digamos $D=\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ con $z_1<z_2<\cdots<z_k$.

Como F es continua en z_j, existe $\delta_j>0$ tal que

$$|x-z_j|<\delta_j \quad \text{implica} \quad |F(x)-F(z_j)|<\frac{\epsilon}{8kM}, \qquad \text{para} \;\; j=1,\ldots,k.$$

Sea $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k\}>0$, y sean $u_j,v_j\in[a,b]$, $j=1,\ldots,k$, tales que

1. $u_1\leq z_1<v_1<u_2<z_2<v_2<\cdots<u_{k-1}<z_{k-1}<v_{k-1}<u_k<z_k\leq v_k$ y
2. $\max\{v_j-u_j,\ j=1,\ldots,k\}<\delta_0$.

De la elección de δ_0 se sigue que

$$F(v_j)-F(u_j)=[F(v_j)-F(z_j)]+[F(z_j)-F(u_j)]<\frac{\epsilon}{8kM}+\frac{\epsilon}{8kM}=\frac{\epsilon}{4kM},$$

de manera que

$$\sum_{j=1}^{k}[F(v_j)-F(u_j)]<\sum_{j=1}^{k}\frac{\epsilon}{4kM}=\frac{\epsilon}{4M}. \tag{1.10}$$

Sea

$$K = [a, b] - \bigcup_{j=1}^{k} (u_j, v_j) = [a, u_1] \cup [v_1, u_2] \cup \cdots \cup [v_{k-1}, u_k] \cup [v_k, b].$$

Como K es una unión finita de conjuntos compactos, es compacto, y debido a que f es continua en K se sigue que f es uniformemente continua en K. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $|s - t| < \delta$, $s, t \in K$ implica

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]}. \tag{1.11}$$

Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ con las siguientes propiedades:

1. $u_j, v_j \in P, \;\; j = 1, \ldots, k$.

2. Ningún punto del segmento (u_j, v_j) está en $P, \;\; j = 1, \ldots, k$.

3. Si x_{i-1} no es uno de los u_j, entonces $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$.

Así que de (1.10) y (1.11) se sigue que

$$\begin{aligned}
&U(P, f, F) - L(P, f, F) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{k} [M_j - m_j][F(v_j) - F(u_j)] + \sum_{x_{i-1} \neq u_j, j=1,\ldots,k} [M_i - m_i][F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&\quad \leq 2M \sum_{j=1}^{k} [F(v_j) - F(u_j)] + \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]} \sum_{x_{i-1} \neq u_j,\; j=1,\ldots,k} \Delta F_i \\
&\quad < 2M \tfrac{\epsilon}{4M} + \tfrac{\epsilon}{2[F(b)-F(a)]} [F(b) - F(a)] = \epsilon,
\end{aligned}$$

con $\epsilon > 0$ arbitrario. Así que se sigue una vez más del criterio de integrabilidad (teorema 1.6) que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$. ■

El siguiente ejemplo muestra que si f y F tienen un punto de discontinuidad en común, entonces f no es necesariamente Riemann-Stieltjes integrable respecto a F.

Ejemplo 1.11 *Definamos $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$; y $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $F(x) = 1$ si $x > 0$. Notemos que f y F son ambas discontinuas en 0. Ahora, si P es una partición con $0 \in P$, digamos $x_{j-1} < 0 < x_{j+1}$, entonces $m_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $M_i = 0$ para $i \neq j, j+1$ y $M_j = M_{j+1} = 1$. Además $\Delta F_i = 0$ para todo $i \neq j + 1$ y $\Delta F_{j+1} = 1$. Por lo tanto*

$$U(P, f, F) = 1 \quad \text{y} \quad L(P, f, F) = 0.$$

Ésto, junto con la observación 1.7 muestra que $f \notin \mathcal{R}[F;-1,1]$ (dado que para cualquier partición Q de $[-1,1]$ puede considerarse el refinamiento $P = Q \cup \{0\}$).

Problemas

1. Demuestre que
$$U(P,f,F) = -L(P,-f,F)$$
y use esta igualdad para demostrar (1.3).

2. Demuestre que si f es no creciente en $[a,b]$ y F es continua y no decreciente en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$.

3. Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$ tal que
$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$
Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

4. Demuestre que si $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$, entonces $L(P,f,F), U(P,f,F) \to \int_a^b f dF$ cuando $\|P\| \to 0$.

5. Sea $F \in \mathcal{C}[a,b]$ no decreciente. Demuestre que si f es acotada en $[a,b]$ y para cada $0 < h < b-a$, $f \in \mathcal{R}[F;a+h,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y
$$\int_a^b f dF = \lim_{h \downarrow 0} \int_{a+h}^b f dF.$$

6. Sean $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y $\epsilon > 0$ dado. Si (1.8) se cumple para la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, demuestre que
a)
$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)| \Delta F_i < \epsilon$$
para cualesquiera puntos $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
b)
$$\left| \int_a^b f dF - \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta F_i \right| < \epsilon$$
para cualesquiera puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

7. Suponga que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ de manera que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta F_i \right| < \epsilon,$$

para cualesquiera puntos $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y que $I = \int_a^b f dF$.

8. Sean $F, G, H : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por $F = 1_{(0,1]}$, $G = 1_{[0,1]}$ y $H = \frac{1}{2}(F + G)$. Dada $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ acotada, demuestre que
   a) $f \in \mathcal{R}[F; -1, 1]$ si y sólo si $f(0^+) = f(0)$, en cuyo caso

$$\int_{-1}^{1} f dF = f(0).$$

   b) $f \in \mathcal{R}[G; -1, 1]$ si y sólo si $f(0^-) = f(0)$, en cuyo caso

$$\int_{-1}^{1} f dG = f(0).$$

   c) $f \in \mathcal{R}[H; -1, 1]$ si y sólo si f es continua en 0, en cuyo caso

$$\int_{-1}^{1} f dF = \int_{-1}^{1} f dG = \int_{-1}^{1} f dH = f(0).$$

   Donde $f(0^+) = \lim_{x \downarrow 0} f(x)$ y $f(0^-) = \lim_{x \uparrow 0} f(x)$.

9. Diremos que una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada** si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que F es constante en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$. El número $S_i = F\left(x_i^+\right) - F\left(x_i^-\right)$, es llamado el salto de F en x_i si $i = 1, \ldots, n-1$. El salto en a es $S_0 = F(a^+) - F(a)$ y el salto en b es $S_n = F(b) - F(b^-)$.
   a) Suponga que F es no decreciente y que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada que es continua en cada x_i, demuestre que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y que

$$\int_a^b f dF = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) S_i.$$

   b) Si f es continua en [1,n], calcule $\int_1^n f(x) d[x]$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

1.2. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes

Teorema 1.12 *(Linealidad en el integrando) Sean $f, g \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces*
i) $cf \in \mathcal{R}[F; a, b]$ *y* $\int_a^b (cf) dF = c \int_a^b f dF$.
ii) $f + g \in \mathcal{R}[F; a, b]$ *y* $\int_a^b (f + g) dF = \int_a^b f dF + \int_a^b g dF$.

Demostración. i) El resultado es obvio para el caso en que $c = 0$. Supongamos entonces que $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, F) - L(P, f, F) < \frac{\epsilon}{|c|}, \tag{1.12}$$

la existencia de tal P se sigue del criterio de integrabilidad dado en el teorema 1.6.

Si $c > 0$,

$$\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (cf)(x) = c \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (cf)(x) = c \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad i = 1, \ldots, n,$$

de lo cual

$$U(P, cf, F) = cU(P, f, F) \quad \text{y} \quad L(P, cf, F) = cL(P, f, F). \tag{1.13}$$

Ahora, si $c < 0$,

$$\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (cf)(x) = |c| \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (-f(x)) = -|c| \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = c \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

y similarmente,

$$\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (cf)(x) = c \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

De lo cual,

$$U(P, cf, F) = cL(P, f, F) \quad \text{y} \quad L(P, cf, F) = cU(P, f, F). \tag{1.14}$$

De (1.13) y (1.14) se sigue que

$$U(P, cf, F) - L(P, cf, F) = |c| \left[U(P, f, F) - L(P, f, F) \right]$$

para cualquier $c \neq 0$, y así, por (1.12),

$$U(P, cf, F) - L(P, cf, F) < \epsilon,$$

lo cual demuestra (teorema 1.6) que $cf \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

Como (1.13) es válido para toda partición P de $[a, b]$ y $f, cf \in \mathcal{R}[F; a, b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b cf dF &= \overline{\int_a^b} cf dF = \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P, cf, F)\\ &= c \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P, f, F) = c\overline{\int_a^b} f dF = c\int_a^b f dF\end{aligned}$$

para $c > 0$. También, debido a que (1.14) es válido para toda partición P de $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b cf dF &= \overline{\int_a^b} cf dF = \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P, cf, F)\\ &= \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} [cL(P, f, F)] = c \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} L(P, f, F) = c\underline{\int_a^b} f dF = c\int_a^b f dF\end{aligned}$$

si $c < 0$.

ii) Debido a que para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) + \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x) &\leq \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} (f+g)(x)\\ &\leq \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} (f+g)(x) \leq \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) + \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x),\end{aligned}$$

se sigue que

$$L(P, f, F) + L(P, g, F) \leq L(P, f+g, F) \leq U(P, f+g, F) \leq U(P, f, F) + U(P, g, F). \quad (1.15)$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, se sigue nuevamente del criterio de integrabilidad dado en el teorema 1.6 que existen particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ tales que

$$U(P_1, f, F) - L(P_1, f, F) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad U(P_2, g, F) - L(P_2, g, F) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.16)$$

Como (1.16) se cumple si se reemplazan P_1 y P_2 por su refinamiento común $P = P_1 \cup P_2$, se sigue de (1.15) que

$$\begin{aligned}U(P, f+g, F) - L(P, f+g, F) &\leq [U(P, f, F) - L(P, f, F)] + [U(P, g, F) - L(P, g, F)]\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $f + g \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

Ahora, de (1.16), con el refinaniento P, se tiene

$$U(P,f,F) < L(P,f,F) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f dF + \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$U(P,g,F) < L(P,g,F) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b g dF + \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, por (1.15),

$$\int_a^b (f+g) dF \leq U(P,f+g,F) \leq U(P,f,F) + U(P,g,F) < \int_a^b f dF + \int_a^b g dF + \epsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $\epsilon > 0$, se concluye que

$$\int_a^b (f+g) dF \leq \int_a^b f dF + \int_a^b g dF.$$

La desigualdad contraria se obtiene reemplazando f y g por $-f$ y $-g$, respectivamente, y aplicando el inciso i) con $c = -1$. ■

El siguiente teorema, cuya demostración se dejará de ejercicio al lector, muestra que la integral de Riemann-Stieltjes es, también, lineal en el integrador.

Teorema 1.13 *(Linealidad en el integrador) Sean c una constante no negativa, $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y $f \in \mathcal{R}[G;a,b]$. Entonces*

i) $f \in \mathcal{R}[cF;a,b]$ *y* $\int_a^b f d(cF) = c \int_a^b f dF$.

ii) $f \in \mathcal{R}[F+G;a,b]$ *y* $\int_a^b f d(F+G) = \int_a^b f dF + \int_a^b f dG$.

El siguiente resultado nos indica que la integral de Riemann-Stieltjes es monótona sobre el integrando.

Teorema 1.14 *(Monotonía de la integral) Si $f, g \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f dF \leq \int_a^b g dF.$$

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición (arbitraria) de $[a,b]$. Definamos

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad \text{y} \quad M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Claramente, $M_i \leq M_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$U(P, f, F) \leq U(P, g, F). \tag{1.17}$$

Como la desigualdad (1.17) es válida para toda partición P de $[a, b]$, se sigue que

$$\int_a^b f dF = \overline{\int_a^b} f dF \leq \overline{\int_a^b} g dF = \int_a^b g dF.$$

■

Analizaremos ahora la integrabilidad del producto y el cociente de funciones.

Teorema 1.15 *Sean* $f, g \in \mathcal{R}[F; a, b]$. *Entonces*
i) $fg \in \mathcal{R}[F; a, b]$.
ii) Si $\inf_{a \leq x \leq b} |f(x)| > 0$, $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

Demostración. Probaremos únicamente i) y dejaremos ii) como ejercicio al lector.

Debido a que f y g son acotadas, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Ahora, dado $\epsilon > 0$, consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, F) - L(P, f, F) < \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{y} \quad U(P, g, F) - L(P, g, F) < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{1.18}$$

Como

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} &\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (fg)(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (fg)(x) \\ \leq\ & M \left[\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \right] + M \left[\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x) \right], \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n$. De donde

$$U(P, fg, F) - L(P, fg, F) \leq M[U(P, f, F) - L(P, f, F)] + M[U(P, g, F) - L(P, g, F)]. \tag{1.19}$$

De (1.18) y (1.19) obtenemos

$$U(P, fg, F) - L(P, fg, F) < \epsilon.$$

Lo cual demuestra que $fg \in \mathcal{R}[F;a,b]$. ■

Notemos, tomando $g = f$ en i) del teorema 1.15 que $f^2 \in \mathcal{R}[F;a,b]$ si $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$. El siguiente resultado involucra las integrales de f^2, g^2 y fg, y es conocido como la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** para integrales de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.16 *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales) Si $f, g \in \mathcal{R}[F;a,b]$, entonces*

$$\left|\int_a^b fg dF\right| \leq \left(\int_a^b f^2 dF\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 dF\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.20}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $f^2, g^2, fg \in \mathcal{R}[F;a,b]$, existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(P, f^2, F) - L(P, f^2, F) < \epsilon, \;\; U(P, g^2, F) - L(P, g^2, F) < \epsilon \text{ y } U(P, fg, F) - L(P, fg, F) < \epsilon.$$

Luego por el problema 6 b) de la sección 1.1,

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)^2 \Delta F_i - \int_a^b f^2 dF\right| < \epsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^n g(t_i)^2 \Delta F_i - \int_a^b g^2 dF\right| < \epsilon \quad \text{y}$$

$$\left|\sum_{i=1}^n (fg)(t_i) \Delta F_i - \int_a^b fg dF\right| < \epsilon$$

para cualesquiera $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Tenemos así, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas (véase el lema 3.1 en Pérez et al. [25]) y el hecho de que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b fg dF\right| - \epsilon \;\; &\leq \;\; \left|\sum_{i=1}^n f(t_i) g(t_i) \Delta F_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i) \left(\Delta F_i\right)^{\frac{1}{2}} g(t_i) \left(\Delta F_i\right)^{\frac{1}{2}}\right| \\
&\leq \;\; \left(\sum_{i=1}^n f(t_i)^2 \Delta F_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n g(t_i)^2 \Delta F_i\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.21) \\
&\leq \;\; \left(\int_a^b f^2 dF + \epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 dF + \epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como (1.21) es válido para cualquier $\epsilon > 0$, (1.20) se cumple. ■

Teorema 1.17 *Si $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ y $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $g = \varphi \circ f \in \mathcal{R}[F;a,b]$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado y $K = \sup_{m \leq t \leq M} |\varphi(t)|$. Si K=0, entonces $0 \equiv g \in \mathcal{R}[F; a, b]$. Así que supondremos que $K > 0$. Como φ es continua en $[m, M]$ y $[m, M]$ es compacto, se sigue que φ es uniformemente continua en $[m, M]$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{4K}$ y $s, t \in [m, M]$, $|s - t| < \delta$ implica que

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]}. \tag{1.22}$$

Ahora, como $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se sigue del criterio de integrabilidad (teorema 1.6) que existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, F) - L(P, f, F) < \delta^2. \tag{1.23}$$

Sean $m_i = \text{ínf}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$, $m_i^* = \text{ínf}_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x)$ y $M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x)$, $i = 1, \ldots, n$; y consideremos $A = \{i | M_i - m_i < \delta\}$ y $B = \{i | M_i - m_i \geq \delta\}$.

Si $i \in A$, entonces para $z, w \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene que $|f(z) - f(w)| < \delta$, y esto implica por (1.22) que $|\varphi(f(z)) - \varphi(f(w))| < \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]}$, que a su vez implica que

$$M_i^* - m_i^* \leq \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]}. \tag{1.24}$$

Ahora, si $i \in B$ se sigue de (1.23) que

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta F_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta F_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta F_i < \delta^2,$$

de manera que $\sum_{i \in B} \Delta F_i < \delta$. De aquí, junto con (1.24), el hecho de que $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ y la elección de δ, se sigue que

$$\begin{aligned}
U(P, g, F) - L(P, g, F) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta F_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta F_i \\
&\leq \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]} \sum_{i \in A} \Delta F_i + 2K \sum_{i \in B} \Delta F_i \\
&\leq \frac{\epsilon}{2[F(b) - F(a)]} [F(b) - F(a)] + 2K\delta \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Una vez más por el criterio de integrabilidad (teorema 1.6), se sigue que $g \in \mathcal{R}[F; a, b]$. ■

Dejaremos la demostración del siguiente resultado como ejercicio al lector.

Proposición 1.18 *Sea $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$.*

i) $|f| \in \mathcal{R}[F;a,b]$ *y* $\left|\int_a^b f dF\right| \leq \int_a^b |f| dF$.

ii) Si $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces* $\left|\int_a^b f dF\right| \leq M[F(b)-F(a)]$.

Proposición 1.19 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ no decreciente. Si $c \in (a,b)$, $a < b$, entonces $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$ si y sólo si $f \in \mathcal{R}[F;a,c]$ y $f \in \mathcal{R}[F;c,b]$. En cuyo caso*

$$\int_a^b f dF = \int_a^c f dF + \int_c^b f dF.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, y sean P, P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, tales que

$$U(P,f,F) - \overline{\int_a^b} f dF < \epsilon, \quad U(P_1,f,F) - \overline{\int_a^c} f dF < \epsilon \quad \text{y} \quad U(P_2,f,F) - \overline{\int_c^b} f dF < \epsilon.$$

Consideremos $P' = P \cup P_1 \cup P_2$. Notemos que P' es un refinamiento de P y $c \in P'$, digamos, $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = c, x_{i+1}, \ldots, x_n = b\}$. Es claro que $P_1' = \{x_0, x_1, \ldots, x_i\}$ y $P_2' = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ son refinamientos de las particiones P_1 y P_2, respectivamente, y además

$$U(P',f,F) = U(P_1',f,F) + U(P_2',f,F). \tag{1.25}$$

Luego

$$-\epsilon < \overline{\int_a^c} f dF - U(P_1',f,F) \leq 0, \quad -\epsilon < \overline{\int_c^b} f dF - U(P_2',f,F) \leq 0 \quad \text{y}$$

$$0 \leq U(P',f,F) - \overline{\int_a^b} f dF < \epsilon.$$

Sumando estas desigualdades y usando (1.25) obtenemos

$$-2\epsilon < \overline{\int_a^c} f dF + \overline{\int_c^b} f dF - \overline{\int_a^b} f dF < \epsilon.$$

Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, se sigue que

$$\overline{\int_a^b} f dF = \overline{\int_a^c} f dF + \overline{\int_c^b} f dF. \tag{1.26}$$

De manera similar puede verse (problema 6) que

$$\underline{\int_a^b} f dF = \underline{\int_a^c} f dF + \underline{\int_c^b} f dF. \tag{1.27}$$

Así, si $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se sigue de (1.26) y (1.27) que

$$\underline{\int_a^c} f dF + \underline{\int_c^b} f dF = \int_a^b f dF = \overline{\int_a^c} f dF + \overline{\int_c^b} f dF,$$

o equivalentemente

$$\left(\overline{\int_a^c} f dF - \underline{\int_a^c} f dF\right) + \left(\overline{\int_c^b} f dF - \underline{\int_c^b} f dF\right) = 0.$$

Como cada sumando de la izquierda es no negativo, ambos son cero. Esto finaliza la demostración de la necesidad. La suficiencia se demuestra en forma similar. ∎

Definamos ahora la función

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0 \\ 1, & \text{si } \ x \geq 0, \end{cases}$$

a la cual llamaremos la **función escalón unitario** .

La demostración de la siguiente propiedad de la integral con integrador $F(x) = E(x - s)$, $x \in [a, b]$ para $a < s < b$ se dejará como ejercicio al lector.

Lema 1.20 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es continua en un punto $s \in (a, b)$ y $F(x) = E(x - s)$, $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f dF = f(s). \tag{1.28}$$

En general, tenemos lo siguiente.

Teorema 1.21 *Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales no negativos y que $\{c_n\}$ es una sucesión de puntos distintos en (a, b). Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n E(x - c_n)$, entonces*

$$\int_a^b f dF = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(c_n). \tag{1.29}$$

Demostración. Como $0 \leq a_nE(x-c_n) \leq a_n$ para todo n, se sigue del criterio de comparación de series (véase la proposición 2.71 en Pérez et al. [25]) que $\sum_{n=1}^{\infty} a_nE(x-c_n)$ converge para todo $x \in [a,b]$, por lo que F está bien definida. Es claro además que $F(a) = 0$, $F(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ y $x \leq y$ implica $F(x) \leq F(y)$, de lo cual tenemos que F es no decreciente en $[a,b]$. Así, debido a la continuidad de f en $[a,b]$ se tiene por el teorema 1.8 que $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$.

Consideremos ahora $\epsilon > 0$ y sea $M = \sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$. Si $M = 0$, entonces $f \equiv 0$ en $[a,b]$ y la igualdad (1.29) es válida. Supongamos pues que $M > 0$. Como por hipótesis la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{2M}$.

Definamos para cada $x \in [a,b]$,

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{N} a_nE(x-c_n) \quad \text{y} \quad F_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_nE(x-c_n).$$

Del teorema 1.13 y el lema 1.20 se tiene que

$$\int_a^b fdF_1 = \sum_{n=1}^{N} a_nf(c_n). \tag{1.30}$$

Por otro lado, para F_2 se tiene que

$$F_2(b) - F_2(a) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{2M},$$

por lo que de la proposición 1.18 ii) se sigue que

$$\left|\int_a^b fdF_2\right| \leq M[F_2(b) - F_2(a)] < M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.31}$$

Como $F = F_1 + F_2$ se sigue del teorema 1.13, (1.30) y (1.31) que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b fdF - \sum_{n=1}^{\infty} a_nf(c_n)\right| &= \left|\int_a^b fdF_1 + \int_a^b fdF_2 - \sum_{n=1}^{N} a_nf(c_n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_nf(c_n)\right| \\
&= \left|\int_a^b fdF_2 - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_nf(c_n)\right| \\
&\leq \left|\int_a^b fdF_2\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\,|f(c_n)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + M\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n
\end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon,$$

con $\epsilon > 0$ arbitrario. Por lo tanto, (1.29) se cumple. ■

Problemas

1. Demuestre el teorema 1.13.

2. Complete la demostración del teorema 1.15.

3. Demuestre la proposición 1.18.

4. Demuestre que el recíproco del inciso i) de la proposición 1.18 no necesariamente es cierto, es decir, $|f| \in \mathcal{R}[F; a, b]$ no implica que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

5. Sean $p, q > 0$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuestre que

   a) Si $u, v \geq 0$, entonces $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

   b) Si $f, g \in \mathcal{R}[F; a, b]$, entonces

   $$\left| \int_a^b fgdF \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p dF \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^n |g|^q dF \right)^{\frac{1}{q}}.$$

   A esta desigualdad se le conoce como la **desigualdad de Hölder**. Observe que cuando $p = q = 2$, se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 1.16).

6. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ no decreciente. Demuestre que

   $$\underline{\int_a^b} fdF = \underline{\int_a^c} fdF + \underline{\int_c^b} fdF.$$

7. Demuestre el lema 1.20.

8. Dada $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ no decreciente, defina para cada $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$

   $$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 dF \right)^{\frac{1}{2}}.$$

   a) Si $f, g, h \in \mathcal{R}[F; a, b]$, demuestre que

   $$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 .$$

   b) Si $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, demuestre que para cada $\epsilon > 0$ fijo, existe una función continua g en $[a, b]$ tal que $\|f - g\|_2 < \epsilon$.
   Para una **sugerencia** véase el ejercicio 6.12 de Rudin [28].

9. Para $f \in \mathcal{C}[a, b]$ defina
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$
Demuestre que $\|\cdot\|_1$ define una norma en $\mathcal{C}[a, b]$.

1.3. Teoremas elementales

El primer resultado de esta sección nos muestra, que en ciertos casos, una integral de Riemann-Stieltjes se puede calcular mediante una integral de Riemann ordinaria.

Teorema 1.22 *Supongamos que F es una función no decreciente y diferenciable en $[a, b]$ tal que $F' \in \mathcal{R}[a, b]$. Si f es una función acotada en $[a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ si y sólo si $fF' \in \mathcal{R}[a, b]$. En este caso*
$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x)F'(x)dx. \tag{1.32}$$

Demostración. Probaremos primero que
$$\overline{\int_a^b} f dF = \overline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx. \tag{1.33}$$

Sea $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Si $M = 0$, entonces $f \equiv 0$ y (1.33) es, en este caso, válido. Supongamos pues que $M > 0$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Como por hipótesis $F' \in \mathcal{R}[a, b]$, se sigue del criterio de integrabilidad (teorema 1.6) que existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que
$$U(P, F') - L(P, F') < \frac{\epsilon}{M}. \tag{1.34}$$
Por el teorema del valor medio, para cada i $(= 1, \ldots, n)$, existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que
$$F'(t_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$
esto es
$$\Delta F_i = F'(t_i)\Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.35}$$
Usando (1.34) se sigue (véase el problema 6 a) de la sección 1.1) que si $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, entonces
$$\sum_{i=1}^{n} |F'(s_i) - F'(t_i)|\Delta x_i < \frac{\epsilon}{M}. \tag{1.36}$$

De (1.35) y (1.36) se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta F_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)F'(s_i)\Delta x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[F'(t_i)-F'(s_i)]\Delta x_i\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|\,|F'(t_i)-F'(s_i)|\,\Delta x_i \qquad (1.37) \\ &< M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon,\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta F_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(s_i)F'(s_i)\Delta x_i + \epsilon \leq U(P, fF') + \epsilon,$$

para cualesquiera $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia

$$U(P, f, F) \leq U(P, fF') + \epsilon.$$

De manera similar, se sigue de la desigualdad (1.37) que

$$U(P, fF') \leq U(P, f, F) + \epsilon.$$

Por lo tanto

$$|U(P, f, F) - U(P, fF')| \leq \epsilon. \qquad (1.38)$$

Como la desigualdad (1.38) se cumple para cualquier refinamiento de P, se tiene que

$$\left|\overline{\int_a^b} f dF - \overline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx\right| \leq \epsilon$$

y debido a que $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que la igualdad (1.33) es válida. Con un argumento similar (problema 3) se prueba también que

$$\underline{\int_a^b} f dF = \underline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx. \qquad (1.39)$$

Si $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se sigue de (1.33) y (1.39) que

$$\overline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx = \int_a^b f dF = \underline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx,$$

por lo que $fF' \in \mathcal{R}[a,b]$ y (1.32) se cumple.

Recíprocamente, si $fF' \in \mathcal{R}[a,b]$ se sigue también de (1.33) y (1.39) que

$$\overline{\int_a^b} f dF = \int_a^b f(x)F'(x)dx = \underline{\int_a^b} f dF,$$

por lo que $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y (1.32) se cumple. ■

Los teoremas 1.21 y 1.22 ilustran, respectivamente, que si F es una función de la forma $F(x) = \sum a_n E(x - c_n)$, la integral de Riemann-Stieltjes se reduce a una suma (finita o infinita) y si F tiene derivada Riemann-integrable, la integral de Riemann-Stieltjes se reduce a una integral de Riemann.

Teorema 1.23 *(Teorema de cambio de variable) Sea $\varphi : [A,B] \to [a,b]$ suprayectiva, estrictamente creciente y continua. Si F es no decreciente en $[a,b]$ y $f \in \mathcal{R}[F;a,b]$, entonces $f \circ \varphi \in \mathcal{R}[F \circ \varphi; A, B]$ y*

$$\int_A^B (f \circ \varphi) d(F \circ \varphi) = \int_a^b f dF. \tag{1.40}$$

Demostración. De la hipótesis se sigue que $F \circ \varphi : [A,B] \to \mathbb{R}$ es no decreciente en $[A,B]$ y que $f \circ \varphi : [A,B] \to \mathbb{R}$ es acotada. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición (arbitraria) de $[a,b]$. Como φ es biyectiva, para cada i $(= 0, 1, \ldots, n)$ existe $y_i \in [A,B]$, único, tal que $\varphi(y_i) = x_i$. Además, como φ es estrictamente creciente, $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ es una partición de $[A,B]$. De hecho todas las particiones de $[A,B]$ se pueden obtener de esta forma. Ahora, puesto que para cada i $(= 1, \ldots, n)$

$$(f \circ \varphi)([y_{i-1}, y_i]) = \{f(\varphi(y)) : y_{i-1} \le y \le y_i\} = \{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} = f([x_{i-1}, x_i]),$$

se sigue que

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = \sup_{y_{i-1} \le y \le y_i} f(\varphi(y)) \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = \inf_{y_{i-1} \le y \le y_i} f(\varphi(y)).$$

Esto, junto con el hecho de que

$$(F \circ \varphi)(y_i) = F(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

implican que

$$U(Q, f \circ \varphi, F \circ \varphi) = U(P, f, F) \quad \text{y} \quad L(Q, f \circ \varphi, F \circ \varphi) = L(P, f, F). \tag{1.41}$$

Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se sigue del criterio de integrabilidad (teorema 1.6) que existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, F) - L(P, f, F) < \epsilon.$$

Igual que antes, denotamos por $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ a la partición de $[A, B]$ tal que $\varphi(y_i) = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Entonces por (1.41) se sigue que

$$U(Q, f \circ \varphi, F \circ \varphi) - L(Q, f \circ \varphi, F \circ \varphi) = U(P, f, F) - L(P, f, F) < \epsilon,$$

en consecuencia, se sigue una vez más del criterio de integrabilidad que $f \circ \varphi \in \mathcal{R}[F \circ \varphi; A, B]$. Además

$$\int_A^B (f \circ \varphi) d(F \circ \varphi) = \inf_{Q \in \mathcal{P}[A,B]} U(Q, f \circ \varphi, F \circ \varphi) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(P, f, F) = \int_a^b f dF.$$

■

De los teoremas 1.22 y 1.23 se obtiene el teorema de cambio de variable para la integral ordinaria de Riemann.

Corolario 1.24 *Supongamos que φ mapea $[A, B]$ en $[a, b]$ y que es estrictamente creciente y diferenciable en $[A, B]$. Si $\varphi' \in \mathcal{R}[A, B]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Demostración. Tomemos $F(x) = x$ y apliquemos el teorema 1.22 a la parte izquierda de (1.40). ■

Teorema 1.25 *(Teorema de integración por partes) Supongamos que f y g son funciones no decrecientes en $[a, b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}[g; a, b]$ si y sólo si $g \in \mathcal{R}[f; a, b]$, en cuyo caso*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{1.42}$$

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$. Usando que f y g son funciones no decrecientes obtenemos

$$\begin{aligned} U(P, f, g) - L(P, f, g) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= U(P, g, f) - L(P, g, f). \end{aligned}$$

De aquí, es evidente por el criterio de integrabilidad (teorema 1.6), que $f \in \mathcal{R}[g; a, b]$ si y sólo si $g \in \mathcal{R}[f; a, b]$.

Notemos también que

$$\begin{aligned} U(P, f, g) + L(P, g, f) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, elijamos una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, g) - \epsilon < \int_a^b f dg \leq U(P, f, g)$$

y

$$L(P, g, f) \leq \int_a^b g df < L(P, g, f) + \epsilon.$$

Sumando estas desigualdades y usando (1.43) obtenemos

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \epsilon < \int_a^b f dg + \int_a^b g df < f(b)g(b) - f(a)g(a) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, (1.42) se cumple. ∎

Teorema 1.26 *(Primer teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes) Sea $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$. Si $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ y $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, existe $c \in [m, M]$ tal que*

$$\int_a^b f dF = c[F(b) - F(a)]. \tag{1.44}$$

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces $c = f(x_0)$ para algún $x_0 \in [a, b]$.

Demostración. Si F es constante en $[a, b]$, el teorema es trivialmente válido, ya que en este caso, ambos lados de (1.44) son cero. Si F no es constante en $[a, b]$, entonces, debido a que F es no decreciente, $F(a) < F(b)$. Además, debido a que para toda partición P de $[a, b]$,

$$m[F(b) - F(a)] \leq L(P, f, F) \leq U(P, f, F) \leq M[F(b) - F(a)]$$

se tiene que

$$m[F(b) - F(a)] \leq \int_a^b f dF \leq M[F(b) - F(a)]$$

o equivalentemente

$$m \leq \frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b f dF \leq M.$$

Así, (1.44) se cumple con $c = \frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b f dF$.

Ahora, si f es continua en $[a,b]$, se sigue del teorema del valor intermedio que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $c = f(x_0)$. ■

De los teoremas 1.25 y 1.26 se obtiene (véase el problema 1) el **segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes**.

Corolario 1.27 *(Segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes) Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f dF = f(a) \int_a^{x_0} dF + f(b) \int_{x_0}^b dF.$$

Observación 1.28 *Al ser F continua y f no decreciente en $[a,b]$, se tiene (véase el teorema 1.9) que $f \in \mathcal{R}[F; a,b]$.*

Teorema 1.29 *Sea $f \in \mathcal{R}[F; a,b]$ y definamos $\alpha(x) = \int_a^x f dF$ para $a \leq x \leq b$. Entonces*
i) α es continua en todo punto donde F lo es.
ii) α es diferenciable en todo punto donde F es diferenciable y f es continua. En cualesquiera de estos puntos x, $\alpha'(x) = f(x)F'(x)$.

Demostración. Sea $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. De las proposiciones 1.18 y 1.19 se sigue que para cualesquiera números reales $x, y \in [a,b]$ con $x < y$,

$$|\alpha(y) - \alpha(x)| = \left| \int_x^y f dF \right| \leq M[F(y) - F(x)].$$

De aquí, la validez del inciso i) es clara.

Finalmente, del primer teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes (teorema 1.26), se sigue que existe $c(x,y) \equiv c \in \left[\inf_{x \leq z \leq y} f(z), \sup_{x \leq z \leq y} f(z)\right]$ tal que

$$\alpha(y) - \alpha(x) = c[F(y) - F(x)]. \tag{1.45}$$

Notemos que si f es continua en x, entonces

$$\lim_{y \to x} c(x,y) = f(x).$$

Luego, dividiendo ambos lados de la igualdad (1.45) por $y-x$ obtenemos

$$\frac{\alpha(y)-\alpha(x)}{y-x}=c\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\to f(x)F'(x) \quad \text{cuando} \quad y\to x,$$

para cada punto x en el cual f es continua y F es diferenciable; esto prueba ii) y la demostración está finiquitada. ■

Tomando $F(x)=x$, en el teorema 1.29, obtenemos el **primer teorema fundamental del cálculo integral**.

Corolario 1.30 *(Primer teorema fundamental del cálculo integral) Sea $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y definamos $\alpha(x)=\int_a^x f(t)dt$ para $a\le x\le b$. Entonces α es continua en $[a,b]$ y si f es continua en un punto $x_0\in[a,b]$, entonces α es diferenciable en x_0 y $\alpha'(x_0)=f(x_0)$.*

Dejaremos la demostración del último resultado de esta sección, **segundo teorema fundamental del cálculo integral**, como ejercicio al lector.

Teorema 1.31 *(Segundo teorema fundamental del cálculo integral) Si $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y existe una función diferenciable α en $[a,b]$ tal que $\alpha'=f$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx=\alpha(b)-\alpha(a).$$

Problemas

1. Demuestre el corolario 1.27.
2. Demuestre el teorema 1.31.
3. Sean f una función acotada en $[a,b]$ y F una función no decreciente y derivable en $[a,b]$ tal que $F'\in\mathcal{R}[a,b]$, demuestre que
$$\underline{\int_a^b} f dF=\underline{\int_a^b} f(x)F'(x)dx.$$
4. Sea $F(x)=\cos x$ para $\pi\le x\le 2\pi$. Encuentre el valor de $\int_\pi^{2\pi} x dF$.
5. Encuentre el valor de $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \cos(z^2)\, d(\cos(z^2))$.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f, f' \in \mathcal{C}[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Demuestre que
$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$
y que
$$\left(\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx\right)\left(\int_a^b x^2 f^2(x)dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

7. Demuestre que si $\int_a^b f dF = 0$ para una función continua f en $[a,b]$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces F es una constante.

8. Demuestre que
$$\mathcal{C}[a,b] = \bigcap \left\{\mathcal{R}[F;a,b] : F \text{ es no decreciente}\right\}.$$

9. Sean $f, g \in \mathcal{R}[F;a,b]$ y suponga que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Si $m = \text{ínf}_{x \leq a \leq b} f(x)$ y $M = \sup_{x \leq a \leq b} f(x)$, demuestre que existe $c \in [m, M]$ tal que
$$\int_a^b fgdF = c\int_a^b gdF.$$
Note que cuando $g \equiv 1$, es el primer teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes.

10. Sean $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ con $g \geq 0$. Si $F(x) = \int_a^x g(t)dt$, demuestre que
$$\int_a^b fdF = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

1.4. Funciones de variación acotada

Veremos en esta sección una clase de funciones, llamadas **funciones de variación acotada**, que están íntimamente relacionadas tanto con las curvas de longitud finita (curvas rectificables, véase la sección 1.6) como con las funciones monótonas. En la sección 1.5 haremos uso de esta última conexión para extender la clase de integradores en la integral de Riemann-Stieltjes, pasando de la clase de integradores no decrecientes a la clase, más amplia, de integradores de variación acotada; aprovechando, por supuesto, la teoría ya desarrollada en las secciones anteriores.

Definición 1.32 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
i) Si existe $M > 0$ tal que para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$

$$V(P,F) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta F_i| \leq M,$$

*diremos que F es de **variación acotada** en $[a,b]$.*
ii) Si F es de variación acotada en $[a,b]$, al número

$$V(F;a,b) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V(P,F)$$

*le llamaremos la **variación total** de F en $[a,b]$.*

Proposición 1.33 *Si F es monótona en $[a,b]$, entonces F es de variación acotada en $[a,b]$ y*

$$V(F;a,b) = |F(b) - F(a)|.$$

Demostración. Supongamos primero que F es no decreciente. Entonces para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, $\Delta F_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$; y así

$$V(P,F) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta F_i| = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

Por lo tanto

$$V(F;a,b) = F(b) - F(a) \quad \text{si } F \text{ es no decreciente en } [a,b]. \tag{1.46}$$

Si F es no creciente, puede verse fácilmente (problema 1) que

$$V(F;a,b) = F(a) - F(b).$$

Este hecho junto con (1.46) prueban lo deseado. ■

Proposición 1.34 *Si F es continua en $[a,b]$ y F' existe y es acotada en (a,b), entonces F es de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Por el teorema del valor medio, para cada i $(= 1, \ldots, n)$, existe $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\Delta F_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.47}$$

Considerando $M > 0$ tal que $|F'(x)| \leq M$ para $x \in (a,b)$, tenemos de (1.47) que

$$V(P,F) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta F_i| = \sum_{i=1}^{n} |F'(t_i)|\Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a).$$

Debido a que P es una partición arbitraria de $[a,b]$, la demostración está completa. ■

Proposición 1.35 *Si F es de variación acotada en $[a,b]$, entonces F es acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $x \in (a,b)$. Considerando la partición $P = \{a,x,b\}$ de $[a,b]$ tenemos

$$|F(x) - F(a)| + |F(b) - F(x)| \leq V(F;a,b).$$

Lo cual implica que

$$|F(x)| - |F(a)| \leq |F(x) - F(a)| \leq V(F;a,b),$$

y así

$$|F(x)| \leq V(F;a,b) + |F(a)|.$$

Como esta desigualdad es válida también para $x = a$ o $x = b$, F es acotada en $[a,b]$. ■

El siguiente ejemplo muestra que una función continua no es, necesariamente, de variación acotada.

Ejemplo 1.36 *Definamos $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = x\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x})$ si $x \in (0,1]$ y $F(0) = 0$. Notemos que F es continua en $[0,1]$, sin embargo, considerando la partición*

$$P = \left\{0, \frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n}, \frac{2}{2n-1}, \ldots, \frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

del intervalo $[0,1]$ obtenemos

$$\begin{aligned} V(P,F) = \sum_{i=1}^{2n+1} |\Delta F_i| &= \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-1} + \cdots + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= 4\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right], \end{aligned}$$

y así, debido a que la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverge, es claro que no existe $M > 0$ tal que

$$V(P,F) = \sum_{i=1}^{2n+1} |\Delta F_i| \leq M \quad \textit{para todo} \;\; n.$$

Por lo tanto F no es de variación acotada en $[0,1]$.

Proposición 1.37 *Sean F y G funciones de variación acotada en $[a,b]$. Entonces*
i) $|F|$ es de variación acotada en $[a,b]$ y

$$V(|F|;a,b) \leq V(F;a,b).$$

ii) $F+G$ es de variación acotada en $[a,b]$ y

$$V(F+G;a,b) \leq V(F;a,b) + V(G;a,b).$$

iii) FG es de variación acotada en $[a,b]$ y

$$V(FG;a,b) \leq M_G V(F;a,b) + M_F V(G;a,b),$$

donde $M_G = \sup_{a\leq x\leq b} |G(x)|$ y $M_F = \sup_{a\leq x\leq b} |F(x)|$.
iv) Si $0 < m_F \equiv \inf_{a\leq x\leq b} |F(x)|$, entonces $\frac{1}{F}$ es de variación acotada en $[a,b]$ y

$$V(\frac{1}{F};a,b) \leq \frac{1}{m_F^2} V(F;a,b).$$

Demostración. Probaremos unicamente iii) y dejaremos el resto como ejercicio al lector. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición (arbitraria) de $[a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\Delta(FG)_i| &= |F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1})| \\
&= |F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_i) + F(x_{i-1})G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1})| \\
&\leq |G(x_i)||F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(x_{i-1})||G(x_i) - G(x_{i-1})| \\
&\leq M_G|\Delta F_i| + M_F|\Delta G_i|,
\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n$. Luego

$$V(P,FG) = \sum_{i=1}^n |\Delta(FG)_i| \leq M_G \sum_{i=1}^n |\Delta F_i| + M_F \sum_{i=1}^n |\Delta G_i| = M_G V(P,F) + M_F V(P,G).$$

Esto implica que FG es de variación acotada en $[a,b]$ y

$$\begin{aligned}
V(FG;a,b) &= \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} V(P,FG) \\
&\leq M_G \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} V(P,F) + M_F \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} V(P,G) \\
&= M_G V(F;a,b) + M_F V(G;a,b).
\end{aligned}$$

∎

Proposición 1.38 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$. Entonces F es de variación acotada en $[a, c]$ si y sólo si F es de variación acotada en $[a, b]$ y en $[b, c]$, en cuyo caso*

$$V(F; a, c) = V(F; a, b) + V(F; b, c). \tag{1.48}$$

Demostración. Supongamos primero que F es de variación acotada en $[a, c]$. Sean P_1 una partición de $[a, b]$ y P_2 una partición de $[b, c]$. Entonces $P = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, c]$ y claramente

$$V(P_1, F) + V(P_2, F) = V(P, F) \leq V(F; a, c) < \infty.$$

Por lo tanto F es de variación acotada en $[a, b]$ y en $[b, c]$ y

$$V(F; a, b) + V(F; b, c) \leq V(F; a, c). \tag{1.49}$$

Supongamos ahora que F es de variación acotada en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, c]$ y consideremos $P_0 = P \cup \{b\}$.

Si $b \in (x_{m-1}, x_m)$ para algún $m \leq n$, entonces $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, b\}$ y $P_2 = \{b, x_m, \ldots, x_n\}$ son particiones de $[a, b]$ y $[b, c]$ respectivamente y claramente

$$V(P, F) \leq V(P_0, F) = V(P_1, F) + V(P_2, F) \leq V(F; a, b) + V(F; b, c) < \infty. \tag{1.50}$$

Como (1.50) es también válido si $x_{m-1} = b$ o $x_m = b$, se sigue que F es de variación acotada en $[a, c]$ y que

$$V(F; a, c) \leq V(F; a, b) + V(F; b, c). \tag{1.51}$$

Finalmente, (1.48) se sigue de (1.49) y (1.51). ∎

Dada una función de variación acotada F en $[a, b]$, definamos

$$\nu_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x = a \\ V(F; a, x), & \text{si } \ a < x \leq b. \end{cases}$$

Tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.39 *Una función es de variación acotada si y sólo si es la diferencia de dos funciones no decrecientes.*

Demostración. Supongamos que F es de variación acotada en $[a, b]$. Si $a \leq x < y \leq b$, entonces por (1.48),

$$\nu_F(y) = \nu_F(x) + V(F; x, y). \tag{1.52}$$

Debido a que $V(F;x,y) \geq 0$, se sigue de (1.52) que $\nu_F(y) - \nu_F(x) \geq 0$, lo cual muestra que ν_F es no decreciente en $[a,b]$.

Como $F = \nu_F - (\nu_F - F)$, la necesidad se seguirá si demostramos que $H \equiv \nu_F - F$ es no decreciente en $[a,b]$. Consideremos pues, de nuevo, $a \leq x < y \leq b$. Entonces por (1.52),

$$H(y) - H(x) = [\nu_F(y) - \nu_F(x)] - [F(y) - F(x)] = V(F;x,y) - [F(y) - F(x)]\,. \tag{1.53}$$

Como $|F(y) - F(x)| = V(P,F)$ para la partición $P = \{x,y\}$ de $[x,y]$, se sigue de (1.53) que $H(y) - H(x) \geq 0$, y así, H es no decreciente en $[a,b]$.

La suficiencia se sigue de la proposición 1.33 y los incisos ii) y iii) de la proposición 1.37.
■

La caracterización de una función de variación acotada dada en el teorema 1.39 nos permitirá, en la sección 1.5, pasar de una manera muy simple de integradores no decrecientes a integradores de variación acotada.

Teorema 1.40 *Si F es una función de variación acotada en $[a,b]$ y $y \in [a,b]$, entonces F es continua por la derecha (izquierda) en y si y sólo si ν_F es continua por la derecha (izquierda) en y.*

Demostración. Supongamos que F es continua por la derecha en $y \in [a,b)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < x - y < \delta$ implica $|F(x) - F(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Para esta misma ϵ, existe también una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[y,b]$ tal que

$$V(F;y,b) - \frac{\epsilon}{2} < V(P,F) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta F_i|. \tag{1.54}$$

Como $V(P,F) \leq V(P^*,F)$ para todo refinamiento P^* de P, podemos suponer que $0 < x_1 - y < \delta$. De lo cual se sigue que

$$|\Delta F_1| = |F(x_1) - F(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

y así, de (1.54) obtenemos

$$V(F;y,b) - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=2}^{n} |\Delta F_i| \leq \frac{\epsilon}{2} + V(F;x_1,b),$$

debido a que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[x_1,b]$. En consecuencia

$$V(F;y,b) - V(F;x_1,b) < \epsilon. \tag{1.55}$$

Ahora, de (1.55) y la proposición 1.38 se obtiene

$$0 \leq \nu_F(x_1) - \nu_F(y) = V(F; y, x_1) = V(F; y, b) - V(F; x_1, b) < \epsilon,$$

de lo cual se concluye que ν_F es continua por la derecha en y.

Recíprocamente, si ν_F es continua por la derecha en $y \in [a, b)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq \nu_F(x) - \nu_F(y) < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < x - y < \delta.$$

De aquí usando el hecho de que

$$|F(x) - F(y)| \leq \nu_F(x) - \nu_F(y)$$

se concluye que F es continua por la derecha en y.

El caso en que $y \in (a, b]$ es un punto de continuidad por la izquierda se trabaja en forma similar y se dejará como ejercicio al lector. ■

Como consecuencia de los teoremas 1.39 y 1.40 tenemos lo siguiente.

Corolario 1.41 *Sea F una función continua en $[a, b]$. Entonces F es de variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si F es la diferencia de dos funciones continuas no decrecientes.*

Problemas

1. Demuestre que si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es no creciente, entonces F es de variación acotada en $[a, b]$ y
$$V\,(F; a, b) = F(a) - F(b).$$

2. Complete la demostración de la proposición 1.37.

3. Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $c > 0$. Demuestre que F es de variación acotada en $[a, b]$ y que
$$V\,(F; a, b) \leq c(b - a).$$

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Dadas una sucesión $\{c_n\}$ en $\mathbb{R}$ y una sucesión $\{x_n\}$ de puntos distintos en (a, b). Defina
$$F(x) = \begin{cases} c_n, & \text{si } \; x = x_n, \; \text{ para algún } \; n \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$
¿És, en general, F de variación acotada? Argumente su respuesta. ¿Bajo qué condiciones es F de variación acotada?

5. Dada $f \in \mathcal{R}[G; a, b]$ defina

$$F(x) = \int_a^x f dG.$$

Demuestre que F es de variación acotada en $[a, b]$ y que

$$V(F; a, b) = \int_a^b |f| dG.$$

6. Sea F una función de variación acotada en $[a, b]$. Demuestre que F es continua por la izquierda en $y \in (a, b]$ si y sólo si ν_F lo es.

1.5. Integradores de variación acotada

Dada una función F de variación acotada en $[a, b]$ definamos

$$P_F = \frac{1}{2}\left[\nu_F + F - F(a)\right] \quad \text{y} \quad N_F = \frac{1}{2}\left[\nu_F - F + F(a)\right].$$

Notemos que

$$P_F(a) = N_F(a) = 0 \quad \text{y} \quad P_F - N_F = F - F(a). \tag{1.56}$$

A las funciones P_F y N_F se les llama, respectivamente, **función de variación positiva** y **función de variación negativa** de F (la razón para esta nomenclatura es evidente del problema 1).

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se dejará como ejercicio al lector.

Proposición 1.42 *Las funciones P_F y N_F son no decrecientes en $[a, b]$.*

Se sigue también, del teorema 1.40, que P_F y N_F son continuas por la derecha (izquierda) en todo punto donde F lo sea. Además (véase el problema 3), las funciones P_F y N_F son las funciones más pequeñas que satisfacen (1.56).

Estamos ahora listos para extender la definición de la integral de Riemann-Stieltjes de manera que se acepten integradores de variación acotada.

Definición 1.43 *Sea F una función de variación acotada en $[a, b]$. Diremos que una función acotada f en $[a, b]$ es* ***Riemann-Stieltjes integrable*** *con respecto a F en $[a, b]$ si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a P_F y N_F en $[a, b]$, en cuyo caso definimos*

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f dP_F - \int_a^b f dN_F.$$

Proposición 1.44 *Sea F una función de variación acotada en $[a,b]$. Si G y H son funciones no decrecientes en $[a,b]$ tales que $F=G-H$ y f es una función acotada que es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a G y H en $[a,b]$, entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F y*

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f dG - \int_a^b f dH.$$

Demostración. Si f es la función constante 0, el resultado es trivial. Supongamos pues que f no es la función constante 0, entonces $M \equiv \sup_{a\le x\le b}|f(x)|>0$. Probaremos primero que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a ν_F.

Dado $\epsilon>0$, elijamos una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(P,f,G)-L(P,f,G)<\frac{\epsilon}{4}, \qquad U(P,f,H)-L(P,f,H)<\frac{\epsilon}{4} \tag{1.57}$$

y

$$V(P,F)>V(F;a,b)-\frac{\epsilon}{4M}=\nu_F(b)-\frac{\epsilon}{4M}. \tag{1.58}$$

Como $|F(y)-F(x)|\le[G(y)-G(x)]+[H(y)-H(x)]$ para $x,y\in[a,b]$ con $x\le y$, obtenemos de (1.57) que

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\left|F(x_i)-F(x_{i-1})\right|<\frac{\epsilon}{2}, \tag{1.59}$$

donde $M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)$ y $m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)$, $i=1,\ldots,n$. También de (1.58) se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &\le \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\left(\left[\nu_F(x_i)-\nu_F(x_{i-1})\right]-\left|F(x_i)-F(x_{i-1})\right|\right)\\
&\le 2M\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\nu_F(x_i)-\nu_F(x_{i-1})\right]-\left|F(x_i)-F(x_{i-1})\right|\right)\\
&= 2M\left[\nu_F(b)-V(P,F)\right]<\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

De (1.59) y (1.60) obtenemos que

$$U(P,f,\nu_F)-L(P,f,\nu_F)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\left[\nu_F(x_i)-\nu_F(x_{i-1})\right]<\epsilon,$$

de manera que $f\in\mathcal{R}[\nu_F;a,b]$.

Como por la proposición 1.42, $P_F = \frac{1}{2}[\nu_F + G - H - F(a)]$ y $N_F = \frac{1}{2}[\nu_F - G + H + F(a)]$ son funciones no decrecientes en $[a, b]$, se sigue del teorema 1.13 que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a P_F y N_F. Por lo tanto $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

Ahora, de (1.56) y nuestra hipótesis, tenemos que

$$P_F - N_F = F - F(a) = G - H - F(a),$$

es decir

$$P_F + H = N_F + G - F(a).$$

Luego, notando que

$$\int_a^b f d\,(G - F(a)) = \int_a^b f dG,$$

obtenemos (véase el teorema 1.13)

$$\int_a^b f dP_F + \int_a^b f dH = \int_a^b f dN_F + \int_a^b f dG,$$

de lo cual se sigue que

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f dG - \int_a^b f dH.$$

■

La mayoría de las propiedades sobre la integral de Riemann-Stieltjes con respecto a integradores no decrecientes son fácilmente extendidas a integradores de variación acotada. Así, por ejemplo, el análogo a los teoremas 1.12 y 1.13 queda como sigue.

- Para cualquier constante c,

$$\int_a^b (cf + g)dF = c\int_a^b f dF + \int_a^b g dF$$

y

$$\int_a^b f d(cF + G) = c\int_a^b f dF + \int_a^b f dG,$$

donde en cada caso, la existencia de las integrales de la derecha implica la existencia de la integral de la izquierda. Notemos que ahora, en la segunda igualdad, no se requiere suponer que $c \geq 0$, ya que los integradores no son necesariamente no decrecientes. Sin embargo, el análogo a la proposición 1.18 si sufre cambios en su apariencia.

Proposición 1.45 *Sean F una función de variación acotada en $[a, b]$ y $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$.*

i) $|f| \in \mathcal{R}[\nu_F; a, b]$ y $\left|\int_a^b f dF\right| \leq \int_a^b |f| d\nu_F$.

ii) Si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f dF\right| \leq MV(F; a, b)$.

Demostración. i) Se sigue de la definición 1.43 que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a P_F y N_F en $[a,b]$. Luego, debido a que $\nu_F = P_F + N_F$, se tiene por la proposición 1.13 que $f \in \mathcal{R}[\nu_F; a, b]$. Como ν_F es no decreciente en $[a,b]$, la proposición 1.18 i) indica que $|f| \in \mathcal{R}[\nu_F; a, b]$. Además,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f dF\right| &\leq \left|\int_a^b f dP_F\right| + \left|\int_a^b f dN_F\right| \\
&\leq \int_a^b |f| dP_F + \int_a^b |f| dN_F \\
&= \int_a^b |f| d(P_F + N_F) = \int_a^b |f| d\nu_F.
\end{aligned}$$

ii) Si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, se sigue de i) y la proposición 1.18 ii) que

$$\left|\int_a^b f dF\right| \leq \int_a^b |f| d\nu_F \leq M\left[\nu_F(b) - \nu_F(a)\right] = MV(F; a, b).$$

■

Dejaremos la demostración de las versiones de los teoremas de cambio de variable y de integración por partes para integradores de variación acotada, teoremas 1.46 y 1.47 dados abajo, como ejercicio al lector.

Teorema 1.46 *(Teorema de cambio de variable) Sea F una función de variación acotada en $[a,b]$ y $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$. Si φ es una función continua y estrictamente monótona tal que $\varphi(A) = a$ y $\varphi(B) = b$, $A, B \in \mathbb{R}$, entonces $f \circ \varphi \in \mathcal{R}[F \circ \varphi; A, B]$ y*

$$\int_A^B (f \circ \varphi) d(F \circ \varphi) = \int_a^b f dF.$$

Notemos que a diferencia del teorema de cambio de variable para integradores no decrecientes (teorema 1.23), en el cual se pide que la función φ sea estrictamente creciente, en la versión para integradores de variación acotada (teorema 1.46), se pide que φ sea estrictamente monótona, es decir, estrictamente creciente ó estrictamente decreciente.

Teorema 1.47 *(Teorema de integración por partes) Supongamos que f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}[g; a, b]$ si y sólo si $g \in \mathcal{R}[f; a, b]$, en cuyo caso*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Problemas

1. Sea F una función de variación acotada en $[a,b]$. Dada una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$, defina

$$\begin{aligned} p(P,F) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)\right|+\left[F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)\right]\right), \\ n(P,F) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)\right|-\left[F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)\right]\right). \end{aligned}$$

   Note que $p(P,F)$ es la suma de los términos $|F(x_i)-F(x_{i-1})|$ para los cuales $F(x_i)-F(x_{i-1})\geq 0$ y $n(P,F)$ de los que $F(x_i)-F(x_{i-1})\leq 0$. Si

$$p_F(b)=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} p(P,F) \quad \text{y} \quad n_F(b)=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} n(P,F),$$

   demuestre que

$$p_F(b)+n_F(b)=V(F;a,b) \quad \text{y} \quad p_F(b)-n_F(b)=F(b)-F(a)$$

   y deduzca que para $a<x\leq b$,

$$p_F(x)=P_F(x) \quad \text{y} \quad n_F(x)=N_F(x).$$

2. Demuestre la proposición 1.42.

3. Sea F una función de variación acotada en $[a,b]$. Si G y H son funciones no decrecientes en $[a,b]$ tales que

$$G(a)=H(a)=0 \quad \text{y} \quad G-H=F-F(a),$$

   demuestre que

$$G(x)\geq P_F(x) \quad \text{y} \quad H(x)\geq N_F(x)$$

   para todo $x\in[a,b]$.

4. Sean f continua en $[a,b]$ y F de variación acotada en $[a,b]$. Denotando por $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ a una partición (arbitraria) de $[a,b]$ y por t_i a cualquier punto en $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$ demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\Delta F_i \to \int_a^b f\,dF$$

   cuando $\|P\|\to 0$ (véase el problema 6 b) de la sección 1.1).

5. Demuestre el teorema 1.46.
6. Demuestre el teorema 1.47.
7. Demuestre que el teorema 1.26 no se cumple para integradores de variación acotada.
8. Resuelva las siguientes integrales de Riemann-Stieltjes
   a) $\int_{-1}^{1} xdF$, donde $F(x) = e^{|x|}$, $-1 \leq x \leq 1$.
   b) $\int_{-1}^{2} (x^5 - 1)\, dG$, donde $G(x) = |x|^3$, $-1 \leq x \leq 2$.

1.6. Integración de funciones vectoriales y curvas rectificables

Consideremos las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por $\pi_i\,(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.48 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ si $\pi_i \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lo es, para cada $i = 1, \ldots, n$. En cuyo caso definimos*

$$\int_a^b f dF = \left(\int_a^b (\pi_1 \circ f)\, dF, \ldots, \int_a^b (\pi_n \circ f)\, dF \right).$$

Notemos que $\int_a^b f dF$ es el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya i-ésima coordenada es $\int_a^b (\pi_i \circ f)\, dF$. De esto, es claro que las propiedades de linealidad en el integrando y en el integrador son válidas para este tipo de integrales vectoriales, sólo se deben aplicar los resultados a cada función coordenada $\pi_i \circ f$. La proposición 1.19 y los teoremas 1.22 y 1.31 también son válidos en este contexto; el teorema 1.29 resulta también válido, pero F debe seguirse considerando no decreciente. A manera de ilustración, damos enseguida el análogo al teorema 1.29.

Teorema 1.49 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a,b]$ y definimos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ por $\alpha(x) = \int_a^x f dF$, entonces*
i) α es continua en todo punto donde F lo es.
ii) α es diferenciable en todo punto donde F es diferenciable y f es continua. En cualesquiera de estos puntos x, $\alpha'(x) = f(x)F'(x)$.

Demostración. Sea $M_i = \sup_{a \leq x \leq b} |(\pi_i \circ f)(x)|$. De las proposiciones 1.18 y 1.19 se sigue que para cualesquiera números reales $x, y \in [a,b]$ con $x < y$,

$$|(\pi_i \circ \alpha)(y) - (\pi_i \circ \alpha)(x)| = \left| \int_x^y (\pi_i \circ f) dF \right| \leq M_i[F(y) - F(x)].$$

De aquí, es claro que $\pi_i \circ \alpha$ es continua en todo punto donde F lo es. Como esto es válido para todo $i = 1, \ldots, n$, la demostración de i) está finalizada (véase la proposición 5.13 en Pérez et al. [25]).

Finalmente, del primer teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes (teorema 1.26), se sigue que existe $c_i(x,y) \equiv c_i \in \left[\operatorname{ínf}_{x\le z\le y}(\pi_i \circ f)(z), \sup_{x\le z\le y}(\pi_i \circ f)(z)\right]$ tal que

$$(\pi_i \circ \alpha)(y) - (\pi_i \circ \alpha)(x) = c_i[F(y) - F(x)]. \tag{1.61}$$

Si f es continua en x, entonces $\pi_i \circ f$ también es continua en x y en consecuencia

$$\lim_{y\to x} c_i(x,y) = (\pi_i \circ f)(x).$$

Luego, dividiendo ambos lados de (1.61) por $y - x$ obtenemos

$$\frac{(\pi_i \circ \alpha)(y) - (\pi_i \circ \alpha)(x)}{y - x} = c_i \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \to (\pi_i \circ f)(x)F'(x) \quad \text{cuando} \quad y \to x,$$

para cada punto x en el cual f es continua y F es diferenciable. Esto prueba que para cada i $(= 1, \ldots, n)$

$$(\pi_i \circ \alpha)'(x) = (\pi_i \circ f)(x)F'(x),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) &= ((\pi_1 \circ \alpha)'(x), \ldots, (\pi_n \circ \alpha)'(x)) \\
&= ((\pi_1 \circ f)(x)F'(x), \ldots, (\pi_n \circ f)(x)F'(x)) \\
&= ((\pi_1 \circ f)(x), \ldots, (\pi_n \circ f)(x))\, F'(x) = f(x)F'(x).
\end{aligned}$$

Esto prueba ii) y la demostración está finalizada. ■

El análogo al teorema 1.16 (desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales) es como sigue.

Teorema 1.50 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente. Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ son Riemann-Stieltjes integrables con respecto a F en $[a,b]$, entonces*

$$\left| \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)(\pi_i \circ g) \right) dF \right| \le \left[\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)^2 \right) dF \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ g)^2 \right) dF \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Aplicando primero la proposición 1.18 i), luego la desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas (véase el lema 3.1 en Pérez et al. [25]) y por último el teorema 1.16

obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)(\pi_i \circ g) \right) dF \right| &\leq \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)(\pi_i \circ g) \right| dF \\
&\leq \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ g)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dF \\
&\leq \left\{ \int_a^b \left[\left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dF \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b \left[\left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ g)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dF \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ f)^2 \right) dF \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\pi_i \circ g)^2 \right) dF \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

La existencia de las integrales anteriores se sigue de la definición 1.48, los teoremas 1.12, 1.15, 1.17 y la proposición 1.18. ■

Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. El análogo a la proposición 1.18, el cual dejamos como ejercicio al lector, es como sigue.

Proposición 1.51 *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[a, b]$.*

i) $\|f\| \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y $\left\| \int_a^b f dF \right\| \leq \int_a^b \|f\| dF$.

ii) Si $\|f(x)\| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\left\| \int_a^b f dF \right\| \leq M \left[F(b) - F(a)\right]$.

Finalizaremos este primer capítulo con un tema geométrico íntimamente relacionado (véase el teorema 1.55) con las funciones de variación acotada.

Definición 1.52 *Una **curva** en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.*

Es importante notar que se ha definido una curva como una función, no como un conjunto de puntos, sin embargo, cada curva tiene asociado un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$, a saber, la imagen (o rango) $\gamma\left([a, b]\right)$.

Ejemplo 1.53 *Las funciones $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $\gamma_2(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, son, claramente, funciones continuas y definen por lo tanto, curvas en $\mathbb{R}^2$. En este caso, ambas curvas tienen la misma imagen, a saber, la circunferencia unitaria con centro en el origen. De esta manera, tenemos mostrado aquí, que diferentes curvas pueden tener la misma imagen.*

En esta sección estamos interesados en determinar la longitud de una curva. La idea para lograrlo es mediante la legendaria técnica de aproximar al rango de la curva por polígonos inscritos, pues debido a que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une, intuitivamente, la longitud de todo polígono inscrito no excede a la longitud de la curva. De esta manera, parece natural definir la longitud de la curva como el supremo de las longitudes de todos los polígonos inscritos. Sin embargo, como veremos (ejemplo 1.56), existen curvas para las cuales tal supremo es igual a $+\infty$. Pasamos pues, a la formalización de ideas.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Para cada partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de $[a,b]$, los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)$ son los vértices de un polígono inscrito. De esta manera, $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ es la longitud del segmento de recta que une a los puntos $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$ y así

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

es la longitud del polígono inscrito determinado por la partición P.

Definición 1.54 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.*
*i) Se dice que γ es **rectificable** si el conjunto $\{\Lambda(P,\gamma) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ es acotado.*
*ii) Si γ es rectificable, al número $\Lambda(\gamma; a, b) = \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \Lambda(P,\gamma)$ se le llama la **longitud** de la curva γ.*

Teorema 1.55 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. La curva γ es rectificable si y sólo si para cada k $(= 1, \ldots, n)$, $\pi_k \circ \gamma$ es de variación acotada en $[a,b]$. En cuyo caso,*

$$V(\pi_k \circ \gamma; a, b) \le \Lambda(\gamma; a, b) \le V(\pi_1 \circ \gamma; a, b) + \cdots + V(\pi_n \circ \gamma; a, b), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ una partición de $[a,b]$. Usando las desigualdades

$$\text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

válidas para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$, obtenemos que para cada k $(= 1, \ldots, n)$ y cada i $(= 1, \ldots, m)$,

$$|(\pi_k \circ \gamma)(t_i) - (\pi_k \circ \gamma)(t_{i-1})| \le \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \le \sum_{j=1}^{n} |(\pi_j \circ \gamma)(t_i) - (\pi_j \circ \gamma)(t_{i-1})|\,.$$

Sumando sobre i obtenemos que para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{m} |(\pi_k \circ \gamma)(t_i) - (\pi_k \circ \gamma)(t_{i-1})| \leq \Lambda(P, \gamma) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |(\pi_j \circ \gamma)(t_i) - (\pi_j \circ \gamma)(t_{i-1})|,$$

de lo cual se observa la validez de todas las afirmaciones del teorema. ■

Ejemplo 1.56 *Se vió ya (ejemplo 1.36) que la función continua $F(x) = x \operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$ no es de variación acotada en $[0,1]$. Luego, del teorema 1.55 se sigue que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(x) = (x, F(x))$ (gráfica de F en $[0,1]$) no es una curva rectificable.*

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sea rectificable y muestra que bajo dicha condición, la longitud de la curva esta dada por una integral de Riemann.

Teorema 1.57 *Sea γ una curva con valores en $\mathbb{R}^n$ diferenciable en $[a,b]$. Si γ' es continua en $[a,b]$, entonces γ es rectificable y*

$$\Lambda(\gamma; a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Demostración. Notemos primero que como $\|\gamma'(\cdot)\|$ es continua, del teorema 1.8 se sigue que es Riemann integrable en $[a,b]$. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ una partición de $[a,b]$. Usando el segundo teorema fundamental del cálculo integral para funciones con valores vectoriales y la proposición 1.51, obtenemos

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt, \quad i = 1, \ldots, m.$$

De esto, junto con la proposición 1.19, se sigue que

$$\Lambda(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

para toda partición P de $[a,b]$. Por lo tanto

$$\Lambda(\gamma; a, b) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \Lambda(P, \gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < \infty. \tag{1.62}$$

Esto prueba la primera afirmación y para la segunda, falta solamente demostrar la desigualdad recíproca. Consideremos $\epsilon > 0$ dado. Como γ' es continua en $[a,b]$ y $[a,b]$ es compacto,

γ' es uniformemente continua en $[a,b]$; por consiguiente, existe $\delta > 0$ tal que si $s,t \in [a,b]$ y $|s-t| < \delta$, entonces

$$\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}. \tag{1.63}$$

Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ una partición de $[a,b]$ con malla $\|P\| < \delta$. Entonces, si $t \in [t_{i-1}, t_i]$, de (1.63) y la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\|\gamma'(t)\| \leq \|\gamma'(t_i)\| + \|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\| < \|\gamma'(t_i)\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Integrando el primero y el último miembro de la desigualdad anterior y usando una vez más el segundo teorema fundamental del cálculo integral y la proposición 1.51, así como la linealidad de la integral y la desigualdad del triángulo se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\, dt &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\|\gamma'(t_i)\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\right] dt \\
&= \|\gamma'(t_i)\|\, \Delta t_i + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt \right\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) + \gamma'(t_i) - \gamma'(t)]\, dt \right\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t_i) - \gamma'(t)]\, dt \right\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\|\, dt + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&= \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\epsilon}{b-a} \Delta t_i.
\end{aligned}$$

Así que

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i,$$

de donde, por la proposición 1.19, se obtiene que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \Lambda(P, \gamma) + \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \Lambda(\gamma; a, b) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \Lambda(\gamma; a, b).$$

Esto, junto con (1.62), finalizan la demostración. ■

Ejemplo 1.58 *La elipse con semiejes en a y b con $a > b > 0$ se puede parametrizar como*

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como $\gamma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\, t, b\cos t)$ es continua en $[0, 2\pi]$, tenemos por el teorema 1.57 que la longitud de esta elipse está dada por la integral elíptica

$$\begin{aligned} \Lambda(\gamma; 0, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\, t + b^2\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\, t}\, dt. \end{aligned} \tag{1.64}$$

La integral elíptica (1.64) no se puede evaluar con métodos elementales de integración, una alternativa para evaluarla es usando métodos numéricos.

Ejemplo 1.59 *Consideremos la función $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos, dada por $\gamma(t) = e^{2\pi i t\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right)}$ para $t \in (0, 2\pi]$ y $\gamma(0) = 1$. Claramente γ es continua en $(0, 2\pi]$ y debido a que*

$$\lim_{t\to 0^+} e^{2\pi i t\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right)} = e^0 = 1,$$

($t \to 0^+$ significa $t > 0$ y $t \to 0$) se sigue que γ es continua en $[0, 2\pi]$. Por lo tanto γ es una curva en $[0, 2\pi]$. Ahora, como e^{it} tiene periodo 2π y su rango es la circunferencia unitaria centrada en el origen, para demostrar que el rango de γ es también esta circunferencia, es suficiente probar que el rango de la función $t \mapsto 2\pi t\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ contiene un intervalo de longitud 2π, o equivalentemente, que el rango de $f(t) = t\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ contiene un intervalo de longitud 1. Naturalmente que, estamos suponiendo aquí que $f(0) = 0$. Como f es continua en $[0, 2\pi]$ y $[0, 2\pi]$ es conexo, el rango de f, $f([0, 2\pi])$, es conexo(véase el teorema 5.21 en Pérez et al. [25]); y así, es suficiente encontrar dos puntos $a, b \in f([0, 2\pi])$

con $a-b>1$. *Eligiendo* $a=\frac{3}{\pi}$ *(la imagen de* $t=\frac{6}{\pi}$*) y* $b=-\frac{2}{3\pi}$ *(la imagen de* $t=\frac{2}{3\pi}$*) obtenemos* $a-b=\frac{11}{3\pi}>1$.

Demostraremos ahora que γ *no es rectificable. Para ello consideremos*

$$P_n=\{t_n,t_{n-1},\ldots,t_1,t_0=2\pi\}\,,\quad \textit{donde}\ \ t_n=\frac{2}{n\pi},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Es claro que $0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1<t_0=2\pi$ *y que* $t_n\to 0$ *cuando* $n\to\infty$. *Además,*

$$\gamma(t_0)=e^{4\pi^2 i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2\pi}\right)},\qquad \gamma(t_1)=e^{4i}$$

y

$$\gamma(t_n)=e^{\frac{4}{n}i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}=\begin{cases}1, & \textit{si}\ \ n\ \textit{es par}\\ e^{\frac{4}{n}i}, & \textit{si}\ \ n=4m+1,\ m=0,1,2,\ldots\\ e^{-\frac{4}{n}i}, & \textit{si}\ \ n=4m+3,\ m=0,1,2,\ldots.\end{cases}$$

Así que

$$\begin{aligned}\Lambda(\gamma;0,2\pi) &\geq \lim_{n\to\infty}\Lambda(P_n,\gamma)\\ &= \|\gamma(t_0)-\gamma(t_1)\|+\|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\|+\|\gamma(t_2)-\gamma(t_3)\|+\cdots\\ &= \|\gamma(t_0)-\gamma(t_1)\|+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left\|1-e^{\frac{4}{4m+1}i}\right\|+\left\|1-e^{-\frac{4}{4m+3}i}\right\|\right] \qquad (1.65)\\ &= \|\gamma(t_0)-\gamma(t_1)\|+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sqrt{2-2\cos\left(\frac{4}{4m+1}\right)}+\sqrt{2-2\cos\left(\frac{4}{4m+3}\right)}\right]\\ &= \|\gamma(t_0)-\gamma(t_1)\|+\sqrt{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sqrt{1-\cos\left(\frac{4}{4m+1}\right)}+\sqrt{1-\cos\left(\frac{4}{4m+3}\right)}\right].\end{aligned}$$

Usando ahora que para $0<x<1$,

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}+\cdots}>\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}>\frac{x}{2},$$

se sigue que para $m\geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sqrt{1-\cos\left(\frac{4}{4m+1}\right)}+\sqrt{1-\cos\left(\frac{4}{4m+3}\right)}\right] &\geq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{4m+1}+\frac{2}{4m+3}\right]\\ &\geq \sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m}=\infty,\end{aligned}$$

lo cual muestra (véase (1.65)) que la curva γ *no es rectificable.*

Problemas

1. Demuestre la proposición 1.51.

2. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Si $c \in (a,b)$, demuestre que

$$\Lambda(\gamma; a, b) = \Lambda(\gamma; a, c) + \Lambda(\gamma; c, b).$$

3. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas en el plano complejo definidas en $[0, 2\pi]$ por

$$\gamma_1(t) = e^{it} \qquad \text{y} \qquad \gamma_2(t) = e^{2it}.$$

   Demuestre que las dos curvas tienen el mismo rango, que ambas son rectificables y que la longitud de γ_1 es 2π y la de γ_2 es 4π. Compare con el ejemplo 1.59.

4. Demuestre que la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{\pi}{2t}\right)\right)$ para $t \in (0,1]$ y $\gamma(0) = (0,0)$ no es rectificable.

5. Sean $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva y $\beta : [c,d] \to [a,b]$ una función biyectiva y continua tal que $\beta(c) = a$. Si $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \beta$, demuestre que γ_2 es rectificable si y sólo si γ_1 lo es, en cuyo caso

$$\Lambda\left(\gamma_1; a, b\right) = \Lambda\left(\gamma_2; c, d\right).$$

Capítulo 2

Sucesiones y series de funciones

2.1. Convergencia puntual

Sean X un conjunto no vacío y (Y, d) un espacio métrico.

Definición 2.1 *Una sucesión de funciones* $f_n : X \to Y$*,* $n = 1, 2, \ldots$*,* ***converge puntualmente*** *en* X *a una función* $f : X \to Y$ *si para cada* $x \in X$*,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

A la función f *se le llama el* ***límite puntual*** *de la sucesión* $\{f_n\}$*.*

Observación 2.2 *La definición 2.1 es equivalente a que para cada* $x \in X$ *y cada* $\epsilon > 0$*, exista* $N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq N(\epsilon, x).$$

Tal y como se expresa, N*, en este caso, puede depender tanto de* ϵ *como de* x*.*

Si tanto X como Y son espacios métricos, una primera cuestión de interés, es determinar si cuando las funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$ son todas continuas en un punto $x \in X$, el límite puntual f es también continuo en x. El siguiente ejemplo muestra que este no es necesariamente el caso.

Ejemplo 2.3 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *definamos* $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *por* $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$*. Claramente, si* $1 < x < \infty$*, entonces* $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ *converge a* 0*; y si* $x = 1$*, entonces* $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ *converge a* 1*. Tenemos así que la sucesión* $\{f_n\}$ *converge puntualmente en* $[1, \infty)$ *a la función* f *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \;\; x = 1 \\ 0, & si \;\; x > 1. \end{cases}$$

En este ejemplo, cada una de las funciones f_n es continua, sin embargo, el límite puntual f es una función discontinua en el punto $x = 1$.

Supongamos ahora que $X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ y que $Y = \mathbb{R}$. Una segunda cuestión de interés, es determinar si cuando las funciones f_n son Riemann-Stieltjes integrables con respecto a una función de variación acotada $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, el límite puntual f lo es. Éste, como lo muestra el siguiente ejemplo, tampoco es siempre el caso.

Ejemplo 2.4 *Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$ a la función $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ 1 + nx, & si \ \ -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ 1 - nx, & si \ \ 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Definamos también a $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & si \ \ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Como cada f_n es continua y F es no decreciente, se sigue del teorema 1.8 que $f_n \in \mathcal{R}[F; -1, 1]$. Ahora, claramente $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x \neq 0 \\ 1, & si \ \ x = 0, \end{cases}$$

la cual, véase el ejemplo 1.11, no es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F en $[-1, 1]$.

Veremos ahora, en el siguiente ejemplo, que aún cuando el límite puntual f de una sucesión de funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto a una función de variación acotada F sobre $[a, b]$ pertenezca a $\mathcal{R}[F; a, b]$, puede suceder que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dF \neq \int_a^b f dF$, es decir, la convergencia puntual no garantiza que se puedan permutar el límite y la integral.

Ejemplo 2.5 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ n, & si \ \ 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Notemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función constante $f \equiv 0$. Es claro que tanto f como cada f_n son Riemann integrables sobre $[0, 1]$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

El ejemplo 2.3 muestra también que el límite puntual f de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones diferenciables no es necesariamente una función diferenciable. Veremos ahora en el siguiente ejemplo que aún cuando el límite puntual sea diferenciable en un punto x, no necesariamente se cumple que $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Ejemplo 2.6 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Claramente, cada f_n es diferenciable, con $f'_n(x) = x^n$ para todo $0 \leq x \leq 1$ y la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función constante $f \equiv 0$, la cual es diferenciable en $[0,1]$, pero*

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(1) = 1 \neq 0 = f'(1).$$

De manera similar a la definición de convergencia puntual de sucesiones de funciones, se tiene lo siguiente.

Definición 2.7 *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones definidas de un conjunto X a un espacio normado Y **converge puntualmente** en X a una función $f : X \to Y$ si para cada $x \in X$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x).$$

*A la función f se le llama el **límite puntual** o **suma** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.*

Como por definición, la suma de una serie de funciones es el límite de una sucesión de funciones (el límite de sus sumas parciales), las cuestiones ilustradas en los ejemplos anteriores son válidas también en el caso de series (véase los problemas 3 y 4). Sin embargo, debido a que pudiera no ser posible hallar una representación adecuada para la sucesión de sumas parciales, puede ser más difícil encontrar el límite de una serie de funciones que el límite de una sucesión de funciones.

Ejemplo 2.8 *Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{n+1}}{3^n}$. Esta serie puede ser representada como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, donde para cada n, $f_n(x) = \frac{(2x-1)^{n+1}}{3^n}$. En lugar de tratar de encontrar las sumas parciales, en este caso podemos reescribir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{n+1}}{3^n}$ en la forma $(2x-1)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^n$ y notar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^n$ es una serie geométrica con $y = \frac{2x-1}{3}$, la cual converge si y sólo si $\left|\frac{2x-1}{3}\right| < 1$, es decir, si y sólo si $-1 < x < 2$. Tenemos así que para $-1 < x < 2$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{n+1}}{3^n} = (2x-1)\left(\frac{\frac{2x-1}{3}}{1-\frac{2x-1}{3}}\right) = \frac{(2x-1)^2}{4-2x}.$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente en $(-1,2)$ a la función f definida por $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4-2x}$.

Problemas

1. Demuestre que las siguientes sucesiones de funciones son puntualmente convergentes y encuentre sus funciones límite.
   a) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$
   b) $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$g_n(x) = \begin{cases} n^x, & \text{si } \ 0 \le x < \frac{1}{n} \\ e^x, & \text{si } \ x \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

2. De un ejemplo de una sucesión de funciones acotadas que converjan puntualmente a una función no acotada.

3. De un ejemplo de una serie de funciones continuas que converja puntualmente a una función discontinua.

4. De un ejemplo de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones Riemann integrables sobre un intervalo $[a, b]$ que converja puntualmente a una función f en $[a, b]$, pero que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx.$$

5. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n} x$ converge puntualmente en el intervalo $(0, \pi)$ y encuentre su suma.

2.2. Convergencia uniforme

En la sección anterior vimos que la convergencia puntual no garantiza que la función límite tenga las mismas propiedades que las funciones en la sucesión. Veremos ahora un tipo de convergencia más fuerte, que en la mayoria de los casos, garantiza que la función límite herede las propiedades de las funciones de la sucesión. A este tipo de convergencia se le conoce como la **convergencia uniforme**, cuya definición damos a continuación.

Definición 2.9 *Dado un conjunto X y un espacio métrico (Y, d), una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$,* ***converge uniformemente*** *en X a una función $f : X \to Y$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,*
$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad n \ge N(\epsilon).$$
A la función f se le llama el ***límite uniforme*** *de la sucesión $\{f_n\}$.*

Observación 2.10 *Notemos que este concepto es más fuerte que el de convergencia puntual, pues en este caso, N puede depender de ϵ, pero nó de x, como es el caso de la convergencia puntual (véase la observación 2.2). De esta manera, si una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X, entonces también lo hace puntualmente.*

Mostraremos ahora mediante un ejemplo que la convergencia puntual no implica, en general, la convergencia uniforme.

Ejemplo 2.11 *Vimos ya en el ejemplo 2.3, que la sucesión de funciones $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$ converge puntualmente a la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x = 1 \\ 0, & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Si $\{f_n\}$ convergiera a f uniformemente, entonces, dado $\epsilon = \frac{1}{3}$, existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(x)| < \frac{1}{3} \quad para\ todo \quad x > 1. \tag{2.1}$$

Pero tomando $x = 2^{\frac{1}{N}} > 1$, tenemos que

$$\left| f_N(2^{\frac{1}{N}}) \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}. \tag{2.2}$$

Esto prueba que la convergencia de $\{f_n\}$ a f no es uniforme.

Daremos ahora un ejemplo de una sucesión que si converge uniformemente.

Ejemplo 2.12 *Consideremos la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Esta sucesión converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función constante $f \equiv 0$. Para verlo, consideremos $\epsilon > 0$ y elijamos un número natural N tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Entonces para todo $n \geq N$ y todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\cos(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Como en este caso, N depende sólo de ϵ y nó de x, se concluye que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

El hecho de que en la convergencia uniforme, N depende de ϵ y nó depende de x, se puede interpretar de la manera siguiente: supongamos, por cuestiones de claridad en la ilustración, que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas de un intervalo $[a, b]$ a $\mathbb{R}$ que converge uniformemente en $[a, b]$ a la función f cuya gráfica aparece en la figura 2.1. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que las gráficas de f_n para todo $n \geq N$, caen dentro de la banda determinada por las líneas punteadas de la figura 2.1.

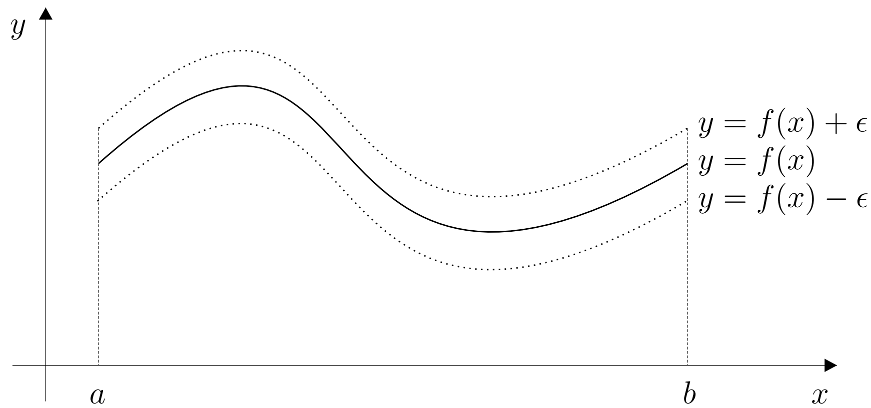

Figura 2.1: Ilustración de la convergencia uniforme.

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 2.13 *Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en X y sea*

$$M_n = \sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X si y sólo si $\{M_n\}$ converge a 0.

Ejemplo 2.14 *Consideremos de nuevo la sucesión $\{f_n\}$ del ejemplo 2.11. Mostraremos de nuevo, usando ahora la proposición 2.13 que la convergencia de $\{f_n\}$ a f en $[1, \infty)$ no es uniforme.*

Notemos que $|f_n(1) - f(1)| = \left|\frac{1}{1^n} - 1\right| = 0$. Luego,

$$M_n = \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 1} \frac{1}{x^n} = 1. \tag{2.3}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$ y así, por la proposición 2.13, se concluye que la convergencia no es uniforme. De (2.3) se observa también que la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a la función constante 0 en $(1, \infty)$ tampoco es uniforme; lo cual es también evidente de (2.1) y (2.2).

Definición 2.15 *Una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, es* ***uniformemente de Cauchy*** *en X si, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,*

$$d\left(f_n(x), f_m(x)\right) < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad m, n \geq N.$$

Bajo el supuesto de que Y sea un espacio métrico completo, el siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Teorema 2.16 *(Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme) Sea Y un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente en X si y sólo si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en X.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en X a una función $f : X \to Y$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo} \quad n \geq N,$$

y por la desigualdad del triángulo, para todo $x \in X$,

$$d\left(f_n(x), f_m(x)\right) \leq d\left(f_n(x), f(x)\right) + d\left(f_m(x), f(x)\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{para todo} \quad m, n \geq N.$$

Recíprocamente, si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en X, entonces para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en Y, y debido a que Y es completo, $\{f_n(x)\}$ converge a un punto $y \in Y$. Definamos $f : X \to Y$ por $f(x) = y$. Probaremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,

$$d\left(f_n(x), f_m(x)\right) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo} \quad m, n \geq N. \tag{2.4}$$

Usando ahora el hecho de que para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, se tiene que existe $N_0(x)$ (N_0 depende de x) tal que

$$d\left(f_m(x), f(x)\right) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo} \quad m \geq N_0(x). \tag{2.5}$$

Tomando ahora $m = \max\{N, N_0(x)\}$, se sigue de (2.4) y (2.5) que

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq d\left(f_n(x), f_m(x)\right) + d\left(f_m(x), f(x)\right) < \epsilon \;\; \text{para todo } n \geq N \;\; \text{y todo } x \in X.$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X. ∎

Observación 2.17 *Notemos de la demostración de la suficiencia del teorema 2.16 que toda sucesión uniformemente convergente es uniformemente de Cauchy, sea Y completo o nó; la completez de Y se usa en la demostración de la necesidad.*

Definición 2.18 *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones definidas de un conjunto X a un espacio normado $(Y, \|\cdot\|)$* ***converge uniformemente*** *en X a una función $f : X \to Y$ si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, definidas por $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente a f en X.*

Daremos ahora un criterio muy útil para determinar la convergencia uniforme de series, llamado el **criterio M de Weierstrass**.

Teorema 2.19 *(Criterio M de Weierstrass) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones definidas de un conjunto X a un espacio de Banach Y. Si existe una sucesión de números reales no negativos $\{M_n\}$ tal que para todo $x \in X$,*

$$\|f_n(x)\| \leq M_n \qquad \text{para todo} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, tenemos por el criterio de Cauchy para series de números reales (véase la proposición 2.70 en Pérez et al. [25]) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon$ para todo $n > m \geq N$. Se sigue entonces que para todo $x \in X$,

$$\|s_n(x) - s_m(x)\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon \ \ \text{para todo } n > m \geq N.$$

Esto prueba que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es uniformemente de Cauchy en X y el resultado se sigue del teorema 2.16. ■

Ejemplo 2.20 *Supongamos que X es un espacio vectorial real y que Y es un espacio de Banach. Sean $p > 1$ y $f : X \to Y$ una función acotada, es decir, existe $M \geq 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ para todo $x \in X$. Entonces*

$$\left\| \frac{f(nx)}{n^p} \right\| \leq \frac{M}{n^p} \qquad \text{para todo} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Como, por el criterio de las p-series (véase el ejemplo 2.74 en Pérez et al. [25]), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^p}$ converge, se sigue del criterio M de Weierstrass (teorema 2.19) que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nx)}{n^p}$ es uniformemente convergente en X.

Finalizaremos esta sección con otro criterio para determinar la convergencia uniforme de una serie de funciones, el cual es debido a Niels Abel (1802-1829).

Teorema 2.21 *(Criterio de Abel) Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones con valores reales definidas sobre un conjunto X que satisfacen las siguientes propiedades:*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X.
ii) $\{g_n\}$ es una sucesión no creciente de funciones (para cada n, $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$) y existe una constante $M > 0$ tal que $|g_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n = 1, 2, \ldots$.
Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en X.

Demostración. Consideremos las sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \qquad \text{y} \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Como $f_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $s_0 = 0$, tenemos

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, g_k = \sum_{k=1}^{n} s_k g_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} g_k. \tag{2.6}$$

Notando que

$$\sum_{k=1}^{n} s_{k-1} g_k = \sum_{k=1}^{n} s_k g_{k+1} - s_n g_{n+1},$$

se sigue de (2.6) que

$$t_n = s_n g_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k\,(g_{k+1} - g_k)$$

y escribiendo $g_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k) + g_1$ obtenemos

$$t_n = s_n g_1 + \sum_{k=1}^{n} (s_n - s_k)\,(g_{k+1} - g_k)\,, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

De esta igualdad, para $n > m$ se obtiene

$$t_n(x) - t_m(x) = (s_n(x) - s_m(x))\, g_1(x) + \sum_{k=m+1}^{n} (s_n(x) - s_k(x))\,(g_{k+1}(x) - g_k(x))\,,$$

para todo $x \in X$, y así,

$$\begin{aligned} & |t_n(x) - t_m(x)| \\ \leq\ & |s_n(x) - s_m(x)|\,|g_1(x)| + \sum_{k=m+1}^{n} |s_n(x) - s_k(x)|\,|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \\ =\ & |s_n(x) - s_m(x)|\,|g_1(x)| + \sum_{k=m+1}^{n} |s_n(x) - s_k(x)|\,(g_k(x) - g_{k+1}(x)), \end{aligned} \tag{2.7}$$

para todo $x \in X$. La última igualdad en (2.7) se debe al hecho de que $g_{k+1}(x) \leq g_k(x)$.

Ahora, dado $\epsilon > 0$, debido a la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en X, se sigue del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme (teorema 2.16) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \frac{\epsilon}{3M} \qquad \text{para todo} \;\; n, m \geq N.$$

Obtenemos así de (2.7) que para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} |t_n(x) - t_m(x)| &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left(\frac{\epsilon}{3M}\right) \sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &= \frac{\epsilon}{3} + \left(\frac{\epsilon}{3M}\right) (g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left(\frac{\epsilon}{3M}\right) (|g_{m+1}(x)| + |g_{n+1}(x)|) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad \text{para todo} \;\; n, m \geq N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue del teorema 2.16. ■

Problemas

1. Demuestre la proposición 2.13.

2. Considere la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$.
   a) Demuestre que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero nó uniformemente en $[0,1]$.
   b) Demuestre que $\{f_n\}$ converge uniformemente en cualquier subintervalo $[a,b] \subset [0,1)$.

3. Demuestre que la sucesión de funciones definidas en el problema 1 a) de la sección 2.1 no converge uniformemente en $[0,\infty)$, pero que si converge uniformemente en $[a,\infty)$ para todo $a > 0$.

4. Sean X un conjunto y Y un espacio normado. Demuestre que si $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$ es una sucesión uniformemente convergente de funciones acotadas, entonces la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada, es decir, existe $M \geq 0$ tal que
$$\|f_n(x)\| \leq M \quad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots \ \text{ y todo } \ x \in X.$$

5. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de un conjunto X a un espacio normado Y. Demuestre que si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en X, a f y g, respectivamente, entonces $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente a $f + g$.

6. Si en el problema 5, $Y = \mathbb{R}$ y las funciones f_n, g_n, $n = 1, 2, \ldots$ son acotadas, demuestre que $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a fg.

7. De un ejemplo de sucesiones con valores reales $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ que converjan uniformemente sobre un conjunto X, pero que $\{f_n g_n\}$ no converja uniformemente en X.

8. Demuestre que la serie $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n E\left(x - c_n\right)$ dada en el teorema 1.21 converge uniformemente, y que F es continua en todo $x \neq c_n$.

9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Demuestre que si la serie (de potencias) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algún $x_0 \neq 0$, entonces converge uniformemente y absolutamente en cualquier intervalo $[-R, R]$, donde $0 < R < |x_0|$.

10. Demuestre que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x + n^2}{n^{\frac{5}{2}}}$$
converge uniformemente en todo intervalo de la forma $[0, a]$ con $a > 0$, pero que no converge absolutamente para ningún valor de x.

11. Criterio de convergencia uniforme de series debido a J. Dirichlet (1805-1859). Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones con valores reales definidas sobre un conjunto X que satisfacen las siguientes propiedades:
a) Existe $M > 0$ tal que
$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \quad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots \ \text{ y todo } \ x \in X.$$
b) $\{g_n\}$ es una sucesión no creciente de funciones que converge uniformemente a la función constante 0.

Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en X.

Sugerencia: Considere las sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ y $t_n = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k$ y escriba

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \left[g_k - g_{k+1}\right] + g_{n+1} s_n.$$

12. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ es uniformemente convergente en $[0,1]$.

2.3. Convergencia uniforme y continuidad

Como ya se vió en el ejemplo 2.3, la sola convergencia puntual no es suficiente para garantizar que el límite de una sucesión de funciones continuas sea una función continua. Veremos en esta sección que si la convergencia es uniforme, entonces la función límite si es continua. De esta manera, si el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es una función discontinua, en al menos un punto, la convergencia no es uniforme.

Teorema 2.22 *Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos. Si $f_n : X \to Y$ es continua en $z \in X$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X, entonces $f : X \to Y$ es continua en z.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$,

$$\rho\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \quad n \geq N. \tag{2.8}$$

Ahora, como f_N es continua en z, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\left(f_N(x), f_N(z)\right) < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{cuando} \quad d(x,z) < \delta. \tag{2.9}$$

Así de (2.8) y (2.9) se sigue por la desigualdad del triángulo que

$$\begin{aligned} \rho\left(f(x), f(z)\right) &\leq \rho\left(f(x), f_N(x)\right) + \rho\left(f_N(x), f_N(z)\right) + \rho\left(f_N(z), f(z)\right) \\ &< \epsilon \qquad \text{cuando} \quad d(x,z) < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua en z. ■

Como una serie de funciones es en realidad una sucesión de funciones (la sucesión de sus sumas parciales), la demostración del siguiente resultado es inmediata y se deja como ejercicio al lector.

Corolario 2.23 *Sean (X,d) un espacio métrico y $(Y,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $f_n : X \to Y$ es continua en $z \in X$ para todo $n = 1,2,\ldots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f en X, entonces $f : X \to Y$ es continua en z.*

Usaremos el corolario 2.23 para dar una elegante demostración de un resultado que nos da una condición suficiente para intercambiar el orden en las sumas de una serie doble.

Proposición 2.24 *Sea a_{mn}, $m,n = 1,2,\ldots$ una sucesión doble de números reales. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| = b_m, \qquad m = 1,2,\ldots \tag{2.10}$$

y $\sum_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de números reales, digamos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$; y consideremos el conjunto $E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$.

Como toda serie absolutamente convergente es convergente (véase la proposición 2.78 en Pérez et al. [25]) se sigue de (2.10) que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ converge.

Definamos para cada m $(= 1,2,\ldots)$, $f_m : E \to \mathbb{R}$ por

$$f_m(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}, & \text{si} \quad x = x_0 \\ \sum_{n=1}^{k} a_{mn}, & \text{si} \quad x = x_k. \end{cases}$$

Es claro que cada f_m $(m = 1,2,\ldots)$ es continua en x_0, esto es, $\lim_{k\to\infty} f_m(x_k) = f_m(x_0)$.

Ahora, como $|f_m(x)| \le b_m$ para todo $x \in E$ se tiene por el criterio M de Weierstrass (teorema 2.19) que $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ es uniformemente convergente en E y así, por el corolario 2.23, la función definida en E por $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ es continua en x_0. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x_0) = g(x_0) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} a_{mn} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}. \end{aligned}$$

■

Observación 2.25 *En el teorema 2.22, la continuidad de la función límite f en $z \in X$, significa que*

$$\lim_{x\to z} f(x) = f(z). \tag{2.11}$$

Por la convergencia (uniforme) de $\{f_n\}$ a f en X, el lado izquierdo de (2.11) es igual al $\lim_{x\to z}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y el lado derecho es igual al $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to z} f_n(x)$. De esta manera, la conclusión del teorema 2.22 es equivalente a que

$$\lim_{x\to z}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to z} f_n(x).$$

En particular, si $x_n \to z$ cuando $n \to \infty$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f_n(x_m).$$

Del teorema 2.22 se sigue inmediatamente que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en X que converge uniformemente a f en X, entonces f es continua en X. Es importante también, señalar aquí, que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas es una condición suficiente pero no necesaria para que la función límite sea una función continua, véase el problema 2. Sin embargo, si $Y = \mathbb{R}$ y X es un espacio métrico compacto, existe un recíproco parcial debido a Ulisse Dini (1845-1918).

Teorema 2.26 *(Teorema de Dini) Sean X un espacio métrico compacto y $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión monótona de funciones continuas que converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Si f es continua en X, entonces $f_n \to f$ uniformemente en X.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión no creciente de funciones, es decir, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n = 1, 2, \ldots$; entonces $f_n(x) - f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ y todo $n = 1, 2, \ldots$.

Sea $\epsilon > 0$. Definamos, para cada n $(= 1, 2, \ldots)$, el conjunto

$$X_n = \{x \in X : f_n(x) - f(x) \geq \epsilon\}.$$

Como $f_n - f$ es una función continua, el conjunto X_n es cerrado (véase el teorema 5.4 en Pérez et al. [25]). Como X es compacto y $X_n \subset X$, es cerrado, se sigue (véase la proposición 4.16 en Pérez et al. [25]) que X_n es compacto.

Consideremos ahora $x \in X$. Como $f_n(x) - f(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $f_m(x) - f(x) < \epsilon$; esto es, $x \notin X_m$, y, en consecuencia, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Como $x \in X$ es arbitrario, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$; y del hecho de que X es compacto, se sigue (véase el teorema 4.6 en Pérez et al. [25]) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{N} X_n = \emptyset$. Pero debido a que $f_n(x) - f(x) \geq f_{n+1}(x) - f(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que $X_n \supset X_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, y así $\bigcap_{n=1}^{N} X_n = X_N$. Por lo tanto $X_N = \emptyset$, y, en consecuencia, $X_n = \emptyset$ para todo $n \geq N$, esto es,

$$f_n(x) - f(x) < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N \quad \text{y todo} \quad x \in X,$$

concluyéndose así que $f_n \to f$ uniformemente en X. Para el caso en que $\{f_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones, basta aplicar lo anterior a la sucesión no creciente $\{-f_n\}$ y usar el problema 6 de la sección 2.2. ■

Definición 2.27 *Sean X un conjunto no vacío y (Y, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to Y$ es **acotada** si su imagen $f(X)$ es un subconjunto acotado de Y, es decir, existe $M > 0$ tal que*

$$d\left(f(x), f(z)\right) \leq M \quad \textit{para todo} \quad x, z \in X.$$

Denotemos por $B(X, Y)$ al espacio de todas las funciones acotadas de X en Y; y definamos para cada par de funciones $f, g \in B(X, Y)$,

$$d_\infty\left(f, g\right) = \sup_{x \in X} d\left(f(x), g(x)\right).$$

Es fácil ver (problema 5) que d_∞ es una métrica en $B(X, Y)$.

Veremos a continuación que para funciones acotadas la convergencia uniforme es equivalente a la convergencia en el espacio métrico $(B(X, Y), d_\infty)$, el cual, debido al criterio de Cauchy para la convergencia uniforme (teorema 2.16) y la proposición 2.28 de abajo, resulta ser un espacio métrico completo cuando Y es completo. De la completez de $B(X, Y)$ se seguirá fácilmente que el subespacio $C_b(X, Y)$ de todas las funciones continuas de $B(X, Y)$ es también completo, con la métrica d_∞.

Proposición 2.28 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $B(X, Y)$ que converge uniformemente a $f : X \to Y$, entonces $f \in B(X, Y)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(f_N(x), f(x)\right) < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad x \in X. \tag{2.12}$$

Usando ahora que f_N es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$d\left(f_N(x), f_N(z)\right) \leq M \qquad \text{para todo} \quad x, z \in X. \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13) se sigue por la desigualdad del triángulo que

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(z)\right) &\leq d\left(f_N(x), f(x)\right) + d\left(f_N(x), f_N(z)\right) + d\left(f_N(z), f(z)\right) \\ &\leq M + 2\epsilon \qquad \text{para todo} \quad x, z \in X. \end{aligned}$$

Lo cual prueba que $f \in B(X,Y)$. ■

De las proposiciones 2.13 y 2.28 la equivalencia de la convergencia uniforme y la convergencia con respecto a la métrica d_∞, es inmediata. Dejaremos los detalles como ejercicio al lector.

Proposición 2.29 *Una sucesión $\{f_n\}$ en $B(X,Y)$ converge uniformemente a $f : X \to Y$ si y sólo si $\{f_n\}$ converge a f en el espacio métrico $(B(X,Y), d_\infty)$.*

Debido a la proposición 2.29, a la métrica d_∞ se le suele llamar la **métrica uniforme**.

El siguiente resultado puede ser fácilmente demostrado mediante la proposición 2.28 y el teorema 2.16. Dejeremos los detalles de su demostración al lector.

Proposición 2.30 *Si X es un conjunto no vacío y Y es un espacio métrico completo, el espacio métrico $(B(X,Y), d_\infty)$ es completo.*

Para finalizar la sección, consideremos el subespacio de $B(X,Y)$ definido por

$$C_b(X,Y) = \{f \in B(X,Y) : f \text{ es continua}\}.$$

Proposición 2.31 *El espacio métrico $(C_b(X,Y), d_\infty)$ es completo.*

Demostración. Por la proposición 3.83 en Pérez et al. [25], basta ver que $C_b(X,Y)$ es un subconjunto cerrado de $B(X,Y)$. Consideremos pues $f \in \overline{C_b(X,Y)}$. Por el teorema 3.62 en Pérez et al. [25], existe una sucesión $\{f_n\}$ en $C_b(X,Y)$ tal que $f_n \to f$ en $B(X,Y)$. De aquí el resultado se sigue del teorema 2.22. ■

Problemas

1. Demuestre el corolario 2.23.

2. De un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que converja puntualmente pero nó uniformemente a una función continua.

3. Demuestre que

   a) La sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = \frac{2x^{2n}}{2x^{2n}+1}$, no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

   b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, donde $g_n(x) = x^n(1-x)$, no converge uniformemente en $[0,1]$. Compare con el problema 12 de la sección 2.2.

4. Demuestre que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

si $a_{mn} \geq 0$ para todo $m, n = 1, 2, \ldots$.

5. Sean X un conjunto no vacío y (Y, d) un espacio métrico. Si $B(X, Y)$ es el espacio de todas las funciones acotadas de X en Y, demuestre que

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in X} d\left(f(x), g(x)\right), \quad f, g \in B(X, Y)$$

define una métrica en $B(X, Y)$.

6. Demuestre la proposición 2.29.

7. Demuestre la proposición 2.30.

8. Sea (X, d) un espacio métrico. Fije $p \in X$, y para cada $z \in X$ defina la función

$$G(z) = d(\cdot, z) - d(\cdot, p).$$

Note que cada $G(z)$ es una función de X en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\overline{G(X)}$ es un subespacio métrico completo de $C_b(X, \mathbb{R})$.

9. Sean X y Y espacios métricos. Si $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f : X \to Y$, demuestre que para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

2.4. Convergencia uniforme e integración

Vimos ya (véase el ejemplo 2.4) que si una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge puntualmente a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y cada f_n es Riemann-Stieltjes integrable sobre $[a, b]$ con respecto a una función de variación acotada $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces f no es necesariamente Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F sobre $[a, b]$; y aún cuando $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, puede suceder (véase el ejemplo 2.5) que la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dF = \int_a^b f dF \tag{2.14}$$

no se cumpla. Sin embargo, veremos en el siguiente teorema que si $\{f_n\}$ converge a f uniformemente, entonces $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y (2.14) se cumple.

Teorema 2.32 *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Si la sucesión $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge uniformemente a la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y cada $f_n \in \mathcal{R}[F; a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dF = \int_a^b f dF.$$

Demostración. De la definición 1.43 y la proposición 1.42 se observa que es suficiente realizar la demostración suponiendo que F es no decreciente en $[a,b]$.

Consideremos pues $\epsilon > 0$. De la proposición 2.13 se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } \ n \ge N. \tag{2.15}$$

Tenemos así

$$f_N(x) - \epsilon < f(x) < f_N(x) + \epsilon \qquad \text{para todo } \ a \le x \le b.$$

De manera que para cualquier partición P de $[a,b]$,

$$L\left(P, f_N, F\right) - \epsilon\left(F(b) - F(a)\right) \le L(P,f,F) \le U(P,f,F) \le U\left(P, f_N, F\right) + \epsilon\left(F(b) - F(a)\right).$$

Luego

$$U(P,f,F) - L(P,f,F) \le U\left(P, f_N, F\right) - L\left(P, f_N, F\right) + 2\epsilon\left(F(b) - F(a)\right). \tag{2.16}$$

Del hecho de que $f_N \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se tiene (teorema 1.6) que existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U\left(P, f_N, F\right) - L\left(P, f_N, F\right) < \epsilon.$$

Así, para esta partición P, se sigue de (2.16) que

$$U\left(P, f, F\right) - L\left(P, f, F\right) < \epsilon\left[1 + 2\left(F(b) - F(a)\right)\right].$$

Como ϵ es arbitrario, el criterio de integrabilidad (teorema 1.6) implica que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$.

Ahora, de (2.15) y debido a que $f_n - f \in \mathcal{R}[F; a, b]$, se tiene por la linealidad en el integrando y la proposición 1.18 ii) que

$$\left|\int_a^b f_n dF - \int_a^b f dF\right| = \left|\int_a^b \left(f_n - f\right) dF\right| \le \epsilon\left(F(b) - F(a)\right) \qquad \text{para todo } \ n \ge N,$$

con lo cual se finaliza la demostración. ■

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Corolario 2.33 *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integrables con respecto a F sobre $[a, b]$ converge uniformemente a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dF = \int_a^b f dF.$$

Problemas

1. Demuestre el corolario 2.33.

2. Demuestre que para todo $-1 < x < 1$,

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3. Considere $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y suponga que la sucesión $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge uniformemente a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y que cada $f_n \in \mathcal{R}[F; a, b]$. Definiendo $\alpha_n(x) = \int_a^x f_n dF$, $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, demuestre que $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente en $[a, b]$, donde $\alpha(x) = \int_a^x f dF$.

4. Demuestre que la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$ converge puntualmente a la función constante cero en $[0, 1]$, y, mediante el teorema 2.32, demuestre que la convergencia a 0 no es uniforme.

5. Sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de funciones integrables que es uniformemente acotada (existe $M \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ y todo $x \in X$) tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrable y acotada. Demuestre que si para cualquier $0 < a < 1$, $f_n \to f$ uniformemente en [a,1], entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

6. De un ejemplo para demostrar que el teorema 2.32 no es, en general, válido para integrales impropias de la forma $\int_a^{\infty} f dF$ (se supone aquí que $f \in \mathcal{R}[F; a, b]$ para todo $b > a$ y que $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f dF$ existe, en cuyo caso, $\int_a^{\infty} f dF := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f dF$) sin suposiciones adicionales (véase el problema 7).

7. Considere funciones $g, f, f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, y suponga que para todo $b > a$, g y f_n, $n = 1, 2, \ldots$ son funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ con $|f_n| \leq g$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre $[a, b]$. Demuestre que si $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

2.5. Convergencia uniforme y diferenciación

Vimos ya (véase el ejemplo 2.3) que el límite puntual f de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones diferenciables no es necesariamente una función diferenciable; y aún cuando lo sea (véase el ejemplo 2.6), no necesariamente se cumple que la sucesión $\{f_n'\}$ converja puntualmente a f'. El ejemplo que veremos a continuación muestra que aún cuando la convergencia de $\{f_n\}$ a f sea uniforme, no puede garantizarse ni siquiera que $\{f_n'\}$ sea puntualmente convergente. De manera que se requieren condiciones más fuertes para asegurar que $f_n' \to f'$ cuando $f_n \to f$.

Ejemplo 2.34 *Consideremos la sucesión de funciones* $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *definidas por*
$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$
Se vió ya (ejemplo 2.12) que esta sucesión converge uniformemente (incluso en $\mathbb{R}$*) a la función constante* $f \equiv 0$*. Sin embargo, la sucesión* $\{f_n'\}$ *no es ni siquiera puntualmente convergente en* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$*, ya que* $f_n'(x) = -\operatorname{sen}(nx)$*.*

Teorema 2.35 *Sea* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *una sucesión de funciones diferenciables tal que* $\{f_n(p)\}$ *converge para algún punto* $p \in [a, b]$*. Si* $\{f_n'\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$*, entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$ *a una función diferenciable* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y además*
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x), \qquad x \in [a, b].$$

Demostración. Sea $p \in [a, b]$ tal que $\{f_n(p)\}$ converge. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|f_n(p) - f_m(p)| < \frac{\epsilon}{2(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ n, m \geq N_0. \tag{2.17}$$
Denotando por g al límite uniforme de $\{f_n'\}$ en $[a, b]$, tenemos por la proposición 2.13 que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sup_{a\leq x\leq b} |f_n'(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{4(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ n \geq N_1. \tag{2.18}$$

Luego por la desigualdad del triángulo

$$\sup_{a\leq x\leq b}|f_n'(x)-f_m'(x)|<\frac{\epsilon}{2(b-a+1)}\qquad \text{para todo}\ \ n,m\geq N_1. \tag{2.19}$$

Ahora, dados cualesquiera dos puntos distintos $x_1,x_2\in[a,b]$, tenemos por el teorema del valor medio aplicado a f_n-f_m que existe un punto z entre x_1 y x_2 tal que

$$[f_n(x_2)-f_m(x_2)]-[f_n(x_1)-f_m(x_1)]=(x_2-x_1)\left[f_n'(z)-f_m'(z)\right].$$

Tenemos así, de (2.19), que

$$|[f_n(x_2)-f_m(x_2)]-[f_n(x_1)-f_m(x_1)]|<\frac{|x_2-x_1|\,\epsilon}{2\,(b-a+1)}\quad \text{para todo}\ \ n,m\geq N_1. \tag{2.20}$$

Consideremos ahora un punto $x\in[a,b]\backslash\{p\}$ y $N=\max\{N_0,N_1\}$. Entonces tomando $x_1=p$ y $x_2=x$ obtenemos de (2.20) que

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|-|f_n(p)-f_m(p)| &\leq |[f_n(x)-f_m(x)]-[f_n(p)-f_m(p)]|\\ &< \frac{|x-p|\epsilon}{2(b-a+1)}\qquad \text{para todo}\ \ n,m\geq N.\end{aligned}$$

Luego de (2.17),

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{(1+|x-p|)\,\epsilon}{2(b-a+1)}\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon\quad \text{para todo}\ \ x\in[a,b]\ (\text{incluyendo}\ x=p).$$

Se sigue así, del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme (teorema 2.16), que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Consideremos ahora $x\in(a,b)$ y tomemos $h\neq 0$ de manera que $x+h\in[a,b]$. Entonces por (2.20) con $x_1=x$ y $x_2=x+h$ tenemos

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-\frac{f_m(x+h)-f_m(x)}{h}\right|<\frac{\epsilon}{2(b-a+1)}\quad \text{para todo}\ \ n,m\geq N. \tag{2.21}$$

Sea f el límite uniforme de $\{f_n\}$ en $[a,b]$. Entonces haciendo $m\to\infty$ en (2.21) obtenemos (recordando que $|\cdot|$ es una función continua) que

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leq\frac{\epsilon}{2(b-a+1)}\quad \text{para todo}\ \ n\geq N. \tag{2.22}$$

Por la definición de la derivada $f_N'(x)$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{f_N(x+h)-f_N(x)}{h}-f_N'(x)\right|<\frac{\epsilon}{4(b-a+1)}\quad \text{cuando}\ \ 0<|h|<\delta. \tag{2.23}$$

Entonces, mediante el uso de la desigualdad del triángulo, se sigue de (2.22), (2.23) y (2.18) que

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| &\leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f_N(x+h)-f_N(x)}{h}\right| \\ &+ \left|\frac{f_N(x+h)-f_N(x)}{h}-f'_N(x)\right| + |f'_N(x)-g(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{b-a+1} < \epsilon \qquad \text{cuando } \; 0<|h|<\delta. \end{aligned}$$

Tenemos así que $f'(x)$ existe y que es igual a $g(x)$. El argumento anterior es también válido cuando $x = a$ y cuando $x = b$, tomando respectivamente, $h > 0$ y $h < 0$. ■

La demostración de la formulación del teorema 2.35 para series es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Corolario 2.36 *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de funciones diferenciables tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ converge para algún punto $p \in [a,b]$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función diferenciable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x), \qquad x \in [a,b].$$

Problemas

1. Demuestre el corolario 2.36.

2. Encuentre el límite f de la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, dadas por

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x^4}.$$

Demuestre que $\{f'_n\}$ no converge uniformemente, pero que

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x) \qquad \text{para todo } \; x \in [0,1]. \tag{2.24}$$

Este problema muestra que la convergencia uniforme de $\{f'_n\}$ no es una condición necesaria para que se cumpla (2.24) (véase el teorema 2.35).

3. Considere la sucesión de funciones $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{1}{n\exp(n^2x^2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

   Demuestre que $f_n \to 0$ uniformemente y que $f_n' \to 0$ puntualmente, pero nó uniformemente.

4. Sea $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de funciones diferenciables tal que $\{f_n(p)\}$ converge para algún punto $p \in (a,b)$. Demuestre que si $\{f_n'\}$ converge uniformemente sobre cualquier subintervalo cerrado de (a,b), entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre cualquier subintervalo cerrado de (a,b), $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es diferenciable en (a,b) y

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \qquad \text{para todo } \ x \in (a,b).$$

5. Demuestre que la función zeta de Riemann $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ esta definida para todo $x > 1$, es diferenciable en $(1,\infty)$ y $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.

6. Demuestre que para todo $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) - 1.$$

2.6. Series de potencias

Un tipo particularmente sencillo y útil de series de funciones (con valores reales) está dado por las llamadas **series de potencias**, las cuales definimos a continuación.

Definición 2.37 *Dadas una constante $a \in \mathbb{R}$ y una sucesión de números reales $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, a la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ se le llama una **serie de potencias** centrada en a. A los números c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ se les llama **coeficientes** de la serie de potencias y al número a el **centro**.*

Notemos que cuando $x = a$, el primer término de la serie de potencias es $c_0 0^0$, por lo que por conveniencia de notación, definiremos $0^0 = 1$.

Obviamente, dada una serie de potencias, lo primero que debemos hacer es determinar los valores de x para los cuales la serie converge. Por conveniencia, a menudo tomaremos $a = 0$.

Teorema 2.38 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *una serie de potencias.*
i) Si $\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *es absolutamente convergente para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
ii) Si $0 < \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$ *y* $R = \left(\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *es absolutamente convergente para todo* $|x| < R$ *y diverge para todo* $|x| > R$*.*
iii) Si $\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *converge únicamente en* $x = 0$*.*

Demostración. Notemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\limsup |c_n x^n|^{\frac{1}{n}} = |x| \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.25}$$

Luego si i) $\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$, entonces

$$\limsup |c_n x^n|^{\frac{1}{n}} = 0 < 1 \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}.$$

Así, por el criterio de las raíz para la convergencia de series de números reales (véase la proposición 2.83 en Pérez et al. [25]), $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora si ii) $0 < \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$, se sigue de (2.25) que

$$\limsup |c_n x^n|^{\frac{1}{n}} < 1 \qquad \text{si y sólo si } \; |x| < R$$

y

$$\limsup |c_n x^n|^{\frac{1}{n}} > 1 \qquad \text{si y sólo si } \; |x| > R.$$

De esto, el resultado deseado se sigue nuevamente del criterio de la raíz para la convergencia de series de números reales.

Finalmente, si iii) $\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$, se sigue de (2.25) que

$$\limsup |c_n x^n|^{\frac{1}{n}} = \infty > 1 \qquad \text{para todo } \; x \neq 0.$$

Luego, del criterio de la raíz, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge para todo $x \neq 0$. Como obviamente, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0$ para $x = 0$, la demostración está completa. ∎

Al número R, donde $R = \infty$ en el caso i) y 0 en el caso iii) se le llama el **radio de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. La proposición siguiente nos da otra alternativa para calcular el radio de convergencia cuando $lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \in [0, \infty]$. La demostración es similar a la del teorema 2.38 usando el criterio de la razón para la convergencia de series de números reales (proposición 2.79 en Pérez et al. [25]) en lugar del criterio de la raíz y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 2.39 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *una serie de potencias para la cual* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R \in [0,\infty]$.
i) Si $R = \infty$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *es absolutamente convergente para todo* $x \in \mathbb{R}$.
ii) Si $0 < R < \infty$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *es absolutamente convergente para todo* $|x| < R$ *y diverge para todo* $|x| > R$.
iii) Si $R = 0$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *converge únicamente en* $x = 0$.

Demostraremos ahora que una función dada en términos de una serie de potencias es diferenciable en su intervalo de convergencia y que tanto su derivada en un punto $x \in \mathbb{R}$ como su integral de Riemann sobre $[0, x]$ se pueden obtener diferenciando e integrando, respectivamente, término por término su serie de potencias.

Teorema 2.40 *Sea* $0 < R \leq \infty$ *el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *y definamos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad -R < x < R.$$

Entonces
i) f *es diferenciable en* $(-R, R)$ *y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \tag{2.26}$$

ii) Para $x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Demostración. Demostraremos primero que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es uniformemente convergente en $[-r, r]$ para cualquier $0 < r < R$. En efecto, para cualquier $x \in [-r, r]$,

$$|c_n x^n| \leq |c_n|\, r^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ es convergente, se sigue del criterio M de Weierstrass (teorema 2.19) que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es uniformemente convergente en $[-r, r]$.

Definiendo

$$a_n = (n+1)c_{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Luego, como $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\operatorname{lím\,sup} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \operatorname{lím\,sup} (n\,|c_n|)^{\frac{1}{n}} = \operatorname{lím\,sup} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

y así, la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia R que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$; y por lo anterior $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ es uniformemente convergente en $[-r, r]$. Luego por el corolario 2.36 tenemos que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(c_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad \text{para todo} \quad -r < x < r. \tag{2.27}$$

Pero, debido a que para cualquier $x \in (-R, R)$ podemos tomar $0 < r < R$ tal que $x \in (-r, r)$, tenemos que f es diferenciable para todo $x \in (-R, R)$ y (2.26) se cumple.

Para la demostración de ii), notemos que si $0 < x < R$ entonces igual que en la demostración de la parte i) se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es uniformemente convergente en $[-x, x]$. Luego por el corolario 2.33, f es Riemann integrable en $[-x, x]$,

$$\int_0^x f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

y

$$-\int_{-x}^{0} f(z)dz = \int_0^{-x} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(-x)^{n+1},$$

lo cual finaliza la prueba de ii). ■

Aplicando sucesivamente (2.26) a $f, f', f'', \ldots$ se obtiene lo siguiente.

Corolario 2.41 *Sea $0 < R \leq \infty$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y definamos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad -R < x < R.$$

Entonces f es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$ y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k}, \tag{2.28}$$

donde $f^{(k)}(x)$ denota a la k-ésima derivada de f en x, $k = 1, 2, \ldots$.

Observación 2.42 *Definiendo $f^{(0)} \equiv f$ obtenemos de (2.28) con $x = 0$ que*

$$f^{(k)}(0) = k!c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.29}$$

A las funciones que pueden ser expresadas como una serie de potencias sobre algún intervalo $(-R, R)$ se les llama **funciones analíticas**. El corolario 2.41 muestra que toda función analítica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$, es decir, f tiene derivadas de todos los ordenes en $(-R, R)$; y además

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

A la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

se le llama **serie de Maclaurin** (Colin Maclaurin, 1698-1746). De esta manera, una función f es analítica sobre un intervalo $(-R, R)$ si su serie de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge a $f(x)$ para todo $x \in (-R, R)$.

Ejemplo 2.43 *Uno de los ejemplos más importantes de funciones analíticas en $\mathbb{R}$ es la **función exponencial** definida por*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Por el teorema 2.40 tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

y también

$$\int_0^x e^z dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{z^n}{n!} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1.$$

El siguiente ejemplo muestra que no toda función infinitamente diferenciable es una función analítica.

Ejemplo 2.44 *Consideremos* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & si \;\; x\neq 0\\ 0, & si \;\; x=0.\end{cases}$$

Notemos que para todo $k=0,1,2,\ldots,$

$$\lim_{x\to 0} x^k e^{\frac{1}{x^2}}=\infty. \tag{2.30}$$

En efecto, (2.30) es claramente válido para $k=0$*; y por la definición de la función exponencial, para* $k=1,2,\ldots$ *tenemos que*

$$e^{\frac{1}{x^2}}\geq \frac{x^{-2k}}{k!}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} x^k e^{\frac{1}{x^2}}\geq \lim_{x\to 0}\frac{1}{k!}x^{-k}=\infty.$$

Tenemos así que

$$\lim_{x\to 0} x^{-k}e^{-\frac{1}{x^2}}=0 \qquad para \;\; k=0,1,2,\ldots. \tag{2.31}$$

Probaremos ahora por inducción que existe un polinomio p_n *tal que*

$$f^{(n)}(x)=p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad para \;\; x\neq 0. \tag{2.32}$$

Para $n=1$*, tenemos que*

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{x}\right)^3 e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad para \;\; x\neq 0,$$

de manera que la afirmación es cierta para $n=1$ *con* $p_1\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^3$*. Diferenciando la expresión (2.32) obtenemos*

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{d}{dx}p_n\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)^3 p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Como $\frac{d}{dx}p_n\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)^3 p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ *es claramente un polinomio en la variable* $\frac{1}{x}$*, tomando*

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}p_n\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)^3 p_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

obtenemos

$$f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \textit{para} \;\; x \neq 0.$$

De esta manera, queda demostrado que (2.32) es válido para todo $n = 1, 2, \ldots$.

De (2.31), con $k = 1$, *se sigue también que* $f'(0) = 0$. *Suponiendo que* $f^{(n)}(0) = 0$, *obtenemos de (2.31) y (2.32) que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

es decir, $f^{(n+1)}(0) = 0$. *Concluímos así por inducción que*

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \textit{para todo} \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{2.33}$$

De esta manera

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \neq f(x) \qquad \textit{para todo} \;\; x \neq 0.$$

Tenemos así que f *es infinitamente diferenciable en* $\mathbb{R}$, *pero su serie de Maclaurin no converge a* $f(x)$ *para* $x \neq 0$.

El siguiente resultado conocido como el **teorema de Abel**, establece que si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con radio de convergencia $0 < R < \infty$, converge en R (o en $-R$), entonces es continua no sólo en $(-R, R)$ sino en $(-R, R]$ (o en $[-R, R)$).

Teorema 2.45 *(Teorema de Abel) Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $0 < R < \infty$. *Si* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *para* $-R < x < R$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ *converge, entonces*

$$\lim_{x\uparrow R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

Demostración. Usaremos el criterio de Abel (teorema 2.21) con f_n definida en $X = [0, R]$ por

$$f_n(x) = c_n R^n \qquad \text{para} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

y g_n definida en $[0, R]$ por

$$g_n(x) = \frac{x^n}{R^n} \qquad \text{para} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Notemos que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ satisfacen las hipótesis del criterio de Abel con $M = 1$. En consecuencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \frac{x^n}{R^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

es uniformemente convergente en $[0, R]$. Así, por el corolario 2.23 se sigue que la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es continua en $[0, R]$, de manera que

$$\lim_{x \uparrow R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

■

Daremos, más abajo, una aplicación del teorema de Abel al "producto" de series de números reales. Para ello, introducimos el llamado "producto de Cauchy" y damos, previamente a la aplicación del teorema de Abel, un resultado sobre la convergencia de la serie producto.

Definición 2.46 *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números reales. A la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se le llama el **producto de Cauchy** de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Esta definición puede ser motivada como sigue: consideremos dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; multiplicando término por término estas dos series y agrupando los términos con igual potencia de x, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\right) \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \cdots \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

De aquí, tomando $x = 1$, obtenemos la definición 2.46. Desafortunadamente, la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ no asegura la convergencia de su producto de Cauchy, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (véase el problema 9). Sin embargo, como veremos en el siguiente resultado, la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ está asegurada bajo la convergencia absoluta de al menos una de las dos series.

Teorema 2.47 *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series de números reales con sumas A y B, respectivamente. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces el producto de Cauchy, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.*

Demostración. Sean

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{y} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si $\beta_n = B_n - B$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \qquad (2.34) \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0. \end{aligned}$$

Demostraremos que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, donde

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

De lo cual, el resultado deseado se obtendrá del hecho de que $A_n B \to AB$ cuando $n \to \infty$.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $\beta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y en consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\beta_n| < \epsilon \qquad \text{para todo } \; n \geq N.$$

Así, si $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, entonces

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0| \, |a_n| + \cdots + |\beta_N| \, |a_{n-N}| + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

La convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implica (véase la proposición 2.68 en Pérez et al. [25]) que $a_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Luego, fijando N y haciendo $n \to \infty$, obtenemos

$$\limsup |\gamma_n| \leq \epsilon\alpha.$$

Como ϵ es arbitrario, se sigue que $\limsup |\gamma_n| = 0$, y debido a que $0 \leq \liminf |\gamma_n| \leq \limsup |\gamma_n|$, entonces $\lim_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0$. Así, el resultado se obtiene haciendo $n \to \infty$ en (2.34). ■

Usando ahora el teorema de Abel (teorema 2.45) demostraremos que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ y la serie producto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. Notemos que, a diferencia del teorema 2.47, aquí no se pide que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sea absolutamente convergente.

Teorema 2.48 *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series de números reales con sumas A y B, respectivamente. Si el producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge a C, entonces $AB = C$.*

Demostración. Consideremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{para } \ 0 \leq x \leq 1. \tag{2.35}$$

Como una serie de potencias es absolutamente convergente en el interior de su intervalo de convergencia (véase el teorema 2.38), tenemos que las series en (2.35) son absolutamente convergentes para $0 \leq x < 1$. Así, realizando el producto de Cauchy de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtenemos del teorema 2.47 que

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \qquad \text{para } \ 0 \leq x < 1. \tag{2.36}$$

Ahora, como por el teorema de Abel,

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = A, \quad \lim_{x \uparrow 1} g(x) = B \quad \text{y} \quad \lim_{x \uparrow 1} h(x) = C,$$

el resultado deseado se sigue haciendo $x \uparrow 1$ en (2.36). ■

Problemas

1. Demuestre la proposición 2.39.

2. Encuentre el radio de convergencia, R, de las siguientes series y analice en cada una los casos en que $x = R$ y $x = -R$.
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$.
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$.
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^n} x^n$.

3. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R = 2$. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 x^n$.
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$.
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n^2}$.

4. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales diferentes de cero que converge a 0, demuestre que $a_n = b_n$ para todo n $(= 0, 1, 2, \ldots)$.

5. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y defina

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{para } \ -R < x < R.$$

   Si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in (-R, R)$, demuestre que $c_n = 0$ para todo n impar.

6. Demuestre que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

   Sugerencia: Pruebe primero que para todo $-1 < x < 1$, $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ y use luego el teorema de Abel.

7. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < \infty$. Si $c_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x \uparrow R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \infty.$$

8. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ defina

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{y} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

   Demuestre que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

   es 1, y que es la serie de Maclaurin de $(1+x)^{\alpha}$.

9. De un ejemplo de dos series de números reales convergentes cuya serie producto diverja.

2.7. Fórmula de Taylor

Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ centrada en $a \in \mathbb{R}$ y con radio de convergencia R. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad -R < x < R,$$

se conoce (véase el corolario 2.41) que f es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$ y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (x-a)^{n-k}, \tag{2.37}$$

donde $f^{(k)}(x)$ es la k-ésima derivada de f en x, $k = 1, 2, \ldots$. Definiendo $f^{(0)} \equiv f$ se obtiene de (2.37), evaluada en $x = a$, que

$$f^{(k)}(a) = k! c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

o equivalentemente,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

A la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se le conoce como la **serie de Taylor** (Brook Taylor, 1685-1731) de f en a. Notemos que en el caso $a = 0$ se reduce a la serie de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Desafortunadamente (véase el ejemplo 2.44) si f es una función infinitamente diferenciable en $a \in \mathbb{R}$ no necesariamente se cumple que $f(x)$ sea igual a su serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ para $-R < x < R$. Para que tal igualdad se cumpla en un punto x, se requiere que

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty, \tag{2.38}$$

donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Al polinomio P_n se le conoce como el n-ésimo **polinomio de Taylor** de f en a y el **residuo** R_n mide la diferencia entre $f(x)$ y $P_n(x)$. Existen varias formas de expresar el residuo. En el siguiente teorema se expresa por medio de una integral, por lo que es conocida como la **fórmula de Taylor con residuo integral**.

Teorema 2.49 *(Fórmula de Taylor con residuo integral) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Si $a \in I$ y f es una función con valores reales infinitamente diferenciable en I, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Demostración. Como $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, debemos probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad \text{para cada} \quad x \in I. \tag{2.39}$$

Fijemos pues $x \in I$. Demostraremos (2.39) por inducción. Por el segundo teorema fundamental del cálculo integral (teorema 1.31), obtenemos

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - P_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \\ &= \int_a^x f'(t)dt - \int_a^x f'(a)dt = \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el teorema de integración por partes (teorema 1.47) con $u(t) = f'(t) - f'(a)$ y $v(t) = t - x$, se obtiene que

$$R_1(x) = (f'(t) - f'(a))\,(t-x)|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt = \int_a^x (x-t)f''(t)dt.$$

Esto prueba la validez de (2.39) para $n = 1$. Supongamos ahora que (2.39) se cumple para $n = k$.

Usando de nuevo el segundo teorema fundamental del cálculo integral, obtenemos

$$\begin{aligned} R_{k+1}(x) &= R_k(x) - \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \\ &= \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt - \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(a)(x-t)^k dt \\ &= \frac{1}{k!}\int_a^x \left(f^{(k+1)}(t) - f^{(k+1)}(a)\right)(x-t)^k dt. \end{aligned}$$

De aquí, nuevamente por el teorema de integración por partes, pero ahora con $u(t) = f^{(k+1)}(t) - f^{(k+1)}(a)$ y $v(t) = -\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} R_{k+1}(x) &= \frac{1}{k!}\left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\left(f^{(k+1)}(t) - f^{(k+1)}(a)\right)|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+2)}(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt. \end{aligned}$$

Así, por inducción, se concluye que (2.39) es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in I$ es arbitrario, la demostración está completa. ■

Ejemplo 2.50 *Recordemos, véase el problema 8 de la sección 2.6, que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ es la serie de Maclaurin de la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ para $-1 < x < 1$. Veremos que, en este caso,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Para ello debemos verificar (véase (2.38)) que para cada $x \in (-1,1)$, el residuo $R_n(x)$, dado por la fórmula (2.39) converge a cero cuando $n \to \infty$. En este caso

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}dt \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

Notemos que
i) si $0 \leq x < 1$ *y* $0 \leq t \leq x$, *entonces* $1 \leq 1+t \leq 1+|x|$ *y* $0 \leq \frac{x-t}{1+t} \leq x$, *y*
ii) si $-1 < x < 0$ *y* $x \leq t \leq 0$, *entonces* $0 < 1+t \leq 1+|x|$ *y* $x \leq \frac{x-t}{1+t} \leq 0$.
Luego, si $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\left|\int_0^x |x|^n (1+|x|)^{\alpha-1}\, dt\right| \\ &= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x|^{n+1} (1+|x|)^{\alpha-1}. \qquad (2.40) \end{aligned}$$

Ahora, como las series $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}$ *tienen ambas radio de convergencia 1 (véase el teorema 2.40), de la igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1},$$

se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n$ *es absolutamente convergente para todo* $-1 < x < 1$. *Por lo tanto* $n\left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *y así, de (2.40) se sigue que para todo* $x \in (-1,1)$, $R_n(x) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Esto concluye la demostración para el caso* $\alpha > 1$. *La demostración para el caso* $\alpha \leq 1$ *es similar y se deja como ejercicio al lector.*

En el siguiente teorema damos otra representación del residuo R_n, la cual involucra a la derivada, por lo que es conocida como la **fórmula de Taylor con residuo diferencial**.

Teorema 2.51 *(Fórmula de Taylor con residuo diferencial) Sean* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto y* $n \in N$. *Si* $a \in I$ *y* f *es una función con valores reales para la cual* $f^{(n+1)}$ *existe en* I, *entonces para cada* $x \in I$ *existe un punto* z *entre* x *y* a *tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración. Consideremos al n-ésimo polinomio de Taylor de f en a,

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \qquad t \in I.$$

Como el resultado es claramente válido para $x = a$, supongamos que $x \neq a$. Sea $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + A(x-a)^{n+1}$$

y definamos

$$g(t) = R_n(t) - A(t-a)^{n+1}, \qquad t \in I.$$

Debemos probar que existe un punto z entre x y a tal que

$$A = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}. \tag{2.41}$$

Por la hipótesis, la función g es $n+1$ veces diferenciable en I. Luego, notando que $P_n^{(n+1)}(t) = 0$ para todo $t \in I$, obtenemos

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!A \qquad \text{para } \ t \in I.$$

Así, (2.41) se cumplirá si probamos que existe z entre x y a tal que $g^{(n+1)}(z) = 0$.

Como $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, tenemos que

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0;$$

y por la elección de A, $g(x) = 0$. Luego, aplicando el teorema del valor medio a g tenemos que existe x_1 entre x y a tal que $g'(x_1) = 0$. Como $g'(a) = 0$, aplicando el teorema del valor medio a g' obtenemos x_2 entre x_1 y a tal que $g''(x_2) = 0$. Después de $n+1$ pasos, encontramos x_{n+1} entre x_n y a tal que $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Observando que x_{n+1} está entre x y a, el resultado deseado se sigue con $z = x_{n+1}$. ■

Problemas

1. a) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

   b) Use la serie de potencias en a) para hallar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\pi^2}{9}\right)^n}{(2n)!}$.

   c) Diferenciando la serie en a), encuentre la expansión en serie de Maclaurin de la función $\operatorname{sen} x$.

2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Si f es una función con valores reales infinitamente divisible en I y existe $M > 0$ tal que $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ para todo $t \in I$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, demuestre que para cualquier $a \in I$, f tiene una expansión en serie de Taylor en a,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{para todo } \ x \in I.$$

3. En el ejemplo 2.50 se demostró que para $\alpha > 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{para} \quad -1 < x < 1. \tag{2.42}$$

   Demuestre que
   a) La igualdad (2.42) es también válida para $\alpha \leq 1$.
   b) Para $x = 1$ la serie converge (a 2^α) si y sólo si $\alpha > -1$.
   c) Para $x = -1$ la serie converge si y sólo si $\alpha \geq 0$. Si $\alpha = 0$ la suma es 1 y si $\alpha > 0$ la suma es 0.

4. Demuestre que si una función f con valores reales tiene una expansión en serie de Maclaurin,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \text{para} \ \ |x| < R,$$

   entonces para cualquier $a \in (-R, R)$, tiene una expansión en serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad \text{para} \ \ |x-a| < R - |a|. \tag{2.43}$$

   Note que (2.43) pudiera converger en un intervalo más grande que el originado por la condición $|x - a| < R - |a|$.

5. Sea f una función con valores reales tal que f', f'' y $f^{(3)}$ existen sobre un intervalo abierto I que contiene a los puntos -1 y 1. Si

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f'(0) = 0,$$

   demuestre que $f^{(3)}(x) \geq 3$ para algún $x \in (-1, 1)$.
   Sugerencia: Use la fórmula de Taylor con residuo diferencial para demostrar que existen $s \in (-1, 0)$ y $t \in (0, 1)$ tales que $f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6$.

2.8. Teorema de Ascoli

En esta sección consideramos al espacio $C(X, \mathbb{R})$ de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ continuas, donde X es un espacio métrico compacto. Como toda función continua definida sobre un compacto es acotada (véase el teorema 5.14 en Pérez et al. [25]), tenemos por la proposición 2.31 que $C(X, \mathbb{R})$ equipado con la métrica uniforme, d_∞, es un espacio métrico completo.

Como el espacio euclidiano $\mathbb{R}$ es completo, y toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$, tiene una subsucesión convergente (teorema de Bolzano-Weierstrass), es natural preguntarse si existe algún resultado similar en el caso de sucesiones de funciones $\{f_n\}$ en $C(X,\mathbb{R})$. Un resultado de esta naturaleza está dado por el **teorema de Ascoli** (Giulio Ascoli, 1843-1896), que veremos en esta sección. Para ello requerimos antes algunos conceptos y resultados preliminares.

Definición 2.52 *Sean X un conjunto no vacío y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en X con valores en $\mathbb{R}$.*
a) La sucesión $\{f_n\}$ es ***puntualmente acotada*** *en X si para cada $x \in X$, existe $M_x > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_x \qquad \text{para todo} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

b) La sucesión $\{f_n\}$ es ***uniformemente acotada*** *en X si existe $M > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \text{para todo} \;\; x \in X \;\; \text{y todo} \;\; n = 1, 2, \ldots .$$

El siguiente ejemplo muestra que una sucesión $\{f_n\}$ en $C(X,\mathbb{R})$ uniformemente acotada no necesariamente tiene una subsucesión uniformemente convergente. De manera que se requieren condiciones adicionales para que tal cosa ocurra.

Ejemplo 2.53 *Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) = \frac{x}{x + (nx-1)^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Entonces $|f_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ y todo $n = 1, 2, \ldots$, de manera que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $[0,1]$. Notemos también que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{para} \;\; 0 \leq x \leq 1,$$

pero como

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

$\{f_n\}$ no tiene subsucesiones uniformemente convergentes en $[0,1]$.

Definición 2.54 *Sean (X,d) un espacio métrico. Una familia $\mathfrak{F}$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ es* ***equicontinua*** *en X si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathfrak{F}$,*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \text{cuando} \;\; d(x,y) < \delta.$$

Observación 2.55 *Notemos que si $\mathfrak{F}$ es una familia equicontinua en X, entonces toda función $f \in \mathfrak{F}$ es uniformemente continua en X.*

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 2.56 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $C(X, \mathbb{R})$ que converge uniformemente (con la métrica d_∞), entonces $\{f_n\}$ es equicontinua en X.*

Lema 2.57 *Sea X un conjunto numerable. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en X con valores en $\mathbb{R}$ puntualmente acotada, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ tal que $\{f_{k_n}(x)\}$ converge para cada $x \in X$.*

Demostración. Denotemos por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a los puntos de X. Como $\{f_n(x_1)\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, se sigue del teorema de Bolzano-Weierstrass (véase el corolario 2.53 en Pérez et al. [25]), que existe una subsucesión, la cual denotamos por $\{f_{1,k}\}$ tal que $\{f_{1,k}(x_1)\}$ converge cuando $k \to \infty$. Considerando ahora $\{f_{1,k}(x_2)\}$ se sigue, de nuevo por el teorema de Bolzano-Weierstrass, que existe una subsucesión de $\{f_{1,k}\}$, la cual denotamos por $\{f_{2,k}\}$ tal que $\{f_{2,k}(x_2)\}$ converge cuando $k \to \infty$. Continuando con este proceso, encontramos subsucesiones $\{f_{1,k}\}$, $\{f_{2,k}\}$, $\{f_{3,k}\}$,... que, por claridad, representamos en el arreglo:

$$\begin{array}{cccc}
f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4}\cdots \\
f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4}\cdots \\
f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4}\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Notemos que
i) $\{f_{n+1,k}\}$ es una subsucesión de $\{f_{n,k}\}$ para $n = 1, 2, \ldots$.
ii) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ converge cuando $k \to \infty$.
iii) Se conserva el orden en cada sucesión, es decir, si $f_{1,m}$ precede a $f_{1,l}$ en $\{f_{1,k}\}$, entonces $f_{1,m}$ precede a $f_{1,l}$ en $\{f_{2,k}\}$ (a menos que alguna no sea parte de la subsucesión $\{f_{2,k}\}$). De esta manera, cuando avanzamos hacia abajo de renglón en renglón en el arreglo, las funciones se mueven a la izquierda y nunca a la derecha.

Así, considerando a la sucesión formada por los elementos de la diagonal del arreglo, $\{f_{k,k}\}$, tenemos por iii) que $\{f_{n+k,n+k}\}$ es una subsucesión de $\{f_{n,k}\}$; por lo tanto, el inciso ii) implica (véase el teorema 2.46 en Pérez et al. [25]) que para cualquier n, $\{f_{n+k,n+k}(x_n)\}$ converge cuando $k \to \infty$, esto es $\{f_{k,k}(x_n)\}$ converge cuando $k \to \infty$ para cualquier $x_n \in X$.
■

Al proceso usado en la demostración del lema 2.57 se le conoce como el **proceso diagonal de Cantor**.

Teorema 2.58 *(Teorema de Ascoli) Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $C(X, \mathbb{R})$ puntualmente acotada y equicontinua en X, entonces*
a) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en X.
b) $\{f_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Por la equicontinuidad de $\{f_n\}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad \text{para todo } n = 1, 2, \ldots \text{ cuando } d(x, y) < \delta. \tag{2.44}$$

Notemos que

$$X = \bigcup_{x \in X} V_\delta(x),$$

donde $V_\delta(x)$ es la bola abierta con centro en x y radio δ. Como X es compacto, existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que

$$X = V_\delta(x_1) \cup \cdots \cup V_\delta(x_m). \tag{2.45}$$

Usando ahora que $\{f_n\}$ es puntualmente acotada, tenemos que para cada x_i $(i = 1, \ldots, m)$, existe $M_i > 0$ tal que

$$|f_n(x_i)| \leq M_i \qquad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.46}$$

Ahora, dado $x \in X$, se sigue de (2.45) que $x \in V_\delta(x_i)$ para algún i $(= 1, \ldots, m)$. Luego, tomando $M = \max\{M_1, \ldots, M_m\}$, obtenemos de (2.44) y (2.46) que

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x_i)| + |f_n(x) - f_n(x_i)| \leq M + \epsilon \qquad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots.$$

Esto prueba a).

Para la demostración del inciso b) usaremos el hecho de que todo espacio métrico compacto es separable (véase p. 118 en Pérez et al. [25]), es decir, contiene un subconjunto D denso y numerable. Así, por el lema 2.57, $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{k_n}\}$ tal que $\{f_{k_n}(y)\}$ converge para cada $y \in D$. Demostraremos que $\{f_{k_n}\}$ converge uniformemente en X.

Dado $\epsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ como al inicio de la demostración. Notemos que

$$X = \bigcup_{y \in D} V_\delta(y).$$

En efecto, como D es denso en X, dado $x \in X$, existe $y \in D$ tal que $d(x, y) < \delta$, es decir, $x \in V_\delta(y)$. Usando ahora la compacidad de X, tenemos que existen $y_1, \ldots, y_l \in D$ tales que

$$X = V_\delta(y_1) \cup \cdots \cup V_\delta(y_l). \tag{2.47}$$

Como $\{f_{k_n}(y)\}$ converge para cada $y \in D$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{k_n}(y_i) - f_{k_m}(y_i)| < \epsilon \qquad \text{para todo } \ i = 1, \ldots, l \quad \text{y todo } \ m, n \geq N. \tag{2.48}$$

Si $x \in X$, se sigue de (2.47) que $x \in V_\delta(y_i)$ para algún i, de manera que, por (2.44)

$$|f_{k_n}(x) - f_{k_n}(y_i)| < \epsilon \qquad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.49}$$

Ahora, si $m, n \geq N$, entonces de (2.48) y (2.49) se obtiene que

$$|f_{k_n}(x) - f_{k_m}(x)| \leq |f_{k_n}(x) - f_{k_n}(y_i)| + |f_{k_n}(y_i) - f_{k_m}(y_i)| + |f_{k_m}(y_i) - f_{k_m}(x)| < 3\epsilon.$$

Por lo tanto $\{f_{k_n}\}$ es uniformemente de Cauchy, y así, el resultado se sigue del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme (teorema 2.16). ∎

Problemas

1. Demuestre la proposición 2.56.

2. Sea $\mathfrak{F} \subset C(X, \mathbb{R})$, donde X es un espacio métrico compacto. Si para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathfrak{F}$,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \text{cuando } \ d(x, y) < \delta,$$

   demuestre que $\mathfrak{F}$ es equicontinua.

3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $C([0,1], \mathbb{R})$ diferenciables en $(0,1)$. Si $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada y $f_n(0) = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, demuestre que $\{f_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

4. Para una sucesión $\{f_n\}$ uniformemente acotada de funciones Riemann-integrables sobre $[a, b]$, defina $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

   Demuestre que $\{F_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en $[a, b]$.

5. Sean X un espacio métrico compacto y $\{f_n\}$ una sucesión equicontinua de funciones en $C(X, \mathbb{R})$ que converge puntualmente en X. Demuestre que $\{f_n\}$ converge uniformemente en X.

2.9. Teorema de Stone-Weierstrass

En la sección anterior (teorema de Ascoli) vimos condiciones suficientes bajo las cuales una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $C(X,\mathbb{R})$ con X compacto tiene una subsucesión uniformemente convergente. En esta sección daremos un resultado, llamado el **teorema de Stone-Weierstrass** (Marshall Harvey Stone (1903-1989), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)) que da condiciones suficientes bajo las cuales un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(X,\mathbb{R})$ es denso, es decir, condiciones bajo las cuales, para cada función $f \in C(X,\mathbb{R})$ existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{A}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. Antes de dar este teorema necesitamos de algunos preliminares.

Definición 2.59 *Sea X un conjunto no vacío.*
*a) Un espacio vectorial real $\mathcal{A}$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ es un **álgebra** si para cualesquiera funciones $g, h \in \mathcal{A}$ se tiene que $gh \in \mathcal{A}$.*
*b) El álgebra $\mathcal{A}$ **separa puntos** de X si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Notación: Denotamos por $\mathbf{1}$ a la función constante que asigna a todo $x \in X$ el valor 1.

Ejemplo 2.60 *El espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$ es un álgebra de funciones continuas que separa puntos y que contiene a la función constante $\mathbf{1}$.*

Proposición 2.61 *Existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios que converge uniformemente a $\sqrt{x}$ en el intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Definamos $p_1 \equiv 0$ sobre $[0,1]$ y

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.50}$$

Claramente $\{p_n\}$ es una sucesión de polinomios. Demostraremos por inducción que $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ y todo $x \in [0,1]$. Notemos que la afirmación es cierta para $n = 1$. Supongamos ahora que $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, obviamente $0 \leq p_{n+1}(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right) = \left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right)\right]. \tag{2.51}$$

Notemos que $\sqrt{x} - p_n(x) \geq 0$ por la hipótesis de inducción y también, de la hipótesis de inducción, $\sqrt{x} + p_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ para todo $x \in [0,1]$, luego $1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right) \geq 0$. Así de (2.51) se sigue que $p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ para todo $x \in [0,1]$, quedando así demostrado que

$$0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \qquad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots \quad \text{y todo } \ x \in [0,1].$$

Notemos ahora, de la definición de p_{n+1} y el hecho de que $p_n^2(x) \leq x$, que para todo $0 \leq x \leq 1$, la sucesión $\{p_n\}$ es no decreciente y acotada en $[0,1]$, y, por lo tanto, converge puntualmente (véase la proposición 2.35 en Pérez et al. [25]) en $[0,1]$ a una función no negativa f.

Haciendo $n \to \infty$ en (2.50) se obtiene que

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f^2(x)\right) \qquad \text{para todo} \;\; x \in [0,1],$$

lo cual es válido si y sólo si $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [0,1]$.

Resumiendo, tenemos probado que $\{p_n\}$ es una sucesión no decreciente de polinomios que convergen puntualmente a la función continua $\sqrt{x}$. De esto, el resultado deseado se sigue del teorema de Dini (teorema 2.26). ∎

Proposición 2.62 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones definidas sobre un conjunto X que separa puntos de X y que contiene a la función constante $\mathbf{1}$. Entonces para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ y cualesquiera constantes $a, b \in \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$.*

Demostración. Debido a que $\mathcal{A}$ separa puntos de X, existe una función $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(z) = \frac{(a-b)g(z) + (bg(x) - ag(y))\mathbf{1}(z)}{g(x) - g(y)}, \qquad z \in X.$$

Como $\mathbf{1}$ y g pertenecen a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es un álgebra, claramente $f \in \mathcal{A}$. Además $f(x) = a$ y $f(y) = b$. ∎

Observación 2.63 *Si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $B(X, \mathbb{R})$, el espacio de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ acotadas, denotaremos por $\overline{\mathcal{A}}$ a la cerradura de $\mathcal{A}$ con respecto a la métrica uniforme d_∞ y la llamaremos la **cerradura uniforme** de $\mathcal{A}$, en este mismo tenor, si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $B(X, \mathbb{R})$ con respecto a d_∞, diremos que $\mathcal{B}$ es **uniformemente cerrado**.*

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Lema 2.64 *Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{A} \subset B(X, \mathbb{R})$ es un álgebra, entonces la cerradura uniforme $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ es un álgebra uniformemente cerrada.*

Lema 2.65 *Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ es un álgebra, entonces para cualesquiera $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ se tiene que $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Obviamente, si $f \equiv 0$, entonces $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, ya que (véase el lema 2.64) $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra. Supongamos pues que $f \neq 0$ y sea

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Como $f \neq 0$, entonces $M > 0$. Por la proposición 2.61, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ que converge uniformemente a $\sqrt{x}$ en $[0,1]$. Debido a que $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra, la función $g_n = p_n\left(\frac{f^2}{M^2}\right) \in \overline{\mathcal{A}}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Además, la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en X a $\sqrt{\frac{f^2}{M^2}} = \frac{|f|}{M}$. Luego, por la cerradura uniforme de $\overline{\mathcal{A}}$ (véase el lema 2.64), $\frac{|f|}{M} \in \overline{\mathcal{A}}$, de manera que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Notando ahora que

$$\text{máx}\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \qquad \text{y} \qquad \text{mín}\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

se sigue que $\text{máx}\{f,g\}$, $\text{mín}\{f,g\} \in \overline{\mathcal{A}}$. ■

Observación 2.66 *Del lema 2.65, se sigue fácilmente por iteración, que si $f_1, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces $\text{máx}\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\text{mín}\{f_1, \ldots, f_n\} \in \overline{\mathcal{A}}$.*

El siguiente resultado da una propiedad de aproximación local que nos permite aproximar una función $f \in C(X, \mathbb{R})$ por arriba, en cualquier punto $a \in X$ dado.

Lema 2.67 *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ un álgebra que separa puntos de X y que contiene a la función constante **1**. Entonces, dada una función $f \in C(X, \mathbb{R})$, un punto $a \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que*

$$g(a) = f(a) \qquad y \qquad g(x) > f(x) - \epsilon \quad \textit{para todo} \;\; x \in X.$$

Demostración. Tenemos por la proposición 2.62 que para cada $x \in X$, existe una función $g_x \in \mathcal{A}$ tal que

$$g_x(a) = f(a) \qquad \text{y} \qquad g_x(x) = f(x).$$

Como g_x y f son funciones continuas, existe un conjunto abierto V_x tal que $x \in V_x$ y

$$g_x(y) > f(y) - \epsilon \qquad \text{para todo} \;\; y \in V_x.$$

Notemos que $X = \bigcup_{x \in X} V_x$. Ahora, como X es compacto, existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}. \tag{2.52}$$

Sea $g = \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}\}$; entonces por el lema 2.65, $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Además, $g(a) = f(a)$. De (2.52) se tiene que si $x \in X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in V_{x_i}$; y así

$$g(x) \geq g_{x_i}(x) > f(x) - \epsilon,$$

lo cual finaliza la demostración de que f satisface las propiedades deseadas. ■

Teorema 2.68 *(Teorema de Stone-Weierstrass) Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ un álgebra que separa puntos de X y que contiene a la función constante $\mathbf{1}$. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$ con respecto a d_∞.*

Demostración. Debemos probar que $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$. Como obviamente $\overline{\mathcal{A}} \subset C(X, \mathbb{R})$, resta solamente verificar que $C(X, \mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Consideremos pues $f \in C(X, \mathbb{R})$. Como $\overline{\mathcal{A}}$ es uniformemente cerrado (véase el lema 2.64), para concluir que $f \in \overline{\mathcal{A}}$, basta probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$|g(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } \ x \in X. \tag{2.53}$$

Para cada $y \in X$, por el lema 2.67 tenemos que existe $g_y \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que $g_y(y) = f(y)$ y

$$g_y(x) > f(x) - \epsilon \qquad \text{para todo } \ x \in X. \tag{2.54}$$

De la desigualdad $g_y(y) = f(y) < f(y) + \epsilon$ y la continuidad de g_y y f, se sigue que existe un conjunto abierto V_y tal que $y \in V_y$ y

$$g_y(x) < f(x) + \epsilon \qquad \text{para todo } \ x \in V_y. \tag{2.55}$$

Como X es compacto, existe un número finito de puntos $y_1, \ldots, y_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}. \tag{2.56}$$

Sea $g = \min\{g_{y_1}, \ldots, g_{y_n}\}$. Por el lema 2.65, $g \in \overline{\mathcal{A}}$. También, de (2.54) y la definición de g, se sigue que

$$g(x) > f(x) - \epsilon \qquad \text{para todo } \ x \in X. \tag{2.57}$$

Por otra parte, si $x \in X$, se tiene por (2.56) que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in V_{y_i}$. Luego por (2.55) y la definición de g,

$$g(x) \leq g_{y_i}(x) < f(x) + \epsilon. \tag{2.58}$$

Conjugando ahora (2.57) y (2.58) obtenemos

$$f(x) - \epsilon < g(x) < f(x) + \epsilon \qquad \text{para todo} \;\; x \in X,$$

lo cual es equivalente a (2.53). ∎

Como el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$ es un álgebra de funciones continuas que separa puntos y que contiene a la función constante $\mathbf{1}$, se obtiene el siguiente resultado (debido originalmente a Weierstrass).

Corolario 2.69 *(Teorema de Weierstrass) Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda función $f \in C(X, \mathbb{R})$ es el límite uniforme en X de una sucesión de polinomios sobre $\mathbb{R}$.*

Problemas

1. Demuestre el lema 2.64.

2. Demuestre que la conclusión del teorema de Stone-Weierstrass sigue siendo válida si se reemplaza la condición de que la función constante $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ por la condición de que para cada $x \in X$ exista una función $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq 0$.

3. Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{V} \subset C(X, \mathbb{R})$ un espacio vectorial que separa puntos de X y que contiene a la función constante $\mathbf{1}$. Demuestre que si para cada $f \in \mathcal{V}$ se tiene que $|f| \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$ con respecto a la métrica uniforme.
   Este resultado es una versión especial del teorema de Stone-Weierstrass en la que la condición de cerradura bajo la multiplicación de funciones se reemplaza por la condición de cerradura bajo la composición por $|\cdot|$.

4. Sea B el conjunto formado por las funciones $\mathbf{1}, \cos x, \cos^2 x, \ldots$ definidas en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Si $\mathcal{A}$ es el espacio vectorial generado por B, esto es, $\mathcal{A}$ es el espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de B, demuestre que $\mathcal{A}$ es denso en $C\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ con respecto a la métrica uniforme.

5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \qquad \text{para} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

   demuestre que $f \equiv 0$ en $[a, b]$.

6. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Demuestre que el espacio métrico $(C(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ es separable.
   Sugerencia: i) Recuerde que todo espacio métrico compacto X es separable (véase el problema 8 de la sección 4.1 en Pérez et al. [25]); por lo tanto existe un conjunto numerable $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ tal que $\overline{E} = X$.
   ii) Defina para cada n $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n(x) = d\,(x, x_n)$, $x \in X$.
   iii) Considere el álgebra $\mathcal{A}$ generada por la colección de funciones $\{\mathbf{1}, f_1, f_2, \ldots\}$ y demuestre que $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$.

7. Dados espacios métricos compactos X y Y, sea $\overline{\mathcal{A}}$ el espacio vectorial generado por las funciones de la forma

$$f(x, y) = g(x)h(y), \qquad \text{donde} \;\; g \in C(X, \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad h \in C(Y, \mathbb{R}).$$

   Demuestre que $\mathcal{A}$ es denso en $C(X \times Y, \mathbb{R})$ con respecto a la métrica uniforme.

Capítulo 3

Funciones de varias variables

3.1. El teorema de punto fijo para contracciones

En esta sección consideramos un resultado de suma importancia en el análisis, conocido como el **teorema de punto fijo** para contracciones y que será usado más adelante, en la sección 3.6, en la demostración del teorema de la función inversa.

Definición 3.1 *Sea X un conjunto no vacío. Si $f : X \to X$ es una función y $x \in X$ cumple que $f(x) = x$, se dice que x es un* ***punto fijo*** *de la función f.*

Definición 3.2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ es una* ***contracción****, si existe $0 < c < 1$ tal que*

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq cd(x, y) \qquad \text{para todo} \;\; x, y \in X.$$

Es claro que toda contracción es una función continua.

Teorema 3.3 *(Teorema de punto fijo para contracciones) Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.*

Demostración. Probaremos primero la unicidad. Supongamos pues que existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$. Entonces

$$d(x, y) = d\left(f(x), f(y)\right) \leq cd(x, y).$$

Como $c < 1$, la desigualdad anterior se cumple si y sólo si $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$.

Para la demostración de la existencia, fijemos un $x_0 \in X$ arbitrario y definamos

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+1}, x_n\right) &= d\left(f\left(x_n\right), f\left(x_{n-1}\right)\right) \leq c d\left(x_n, x_{n-1}\right) \\ &\leq c^2 d\left(x_{n-1}, x_{n-2}\right) \leq \cdots \leq c^n d\left(x_1, x_0\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Así, si $n \geq m$, obtenemos

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_m\right) &\leq d\left(x_n, x_{n-1}\right) + \cdots + d\left(x_{m+1}, x_m\right) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} c^i d\left(x_1, x_0\right) \leq \sum_{i=m}^{\infty} c^i d\left(x_1, x_0\right) = c^m d\left(x_1, x_0\right) \sum_{i=0}^{\infty} c^i. \end{aligned}$$

Usando que $\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c}$, se sigue (véase el ejemplo 2.72 en Pérez et al. [25]) que

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq \frac{c^m}{1-c} d\left(x_1, x_0\right). \tag{3.1}$$

De lo cual, es claro que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X y como X es completo, existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Por la continuidad de f, se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = f(x).$$

Pero como $\{x_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, resulta (véase el teorema 2.46 en Pérez et al. [25]) que $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x$, y así $f(x) = x$. ■

Observación 3.4 *i) Haciendo $n \to \infty$ en (3.1) obtenemos (véase el problema 1) que*

$$d\left(x, x_m\right) \leq \frac{c^m}{1-c} d\left(x_1, x_0\right).$$

Esta desigualdad nos permite calcular aproximaciones al punto fijo x con la precisión que se requiera.
ii) Se observa también de la demostración que dado un espacio métrico arbitrario X y una función continua $f : X \to X$, si para un punto $x_0 \in X$, $\{f^n\left(x_0\right)\}$ converge, donde $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n veces), entonces $\lim_{n \to \infty} f^n\left(x_0\right) \equiv x$ es un punto fijo de f.

Problemas

1. Sea (X, d) un espacio métrico y considere $z \in X$. Demuestre que la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = d(x, z)$ es continua.

2. a) Encuentre un ejemplo de un espacio métrico completo (X, d) y una función $f : X \to X$ para la cual
$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \qquad \text{para todo } \; x, y \in X$$
que no tenga puntos fijos.
b) Encuentre un ejemplo de un espacio métrico (X, d) y una función $f : X \to X$ que sea una contracción, pero que no tenga puntos fijos.

3. Considere la sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$ definida por
$$x_0 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$
Demuestre que $\{x_n\}$ converge y encuentre su límite.

4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y considere una función $f : X \to X$. Si para algún $k \in \mathbb{N}$, $f^k \equiv f \circ \cdots \circ f$ (k veces) es una contracción, demuestre que f tiene un único punto fijo.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax - b$, donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Considerando la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$, demuestre que si $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 < 1$, entonces f tiene un único punto fijo.

6. Sea X un espacio métrico. Demuestre que si $f : X \to X$ es continua, entonces el conjunto de todos los puntos fijos de X es cerrado.

3.2. Normas de operadores lineales

Dados dos espacios vectoriales X y Y, a una función $T : X \to Y$ que satiface
$$T(ax + bz) = aT(x) + bT(z) \quad \text{para cualesquiera } \; x, z \in X \quad \text{y} \;\; a, b \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$
se le llama una **transformación lineal** de X en Y.

Abusando de la notación, usaremos el símbolo 0 para denotar tanto al número real cero, como a los neutros aditivos de X y Y. De esta manera, si en (3.2) tomamos tanto a a como a b como el número real cero, obtenemos
$$T(0) = T(0x + 0z) = 0T(x) + 0T(z) = 0,$$

donde el último 0 es el vector nulo de Y.

En este capítulo nos restringiremos al caso en que $X = \mathbb{R}^n$ y $Y = \mathbb{R}^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, y convenimos en llamar a T un **operador lineal** de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Denotaremos al espacio vectorial de todos los operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ por $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Recordemos (véase por ejemplo, Hoffman y Kunze [16], sección 3.4) que si $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces dadas bases $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\beta = \{\beta_1 \ldots, \beta_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, cada vector $T(\alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$, se expresa de manera única como una combinación lineal

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i, \tag{3.3}$$

de los vectores de la base β; y la función

$$T \mapsto (a_{ij}) \tag{3.4}$$

determina un isomorfismo (una transformación lineal biyectiva) entre el espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y el espacio vectorial de todas las matrices A de tamaño $m \times n$.

Definamos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por

$$\langle (x_1, \ldots, x_m), (z_1, \ldots, z_m) \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i z_i.$$

A esta función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se le conoce como el **producto interno canónico** de $\mathbb{R}^m$ y es fácil ver (problema 1) que satisface las propiedades indicadas en la siguiente proposición.

Proposición 3.5 *El producto interno canónico, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, satisface lo siguiente:*
a) Es bilineal, es decir,

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle \qquad y \qquad \langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ y $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Es simétrico, es decir, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^m$.
c) $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Nos restringiremos de aquí en adelante a las bases canónicas $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\beta = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Notemos que si $x = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$, entonces por la proposición 3.5,

$$\langle x, u_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{m} a_k u_k, u_i \right\rangle = a_i, \qquad i = 1, \ldots m,$$

ya que $\langle u_k, u_i\rangle$ es 0 si $k \neq i$ y 1 si $k = i$. Por lo tanto x se puede expresar como

$$x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i\rangle\, u_i. \tag{3.5}$$

Así de (3.3) obtenemos que

$$\langle T(e_j), u_i\rangle = a_{ij}.$$

De esta manera, el isomorfismo (3.4) queda determinado por las igualdades

$$a_{ij} = \langle T(e_j), u_i\rangle, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

De aquí en adelante $|\cdot|$ denotará, indistintamente, a la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{R}^m$. La siguiente proposición nos dice que todo operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una función uniformemente continua.

Proposición 3.6 *Si $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces T es uniformemente continuo.*

Demostración. Tenemos por (3.5) que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i$, y así por la linealidad de T, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, T(e_i)$. Por lo tanto

$$|T(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, T(e_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|\, |T(e_i)|\,.$$

Como $|\langle x, e_i\rangle| = |x_i| \leq |x|$, se sigue que

$$|T(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |T(e_i)| \right) |x|. \tag{3.7}$$

Sea $M = \sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|$. Si $M = 0$, entonces $T \equiv 0$, y la conclusión es clara. Ahora, si $M > 0$, dado $\epsilon > 0$, tomando $0 < \delta < \frac{\epsilon}{M}$ obtenemos

$$|T(x) - T(y)| = |T(x-y)| \leq M|x-y| < \epsilon \qquad \text{cuando} \;\; |x-y| < \delta.$$

■

De (3.7) se sigue que

$$0 \leq \|T\| \equiv \text{ínf}\,\{M \geq 0 : |T(x)| \leq M|x|,\; x \in \mathbb{R}^n\} < \infty. \tag{3.8}$$

De esta manera $\|\cdot\|$ es una función de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ en $[0, \infty)$. Veremos que $\|\cdot\|$ es una norma a la cual le llamaremos la **norma del operador**, pero antes notemos de la definición de $\|\cdot\|$ que

$$|T(x)| \leq \|T\| |x| \qquad \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Además, de la linealidad de T, tenemos que si $x \neq 0$, entonces $T\left(\frac{1}{|x|}x\right) = \frac{1}{|x|}T(x)$. Luego, la desigualdad $|T(x)| \leq M|x|$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ si y sólo si se cumple para todo x con $0 < |x| \leq 1$, si y sólo si se cumple para todo x con $|x| = 1$. Como también $T(0) = 0$, se sigue que

$$\|T\| = \sup\{|T(x)| : |x| \leq 1\} = \sup\{|T(x)| : |x| = 1\}. \tag{3.10}$$

Proposición 3.7 *La función $\|\cdot\|$ es una norma en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

Demostración. De (3.8) tenemos que $\|T\| \geq 0$ para todo $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\|0\| = 0$. Sean $S, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $\|T\| = 0$, se sigue de (3.9) que $T = 0$. Asímismo de (3.10) obtenemos

$$\|cT\| = \sup\{|cT(x)| : |x| = 1\} = |c| \sup\{|T(x)| : |x| = 1\} = |c|\|T\|.$$

Finalmente, notando que

$$|(T+S)(x)| \leq |T(x)| + |S(x)| \leq (\|T\| + \|S\|)|x| \qquad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

donde en la última desigualdad se usó nuevamente (3.9), resulta que

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

■

La demostración de la siguiente proposición es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 3.8 *Si $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, entonces*
a) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$, donde TS denota a la composición $T \circ S$.
b) $\|I\| = 1$ si $n = m$ e I es el operador identidad en $\mathbb{R}^n$.

Notación: denotaremos a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ simplemente por $L(\mathbb{R}^n)$.

La siguiente proposición nos será de utilidad en la demostración del teorema de la función inversa (teorema 3.45).

Proposición 3.9 *Sea $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todos los operadores lineales invertibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.*
a) Si $T \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, $S \in L(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|S - T\| \left\|T^{-1}\right\| < 1, \tag{3.11}$$

entonces $S \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$.
b) $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto abierto de $L(\mathbb{R}^n)$ y la función $\mathcal{H} : \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\mathcal{H}(T) = T^{-1}$ es continua.

Demostración. Para la demostración de a), definamos $\alpha := \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ y $\beta := \|S - T\|$. Entonces por (3.11), $\beta < \alpha$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha|x| = \alpha \left|T^{-1}(T(x))\right| \leq \alpha \left\|T^{-1}\right\| |T(x)| = |T(x)| \leq |(T-S)(x)| + |S(x)| \leq \beta|x| + |S(x)|,$$

de manera que

$$(\alpha - \beta)|x| \leq |S(x)| \qquad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

Como $\alpha - \beta > 0$, se sigue de (3.12) que $S(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, y así, S es inyectivo (véase Hoffman y Kunze [16], p. 79). Debido a que un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es inyectivo si y sólo si es suprayectivo (véase el problema 4), se concluye que $S \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, lo cual finaliza la demostración de a).

Para la demostración de b), reemplazamos x por $S^{-1}(y)$ en (3.12), y obtenemos que

$$(\alpha - \beta)\left|S^{-1}(y)\right| \leq \left|S\left(S^{-1}(y)\right)\right| = |y| \qquad \text{para todo } \; y \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual demuestra (véase (3.8)) que $\|S^{-1}\| \leq (\alpha - \beta)^{-1}$. Luego, de la igualdad

$$S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T - S)T^{-1},$$

usando la proposición 3.8 a), obtenemos

$$\|\mathcal{H}(S) - \mathcal{H}(T)\| = \left\|S^{-1} - T^{-1}\right\| \leq \left\|S^{-1}\right\| \|T - S\| \left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

lo cual prueba la continuidad de $\mathcal{H}$, ya que $\beta \to 0$ cuando $S \to T$.

Para demostrar que $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ es abierto, consideremos $T \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Entonces si $S \in L(\mathbb{R}^n)$ cumple $\|S - T\| < \alpha$, (3.11) se vale y en consecuencia $S \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ es abierto, y la prueba de b) está completa. ■

Observación 3.10 *Notemos que $\mathcal{H}$ es una función biyectiva y que $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}$.*

Veremos ahora otra norma en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, llamada la norma de Hilbert-Schmidt, la cual es fácil de interpretar, y como (véase la proposición 3.12) es equivalente a la norma del operador, ambos espacios normados tienen los mismos conjuntos abiertos; y por lo tanto las sucesiones convergentes son las mismas en ambos espacios normados (véase Pérez et al. [25], p. 89).

La **norma de Hilbert-Schmidt** de un operador $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es

$$|T| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^2}. \tag{3.13}$$

Del hecho de que las componentes de la matriz A asociada a T en las bases canónicas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ son

$$a_{ij} = \langle T(e_j), u_i \rangle, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

se sigue que

$$|T| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2};$$

así, $|T|$ es, justamente, la norma euclidiana de la matriz A vista como un elemento de $\mathbb{R}^{nm}$, lo cual justifica el uso de la notación de la norma euclidiana para la norma de Hilbert-Schmidt.

De las primeras tres propiedades de la siguiente proposición (cuya demostración es dejada como ejercicio) se concluye que la función $|\cdot|$, definida en (3.13), es efectivamente una norma en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Proposición 3.11 *La función $|\cdot| : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ definida en (3.13) satisface lo siguiente:*
a) $|T| \geq 0$ y $|T| = 0$ si y sólo si $T = 0$.
b) $|cT| = |c||T|$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
c) $|T + S| \leq |T| + |S|$ para cualesquiera $S, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
d) $|TS| \leq |T||S|$ para cualesquiera $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$.
e) $|I| = \sqrt{n}$ si $n = m$.

Finalizamos esta sección con la demostración de la equivalencia entre las dos normas que tenemos definidas en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Proposición 3.12 *La norma del operador y la norma de Hilbert-Schmidt en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ son equivalentes.*

Demostración. Probaremos que para cada $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\|T\| \leq |T| \leq \sqrt{n}\|T\|, \tag{3.14}$$

de lo cual, la equivalencia se sigue de la proposición 3.32 en Pérez et al. [25].

Consideremos pues $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \leq 1$. Entonces de la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas (lema 3.1 en Pérez et al. [25]) se obtiene

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle T(e_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle| \, |T(e_i)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |T(e_i)|^2} = |x||T| \leq |T|. \end{aligned}$$

De aquí, usando (3.10), se sigue que

$$\|T\| = \sup\{|T(x)| : |x| \leq 1\} \leq |T|.$$

Asímismo, de (3.9),

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|T\|^2 |e_i|^2 = n\|T\|^2,$$

de lo cual, tomando raíz cuadrada se obtiene que

$$|T| \leq \sqrt{n}\|T\|$$

y la demostración está completa. ■

Problemas

1. Demuestre la proposición 3.5.
2. Demuestre la proposición 3.8.
3. Demuestre la proposición 3.11.
4. Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Demuestre que T es inyectivo si y sólo si es suprayectivo.
5. Demuestre que el espacio normado $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, es decir, que toda sucesión de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ converge con respecto a la norma del operador $\|\cdot\|$. ¿Qué se puede decir del espacio $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con respecto a la norma de Hilbert-Schmidt?

3.3. Derivada de funciones de varias variables

Recordemos que una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en $x \in (a, b)$ si el límite

$$f'(x) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{existe.} \tag{3.15}$$

En este caso, $f'(x)$ representa a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$ (véase la figura 3.1).

La expresión (3.15) es equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0,$$

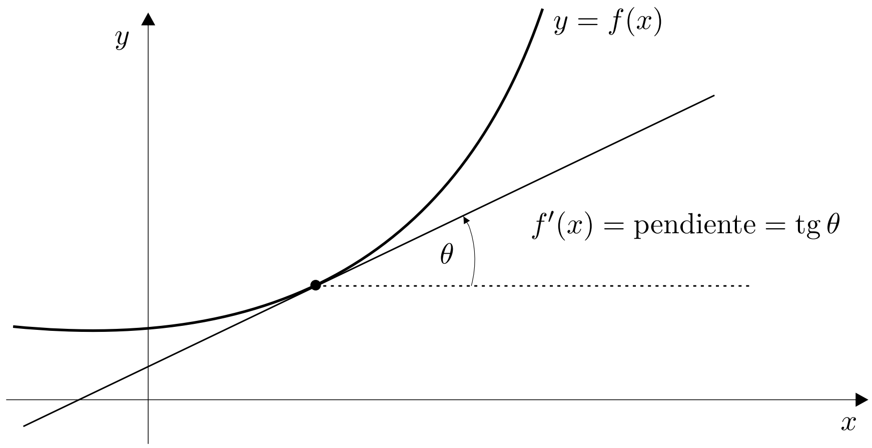

Figura 3.1: Interpretación geométrica de $f'(x)$.

o bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)\, h|}{|h|} = 0.$$

Notemos que $h \mapsto f'(x)\, h$ es un operador lineral de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De esta manera, resulta natural extender el concepto de derivada para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de la manera siguiente.

Definición 3.13 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función. Diremos que f es **diferenciable** en un punto $x \in E$ si existe un operador lineal, que denotaremos por $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y que llamaremos la **derivada** de f en x, tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{|h|} = 0. \tag{3.16}$$

*Si f es diferenciable en cada $x \in E$, diremos que f es **diferenciable** en E.*

Por supuesto que en (3.16), $h \in \mathbb{R}^n$ es no nulo y $|\cdot|$ en el numerador es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^m$ y en el denominador es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. También, debido a que E es abierto, $x + h \in E$ para todo h con norma $|h|$ suficientemente pequeña, y así, $f(x+h)$ está definida.

La expresión (3.16) puede ser reescrita diciendo que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$ y $x + h \in E$, se cumple

$$|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)| \leq \epsilon |h|. \tag{3.17}$$

En esta expresión, podemos permitir que $h = 0$, ya que en este caso, ambos lados de (3.17) se reducen a 0.

Intuitivamente, $y \mapsto f(x) + Df(x)(y-x)$ (tómese $h = y - x$) es la mejor aproximación afín (una **función afín** es un operador lineal más una constante) a f cerca del punto x (véase la figura 3.2). El siguiente resultado nos muestra que existe una única mejor aproximación afín.

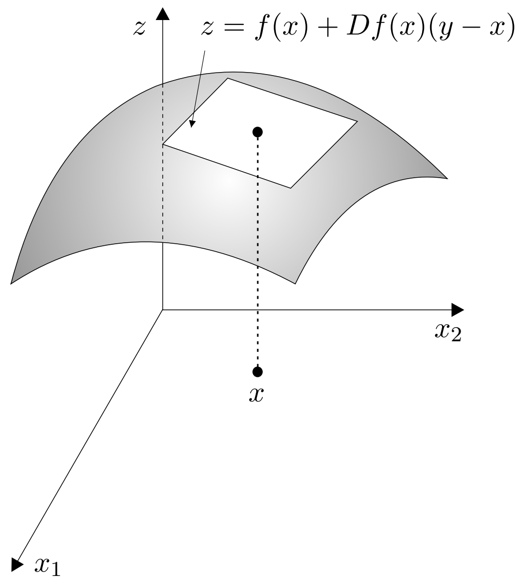

Figura 3.2: Mejor aproximación afín a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cerca de x.

Teorema 3.14 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in E$, entonces la derivada de f en x está unívocamente determinada.*

Demostración. Supongamos que $Df(x)$ y T son derivadas de f en x. Definamos el operador lineal $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $S = Df(x) - T$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{|S(h)|}{|h|} &= \frac{|(f(x+h) - f(x) - T(h)) + [-(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))]|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{|h|} + \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{|h|}. \end{aligned}$$

Haciendo $h \to 0$, se sigue de la definición 3.13 que

$$\frac{|S(h)|}{|h|} \to 0 \qquad \text{cuando } \ h \to 0. \tag{3.18}$$

Fijemos $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ arbitrario. Como $th \to 0$ cuando $t \to 0$, tenemos de (3.18) y la linealidad de S que

$$\frac{|S(h)|}{|h|} = \frac{|S(th)|}{|th|} \to 0 \qquad \text{cuando } \ t \to 0. \tag{3.19}$$

Como $\frac{|S(h)|}{|h|}$ es independiente de t, de (3.19) se sigue que $S(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ (recordemos que todo operador lineal aplica al 0 en 0). Por lo tanto $S = 0$ y la demostración está completa. ∎

Observación 3.15 *i) Notemos que la diferenciabilidad de f en $x \in E$ implica (véase (3.16)) que*

$$|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)| \to 0 \qquad \textit{cuando} \quad h \to 0.$$

Como $Df(x)$ es continuo (véase la proposición 3.6) y $Df(x)(0) = 0$, tenemos que $Df(x)(h) \to 0$ cuando $h \to 0$; por lo tanto $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$, es decir, f es continua en $x \in E$.
ii) Notemos también que si f es diferenciable en E, entonces para cada $x \in E$, $Df(x)$ es un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, de esta manera $Df : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definida por $x \mapsto Df(x)$ es una función.
iii) Finalmente, véase el problema 2, la función D definida por $f \mapsto Df$ es un operador lineal del espacio de las funciones diferenciables de E a $\mathbb{R}^m$ al espacio de todas las funciones de E a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Introduciremos ahora la representación matricial de la derivada $Df(x)$. Para ello requerimos el concepto de **derivada parcial**.

Consideremos un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : E \to \mathbb{R}^m$. Las **funciones componentes** de f están dadas por $f_i(x) = \langle f(x), u_i \rangle$, $i = 1, \ldots, m$. Entonces $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i$, $x \in E$.

Para $x \in E$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, definamos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t},$$

cuando este límite exista.

Notemos que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ es la derivada de f_i con respecto a x_j dejando todas las demás variables fijas, esto es, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt} f_i(x + te_j)|_{t=0}$. A las derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ se les llama las **derivadas parciales** de f.

Proposición 3.16 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en un punto $x \in E$. Entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ existen y $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ es la representación matricial de $Df(x)$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como f es diferenciable en $x \in E$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{|h|} = 0.$$

En particular,

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x+te_j) - f(x) - Df(x)(te_j)|}{|t|} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.20}$$

Debido a que para cualquier $y \in \mathbb{R}^m$, $|\langle y, u_i \rangle| = |y_i| \leq |y|$, $i = 1, \ldots, m$, obtenemos de (3.20) que

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f_i(x+te_j) - f_i(x) - t \langle Df(x)(e_j), u_i \rangle|}{|t|} = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} = \langle Df(x)(e_j), u_i \rangle.$$

Así, el resultado se sigue de (3.6). ■

A la matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$ se le llama la **matriz jacobiana** de f en x.

En algunos textos a Df se le llama la **derivada total** de f, con el propósito de hacer una mayor diferencia con respecto a las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

En la práctica, usualmente se calcula la matriz jacobiana y entonces, la proposición 3.16 nos da Df. En el siguiente ejemplo se muestra que la existencia de las derivadas parciales de una función f, no implican, en general, la continuidad de f; y por lo tanto, tampoco aseguran su diferenciabilidad (véase la observación 3.15 i)).

Ejemplo 3.17 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Como $g(x) = 2xy$ y $h(x) = x^2 + y^2$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ (con y constante), tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe para todo $(x,y) \neq (0,0)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2y) - (2x)(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^3 - x^2 y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

De manera similar, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe para todo $(x,y) \neq (0,0)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2x) - (2y)(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^3 - xy^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

En el punto $(0,0)$ *tenemos*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

De esta manera $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *existen para todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. Sin embargo,* $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$*, pues* $f(x,x)=1$ *para todo* $x\neq 0$ *y por lo tanto*

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq f(0,0).$$

Recordemos (observación 3.15 ii)) que si f es diferenciable en E, $Df : E \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ definida por $x\mapsto Df(x)$ es una función. Si esta función Df es continua en E, diremos que f es **continuamente diferenciable** en E. Las funciones continuamente diferenciables son, con frecuencia, llamadas **funciones de clase** C^1 en E.

El siguiente teorema nos dice, en particular, que f es de clase C^1 en E si y sólo si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en E.

Teorema 3.18 *Sea* $E\subset\mathbb{R}^n$ *abierto y sea* $f : E\to\mathbb{R}^n$ *una función. Si* $Df(x)$ *existe para todo* $x\in E$ *y* Df *es continua en un punto* $x_0\in E$*, entonces* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$*,* $i=1,\ldots,m$*,* $j=1,\ldots,n$ *son continuas en* x_0*. Recíprocamente, si las derivadas parciales* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$*,* $i=1,\ldots,m$*,* $j=1,\ldots,n$ *existen para todo* $x\in E$ *y son continuas en un punto* $x_0\in E$*, entonces* $Df(x_0)$ *existe. Además, si todas las derivadas parciales* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *son continuas en* E*, entonces* f *es de clase* C^1 *en* E*.*

Demostración. Supongamos que $Df(x)$ existe para todo $x\in E$ y que Df es continua en $x_0\in E$. Recordemos que $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ puede ser visto como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{nm}$ por medio de la norma de Hilbert-Schmidt. Luego, en vista de que la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ es una entrada de $Df(x)$, considerado como una matriz (o un elemento de $\mathbb{R}^{nm}$), se sigue (véase la proposición 5.13 en Pérez et al. [25]) que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ es continua en $x_0\in E$, ya que Df lo es.

Para el recíproco, necesitamos demostrar que dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)(h)|}{|h|} < \epsilon \qquad \text{cuando } \ |h|<\delta, \tag{3.21}$$

donde $Df(x_0)$ es el elemento de $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ con representación matricial $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)$.

Si $h = (h_1, \ldots, h_n)$, entonces para cada j $(= 1, \ldots, n)$ tomemos $h^{(j)} = (h_1, \ldots, h_j, 0, \ldots, 0)$. Usando el teorema del valor medio obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]_i &= \sum_{j=1}^{n} \left[f\left(x_0 + h^{(j)}\right) - f\left(x_0 + h^{(j-1)}\right)\right]_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{d}{dt} f_i\left(x_0 + h^{(j-1)} + t h_j e_j\right)|_{t=t_{ij}} \qquad \text{con } \ 0 < t_{ij} < 1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_0 + h^{(j-1)} + t_{ij} h_j e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) + \sum_{j=1}^{n} h_j \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_0 + h^{(j-1)} + t_{ij} h_j e_j\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]_i - Df(x_0)(h)}{|h|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{|h|} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_0 + h^{(j-1)} + t_{ij} h_j e_j\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right].$$

En consecuencia

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)|}{|h|} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x_0 + h^{(j-1)} + t_{ij} h_j e_j\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right|, \tag{3.22}$$

donde hemos utilizado que para cualquier elemento $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $|y| \leq \sum_{i=1}^{m} |y_i|$ (véase el problema 8 de la sección 3.1 en Pérez et al. [25]) y que $\frac{|h_j|}{|h|} \leq 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Como todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas en x_0, elijamos $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0 + h) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{nm} \qquad \text{cuando } \ |h| < \delta.$$

Entonces (3.21) se sigue de (3.22).

Finalmente, si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas en E, entonces, debido a que $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ puede ser considerado (vía la norma de Hilbert-Schmidt) como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{nm}$, la continuidad de las entradas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ de la matriz de $Df(x)$ implica (véase la proposición 5.13 en Pérez et al. [25]) la continuidad de $Df(x)$; y la demostración está completa. ∎

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en $[a, b] \times [c, d]$ y para cada $y \in [c, d]$, $f(\cdot, y)$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a F sobre $[a, b]$.

Finalizaremos esta sección con un resultado que nos da condiciones suficientes para que

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dF(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dF(x).$$

El problema 10 muestra que este intercambio no siempre es válido.

Teorema 3.19 *Sea* $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dF(x)$$

y sea $w \in [c, d]$*. Si para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in [a, b]$*,*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,w)\right| < \epsilon \qquad \textit{cuando} \ \ |z-w| < \delta, \tag{3.23}$$

entonces $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, w) \in \mathcal{R}[F; a, b]$*,* $g'(w)$ *existe y*

$$g'(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,w)dF(x).$$

Demostración. Consideremos

$$h(x,z) = \frac{f(x,z) - f(x,w)}{z-w} \qquad \text{para} \ \ 0 < |z-w| < \delta.$$

Por el teorema del valor medio uni-dimensional, para cada (x, z) existe ξ entre z y w tal que

$$h(x,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi).$$

Luego, por (3.23), para todo $x \in [a, b]$,

$$\left|h(x,z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,w)\right| < \epsilon \qquad \text{cuando} \ \ 0 < |z-w| < \delta.$$

Por lo tanto

$$h(x,z) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,w) \quad \text{uniformemente en } [a,b], \quad \text{cuando } z \to w. \tag{3.24}$$

Notemos que

$$\frac{g(z)-g(w)}{z-w}=\int_a^b h(x,z)dF(x). \tag{3.25}$$

Como, claramente, para cada $z\in[c,d]$, $h(\cdot,z)\in\mathcal{R}[F;a,b]$, el resultado deseado se sigue de (3.24) y (3.25) mediante el teorema 2.32. ∎

Observación 3.20 *Notemos que (3.23) se cumple cuando* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* $[a,b]\times[c,d]$.

Problemas

1. Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ un operador lineal. Demuestre que T es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y que $DT(x)=T$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

2. Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Demuestre que para cualesquiera funciones $f,g:E\to\mathbb{R}^m$ diferenciables y cualquier $c\in\mathbb{R}$,
$$D(cf+g)=cDf+Dg.$$

3. Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $f:E\to\mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en E con $Df=0$, demuestre que $Df_i=0$ para todo $i=1,\ldots,m$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función para la cual $|f(x,y)|\le x^2+y^2$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Demuestre que f es diferenciable en $(0,0)$.

5. Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definidas por
   a) $f(x,y,z)=(2x^2y^3,xe^z)$.
   b) $g(x,y,z)=(z\cos x,z\cos y)$.
   Demuestre que f y g son diferenciables en $\mathbb{R}^3$ y encuentre Df y Dg.

6. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
   Encuentre las derivadas parciales de f en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

7. Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f:E\to\mathbb{R}^m$ una función diferenciable en E. Demuestre que para cada $x\in E$, existen constantes $M>0$ y $\delta>0$ tales que
$$|f(x+h)-f(x)|\le M|h| \qquad \text{cuando } |h|<\delta.$$

8. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función. Demuestre que si las derivadas $\frac{df_i}{dx}$, $i = 1, \ldots, m$ existen, entonces Df existe.

9. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}$ una función para la cual todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ existen y son acotadas en E. Demuestre que f es continua en E.

10. Defina para cada $y \geq 0$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } \ 0 \leq x \leq \sqrt{y} \\ -x + 2\sqrt{y}, & \text{si } \ \sqrt{y} \leq x \leq 2\sqrt{y} \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

y defina $f(x,y) = -f(x, |y|)$ para $y < 0$. Demuestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$ y que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$ para todo x. Si

$$g(y) = \int_{-1}^{1} f(x,y)dx,$$

demuestre que $g(y) = y$ para $|y| < \frac{1}{4}$ y, en consecuencia

$$g'(0) \neq \int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)dx.$$

3.4. Regla de la cadena y regla del producto

La **regla de la cadena** nos proporciona una técnica para diferenciar composiciones de funciones y es, posiblemente, una de las técnicas de diferenciación más importantes. En el caso de funciones de una única variable, nos dice que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

En el siguiente teorema estableceremos este resultado para funciones de varias variables.

Observación 3.21 *Recordemos que dados dos operadores lineales $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, TS denota a la composición $T \circ S$. Si A y B son sus respectivas representaciones matriciales (en las bases canónicas correspondientes), la representación matricial de TS es el producto de matrices BA (véase, por ejemplo, el teorema 13, p. 90, de Hoffman y Kunze [16]).*

Teorema 3.22 *(Regla de la cadena) Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en un punto $x \in E$. Si B es un conjunto abierto que contiene a $f(E)$ y $g : B \to \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable en $f(x)$, entonces $g \circ f : E \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable en x y*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))\, Df(x). \tag{3.26}$$

Demostración. Debemos demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - Dg(f(x))\, Df(x)(h)|}{|h|} = 0. \tag{3.27}$$

Para esto, notemos primero que

$$\begin{aligned} &|(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - Dg(f(x))\, Df(x)(h)| \\ &\quad = |g(f(x+h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(f(x+h) - f(x)) \\ &\qquad + Dg(f(x))(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))| \\ &\quad \le |g(f(x+h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(f(x+h) - f(x))| \\ &\qquad + |Dg(f(x))(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))|. \end{aligned}$$

Tomando $k(h) = f(x+h) - f(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &|(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) - Dg(f(x))\, Df(x)(h)| \\ &\quad \le |g(f(x) + k(h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(k(h))| \\ &\qquad + |Dg(f(x))(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Del problema 7 de la sección 3.3 obtenemos constantes $M_0 > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que

$$|k(h)| \le M_0 |h| \qquad \text{cuando} \;\; |h| < \delta_0. \tag{3.29}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, de la diferenciabilidad de g en $f(x)$ tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|k(h)| < \delta_1$, entonces

$$|g(f(x) + k(h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(k(h))| < \frac{\epsilon}{2M_0} |k(h)|.$$

Luego, por (3.29), tomando $\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ se sigue que

$$|g(f(x) + k(h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(k(h))| < \frac{\epsilon}{2}|h| \qquad \text{cuando} \;\; |h| < \delta_2. \tag{3.30}$$

Del hecho de que $Dg(f(x))$ es un operador lineal se sigue (véase (3.9)) que

$$\begin{aligned} &|Dg(f(x))(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))| \\ &\quad \le \|Dg(f(x))\|\, |f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Sea $M > \|Dg\,(f(x))\|$. De la diferenciabilidad de f en x tenemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que si $|h| < \delta_3$, entonces

$$|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)| < \frac{\epsilon}{2M}|h|.$$

Por lo tanto de (3.31) se concluye que

$$|Dg(f(x))(f(x+h) - f(x) - Df(x)(h))| < \frac{\epsilon}{2}|h|. \tag{3.32}$$

Así, tomando $\delta = \text{mín}\,\{\delta_2, \delta_3\}$ se sigue de (3.28), (3.30) y (3.32) que

$$\frac{|(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) - Dg\,(f(x))\,Df(x)(h)|}{|h|} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{cuando} \quad |h| < \delta.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, (3.27) se cumple, y así la prueba está finalizada. ■

Observación 3.23 *Sea $h = g\circ f$. En términos de las correspondientes matrices jacobianas, (3.26) se expresa como*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \frac{\partial h_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \frac{\partial g_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde las $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ son evaluadas en x, las $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ en $y = f(x)$ y las $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en x. De esta manera resulta que

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Otra técnica de suma importancia, es la **regla del producto** o **regla de Leibniz**; que en el caso de funciones de una única variable establece que si f y g son diferenciables, entonces

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

En el siguiente teorema estableceremos este resultado para funciones diferenciables $f : E \to \mathbb{R}^m$ y $g : E \to \mathbb{R}$ (con $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto).

Teorema 3.24 *(Regla del producto) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ y $g : E \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en E, entonces $(gf) : E \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en E y para cada $x \in E$, $D(gf)(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dado por*

$$D(gf)(x)(e) = g(x)\,(Df(x)(e)) + (Dg(x)(e))\,f(x) \qquad \textit{para todo} \quad e \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Sea $x \in E$. Como g es continua en x (véase la observación 3.15 i)), existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|g(y)| - |g(x)| \leq |g(y) - g(x)| < 1 \qquad \text{cuando} \;\; |y - x| < \delta_0.$$

Así

$$|g(y)| < |g(x)| + 1 \qquad \text{cuando} \;\; |y - x| < \delta_0.$$

También (véase (3.9)),

$$|Df(x)(y)| \leq \|Df(x)\||y| \qquad \text{para todo} \;\; y \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $M > 0$ tal que $|g(x)| + 1 \leq M$ y $\|Df(x)\| \leq M$. Entonces

$$|g(y)| \leq M \qquad \text{cuando} \;\; |y - x| < \delta_0 \tag{3.33}$$

y

$$|Df(x)(y)| \leq M|y| \qquad \text{para todo} \;\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.34}$$

Consideremos $\epsilon > 0$ dado. Usando de nuevo la continuidad de g, tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$M\,|g(y) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{cuando} \;\; |y - x| < \delta_1; \tag{3.35}$$

y por la diferenciabilidad de f y g, existen $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que

$$\frac{M\,|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{|h|} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{cuando} \;\; |h| < \delta_2 \tag{3.36}$$

y

$$\frac{|f(x)|\,|g(x+h) - g(x) - Dg(x)(h)|}{|h|} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{cuando} \;\; |h| < \delta_3. \tag{3.37}$$

Considerando $\delta = \text{mín}\,\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ se sigue de (3.33)-(3.37) que

$$\begin{aligned}
&\frac{|g(x+h)f(x+h) - g(x)f(x) - g(x)Df(x)(h) - (Dg(x)(h))\,f(x)|}{|h|} \\
&\leq \quad \frac{|g(x+h)f(x+h) - g(x+h)f(x) - g(x+h)Df(x)(h)|}{|h|} \\
&+ \quad \frac{|g(x+h)Df(x)(h) - g(x)Df(x)(h)|}{|h|} + \frac{|g(x+h)f(x) - g(x)f(x) - (Dg(x)(h))\,f(x)|}{|h|} \\
&< \quad \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad \text{cuando} \;\; |h| < \delta.
\end{aligned}$$

Con esto, la prueba está finiquitada. ■

Problemas

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es dada por $H(x, y) = g\left((x-y)^2\right)$, demuestre que
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en x, demuestre que
$$\frac{d}{dt} f(x + ty)|_{t=0} = Df(x)(y).$$

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Si $g\left(x, f(x)\right) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, demuestre que
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -f'(x)\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \text{donde } \; y = f(x).$$

4. Dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el **gradiente** de f es definido por
$$\left(\nabla f\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i.$$
Demuestre que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, entonces
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

5. Use la regla de la cadena para encontrar las derivadas de las funciones F y G, donde $f(x, y, z) = xz + y^2$, $g(x, y) = y + xy^2$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$.
a) $F(x, y, z) = f\left(h(x), g(x, y), z\right)$.
b) $G(x, y, z) = h\left(f(x, y, z)g(x, y)\right)$.

6. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ no idénticamente 0 es **homogénea** de grado m si para todo $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ y todo $t > 0$, $f(tx) = t^m f(x)$. Sea $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.
a) Demuestre que si f es homogénea de grado 0, entonces f es acotada y se puede extender a una función continua en 0 si y sólo si es constante.
b) Demuestre que si f es homogénea de grado $m > 0$, entonces la definición $f(0) = 0$ hace que f sea continua en $\mathbb{R}^n$, pero que si f es homogénea de grado $m < 0$, ninguna definición de $f(0)$ hace que f sea continua en 0.

c) Demuestre que si f es homogénea de grado $m > 0$, entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$ son homogéneas de grado $m - 1$ a menos que sean idénticamente 0.

d) Demuestre que si f es homogénea de grado 1, $f(-x) = -f(x)$ y $f(0) = 0$, entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, existen en 0, pero no son continuas en 0 a menos que sean constantes.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Demuestre que f es homogénea de grado 1 sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

b) Demuestre que f es continua en $(0,0)$.

c) Demuestre que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(0,0)$ pero que no son continuas en $(0,0)$.

d) Demuestre que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Sugerencia: Calcule directamente $\frac{d}{dt} f(x+ty)|_{t=0}$ para $x = (0,0)$ y $y = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; luego, remítase al problema 2.

3.5. Teorema del valor medio y fórmula de Taylor

En esta sección consideraremos dos resultados de suma importancia en el cálculo; el **teorema del valor medio** y el **teorema de Taylor** para funciones de varias variables. En el caso de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas que son diferenciables en (a,b), el teorema del valor medio establece que existe un punto $a < c < b$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{3.38}$$

Desafortunadamente, para funciones definidas sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$, la versión anterior, como lo muestra el siguiente ejemplo, no es cierta.

Ejemplo 3.25 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (\operatorname{sen} x, \cos x)$. Entonces*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x) = \cos x \qquad y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) = -\operatorname{sen} x,$$

y así, tomando $a = 0$ y $b = 2\pi$ tenemos que

$$f(2\pi) - f(0) = (0,1) - (0,1) = (0,0);$$

mientras que, para cualquier $0 < c < 2\pi$,

$$Df(c)(2\pi - 0) = 2\pi(\cos c, -\operatorname{sen} c).$$

En consecuencia

$$|f(2\pi) - f(0)| = 0 \qquad y \qquad |Df(c)(2\pi - 0)| = 2\pi,$$

de lo cual resulta evidente que no es posible encontrar un punto $c \in (a, b)$ *para el cual se cumpla que*

$$f(2\pi) - f(0) = Df(c)(2\pi - 0).$$

Para la validez de una versión como (3.38) del teorema del valor medio para funciones de varias variables se requiere que f tome valores reales; y por supuesto, precisar el significado de que un punto $z \in \mathbb{R}^n$ esté entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3.26 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Diremos que un punto* $z \in \mathbb{R}^n$ *está en el* ***segmento de línea que une a*** x *y* y, *o que* z ***está entre*** x *y* y *si*

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y \qquad \textit{para algún} \;\; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Teorema 3.27 *(Teorema del valor medio) Sea* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto, y sean* $x, y \in E$ *tales que el segmento de línea que une a* x *y* y *está contenido en* E. *Entonces si* $f : E \to \mathbb{R}$ *es una función diferenciable en* E, *existe un punto* z *entre* x *y* y *tal que*

$$f(y) - f(x) = Df(z)(y - x).$$

Demostración. Sea l el segmento de línea que une a x y y, es decir, l es la función con valores en $\mathbb{R}^n$ definida en $[0, 1]$ por $l(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Claramente, l es diferenciable en $(0, 1)$ y

$$Dl(\lambda) = y - x \qquad \text{para todo} \;\; 0 < \lambda < 1.$$

Definamos ahora la función auxiliar $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$\gamma(\lambda) = (f \circ l)(\lambda).$$

Como l es diferenciable en $(0, 1)$, $l\left((0, 1)\right) \subset E$ por hipótesis, y también por hipótesis, f es diferenciable en E, se tiene por la regla de la cadena (teorema 3.22) que γ es diferenciable en $(0, 1)$ y

$$\gamma'(\lambda) = Df\left(l(\lambda)\right)(y - x) \qquad \text{para todo} \;\; 0 < \lambda < 1. \tag{3.39}$$

Luego, por el teorema del valor medio uni-dimensional, existe $0 < \lambda_0 < 1$ tal que

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(\lambda_0)(1 - 0).$$

De aquí, tomando $z = l(\lambda_0)$, el resultado se sigue de (3.39) y el hecho de que $\gamma(0) = f(x)$ y $\gamma(1) = f(y)$. ■

Corolario 3.28 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sean $x, y \in E$ tales que el segmento de línea que une a x y y está contenido en E. Entonces si $f : E \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en E, para cada i $(= 1, \dots, m)$, existe z_i entre x y y tal que*

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(z_i)(y - x).$$

Demostración. Basta aplicar el teorema 3.27 a cada función componente f_i $(i = 1, \dots, m)$. ■

Definición 3.29 *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es* ***convexo*** *si para cualesquiera $x, y \in E$, el segmento de línea que une a x y y está contenido en E, es decir,*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in E \qquad \textit{para todo} \;\; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Corolario 3.30 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo. Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en E con $Df = 0$, entonces f es una función constante.*

Demostración. Recordemos primero (problema 3, de la sección 3.3) que si $Df = 0$, entonces $Df_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Consideremos ahora $x, y \in E$ arbitrarios. Como E es convexo, el segmento de línea que une a x y y está contenido en E; y así, por el corolario 3.28, para cada i $(= 1, \dots, m)$, existe z_i entre x y y tal que

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i\,(z_i)\,(y - x). \tag{3.40}$$

Como $Df_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, resulta de (3.40) que

$$f_i(y) = f_i(x) \qquad \text{para todo} \;\; i = 1, \dots, m,$$

es decir, $f(x) = f(y)$. De esto, el resultado se sigue del hecho de que x y y en E son arbitrarios. ■

Observación 3.31 *De hecho, véase el problema 3, $Df = 0 \Rightarrow f$ es una función constante bajo la condición más débil de que la función f esté definida sobre un conjunto E abierto y conexo.*

En el siguiente resultado damos una formulación alternativa del teorema del valor medio, válido para funciones con valores en $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, y que llamaremos el **teorema del valor medio generalizado**. De dicho teorema, el corolario 3.30 es aún más evidente que del corolario 3.28.

Teorema 3.32 *(Teorema del valor medio generalizado) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Si el conjunto $\{\|Df(x)\| : x \in E\}$ es acotado, entonces para cualesquiera $y, z \in E$,*

$$|f(z) - f(y)| \leq \left(\sup_{x \in E} \|Df(x)\| \right) |z - y|. \tag{3.41}$$

Demostración. Sean $y, z \in E$, y consideremos

$$l(\lambda) = (1 - \lambda)y + \lambda z, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Como E es convexo, $l(\lambda) \in E$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Ahora, análogamente a la demostración del teorema 3.27, definamos la función $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ por

$$\gamma(\lambda) = (f \circ l)(\lambda).$$

Entonces, por la regla de la cadena, γ es diferenciable y

$$D\gamma(\lambda) = Df(l(\lambda))(z - y).$$

Luego, del hecho de que $Df(l(\lambda))$ es un operador lineal se sigue (véase (3.9)) que

$$|D\gamma(\lambda)| \leq \|Df(l(\lambda))\| \, |z - y|,$$

de donde, resulta que

$$|D\gamma(\lambda)| \leq \left(\sup_{x \in E} \|Df(x)\| \right) |z - y| \qquad \text{para todo } \ 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{3.42}$$

Definamos ahora $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(\lambda) = \langle \gamma(1) - \gamma(0), \gamma(\lambda) \rangle. \tag{3.43}$$

Sean γ_i, $i = 1, \ldots, m$ las funciones componentes de γ. Es fácil ver (problema 4) que la función g es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ con

$$g'(\lambda) = \langle \gamma(1) - \gamma(0), \nabla\gamma(\lambda) \rangle, \tag{3.44}$$

donde $\nabla\gamma \equiv (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$. Luego, por el teorema del valor medio uni-dimensional, existe $0 < \lambda_0 < 1$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\lambda_0). \tag{3.45}$$

Notemos, por la proposición 3.5, que

$$|g(1) - g(0)| = \langle \gamma(1) - \gamma(0), \gamma(1) - \gamma(0) \rangle = |\gamma(1) - \gamma(0)|^2 . \tag{3.46}$$

Además, de (3.44) y la desigualdad de Schwarz (véase el lema 3.1 en Pérez et al. [25]),

$$|g'(\lambda_0)| = |\langle \gamma(1) - \gamma(0), \nabla\gamma(\lambda_0) \rangle| \leq |\gamma(1) - \gamma(0)||\nabla\gamma(\lambda_0)|. \tag{3.47}$$

Usando (3.46) y (3.47) en (3.45) resulta que

$$|\gamma(1) - \gamma(0)|^2 \leq |\gamma(1) - \gamma(0)| \, |\nabla\gamma(\lambda_0)| \, ,$$

o equivalentemente

$$|\gamma(1) - \gamma(0)| \leq |\nabla\gamma(\lambda_0)| \, . \tag{3.48}$$

Finalmente, notando que $|\nabla\gamma(\lambda_0)|$ es la norma de Hilbert-Schmidt del operador $D\gamma(\lambda_0)$, obtenemos de (3.14) que

$$|D\gamma(\lambda_0)| = |\nabla\gamma(\lambda_0)| \, .$$

Así, (3.41) se sigue de (3.42) y (3.48), junto con el hecho de que $\gamma(0) = f(y)$ y $\gamma(1) = f(z)$. ■

Toca ahora el turno a la **fórmula de Taylor** para funciones $f : E \to \mathbb{R}$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Como veremos, el teorema de la fórmula de Taylor para funciones de n-variables es una generalización del teorema del valor medio (teorema 3.27) y de las fórmulas de Taylor para el caso uni-dimensional consideradas en la sección 2.7. Para la introducción de esta generalización es necesario que consideremos antes los conceptos de **derivadas de orden mayor que uno** para fuciones de varias variables.

Recordemos, sección 3.3, que si $f : E \to \mathbb{R}^m$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, es diferenciable en E, entonces Df es una función definida en E y con valores en el espacio $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (el cual puede ser visto como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{nm}$ por medio de la norma de Hilbert-Schmidt); de esta manera, tiene sentido hablar de la derivada de la función Df.

Definición 3.33 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en E. Diremos que la función f es* ***doblemente diferenciable*** *en un punto $x \in E$ si existe un operador lineal, que denotaremos por $D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, y que llamaremos la* ***segunda derivada*** *de f en x, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|Df(x+h) - Df(x) - D^2 f(x)(h)\|}{|h|} = 0,$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma del operador de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $| \cdot |$ es la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

La demostración de la unicidad de $D^2f(x)$ es completamente análoga a la demostración de la unicidad de $Df(x)$ (teorema 3.14).

Observación 3.34 *Cuando $f : E \to \mathbb{R}^m$ es dos veces diferenciable en x,*

$$D^2f(x) \in L\left(\mathbb{R}^n, L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)\right).$$

De esta manera,

$$D^2f(x)(y) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \qquad y \in \mathbb{R}^n$$

y

$$D^2f(x)(y)(z) \in \mathbb{R}^m, \qquad y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Aunque $D^2f(x)$ es difícil de visualizar, notemos que $D^2f(x)(\cdot)(\cdot)$ es simplemente, una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$; la cual resulta ser **bilineal** (véase la proposición 3.36).

Definición 3.35 *a) Diremos que una función $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **bilineal** si para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$,*

$$B(cx + y, z) = cB(x, z) + B(y, z) \qquad y \qquad B(x, cy + z) = cB(x, y) + B(x, z),$$

es decir, B es lineal en cada variable por separado.
*b) En general, diremos que una función $B : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{r \text{ veces}} \to \mathbb{R}^m$ es r-**lineal**, si lo es en cada una de las r variables por separado.*

Proposición 3.36 *Si $f : E \to \mathbb{R}^m$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, es doblemente diferenciable en $x \in E$, entonces la función $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$B(y, z) = D^2f(x)(y)(z) \in \mathbb{R}^m, \tag{3.49}$$

es una función bilineal.

Demostración. Notemos primero que $B(y, \cdot)$ es lineal, ya que $D^2f(x)$ toma valores en $L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$.

Enseguida, debido a que $D^2f(x)$ es lineal,

$$D^2f(x)(cy + z) = cD^2f(x)(y) + D^2f(x)(z),$$

para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$. En consecuencia, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ fijo,

$$B(cy + z, w) = D^2f(x)(cy + z)(w) = cD^2f(x)(y)(w) + D^2f(x)(z)(w) = cB(y, w) + B(z, w),$$

para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 3.37 *El producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ es una función bilineal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (véase la proposición 3.5).*

Observación 3.38 *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}$ es doblemente diferenciable en $x \in E$, entonces de la proposición 3.16 tenemos que la representación matricial de $Df : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esta dada por el vector renglón $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ y así, la representación matricial de $D^2 f(x)$ está dada por*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(y)(z) &= \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) y_i z_j. \end{aligned}$$

Definición 3.39 *Sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.*
*a) Diremos que f es de **clase** C^2 en E, si Df existe en E y es de clase C^1 en E. En general, diremos que f es de **clase** C^r, $r \geq 2$, si D^{r-1} existe en E y es de clase C^1 en E.*
*b) Diremos que f es de **clase** C^∞ en E, o que es una **función suave** en E, si f es de clase C^r para todo r $(= 1, 2, \ldots)$.*

Observación 3.40 *i) Es claro de la definición 3.39 y del teorema 3.18 que si una función $f : E \to \mathbb{R}^m$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, es de clase C^r en E, entonces todas las derivadas parciales de orden $s \leq r$ existen y son continuas en E.*
ii) Resulta también evidente (véase la proposición 3.36) que la función $D^r f(x) \underbrace{(\cdot) \cdots (\cdot)}_{r \text{ veces}}$ es r-lineal. Además, si f toma valores en $\mathbb{R}$ $(m = 1)$ y $r = 3$, entonces

$$D^3 f(x)(y)(z)(w) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x) y_i z_j w_k, \qquad x \in E, \quad y, z, w \in \mathbb{R}^n.$$

Analizaremos ahora la validez del intercambio en el orden de la derivación parcial, lo cual, involucra (por la definición de derivadas parciales) un intercambio de límites, lo que sabemos que no siempre es válido. En la consideración de condiciones suficientes para que tal intercambio sea válido, resulta suficiente restringirnos al caso de funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, debido a que para funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ con valores en $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, cuando consideramos una segunda derivada parcial mixta, $n-2$ de las variables permanecen fijas y las diferentes funciones componente de la función en cuestión, no interfieren unas con otras para estos propósitos.

Proposición 3.41 *Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función para la cual $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen en E y además $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en $(x_0, y_0) \in E$. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ existe y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración. Debemos probar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \tag{3.50}$$

Sea $\epsilon > 0$ dado, y consideremos

$$\Delta(h,k) = \frac{[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]}{hk},$$

para $h, k \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeños. Definamos la función g por

$$g(z) = f(z, y_0 + k) - f(z, y_0).$$

Notemos que g es diferenciable para z suficientemente cercano a x_0 y

$$g'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(z, y_0).$$

Usando ahora el teorema del valor medio uni-dimensional, tenemos que existen ξ entre x_0 y $x_0 + h$ y η entre y_0 y $y_0 + k$ tales que

$$\Delta(h,k) = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{hk} = \frac{g'(\xi)}{k} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta). \tag{3.51}$$

Por la continuidad de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en (x_0, y_0), existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{cuando} \ \ |(h,k)| < 2\delta.$$

Luego de (3.51) resulta que

$$\left| \Delta(h,k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{cuando} \ \ |(h,k)| < 2\delta.$$

De lo cual, haciendo $k \to 0$ obtenemos

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \qquad \text{cuando} \ \ |h| < \delta.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, (3.50) se cumple. ■

El siguiente resultado es inmediato de la proposición 3.41.

Corolario 3.42 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^r, $r \geq 2$. Entonces, si $(p(1), p(2), \ldots, p(n))$ es una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$,*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{p(1)}^{k_{p(1)}} \cdots \partial x_{p(n)}^{k_{p(n)}}} \qquad \textit{para todo} \ \ k \leq r,$$

donde $k_1, \ldots, k_n$ son números enteros no negativos y $k_1 + \cdots + k_n = k$.

Estamos ahora listos para enunciar y demostrar el **teorema de Taylor para funciones de varias variables**.

Teorema 3.43 *(Fórmula de Taylor para funciones de varias variables con residuo integral) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{r+1} en E. Si $x \in E$, y el segmento de línea que une a x y $x + h$, donde $h \in \mathbb{R}^n$, está contenido en E, entonces*

$$\begin{aligned} f(x+h) \ &= \ f(x) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\underbrace{k_1 + \cdots + k_n}_{todo \ \ k_i \geq 0} = k} (k_1! \cdots k_n!)^{-1} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} \\ &\quad + \sum_{\underbrace{l_1 + \cdots + l_n}_{todo \ \ l_i \geq 0} = r+1} \frac{r+1}{l_1! \cdots l_n!} h_1^{l_1} \cdots h_n^{l_n} \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1} f(x+sh)}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}} ds. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos primero que si $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces (véase Cavazos-Cadena [6], p. 33)

$$(h_1 + \cdots + h_n)^k = \sum_{\underbrace{k_1 + \cdots + k_n}_{\text{todo } k_i \geq 0}=k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n}. \tag{3.52}$$

Definamos ahora la función g de una variable por

$$g(t) = f(x + th).$$

Como el segmento de línea que une a x y $x + h$ está contenido en E y E es abierto en $\mathbb{R}^n$, existe un intervalo abierto I con $[0, 1] \subset I$ tal que $x + th \in E$ para todo $t \in I$. Debido a que f es de clase C^{r+1} en E, g es de clase C^{r+1} en I; y así, por la fórmula de Taylor con residuo integral para funciones de una variable (teorema 2.49),

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{r!} \int_0^t (t - s)^r g^{(r+1)}(s) ds.$$

Notemos que

$$f(x + h) = g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1 - s)^r g^{(r+1)}(s) ds. \tag{3.53}$$

Además, si $\gamma(t) = x + th$, entonces γ es diferenciable en I, con

$$D\gamma(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \qquad \text{para todo} \quad t \in I;$$

y $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Así, usando la regla de la cadena (teorema 3.22) obtenemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\gamma(t))D\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x+th} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(x + th)}{\partial x_i}, \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f(x + th)}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f(x + th)}{\partial x_j \partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Continuando con este proceso obtenemos

$$g^{(k)}(s) = \sum_{i_1=1}^{n} h_{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} h_{i_k} \frac{\partial^k f(x + sh)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

De lo cual, usando la expansión multinomial (3.52), resulta que

$$g^{(k)}(s) = \sum_{\underbrace{k_1+\cdots+k_n}_{\text{todo } k_i\geq 0}=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n} \frac{\partial^k f(x+sh)}{\partial x_1^{k_1}\cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

Sustituyendo esto en (3.53), obtenemos lo deseado. ■

A la cantidad

$$R_r(x) = \sum_{\underbrace{l_1+\cdots+l_n}_{\text{todo } l_i\geq 0}=r+1} \frac{r+1}{l_1!\cdots l_n!} h_1^{l_1}\cdots h_n^{l_n} \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1} f(x+sh)}{\partial x_1^{l_1}\cdots \partial x_n^{l_n}} ds$$

se le llama el **residuo** y representa el error por aproximar $f(x+h)$ por

$$f(x) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\underbrace{k_1+\cdots+k_n}_{\text{todo } k_i\geq 0}=k} (k_1!\cdots k_n!)^{-1} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdots \partial x_n^{k_n}} h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n}.$$

Al igual que en el caso de funciones de una variable, el residuo $R_r(x)$ se puede expresar en términos de derivadas; dejaremos la demostración de tal resultado como ejercicio al lector.

Teorema 3.44 *(Fórmula de Taylor para funciones de varias variables con residuo diferencial) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{r+1} en E. Si $x \in E$, y el segmento de línea que une a x y $x+h$, donde $h \in \mathbb{R}^n$, está contenido en E, entonces existe un punto z entre x y $x+h$ tal que*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\underbrace{k_1+\cdots+k_n}_{\text{todo } k_i\geq 0}=k} (k_1!\cdots k_n!)^{-1} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdots \partial x_n^{k_n}} h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n} \\ &\quad + \sum_{\underbrace{l_1+\cdots+l_n}_{\text{todo } l_i\geq 0}=r+1} (l_1!\cdots l_n!)^{-1} \frac{\partial^{r+1} f(z)}{\partial x_1^{l_1}\cdots \partial x_n^{l_n}} h_1^{l_1}\cdots h_n^{l_n}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Determine la convexidad o no convexidad de los siguientes conjuntos. Justifique sus respuestas
   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\}$.
   b) $V_2(x) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 2\}$.
   c) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

2. Muestre, mediante un ejemplo, que la conclusión en el teorema 3.32 no es necesariamente cierta si E no es convexo.

3. a) De un ejemplo de un conjunto conexo que no sea convexo.
   b) Demuestre que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo y $f : E \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable con $Df = 0$, entonces f es una función constante.

4. Demuestre que la función g definida por (3.43) es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ con
$$g'(\lambda) = \langle \gamma(1) - \gamma(0), \nabla \gamma(\lambda) \rangle.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Demuestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen en $(0,0)$, pero $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

6. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto tal que $tx \in E$ para todo $x \in E$ y todo $t > 0$. Si la función $f : E \to \mathbb{R}$ es doblemente diferenciable y homogénea de grado d, demuestre que
$$D^2 f(x)(x)(x) = d(d-1)f(x) \qquad \text{para todo } \ x \in E.$$

7. Demuestre que el residuo $R_r(x)$ cumple que
$$\frac{R_r(x)}{|h|^r} \to 0 \qquad \text{cuando } \ h \to 0.$$

8. Calcule la fórmula de Taylor de segundo orden ($r = 2$) para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$ alrededor del punto $(0,0)$.

9. Demuestre el teorema 3.44.

3.6. Teorema de la función inversa

El problema a resolver en esta sección es el siguiente: determinar condiciones suficientes para que una función $f : E \to \mathbb{R}^n$, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, sea invertible; dicho de otra forma, determinar condiciones suficientes para que cuando $y = (y_1, \ldots, y_n) \in f(E)$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n \end{gathered}$$

tenga una solución única para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en términos de $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

El **teorema de la función inversa**, que veremos a continuación, dice que si para un punto $x_0 \in E$, la derivada de f en x_0, $Df(x_0)$, es invertible, entonces f es "localmente invertible", es decir, es invertible en cierta vecindad abierta U de x_0.

Teorema 3.45 *(Teorema de la función inversa) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en E. Si para un punto $x_0 \in E$, $Df(x_0)$ es invertible, entonces existen conjuntos abiertos U y V tales que $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$ y $f : U \to V$ es biyectiva. Además $f^{-1} : V \to U$ es de clase C^1 y*

$$\left(Df^{-1}\right)(f(x)) = [Df(x)]^{-1} \qquad \text{para todo } \; x \in U.$$

Demostración. Consideremos $\lambda > 0$ de manera que

$$2\lambda \left\| [Df(x_0)]^{-1} \right\| = 1. \tag{3.54}$$

Como f es de clase C^1 en E, Df es continua en x_0; y así, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in U \equiv V_\delta(x_0)$ (la bola abierta de radio δ con centro en x_0),

$$\|Df(x) - Df(x_0)\| < \lambda. \tag{3.55}$$

Asociemos con cada $y \in \mathbb{R}^n$ una función $g_y : E \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$g_y(x) = x + [Df(x_0)]^{-1}(y - f(x)). \tag{3.56}$$

Notemos que $f(x) = y$ si y sólo si x es un punto fijo de g_y.

Usando la regla de la cadena (teorema 3.22) y el problema 1 de la sección 3.3, obtenemos que g_y es diferenciable en E y

$$Dg_y(x) = I - [Df(x_0)]^{-1} Df(x) = [Df(x_0)]^{-1}(Df(x_0) - Df(x)),$$

donde I es el operador identidad. Luego, por (3.54) y (3.55) se sigue que

$$\|Dg_y(x)\| < \frac{1}{2} \qquad \text{para todo} \ \ x \in U.$$

Así, aplicando el teorema del valor medio generalizado (teorema 3.32), obtenemos que

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in U. \tag{3.57}$$

De esto se sigue (véase el inicio de la demostración del teorema 3.3) que g_y puede tener a lo más un punto fijo en U, de manera que $f(x) = y$ para a lo más un punto $x \in U$. Esto muestra que f es inyectiva en U.

Consideremos ahora $V := f(U)$. Demostraremos que V es abierto. Fijemos pues $z \in V$; entonces $z = f(w)$ para algún $w \in U$. Tomemos $r > 0$ de manera que la bola cerrada con centro en w y de radio r, $B_r(w)$, esté contenida en U.

Fijemos $y \in V_{\lambda r}(z)$. Entonces, por (3.54), con g_y definida como en (3.56), obtenemos (véase (3.9)) que

$$|g_y(w) - w| = \left|[Df(x_0)]^{-1}(y - z)\right| < \left\|[Df(x_0)]^{-1}\right\| \lambda r = \frac{r}{2}.$$

Si $x \in B_r(w)$, se sigue de (3.57) que

$$|g_y(x) - w| \leq |g_y(x) - g_y(w)| + |g_y(w) - w| < \frac{1}{2}|x - w| + \frac{r}{2} \leq r;$$

por lo tanto $g_y(x) \in B_r(w)$.

Debido a que $B_r(w) \subset U$, (3.57) se vale para $x_1, x_2 \in B_r(w)$. Por lo tanto g_y es una contracción de $B_r(w)$ en $B_r(w)$ y, como $B_r(w)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ (véase la proposición 3.83 en Pérez et al. [25]), $B_r(w)$ es completo. Luego, el teorema de punto fijo para contracciones (teorema 3.3) implica que g_y tiene un único punto fijo $x \in B_r(w)$. Para este punto x, $f(x) = y$ y así $y \in f(B_r(w)) \subset f(U) = V$.

Como $y \in V_{\lambda r}(z)$ es arbitrario, se sigue que $V_{\lambda r}(z) \subset V$, y así V es un conjunto abierto. Esto completa la primera parte de la demostración.

Para demostrar la segunda parte fijemos y y $y + k$ en V. Entonces existen x y $x + h$ en U, tales que $y = f(x)$ y $y + k = f(x + h)$. Considerando la función g_y definida en (3.56), obtenemos

$$g_y(x + h) - g_y(x) = h + [Df(x_0)]^{-1}(f(x) - f(x + h)) = h - [Df(x_0)]^{-1}(k).$$

Luego, por (3.57), $\left|h - [Df(x_0)]^{-1}(k)\right| \leq \frac{1}{2}|h|$. Por lo tanto $\left|[Df(x_0)]^{-1}(k)\right| \geq \frac{1}{2}|h|$, y (véase (3.9) y (3.54))

$$|h| \leq 2\left\|[Df(x_0)]^{-1}\right\| |k| = \lambda^{-1}|k|. \tag{3.58}$$

Luego, de (3.54) y (3.55),

$$\|Df(x) - Df(x_0)\| \left\|[Df(x_0)]^{-1}\right\| < \frac{1}{2} < 1;$$

y así, por la proposición 3.9 a), $Df(x)$ es invertible.

Notemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - [Df(x)]^{-1}(k) &= h - [Df(x)]^{-1}(k) \\ &= -[Df(x)]^{-1}\left([f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)]\right), \end{aligned}$$

y así de (3.58), obtenemos

$$\frac{\left|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - [Df(x)]^{-1}(k)\right|}{|k|} \leq \frac{\left\|[Df(x)]^{-1}\right\|}{\lambda} \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)|}{|h|}.$$

Cuando $k \to 0$, de (3.58) se observa que $h \to 0$. Luego, por la definición de derivada, el lado derecho tiende a 0, y en consecuencia, también el lado izquierdo. Tenemos de esta manera, demostrado que

$$\left(Df^{-1}\right)(f(x)) = Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1} \qquad \text{para todo } \ x \in U. \tag{3.59}$$

Por último, notemos que $f^{-1} : V \to U$ es una función continua (ya que es diferenciable) y también $Df : U \to \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ es una función continua (pues por hipótesis $f \in C^1$). Así, la continuidad de Df^{-1} se sigue de (3.59) y la observación 3.10. ■

Dejaremos la demostración del siguiente corolario como ejercicio al lector.

Corolario 3.46 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en E. Si $Df(x)$ es invertible para cualquier $x \in E$, entonces $f(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ para cualquier conjunto abierto $A \subset E$. Además, $f^{-1} : f(E) \to E$ es diferenciable.*

Observación 3.47 *De la fórmula (3.59) para el cálculo de $Df^{-1}(y)$ a través de la inversa de $Df(x)$, donde $y = f(x)$, $x \in U$, y el hecho de que la inversa de una matriz A es $A^{-1} = (detA)^{-1} adjA$ (véase Hoffman y Kunze [16], p. 160), donde $adjA$ es una matriz tal que $(adjA)_{ij} = (-1)^{i+j} detA(j|i)$, donde $detA(j|i)$ denota al determinante de la matriz obtenida de A eliminando la j-ésima fila y la i-ésima columna, observamos que las derivadas parciales* *de f^{-1} son cocientes de polinomios en derivadas parciales de f por un polinomio no nulo (el determinante de la matriz jacobiana de $Df(x)$) en derivadas parciales de f. De esta manera, las derivadas parciales iteradas de f^{-1} pueden ser calculadas en términos de las derivadas parciales iteradas de f. En consecuencia, si f es de clase C^r con $r \geq 1$, entonces f^{-1} también lo es; y por supuesto, si f es suave, f^{-1} también lo será.*

Ejemplo 3.48 *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \frac{x^3+3y^2}{y} &= u(x,y) \\ \cos x + \operatorname{sen} y &= v(x,y). \end{aligned} \tag{3.60}$$

En este caso $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ con dominio $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Luego, $f_1(x,y) = \frac{x^3+3y^2}{y}$ y $f_2(x,y) = \cos x + \operatorname{sen} y$. De acuerdo al teorema de la función inversa, para determinar los puntos en los que el sistema (3.60) se puede resolver para (x,y) en términos de (u,v), debemos calcular $Df(x,y)$ y determinar los puntos (x,y) para los que $Df(x,y)$ es invertible. Para ello, calcularemos a la matriz jacobiana de $Df(x,y)$, a la cual denotaremos por $[Df(x,y)]$. Entonces (véase Hoffman y Kunze [16], p. 163), $Df(x,y)$ será invertible si y sólo si $\det[Df(x,y)] \neq 0$. Ahora,

$$\det[Df(x,y)] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{3x^2}{y} & 3-\frac{x^3}{y^2} \\ -\operatorname{sen} x & \cos y \end{bmatrix} = \frac{3x^2}{y}\cos y + \left(3 - \frac{x^3}{y^2}\right)\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, $Df(x,y)$ es invertible en los puntos (x,y) para los cuales $y \neq 0$ y $\frac{3x^2}{y}\cos y \neq \left(\frac{x^3}{y^2} - 3\right)\operatorname{sen} x$. Así, por ejemplo, si $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$\frac{3x_0^2}{y_0^2}\cos y_0 = 0 \neq \frac{\pi}{2} - 3 = \left(\frac{x_0^3}{y_0^2} - 3\right)\operatorname{sen} x_0,$$

y podemos, por lo tanto, resolver (3.60) para puntos (x,y) cercanos a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

También, del teorema de la función inversa tenemos que

$$\begin{aligned} \left[Df^{-1}(u,v)\right] &= [Df(x,y)]^{-1} = \frac{1}{\det[Df(x,y)]}\, adj\,[Df(x,y)] \\ &= \frac{1}{\frac{3x^2}{y}\cos y + \left(3 - \frac{x^3}{y^2}\right)\operatorname{sen} x}\begin{bmatrix} \cos y & \frac{x^3}{y^2} - 3 \\ \operatorname{sen} x & \frac{3x^2}{y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cos y}{\frac{3x^2}{y}\cos y + \left(3 - \frac{x^3}{y^2}\right)\operatorname{sen} x}.$$

Notemos que la derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial u}$ *está expresada en términos de* x *y* y *y nó de* u *y* v*. De manera que* $\frac{\partial x}{\partial u}$ *está evaluada en el punto* $(u(x,y), v(x,y))$*.*

El ejemplo 3.48 nos muestra, en particular, que si existen soluciones a las ecuaciones dadas, mediante la fórmula dada en el teorema de la función inversa, podemos obtener las derivadas de estas soluciones aún cuando no sea posible obtener explicitamente tales soluciones.

Problemas

1. Muestre que si $f : E \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 en E, donde $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, la condición de que $Df(x_0)$ sea invertible (vea el teorema 3.45) para algún punto $x_0 \in E$ es una condición suficiente, más no necesaria, para que f sea invertible en alguna vecindad abierta de x_0.

2. Demuestre el corolario 3.46.

3. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^4 y + x &= u(x,y) \\ x + y^3 &= v(x,y). \end{aligned}$$

   Demuestre que este sistema puede ser resuelto para x y y en términos de u y v en una vecindad del punto $(1,1)$ y encuentre $\frac{\partial y}{\partial v}(2,2)$.

4. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$$

   tiene una inversa, f^{-1}, en la vecindad de cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y encuentre $[(Df^{-1})(f(x,y))]$.

5. Considere las siguientes transformaciones a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x(r,\varphi,\theta) &= r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y(r,\varphi,\theta) &= r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z(r,\varphi,\theta)) &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

   Determine los casos en que es posible resolver para (r,φ,θ) en términos de (x,y,z).

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

   Demuestre que $f'(0) \neq 0$, pero que f no es invertible en ninguna vecindad de 0. ¿Porqué esto no contradice al teorema 3.45?

7. Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y suponga que $f : E \to \mathbb{R}^3$ satisface las hipótesis del teorema 3.45. Si x_0, U y V son como en dicho teorema, demuestre que $f^{-1} : V \to U$ cumple

$$Jf\left(x_0\right) \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_1}\left(f\left(x_0\right)\right) = \det \begin{bmatrix} \delta_{i,1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\left(x_0\right) \\ \delta_{i,2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\left(x_0\right) \\ \delta_{i,3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\left(x_0\right) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\left(x_0\right) \end{bmatrix}$$

   donde $Jf\left(x_0\right)$ es el **determinante jacobiano** $\det\left[Df\left(x_0\right)\right]$ y $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.

3.7. Teorema de la función implícita

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un conjunto abierto y consideremos una función $F : E \to \mathbb{R}^m$. Nuestro interés en esta sección es determinar condiciones suficientes para que cuando $\left(x_0, y_0\right) \in E$ satisfaga la relación $F\left(x_0, y_0\right) = 0$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\right) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ F_m\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

tenga una solución única para la variable $y = \left(y_1, \ldots, y_m\right)$ en términos de $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ en una vecindad abierta W de x_0. En tal caso, tendremos una función f definida en W tal que $F\left(x, f(x)\right) = 0$ para todo $x \in W$, y diremos que f está implícitamente definida por la relación $F(x, y) = 0$. A esto se debe el nombre de **teorema de la función implícita** para tal resultado.

Al igual que en la sección anterior, si no podemos resolver el sistema (3.61) explícitamente para y, es entonces de mucha relevancia conocer que tal función f existe y que se puede calcular $Df(x)$ para $x \in W$.

Teorema 3.49 *(Teorema de la función implícita) Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un conjunto abierto, y sea $F : E \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 en E. Si para un punto $\left(x_0, y_0\right) \in E$, $F\left(x_0, y_0\right) = 0$ y la* *matriz* $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right]$ *es invertible, entonces existen conjuntos abiertos* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *y* $W \subset \mathbb{R}^n$ *con* $(x_0, y_0) \in U$ *y* $x_0 \in W$ *tales que para cada* $x \in W$ *existe un único* $y \in \mathbb{R}^m$ *tal que* $(x, y) \in U$ *y* $F(x, y) = 0$*. Si esta* y *se define como* $f(x)$*, entonces* $f : W \to \mathbb{R}^m$ *es una función de clase* C^1 *en* W *tal que* $f(x_0) = y_0$*,* $F(x, f(x)) = 0$ *para todo* $x \in W$ *y*

$$[Df(x)] = -\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right]^{-1}\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right], \tag{3.62}$$

donde las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ *y* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ *son evaluadas en* $(x, y) = (x, f(x))$*.*

Demostración. Definamos $g : E \to \mathbb{R}^{n+m}$ por

$$g(x, y) = (x, F(x, y)). \tag{3.63}$$

Notemos que g es de clase C^1 en E,

$$g(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, 0),$$

y su matriz jacobiana en (x_0, y_0) es

$$[Dg(x_0, y_0)] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, y_0)\right] & \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right] \end{bmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$ y 0 es la matriz nula de $n \times m$.

Como por hipótesis $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right]$ es invertible, tenemos (véase Hoffman y Kunze [16], p. 157) que el determinante jacobiano de g en (x_0, y_0) esta dado por

$$Jg(x_0, y_0) = \det[Dg(x_0, y_0)] = (\det I)\left(\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right]\right) = \det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right] \neq 0.$$

En consecuencia, $Dg(x_0, y_0)$ es invertible; y se satisfacen así las hipótesis del teorema de la función inversa (teorema 3.45) para g. Por lo tanto, existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^{n+m}$ con $(x_0, y_0) \in U$ y $g(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in V$ de manera que $g : U \to V$ es biyectiva, y su inversa $g^{-1} : V \to U$ es de clase C^1.

Sea

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in V\}. \tag{3.64}$$

Notemos que $x_0 \in W$. Además, del hecho de que V es abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$ se sigue fácilmente que W es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ahora de (3.63), (3.64) y el hecho de que $g : U \to V$ es biyectiva, tenemos que si $x \in W$, entonces existe un único $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $(x, y) \in U$ y

$$(x, 0) = g\left((x, y)\right) = (x, F(x, y)) . \tag{3.65}$$

Por lo tanto $F(x, y) = 0$.

Definamos $f : W \to \mathbb{R}^m$ por $f(x) = y$, donde y es el elemento único de $\mathbb{R}^m$ que satisface (3.65). Entonces

$$g^{-1}\left((x, 0)\right) = (x, f(x)) , \qquad x \in W. \tag{3.66}$$

Como g^{-1} es de clase C^1 en V, se sigue de (3.66) que f es de clase C^1 en W. Además, de la hipótesis $F(x_0, y_0) = 0$ y de (3.65), se observa que $f(x_0) = y_0$ y,

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \text{para todo } \ x \in W. \tag{3.67}$$

Finalmente, para calcular $[Df(x)]$, definamos $\varphi : W \to \mathbb{R}^{n+m}$ por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Entonces φ es diferenciable en W, y así, por (3.67), y usando la regla de la cadena (teorema 3.22), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= [DF(x, f(x))]\,[D\varphi(x)] \\ &= \left[\left[\tfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x))\right] \quad \left[\tfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, f(x))\right]\right] \begin{bmatrix} I \\ \\ [Df(x)] \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x))\right] + \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, f(x))\right][Df(x)] , \end{aligned}$$

donde 0 es la matriz nula de $m \times n$ e I es la matriz identidad de $n \times n$. Esto último es equivalente a (3.62), y la prueba está finiquitada. ■

La demostración del teorema 3.49 muestra que el teorema de la función inversa implica al teorema de la función inversa. Como el recíproco también es cierto, véase el problema 6, estos teoremas son equivalentes.

Ejemplo 3.50 *Consideremos $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(y_1^3 + x_1 y_2 + x_2, x_2 y_1 + y_2^3 - x_1\right) .$$

Las funciones componentes de F son

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^3 + x_1 y_2 + x_2 \qquad y \qquad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_2 y_1 + y_2^3 - x_1 .$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F_1}{\partial x_1} = y_2, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial y_1} = 3y_1^2, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial y_2} = x_1,\\
&\tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} = -1, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x_2} = y_1, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial y_1} = x_2, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial y_2} = 3y_2^2.
\end{aligned}$$

Como todas estas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^4$*, se sigue del teorema 3.18 que* F *es de clase* C^1 *en* $\mathbb{R}^4$*. También*

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} y_2 & 1 \\ -1 & y_1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right] = \begin{bmatrix} 3y_1^2 & x_1 \\ x_2 & 3y_2^2 \end{bmatrix}.$$

Así

$$\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right] = \det\begin{bmatrix} 3y_1^2 & x_1 \\ x_2 & 3y_2^2 \end{bmatrix} = 9y_1^2y_2^2 - x_1x_2;$$

de manera que $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right]$ *es invertible si* $9y_{0,1}^2y_{0,2}^2 \neq x_{0,1}x_{0,2}$*, donde* $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ *y* $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})$*.*

Notemos que si $x_0 = (-1, 1)$ *y* $y_0 = (-1, 0)$*, entonces*

$$F(x_{0,1}, x_{0,2}, y_{0,1}, y_{0,2}) = 0 \qquad y \qquad 9y_{0,1}^2y_{0,2}^2 = 0 \neq -1 = x_{0,1}x_{0,2}.$$

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, tenemos que existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^4$ *y* $W \subset \mathbb{R}^2$ *con* $(-1, 1) \in W$ *y* $(-1, 1, -1, 0) \in U$ *tales que para cada* $(x_1, x_2) \in W$ *existe un único* $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in U$ *y* $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$*, es decir, el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}
y_1^3 + x_1y_2 + x_2 &= 0\\
x_2y_1 + y_2^3 - x_1 &= 0
\end{aligned}$$

puede ser resuelto para y_1*,* y_2 *en términos de* x_1 *y* x_2 *con* $(x_1, x_2) \in W$*.*

Definamos $f : W \to \mathbb{R}^2$ *por*

$$f(x_1, x_2) \equiv (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (y_1, y_2),$$

donde (y_1, y_2) *es el único punto en* $\mathbb{R}^2$ *para el cual* $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$*. Se sigue del teorema de la función implícita que* f *es de clase* C^1 *en* W*,* $f(-1, 1) = (-1, 0)$*,* $F((x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = 0$ *para todo* $(x_1, x_2) \in W$ *y*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & -\frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Así, en particular

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}} = \frac{3y_2^3 + x_1}{x_1x_2 - 9y_1^2y_2^2}.$$

Luego

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(-1,1) = \frac{3y_2^3 + x_1}{x_1x_2 - 9y_1^2y_2^2}\bigg|_{(x_1,x_2,y_1,y_2)=(-1,1,-1,0)} = 1.$$

Problemas

1. Determine si el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + u^2 + w + 2 &= 0 \end{aligned}$$
se puede resolver para u, v y w en términos de x, y y z cerca de $(x, y, z, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0, -2)$.

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x, y, z) = xz^2 + y + e^z.$$
Demuestre que existe una función f definida en un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ con $(1, -1) \in W$ tal que $f(1, -1) = 0$ y $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in W$. Encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$.

3. Sea
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z^2 - a = 0, x^2 - y^2 + z^2 - b = 0\right\}.$$
a) Si $(x_0, y_0, z_0) \in A$, determine condiciones suficientes para que los puntos $(x, y, z) \in A$ cercanos a (x_0, y_0, z_0) puedan ser expresados en la forma $x = f(z)$ y $y = g(z)$.
b) Calcule $f'(z)$ y $g'(z)$.

4. Demuestre que el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} u^2 - v\cos(xy) + w^2 &= 0 \\ u^2 + v^2 - \operatorname{sen}(xy) + 2w^2 - 2 &= 0 \\ uv - \operatorname{sen} x \cos y + w &= 0 \end{aligned}$$
define u, v y w como funciones de clase C^1 de (x, y) cerca del punto $(x, y, u, v, w) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right)$ y encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Determine si la función $u(x, y)$ es de clase C^∞.

5. Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 tales que g' y h' son estrictamente positivas. Si $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$, donde $x_0, y_0, z_0 \neq 0$, es una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} g(xu) + h(yv) &= 0 \\ g(yv) + h(zw) &= 0 \\ g(zw) + h(xu) &= 0 \end{aligned}$$

demuestre que en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^6$ con $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) \in U$, existe una solución única $(u, v.w) = f(x, y, z)$ con determinante jacobiano $Jf(x, y, z) = -\frac{uvw}{xyz}$.

6. Demuestre que el teorema de la función implícita implica el teorema de la función inversa.

3.8. Integrales múltiples

Consideraremos aquí funciones $f : I^n \to \mathbb{R}$ acotadas, donde I^n es un **rectángulo cerrado** en $\mathbb{R}^n$, es decir, $I^n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, donde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ y $a_j \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Denotaremos a $[a_j, b_j]$ por I_j.

Si P_j es una partición de I_j, entonces $P = (P_1, \ldots, P_n)$ es una **partición** del rectángulo I^n en **rectángulos componentes** $[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$, donde c_j y d_j son puntos consecutivos de P_j. Denotaremos a un rectángulo componente típico por R, y a su volumen n-dimensional $\prod_{j=1}^{n} (d_j - c_j)$ por $|R|$. Si $\|P_j\|$ es la malla de la partición P_j, entonces la **malla** P es

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|P_j\|.$$

Ahora, para cada rectángulo componente R de P, definamos

$$m_R(f) = \inf_{x \in R} f(x) \qquad \text{y} \qquad M_R(f) = \sup_{x \in R} f(x)$$

y consideremos

$$L(P, f) = \sum_R m_R(f)|R| \qquad \text{y} \qquad U(P, f) = \sum_R M_R(f)|R|.$$

A los números $L(P, f)$ y $U(P, f)$ les llamaremos, respectivamente, **suma inferior de Riemann** de f sobre P y **suma superior de Riemann** de f sobre P.

Es claro que para cualquier partición P de I^n,

$$L(P, f) \leq U(P, f).$$

Un **refinamiento** de una partición P de I^n es una partición P^* tal que cada rectángulo componente de P^* es un subconjunto de un rectángulo componente de P.

La demostración del siguiente resultado es similar a la del caso uni-dimensional (véase la proposición 1.1 y el corolario 1.2).

Proposición 3.51 *Sean $f : I^n \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición de I^n.*
i) Si P^* es un refinamiento de P, entonces

$$L(P, f) \leq L(P^*, f) \qquad y \qquad U(P^*, f) \leq U(P, f).$$

ii) Para cualquier otra partición Q de I^n,

$$L(P, f) \leq U(Q, f).$$

De esta manera, denotando por $\mathcal{P}(I^n)$ al conjunto de todas las particiones P de I^n, podemos definir

$$\underline{\int_{I^n}} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}(I^n)} L(P, f) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_{I^n}} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}(I^n)} U(P, f),$$

valores reales a los que llamaremos **integral inferior de Riemann** de f sobre I^n e **integral superior de Riemann** de f sobre I^n, respectivamente.

Definición 3.52 *Sean I^n un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y $f : I^n \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si*

$$\underline{\int_{I^n}} f(x)dx = \overline{\int_{I^n}} f(x)dx,$$

diremos que f es **Riemann integrable** sobre I^n y al valor común, que denotaremos por $\int_{I^n} f(x)dx$ le llamaremos la **integral múltiple de Riemann** (o simplemente, **integral de Riemann**) de f sobre I^n.

La demostración de los siguientes dos resultados es similar a la del caso uni-dimensional (véase los teoremas 1.6 y 1.8).

Teorema 3.53 *La función acotada $f : I^n \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre I^n si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de I^n para la cual*

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Teorema 3.54 *Si $f : I^n \to \mathbb{R}$ es una función continua en I^n, entonces f es Riemann integrable sobre I^n.*

También, véase los teoremas 1.12, 1.14, 1.15, 1.17 y 1.18, es fácil demostrar que la integral múltiple de Riemann satisface las propiedades establecidas en el siguiente teorema.

Teorema 3.55 *Sean f y g funciones Riemann integrables sobre I^n y $c \in \mathbb{R}$. Entonces*
i) cf es Riemann integrable sobre I^n y

$$\int_{I^n} (cf)(x)dx = c \int_{I^n} f(x)dx.$$

ii) $f + g$ es Riemann integrable sobre I^n y

$$\int_{I^n} (f+g)(x)dx = \int_{I^n} f(x)dx + \int_{I^n} g(x)dx.$$

iii) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I^n$, entonces

$$\int_{I^n} f(x)dx \leq \int_{I^n} g(x)dx.$$

iv) fg es Riemann integrable sobre I^n y si $\operatorname{ínf}_{x\in I^n} |f(x)| > 0$, $\frac{1}{f}$ también es Riemann integrable sobre I^n.
v) Si $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in I^n$ y $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\varphi \circ f$ es Riemann integrable sobre I^n.
vi) $|f|$ es Riemann integrable sobre I^n y

$$\left| \int_{I^n} f(x)dx \right| \leq \int_{I^n} |f(x)|dx.$$

vii) Si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I^n$, entonces

$$\left| \int_{I^n} f(x)dx \right| \leq M \left| I^n \right|.$$

La demostración del siguiente resultado es similar a la del teorema 2.32.

Teorema 3.56 *Si la sucesión $f_m : I^n \to \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$ converge uniformemente a la función $f : I^n \to \mathbb{R}$ y cada f_m es Riemann integrable sobre I^n, entonces f es Riemann integrable sobre I^n y*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{I^n} f_m(x)dx = \int_{I^n} f(x)dx.$$

Finalizaremos esta sección con un teorema de integración fundamental, el **teorema de Fubini**, útil en la evaluación de integrales múltiples por medio de integraciones iteradas sin importar el orden en que se realicen. Desafortunadamente, si una función de dos variables $f(x,y)$ es Riemann integrable sobre $I^n \times I^m$, la función $f_x : I^m \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x,y)$ ($x \in I^n$ fija) no es necesariamente Riemann integrable sobre I^m, lo mismo sucede para f_y. Sin embargo, si f es continua en $I^n \times I^m$, entonces, debido a que f_x y f_y son continuas en I^m e I^n, respectivamente, se sigue (véase el teorema 3.54) que f_x y f_y si son Riemann integrables en I^m e I^n, respectivamente.

Teorema 3.57 *(Teorema de Fubini) Sean I^n e I^m rectángulos cerrados, y sea $f : I^n \times I^m \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable sobre $I^n \times I^m$. Definamos $\mathcal{L}, \mathcal{U} : I^n \to \mathbb{R}$ por*

$$\mathcal{L}(x) = \underline{\int_{I^m}} f_x(y)dy = \underline{\int_{I^m}} f(x,y)dy \qquad y \qquad \mathcal{U}(x) = \overline{\int_{I^m}} f_x(y)dy = \overline{\int_{I^m}} f(x,y)dy. \tag{3.68}$$

Entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son Riemann integrables sobre I^n; además

$$\int_{I^n \times I^m} f(x,y)dxdy = \int_{I^n} \mathcal{L}(x)dx = \int_{I^n} \left[\underline{\int_{I^m}} f(x,y)dy \right] dx \tag{3.69}$$

y

$$\int_{I^n \times I^m} f(x,y)dxdy = \int_{I^n} \mathcal{U}(x)dx = \int_{I^n} \left[\overline{\int_{I^m}} f(x,y)dy \right] dx. \tag{3.70}$$

Demostración. Sea P una partición de $I^n \times I^m$. Notemos que P puede escribirse como (P_{I^n}, P_{I^m}), donde P_{I^n} y P_{I^m} son particiones de I^n e I^m, respectivamente. Así, un rectángulo componente típico de P es de la forma $R = R_{I^n} \times R_{I^m}$. Luego

$$U(P,f) = \sum_R M_R(f)|R| = \sum_{R_{I^n}} \left(\sum_{R_{I^m}} M_{R_{I^n} \times R_{I^m}}(f)\, |R_{I^m}| \right) |R_{I^n}|\,.$$

Es claro que, para $x \in R_{I^n}$, $M_{R_{I^n} \times R_{I^m}}(f) \geq M_{R_{I^m}}(f_x)$. Así, para cada $x \in R_{I^n}$ se tiene que

$$\sum_{R_{I^m}} M_{R_{I^n} \times R_{I^m}}(f)\, |R_{I^m}| \geq \sum_{R_{I^m}} M_{R_{I^m}}(f_x)\, |R_{I^m}| \geq \overline{\int_{I^m}} f_x(y)dy = \mathcal{U}(x).$$

Como esto es válido para todo $x \in R_{I^n}$, se sigue que

$$\sum_{R_{I^m}} M_{R_{I^n} \times R_{I^m}}(f)\, |R_{I^m}| \geq M_{R_{I^n}}(\mathcal{U}).$$

Luego

$$U(P,f)=\sum_{R_{I^n}}\left(\sum_{R_{I^m}}M_{R_{I^n}\times R_{I^m}}(f)\,|R_{I^m}|\right)|R_{I^n}|\geq\sum_{R_{I^n}}M_{R_{I^n}}(\mathcal{U})\,|R_{I^n}|=U\left(P_{I^n},\mathcal{U}\right).$$

De manera similar, puede verse que

$$L(P,f)\leq L\left(P_{I^n},\mathcal{L}\right).$$

Por lo tanto

$$L(P,f)\leq L\left(P_{I^n},\mathcal{L}\right)\leq U\left(P_{I^n},\mathcal{L}\right)\leq U\left(P_{I^n},\mathcal{U}\right)\leq U(P,f);$$

y así, usando la proposición 3.51 ii) y las definiciones de integral inferior y superior de Riemann, se deduce que

$$\underline{\int_{I^n\times I^m}}f(x,y)dxdy\leq\underline{\int_{I^n}}\mathcal{L}(x)dx\leq\overline{\int_{I^n}}\mathcal{L}(x)dx\leq\overline{\int_{I^n\times I^m}}f(x,y)dxdy.$$

De esto último, y del hecho de que f es Riemann integrable sobre $I^n\times I^m$, se concluye que $\mathcal{L}$ es Riemann integrable sobre I^n y que (3.69) se cumple.

Finalmente, de las desigualdades

$$L(P,f)\leq L\left(P_{I^n},\mathcal{L}\right)\leq L\left(P_{I^n},\mathcal{U}\right)\leq U\left(P_{I^n},\mathcal{U}\right)\leq U(P,f),$$

obtenemos que

$$\underline{\int_{I^n\times I^m}}f(x,y)dxdy\leq\underline{\int_{I^n}}\mathcal{U}(x)dx\leq\overline{\int_{I^n}}\mathcal{U}(x)dx\leq\overline{\int_{I^n\times I^m}}f(x,y)dxdy,$$

de lo cual se deduce que $\mathcal{U}$ es Riemann integrable sobre I^n y que (3.70) se cumple. ■

Observación 3.58 *Intercambiando I^m por I^n y f_x por f_y en (3.68) puede verse que*

$$\int_{I^n\times I^m}f(x,y)dxdy=\int_{I^m}\left[\underline{\int_{I^n}}f(x,y)dx\right]dy$$

y

$$\int_{I^n\times I^m}f(x,y)dxdy=\int_{I^m}\left[\overline{\int_{I^n}}f(x,y)dx\right]dy.$$

Por lo tanto

$$\int_{I^n}\left[\underline{\int_{I^m}}f(x,y)dy\right]dx=\int_{I^n\times I^m}f(x,y)dxdy=\int_{I^m}\left[\underline{\int_{I^n}}f(x,y)dx\right]dy$$

y

$$\int_{I^n}\left[\overline{\int_{I^m}} f(x,y)dy\right]dx = \int_{I^n\times I^m} f(x,y)dxdy = \int_{I^m}\left[\overline{\int_{I^n}} f(x,y)dx\right]dy. \tag{3.71}$$

Corolario 3.59 *Sean I^n e I^m rectángulos cerrados. Si $f : I^n\times I^m \to \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\int_{I^n\times I^m} f(x,y)dxdy = \int_{I^n}\left[\int_{I^m} f(x,y)dy\right]dx = \int_{I^m}\left[\int_{I^n} f(x,y)dx\right]dy.$$

Demostración. Notemos del teorema 3.54 que f es Riemann integrable sobre $I^n\times I^m$. De ese mismo teorema y por el hecho de que f_x y f_y son continuas en I^m e I^n, respectivamente, se sigue que f_x y f_y son Riemann integrables sobre I^m e I^n, esto es

$$\overline{\int_{I^m}} f(x,y)dy = \int_{I^m} f(x,y)dy \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_{I^n}} f(x,y)dx = \int_{I^n} f(x,y)dx.$$

De aquí, el resultado se sigue de (3.71). ∎

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función acotada, es común, en la práctica, considerar $\int_A f(x)dx$. En este caso se considera un rectángulo cerrado I^n tal que $A \subset I^n$ y se define $g : I^n \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } \ x \in A \\ 0, & \text{si } \ x \in I^n\backslash A. \end{cases}$$

Entonces, si g es Riemann integrable sobre I^n, $\int_A f(x)dx$ se define como $\int_{I^n} g(x)dx$.

Observación 3.60 *Notemos que el valor de $\int_A f(x)dx$ no depende del rectángulo cerrado $I^n \supset A$ que se use.*

Problemas

1. Demuestre el teorema 3.54.

2. Demuestre el teorema 3.56.

3. Sea $f : I^n \to \mathbb{R}$, la función constante $f(x) = c$ para todo $x \in I^n$. Calcule $\int_{I^n} f(x)dx$.

4. Sean $f : I^n \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable sobre I^n y $\epsilon > 0$ dado. Si para una partición P de I^n se cumple

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon,$$

demuestre que

$$\left|\int_{I^n} f(x)dx - \sum_R f(t_R)|R|\right| < \epsilon$$

para cualesquiera puntos $t_R \in R$. Use esto para concluir que

$$\int_{I^n} f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} S(P, \{t_R\}, f)$$

donde $S(P, \{t_R\}, f) = \sum_R f(t_R)|R|$. Se dice que $S(P, \{t_R\}, f)$ es una **suma de Riemann** de f.

5. Suponga que existe $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$ tal que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una partición P de I^n de manera que

$$|\mathfrak{I} - S(P, \{t_R\}, f)| < \epsilon$$

para cualesquiera puntos $t_R \in R$. Demuestre que f es Riemann integrable sobre I^n y que

$$\mathfrak{I} = \int_{I^n} f(x)dx.$$

6. Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0 \ \text{ y } \ x + y + z \leq 1\}$ y defina $f : A \to \mathbb{R}$ por $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$. Calcule $\int_A f(x, y, z)dxdydz$.

7. Sea A el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que x es un número racional, $0 < x < 1$, y escribiendo $x = \frac{p}{q}$ con p y q enteros positivos sin factores primos comunes, $y = \frac{k}{q}$, $k = 1, \ldots, q-1$. Demuestre que $\int_0^1 \int_0^1 1_A dydx = 0$, pero que $\int_{[0,1]\times[0,1]} 1_A(x, y)dxdy$ no existe.

3.9. Teorema de Lebesgue

Toca ahora el turno a un teorema que es, posiblemente, uno de los resultados más importantes en la teoría de la integración. Tal teorema, debido a Henri Léon Lebesgue (1875-1941), da una condición necesaria y suficiente para que una función sea Riemann integrable.

Definición 3.61 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Diremos que A tiene **volumen** si la función constante 1 es integrable sobre A, y el volumen, $\nu(A)$, de A, es*

$$\nu(A) = \int_A 1dx.$$

Obviamente si $A = I^n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es un rectángulo cerrado, entonces A tiene volumen y $\nu(A) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = |A|$.

El siguiente resultado, cuya demostración dejamos como ejercicio al lector, nos da una equivalencia de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ con **volumen cero**, es decir, $\nu(A) = 0$.

Proposición 3.62 *Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene volumen cero si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos, $R_1, \ldots, R_m$, tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ y $\sum_{i=1}^{m} |R_i| < \epsilon$.*

Nos será de utilidad extender el concepto de conjunto de volumen cero al de conjunto de **medida cero**.

Definición 3.63 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **medida cero** si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección contable $\{R_1, R_2, \ldots\}$ de rectángulos tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| < \epsilon$.*

De la definición de volumen, es claro que si A tiene volumen cero, entonces A tiene medida cero. Es también claro que si $B \subset A$ y A tiene medida cero, entonces B tiene medida cero.

El siguiente resultado nos indica la ventaja principal del concepto de medida cero sobre el de volumen cero.

Proposición 3.64 *Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección contable de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $\{R_{i1}, R_{i2}, \ldots\}$ una colección contable de rectángulos tal que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_{ij}$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_{ij}| < \frac{\epsilon}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Entonces $\{R_{ij}\}$ es una colección contable (véase por ejemplo, el corolario 1.40 en Pérez et al. [25]) de rectángulos tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} R_{ij}$ y

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |R_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |R_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon,$$

donde la última igualdad se debe al hecho de que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ (véase el ejemplo 2.72 en Pérez et al. [25]). Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tiene medida cero. ∎

Ejemplo 3.65 *Sea $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Sabemos que 1_A no es Riemann integrable en $[0,1]$ (véase el ejemplo 1.5), por lo tanto A no tiene volumen. Sin embargo, A tiene medida cero, pues A es la unión numerable de conjuntos de un único punto, y obviamente un conjunto con un único punto tiene volumen y medida cero. Así el hecho de que A tiene medida cero se sigue de la proposición 3.64.*

Definición 3.66 *Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **oscilación** de f en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es*

$$osc_f(x_0) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x \in V_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)|,$$

donde $V_\delta(x_0)$ es la bola abierta con centro en x_0 de radio δ.

Notemos que $osc_f(x_0) \geq 0$. La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 3.67 *La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $osc_f(x_0) = 0$.*

Teorema 3.68 *(Teorema de Lebesgue) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. La función f es Riemann integrable sobre A si y sólo si el conjunto*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : 1_A f \text{ es discontinua en } x\}$$

tiene medida 0.

Demostración. Supongamos que f es Riemann integrable sobre A. Sea I^n un rectángulo cerrado tal que $A \subset I^n$ y sea $g = 1_A f$. Tenemos de la proposición 3.67 que el conjunto de discontinuidades de g es el conjunto $\{x \in I^n : osc_g(x) > 0\}$. De esta manera, si $D_i = \left\{x \in I^n : osc_g(x) \geq \frac{1}{i}\right\}$, $i = 1, 2, \cdots$, entonces $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

Ahora, para un i fijo (pero arbitrario) y $\epsilon > 0$ dado, como g es Riemann integrable sobre I^n, podemos tomar una partición P de I^n tal que

$$\sum_R [M_R(g) - m_R(g)] |R| = U(P,g) - L(P,g) < \frac{\epsilon}{2i}. \tag{3.72}$$

Definamos además

$$S_1 = \{x \in D_i : x \in \partial R \text{ para algún } R\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{x \in D_i : x \in R^\circ \text{ para algún } R\},$$

donde ∂R y R° denotan a la frontera y el interior, respectivamente, de R. Entonces $D_i = S_1 \cup S_2$. Como la frontera de un rectángulo puede ser cubierta con rectángulos arbitrariamente delgados, es claro que S_1 tiene medida cero. Denotemos ahora por $\mathcal{C}_2$ a la colección de rectángulos R de la partición P que tienen a un elemento de D_i en su interior. Entonces, si $R \in \mathcal{C}_2$,

$$M_R(g) - m_R(g) \geq \frac{1}{i}.$$

Luego, de (3.72)

$$\frac{1}{i} \sum_{R \in \mathcal{C}_2} |R| \leq \sum_{R \in \mathcal{C}_2} [M_R(g) - m_R(g)] \, |R| \leq \sum_{\text{todo } R} [M_R(g) - m_R(g)] \, |R| < \frac{\epsilon}{2i}.$$

Por lo tanto $\mathcal{C}_2$ es una colección de rectángulos cuya unión contiene a S_2 y

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_2} |R| < \frac{\epsilon}{2}.$$

También, como S_1 tiene medida cero, podemos tomar una colección $\mathcal{C}_1$ de rectángulos cuya unión sea S_1 con

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_1} |R| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esta manera, $D_i \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ y

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} |R| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que D_i tiene medida cero, y en consecuencia, mediante la aplicación de la proposición 3.64, concluimos que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_i$ tiene medida cero.

Supongamos ahora que D tiene medida cero. Igual que antes, sean I^n un rectángulo cerrado (con volumen positivo) tal que $I^n \supset A$ y $g = 1_A f$. Consideremos también $M = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Dado $\epsilon > 0$, definamos $D_\epsilon = \left\{ x \in I^n : osc_g(x) \geq \frac{\epsilon}{2|I^n|} \right\}$, entonces $D_\epsilon \subset D$. Denotemos por D_ϵ^a al conjunto de puntos de acumulación de D_ϵ. Entonces si $y \in D_\epsilon^a$, cada bola abierta $V_\delta(y)$ contiene un punto de D_ϵ; de esta manera, cada bola abierta $V_\delta(y)$ es una vecindad de un punto de D_ϵ y por la definición de D_ϵ

$$\sup_{x,z \in V_\delta(y)} |g(x) - g(z)| \geq \frac{\epsilon}{2\,|I^n|}.$$

Esto implica que $osc_g(y) \geq \frac{\epsilon}{2|I^n|}$ y así $y \in D_\epsilon$, lo cual demuestra (véase la proposición 3.50 en Pérez et al. [25]) que D_ϵ es un conjunto cerrado. Como $D_\epsilon \subset I^n$, D_ϵ es acotado y por lo tanto, por el teorema de Heine-Borel (véase el teorema 4.19 en Pérez et al. [25]), D_ϵ es compacto. Ahora, como $D_\epsilon \subset D$, D_ϵ tiene medida cero y así, podemos tomar una colección $\{R_1, R_2, \ldots\}$ de rectángulos (abiertos) cuya unión contenga a D_ϵ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| < \frac{\epsilon}{4(M+1)}.$$

Como D_ϵ es compacto, existe un número finito de R_i's cuya unión contiene a D_ϵ. Supongamos que $\bigcup_{i=1}^{N} R_i \supset D_\epsilon$; entonces

$$\sum_{i=1}^{N} |R_i| < \frac{\epsilon}{4(M+1)}.$$

Construyamos ahora la partición P de I^n generada por los puntos extremos de cada coordenada de I^n y los puntos extremos de los rectángulos cerrados $\overline{R_i}$, $i = 1, \ldots, N$ (descartamos los puntos extremos que caen fuera de I^n). Entonces cada rectángulo componente R de P pertenece a una de las siguientes dos clases

$$\mathcal{R}_1 = \left\{R : R \subset \overline{R_i} \ \text{ para algún } \ i \in \{1, \ldots, N\}\right\}, \qquad \mathcal{R}_2 = \{R : R \cap D_\epsilon = \emptyset\}.$$

En efecto, de nuestra construcción de P, tenemos que $R \cap R_i \neq \emptyset$ implica $R \subset \overline{R_i}$. Así, si $R \cap D_\epsilon \neq \emptyset$, es decir, existe $x_0 \in R \cap D_\epsilon$, entonces $x_0 \in R_i$ para algún i, y $R \cap R_i \neq \emptyset$ para esa i. Por lo tanto $R \in \mathcal{R}_1$.

Para cada rectángulo $R \in \mathcal{R}_2$, la oscilación de g en cada punto de R es menor que $\frac{\epsilon}{2|I^n|}$. Por lo tanto, para cada $x \in R$ existe $\delta > 0$ tal que

$$M_\delta(g) - m_\delta(g) < \frac{\epsilon}{2\,|I^n|},$$

donde $M_\delta(g) = \sup_{y \in V_\delta(x)} g(y)$ y $m_\delta(g) = \operatorname{ínf}_{y \in V_\delta(x)} g(y)$. Como R es compacto, existe un número finito $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de puntos en R tales que $R \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_\delta\left(x_i\right)$. Dividamos ahora el rectángulo cerrado R en subrectángulos cerrados de manera que cada uno de estos subrectángulos esté contenido en algún $V_\delta\left(x_i\right)$. Haciendo esto para cada $R \in \mathcal{R}_2$, obtenemos un refinamiento P^* de P tal que

$$\begin{aligned}
U\left(P^*, g\right) - L\left(P^*, g\right) &\leq \sum_{R \in \mathcal{R}_1} \left[M_R(g) - m_R(g)\right] |R| + \sum_{R \in \mathcal{R}_2} \left[M_R(g) - m_R(g)\right] |R| \\
&\leq 2M \sum_{R \in \mathcal{R}_1} |R| + \frac{\epsilon}{2\,|I^n|} \sum_{R \in \mathcal{R}_2} |R| \\
&< 2M \left(\frac{\epsilon}{4(M+1)}\right) + \frac{\epsilon}{2\,|I^n|}\,|I^n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, el criterio de integrabilidad se cumple y, por lo tanto, g es Riemann integrable sobre I^n; así f es Riemann integrable sobre A. ■

Las demostraciones de los siguientes dos resultados se siguen de manera sencilla del teorema de Lebesgue. Haremos la demostración del primero de ellos y el segundo será dejado como ejercicio al lector.

Corolario 3.69 *Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene volumen si y sólo si ∂A tiene medida cero.*

Demostración. Notemos del teorema de Lebesgue (teorema 3.68), que es suficiente demostrar que el conjunto de discontinuidades de 1_A es ∂A.

Ahora, si $x \in \partial A$, entonces para toda bola abierta $V_\delta(x)$,

$$V_\delta(x) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad V_\delta(x) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existen puntos $y \in V_\delta(x)$ tales que

$$|1_A(x) - 1_A(y)| = 1.$$

De esta manera, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ tenemos que no existe $\delta > 0$ tal que $|1_A(x) - 1_A(y)| < \epsilon$ para todo y con $|x - y| < \delta$, lo cual muestra que 1_A no es continua en x.

Finalmente, si $x \notin \partial A$, entonces existe $V_\delta(x)$ tal que

$$V_\delta(x) \subset A \qquad \text{ó} \qquad V_\delta(x) \subset A^c.$$

En cualesquiera de estos casos, 1_A es constante en $V_\delta(x)$, y así, claramente, 1_A es continua en x. ■

Corolario 3.70 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y con volumen. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función acotada con un número contable de discontinuidades, entonces f es Riemann integrable sobre A.*

Problemas

1. Demuestre que la circunferencia unitaria con centro en el origen tiene volumen cero en $\mathbb{R}^2$.

2. Demuestre la proposición 3.62.

3. Demuestre que la recta $y = 0$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$. ¿Tiene volumen cero?

4. Demuestre que el plano xz tiene medida cero en $\mathbb{R}^3$.

5. Demuestre la proposición 3.67.

6. Demuestre el corolario 3.70.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x + \cos\left(\frac{1}{y}\right), & \text{si} \;\; y \neq 0 \\ e^x, & \text{si} \;\; y = 0. \end{cases}$$

   Demuestre que f es integrable sobre $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable sobre A. Demuestre que
   a) Si A tiene medida cero, entonces $\int_A f(x)dx = 0$.
   b) Si f es no negativa y $\int_A f(x)dx = 0$, entonces $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ tiene medida cero.

3.10. Teorema de cambio de variables para integrales múltiples

Finalizaremos este capítulo con un teorema más de integración, el cual es fundamental en la evaluación de integrales múltiples.

Teorema 3.71 *(Teorema de cambio de variables para integrales múltiples) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con volumen y $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva de clase C^1 tal que $J\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ y $|J\varphi|$, $\frac{1}{|J\varphi|}$ son acotadas sobre A. Si $\varphi(A) = B$ tiene volumen y $f : B \to \mathbb{R}$ es una función acotada e integrable sobre B, entonces $(f \circ \varphi)\,|J\varphi|$ es integrable sobre A y*

$$\int_B f(x)dx = \int_A f\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)|\, dx.$$

La demostración de este teorema hará uso de varios resultados preliminares. El primero de ellos consiste en establecer la fórmula cuando $\varphi = T$ es un operador lineal, en cuyo caso (véase el problema 1 de la sección 3.3) $JT = \det T$.

Lema 3.72 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con volumen. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal, entonces*

$$\nu\left(T(A)\right) = \int_{T(A)} 1dx = \int_A |\det T|\, dx = |\det T|\, \nu(A).$$

Demostración. Consideraremos primero el caso en que $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es un rectángulo cerrado y T es un operador lineal cuya representación matricial en la base canónica es una matriz
i) $T_1 = (t_{ij})$ tal que $t_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $t_{kk} = c \in \mathbb{R}$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $t_{ii} = 1$ para todo $i \neq k$ (la matriz diagonal T_1 se obtiene de la matriz identidad reemplazando un 1 de la diagonal por c), o bién, es una matriz
ii) $T_2 = (t_{ij})$ tal que $t_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $t_{kl} = 1$, para ciertos $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq l$, $t_{ij} = 0$ para $i \neq j$, $i \neq k$ y $j \neq l$ (la matriz T_2 se obtiene de la matriz identidad escribiendo un 1 fuera de la diagonal).

En el caso i), tenemos que

$$T_1 (A) = [a_1, b_1] \times \cdots [ca_k, cb_k] \times \cdots \times [a_n, b_n] ,$$

de manera que su volumen es

$$\nu (T_1 (A)) = |c|\nu(A) = |\det T_1| \, \nu(A).$$

En el caso ii) tenemos que

$$T_2 (A) = \{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_l, x_{k+1}, \ldots, x_n) \, | x_i \in [a_i, b_i] \, , i = 1, \ldots, n\} .$$

Notemos que $T_2 (A)$ es la unión de los conjuntos disjuntos siguientes:

$$\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_l, x_{k+1}, \ldots, x_n) \, | x_i \in [a_i, b_i] \, , 1 \leq i \leq n \ \text{ y } \ a_k + a_l \leq x_k + x_l \leq a_k + b_l\} ,$$

$$\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_l, x_{k+1}, \ldots, x_n) \, | x_i \in [a_i, b_i] \, , 1 \leq i \leq n \ \text{ y } \ a_k + b_l \leq x_k + x_l \leq a_l + b_k\} ,$$

$$\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_l, x_{k+1}, \ldots, x_n) \, | x_i \in [a_i, b_i] \, , 1 \leq i \leq n \ \text{ y } \ a_l + b_k \leq x_k + x_l \leq b_k + b_l\} .$$

Por el corolario 3.59 (véase también el comentario después de dicho corolario), se tiene que el volumen del primer conjunto es

$$\begin{aligned}
&(b_1 - a_1) \cdots (b_{k-1} - a_{k-1}) \, (b_{k+1} - a_{k+1}) \cdots (b_{l-1} - a_{l-1}) \, (b_{l+1} - a_{l+1}) \\
&\cdots (b_n - a_n) \int_{a_k + a_l}^{a_k + b_l} \left(\int_{a_l}^{a_l + a_k + b_l - x_k} 1 dx_l \right) dx_k.
\end{aligned}$$

Ahora, por el segundo teorema fundamental del cálculo integral (teorema 1.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{a_k + a_l}^{a_k + b_l} \left(\int_{a_l}^{a_l + a_k + b_l - x_k} 1 dx_l \right) dx_k &= \int_{a_k + a_l}^{a_k + b_l} (a_k + b_l - x_k) \, dx_k \\
&= (a_k + b_l) \, (b_l - a_l) - \frac{1}{2} \, (a_k + b_l)^2 + \frac{1}{2} \, (a_k + a_l)^2 \\
&= \frac{1}{2} \, (b_l - a_l)^2 .
\end{aligned}$$

De manera que el volumen del primer conjunto es

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(b_1-a_1\right)\cdots\left(b_{k-1}-a_{k-1}\right)\left(b_{k+1}-a_{k+1}\right)\cdots\left(b_{l-1}-a_{l-1}\right)\left(b_{l+1}-a_{l+1}\right)\\&\cdots\left(b_n-a_n\right)\left(b_l-a_l\right)^2.\end{aligned}$$

Realizando un análisis similar, puede verse que el volumen del tercer conjunto es el mismo que el del primero. El segundo conjunto es un rectángulo con volumen:

$$\begin{aligned}&\left(b_1-a_1\right)\cdots\left(b_{k-1}-a_{k-1}\right)\left(b_{k+1}-a_{k+1}\right)\cdots\left(b_{l-1}-a_{l-1}\right)\left(b_{l+1}-a_{l+1}\right)\\&\cdots\left(b_n-a_n\right)\left(a_l+b_k-a_k-b_l\right)\left(b_l-a_l\right).\end{aligned}$$

Sumando los tres volumenes anteriores obtenemos el volumen de $T_2(A)$, el cual es

$$\nu\left(T_2(A)\right)=\left(b_1-a_1\right)\cdots\left(b_n-a_n\right),$$

es decir, el volumen del rectángulo $[a_1b_1]\times\cdots[a_n,b_n]$. Así,

$$\nu\left(T_2(A)\right)=\left|\det T_2\right|\nu(A),$$

ya que $\det T_2=1$.

A las matrices definidas en i) y ii) se les conoce como matrices elementales. Supondremos ahora que A es un conjunto arbitrario con volumen y que T_i es una matriz elemental. En el caso en que T_i es del tipo definido en i), supondremos que $c\neq 0$; y así, en cualquier caso, $\det T_i\neq 0$.

Sea I^n un rectángulo cerrado con $I^n\supset A$. Dado $\epsilon>0$, consideremos una partición P de I^n en rectángulos componentes $R_1,\ldots,R_N$, tal que

$$U\left(P,1_A\right)-\nu(A)<\epsilon\left(2\left|\det T_i\right|\right)^{-1}\qquad\text{y}\qquad\nu(A)-L\left(P,1_A\right)<\epsilon\left(2\left|\det T_i\right|\right)^{-1},\tag{3.73}$$

donde 1_A es la **función indicadora** en A, es decir, la función que toma el valor 1 para $x\in A$ y el valor 0 para $x\notin A$.

Notemos que

$$L\left(P,1_A\right)=\sum_{R_i\subset A}\left|R_i\right|\qquad\text{y}\qquad U\left(P,1_A\right)=\sum_{R_i\cap A\neq\emptyset}\left|R_i\right|.$$

Luego, considerando los conjuntos

$$V_\epsilon=\bigcup_{R_i\subset A}R_i\qquad\text{y}\qquad W_\epsilon=\bigcup_{R_i\cap A\neq\emptyset}R_i,$$

obtenemos del resultado para rectángulos que

$$\nu\left(T_i(V_\epsilon)\right) = \left|\det T_i\right| L\left(P, 1_A\right) \qquad \text{y} \qquad \nu\left(T_i(W_\epsilon)\right) = \left|\det T_i\right| U\left(P, 1_A\right).$$

Por lo tanto de (3.73) se sigue que

$$\nu\left(T_i(W_\epsilon)\right) - \nu\left(T_i(V_\epsilon)\right) < \epsilon,$$

y así $T_i(A)$ tiene volumen y

$$\nu\left(T_i(A)\right) = \left|\det T_i\right| \nu(A).$$

Si $\det T_i = 0$, es decir, si T_i es una matriz del tipo definido en i) con $c = 0$, entonces $\nu\left(T_i\left(I^n\right)\right) = 0$ para cualquier rectángulo $I^n \subset \mathbb{R}^n$, de manera que $\nu\left(T_i(A)\right) = 0$ para cualquier conjunto A con volumen finito.

Finalmente, supongamos que T es un operador lineal arbitrario y que A es un conjunto con volumen. Como toda matriz es un producto de matrices elementales (véase O'Nan [23], p. 241), podemos escribir $T = T_1 T_2 \cdots T_k$, donde cada T_i es una matriz elemental, $i = 1, \ldots, k$. Luego, aplicando repetidamente el resultado obtenido para matrices elementales, nos da

$$\nu\left(T(A)\right) = \left|\det T_1\right| \left|\det T_2\right| \cdots \left|\det T_k\right| \nu(A) = \left|\det T\right| \nu(A),$$

donde hemos usado el hecho de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz (véase Hoffman y Kunze [16], p. 154). ■

Lema 3.73 *Si el teorema 3.71 es cierto para la función constante $f \equiv 1$, entonces es cierto para cualquier función f integrable sobre $\varphi(A)$.*

Demostración. Notemos primero que si el teorema 3.71 es cierto para $f \equiv 1$, entonces es cierto para cualquier función constante.

Supongamos ahora que f es una función integrable sobre $\varphi(A)$ y sea I^n un rectángulo cerrado tal que $I^n \supset \varphi(A)$. Sea P una partición de I^n en rectángulos componentes $R_1, \ldots, R_N$.

Definamos $m_{R_i}(f) = \inf_{x \in R_i} f(x)$, $i = 1, \ldots, N$; y denotemos por $m_{R_i}(f)$ a la función constante sobre R_i con valor constante $m_{R_i}(f)$. Entonces

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \sum_{i=1}^{N} m_{R_i}(f) \left|R_i\right| = \sum_{i=1}^{N} \int_{R_i} m_{R_i}(f) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\varphi^{-1}(R_i)} \left(m_{R_i}(f) \circ \varphi\right)(x) \left|J\varphi(x)\right| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\varphi^{-1}(R_i)} \left(f \circ \varphi\right)(x) \left|J\varphi(x)\right| dx = \int_{\varphi^{-1}(I^n)} \left(f \circ \varphi\right)(x) \left|J\varphi(x)\right| dx \\
&= \int_{A} \left(f \circ \varphi\right)(x) \left|J\varphi(x)\right| dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx \leq \int_A (f\circ\varphi)(x)\,|J\varphi(x)|\,dx.$$

Un argumento similar con $M_{R_i}(f) = \sup_{x\in R_i} f(x)$, $i = 1,\ldots,N$, demuestra que

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx \geq \int_A (f\circ\varphi)(x)\,|J\varphi(x)|\,dx,$$

de manera que

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx = \int_A (f\circ\varphi)(x)\,|J\varphi(x)|\,dx.$$

■

Lema 3.74 *El teorema 3.71 es cierto si φ es un operador lineal.*

Demostración. Tenemos del lema 3.72 que

$$\int_{\varphi(A)} 1dx = \int_A |\det\varphi|\,dx = \int_A |J\varphi(x)|\,dx.$$

La segunda igualdad se debe al hecho de que, en este caso, $D\varphi = \varphi$. Luego, por el lema 3.73,

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx = \int_A (f\circ\varphi)(x)\,|J\varphi(x)|\,dx.$$

■

Lema 3.75 *Si el teorema 3.71 es cierto para $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ y para $\psi : B \to \mathbb{R}^n$, donde $\varphi(A) \subset B$, entonces el teorema es cierto para $\psi\circ\varphi : A \to \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Usando la hipótesis de que el teorema 3.71 es cierto para φ y ψ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{(\psi\circ\varphi)(A)} f(x)dx &= \int_{\psi(\varphi(A))} f(x)dx = \int_{\varphi(A)} (f\circ\psi)(x)\,|J\psi(x)|\,dx \\
&= \int_A (f\circ\psi\circ\varphi)(x)\,(|J\psi|\circ\varphi)(x)\,|J\varphi(x)|\,dx \\
&= \int_A (f\circ(\psi\circ\varphi))(x)\,|J(\psi\circ\varphi)(x)|\,dx,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó la regla de la cadena (teorema 3.22). ■

Es conveniente considerar aquí la norma $|\cdot|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$|x|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad \text{para } \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta norma es equivalente a la norma euclidiana $|\cdot|$; de hecho (véase el ejemplo 3.33 en Pérez et al. [25]),

$$|x|_\infty \leq |x| \leq n|x|_\infty \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta norma tiene la conveniente propiedad de que en términos de ella, un cubo con centro en p y lados de longitud $2l$ se puede expresar como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |x-p|_\infty \leq l\}$.

Ahora, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el operador lineal con representación matricial (a_{ij}), definimos

$$|T|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{3.74}$$

es fácil ver (problema 1) que la función $|\cdot|_\infty$ definida en (3.74) es una norma en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$|Tx|_\infty \leq |T|_\infty |x|_\infty \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $C = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-p|_\infty \leq l\}$ es un cubo en el conjunto abierto A, entonces $\nu(C) = (2l)^n$ y, por el teorema del valor medio (teorema 3.27)

$$\varphi_i(x) - \varphi_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p + r_i(x)(x-p))(x_j - p_j), \quad \text{donde } 0 \leq r_i(x) \leq 1.$$

Obtenemos así que

$$|\varphi(x) - \varphi(p)|_\infty \leq l \, \text{máx}_{y\in C} |D\varphi(y)|_\infty;$$

por lo tanto

$$\varphi(C) \subset \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z - \varphi(p)|_\infty \leq l \, \text{máx}_{y\in C} |D\varphi(y)|_\infty \right\}.$$

De esta manera, si $\varphi(C)$ tiene volumen, entonces

$$\nu(\varphi(C)) \leq \text{máx}_{y\in C} |D\varphi(y)|_\infty^n \, \nu(C). \tag{3.75}$$

Para garantizar que $\varphi(C)$ tiene volumen, requerimos el siguiente resultado.

Lema 3.76 *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y C un conjunto con volumen tal que $\overline{C} \subset U$. Si $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ es una función inyectiva de clase C^1 con $J\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, entonces $\psi(C)$ tiene volumen.*

Demostración. Tenemos del corolario 3.69 que es suficiente demostrar que $\partial\psi(C)$ tiene volumen cero. Demostraremos primero que $\partial\psi(C) \subset \psi(\partial C)$. Consideremos pues $x \in \partial\psi(C)$. Para demostrar que $x \in \psi(\partial C)$ tomemos $y = \psi^{-1}(x)$. Debemos entonces demostrar que $y \in \partial C$.

Sea $V_\delta(y)$ una bola abierta de radio $\delta > 0$ centrada en y con $V_\delta(y) \subset U$. Como ψ^{-1} es continua, $\psi(V_\delta(y))$ es una vecindad abierta de x (véase el teorema 5.4 en Pérez et al. [25]). Así, debido a que $x \in \partial\psi(C)$,

$$\psi(V_\delta(y)) \cap \psi(C) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \psi(V_\delta(y)) \cap \psi(C)^c \neq \emptyset.$$

Luego, por ser ψ inyectiva (véase el problema 5 de la sección 1.2 en Pérez et al. [25]),

$$V_\delta(y) \cap C \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V_\delta(y) \cap C^c \neq \emptyset,$$

de manera que $y \in \partial C$. Aplicando este mismo argumento a ψ^{-1}, vemos que de hecho, $\partial\psi(C) = \psi(\partial C)$.

Para demostrar que $\psi(\partial C)$ tiene volumen cero, dado $\epsilon > 0$ consideremos rectángulos $R_1, \ldots, R_N$ con $\partial C \subset \bigcup_{i=1}^N R_i$ y $\sum_{i=1}^N \nu(R_i) < \epsilon$. La ecuación (3.75) muestra entonces que $\psi(\partial C)$ es cubierto por rectángulos de volumen total menor que $\left(\text{máx}_{x\in\bigcup_{i=1}^N R_i} |D\psi(x)|_\infty^n\right)\epsilon$. Por lo tanto $\psi(\partial C)$ tiene volumen cero. ∎

Demostración del teorema 3.71. Sean T un operador lineal y S un conjunto con volumen. Aplicando el lema 3.74 para la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x \in T^{-1}(S) \\ 0, & \text{si } \ x \notin T^{-1}(S), \end{cases}$$

se obtiene que

$$\nu\left(T^{-1}(S)\right) = \left|\det\left(T^{-1}\right)\right| \nu(S).$$

Notemos del lema 3.76 que $S = \varphi(C)$ tiene volumen para cualquier cubo cerrado C en A. Así, de (3.75), el lema 3.75 y el uso de la regla de la cadena (teorema 3.22) obtenemos

$$\left|\det\left(T^{-1}\right)\right| \nu(\varphi(C)) = \nu\left(T^{-1}\varphi(C)\right) \leq \left[\underset{y\in C}{\text{máx}} \left|T^{-1}D\varphi(y)\right|\right]^n \nu(C),$$

o equivalentemente

$$\nu(\varphi(C)) \leq |\det T| \left[\underset{y\in C}{\text{máx}} \left|T^{-1}D\varphi(y)\right|\right]^n \nu(C). \tag{3.76}$$

Ahora, dado $\delta > 0$, dividamos el cubo C en cubos disjuntos $C_1, \ldots, C_M$ con lados de longitud menor que δ y con centros en $x_1, \ldots, x_M$, respectivamente. Aplicando (3.76) a cada C_i con $T = D\varphi(x_i)$ obtenemos

$$\nu(\varphi(C)) \leq \sum_{i=1}^{M} |J\varphi(x_i)| \left\{ \max_{y \in C_i} \left| [D\varphi(x_i)]^{-1} D\varphi(y) \right| \right\}^n \nu(C_i).$$

Como $D\varphi(x)$ es una función (con valores matriciales) continua, $[D\varphi(z)]^{-1} D\varphi(y)$ tiende a la matriz identidad cuando $z \to y$, y por lo tanto

$$\left\{ \max_{y \in C_i} \left| [D\varphi(x_i)]^{-1} D\varphi(y) \right| \right\}^n \leq 1 + \eta(\delta),$$

donde $\eta(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. Esto nos da

$$\nu(\varphi(C)) \leq [1 + \eta(\delta)] \sum_{i=1}^{M} |J\varphi(x_i)| \, \nu(C_i);$$

cuando $\delta \to 0$ la suma de la derecha tiende a $\int_C |J\varphi(x)| \, dx$ (véase el problema 4 de la sección 3.8), y, en consecuencia

$$\nu(\varphi(C)) \leq \int_C |J\varphi(x)| \, dx. \tag{3.77}$$

Examinando detalladamente la demostración del lema 3.73 y recordando que $f(x) = 0$ para $x \in B^c$, se sigue de (3.77) que

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx \leq \int_A (f \circ \varphi)(x) \, |J\varphi(x)| \, dx. \tag{3.78}$$

Aplicando (3.78) a la función $(f \circ \varphi) |J\varphi|$ en lugar de f, φ^{-1} en lugar de φ y $\varphi(A)$ en lugar de A, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_A (f \circ \varphi)(x) \, |J\varphi(x)| \, dx &\leq \int_{\varphi(A)} \left(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}\right)(x) \left| \left(J\varphi \circ \varphi^{-1}\right)(x) \right| \left| J\varphi^{-1}(x) \right| dx \\ &= \int_{\varphi(A)} f(x) dx, \end{aligned} \tag{3.79}$$

donde en la igualdad se usó el teorema de la función inversa (teorema 3.45).

El resultado deseado se sigue de (3.78) y (3.79). ∎

Veremos ahora tres casos particulares, muy socorridos, de la fórmula del cambio de variables en la evaluación de integrales, usando:
i) coordenadas polares,
ii) coordenadas esféricas, y
iii) coordenadas cilíndricas.

En el caso i), la función que cambia de **coordenadas polares** a las coordenadas rectangulares es

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,, \quad r>0 \quad \text{y} \quad 0<\theta<2\pi.$$

En este caso, la imagen bajo φ del conjunto $U = \{(r,\theta) : r>0, 0<\theta<2\pi\}$ es

$$\varphi(U) = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}\,.$$

Aunque la imagen de esta función excluye al eje x no negativo, este conjunto es de medida cero, ya que es un subconjunto de un conjunto de medida cero (véase el problema 3 de la sección 3.9), por lo que no afecta al valor de una integral (véase el problema 8 de la sección 3.9).

Notemos que la función φ es inyectiva y de clase C^1 con

$$J\varphi(r,\theta) = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r.$$

Por lo tanto $J\varphi(r,\theta) \neq 0$ para todo $(r,\theta) \in U$ y así, la fórmula del cambio de variables puede ser usada; y en este caso tiene la forma:

$$\int_{\varphi(A)} f(x,y)dxdy = \int_A f\left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta\right) r dr d\theta, \tag{3.80}$$

para todo conjunto abierto y acotado $A \subset U$, con volumen, tal que $|J\varphi|$ y $\frac{1}{|J\varphi|}$ son acotadas sobre A, $\varphi(A)$ tiene también volumen y $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ es acotada y Riemann integrable sobre $\varphi(A)$.

En el caso ii), la función que cambia de **coordenadas esféricas** a las coordenadas rectangulares es (véase la figura 3.3)

$$\varphi(r,\phi,\theta) = (r\operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi)\,, \quad r>0, \quad 0<\phi<\pi \quad \text{y} \quad 0<\theta<2\pi.$$

En este caso, la imagen bajo φ del conjunto $U = \{(r,\phi,\theta) : r>0, 0<\phi<\pi, 0<\theta<2\pi\}$ es

$$\varphi(U) = \mathbb{R}^3 - \{(x,0,z) : x \geq 0\}\,.$$

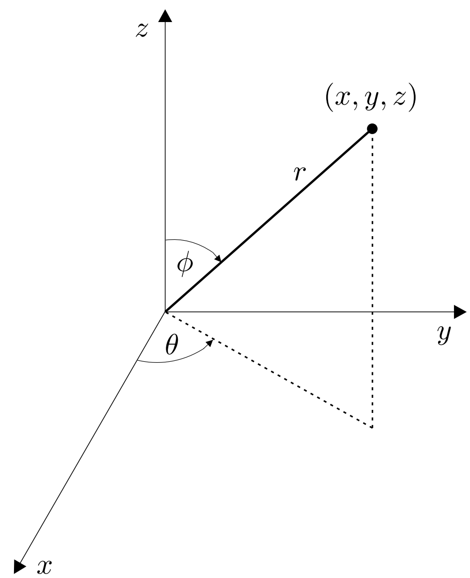

Figura 3.3: Cambio de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares.

Aunque la imagen de esta función excluye a la parte del plano xz con $x \geq 0$, este conjunto es de medida cero, ya que es un subconjunto de un conjunto de medida cero (véase el problema 4 de la sección 3.9), por lo que no afecta al valor de una integral (véase el problema 8 de la sección 3.9).

Notemos que la función φ es inyectiva y de clase C^1 con

$$J\varphi(r,\phi,\theta) = \det \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \end{bmatrix} = r^2\operatorname{sen}\phi.$$

Por lo tanto $J\varphi(r,\phi,\theta) \neq 0$ para todo $(r,\phi,\theta) \in U$ y así, la fórmula del cambio de variables puede ser usada; y en este caso tiene la forma:

$$\int_{\varphi(A)} f(x,y,z)dxdydz = \int_A f\left(r\operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi\right) r^2\operatorname{sen}\phi drd\phi d\theta, \qquad (3.81)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones del teorema 3.71. La fórmula (3.81) es de utilidad para evaluar integrales triples cuando hay simetría esférica (simetría alrededor de un punto).

Finalmente, en el caso iii), la función que cambia de **coordenadas cilíndricas** a las rectangulares es (véase la figura 3.4)

$$\varphi(r,\theta,z) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z\right), \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad \text{y} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Claramente φ es una función inyectiva y de clase C^1 sobre

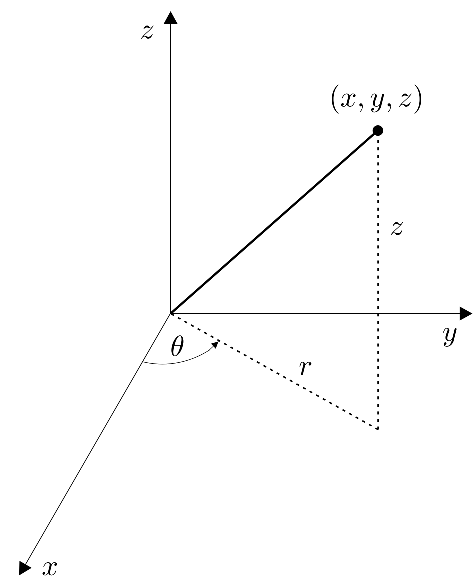

Figura 3.4: Cambio de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$ con

$$J\varphi(r, \theta, z) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r,$$

de manera que la fórmula del cambio de variables para este caso nos da:

$$\int_{\varphi(A)} f(x, y, z) dxdydz = \int_A f\left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z\right) r dr d\theta dz, \tag{3.82}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones del teorema 3.71. La fórmula (3.82) es de utilidad para evaluar integrales triples cuando hay simetría cilíndrica (simetría alrededor de una recta).

En los siguientes ejemplos, usando las fórmulas (3.81) y (3.82) obtendremos las fórmulas para el volumen de una esfera sólida y de un cilindro sólido.

Ejemplo 3.77 *Sea B la bola abierta en $\mathbb{R}^3$ con centro en el origen y de radio $R > 0$. Notemos que*

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\right\}$$

es la imagen bajo $\varphi(r,\phi,\theta) = (r \operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi)$ *de*

$$A = \{(r,\phi,\theta) : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$$

(excepto por los puntos de B *sobre el plano* xz *con* $x \geq 0$*). Así, de (3.81) obtenemos (con* $f \equiv 1$*)*

$$\begin{aligned}
\int_B dxdydz &= \int_A r^2 \operatorname{sen}\phi drd\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R r^2\operatorname{sen}\phi drd\phi d\theta \\
&= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \frac{R^3}{3}\left[-\left(\cos\pi - \cos 0\right)\right]\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.78 *Sea* C *el cilindro sólido de radio* R *y altura* H *centrado en el origen. Como la frontera de* C *tiene medida cero, lo mismo que un conjunto con un único punto, podemos suponer que*

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < R^2, -\frac{H}{2} < z < \frac{H}{2}\right\},$$

el cual es la imagen bajo $\varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ *de*

$$A = \left\{(r,\theta,z) : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi, -\frac{H}{2} < z < \frac{H}{2}\right\}$$

(excepto por los puntos de C *sobre el eje* x *no negativo). Así, de (3.82) obtenemos (con* $f \equiv 1$*)*

$$\begin{aligned}
\int_C dxdydz &= \int_A rdrd\theta dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R rdrd\theta dz \\
&= \frac{R^2}{2}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_0^{2\pi} d\theta dz = \pi R^2 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \\
&= \pi H R^2.
\end{aligned}$$

Problemas

1. Demuestre que la función $|\cdot|_\infty : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por (3.74) es una norma que cumple
$$|Tx|_\infty \leq |T|_\infty |x|_\infty \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Sea B la región del plano limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 9$. Evalue la integral
$$\int_B \left(x^2 - y^2\right) dxdy.$$

3. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ el anillo centrado en el origen de radio interior 1 y radio exterior 2. Evalue la integral
$$\int_B e^{x^2+y^2} dxdy.$$

4. Sea B el sólido limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Evalue la integral
$$\int_B \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz.$$

5. Evalue la integral
$$\int_{-2}^{2} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz.$$

Capítulo 4

Integrales impropias de Riemann

4.1. Tipos de integrales impropias de Riemann

Recordemos que la integral de Riemann (para funciones de una variable) se define para funciones con valores reales, definidas y acotadas, sobre intervalos compactos. La teoría de la integración impropia de Riemann considera situaciones en donde la función no es acotada sobre el intervalo de integración, el intervalo de integración no es acotado o ambas cosas.

Definición 4.1 *(Integrales impropias de Riemann del primer tipo)*
*i) Dado $a \in \mathbb{R}$, sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[a, c]$ para todo $c > a$. La **integral impropia de Riemann** de f sobre $[a, \infty)$ es definida como*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)dx$$

*cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es **convergente**. En caso contrario diremos que la integral es **divergente**.*
*ii) Dado $b \in \mathbb{R}$, sea $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[c, b]$ para todo $c < b$. La **integral impropia de Riemann** de f sobre $(-\infty, b]$ es definida como*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

*cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ es **convergente**. En caso contrario diremos que la integral es **divergente**.*
*iii) Dado $c \in \mathbb{R}$, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[a, c]$ para todo $a < c$ y $f \in \mathcal{R}[c, b]$ para todo $b > c$. La **integral impropia de Riemann** de f sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ es definida como*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)dx$$

cuando los límites de la derecha existan en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****. En cualesquiera de los casos i), ii) o iii) diremos que f es una* ***integral impropia de Riemann del primer tipo****.*

Observación 4.2 *i) La convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ requiere la convergencia por separado de $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y de $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$, la cual es una condición más fuerte que la existencia del límite $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$. Consideremos por ejemplo, la función identidad, $f(x) = x$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En este caso $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, pero $\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx$ y $\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} f(x)dx$ divergen a ∞.*
ii) La convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es independiente de c. En efecto, supongamos que las integrales $\int_{-\infty}^{d} f(x)dx$ y $\int_{d}^{\infty} f(x)dx$ son convergentes para $d < c$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx &+ \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[\int_{a}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{c} f(x)dx\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\int_{d}^{b} f(x)dx - \int_{d}^{c} f(x)dx\right] \\
&= \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{d} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{d}^{b} f(x)dx.
\end{aligned}$$

El caso en que $c < d$ es análogo.

Ejemplo 4.3 *Sea $p \neq 1$. Entonces*

$$\int_{1}^{c} \frac{1}{x^p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{1}^{c} = \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

y para $p = 1$,

$$\int_{1}^{c} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{1}^{c} = \ln c - \ln 1 = \ln c.$$

Como

$$\lim_{c\to\infty}\left[\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1} \qquad \text{para} \;\; p > 1,$$

$$\lim_{c\to\infty}\left[\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty \qquad \text{para} \;\; p < 1 \qquad y \qquad \lim_{c\to\infty}\ln c = \infty \qquad \text{para} \;\; p = 1,$$

tenemos que la integral impropia de Riemann del primer tipo $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si y sólo si $p > 1$; en cuyo caso $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$.

Definición 4.4 *(Integrales impropias de Riemann del segundo tipo)*
i) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$, pero que $f(a^+) \in \{-\infty, +\infty\}$. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)dx$$

cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****.*
ii) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[a, c]$ para todo $c \in (a, b)$, pero que $f(b^-) \in \{-\infty, +\infty\}$. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx$$

cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****.*
iii) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$, sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathcal{R}[d, c]$ para todo $d > a$ y $f \in \mathcal{R}[c, e]$ para todo $e < b$, pero que $f(a^+), f(b^-) \in \{-\infty, +\infty\}$. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{d \downarrow a} \int_d^c f(x)dx + \lim_{e \uparrow b} \int_c^e f(x)dx$$

cuando los límites de la derecha existan en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****.*
iv) Sea $c \in (a, b)$ tal que $f \in \mathcal{R}[a, d]$ para todo $d \in (a, c)$ y $f \in \mathcal{R}[e, b]$ para todo $e \in (c, b)$, pero que $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando x tiende a c. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{d \uparrow c} \int_a^d f(x)dx + \lim_{e \downarrow c} \int_e^b f(x)dx$$

cuando los límites de la derecha existan en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****.*
v) Sea $c \in (a, b)$ tal que f es Riemann integrable en $[c, b]$ y también en todo subintervalo cerrado de $[a, c)$, pero $f(c^-) \in \{-\infty, +\infty\}$. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{d \uparrow c} \int_a^d f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****.*
vi) Finalmente, sea $c \in (a,b)$ tal que f es Riemann integrable en $[a,c]$ y también en todo subintervalo cerrado de $(c,b]$, pero $f(c^+) \in \{-\infty, +\infty\}$. La ***integral impropia de Riemann*** *de f sobre $[a,b]$ es definida como*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \lim_{e \downarrow c} \int_e^b f(x)dx$$

cuando el límite de la derecha exista en $\mathbb{R}$, en cuyo caso diremos que $\int_a^b f(x)dx$ es ***convergente****. En caso contrario diremos que la integral es* ***divergente****. En cualesquiera de los casos i)-vi) diremos que f es una* ***integral impropia de Riemann del segundo tipo****.*

Observación 4.5 *En la definición 4.4 iii), la convergencia de $\int_a^b f(x)dx$ es independiente de c, es decir, si $c' \in (a,b)$ es tal que $\int_a^{c'} f(x)dx$ y $\int_{c'}^b f(x)dx$ convergen, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^b f(x)dx.$$

La demostración es similar a la dada en la observación 4.2 ii).

Ejemplo 4.6 *Sea $p > 0$. Entonces para $p \neq 1$,*

$$\int_c^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{1-p}$$

y para $p = 1$,

$$\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \ln x\big|_c^1 = \ln 1 - \ln c = -\ln c.$$

Como

$$\lim_{c\downarrow 0}\left[\frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{1-p}\right] = \frac{1}{1-p} \qquad \text{para} \quad 0 < p < 1,$$

$$\lim_{c\downarrow 0}\left[\frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{1-p}\right] = \infty \qquad \text{para} \quad p > 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{c\downarrow 0}(-\ln c) = \infty \qquad \text{para} \quad p = 1,$$

tenemos que la integral impropia de Riemann del segundo tipo $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si y sólo si $0 < p < 1$; en cuyo caso $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}$.

A las "combinaciones" de integrales impropias de Riemann del primer y segundo tipo, les llamaremos **integrales impropias de Riemann del tercer tipo**. Así, por ejemplo, si para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene que $f(a^+)$ es $+\infty$ o $-\infty$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y $f \in \mathcal{R}[b, d]$ para todo $d > b$, entonces la **integral impropia de Riemann del tercer tipo** es definida como

$$\int_a^\infty f(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

cuando las integrales impropias del primer y segundo tipo de la derecha son convergentes, en cuyo caso diremos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es **convergente**. En caso contrario diremos que la integral es **divergente**.

Problemas

1. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias del primer tipo.
   a) $\int_0^\infty \cos x dx$.
   b) $\int_0^\infty e^{-x} dx$.
   c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx$.
   d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx$.

2. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias del segundo tipo.
   a) $\int_0^1 \ln x dx$.
   b) $\int_0^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.
   c) $\int_{-2}^3 (x + 2)^{-\frac{1}{3}} dx$.
   d) $\int_2^4 \left[x^3 - (x - 2)^{-2}\right] dx$.

4.2. Criterios de convergencia para integrales impropias del primer tipo

Notando la analogía entre la convergencia o divergencia de una integral impropia de Riemann con la convergencia o divergencia de una serie, es de esperarse, como lo veremos en esta sección, la existencia de criterios de convergencia para integrales impropias análogas a los criterios de convergencia para series. Con el propósito de simplificar nuestra exposición, formularemos los resultados únicamente para integrales impropias de la forma $\int_a^\infty f(x)dx$,

$a \in \mathbb{R}$; aunque, obviamente, se tienen resultados análogos para las demás integrales impropias del primer tipo.

El más sencillo de los criterios de convergencia se refiere al caso de integrandos positivos.

Proposición 4.7 *Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ para todo $b > a$. Entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx \leq M \qquad \textit{para todo } b > a. \tag{4.1}$$

Demostración. Notemos que $\int_a^b f(x)dx$ es una función no decreciente de b. Luego

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \sup_{b>a} \int_a^b f(x)dx \in [0, \infty)$$

si y sólo si existe $M > 0$ tal que (4.1) se cumple. ∎

El siguiente criterio de convergencia se puede demostrar mediante una aplicación de la proposición 4.7, por lo que los detalles de su prueba se dejan como ejercicio al lector.

Proposición 4.8 *(Criterio de comparación para integrales impropias del primer tipo) Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, con g no negativa, tales que $|f|, g \in \mathcal{R}[a, c]$ para todo $c > a$. Si existe $B \geq a$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \geq B$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty |f(x)|dx$ es convergente.*

Proposición 4.9 *(Criterio del cociente para integrales impropias del primer tipo) Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f \geq 0$ y $g > 0$. Si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \qquad \textit{donde } 0 < c < \infty,$$

entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente si y sólo si $\int_a^\infty g(x)dx$ lo es.

Demostración. Supongamos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente. Por hipótesis, para $\epsilon = \frac{c}{2}$, existe $B \geq a$ tal que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \frac{c}{2} \qquad \text{para todo } x \geq B,$$

o equivalentemente

$$\frac{c}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3c}{2} \qquad \text{para todo } x \geq B. \tag{4.2}$$

De esta manera, $g(x) < \left(\frac{2}{c}\right) f(x)$ para todo $x \geq B$, y así, por la proposición 4.8, se sigue que $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente.

Supongamos ahora que $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente. De (4.2) obtenemos que

$$f(x) < \left(\frac{3c}{2}\right) g(x) \qquad \text{para todo } x \geq B,$$

y entonces, nuevamente por la proposición 4.8, obtenemos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente. ∎

Ejemplo 4.10 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^p}dx, \qquad \textit{donde } p \in \mathbb{R}.$$

Sean $f(x) = \frac{x}{(1+x)^p}$ *y* $g(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ *para* $x > 0$, *entonces*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^p}{(1+x)^p} \to 1 \qquad \textit{cuando } x \to \infty.$$

Como

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^{p-1}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{p-1}}dx,$$

se sigue del ejemplo 4.3 y la proposición 4.42 que $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^p}dx$ *converge si y sólo si* $p > 2$.

Al igual que para series, se tiene la siguiente definición.

Definición 4.11 *Sea* $\int_a^\infty f(x)dx$ *una integral impropia.*
i) Si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ *es convergente, diremos que la integral impropia* $\int_a^\infty f(x)dx$ *es* ***absolutamente convergente****.*
ii) Si $\int_a^\infty f(x)dx$ *es convergente, pero* $\int_a^\infty |f(x)|dx = \infty$, *diremos que* $\int_a^\infty f(x)dx$ *es* ***condicionalmente convergente****.*

En el caso i) se dice también que f es **absolutamente integrable** sobre $[a, \infty)$.

Ejemplo 4.12 *Sea* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 1_{[n-1,n)}(x).$$

Notemos que

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}. \quad (4.3)$$

Así, si $b > 0$, *tomando* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n - 1 \leq b \leq n$ *obtenemos que*

$$\int_0^{n-1} f(x)dx \leq \int_0^b f(x)dx \leq \int_0^n f(x)dx \qquad \text{si } n \text{ es impar}, \quad (4.4)$$

y

$$\int_0^n f(x)dx \leq \int_0^b f(x)dx \leq \int_0^{n-1} f(x)dx \qquad \text{si } n \text{ es par}. \quad (4.5)$$

Por el criterio de las series alternantes (véase la proposición 2.76 en Pérez et al. [25]), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *converge, digamos a* S. *Mostraremos que* $\int_0^\infty f(x)dx = S$.

Sea $\epsilon > 0$, *de (4.3) observamos que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left| \int_0^n f(x)dx - S \right| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N - 1.$$

Dado $b \geq N$, *sea* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n - 1 \leq b \leq n$. *Entonces de (4.4) y (4.5), se sigue que*

$$\left| \int_0^b f(x)dx - S \right| \leq \text{máx} \left\{ \left| \int_0^{n-1} f(x)dx - S \right|, \left| \int_0^n f(x)dx - S \right| \right\} < \epsilon.$$

Por lo tanto $\int_0^\infty f(x)dx$ *es convergente. Sin embargo, como*

$$\int_0^n |f(x)|dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

y la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge a* ∞, *entonces*

$$\int_0^n |f(x)|dx = \infty.$$

Tenemos así que $\int_0^\infty f(x)dx$ *es condicionalmente convergente.*

Para demostrar que la convergencia absoluta de una integral impropia implica su convergencia, requerimos el siguiente resultado.

Lema 4.13 *Si* $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$*, entonces* $\lim_{x\to\infty} F(x)$ *existe si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $B > a$ *tal que*

$$|F(x) - F(y)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x, y \geq B.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe, digamos $\lim_{x\to\infty} F(x) = S$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $B > a$ tal que

$$|F(x) - S| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo } x \geq B.$$

Luego,

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - S| + |F(y) - S| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{para todo } x, y \geq B.$$

Para el recíproco, consideremos una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$ con $\lim x_n = \infty$. Entonces, tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq B$ para todo $n \geq N$, obtenemos

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \epsilon \qquad \text{para todo } m, n \geq N,$$

y así, $\{F(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto converge; digamos a $c \in \mathbb{R}$. Como esto es válido para cualquier sucesión en $\mathbb{R}$ que diverge a ∞, se sigue que $\lim_{x\to\infty} F(x) = c$. ■

Proposición 4.14 *Si la integral impropia* $\int_a^\infty f(x)dx$ *es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, se tiene por el lema 4.13 que existe $B > a$ tal que

$$\left| \int_a^x |f(t)|dt - \int_a^y |f(t)|dt \right| < \epsilon \qquad \text{para todo } x, y \geq B.$$

Entonces

$$\left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)|dt \right| < \epsilon \qquad \text{para todo } x, y \geq B.$$

Así, el resultado se sigue aplicando nuevamente el lema 4.13. ■

Finalizaremos esta sección con un criterio que relaciona la convergencia de una serie de números reales no negativos con la convergencia de una integral impropia del primer tipo.

Proposición 4.15 *(Criterio de la integral) Sea* f *una función no negativa y decreciente en* $[1, \infty)$*. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *converge si y sólo si la integral impropia* $\int_1^\infty f(x)dx$ *converge.*

Demostración. Como f es monótona decreciente, se sigue del teorema 1.9 que $f \in \mathcal{R}[1, b]$ para cualquier $b > 1$. También, claramente

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1), \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Por lo tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Como f es no negativa, esto demuestra lo deseado. ■

Problemas

1. Demuestre la proposición 4.8.

2. Demuestre lo siguiente.
   a) Si en la proposición 4.42, $c = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^\infty g(x)dx$ implica la de $\int_a^\infty f(x)dx$. En este caso, mediante un contraejemplo, demuestre que el recíproco no es válido.
   b) Si en la proposición 4.42, $c = \infty$, entonces la divergencia de $\int_a^\infty g(x)dx$ implica la divergencia de $\int_a^\infty f(x)dx$.

3. Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o no.
   a) $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.
   b) $\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$.
   c) $\int_2^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2-3}dx$.
   d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+2}dx$.

4. Determine el valor de α para el que la integral impropia $\int_2^\infty \left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$ es convergente y calcule su valor.

5. Determine los números naturales n para los que la integral $I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$ es convergente. Determine el límite de la sucesión $J_n = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$ cuando $n \to \infty$ y úselo para obtener el límite de I_n.

6. Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es absolutamente convergente, demuestre que

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

7. Demuestre que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx$ es absolutamente convergente para $p > 1$ y condicionalmente convergente para $0 < p \leq 1$.

4.3. Criterios de convergencia para integrales impropias del segundo tipo

Al igual que en la sección anterior, con el propósito de simplificar nuestra exposición, formularemos los resultados únicamente para integrales impropias del segundo tipo de la forma $\int_a^b f(x)dx$, $-\infty < a < b < \infty$, donde $f(b^-)$ es $+\infty$ o $-\infty$ y $f \in \mathcal{R}[a,c]$ para todo $c \in (a,b)$; aunque, obviamente, se tienen resultados análogos para las demás integrales impropias del segundo tipo.

Las tres proposiciones siguientes son los respectivos análogos de las proposiciones 4.7, 4.8 y 4.42 para el caso de integrales impropias de Riemann del segundo tipo. A manera de ilustración daremos la demostración de la tercera (criterio del cociente para integrales impropias del segundo tipo).

Proposición 4.16 *Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $f \in \mathcal{R}[a,c]$ para todo $c \in (a,b)$ y $f(b^-) = \infty$. Entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\int_a^c f(x)dx \leq M \qquad \textit{para todo } a < c < b.$$

Proposición 4.17 *(Criterio de comparación para integrales impropias del segundo tipo) Sean $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, con g no negativa, tales que $|f|, g \in \mathcal{R}[a,c]$ para todo $c \in (a,b)$ y $|f(x)|, g(x) \to \infty$ cuando $x \uparrow b$. Si existe $B \in [a,b)$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in [B,b)$ y $\int_a^b g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente.*

Proposición 4.18 *(Criterio del cociente para integrales impropias del segundo tipo) Sean $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, con $f \geq 0$ y $g > 0$, tales que $f, g \in \mathcal{R}[a,c]$ para todo $c \in (a,b)$ y $f(x), g(x) \to \infty$ cuando $x \uparrow b$. Si*

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \qquad \textit{donde } 0 < c < \infty,$$

entonces $\int_a^b f(x)dx$ es convergente si y sólo si $\int_a^b g(x)dx$ lo es.

Demostración. Supongamos que $\int_a^b f(x)dx$ es convergente. Por hipótesis, para $\epsilon = \frac{c}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \frac{c}{2} \qquad \text{para todo } x \in (b-\delta, b),$$

o equivalentemente

$$\frac{c}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3c}{2} \qquad \text{para todo } x \in (b-\delta, b). \tag{4.6}$$

De esta manera, $g(x) < \left(\frac{2}{c}\right) f(x)$ para todo $x \in (b-\delta, b)$, y así, por la proposición 4.17 (con $B = b - \delta$), se sigue que $\int_a^b g(x)dx$ es convergente.

Supongamos ahora que $\int_a^b g(x)dx$ es convergente. De (4.6) obtenemos que

$$f(x) < \left(\frac{3c}{2}\right) g(x) \qquad \text{para todo } x \in (b-\delta, b),$$

y entonces, nuevamente por la proposición 4.17, obtenemos que $\int_a^b f(x)dx$ es convergente. ■

Ejemplo 4.19 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Como $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, *tenemos que*

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{1}{(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Luego, debido a que la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx$ *es convergente (véase el ejemplo 4.6), se sigue de la proposición 4.18 que* $\int_0^1 \frac{1}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}} dx$ *es convergente.*

Los conceptos de convergencia absoluta y convergencia condicional para integrales impropias del segundo tipo es análoga a la de integrales impropias del primer tipo (sólo debe cambiarse ∞ por b); y al igual que en ese caso, si una integral impropia del segundo tipo es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Problemas

1. Demuestre lo siguiente.

   a) Si en la proposición 4.18, $c = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^b g(x)dx$ implica la de $\int_a^b f(x)dx$.

   b) Si en la proposición 4.18, $c = \infty$, entonces la divergencia de $\int_a^b g(x)dx$ implica la divergencia de $\int_a^b f(x)dx$.

2. Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o no.

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}dx$.

   b) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

   c) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$.

   d) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$.

3. Determine los valores de $\alpha, \beta > 0$ para los cuales la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta}dx$ es convergente.

4. Demuestre que

$$\lim_{x\downarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = 1.$$

   ¿Es la integral impropia $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}dx$ convergente o divergente?

4.4. Ejemplos de convergencia para integrales impropias del tercer tipo

Recordemos que una integral impropia del tercer tipo se puede descomponer en una suma de integrales impropias del primer tipo e integrales impropias del segundo tipo. De esta manera, la integral impropia converge, si cada uno de los sumandos es una integral impropia convergente; y diverge, si al menos uno de los sumandos es una integral impropia divergente. En estos casos, entonces, se hace uso de los criterios de convergencia tanto de integrales impropias del primer tipo como del segundo tipo.

Ejemplo 4.20 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty f(x)dx, \qquad \textit{donde} \;\; f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad x > 0.$$

Como $f(0^+) = \infty$, $f \in \mathcal{R}[c, 1]$ para todo $c > 0$ y $f \in \mathcal{R}[1, d]$ para todo $d > 1$, tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Ahora, como $0 \le \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} \le \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ para todo $0 < x \le 1$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ es convergente (véase el ejemplo 4.6), se sigue del criterio de comparación para integrales impropias del segundo tipo (proposición 4.17) que $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ es convergente. También, debido a que $0 \le \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} \le e^{-x}$ para todo $x \ge 1$ y $\int_1^\infty e^{-x} dx$ es convergente (véase el problema 1 b) de la sección 4.1), se sigue del criterio de comparación para integrales impropias del primer tipo (proposición 4.8) que $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ es convergente. Por lo tanto la integral impropia del tercer tipo $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ es convergente.

Ejemplo 4.21 *Sean $p, q > 0$. Consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q} dx.$$

Análogamente al ejemplo 4.20, obtenemos aquí que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p + x^q} dx.$$

Notemos que para $p = q$, la convergencia de la integral impropia del segundo tipo $\int_0^1 \frac{1}{2x^p}$ excluye la del primer tipo $\int_1^\infty \frac{1}{2x^p} dx$ y viceversa (véase los ejemplos 4.3 y 4.6).

Supongamos ahora que $p < q$. Como $x^p + x^q = x^p(1 + x^{q-p})$, tenemos que

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^p}{x^p + x^q} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1.$$

Luego, debido a que la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge si y sólo si $0 < p < 1$, se sigue de la proposición 4.18 que $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx$ converge para $0 < p < 1$.

Ahora, debido a que $x^p + x^q = x^q(1 + x^{p-q})$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^q}{x^p + x^q} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + x^{p-q}} = 1.$$

Como la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^q} dx$ converge si y sólo si $q > 1$, se sigue de la proposición 4.42 que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p + x^q} dx$ converge para $q > 1$.

Notado la simetría en p y q del integrando, concluimos que la integral impropia $\int_0^\infty \frac{1}{x^p+x^q}dx$ *converge en cualesquiera de las siguientes dos situaciones:*

$$0 < p < 1 \quad y \quad q > 1 \qquad ó \qquad p > 1 \quad y \quad 0 < q < 1;$$

y diverge en cualquier otro caso.

Ejemplo 4.22 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx. \tag{4.7}$$

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx = &\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 - x} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 - x} dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - x} dx \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2 - x} dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2 - x} dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para que la integral impropia del tercer tipo (4.7) sea convergente, cada una de las integrales impropias del primer tipo, segundo tipo, segundo tipo, segundo tipo, segundo tipo y tercer tipo, respectivamente, de la parte derecha de (4.8) deben ser convergentes. Sin embargo, como $x^2 - x = x(x-1)$,

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x - 1} = -1$$

y $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$ *es divergente (véase el ejemplo 4.6), se sigue de la proposición 4.18 que* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - x} dx$ *es divergente. Por lo tanto, la integral impropia del tercer tipo (4.7) es divergente.*

Ejemplo 4.23 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \tag{4.9}$$

Aparentemente, el integrando muestra una singularidad en $x = 0$*; sin embargo, por la regla de l'Hôpital, tenemos que*

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \cos x = 1,$$

de manera que para $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x > 0$, *tenemos que* $f(0^+) = 1$, *y así, la integral (4.9) es, en realidad, una integral impropia del primer tipo.*

Definiendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \;\; x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & si \;\; x > 0, \end{cases}$$

tenemos que $f \in \mathcal{R}[0,1]$. *Luego*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

De esta manera, para determinar la convergencia de la integral (4.9), basta con demostrar que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ *es convergente.*

Usando integración por partes, puede verse que para todo $c > 1$ *se cumple*

$$\int_1^c \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\frac{\cos c}{c} + \cos 1 - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Por lo tanto

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{4.10}$$

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ *es convergente (véase el ejemplo 4.3) y* $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ *para todo* $x \geq 1$, *se sigue por la proposición 4.8 que* $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ *es convergente (absolutamente) y así, de (4.10), obtenemos que* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ *es convergente.*

Problemas

1. Demuestre que la integral impropia del ejemplo 4.23 no es absolutamente convergente.

2. Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o no.
   a) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2x^5 + x^2}} dx$.
   b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$.
   c) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

3. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral impropia $\int_0^\infty x^a e^{-x} dx$ es convergente y los valores para los cuales es divergente.

4.5. Funciones definidas por integrales

En esta sección analizaremos algunas propiedades de funciones que son definidas por medio de integrales ordinarias de Riemann y funciones que son definidas por integrales impropias de Riemann; y aplicaremos tales propiedades para obtener el límite de algunas integrales impropias de Riemann convergentes.

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Claramente, si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(\cdot, t)$ es una función continua en $[a, b]$ para cada $t \in [c, d]$ fijo; y también $f(x, \cdot)$ es continua en $[c, d]$ para cada $x \in [a, b]$ fijo. De esta manera, $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}[c, d]$ para cada $x \in [a, b]$. Podemos así, definir

$$I(x) = \int_c^d f(x, t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{4.11}$$

La demostración del siguiente resultado es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 4.24 *La función $I : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida en (4.11) es continua.*

Observación 4.25 *Por el corolario 3.59, se sigue que*

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_c^d dt \int_\alpha^\beta f(x, t)dx$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \leq \beta$.

El siguiente teorema es un caso particular del teorema 3.19 (véase la observación 3.20 y tómese $F(t) = t$ para todo $t \in [c, d]$).

Teorema 4.26 *Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua en $[a, b] \times [c, d]$, entonces I es diferenciable en $[a, b]$ e*

$$I'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Ejemplo 4.27 *Dado $b > 0$, consideremos la función*

$$I(x) = \int_0^b \frac{1}{x + t^2}dt, \qquad x > 0.$$

Del teorema 4.26 se sigue que

$$I'(x) = -\int_0^b \frac{1}{(x + t^2)^2}dt \qquad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Luego

$$\int_0^b \frac{1}{(x+t^2)^2}dt = -I'(x) \qquad \textit{para todo} \;\; x > 0.$$

Es fácil ver que $I(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{b}{\sqrt{x}}$*; y así* $I'(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \left(\arctan \frac{b}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x+b^2} \right)$*. Por lo tanto*

$$\int_0^b \frac{1}{(x+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \left(\arctan \frac{b}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x+b^2} \right).$$

En particular,

$$\int_0^b \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2} \left(\arctan b + \frac{1}{1+b^2} \right).$$

Consideremos ahora $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f : [a, b] \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(\cdot, t)$ es una función continua en $[a, b]$ para cada $t > c$ fijo; y también $f(x, \cdot)$ es continua en $[c, \infty)$ para cada $x \in [a, b]$ fijo. De esta manera, para cada $x \in [a, b]$, $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}[c, d]$ para todo $d > c$. Si para cada $x \in [a, b]$, $\int_c^\infty f(x, t)dt$ es convergente, podemos entonces definir la función

$$I(x) = \int_c^\infty f(x, t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{4.12}$$

Proposición 4.28 *Si* $\int_c^\infty f(\cdot, t)dt$ *converge uniformemente, en* $[a, b]$*, a la función* I *definida en (4.12), entonces* I *es continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\int_c^\infty f(\cdot, t)dt$ converge uniformemente a I, existe $d > c$ tal que

$$\left| I(x) - \int_c^d f(x, t)dt \right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo} \;\; x \in [a, b]. \tag{4.13}$$

Fijemos ahora $y \in [a, b]$. Debido a que f es continua en $[a, b] \times [c, \infty)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(y, t) - f(x, t)| < \frac{\epsilon}{3(d-c)} \qquad \text{cuando} \;\; |y - x| < \delta. \tag{4.14}$$

De (4.13) y (4.14) obtenemos

$$|I(y) - I(x)| \leq \left| I(y) - \int_c^d f(y, t)dt \right| + \left| I(x) - \int_c^d f(x, t)dt \right| + \int_c^d |f(y, t) - f(x, t)| \, dt < \epsilon$$

cuando $|y - x| < \delta$. Como $y \in [a, b]$ es arbitrario, se concluye entonces que I es continua. ■

Proposición 4.29 *Bajo las hipótesis de la proposición 4.28, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta dx \int_c^\infty f(x,t)dt = \int_c^\infty dt \int_\alpha^\beta f(x,t)dx \tag{4.15}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha \leq \beta$.

Demostración. Para cualquier $d > c$, se sigue del corolario 3.59 que

$$\int_c^d dt \int_\alpha^\beta f(x,t)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha \leq \beta$. Así, el resultado se sigue haciendo $d \to \infty$ y usando la convergencia uniforme, en $[a,b]$, de $\int_c^\infty f(\cdot,t)dt$ (véase el teorema 2.32). ■

Ejemplo 4.30 *Dado* $y > 1$, *consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-ty}}{t} dt. \tag{4.16}$$

Notemos que

$$g(t) = \begin{cases} y - 1, & si \;\; t = 0 \\ \frac{e^{-t} - e^{-ty}}{t}, & si \;\; t > 0 \end{cases}$$

es continua en $[0,\infty)$. *En efecto, la continuidad de* g *en* $(0,\infty)$ *es clara, y para* $t = 0$, *tenemos por la regla de L'Hôpital que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-ty}}{t} = \lim_{t\to 0}(-e^{-t} + ye^{-ty}) = y - 1,$$

lo cual prueba la continuidad de g *en* $t = 0$. *Tenemos, de esta manera, demostrado que la integral impropia (4.16) es del primer tipo.*

Notemos ahora que

$$\int_1^y e^{-tx}dx = \frac{e^{-t} - e^{-ty}}{t}$$

y

$$\int_0^\infty e^{-tx}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-tx}dt = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{x}(1 - e^{-bx}) = \frac{1}{x}. \tag{4.17}$$

Claramente, el límite en (4.17) es uniforme en $[1,y]$, *pues dado* $\epsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{x}(1 - e^{-bx}) - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}e^{-bx}\right| \leq e^{-b} < \epsilon$$

para todo $x \in [1, y]$ *con* b *suficientemente grande. Tenemos así, por la proposición 4.29, que*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-ty}}{t} dt = \int_0^\infty \int_1^y e^{-tx} dx dt = \int_1^y dx \int_0^\infty e^{-tx} dt = \int_1^y \frac{1}{x} dx = \ln y - \ln 1 = \ln y.$$

Teorema 4.31 *Si* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe y es continua en* $[a, b] \times [c, \infty)$ *y la integral* $\int_c^\infty \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial x} dt$ *es uniformemente convergente en* $[a, b]$*, entonces* I *es diferenciable en* $[a, b]$ *e*

$$I'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Demostración. Sea $p \in [a, b]$. Como $\int_c^\infty f(\cdot, t) dt$ converge a I, dado $\epsilon > 0$, existe $M_0 > c$ tal que

$$\left| \int_c^d f(p, t) dt - \int_c^e f(p, t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ e, d \geq M_0. \tag{4.18}$$

Denotando por J al límite uniforme de $\int_c^\infty \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial x} dt$ en $[a, b]$, tenemos que existe $M_1 > c$ tal que

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left| \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - J(x) \right| < \frac{\epsilon}{4(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ d \geq M_1. \tag{4.19}$$

Luego por la desigualdad del triángulo

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left| \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_c^e \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ e, d \geq M_1. \tag{4.20}$$

Ahora, dados cualesquiera dos puntos distintos $x_1, x_2 \in [a, b]$, tenemos por el teorema 4.26 y el teorema del valor medio aplicado a $\int_c^d f(\cdot, t) dt - \int_c^e f(\cdot, t) dt$ que existe un punto z entre x_1 y x_2 tal que

$$\begin{aligned} \left[\int_c^d f(x_2, t)\, dt - \int_c^e f(x_2, t)\, dt \right] &- \left[\int_c^d f(x_1, t)\, dt - \int_c^e f(x_1, t)\, dt \right] \\ &= (x_2 - x_1) \left[\int_c^d \frac{\partial f(z, t)}{\partial x} dt - \int_c^e \frac{\partial f(z, t)}{\partial x} dt \right]. \end{aligned}$$

Tenemos así, de (4.20), que

$$\begin{aligned} &\left| \left[\int_c^d f(x_2, t)\, dt - \int_c^e f(x_2, t)\, dt \right] - \left[\int_c^d f(x_1, t)\, dt - \int_c^e f(x_1, t)\, dt \right] \right| \\ &\qquad < \frac{|x_2 - x_1|\, \epsilon}{2(b - a + 1)} \qquad \text{para todo } \ e, d \geq M_1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Consideremos ahora un punto $x \in [a,b] \backslash \{p\}$ y $M = \max\{M_0, M_1\}$. Entonces tomando $x_1 = p$ y $x_2 = x$ obtenemos de (4.21) que

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^e f(x,t)\,dt \right| &- \left| \int_c^d f(p,t)\,dt - \int_c^e f(p,t)\,dt \right| \\ &< \frac{|x-p|\,\epsilon}{2(b-a+1)} \qquad \text{para todo } \; e,d \geq M. \end{aligned}$$

Luego de (4.18), para todo $x \in [a,b]$ (incluyendo $x = p$),

$$\left| \int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^e f(x,t)\,dt \right| < \frac{(1+|x-p|)\,\epsilon}{2(b-a+1)} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \qquad \text{para todo } \; e,d \geq M.$$

Se sigue así que $\int_c^\infty f(\cdot,t)dt$ converge uniformemente a I en $[a,b]$.

Consideremos ahora $x \in (a,b)$ y tomemos $h \neq 0$ de manera que $x+h \in [a,b]$. Entonces por (4.21) con $x_1 = x$ y $x_2 = x+h$ tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\int_c^d f(x+h,t)dt - \int_c^d f(x,t)dt}{h} - \frac{\int_c^e f(x+h,t)dt - \int_c^e f(x,t)dt}{h} \right| \\ &\qquad < \frac{\epsilon}{2(b-a+1)} \qquad \text{para todo } \; e,d \geq M. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Haciendo $e \to \infty$ en (4.22) obtenemos que

$$\left| \frac{\int_c^d f(x+h,t)dt - \int_c^d f(x,t)dt}{h} - \frac{I(x+h)-I(x)}{h} \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a+1)} \qquad \text{para todo } \; d \geq M. \tag{4.23}$$

Usando de nuevo el teorema 4.26 tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\int_c^d f(x+h,t)dt - \int_c^d f(x,t)dt}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \right| < \frac{\epsilon}{4(b-a+1)} \qquad \text{cuando } \; 0 < |h| < \delta. \tag{4.24}$$

Entonces, mediante el uso de la desigualdad del triángulo, se sigue de (4.23), (4.24) y (4.19) que

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(x+h)-I(x)}{h} - J(x) \right| \;\leq\; & \left| \frac{I(x+h)-I(x)}{h} - \frac{\int_c^d f(x+h,t)dt - \int_c^d f(x,t)dt}{h} \right| \\ &+ \left| \frac{\int_c^d f(x+h,t)dt - \int_c^d f(x,t)dt}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \right| \\ &+ \left| \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt - J(x) \right| < \frac{\epsilon}{b-a+1} < \epsilon \quad \text{para } \; 0 < |h| < \delta. \end{aligned}$$

Tenemos así que $I'(x)$ existe y que es igual a $J(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$. El argumento anterior es también válido cuando $x = a$ y cuando $x = b$, tomando respectivamente, $h > 0$ y $h < 0$. ■

Ejemplo 4.32 *Dado $x \geq 0$, consideremos la integral impropia*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} dt. \tag{4.25}$$

Como

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} = 1,$$

la integral impropia (4.25) es del primer tipo.

Sean

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} dt \qquad y \qquad f(x,t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx}.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx} \operatorname{sen} t,$$

la cual es continua para todo $t \geq 0$ y todo $x \geq 0$.

Como

$$\left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} \right| \leq e^{-tx} \qquad \text{para todo} \quad x > 0,$$

y $\int_0^\infty e^{-tx} dt$ es convergente (véase (4.17)) para $x > 0$, se sigue del criterio de comparación para integrales impropias del primer tipo (proposición 4.8) que

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} dt \qquad \text{es convergente para} \quad x > 0.$$

La convergencia de $I(0)$ se demostró en el ejemplo 4.23.

Además,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt &= -\int_0^\infty e^{-tx} \operatorname{sen} t dt = -\lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{-tx} \operatorname{sen} t dt \\ &= \lim_{c \to \infty} \left[\frac{e^{-cx}(x \operatorname{sen} c + \cos c)}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right] = -\frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Notemos que la convergencia en (4.26) es uniforme para $x \in [a,b]$ con $0 < a < b < \infty$, pues dado $\epsilon > 0$,

$$\left| \frac{e^{-cx}(x \operatorname{sen} c + \cos c)}{1 + x^2} \right| \leq (b+1)e^{-ca} < \epsilon$$

para todo $x \in [a,b]$ *con* c *suficientemente grande. Tenemos así, del teorema 4.31, que* $I(x)$ *es diferenciable en* $[a,b]$ *e*

$$I'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.27}$$

Como a *y* b *son números positivos arbitrarios (con* $a < b$*), (4.27) es válido para todo* $x > 0$. *por lo tanto*

$$I(x) = -\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\arctan x + C. \tag{4.28}$$

Para determinar la constante C, *probaremos primero que* $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt$ *es uniformemente convergente para* $x \geq 0$. *Consideremos pues,* $\epsilon > 0$. *Notemos que para todo* $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left|I(x) - \int_0^c \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt\right| &= \left|\int_c^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt\right| = \left|\lim_{d\to\infty}\int_c^d \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt\right| \\
&= \left|\lim_{d\to\infty}\left[e^{-cx}\frac{\cos c}{c} - e^{-dx}\frac{\cos d}{d} - \int_c^d (1+tx)e^{-tx}\frac{\cos t}{t^2}dt\right]\right| \\
&= \left|e^{-cx}\frac{\cos c}{c} - \int_c^\infty \frac{(1+tx)e^{-tx}\cos t}{t^2}dt\right| \\
&\leq \frac{e^{-cx}|\cos c|}{c} + \int_c^\infty \left|\frac{(1+tx)e^{-tx}\cos t}{t^2}\right|dt.
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\left|\frac{(1+tx)\cos t}{t^2e^{tx}}\right| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \textit{para todo} \quad x \geq 0,$$

Obtenemos que

$$\left|I(x) - \int_0^c \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt\right| \leq \frac{e^{-cx}}{c} + \int_c^\infty \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{e^{-cx}}{c} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c} < \epsilon$$

para todo $c > \frac{2}{\epsilon}$. *Esto concluye la demostración de que* $I(x)$ *es uniformemente convergente en* $[0,\infty)$. *De esta manera (véase la observación 2.25),*

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt = \int_0^\infty 0dt = 0 \tag{4.29}$$

y

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt = \int_0^\infty \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}e^{-tx}dt = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt. \tag{4.30}$$

Regresando a (4.28), de (4.29) se sigue que

$$0 = -\lim_{x\to\infty} \arctan x + C = -\frac{\pi}{2} + C$$

y así, $C = \frac{\pi}{2}$. *Por lo tanto*

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-tx} dt = -\arctan x + \frac{\pi}{2}.$$

En particular (véase (4.30)),

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Problemas

1. Demuestre la proposición 4.24.

2. Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sugerencia: Defina $F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2$ y $G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$; y demuestre que $F(t) + G(t) = \frac{\pi}{4}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sugerencia: Haga el cambio de variables $x = s\sqrt{t}$ en el problema 2 para obtener $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2 t} ds = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

4. Dado $x > 0$, demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t} e^{-t} dt = \arctan x.$$

5. Demuestre que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}.$$

6. Sea $f : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,t) = \left(2xt - x^2t^2\right) e^{-xt}.$$

Demuestre que

$$I(x) = \int_0^\infty f(x,t)dt$$

no es uniformemente convergente en $[0,1]$; y que la fórmula (4.15), en este caso, no es válida.

4.6. Función gamma y función beta

En esta sección veremos dos funciones definidas por integrales impropias que son de gran importancia, debido a sus múltiples aplicaciones; la función gamma y la función beta.

Dado $x > 0$, consideremos primero la integral

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{4.31}$$

Notemos que esta integral, es una integral propia para $x \geq 1$ y es una integral impropia del segundo tipo para $0 < x < 1$. En este segundo caso, tenemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = \lim_{t\downarrow 0} e^{-t} = 1,$$

donde $0 < 1 - x < 1$. Luego, en este caso, la convergencia de la integral impropia (4.31) se sigue del ejemplo 4.6 y la proposición 4.18.

Consideremos ahora la integral impropia

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{4.32}$$

Por lo anterior, tenemos que ésta es una integral del primer tipo para $x \geq 1$ y es una integral impropia del tercer tipo para $0 < x < 1$. En cualquier caso, tomando $n \in \mathbb{N}$ de manera que $n > x + 1$, tenemos por la regla de L'Hôpital que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(x+1)t^x}{e^t} = \cdots \qquad (4.33) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(x+1)x\cdots(x-n+2)t^{x-n+1}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(x+1)x\cdots(x-n+2)}{t^{n-x-1}e^t} = 0, \end{aligned}$$

pues $n - x - 1 > 0$. Por lo tanto (véase el problema 2 a) de la sección 4.2), la integral impropia (4.32) es convergente. Podemos, entonces, dar la siguiente definición.

Definición 4.33 *A la función* $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *dada por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \tag{4.34}$$

se le conoce como la ***función gamma****.*

Proposición 4.34 *La función* Γ *satisface*
i) $\Gamma(1) = 1$.
ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$.

Demostración. i) Notemos que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt.$$

Así, el resultado se sigue de (4.17) con $x = 1$.

ii) Para la demostración de este inciso, debemos probar que

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comenzando con el lado izquierdo y usando integración por partes con $u = t^x$, $dv = e^{-t}dt$ (por lo tanto $du = xt^{x-1}dt$ y $v = -e^{-t}$), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \left[-t^x e^{-t}\Big|_0^b + x \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \right] \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-b^x e^{-b} \right] + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

De aquí, el resultado se sigue notando (véase (4.33)) que $\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-b^x}{e^b}\right] = 0$. ∎

Notemos de la proposición 4.34 que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!. \tag{4.35}$$

Por este motivo, a la función Γ se le conoce también como la **función factorial**.

Ejemplo 4.35 *Usando el hecho (véase el problema 2) de que* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*, mostraremos de una manera muy sencilla, sin usar la sugerencia dada en el problema 2 de la sección 4.5, que*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para ello, hagamos el cambio de variables $u = x^2$; entonces $dx = \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$. Luego, para cualquier $b > 0$,

$$\int_0^b e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{b^2} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ahora, dados $x, y > 0$, consideremos la integral

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{4.36}$$

Notemos que esta integral, es una integral propia si $x \geq 1$ y $y \geq 1$; pero si $0 < x < 1$ o $0 < y < 1$, entonces es una integral impropia del segundo tipo. En este segundo caso tenemos lo siguiente.

i) Si $0 < x < 1$ y $y \geq 1$, entonces

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{(1-t)^{y-1}}{t^{1-x}} \leq \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{para todo } \ 0 < t < 1.$$

Como $0 < 1 - x < 1$, la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ es convergente (véase el ejemplo 4.6). Luego, por el criterio de comparación para integrales impropias del segundo tipo (proposición 4.17), la integral impropia (4.36) es convergente.

ii) Si $x \geq 1$ y $0 < y < 1$, entonces

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \leq \frac{1}{(1-t)^{1-y}} \quad \text{para todo } \ 0 < t < 1.$$

Como $0 < 1 - y < 1$, la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1-y}}dt$ es convergente; y así, en este caso, nuevamente por la proposición 4.17, la integral impropia (4.36) es convergente.

iii) Finalmente, si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, entonces escribiendo

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}(1-t)^{1-y}}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}(1-t)^{1-y}}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^{1-x}(1-t)^{1-y}}dt$$

y notando que

$$\frac{1}{t^{1-x}(1-t)^{1-y}} \leq 2^{1-y}\left(\frac{1}{t^{1-x}}\right) \quad \text{para todo } \ 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

y que

$$\frac{1}{t^{1-x}(1-t)^{1-y}} \leq 2^{1-x}\left[\frac{1}{(1-t)^{1-y}}\right] \quad \text{para todo } \frac{1}{2} \leq t < 1,$$

se sigue, nuevamente por la proposición 4.17 y el hecho de que las integrales impropias

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dt \qquad \text{y} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{1-y}} dt$$

son ambas convergentes, que la integral impropia (4.36) es convergente. Se concluye, de este análisis, que podemos dar la siguiente definición.

Definición 4.36 *A la función $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

*se le conoce como la **función beta**.*

Proposición 4.37 *Si $x, y > 0$, entonces*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demostración. Notemos, por la definición de Γ y el teorema de Fubini (véase el corolario 3.59), que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^b s^{y-1}e^{-s}ds\right] \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_{C(b)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds, \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde $C(b)$ es el cuadrado con vértices opuestos $(0,0)$ y (b,b). El segmento de recta que une los puntos $(b,0)$ y $(0,b)$ divide al cuadrado $C(b)$ en dos triángulos rectángulos. Sea $\triangle(b)$ el triángulo de la partición cuyo tercer vértice es $(0,0)$.

Notemos ahora que el triángulo $\triangle(b)$ es la imagen bajo $\varphi(u,v) = (u, v-u)$ del conjunto $\{(u,v) : 0 \leq u \leq v \leq b\}$, y

$$|J\varphi(u,v)| = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Luego, por el teorema de cambio de variables para integrales múltiples (teorema 3.71), tenemos que

$$\int_{\triangle(b)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds = \int_0^b dv \int_0^v u^{x-1}(v-u)^{y-1}e^{-v}du.$$

La sustitución $u = vz$ en la integral interior del lado derecho nos da

$$\begin{aligned} \int_{\triangle(b)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds &= \int_0^b dv \int_0^1 v^{x+y-1}z^{x-1}(1-z)^{y-1}e^{-v}dz \\ &= B(x,y)\int_0^b v^{x+y-1}e^{-v}dv. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Sea $C\left(\frac{b}{2}\right)$ el cuadrado con vértices opuestos $(0,0)$ y $\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$. Entonces

$$C\left(\frac{b}{2}\right) \subset \triangle(b) \subset C(b).$$

Luego, debido a que $t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)} \geq 0$ para todo $t, s \geq 0$,

$$\int_{C\left(\frac{b}{2}\right)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds \leq \int_{\triangle(b)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds \leq \int_{C(b)} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds.$$

Haciendo $b \to \infty$, se observa de (4.37) que las integrales de los extremos convergen ambas a $\Gamma(x)\Gamma(y)$; y de (4.38) se observa que la integral de enmedio converge a $B(x,y)\Gamma(x+y)$. Por lo tanto

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y),$$

lo cual finaliza la demostración. ■

Ejemplo 4.38 *Dado $n \in \mathbb{N}$, usando la proposición 4.37, mostraremos que*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{1(3)(5)\cdots(n-1)}{2(4)(6)\cdots(n)}\frac{\pi}{2}, & si \;\; n \;\; es \;\; par \\ \frac{2(4)(6)\cdots(n-1)}{1(3)(5)\cdots(n)}, & si \;\; n \;\; es \;\; impar. \end{cases} \tag{4.39}$$

En efecto, por la proposición 4.37 y el problema 6, se tiene que

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta.$$

Luego, tomando $x = \frac{n+1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Supongamos primero que n es par, digamos, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces (véase el problema 2 y (4.35))

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta &= \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k+1)} = \frac{\left(\frac{1(3)(5)\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\right)\sqrt{\pi}}{2k(k-1)\cdots 1} = \frac{1(3)(5)\cdots(2k-1)}{2^k k(k-1)\cdots 1}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1(3)(5)\cdots(2k-1)}{(2k)(2k-2)\cdots(2)}\frac{\pi}{2} = \frac{1(3)(5)\cdots(n-1)}{2(4)(6)\cdots(n)}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Finalmente, si n es impar, digamos $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta = \frac{\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Luego, nuevamente del problema 2 y (4.35), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n \theta d\theta &= \frac{((k-1)(k-2)\cdots 1)\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1(3)(5)\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\right)} = \frac{2^{k-1}(k-1)(k-2)\cdots 1}{1(3)(5)\cdots(2k-1)} \\ &= \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{1(3)(5)\cdots(2k-1)} = \frac{2(4)(6)\cdots(n-1)}{1(3)(5)\cdots(n)},\end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración de (4.39).

Problemas

1. Demuestre que
$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$$
es divergente para $x \leq 0$.

2. Demuestre que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \text{y} \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1(3)(5)\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{para} \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

3. Demuestre que
$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

4. Demuestre que
$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{x-1} ds, \qquad x > 0.$$

5. Sean $x, y > 0$. Demuestre que
   a) $B(x, y) = B(y, x)$.
   b) $xB(x, y + 1) = yB(x + 1, y)$.
   c) $B(x, y) = B(x + 1, y) + B(x, y + 1)$.
   d) $xB(x, y) = (x + y)B(x + 1, y)$.

6. Demuestre que
$$B(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta.$$

7. Demuestre que
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^n}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}\sqrt{\pi}.$$

   Sugerencia: Haga la sustitución $1 - x^n = \cos^2\theta$.

4.7. Nociones sobre la transformada de Laplace

Finalizaremos este capítulo con la introducción de una transformación lineal L, llamada la **transformada de Laplace** (en honor del astrónomo, físico y matemático francés Pierre-Simon Laplace, 1749-1827), definida en el espacio vectorial $\mathcal{V}$, de todas las funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-tx} f(t)dt$ es convergente para cada $x > 0$. Este operador juega un papel fundamental en las aplicaciones, en particular, resulta ideal para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales.

Dada $f \in \mathcal{V}$, a la función $Lf : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por
$$Lf(x) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t)dt,$$
se le llama la **transformada de Laplace de** f. Además, debido a que para $f, g \in \mathcal{V}$ y $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} L\left(af(x) + bg(x)\right) &= \int_0^\infty e^{-tx}\left(af(t) + bg(t)\right) dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-tx} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-tx} g(t)dt = aLf(x) + bLg(x) \end{aligned}$$

para cada $x \geq 0$, L es una transformación lineal del espacio vectorial $\mathcal{V}$ en el espacio vectorial de todas las funciones $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, llamada, **transformada de Laplace**.

Ejemplo 4.39 *a) De (4.17) tenemos que para la función constante $f \equiv c$,*

$$Lf(x) = \int_0^\infty ce^{-tx}dt = \frac{c}{x}, \qquad x > 0.$$

b) Para la función $g(t) = t^n$, tenemos, para cada $x > 0$,

$$Lg(x) = \int_0^\infty t^n e^{-tx}dt = \frac{1}{x^n}\int_0^\infty (tx)^n e^{-tx}dt.$$

De aquí, haciendo $s = tx$, se sigue que

$$Lg(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^\infty s^n e^{-s}ds = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}}$$

y así, de (4.35),

$$Lg(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad x > 0.$$

c) De (4.26) tenemos que para la función $h(t) = \operatorname{sen} t$,

$$Lh(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x > 0.$$

Lema 4.40 *Si para $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-tx}f(t) = 0 \quad \textit{para todo } x > 0, \tag{4.40}$$

entonces para cualquier $x > 0$,
i) $\int_0^\infty e^{-tx}f(t)dt$ es absolutamente convergente.
ii) $\lim_{t\to\infty} e^{-tx}tf(t) = 0$.
iii) $\int_0^\infty e^{-tx}tf(t)dt$ es absolutamente convergente.

Demostración. i) Dado $x > 0$, fijemos $x_0 \in (0, x)$. Entonces

$$e^{-tx}f(t) = \left[e^{-t(x-x_0)}f(t)\right]\left(e^{-tx_0}\right).$$

Como $x - x_0 > 0$, se sigue de (4.40) que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t(x-x_0)}f(t) = 0.$$

Luego, existe $B > 0$ tal que

$$\left|e^{-tx} f(t)\right| \leq e^{-tx_0} \quad \text{para todo } t \geq B.$$

Como $\int_0^\infty e^{-tx_0} dt$ es convergente, i) se sigue de la proposición 4.8.

ii) Tomemos de nuevo $x_0 \in (0, x)$. Entonces

$$e^{-tx} t f(t) = \left[e^{-t(x-x_0)} f(t)\right] \left(e^{-tx_0} t\right).$$

El resultado se sigue del hecho de que cada factor de la derecha tiende a 0 cuando $t \to \infty$.

iii) Sea $g(t) = t f(t)$. Claramente, el resultado se sigue de ii) e i). ■

Proposición 4.41 *Si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es como en el lema 4.40, entonces su transformada de Laplace, Lf, es continua en $(0, \infty)$.*

Demostración. Si $Lf = 0$, la conclusión es obvia. Supongamos pues que $Lf \neq 0$. Entonces, de esta suposición y el lema 4.40 iii) obtenemos que

$$0 < \int_0^\infty e^{-tx} |t f(t)| \, dt < \infty.$$

Dados $x > 0$ y $\epsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \frac{\epsilon}{\int_0^\infty e^{-tx} |t f(t)| \, dt}.$$

Consideremos $y > 0$ tal que $|x - y| < \delta$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x < y$; entonces existe $h > 0$ tal que $y = x + h$, donde $h < \delta$. Luego

$$\begin{aligned} |Lf(y) - Lf(x)| &= |Lf(x+h) - Lf(x)| = \left| \int_0^\infty e^{-t(x+h)} f(t) dt - \int_0^\infty e^{-tx} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^\infty e^{-tx} \left(e^{-ht} - 1\right) f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-tx} \left|e^{-ht} - 1\right| |f(t)| \, dt. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ahora, por el teorema del valor medio (véase (3.38)), existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$e^{-ht} - 1 = -h t e^{-\theta h t};$$

y así,

$$\left|e^{-ht} - 1\right| < ht \qquad \text{para } t > 0.$$

Por lo tanto, de (4.41), obtenemos

$$|Lf(y) - Lf(x)| \leq h \int_0^\infty e^{-tx} |t f(t)| \, dt < \delta \int_0^\infty e^{-tx} |t f(t)| \, dt = \epsilon.$$

■

Teorema 4.42 *(Teorema de Lerch) Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface (4.40). Si $Lf(x) = 0$ para todo $x > 0$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Sea

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

un polinomio con coeficientes reales. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} p\left(e^{-t}\right) f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-tx} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-tk} \right) f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^\infty e^{-t(x+k)} f(t)dt \qquad (4.42) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k Lf(x+k) = 0 \quad \text{para todo } x > 0. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{-t}$, obtenemos de (4.42) que

$$\int_0^1 z^{x-1} p(z) f(-\ln z) dz = 0 \quad \text{para todo } x > 0.$$

Fijemos $x_1 > 1$. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{t\to\infty} e^{-t(x_1-1)} f(t) = 0$, existe $M > 0$ tal que

$$\left| e^{-t(x_1-1)} f(t) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } t \geq M,$$

o equivalentemente

$$\left| z^{x_1-1} f(-\ln z) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } z \geq e^{-M}.$$

Esto implica que la función

$$g(z) = z^{x_1-1} f(-\ln z), \qquad 0 < z \leq 1,$$

tiende a 0 cuando $z \to 0$. Luego, definiendo $g(0) = 0$, tenemos que g es una función continua en el compacto $[0,1]$ que satisface

$$\int_0^1 g(z)p(z)dz = 0. \qquad (4.43)$$

Consideremos ahora (véase el corolario 2.69) una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $p_n \to g$ uniformemente en $[0,1]$. Como (4.43) se cumple para todo polinomio con coeficientes reales, entonces

$$\int_0^1 g(z)p_n(z)dz = 0 \quad \text{para todo } n = 1, 2, \ldots.$$

Luego, por la convergencia uniforme en $[0,1]$ de $\{p_n\}$ a g, obtenemos (véase el teorema 2.32) que

$$\int_0^1 g^2(z)dz = 0.$$

Se sigue de esto (véase el problema 3 de la sección 1.1) que

$$g(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0,1].$$

Como $g(z) = z^{x_1-1}f(-\ln z)$ para todo $z \in (0,1]$, entonces, obviamente, $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. ■

Corolario 4.43 *Si $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que satisfacen (4.40) y $Lf = Lg$, entonces $f = g$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la linealidad de L y el teorema de Lerch. ■

Observación 4.44 *Del corolario 4.43 se observa que si E es el espacio vectorial de todas las funciones $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuas que satisfacen (4.40), entonces $L : E \to Im(E)$ es invertible, donde $Im(E)$ es la imagen de E bajo L.*

A la inversa, L^{-1}, de la transformada de Laplace L, se le llama la **transformada inversa de Laplace**.

En la siguiente proposición se establece que L^{-1} es un operador lineal.

Proposición 4.45 *La transformada inversa de Laplace, $L^{-1} : Im(E) \to E$, es un operador lineal.*

Demostración. Sean F_1 y F_2 las transformadas de Laplace de ciertas funciones $f_1, f_2 \in E$, y $a, b \in \mathbb{R}$. Si

$$f = L^{-1}(aF_1 + bF_2) \qquad \text{y} \qquad g = aL^{-1}F_1 + bL^{-1}F_2,$$

entonces por la linealidad de L,

$$Lf = L\left[L^{-1}(aF_1 + bF_2)\right] = aF_1 + bF_2$$

y

$$Lg = L\left(aL^{-1}F_1 + bL^{-1}F_2\right) = aL\left(L^{-1}F_1\right) + bL\left(L^{-1}F_2\right) = aF_1 + bF_2.$$

De esta manera, $Lf = Lg$, y así, por la inyectividad de L en E, $f = g$; es decir,

$$L^{-1}(aF_1 + bF_2) = aL^{-1}F_1 + bL^{-1}F_2.$$

■

Proposición 4.46 *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas $f', \ldots, f^{(n)}$ existen y se cumple (4.40) para $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$. Entonces*

$$Lf^{(n)}(x) = x^n Lf(x) - \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} f^{(n-i)}(0), \qquad x > 0. \tag{4.44}$$

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción. Por el teorema de integración por partes (teorema 1.25) y (4.40), tenemos

$$\begin{aligned} Lf'(x) &= \int_0^\infty e^{-tx} f'(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-tx} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-tx} f(t)|_0^b + x \int_0^b e^{-tx} f(t)dt \right] \\ &= x \int_0^\infty e^{-tx} f(t)dt - f(0) = xLf(x) - f(0). \end{aligned} \tag{4.45}$$

De esta manera, el resultado es válido para $n = 1$. Supongamos ahora que el resultado es válido para $n = k$. Entonces, por (4.45) aplicado a $f^{(k)}$ obtenemos

$$\begin{aligned} Lf^{(k+1)}(x) &= xLf^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) \\ &= x \left[x^k Lf(x) - \sum_{i=1}^{k} x^{i-1} f^{(k-i)}(0) \right] - f^{(k)}(0) \\ &= x^{k+1} Lf(x) - \sum_{i=1}^{k+1} x^{i-1} f^{(k+1-i)}(0). \end{aligned}$$

De esta manera, el resultado es válido para $n = k + 1$. Por lo tanto, por inducción, se sigue que (4.44) es válido para cada n tal que las derivadas $f', \ldots, f^{(n)}$ existan y se cumpla (4.40) para $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$. ■

Ejemplo 4.47 *Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden*

$$u'' + u = 2, \qquad u(0) = 4, \quad u'(0) = 0. \tag{4.46}$$

De la linealidad de L, obtenemos

$$Lu'' + Lu = L2.$$

Luego, del ejemplo 4.39 a) y la proposición 4.46,

$$x^2 Lu(x) - 4x + Lu(x) = \frac{2}{x},$$

o equivalentemente

$$Lu(x) = \frac{2+4x^2}{x\,(1+x^2)} = \frac{2}{x} + \frac{2x}{1+x^2}.$$

Así, de la linealidad de L^{-1}, el ejemplo 4.39 a) y el problema 1, tenemos que

$$u(x) = L^{-1}\left(\frac{2}{x} + 2\frac{x}{1+x^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 2 + 2\cos x,$$

es la solución (única) de la ecuación diferencial (4.46).

Problemas

1. Sea $f(t) = \cos t$, $t \geq 0$. Demuestre que

$$Lf(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{para todo } x > 0.$$

2. Encuentre la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^2 e^{-3t}, \qquad t \geq 0.$$

3. Resuelva la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$u'' + u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

4. Resuelva la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$u' + 2u = e^{-t}, \qquad u(0) = 0.$$

5. Si $f \in E$, demuestre que $\lim_{x\to\infty} Lf(x) = 0$.

Bibliografía

[1] S. Abbott. *Understanding Analysis*, Springer, 2001.

[2] C. D. Aliprantis y O. Burkinshaw. *Principles of Real Analysis*, Third Edition, Academic Pressy, 1998.

[3] T. M. Apostol. *Calculus, Volumen I: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

[4] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[5] J. C. Burkill y H. Burkill. *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, 2002.

[6] R. Cavazos-Cadena. *Fundamentos de Estadística-Parte I*, Depto. de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1991.

[7] N. L. Carothers. *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.

[8] M. Clapp. *Análisis Matemático*,Colección Papirhos, Instituto de Matemáticas UNAM, 2015.

[9] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press Inc., 1960.

[10] J. H. Dshalalow. *Real Analysis: An Introduction to the Theory of Real Functions and Integration*, Chapman & Hall/CRC Press , 2001.

[11] Editors of REA. *The Advanced Calculus Problem Solver*, Research & Education Association, 1999.

[12] F. Galaz Fontes. *Elementos de Análisis Funcional*, CIMAT, 2006.

[13] R. A. Gordon. *Real Analysis* A First Course, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

[14] N. B. Haaser y J. A. Sullivan. *Análisis Real*, Editorial Trillas, México, 1978.

[15] J. M. Howie. *Real Analysis*, Springer, 2001.

[16] K. Hoffman y R. Kunze. *Linear Algebra*, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., 1971.

[17] A. W. Knapp. *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005.

[18] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, Inc., 1975.

[19] S. G. Krantz. *Real Analysis and Foundations*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC Press, 2005.

[20] D. L. Kreider et al. An Introduction to Linear Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966.

[21] J. E. Marsden y M. J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*, Second Edition, W. H. Freeman, 1993.

[22] J. N. McDonald y N. A. Weiss. *A Course in Real Analysis*, Academic Press, 1999.

[23] M. O'Nan. *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

[24] M. Ó Searcóid. *Metric Spaces*, Spriger-Verlag, 2007.

[25] A. Pérez et al. *Introducción Básica al Estudio del Análisis Matemático*, Colección Héctor Ochoa Bacelis, UJAT, México, 2011.

[26] M. H. *Basic Elements of Real Analysis*, Springer, 1998.

[27] M. H. Protter y C. B. Morrey. *A First Course in Real Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, 1991.

[28] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1976.

[29] H. H. Sohrab. *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2003.

Este trabajo se realizó con el apoyo del proyecto UJAT-2014-IB-06 del PFI.

Índice alfabético

álgebra de funciones, 93
separación de puntos por, 93

conjunto
convexo, 123
de medida cero, 150
de volumen cero, 150
volumen de, 149
conjunto de funciones acotadas
cerradura uniforme de, 94
uniformemente cerrado, 94
convergencia puntual
de series de funciones, 53
de sucesiones de funciones, 51
convergencia uniforme
de series de funciones, 58
de sucesiones de funciones, 54
coordenadas
cilíndricas, 164
esféricas, 163
polares, 163
criterio de convergencia para integrales impropias
de comparación, 173, 178
de la integral, 176
del cociente, 173, 178
criterio para la convergencia uniforme
de Abel, 59
de Cauchy, 57
de Dirichlet, 61
M de Weierstrass, 58
curva, 44
rectificable, 45
longitud de, 45

derivada, 108
parcial, 110
desigualdad
de Cauchy-Schwarz, 17
de Hölder, 22
determinante jacobiano, 138

equicontinuidad, 89

fórmula de Taylor
con residuo diferencial, 86, 131
con residuo integral, 84, 129
función
r-lineal, 126
absolutamente integrable, 174
acotada, 65
afín, 109
analítica, 77
beta, 195
bilineal, 126
componente, 110
continuamente diferenciable, 112
de clase C^1, 112
de clase C^2, 127
de clase C^∞, 127
de clase C^r, 127
de variación acotada, 31
de variación negativa, 37
de variación positiva, 37
diferenciable, 108
doblemente diferenciable, 125
escalón unitario, 20
escalonada, 12
exponencial, 77

gamma, 193
homogénea, 120
indicadora, 6, 157
Riemann integrable, 144
Riemann-Stieltjes integrable, 5, 37
suave, 127
zeta de Riemann, 73

gradiente, 120

integral de Riemann-Stieltjes, 5
inferior, 4
superior, 4
integral impropia de Riemann, 168
absolutamente convergente, 174
condicionalmente convergente, 174
del primer tipo, 169
del segundo tipo, 171
del tercer tipo, 172
integral múltiple de Riemann, 144
inferior, 144
superior, 144

métrica uniforme, 65
malla de una partición, 8, 143
matriz jacobiana, 111

operador lineal, 102
norma de, 103
Hilbert-Schmidt, 105
oscilación de una función en un punto, 151

partición, 2, 143
polinomio de Taylor, 84
primer teorema fundamental del cálculo integral, 29
proceso diagonal de Cantor, 90
producto de Cauchy de series, 80
producto interno canónico, 102

rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$, 143
rectángulos componentes, 143
refinamiento, 3, 144
común, 3
regla
de la cadena, 117
de Leibniz, 118
del producto, 118
residuo de una función, 84, 131

segunda derivada, 125
segundo teorema
del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes, 28
fundamental del cálculo integral, 29
serie
de Maclaurin, 77
de potencias, 73
de Taylor, 84
sucesión de funciones
puntualmente acotada, 89
uniformemente acotada, 89
uniformemente de Cauchy, 57
suma de Riemann, 149
inferior, 143
superior, 143
suma de Riemann-Stieltjes
inferior, 3
superior, 3

teorema
de Abel, 79
de Ascoli, 91
de cambio de variable para integrales de Riemann-Stieltjes, 25
de cambio de variables para integrales múltiples, 155
de Dini, 64
de Fubini, 146
de la función implícita, 138
de la función inversa, 133
de Lebesgue, 151
de Lerch, 201
de punto fijo para contracciones, 99
de Stone-Weierstrass, 96

de Weierstrass, 97
del valor medio, 122
del valor medio generalizado, 124
transformación lineal, 101
transformada
de Laplace, 199
de Laplace de una función, 198
inversa de Laplace, 202

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Pablo Marín Olán
Director de Difusión, Divulgación Científica y Tecnológica

Francisco Cubas Jiménez
Jefe del Departamento de Publicaciones no Periódicas