Journal of Basic Sciences, Vol. 2 (**4**), Enero-Abril 2016

Sobre la Definición Categórica de Base

A. García Zamora
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Camino a la Bufa y Calzada Solidaridad, C.P. 98000, Zacatecas, Zac., México
alexiszamora06@gmail.com

En esta breve nota introducimos la definición categórica de base de un $k-$espacio vectorial y presentamos varias aplicaciones de esta definición.

In this brief note we introduce the categorical definition of basis of a $k-$vector space. Several applications of this definition are presented.

Palabras claves: Espacios vectoriales, base, propiedad universal.
Keywords: Vector space, basis, universal property.

1. Introducción

Sea V un $k-$espacio vectorial. Normalmente se trabaja con la siguiente definición:

Definición 1.1. Un subconjunto $X \subseteq V$ es una base si es linealmente independiente y genera a V.

La generalización inmediata del concepto de $k-$espacio vectorial es el de módulos definidos sobre un anillo R. A diferencia del caso de espacios vectoriales no todo módulo M sobre un anillo R admite una base. Esto hace que el estudio del concepto de base deba ser refinado. En textos como el Álgebra de Hungerford (Capítulo I, Definiciones 7.6 y 7.7, [3]) y en el Álgebra de L. C. Grove ([2]) se presenta la noción de objetos libres sobre una base. No deja de ser curioso que este tratamiento funtorial se aplique casi siempre al caso general de módulos sobre un anillo y casi nunca al caso especialmente importante de $k-$espacios vectoriales. Quizás la excepción importante es, como podía esperarse, el libro de Bourbaki ([1]).

Mi intención con esta nota es proponer un modo alternativo, más categórico, de acercarse al Álgebra Lineal. El fundamento de este enfoque sería utilizar sistemáticamente lo que he llamado la "definición categórica de base" (Definición 2.1) en lugar de la Definición 1.1, a la que llamaré definición "usual" o "clásica". Por supuesto, lo primero que debemos comprobar es que ambas definiciones son equivalentes, lo cual es un hecho sencillo y tal vez no tan conocido para el profesor de Álgebra Lineal. Este es el objetivo del Teorema 2.3.

Como aplicaciones de este enfoque incluimos una demostración de que dos espacios vectoriales con bases de la misma cardinalidad son isomorfos, una justificación formal de que la dimensión del espacio vectorial trivial es cero y lo que he llamado "Teoremas de Realización," que aseguran que todo espacio vectorial es isomorfo a uno de la forma $k^{\oplus X}$ y todo espacio vectorial dual a uno de la forma k^X (vea la Sección 3.2, donde las definiciones están incluidas). Espero que estas líneas convenzan al instructor de

Recibido: 15 agosto 2015. Aceptado: 5 noviembre 2015. Publicado: 01 enero 2016.

Álgebra Lineal en las carreras de Licenciaturas en Matemáticas y Física que este otro punto de vista tiene cierta utilidad y una indudable atracción estética. De hecho, este enfoque funtorial pudiera ser la base para todo un curso de álgebra lineal "avanzado", entendiendo por esto dirigido a estudiantes entre los últimos semestres de licenciatura y primeros de maestría. En lo particular me parece muy adecuado para eliminar la distinción entre dimensión finita e infinita, que hace pensar al principiante que los espacios vectoriales de dimensión infinita pertenecen a un mundo esotérico.

Como mencionamos anteriormente, la definición categórica de base puede encontrarse en Bourbaki y pienso que a casi todo representante de la escuela matemática francesa de los años de posguerra le parecería la "natural". Así, quiero dedicar estas páginas como un muy modesto homenaje a la memoria de Alexander Grothendieck, recientemente fallecido.

2. La definición categórica de base

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre k. Una base de V es una pareja (X, ϕ) con X un conjunto y $\phi : X \to V$ una función, tal que se satisface que para todo espacio $k-$vectorial W y toda función $\alpha : X \to W$ existe una única aplicación $k-$lineal $f : V \to W$ tal que:

$$f \circ \phi = \alpha.$$

Nota 2.2. 1. La propiedad universal expresada anteriormente suele representarse en símbolos por:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\forall\alpha"'] & V \arrow[dl, dashed, "\exists! f"] \\ W. & \end{tikzcd}$$

2. Es fácil ver que si (X, ϕ) es base de V entonces ϕ es necesariamente inyectiva. En efecto: supongamos que existen $x, y \in X$, $x \neq y$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$, sea $W = k$ y consideremos $\alpha : X \to k$ tal que $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ (observemos que todo campo k tiene al menos dos elementos distintos). Entonces, por la propiedad universal tendremos:

$$\alpha(x) = f(\phi(x)) = f(\phi(y)) = \alpha(y),$$

lo que contradice nuestra elección de α. Tomando en cuenta este hecho suele identificarse la base con el subconjunto imagen $\phi(X) \subset V$.

Para nuestros propósitos, el Teorema central es:

Teorema 2.3. Sea V un espacio vectorial no cero, si (X, ϕ) es una base para V entonces el conjunto $\{\phi(x)\}_{x\in X} \subset V$ es un conjunto de generadores linealmente independiente.

Prueba. Denotemos $e_x := \phi(x)$. Veamos primero que $\{e_x\}_{x\in X}$ es linealmente independiente. Supongamos que existe una relación de dependencia lineal:

$$\sum_x \lambda_x e_x = 0,$$

con casi todos los λ_x cero y $\lambda_y \neq 0$ para algún $y \in X$. Entonces:

$$e_y = -\sum_{x\neq y} \lambda_x/\lambda_y e_x.$$

Consideremos el $k-$espacio vectorial $W = k$ y la función $\delta_y : X \to k$ dada por:

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y \\ 1 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

Por definición de base existe una aplicación $k-$lineal $f : V \to k$ tal que $f \circ \phi = \delta_y$. De este modo:

$$\begin{aligned} 1 = \delta_y(y) = f(\phi(y)) = f(e_y) &= f(-\sum_{x\neq y} \frac{\lambda_x}{\lambda_y} e_x) \\ &= -\sum_{x\neq y} \frac{\lambda_x}{\lambda_y} f(e_x) && (1) \\ &= -\sum_{x\neq y} \frac{\lambda_x}{\lambda_y} (f\circ\phi)(x) && (2) \\ &= -\sum_{x\neq y} \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \delta_y(x) && (3) \\ &= 0, && (4) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Esto demuestra la independencia lineal del conjunto $\{e_x\}_{x\in X}$. Veamos ahora que es un conjunto generador. Sea $W \subset V$ el subespacio lineal de V generado por los elementos e_x. Esto es $W := < e_x >_{x\in X}$. Definamos la función $\alpha : X \to W$ como $\alpha(x) = e_x$. Por hip´otesis existe una ´unica aplicaci´on lineal $f : V \to W \subset V$ tal que $f \circ \phi = \alpha$. Claramente id_V satisface esta propiedad, luego por la unicidad de f debemos tener que $f = id_V$. En particular $W = im(f) = im(id_V) = V$. Esto es $W = V$ o, equivalentemente, V est´a generado por $\{e_x\}_{x\in X}$. ■■

De la demostración se deduce que la independencia lineal del conjunto $\{e_x\}$ es consecuencia de la existencia de la aplicación lineal f sin necesidad de la propiedad de unicidad (lo que se llama comúnmente la propiedad “versal”). Si a esta propiedad le unimos la unicidad (propiedad universal) obtenemos que el sistema es también generador.

El recíproco del Teorema 2.3 es también cierto. Esto es:

Teorema 2.4. Sea V un $k-$espacio vectorial no nulo y sea $\{e_x\}_{x\in X} \subset V$ un subconjunto linealmente independiente y generador de V, entonces la pareja (X, ϕ) con $\phi : X \to V$ definida por $\phi(x) := e_x$ es una base de V.

La demostración de este hecho es mucho más estándar y la omitiremos. De un modo u otro este hecho se demuestra en los cursos tradicionales de Álgebra Lineal. Suele expresarse a través de la frase: una aplicación lineal de V con valores en un espacio vectorial W queda unívocamente determinada por la asignación arbitaria de valores en W a los elementos de una base $\{e_x\}$ de V.

Usando la técnica de propiedad universal se pueden demostrar las propiedades básicas y bien conocidas de bases que se deducen de la definición tradicional. Por ejemplo tenemos:

Teorema 2.5. Sean (X, ϕ) y (Y, ψ) dos bases del $k-$espacio vectorial V, entonces X y Y tienen la misma cardinalidad.

Teorema 2.6. Todo $k-$espacio vectorial V admite una base (X, ϕ).

Sin embargo, la demostración de estos dos teoremas previos, aunque sencilla, necesita el uso del Lema de Zorn. Para una demostración del Teorema 2.5 véase [5].

Teorema 2.7. Si dos $k-$espacios vectoriales V y W tienen respectivamente bases (X, ϕ) y (Y, φ) de la misma cardinalidad entonces son isomorfos.

Para ilustrar el modo usual de trabajar con propiedades universales incluimos una breve idea de la demostración:

Prueba. Por hipótesis tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"'] & V \arrow[d, dashed, "f"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"] & W, \end{tikzcd}$$

donde β es una biyección. La existencia de la aplicación lineal f está garantizada por la definición de base y considerando la composición $\varphi \circ \beta : X \to W$.

Ahora se invierten los papeles de X y Y y se usa el hecho de que Y es también base para demostrar que existe $g : W \to V$ lineal que hace conmutar el diagrama obtenido al sustituir β por β^{-1} en el anterior, esto es $g \circ \varphi = \phi \circ \beta^{-1}$.

Tenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ \phi) &= g \circ \varphi \circ \beta \\ &= \phi \circ \beta^{-1} \circ \beta = \phi. \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora notamos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[dl, dashed] \\ V & \end{tikzcd}$$

puede ser completado por las funciones $g \circ f$ e id_V. Por la unicidad de la aplicación lineal que completa el diagrama concluimos que $g \circ f = id_V$. Análogamente se comprueba que $f \circ g = id_W$. ■ ■

De este modo tiene sentido la siguiente:

Definición 2.8. Sea V un $k-$espacio vectorial, sea (X, ϕ) una base de V, entonces definimos la dimensión de V (un número cardinal) como la cardinalidad de X.

Así, por ejemplo, la dimensión del espacio vectorial de polinomios $k[T]$ es $\aleph_0$ (y no simplemente ∞ como suele decirse de un modo un tanto impreciso).

3. Aplicaciones

3.1 El $\emptyset$ es base del espacio vectorial (0)

Existen al menos tres caminos para justificar que la dimensión del espacio vectorial (0) es cero. La primera es definir la dimensión de un espacio vectorial como el máximo de la longitud de cadenas:

$$V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_l,$$

(la longitud es l) de subespacios vectoriales. Esta definición no utiliza en principio el concepto de base.

La segunda es utilizar la definición usual de base y notar que $\emptyset$ es base de (0). En efecto, la condición de independencia lineal se satisface por vacuidad y si definimos el subespacio vectorial generado por un subconjunto $S \subseteq V$ como:

$$\langle S \rangle := \cap_{S \subseteq W} W,$$

con W variando en todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S, obtenemos que $\langle \emptyset \rangle = (0)$.

Veamos ahora como la definición categórica de base puede ser utilizada para demostrar que $\emptyset$ es base de (0). Para esto debemos recordar la siguiente definición básica de Teoría de Conjuntos (vea, por ejemplo [4]):

Definición 3.1. Sean X y Y dos conjuntos, un subconjunto $f \subset X \times Y$ es una función si:

i) para todo $x \in X$ existe un $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$,

ii) si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$.

En otras palabras: a cada $x \in X$ se le asigna un único $y \in Y$. La notación usual para una función es escribir $f : X \to Y$ y $(x, f(x))$ para un elemento de f.

Un punto muy importante es que esta definición no excluye el caso $X = \emptyset$. En este caso, para todo Y, tenemos un único subconjunto $\Phi \subset X \times Y = \emptyset$, y este subconjunto satisface las condiciones i) y ii) de la Definción 2.1, simplemente por vacuidad. De este modo dado un conjunto cualquiera Y existe una única función $\Phi : \emptyset \to Y$. En términos categóricos esta propiedad se expresa diciendo que el $\emptyset$ es un objeto *inicial* o *universal* en la categoría de conjuntos.

De este modo, como una aplicación directa de la Definición Categórica de Base, obtenemos:

Corolario 3.2. Sea $V = (0)$ el $k-$espacio vectorial nulo, entonces $(\emptyset, \Phi)$ con Φ la única función $\Phi : \emptyset \to (0)$ es una base de (0). En consecuencia, $\dim_k(0) = 0$.

3.2 Teoremas de Realización

En esta última sección, como otra aplicación importante, hacemos notar que de la Definición 2.1 es inmediato deducir lo que llamamos los Teoremas de Realización. Recordemos primeramente que dado un conjunto cualquiera X y un campo k podemos definir el $k-$espacio vectorial

$$k^X := \{f : X \to k \mid f \text{ es función}\},$$

la suma y el producto por elementos de k se define de la manera usual: "punto a punto". En el caso $X = \emptyset$, obtenemos $k^\emptyset = (0)$, el espacio vectorial nulo. El lector debe notar que la asignación $X \to K^X$ define un funtor contravariante de la categoría de conjuntos en la de $k-$espacios vectoriales. Llamamos Teorema de Dualidad al siguiente resultado:

Teorema 3.3. Sea V un $k-$espacio vectorial y (X, ϕ) una base de V, si V^* denota el espacio vectorial dual de V entonces tenemos un isomorfismo:

$$V^* \simeq k^X.$$

La demostración de este teorema es realmente elemental a partir de la Definición 2.1. En efecto, si $\alpha \in k^X$ entonces $\alpha : X \to k$ es una función y por la Definición de base le corresponde una única aplicación $k-$lineal $\Lambda(\alpha) : V \to k$, esto es, $\Lambda(\alpha) \in V^*$. De este modo tenemos una función:

$$\Lambda : k^X \to V^*,$$

la cual se comprueba f´acilmente que es lineal y biyectiva.

El Teorema 3.3 pudiera llamarse también de "realización", en el sentido de que permite expresar todo espacio vectorial dual como isomorfo a un espacio de un tipo concreto. Del mismo modo tenemos este otro Teorema de Realización:

Teorema 3.4. Sea V un $k-$espacio vectorial y (X, ϕ) una base de V. Entonces

$$V \simeq k^{\oplus X}.$$

El símbolo $k^{\oplus X}$ denota al subespacio lineal $k^{\oplus X} \subset k^X$ definido por funciones con soporte finito, esto es, funciones $f : X \to k$ que se anulan en casi todos los elementos de X. La demostración del Teorema 3.4 consiste en comprobar que (X, ϕ) es una base de $k^{\oplus X}$, donde ϕ es la función $X \to k^{\oplus X}$ que envía $x \in X$ en la función $\delta_x \in k^{\oplus X}$:

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq x \\ 1 & \text{si} \quad y = x \end{cases},$$

de este modo V y $k^{\oplus X}$ tendrán una base de la misma cardinalidad y se puede aplicar el Teorema 2.7.

Referencias

[1] N. Bourbaki *Algebra* (Springer Verlag, 1989).

[2] L. C. Grove *Algebra* (Dover, 2004).

[3] T. W. Hungerford *Algebra* (Springer Verlag, GTM 73, New York, 1974).

[4] R. Rubio *Introducción a la Teoría de Conjuntos y al Formalismo en la Matemtica* (Instituto del Libro, La Habana, 1969).

[5] F. Sica, A Proof of the Dimension Theorem for Vector Spaces *http://francescosica.org*